

**T.C.**  
**DICLE ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**MAKSİMAL OPERATÖRLERİN REGÜLERLİK ÖZELLİKLERİ**



**Gülistan BUTAKIN**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**DIYARBAKIR**  
**Şubat-2020**

## TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın yürütölmesi sırasında desteğini esirgemeyen danışmanım Dr. Öğr. Üyesi Yasin KAYA'ya, yoğun çalıőmalarım esnasında sabrını ve sevgisini gösterip motivasyon desteğim olan eőime, uykusuz gecelerimde annesine rahatsızlık vermeyen kızım Beyza'ma, tez çalışmaları hakkında tecrübesinden faydalandığım arkadaşım Emetullah YAĞIZ' a, bugünlere gelmemde en çok emeği olan canım annem ve canım babama sonsuz sevgilerimi ve teőekkürlerimi sunarım.



## İÇİNDEKİLER

Sayfa

TEŞEKKÜR .....	I
İÇİNDEKİLER .....	II
ÖZET.....	III
ABSTRACT.....	IV
KISALTMA VE SİMGELER.....	V
1. GİRİŞ .....	1
2. KAYNAK ÖZETLERİ .....	3
3. MATERYAL VE METOT .....	5
3.1 Bazı Temel Kavram ve Teoremler .....	5
3.2 $L^p$ Uzaylar .....	26
3.3 Sobolev Uzayları .....	36
3.4 Schwartz Sınıfı .....	44
4. BULGULAR VE TARTIŞMA .....	47
4.1 Hardy-Littlewood Maksimal Operatörünün Sürekliliği .....	47
4.2 Hardy-Littlewood Maksimal Operatörünün Sabit Noktaları .....	57
4.3 Lipschitz Fonksiyonların Maksimal Fonksiyonu .....	61
5. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	65
6. KAYNAKLAR .....	67
ÖZGEÇMİŞ .....	71

## ÖZET

### MAKSİMAL OPERATÖRLERİN REGÜLERLİK ÖZELLİKLERİ YÜKSEK LİSANS TEZİ

Gülistan BUTAKIN

DİCLE ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI

2020

Bu çalışmanın giriş bölümünde lineer olmayan operatörlerin sınırlılığında sürekliliğinin elde etmenin mümkün olup olmadığı problemi tartışılmıştır.

Kaynak özetleri bölümünde, tezin konusuyla yakından ilgili makalelerin özeti verilmiştir.

Materyal ve metot bölümünde, tez konusunun anlaşılması için gerekli olan reel analiz, fonksiyonel analiz konuları ve bazı fonksiyon uzaylarına yer verilmiştir.

Bulgular ve tartışma bölümünde, maksimal operatörün sürekliliği,  $L^p$  uzayında  $M(f) = f$  şeklindeki sabit noktaları ve son olarak homojen uzaylarda maksimal operatörünün Lipschitz ve Hölder fonksiyonları üzerindeki davranışı incelenmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Maksimal operatör, Alt lineer operatör, Fonksiyon uzayları

## ABSTRACT

### REGULARITY PROPERTIES OF MAXIMAL OPERATORS MASTER THESIS

Gülistan BUTAKIN

UNIVERSITY OF DICLE  
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES  
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

2020

In introduction section of this study, as to whether problem of possibility to have continuity from boundedness of nonlinear operators is discussed

In abstract of bibliography section, summary of articles which are closely related with the dissertation topic were given.

In material and method section, real analysis, functional analysis topics and some function spaces which are available to understanding the dissertation were given.

In findings and discussion section, continuity of maximal operator, fixed points such as  $M(f) = f$  in  $L^p$  space and finally, we investigate the action of the maximal operator on Lipschitz and Hölder functions in the context of homogeneous spaces.

**Keywords:** Maximal operator, Sublinear operator, Function spaces

## KISALTMA VE SİMGELER

$C(\Omega)$	: Sürekli Fonksiyonlar Uzayı
$\text{diam}X$	: $X$ Kümesinin Çapı
$\text{dist}(A, B)$	: $A$ ile $B$ Kümeleri Arasındaki Uzaklık
$(f * g)(x)$	: $f$ ve $g$ Fonksiyonlarının Konvolüsyonu
$M$	: Maksimal Operatör
$L^p(\Omega)$	: $p$ . Dereceden Lebesgue İntegrallenebilir Fonksiyonlar Uzayı
$\mathbb{R}^n$	: $n$ -boyutlu Euclid Uzayı
$\text{supp}\varphi$	: $\varphi$ Fonksiyonunun Desteği
$S(\mathbb{R}^n)$	: Schwartz Fonksiyonları Sınıfı
$W^{k,p}(\Omega)$	: Sobolev Uzayı
$ \Omega $	: $\Omega$ Kümesinin Lebesgue Ölçümü
$\partial \Omega$	: $\Omega$ Bölgesinin Sınırı

## 1.GİRİŞ

Maksimal operatör, modern harmonik analizin en önemli araçlarından biridir. Bu operatör, genellikle, fonksiyonların mutlak büyüklüklerinin kestiriminde kullanılır. Literatürde en çok kullanılanlardan biri

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)| dy$$

biçiminde tanımlanan merkezi Hardy-Littlewood maksimal operatörüdür. Diğer biri

$$\tilde{M}f(x) = \sup_{x \in B} \frac{1}{|B|} \int_B |f(y)| dy$$

şeklindeki merkezi olmayan Hardy-Littlewood Maksimal operatörüdür. Bu iki maksimal operatör arasında; her  $x \in \mathbb{R}^n$  için,

$$Mf(x) \leq \tilde{M}f(x) \leq 2^n Mf(x)$$

bağıntısı vardır. Hem  $M$  hem de  $\tilde{M}$  birer alt lineer operatördür. Bir maksimal operatörünü tanımlamanın başka yolları da vardır. Örneğin tanımda geçen yuvar yerine küp almak gibi. Çoğu zaman bunlar birbirine denk olurlar. Maksimal fonksiyon alt yarı süreklidir. İlginç özelliklerinden bir tanesi, eğer bir noktada sonlu ise bu durumda hemen hemen her noktada sonlu olur.

Bir Lipschitz  $f$  fonksiyonun maksimal fonksiyonu da Lipschitz olduğu için, Rademacher teoreminden  $Mf$  hemen hemen her yerde diferansiyellenebilir olur. Ayrıca  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ve  $f(x) = \chi_{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}(x)$

ile tanımlanan fonksiyon hiçbir noktada sürekli değildir. Fakat  $Mf(x) = 1$  olur. Buradan, bu  $Mf$  her noktada sürekli hatta diferansiyellenebilir olur. Yine,  $f$  ölçülebilir iken  $Mf$  nin alt yarı sürekli olması bu operatörün bir başka regülerlik özelliğini gösterir. Ayrıca diğer alanlarda bu operatör üzerinde yapılan çalışmalar bize acaba  $Mf$  daha hangi regülerlik özelliklerine sahiptir sorusunu akla getirir.

Sınırlı bir lineer operatörün sürekli olduğu bilinmektedir, ancak, sınırlı lineer olmayan operatörler genel olarak sürekli değildir. Almgren ve Lieb (1989) daha önce sınırlı olduğu bildikleri

$$\mathcal{R}: W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \rightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$$

simetrik azalan yeniden düzenleme operatörünün,  $1 < p < n$  ve  $n > 1$  için sürekli olmadığını gösterdiler.

Maksimal operatörün,  $W^{1,p}$  den  $W^{1,p}$  ye sınırlı olduğu ilk olarak Kinnuen (1997) tarafından gösterildi. Bu nedenle Maksimal operatörün,  $1 < p < \infty$  için  $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  de sürekli olup olmadığı akla gelmiştir. Maksimal operatörler lineer operatör olmadıkları için bunların sürekliliği direkt olarak sınırlılıktan elde edilemez. Buna karşın araştırmacılar  $M$  operatörünün sürekliliğini farklı yöntemler kullanarak göstermişlerdir. Bu tez,  $M$  maksimal operatörünün  $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  uzayında sürekliliğini,  $M$  maksimal operatörünün  $L^p$  uzayındaki sabit noktaları ve maksimal operatörünün, homojen uzaylarda, Lipschitz ve Hölder fonksiyonları sınıfı üzerindeki etkileri üzerinde yapılmış olan çalışmaları ortaya koymaktadır.

## 2.KAYNAK ÖZETLERİ

Hardy-Littlewood maksimal operatörü ilk olarak  $n = 1$  için Hardy ve Littlewood (1930) tarafından verildi. Sonra Wiener (1939),  $n \geq 2$  için bu operatörü genelleştirdi.

Hardy, Littlewood ve Wiener maksimal teoremi,  $1 < p \leq \infty, L^p(\mathbb{R}^n)$  de maksimal operatörün

$$\|Mf\|_p \leq c\|f\|_p$$

sınırlı olduğunu ifade eder. Burada  $c$  sayısı  $p$  ve  $n$  ye bağlı bir sabittir.

Kinnunen (1997),  $f \rightarrow Mf$  operatörünün,  $p \in (1, \infty]$  için,  $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  de uzayında sınırlı olduğunu gösterdi. Bu makale maksimal operatörlerin regülerlik özelliklerin araştırılmasında çok etkili oldu. Hajlasz ve Onnien (2004) lokal küresel maksimal operatörün  $W^{1,p}(\Omega)$  uzayında,  $\frac{n}{n-1} < p < \infty$  durumunda, sınırlı olduğunu gösterdi. Ayrıca bu makalede çok sayıda açık soru vardır. Lurio (2007) maksimal operatörün  $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  uzayında sürekli olduğunu göstermiştir. Tanaka (2002)  $n = 1$  durumunda Kinnunen'in (1997) sonuncunun  $p = 1$  durumuna taşınabileceğini göstermiştir.

$c \in [0, \infty)$  olmak üzere  $f = c$  olduğunda  $Mf = c$  olduğu için, bu sabit fonksiyonlar  $L^\infty$  da  $M$  operatörünün birer sabit noktaları olurlar. (Korrry 2001) de, sabit olmayan bir  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$  nin,  $Mf = f$  koşulunu sağlaması için gerek ve yeter şartın

$$n \geq 3 \text{ ve } \frac{n}{n-2} < p \leq \infty$$

olduğunu tespit etmiştir. Buckley (1999) maksimal operatörlerin Lipschitz ve Hölder fonksiyonları üzerindeki etkisini homojen uzaylar bağlamında incelemiştir. Pèrez ve ark. (2018),  $p > \frac{d}{d+1}$  için, düzgün çekirdekli konvolüsyon tipli maksimal operatörlerin homojen Hardy-Sobolev  $H^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  uzaylarında sınırlı olduğunu göstermiştir.



### 3. MATERYAL VE METOT

#### 3.1. Bazı Temel Kavram ve Teoremler

**Tanım 3.1.1.**  $X$  bir küme olmak üzere, bir  $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu

- i.)  $\forall x, y \in X$  için  $d(x, y) \geq 0$
- ii.)  $\forall x, y \in X$  için  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$  dir.
- iii.)  $\forall x, y \in X$  için  $d(x, y) = d(y, x)$
- iv.)  $\forall x, y, z \in X$  için  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

özelliklerini sağlarsa bu  $d$  fonksiyonuna  $X$  üzerinde bir metrik,  $(X, d)$  çiftine de bir metrik uzay denir.

$X = \mathbb{R}^n$  olsun.  $d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$  “Öklid uzaklığı” olarak bilinir.

**Örnek 3.1.2.**  $X$  boştan farklı herhangi bir küme olsun.  $x, y \in X$  için,

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$$

ile tanımlı  $d$  fonksiyonu  $X$  üzerinde bir metrik tanımlar. Bu metriğe ayrık metrik adı verilir.

**Tanım 3.1.3.**  $X$ ,  $\mathbb{R}$  veya  $\mathbb{C}$  üzerinde bir vektör uzayı olsun.  $X$  üzerinde bir norm  $\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}$  aşağıdaki özellikleri sağlayan bir fonksiyondur.

$\forall x \in X$  elemanı ve  $\forall \lambda$  skaleri için,

- i.)  $\|x\| \geq 0$
- ii.)  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- iii.)  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
- iv.)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

**Örnek 3.1.4.)**  $\|x\| = \sum_i |x_i|$  fonksiyonu  $\mathbb{R}^n$  de bir norm belirtir.

**Tanım 3.1.5.**  $(X, d)$  bir metrik uzay  $a \in X$  ve  $r > 0$  olsun.

$$B(a, r) = \{x \in X : d(a, x) < r\}$$

kümesine  $a$  merkezli  $r$  yarıçaplı açık yuvar adı verilir.

**Tanım 3.1.6.**  $(X, d)$  bir metrik uzay  $a \in X$  ve  $r > 0$  olsun.

$$\bar{B}(a, r) = \{x \in X : d(a, x) \leq r\}$$

kümesine  $a$  merkezli  $r$  yarıçaplı kapalı yuvar adı verilir.

**Tanım 3.1.7.**  $(X, d)$  bir metrik uzay ve  $A \subset X$  olsun.  $x \in X$ ,  $A$  nın bir iç noktasıdır  $\Leftrightarrow \exists r_x > 0$  öyle ki  $B(x, r_x) \subset A$  dır.  $A$  kümesinin içi  $A^0$  ile gösterilir.

**Önerme 3.1.8.**  $(X, d)$  bir metrik uzay,  $x \in X$  ve  $r > 0$  olsun.  $A \equiv B(x, r)$  açık kümedir.

**Tanım 3.1.9.**  $(X, d)$  bir metrik uzay ve  $A \subset X$  bir küme olsun.  $x \in X$  noktası  $A$  kümesinin bir kapanış noktasıdır  $\Leftrightarrow \forall r > 0, B(x, r) \cap A \neq \emptyset$  dır.

$A$  nın tüm kapanış noktalarının kümesine  $A$  nın kapanışı denir.  $A$  kümesinin kapanışı  $\bar{A}$  ile gösterilir.

**Tanım 3.1.10.** Bir  $A \subset X$  kümesi kapalıdır  $\Leftrightarrow A = \bar{A}$  dır. Herhangi bir  $A$  kümesi  $A$  nın içi ve kapanışı arasındadır.

**Önerme 3.1.11.**  $A \subset X$  herhangi bir alt küme için,

$$A^0 \subset A \subset \bar{A}$$

olur.

**Teorem 3.1.12. (Metrik Topoloji)**  $X$  herhangi bir metrik uzay için;

- 1.)  $A = X$  ve  $A = \emptyset$  açık kümelerdir.
- 2.)  $\mathcal{Q}$ ,  $(X, d)$  nin açık kümelerinin bir ailesi olsun. Bu durumda,  $A^* \equiv \bigcup_{A \in \mathcal{Q}} A$  kümesi açıktır.
- 3.)  $\{A_1, A_2, \dots, A_k\}$  açık kümelerinin sonlu bir ailesi olsun.  $A_* \equiv \bigcap_{i=1}^k A_i$  kümesi açıktır.

**Tanım 3.1.13.**  $M_X=(X,d_X)$  ve  $M_Y=(Y,d_Y)$  metrik uzayları olsun ve  $f: X \rightarrow Y$  fonksiyonu  $x \in X$  noktasında

sürekli  $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$  için bir  $\delta_{\varepsilon,x} > 0$  bulabiliriz öyle ki,

$$d_X(x,y) < \delta_{\varepsilon,x} \Rightarrow d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

dır.

**Tanım 3.1.14.**  $(X, d)$  metrik uzayı ve  $\{x_n\}$ ,  $X$  te bir dizi olsun.  $(x_n)$  dizisi  $x \in X$  noktasına yakınsaktır  $\Leftrightarrow$  herhangi bir  $\varepsilon > 0$  için  $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$  öyle ki  $\forall n \geq N_\varepsilon$  için  $d(x_n, x) < \varepsilon$  dir.

Bu durumu  $x_n \rightarrow x$  veya  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  ile gösteririz.

**Tanım 3.1.15.**  $\|\cdot\|_1$  ve  $\|\cdot\|_2$  gibi iki norm bir  $X$  vektör uzayı üzerinde tanımlanmış olsun. Her  $x \in X$  için,

$$c_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2 \|x\|_1$$

olacak biçimde  $c_1 > 0$  ve  $c_2 > 0$  sayıları var ise bu iki norma denktir denir. Denk normlar aynı topolojiyi verirler (MacCluer 2008).

**Teorem 3.1.16.**  $X$  sonlu boyutlu bir lineer uzay ise bu durumda  $X$  üzerindeki herhangi iki norm birbirine denktir (MacCluer 2008).

**Tanım 3.1.17.**  $(X, d)$  bir metrik uzay ve  $C \subset X$  olsun.

$O \subset \{A: A \subset X\}$  bir ailesi  $C$  nin bir açık örtüsüdür  $\Leftrightarrow \forall A \in O$  için  $A$  açıktır ve  $C \subset \bigcup_{A \in O} A$  dir.

**Tanım 3.1.18.**  $(X, d)$  bir metrik uzay ve  $C \subset X$  olsun.

$C$  bir kompakt kümedir  $\Leftrightarrow C$  nin her  $O$  açık örtüsü için,

$$C \subset \bigcup_{i=1}^{i=k} A_i$$

olacak biçimde  $\{A_1, A_2, \dots, A_k\} \subset O$  sonlu sayıda kümeleri vardır.

**Tanım 3.1.19.** Bir ölçüm uzayını  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  ile göstereceğiz.  $i=1,2,3,\dots$  için  $A_i \in \mathcal{M}$  ve  $\mu(A_i) < \infty$  olmak üzere  $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$  olarak yazılabilirse  $\mu$  ye  $\sigma$  – sonlu denir.

**Tanım 3.1.20.**  $X$  bir metrik uzay (daha genel olarak bir topolojik uzay) olsun.  $X$  teki tüm açık kümeler ailesi tarafından üretilen  $\sigma$  – cebirine Borel  $\sigma$  – cebiri denir.  $B(X)$  ile gösterilir.  $B(X)$  in elemanlarına Borel kümeleri denir.

**Teorem 3.1.21.**  $X$  bir metrik uzay ve  $\mu$ , Borel kümelerinin bir  $\sigma$  – cebiri üzerindeki bir ölçümü olsun. Eğer her kompakt  $K \subset X$  için  $\mu(K) < \infty$  ve her  $E \in B(X)$  için

$$\begin{aligned} \mu(E) &= \inf \{ \mu(U) : E \subset U, U \text{ açıktır} \} \\ &= \sup \{ \mu(K) : K \subset E, K \text{ kompaktır} \} \end{aligned}$$

olursa  $\mu$  ye bir Radon ölçümüdür denir (Hajlasz 2019).

**Örnek 3.1.22.**  $X$  ayrık (diskret) metrik olsun. Böylece  $X$  in her alt kümesi açık küme olur. Bu durumda,

$$\mu(A) = \begin{cases} n, & A \text{ nın eleman sayısı } n \text{ ise} \\ \infty, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olarak tanımlanan  $\mu$  bir Radon ölçümü olur.

**Tanım 3.1.23.**  $s \geq 0$  için,  $W_s = \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(1+s/2)}$  olsun. Eğer  $s = n$  pozitif tamsayı ise bu durumda  $W_n$ ,  $\mathbb{R}^n$  deki birim yuvarın hacmi olur.

$X$  bir metrik uzay olsun.  $\varepsilon > 0$  ve  $E \subset X$  için, infimum olası tüm  $E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ ,  $\text{diam} A_i < \varepsilon$  örtümleri üzerinden alınmak üzere,

$H_\varepsilon^s(E) = \inf \frac{W_s}{2^s} \sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam} A_i)^s$  olarak tanımlanır.  $\varepsilon \rightarrow H_\varepsilon^s$  fonksiyonu artmayan olduğu için,

$H^s(E) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} H_\varepsilon^s(E)$  limiti vardır.  $H^s$  ye Hausdorff ölçümü denir (Hajlasz 2019).

Eğer  $s = 0$  olursa,  $H^0$  sayma ölçümü olur.

**Tanım 3.1.24.**  $\forall x, y \in X$  için,  $\rho(f(x), f(y)) \leq L \cdot d(x, y)$  olacak biçimde sabit bir  $L > 0$  varsa iki metrik uzay arasında tanımlanan  $f: (X, d) \rightarrow (Y, \rho)$  fonksiyonuna Lipschitz sürekli denir.

**Tanım 3.1.25.**  $N \in M$  ve  $\mu(N)=0$  olsun. Bir  $p(x)$  özelliği her  $x \in X/N$  için sağlarsa bu durumda  $p(x)$  özelliğinin hemen hemen her yerde (h.h.h.) sağladığını söyleriz.

**Teorem 3.1.26. (Lusin)**  $X$  bir metrik uzay ve  $\mu, B(X)$  te bir ölçüm öyle ki  $X$ , sayılabilir çoklukta sonlu ölçümlü açık kümelerin bir birleşimi olsun. Eğer  $f: X \rightarrow Y$  değerlerini ayrılabilir bir metrik uzayda alan bir Borel fonksiyonu ise bu durumda her  $\varepsilon > 0$  için,

$\mu(X \setminus F) < \varepsilon$ ,  $f|_F$  süreklidir.

koşulunu sağlayan bir kapalı  $F \subset X$  kümesi vardır (Hajlasz 2019).

**Teorem 3.1.27. (Lusin)**  $E \subset \mathbb{R}^n$  kümesi Lebesgue ölçülebilir olsun. Bu durumda bir  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu Lebesgue ölçülebilirdir ancak ve ancak her  $\varepsilon > 0$  için

$|E \setminus F| < \varepsilon$ ,  $f|_F$  süreklidir.

koşullarını sağlayan bir kapalı  $F \subset E$  kümesi vardır (Hajlasz 2019).

**Teorem 3.1.28.**  $\mu, \mu(X) < \infty$  biçiminde bir ölçüm olsun.  $Y$  ayrılabilir bir metrik uzay olmak üzere,  $f_n: X \rightarrow Y$  ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi olsun. Eğer h.h.h.  $f_n \rightarrow f$  ise bu durumda  $f$  ölçülebilirdir ve her bir  $\varepsilon > 0$  için

$\mu(X \setminus E) < \varepsilon$ ,  $f_n, E$  üzerinde  $f$  ye düzgün yakınsak olacak biçimde ölçülebilir bir  $E \subset X$  kümesi vardır (Hajlasz, 2019).

**Tanım 3.1.29.** Eğer her  $\varepsilon > 0$  için,

$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\{X: |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) = 0$  ise ölçülebilir  $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonuna ölçümde yakınsadığını söyleriz (Hajlasz 2019).

**Teorem 3.1.30.**  $\mu(X) < \infty$  ve ölçülebilir  $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$  dizisi h.h.h.  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  yakınsak ise bu durumda  $f_n, f$  ye ölçümde de yakınsak olur (Hajlasz 2019).

**Teorem 3.1.31.**  $f_n, f$  ye ölçümde yakınsak ise bu durumda h.h.h.  $f_{n_i} \rightarrow f$  olacak biçimde bir  $f_{n_i}$  alt dizisi vardır (Hajlasz 2019).

**Teorem 3.1.32.**  $f \in L^1(\mu)$  olsun. Bu durumda her  $\varepsilon > 0$  için

$$\mu(E) < \delta \implies \int_E |f| d\mu < \varepsilon$$

olacak biçimde bir  $\delta > 0$  vardır (Hajlasz 2019).

$\alpha > 0$  ve  $B$  bir metrik uzayda yuvar ise bu durumda  $\alpha B$   $B$  ile aynı merkezli ve yarıçapı  $B$  ninkinin  $\alpha$  katı olan yuvarı gösterir.

**Tanım 3.1.33.**  $X$  bir metrik uzay ve  $\mu, B(X)$  üzerinde bir ölçüm uzayını gösterir.

Eğer her  $B, 0 < \mu(B) < \infty$  yuvarı için  $\mu(2B) \leq C_d \mu(B)$  olacak biçimde bir  $C_d > 0$  sabiti varsa  $\mu$  ye bir doubling (ikiye katlama) ölçümü denir (Hajlasz 2019).

**Örnek 3.1.34.** Lebesgue ölçümü bir doubling ölçümdür. Ayrıca bu ölçümde  $C_d = 2^n$  alınabilir.

**Tanım 3.1.35.** Bir metrik uzaydaki her  $B(z, r)$  yuvarı yarıçapı  $\frac{1}{2}r$  olan yuvarlardan en fazla  $C$  (sabit) tanesi ile örtüne bilirse bu metrik uzaya doubling denir (Hajlasz 2019).

**Tanım 3.1.36.**  $A$  bir küme ve  $\mathcal{H}$  kapalı yuvarların bir ailesi olsun. Eğer her  $a \in A$  için,  $a \in \bar{B}$  olacak şekilde yarıçapı keyfi küçüklükte olan bir  $\bar{B} \in \mathcal{H}$  yuvarı varsa bu  $\mathcal{H}$  ailesinin  $A$  kümesini Vitali anlamında örtüğünü söyleriz.

**Teorem 3.1.37. (Vitali Örtme)**  $\mu, X$  üzerinde bir doubling ölçümü ve  $A \subset X$  ölçülebilir bir küme olsun.  $\mathcal{H}, A$  kümesini Vitali anlamında örten kapalı yuvarların bir ailesi olsun. Bu durumda,

$$\mu(A \setminus \bigcup_{\bar{B} \in T} \bar{B}) = 0$$

olacak biçimde ikişer ikişer ayrık yuvarların bir alt  $T \subset \mathcal{H}$  ailesi vardır (Hajlasz, 2019).

**Teorem 3.1.38.**  $E \subset \mathbb{R}^n$  kümesi Lebesgue ölçülebilir olsun. Bu durumda

$$|E| \leq W_n \left( \frac{\text{diam } E}{2} \right)^n$$

olur (Hajlasz 2019).

Buna izodiyametrik eşitsizliği denir.

**Teorem 3.1.39. ( Lebesgue Diferansiyellenebilme teoremi )** Eğer  $\mu$  , bir  $X$  metrik uzayı üzerinde bir doubling ölçüm ve  $\varphi \in L^1_{\text{loc}}(\mu)$  ise bu durumda  $\mu$  h.h.h.  $x \in X$  için,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\mu(B(x, r))} \int_{B(x, r)} \varphi d\mu = \varphi(x)$$

olur ( Hajlasz 2019 ).

**İspat:**  $\varphi \geq 0$  olduğunu varsayabiliriz..  $X$  ayrılabilir olduğu için,  $X$  her biri üzerinde  $\varphi$  nin integrallenebildiği, sayılabilir çoklukta yuvarların birleşimi olarak ifade edilebilir. Bu nedenle,  $\int_B \varphi d\mu < \infty$  koşulu altında  $\mu$  h. h. h.  $x \in B$  için teoremin sağladığını göstermek yeterli olur.  $A \subset B$  ölçülebilir olmak üzere her  $x \in A$  için,

$$\liminf_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\mu(B(x, r))} \int_{B(x, r)} \varphi d\mu \leq \gamma$$

olursa bu durumda  $\int_A \varphi d\mu \leq \gamma \mu(A)$  olur.

Nitekim  $\varepsilon > 0$  verildiğinde, açık  $U \subset A$  kümesi  $\mu(U) \leq \mu(A) + \varepsilon$  biçiminde olsun. Her bir  $x \in A$  için ,  $\bar{B}(x, r) \subset U$  ve

$$\frac{1}{\mu(\bar{B}(x, r))} \int_{\bar{B}(x, r)} \varphi d\mu \leq \gamma + \varepsilon$$

sağlanacak biçimde keyfi küçüklükte bir  $r > 0$  vardır.

Bu biçimdeki kapalı yuvarlar  $U$  nun bir örtümünü Vitali anlamında oluşturur. Buradan, bu örtümden

$$\mu(U \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} \bar{B}_i) = 0, \frac{1}{\mu(\bar{B}_i)} \int_{\bar{B}_i} \varphi d\mu \leq \gamma + \varepsilon$$

sağlanacak şekilde ikişer ikişer ayrıık  $\bar{B}_1, \bar{B}_2, \bar{B}_3, \dots$  kapalı yuvarlarını elde edebiliriz.

$$\int_A \varphi d\mu \leq \int_U \varphi d\mu \leq \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\bar{B}_i} \varphi d\mu \leq (\Upsilon + \varepsilon) \sum_{i=1}^{\infty} \mu(\bar{B}_i)$$

$$=(\Upsilon + \varepsilon)\mu(U) \leq (\Upsilon + \varepsilon)(\mu(A) + \varepsilon) \text{ elde edilir.}$$

$\varepsilon > 0$  keyfi olduğu için  $\int_A \varphi d\mu \leq \Upsilon\mu(A)$  olur.

Benzer biçimde,  $A \subset B$  ölçülebilir kümesi verildiğinde, her  $X \in A$  için,

$$\limsup_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\mu(B(x, r))} \int_{B(x, r)} \varphi d\mu \geq \Upsilon$$

olursa, bu durumda

$$\int_A \varphi d\mu \geq \Upsilon\mu(A)$$

olur.

$$A_{\beta, \Upsilon} = \left\{ x \in B : \liminf_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\mu(B(x, r))} \int_{B(x, r)} \varphi d\mu \leq \beta < \Upsilon \leq \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\mu(B(x, r))} \int_{B(x, r)} \varphi d\mu \right\}$$

olsun.

Bu durumda,

$$\Upsilon\mu(A_{\beta, \Upsilon}) \leq \int_{A_{\beta, \Upsilon}} \varphi d\mu \leq \beta\mu(A_{\beta, \Upsilon}) \text{ olur, böylece } \mu(A_{\beta, \Upsilon}) = 0 \text{ olur.}$$

Bundan dolayı  $\mu$  h. h. h.  $x \in B$  için,

$$\liminf_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\mu(B(x, r))} \int_{B(x, r)} \varphi d\mu = \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\mu(B(x, r))} \int_{B(x, r)} \varphi d\mu$$

elde edilir. Buradan, h.h.h.  $x \in B$  için bu limit var olur. Bu limiti  $\theta(x) =$

$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\mu(B(x, r))} \int_{B(x, r)} \varphi d\mu$  ile gösterelim.  $\mu$  h.h.h.  $x \in B$  için,  $\varphi(x) = \theta(x)$  olduğunu

göstermeliyiz. Bir  $D \subset B$  ölçülebilir kümesi ve  $\varepsilon > 0$  verilsin.  $n \in \mathbb{Z}$  için,

$$A_n = \{x \in D : (1 + \varepsilon)^n \leq \theta(x) < (1 + \varepsilon)^{n+1}\}$$

olsun.

Her  $x \in A_n$  için,

$$\limsup_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\mu(B(x,r))} \int_{B(x,r)} \varphi d\mu = \theta(x) \geq (1 + \varepsilon)^n$$

olur.

Böylece,

$$\int_{A_n} \varphi d\mu \geq (1 + \varepsilon)^n \mu(A_n)$$

olur. Ayrıca

$$\int_D \theta d\mu = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{A_n} \varphi d\mu = (1 + \varepsilon) \int_D \varphi d\mu$$

elde edilir.

Benzer biçimde,

$$\int_D \theta d\mu \geq \frac{1}{(1 + \varepsilon)} \int_D \varphi d\mu$$

olur. Böylece  $\varepsilon > 0$  keyfi olduğundan, her  $D \subset B$  ölçülebilir kümesi için

$$\int_D \varphi d\mu = \int_D \theta d\mu$$

olur. Buradan  $\mu - \text{h. h. h. } \varphi = \theta$  olur. Böylece ispat tamamlandı.

$\varphi$  ye h. h. h. eşit fonksiyon sınıfları içerisinde

$$\varphi(x) = \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\mu(B(x,r))} \int_{B(x,r)} \varphi d\mu$$

olanını seçelim. Bunu aşağıdaki tanımda kullanacağız.

**Tanım 3.1.40.**  $\varphi \in L^1_{\text{loc}}(\mu)$  olsun. Eğer,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\mu(B(x, r))} \int_{B(x, r)} |\varphi(y) - \varphi(x)| d\mu(y) = 0$$

olursa  $x \in X$  noktasına  $\varphi$  nin bir Lebesgue noktası denir.  $\mu$  bir doubling ölçüm ve  $\varphi \in L^1_{loc}(\mu)$  olmak üzere,  $\mu - h. h. x \in X$  noktası  $\varphi$  nin bir Lebesgue noktası olur.

**Teorem 3.1.41.**  $f: X \rightarrow [0, \infty]$ ,  $\mu$  ölçülebilir olsun. Bu durumda,

$f = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \chi_{A_k}$  sağlanacak şekilde  $X$  te  $\mu -$  ölçülebilir  $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$  kümeleri vardır (Evans ve Gariepy 1992).

**İspat:**  $A_1 \equiv \{x \in X: f(x) \geq 1\}$  olsun.

Sonra  $k=2,3,\dots$  için,

$$A_k = \left\{ x \in X: f(x) \geq \frac{1}{k} + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j} \chi_{A_j} \right\}$$

olsun.

$$f \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \chi_{A_k}$$

olur.

Eğer  $f(x) = \infty$  ise bu durumda her  $k$  için  $x \in A_k$  olur. Diğer taraftan  $0 < f(x) < \infty$  ise bu durumda sonsuz tane  $n$  için,  $x \notin A_n$  durumu ortaya çıkar. Buradan sonsuz tane  $n$  için,

$$0 \leq f(x) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \chi_{A_k} \leq \frac{1}{n}$$

elde edilir.

Bir  $f$  fonksiyonu verilsin.  $a$  noktası  $f$  nin tanım kümesinin bir yığılma noktası olsun.  $x \rightarrow a$  için  $f(x)$  nin limit supremum ve limit infimumunu tanımlayabiliriz.

Herhangi bir  $\delta > 0$  verilsin.

$\Omega_{\delta} = \{f(x): x \text{ hem } f \text{ nin tanım kümesinin elemanı hem de } 0 < |x - a| < \delta \text{ eşitsizliğini sağlar}\}$ . Bu durumda,

$$\limsup_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \sup \Omega_\delta \text{ ve } \liminf_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \inf \Omega_\delta \text{ olur (Kane 2016).}$$

Burada,  $\sup \Omega_\delta$  ve  $\inf \Omega_\delta$ ,  $\delta$  ya göre monotondurlar. Bu nedenle  $\delta \rightarrow 0^+$  için bu limitler her zaman var olurlar. Ayrıca,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \limsup_{x \rightarrow a} f(x) \text{ ve } \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = \liminf_{x \rightarrow a} f(x)$$

olacak biçimde bir  $\{x_n\} \rightarrow a$  ve bir  $\{y_n\} \rightarrow a$  dizileri vardır (Kane 2016).

Benzer tanımlar,  $\liminf_{x \rightarrow a^+} f(x)$ ,  $\limsup_{x \rightarrow a^+} f(x)$ ,  $\liminf_{x \rightarrow a^-} f(x)$  ve  $\limsup_{x \rightarrow a^-} f(x)$  için de yapılabilir.

**Teorem 3.1.42.**  $a$ ,  $f$  nin tanım kümesinin bir yığılma elemanı olsun. Bu durumda

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow \liminf_{x \rightarrow a} f(x) = \limsup_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

dir (Kane 2016).

$\Omega \neq \emptyset$  ve  $\mathcal{F}$  bir fonksiyon ailesi olsun. Ayrıca her bir  $f \in \mathcal{F}$  için,  $(\Lambda_f, \tau_f)$  bir topolojik uzay ve  $f: \Omega \rightarrow \Lambda_f$  olsun. Şimdi şu soruya yanıt arayalım:  $\Omega$  nın sahip olabileceği topolojiler içerisinde, tüm  $f \in \mathcal{F}$  lerin sürekli olmasını garanti eden (bir) en zayıf topoloji var mıdır? Eğer  $\mathbb{T}$ ,  $\Omega$  üzerinde boştan farklı topolojilerin bir koleksiyonu ise bu durumda,

$$\bigcap_{\tau \in \mathbb{T}} \tau$$

kesişimi de  $\Omega$  üzerinde bir topoloji olduğu için bu soruya olumlu cevap mümkün olmaktadır.

**Tanım 3.1.43.**  $\Omega \neq \emptyset$  biçiminde bir küme olsun.  $\mathcal{F}$  fonksiyonların bir ailesi, her bir  $f \in \mathcal{F}$  için  $(\Lambda_f, \tau_f)$  bir topolojik uzay ve  $f: \Omega \rightarrow \Lambda_f$  olsun.  $\mathbb{T}$ ,  $\Omega$  üzerinde  $\mathcal{F}$  deki tüm fonksiyonların sürekli olduğu topolojilerin koleksiyonu olsun. Bu durumda

$$\tau_{\mathcal{F}} = \bigcap_{\tau \in \mathbb{T}} \tau$$

topolojisine  $\mathcal{F}$  ailesi tarafından belirlenen zayıf topoloji denir (McDonald ve Weiss, 2012). Böylece  $\tau_{\mathcal{F}}$ , her  $f \in \mathcal{F}$  nin  $\Omega$  üzerinde sürekli olduğu en zayıf topoloji olur (McDonald ve Weiss 2012).

**Tanım 3.1.44.**  $\Omega$  bir topolojik uzay ve  $E \subset \Omega$  olsun. Eğer  $E$  kümesinin her açık örtüsü sonlu bir alt örtüye sahip ise bu  $E$  kümesine kompakttır denir.  $\Omega$  kümesinin kendisi kompakt ise buna kompakt topolojik uzay denir.

**Tanım 3.1.45.**  $O$ ,  $(\Omega, d)$  metrik uzayının bir açık örtüsü olsun. Eğer her bir  $x \in \Omega$  için,  $B(x, \lambda)$  yuvarı tamamen  $O$  nun bir elemanının içinde kalıyorsa bu  $\lambda$  sayısına  $O$  örtümünün Lebesgue sayısıdır denir (Singh 2013).

**Teorem 3.1.46.**  $(\Omega, d)$  kompakt bir metrik uzay olsun. Bu durumda  $\Omega$  nın her açık örtüsü bir Lebesgue sayısına sahip olur (Singh 2013).

**Teorem 3.1.47.**  $\mathbb{R}^n$  de bir  $f$  fonksiyonu ölçülebilir ve  $f(x) \geq 0$  ise bu durumda

$$\mu(A) = \int_A f(x) dx$$

küme fonksiyonu Lebesgue  $\sigma$  – cebiri üzerinde bir ölçüm olur.

Şimdi Rademacher teoremi ve ispatı verelim.

**Teorem 3.1.48.**  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  bir açık küme olmak üzere, eğer  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  bir Lipschitz sürekli ise bu durumda  $u$ , h.h.h. diferansiyellenebilir. Yani h.h.h.

$$\nabla u(x) = \left( \frac{\partial u}{\partial X_1}(x), \frac{\partial u}{\partial X_2}(x), \dots, \frac{\partial u}{\partial X_n}(x) \right)$$

vardır, ve h.h.h.  $x \in \Omega$  için,

$$\lim_{y \rightarrow x} \frac{u(y) - u(x) - \nabla u(x) \cdot (y - x)}{\|y - x\|} = 0$$

olur (Hajlasz 2019).

**İspat:**  $S^{n-1}$ ,  $\{x \in \mathbb{R}^n: \|x\| = 1\}$  birim yuvarını göstereceğiz.

$$v \in S^{n-1} \text{ ve } D_v U(x) = \left. \frac{d}{dt} u(x + tv) \right|_{t=0}$$

yönlü türevi gösterebilirsin.

$$\limsup_{t \rightarrow 0} \frac{u(x+tv) - u(x)}{t} \text{ ve } \liminf_{t \rightarrow 0} \frac{u(x+tv) - u(x)}{t}$$

Borel ölçülebilir fonksiyonları eşit olduğunda  $D_v u(x)$  var olacağından,

$$A_v = \{x \in \Omega: D_v u(x) \text{ yoktur}\}$$

kümesi Borel ölçülebilir olur.  $t \rightarrow u(x + tv)$  fonksiyonu mutlak sürekli olduğu için h.h.h. de diferansiyellenebilir olur. Böylece  $A_v$  kümesinin  $v$  ye paralel herhangi bir doğru ile kesişimi bir boyutlu sıfır ölçümlü olur. Buradan Fubini teoreminden  $A_v$  nin ölçümü sıfır olur. Bu nedenle her  $v \in S^{n-1}$  için, h.h.h.  $x \in \Omega$  için,  $D_v u(x)$  var olur. Herhangi bir  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$  alalım, yeteri kadar küçük her bir  $h > 0$  için,

$$\int_{\Omega} \frac{u(x + hv) - u(x)}{h} \varphi(x) dx = - \int_{\Omega} \frac{\varphi(x - hv) - \varphi(x)}{-h} u(x) dx$$

olur. Ötelemeye göre integral değişmediğinden,

$$\int_{\Omega} u(x + hv) \varphi(x) dx = \int_{\Omega} \varphi(x - hv) u(x) dx$$

olur, ve tüm  $x \in \text{supp} \varphi$  için  $h$ ,  $x + hv \in \Omega$  olmasını sağlayacak küçüklükte olmalıdır. Dominant yakınsaklık teoreminden,

$$\int_{\Omega} D_v u(x) \varphi(x) dx = - \int_{\Omega} u(x) D_v \varphi(x) dx$$

elde edilir. Bu herhangi bir  $v \in S^{n-1}$  için doğrudur ve özel olarak  $i=1,2,\dots,n$  için

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \varphi(x) dx = - \int_{\Omega} u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx$$

olur.

Böylece,

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} D_v u(x) \varphi(x) dx &= - \int_{\Omega} u(x) D_v \varphi(x) dx \\ &= - \int_{\Omega} u(x) (\nabla \varphi(x) \cdot v) dx \\ &= - \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) v_i dx \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \varphi(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) v_i dx \\ &= \int_{\Omega} \varphi(x) (\nabla u(x) \cdot v) dx\end{aligned}$$

olur.

**Teorem 3.1.49. (Young Eşitsizliği)**  $1 < p, q < \infty$  ve  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  olsun. Bu durumda herhangi  $a, b \geq 0$  için,

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

olur (Carl ve ark. 2007)

**Teorem 3.1.50. (Urysohn Lemması)**  $E$  ve  $F$ , bir  $X$  metrik uzayının ayrık ve kapalı birer alt kümesi olsunlar. Bu durumda,

- i.)  $X$  üzerinde,  $0 \leq f \leq 1$ ,
- ii.)  $E$  üzerinde,  $f = 0$ ,
- iii.)  $F$  üzerinde,  $f = 1$

koşullarını sağlayan sürekli bir  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu vardır (Cannon 2017).

**Tanım 3.1.51.**  $\{x_n\}$ ,  $X$  metrik uzayında bir dizi olsun. Eğer  $\forall \varepsilon > 0$  için,

$$\text{her } m, n > N \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

koşulunu sağlayacak biçimde bir  $N \in \mathbb{N}$  varsa bu  $\{x_n\}$  dizisine bir Cauchy dizisidir denir.

**Tanım 3.1.52.** Eğer  $X$  metrik uzayındaki her Cauchy dizisi  $X$  te yakınsak ise bu metrik uzaya tamdır denir. Ayrıca, bir tam normlu uzaya bir Banach uzayı ve bir tam iç çarpım uzayına bir Hilbert uzayı denir.

Bir  $X$  iç çarpım uzayında  $x \in X$  için norm

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

olarak tanımlanır. Bu norma iç çarpımdan türetilmiştir denir.

**Teorem 3.1.53.** Bir normlu vektör uzayın her sonlu boyutlu alt uzayı tamdır.

**Tanım 3.1.54.**  $X$  ve  $Y$  aynı  $\mathbb{F}$  cismi üzerinde birer vektör uzayları olsunlar. Eğer bir

$T: X \rightarrow Y$  fonksiyonu; her  $x, y \in X$  ve her  $\alpha \in \mathbb{F}$  skaleri için,

i.)  $T(x + y) = T(x) + T(y)$

ii.)  $T(\alpha x) = \alpha T(x)$

koşullarını sağlarsa buna bir lineer dönüşüm veya lineer operatör denir.

Ayrıca,  $Y = \mathbb{F}$  olma özel durumuna,  $T$  ye lineer fonksiyonel denir.

$X$  ten  $Y$  ye lineer olan tüm dönüşümler kümesini  $L(X, Y)$  ile gösteririz.

**Tanım 3.1.55.**  $T: X \rightarrow Y$  bir lineer dönüşüm olmak üzere, eğer her  $x \in X$  için

$$\|T(x)\| \leq c\|x\|$$

sağlanacak biçimde bir  $c \geq 0$  sayısı varsa  $T$  ye sınırlıdır denir. Sınırlı bir lineer  $T$  operatörün normu,

$$\|T\| = \inf \{ c: \|T(x)\| \leq c\|x\|, \forall x \in X \}$$

$\forall x \notin 0$  için,

$$T(x) = T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\|x\|$$

yazılabileceğinden, buradan  $T$  nin sınırlı olması için yeter koşul  $T$  nin  $\{x: \|x\| \leq 1\}$  kapalı birim yuvarı üzerinde sınırlı bir fonksiyon olmasıdır.

$X$  ten  $Y$  ye tüm sınırlı lineer dönüşümler kümesini  $B(X, Y)$  ile gösteririz.

**Teorem 3.1.56.** Bir lineer dönüşüm sınırlıdır ancak ve ancak bu lineer dönüşüm süreklidir ( Heil 2018 ).

**Teorem 3.1.57.**  $X$  sonlu boyutlu ve  $Y$  normlu bir vektör uzayı olsun. Bu durumda her  $T: X \rightarrow Y$  lineer dönüşümü sürekli (sınırlı) olur (Bollobás 1990).

**Tanım 3.1.58.**  $X$  normlu bir vektör uzayı olsun.  $X^*=B(X \rightarrow \mathbb{F})$  ye  $X$  in (süreklili) dual uzayı denir.  $X^*$  nin elemanlarına sürekli (sınırlı) lineer fonksiyoneller denir.

$X$  ve  $Y$  normlu vektör uzayları olsun.  $\{T_n\}$  operatör dizisi

$\forall x \in X$  için  $\{T_n(x)\}$  yakınsaktır,

özelliğini sağlayacak şekilde  $B(X, Y)$  de bir dizi olsun.

Bu durumda  $T: X \rightarrow Y$  ve her bir  $x \in X$  için,

$$T(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x)$$

olarak tanımlanan dönüşüm bir lineer operatör olur. Ancak  $T$ ,  $B(X, Y)$  nin elemanı olmak zorunda değildir.  $B(X, Y)$  deki  $\{T_n\}$  noktasal olarak  $X$  üzerinde yakınsak olsun.

$x \in X$  için,

$$T(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x)$$

olarak tanımlanan limitleme operatörünün sürekli olmasını sağlamak için yeterli bir koşul  $\{T_n\}$  nin düzgün sınırlı olmasıdır, yani  $\{\|T_n\|\}$  dizisinin sınırlı olmasıdır.

$\{T_n\}$  düzgün sınırlı,  $\forall n \in \mathbb{N}, \|T_n\| \leq M$  diyelim, ise bu durumda her  $x \in X$  için,

$$\|T(x)\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n(x)\| \leq M\|x\|$$

olur, buradan  $T$  sürekli ve  $\|T\| \leq M$  olur ( Thamban 2009 ).

Bir limit noktasına sahip olan bir  $\Lambda \subset \mathbb{R}$  kümesi alınarak yukarıdaki gözlem daha genel bir bağlamda  $\{T_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  operatörleri için incelenebilir. Bu amaçla aşağıdaki tanımı yapalım

$X$  normlu bir lineer uzay  $\Lambda \subset \mathbb{R}$ ,  $\alpha_0$ ,  $\Lambda$  nın bir limit noktası ve her  $\alpha \in \Lambda$  için  $x_\alpha \in X$  olsun.

Eğer her  $\varepsilon > 0$  için,

$$\alpha \in \Lambda_\varepsilon, \quad |\alpha - \alpha_0| < \delta \implies \|x - x_\alpha\| < \varepsilon$$

olacak biçimde bir  $\delta > 0$  varsa  $\alpha \rightarrow \alpha_0$  için  $\{x_\alpha\}$  nın  $x \in X$  noktasına yakınsadığını söyleriz. Bunu

$$\alpha \rightarrow \alpha_0 \text{ için } x_\alpha \rightarrow x \text{ veya } \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} x_\alpha = x$$

yazarız.

$\{\|T_\alpha\|\}_{\alpha \in \Lambda}$  kümesi  $\mathbb{R}$  de sınırlı ise  $B(X, Y)$  deki  $\{T_\alpha\}$  operatör ailesinin düzgün sınırlı olduğunu söyleriz. Ayrıca her  $x \in X$  için,  $\alpha \rightarrow \alpha_0$  olduğunda  $\{T_\alpha(x)\}$  yakınsak ise  $\{T_\alpha\}$  nın  $\alpha \rightarrow \alpha_0$  için,  $X$  üzerinde noktasal yakınsak olduğunu söyleriz (Thamban 2009).

**Teorem 3.1.59.**  $X$  ve  $Y$  normlu lineer uzaylar,  $\alpha_0$ ,  $\Lambda \subset \mathbb{R}$  alt kümesinin bir limit noktası  $\{T_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ ,  $B(X, Y)$  de düzgün sınırlı operatörlerin bir ailesi olsun. Eğer,  $\alpha \rightarrow \alpha_0$  için  $\{T_\alpha\}$ ,  $X$  üzerinde noktasal yakınsak ise bu durumda

$$T: X \rightarrow Y, x \in X \text{ için } T(x) = \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} T_\alpha(x)$$

olarak tanımlanan operatör  $B(X, Y)$  nin bir elemanı olur (Thamban 2009).

Yakınsaklığı tüm uzay olan  $X$  i almak yerine  $X$  in yoğun bir alt kümesini aldığımızda yukarıdaki durumun geçerliliğin hangi durumda gerçekleşeceğini bize aşağıdaki teoremden söyleyecektir.

**Teorem 3.1.60.**  $X$  normlu bir lineer uzay,  $Y$  bir Banach uzayı ve  $\{T_n\}$ ,  $B(X, Y)$  de düzgün sınırlı bir dizi olsun.  $D \subset X$  alt kümesi  $X$  te yoğun ve her  $x \in D$  için  $\{T_n(x)\}$  yakınsak ise bu durumda her  $x \in X$  için  $\{T_n(x)\}$  yakınsak ve

$$T: X \rightarrow Y, x \in X \text{ için } T(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x)$$

olarak tanımlanan operatör  $B(X, Y)$  nin elemanı olur. Daha genel olarak aşağıdaki teorem geçerlidir (Thamban 2009).

**Teorem 3.1.61.**  $X$  normlu bir lineer uzay ve  $Y$  bir Banach uzayı olsun.  $\Lambda \subset \mathbb{R}$  alt kümesinin bir limit noktası  $\alpha_0$  ve  $\{T_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}, B(X, Y)$  de düzgün sınırlı bir operatör ailesi olsun.  $D \subset X$  alt kümesi  $X$  te yoğun ve her  $x \in D$  için  $\alpha \rightarrow \alpha_0$  olduğunda  $\{T_\alpha(x)\}$  yakınsak olsun. Bu durumda her  $x \in X$  için,  $\alpha \rightarrow \alpha_0$  olduğunda  $\{T_\alpha(x)\}$  yakınsak ve

$$T: X \rightarrow Y, x \in X, T(x) = \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} T_\alpha(x)$$

operatörü  $B(X, Y)$  nin bir elemanı olur (Thamban 2009).

$\{T_n\}$  nin noktasal yakınsaklığı  $\{\|T_n\|\}$  sınırlı olmasını garanti etmediğini biliyoruz. Eğer  $X$  uzayı tam ise bu durumda  $\{T_n\}$  nin noktasal yakınsaklığı  $\{\|T_n\|\}$  nin sınırlı olmasını gerektirir (garanti eder). Bu düzgün yakınsaklık prensibinin esasını oluşturur.

**Teorem 3.1.62. (Düzgün yakınsaklık prensibi)**  $X$  bir Banach uzayı,  $Y$  bir normlu lineer uzay ve  $\{T_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}, B(X, Y)$  nin alt kümesi olsun. Eğer her  $x \in X$  için  $\{\|T_\alpha\|\}_{\alpha \in \Lambda}$  sınırlı ise bu durumda  $\{T_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  düzgün sınırlı olur (Thamban 2009).

**Teorem 3.1.63. (Banach Steinhaus Teoremi)**  $X$  ve  $Y$  normlu lineer uzaylar,  $\alpha_0, \Lambda \subset \mathbb{R}$  nin bir limit noktası ve  $\{T_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}, B(X, Y)$  nin alt kümesi olsun. Eğer  $X$  bir Banach uzayı ve her  $x \in X$  için,  $\alpha \rightarrow \alpha_0$  olduğunda  $\{T_\alpha(x)\}$  yakınsak ise bu durumda  $\{T_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  düzgün sınırlı ve

$$T: X \rightarrow Y, x \in X, T(x) = \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} T_\alpha(x)$$

$B(X, Y)$  nin elemanı olur (Bachman ve Narici 1998), (Thamban 2009).

Sınırlı olmayan lineer operatörler içerisinde kapalı lineer operatörler özel bir öneme sahiptir.  $X$  ve  $Y$  normlu lineer uzaylar olmak üzere, eğer  $T: X \rightarrow Y$  sürekli bir lineer operatör ise bu durumda  $X$  te bulunan ve  $X$  te  $x_n \rightarrow x$  koşulunu sağlayan her  $\{x_n\}$  dizisi için  $Y$  de  $T(x_n) \rightarrow T(x)$  olduğunu biliyoruz. Özel bir durum olarak,  $X \times Y$  nin bir alt kümesi olan  $T$  operatörünün grafiği

$$G(T) = \{(x, T(x)): x \in X\}$$

olan küme  $(x,y) \in X \times Y$  için ,  $\|(x,y)\| = \|x\| + \|y\|$  normuna göre kapalıdır.

$X$  ve  $Y$  normlu iki lineer uzay olmak üzere,  $X_0$ ,  $X$  in bir alt uzayı ve  $T: X_0 \rightarrow Y$  bir lineer operatör olsun. Eğer  $T$  nin grafiği

$$G(T) = \{(x, T(x)): x \in X_0\}$$

$X \times Y$  çarpım uzayında kapalı ise bu durumda  $T$  ye bir kapalı lineer operatör denir.

Böylece bir  $T: X_0 \rightarrow Y$  lineer operatörü kapalı bir lineer operatördür ancak ve ancak  $X_0$  daki her  $\{x_n\}$  dizisi için

$$X \text{ te } x_n \rightarrow x, Y \text{ de } T(x_n) \rightarrow y \implies x \in X, T(x) = y$$

olmasıdır.

**Örnek 3.1.64.**  $X = C^1[0,1]$  ,  $[0,1]$  üzerinde sürekli olarak diferansiyellenebilir tüm fonksiyonların lineer uzayı ve  $Y = C[0,1]$ ,  $[0,1]$  üzerindeki tüm sürekli fonksiyonlar lineer uzayı olsun. Bu iki uzay üzerindeki norm  $\|\cdot\|_\infty$  supremum normu olsun.

$$T: X \rightarrow Y \text{ ve } f: X \rightarrow \mathbb{F}$$

$T(x) = x'$  ve  $f(x) = x'(1)$ ,  $x \in X$  olarak tanımlansın. Bu durumda  $T$  ve  $f$  lineer olur.  $n \in \mathbb{N}$  için ,  $x_n(t) = t^n$  olmak üzere  $\|x_n\|_\infty = 1$  ,  $\|T(x_n)\|_\infty = n$  ,  $|f(x_n)| = n$  olur ( Thamban 2009 ).

$E = \{x_n: n \in \mathbb{N}\}$ ,  $X$  te sınırlı olur, fakat bunun  $T$  ve  $f$  altındaki görüntüsü sınırlı değildir.

**Örnek 3.1.65.**  $X = Y = C[0,1]$ ,  $X_0 = C^1[0,1]$  ve  $T$  ve  $f$  hemen önceki örnekteki gibi tanımlansın. Bu durumda  $f$  ne sürekli ne de kapalıdır fakat  $T$  kapalı lineer bir operatör olur ( Thamban 2009 ).

Kapalı grafik teoremi, kapalı bir lineer operatörün sürekli olması için bir kriter sunmaktadır.

**Teorem 3.1.66.**  $X$  ve  $Y$  iki Banach uzayı ve  $X_0$ ,  $X$  in bir alt uzayı olsun. Bu durumda bir  $T: X_0 \rightarrow Y$  kapalı lineer operatörü süreklidir ancak ve ancak  $X_0$ ,  $X$  te kapalıdır (Thamban 2009).

**Teorem 3.1.67. (Açık Dönüşüm Teoremi)**  $X$  ve  $Y$  Banach uzayları ve  $T \in B(X, Y)$  olsun. Eğer  $T$  örten ise bu durumda  $T$  bir açık dönüşümdür, yani  $A$  kümesi  $X$  te bir açık küme olduğunda  $T(A)$  kümesi de  $Y$  de açık bir küme olur ( McDonald ve Weiss 2012 ).

**Teorem 3.1.68. (Hahn-Banach Teoremi)**  $X_0, X$  normlu lineer uzayın bir alt uzayı ve  $g \in X_0^*$  (dual uzay) olsun. Bu durumda

$$\|f\| = \|g\|$$

ve her  $x \in X_0$  için  $f(x) = g(x)$  koşullarını sağlayan bir  $f \in X^*$  vardır (Thamban 2009).

$X$  ve  $Y$  iki normlu lineer uzay ve  $T: X \rightarrow Y$  bir lineer operatör olsun. Bu durumda,  $T$  nin sınırlı bir operatör olması için gerek ve yeter koşul  $X$  teki her sınırlı  $E$  kümesi için  $T(E)$  kümesinin  $Y$  de sınırlı olmasıdır. Böylece  $T(E)$  nin kapanışı kapalı ve sınırlı olur. Eğer  $X$  teki her sınırlı  $E$  kümesi için  $T(E)$  nin kapanışı kompakt bir küme ise bu durumda  $T$  ye kompakt operatör denir.

Kompakt bir operatörün denk bir tanımı şöyle verilebilir:  $X$  teki her sınırlı  $\{x_n\}$  dizisi için,  $\{T(x_{n_i})\}$ ,  $Y$  de yakınsak olacak biçimde bir  $\{x_{n_i}\}$  alt dizisinin var olmasıdır. (Thamban 2009).

Ayrıca her kompakt operatör, bir sınırlı operatördür.

**Teorem 3.1.69.**  $I: X \rightarrow X$  birim operatörü kompakttır ancak ve ancak  $X$  sonlu boyutludur (Kress 2012).

**Teorem 3.1.70. (Jensen Eşitsizliği)**  $A \subset \mathbb{R}^n$  ölçülebilir, sınırlı bir küme,  $G: A \rightarrow \mathbb{R}$  integrallenebilir ve  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  konveks bir fonksiyon olsun. Ayrıca  $g \circ G: A \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu da integrallenebilir olsun. Bu durumda,

$$g\left(\frac{1}{|A|} \int_A G(x) dx\right) \leq \frac{1}{|A|} \int_A g(G(x)) dx$$

olur (Jost 2006).

**Teorem 3.1.71. (Dini)**  $K$  bir metrik uzayın bir kompakt alt kümesi olsun. ( $n \in \mathbb{N}$ ),  $f_n: K \rightarrow \mathbb{R}$  sürekli fonksiyonları her  $x \in K$  ve  $n \in \mathbb{N}$  için

$$f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$$

koşulunu sağlasın. Ayrıca,

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

var ve  $f: K \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu da sürekli olsun. Bu durumda  $f_n$ ,  $K$  üzerinde  $f$  ye düzgün yakınsak olur (Jost 2006).

**Tanım 3.1.72.**  $X$  bir metrik uzay ve  $x \in X$  olsun.  $f: X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  fonksiyonu verilsin. Eğer  $c < f(x)$  koşulunu sağlayan her  $c \in \mathbb{R}$  için  $x$ 'in bir  $U$  komşuluğu var ve her  $y \in U$  için  $c < f(y)$  oluyorsa bu durumda  $f$  ye  $X$  noktasında alt yarı süreklidir denir.  $X = \mathbb{R}$  için, bu durum şöyle ifade edilebilir:

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ ,  $|x - y| < \delta$  koşulunu sağlayan her  $y$  için  $f(x) - f(y) < \varepsilon$  dir. Eğer  $f$ , her  $x \in X$  noktasında, alt yarı sürekli ise  $f$  ye  $X$  üzerinde yarı süreklidir denir (Jost 2006).

Yine  $f: X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  fonksiyonu verilsin. Eğer  $-f$ ,  $X$  noktasında alt yarı sürekli ise  $f$  ye  $X$  noktasında üst yarı süreklidir denir. Denk olarak  $c > f(x)$  koşulunu sağlayan her  $c \in \mathbb{R}$  için  $X$  in bir  $U$  komşuluğu var ve her  $y \in U$  için  $c > f(y)$  dir.

$f: X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  nin alt yarı sürekli olması şu anlama gelmektedir. Her  $c \in \mathbb{R}$  için,  $f^{-1}((c, \infty]) = \{x \in X: c < f(x)\}$  kümesi  $X$  te açıktır (Jost 2006).

**Örnek 3.1.73.**  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  süreklidir ancak  $f$  alt ve üst yarı süreklidir.

**Örnek 3.1.74.**  $A \subset X$  olsun.

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \in X \setminus A \end{cases}$$

Olsun.  $\chi_A$  alt yarı sürekli olduğunda  $A$  açık küme olur, üst yarı sürekli olduğunda  $A$  kümesi kapalı olur.

**Örnek 3.1.75.**  $f, x_0$  noktasında bir yerel minimuma sahip ise bu durumda  $x_0$  in bir komşuluğunda  $f(x) \geq f(x_0)$  olduğundan,  $f, x_0$  da alt yarı sürekli olur.

Alt yarı süreklilik için dizisel kriter şöyle verilmektedir:

$f: X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ,  $x \in X$  te alt yarı süreklidir ancak ve ancak  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  koşulunu sağlayan her  $\{x_n\} \subset X$  dizisi için,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \geq f(x)$$

olmasıdır (Jost 2006).

Alt yarı sürekli bir fonksiyon, bir  $K$  kompakt kümesi üzerinde infimum değerini alır.

**Teorem 3.1.76.**  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  için aşağıdakiler denktir.

i) a)  $f$  alt yarı süreklidir.

b) Her  $x \in \mathbb{R}^n \setminus K$  için,  $f(x) > 0$  olacak biçimde bir kompakt  $K \subset \mathbb{R}^n$  kümesi vardır.

ii.) Her  $x \in \mathbb{R}^n$  için,  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  olacak biçimde, monoton artan sürekli ve kompakt desteğe sahip fonksiyonlar bir  $\{f_n\}$  dizisi vardır (Jost 2006).

Benzer bir durum üst yarı sürekli fonksiyonlar için şöyledir.

**Teorem 3.1.77.**  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  için aşağıdakiler denktir.

i.) a)  $f$  üst yarı süreklidir.

b) Bir  $K \subset \mathbb{R}^n$  kompakt kümesi dışında  $f(x) < 0$  dır.

ii.) Her  $x \in \mathbb{R}^n$  için,  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  olacak biçimde monoton azalan, sürekli ve kompakt desteğe sahip bir  $\{f_n\}$  dizisi vardır (Jost 2006).

### 3.2. $L^p$ Uzayları

$1 \leq p < \infty$  olmal üzere,  $L^p(X, M, \mu)$  uzayı,

$$\int_X |f(x)|^p d\mu(x) < \infty$$

koşulunu sağlayan  $X$  üzerindeki tüm ölçülebilir kompleks değerli fonksiyonlardır. Bu uzayda  $f$  nin normu;

$$\|f\|_{L^p(X,M,\mu)} = (\int_X |f(x)|^p d\mu(x))^{1/p}$$

ile tanımlanır.

$p=2$  durumu bir Hilbert uzayını verir.

**Örnek 3.2.1.**  $X = \mathbb{R}^n$  ve  $\mu$  Lebesgue ölçümü durumunda,

$$\|f\|_{L^p} = (\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p d(x))^{1/p}$$

olur.

$p=\infty$  durumu,

$L^\infty(X, M, \mu)$  uzayı  $X$  üzerinde ölçülebilir fonksiyonlardan oluşur, öyle ki hemen hemen her yerde  $|f(x)| \leq C$  olacak şekilde bir  $C \in (0, \infty)$  vardır.

$$\|f\|_{L^\infty(X,M,\mu)} = \inf\{ C: \text{h. h. h. } |f(x)| \leq C \}$$

$\|f\|_{L^\infty}$  niceliğine  $f$  nin esas supremumu da denir. Bu tanımda h.h.h.  $|f(x)| \leq \|f\|_{L^\infty}$  olmaktadır.

$E = \{X: |f(x)| > \|f\|_{L^\infty}\}$  ve  $E_n = \{X: |f(x)| > \|f\|_{L^\infty} + \frac{1}{n}\}$  ise bu durumda

$\mu(E_n) = 0$  ve  $E = \cup E_n$  olur. Buradan  $\mu(E) = 0$  dir.

$1 \leq p, q \leq \infty$  ve  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  ise  $p$  ile  $q$  üslerinin birbirlerinin dualidir (eşlenik) denir.

**Teorem 3.2.2. (Hölder)**  $1 \leq p \leq \infty, 1 \leq q \leq \infty$  ve birbirlerinin duali olsun.  $f \in L^p$  ve  $g \in L^q$  ise bu durumda  $fg \in L^1$  olur ve

$$\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \cdot \|g\|_{L^q}$$

eşitsizliği sağlanır (Folland 2013).

**Teorem 3.2.3. (Minkowski)**  $1 \leq p \leq \infty$  ve  $f, g \in L^p$  ise bu durumda  $f + g \in L^p$  ve

$$\|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}$$

eşitsizliği sağlanır (Folland 2013).

**Teorem 3.2.4.**  $L^p(X, M, \mu)$  uzayı  $\|\cdot\|_{L^p}$  normunda tamdır. Böylece bu uzay Banach uzayı olur (Folland 2013).

**Önerme 3.2.5.** Eğer  $X$  in ölçümü sonlu ve  $p_0 \leq p_1$  ise bu durumda  $L^{p_1}(X) \subset L^{p_0}(X)$  ve

$$\frac{1}{\mu(X)^{1/p_0}} \|f\|_{L^{p_0}} \leq \frac{1}{\mu(X)^{1/p_1}} \|f\|_{L^{p_1}}$$

sağlanır.

**Teorem 3.2.6.**  $1 \leq p \leq \infty$  ve  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  ise bu durumda  $L^p$  uzayının dual uzayı  $L^q$  olur.

Bunu şu şekilde yorumlarız;

$L^p$  üzerindeki her bir  $\ell$  lineer fonksiyoneli için bir (tek)  $g \in L^q$  vardır. Öyle ki her  $f \in L^p$  için,

$\ell(f) = \int_X f(x) \cdot g(x) d\mu(x)$  olmaktadır. Ayrıca  $\|\ell\|_{L^{p^*}} = \|g\|_{L^q}$  dir.

**Tanım 3.2.7.**  $(X, \mu)$  ayrılabilir ölçüm uzayı olsun.  $1 \leq p \leq \infty$  ve  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  olsun.  $f_n \in L^p$  ve  $f \in L^p$  olsun. Eğer her  $g \in L^q$  için,

$$\int_X f_n \cdot g d\mu \rightarrow \int_X f g d\mu$$

olursa  $f_n$  dizisinin  $f$  ye zayıf yakınsak olduğunu söyleriz.

$$\|f - f_n\|_{L^p} \rightarrow 0$$

ise bu durumda  $f_n$  dizisi  $f$  ye zayıf yakınsar.

**Teorem 3.2.8. ( İntegraller için Minkowski Eşitsizliği )**  $1 \leq p < \infty$  olsun. Ayrıca  $f, \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  üzerinde h.h.h.  $y \in \mathbb{R}^n$  için ölçülebilir ve  $y \rightarrow \|f(\cdot, y)\|_{p, \mathbb{R}^m}$  fonksiyonu  $L^1(\mathbb{R}^n)$  ye ait olsun. Bu durumda  $x \rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) dy$  fonksiyonu  $L^p(\mathbb{R}^m)$  nin elemanı olur, ve

$$\left( \int_{\mathbb{R}^m} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) dy \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^m} |f(x, y)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} dy$$

eşitsizliği sağlanır (Adams ve Fournier 2003).

**Tanım 3.2.9.**  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ve  $f$ ,  $\Omega$  üzerinde tanımlı ölçülebilir bir fonksiyon olsun.  $t \geq 0$  için,  $\Omega_{f,t} = \{x \in \Omega : |f(x)| > t\}$  olsun.  $\mu$ ,  $\mathbb{R}^n$  de Lebesgue ölçümü olsun. Bu durumda  $f$  nin distribüsyon fonksiyonunu,

$$\delta_f(t) = \mu(\Omega_{f,t})$$

olarak tanımlanır.  $t \geq 0$  için  $\delta_f$  artmayan bir fonksiyon olur. Ayrıca  $\Omega$  nın h.h.h. de

$|f(x)| \leq |g(x)|$  ise bu durumda  $t \geq 0$  için  $\delta_f(t) \leq \delta_g(t)$  olur.  $|f(x)| > t + \frac{1}{k}$  olmayı gerektirdiği için  $\Omega_{f,t} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Omega_{f,t+\frac{1}{k}}$  olur.

Buradan,  $\delta_f$ ,  $[0, \infty]$  aralığında sağ sürekli olur. Benzer biçimde, her bir  $x$  noktasında,  $|f(x)|$ ,  $\{|f_j(x)|\}$  nin artan bir limiti ise bu durumda  $|f(x)| > t$  eşitsizliği (en az) bir  $j$  için  $|f_j(x)| > t$  olmayı gerektirir. Böylece,

$$\Omega_{f,t} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \Omega_{f_j,t}$$

olur. Buradan da

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \delta_{f_j}(t) = \delta_f(t)$$

olur.

Eğer  $|f(x) + g(x)| > t$  ise bu durumda ya

$|f(x)| > \frac{t}{2}$  veya  $|g(x)| > \frac{t}{2}$  (veya ikisi de) sağlanır,  $\Omega_{f+g,t} \subset \Omega_{f,\frac{t}{2}} \cup \Omega_{g,\frac{t}{2}}$  olur.

Bir  $p \in (0, \infty)$  için  $f \in L^p(\Omega)$  olsun.  $t > 0$  için

$\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \geq \int_{\Omega_{f,t}} |f(x)|^p dx \geq t^p \mu(\Omega_{f,t})$  olur. Buradan

$$\delta_f(t) = \mu(\Omega_{f,t}) \leq \frac{1}{t^p} \int_{\Omega} |f(x)|^p dx$$

Chebyshev eşitsizliği elde edilir (Adams ve Fournier 2003).

**Teorem 3.2.10.**  $0 < p < \infty$  ise bu durumda

$$\int_{\Omega} |f(x)|^p dx = p \int_0^{\infty} t^{p-1} \delta_f(t) dt$$

olur ( Adams ve Fournier 2003).

**İspat:** Öncelikle  $|f|$  nin,

$$0 < a_1 < a_2 < \dots < a_k$$

$j = 1, \dots, k$  için,  $A_j \subset \Omega$  kümesinde

$$|f(x)| = a_j$$

$A_j$  – ler  $\Omega$  nın ikişer ikişer ayrık alt kümeler, koşullarını sağlayan bir basit fonksiyon olduğunu varsayalım.

Bu durumda,

$$\delta_f(t) = \begin{cases} \sum_{i=1}^k \mu(A_i), & t < a_1 \text{ için,} \\ \sum_{i=j}^k \mu(A_i), & a_{j-1} \leq t < a_j, \quad (2 \leq j \leq k) \text{ için,} \\ 0 & , \quad t \geq a_k \text{ için} \end{cases}$$

olur. Bu nedenle

$$\begin{aligned} p \int_0^{\infty} t^{p-1} \delta_f(t) dt &= p \left( \int_0^{a_1} + \sum_{j=2}^k \int_{a_{j-1}}^{a_j} + \int_{a_k}^{\infty} \right) t^{p-1} \delta_f(t) dt \\ &= a_1^p \sum_{j=1}^k \mu(A_j) + \sum_{j=2}^k (a_j^p - a_{j-1}^p) \sum_{i=j}^k \mu(A_i) \\ &= \sum_{j=1}^k a_j^p \mu(A_j) = \int_{\Omega} |f(x)|^p dx \end{aligned}$$

olur.

Böylece teorem basit fonksiyonlar için sağlanır.  $f$  ölçülebilir olduğu zaman,  $|f|$ , ölçülebilir basit fonksiyonların monoton artan bir limiti olarak ifade edilebileceğinden, teoremin genel sonucu monoton yakınsaklık teoreminden çıkar.

**Lemma 3.2.11.**  $\mathfrak{B}$ ,  $\mathbb{R}^n$  de sonlu tane açık yuvarın bir koleksiyonu olsun. Bu durumda her  $B \in \mathfrak{B}$  için

$$B \subset \bigcup_{1 \leq j \leq k} B_j^*$$

Olacak biçimde,  $\mathfrak{B}$  içinde ayrık  $B_1, B_2, \dots, B_k$  yuvarlarını bulabiliriz. Burada  $B^*, B$  ile aynı merkeze sahip ve yarıçapı  $B$  nin üç katı olan yuvarı göstermektedir (Peyrière 2018).

**İspat:**  $\mathfrak{B}_0 = \mathfrak{B}$  diyelim.  $B_0$ ,  $\mathfrak{B}_0$  nin maksimum yarıçaplı bir elemanı olsun.

$\mathfrak{B}_1 = \{B \in \mathfrak{B}_0 : B \cap B_0 = \emptyset\}$  olsun. Eğer  $\mathfrak{B}_1$  boştan farklı ise  $B_1$  için  $\mathfrak{B}_1$  in maksimum yarıçaplı bir elemanını seç.

$\mathfrak{B}_2 = \{B \in \mathfrak{B}_1 : B \cap B_1 = \emptyset\}$  diyelim. Yuvarların boş bir koleksiyonuna varana kadar bu şekilde devam edelim.  $B \in \mathfrak{B}$  alalım.  $B, B_1, B_2 \dots$  lerden seçilmiş ise ispatlanacak bir şey yoktur. Eğer değil ise,  $B \in \mathfrak{B}_j \setminus \mathfrak{B}_{j+1}$  olacak biçimde bir  $j > 0$  vardır. Bu  $B \cap B_j \neq \emptyset$  anlamına gelir ve  $B$  nin yarıçapı  $B_j$  lerden birinin yarıçapına eşit veya daha küçük olur. Buradan  $B, B_j^*$  nin içinde kalır.

**Tanım 3.2.12.**  $\varphi$ ,  $\mathbb{R}^n$  de lokal olarak integrallenenbilen bir fonksiyon ise

$$M\varphi(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |\varphi(y)| dy$$

olarak tanımlayalım. Bu  $M\varphi$  fonksiyonuna Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu denir (Shanzhen ve ark. 2007).

$M\varphi$  nin tanımında sadece  $r$  rasyonel sayıları alabiliriz. Ayrıca yuvarların açık veya kapalı olması da sorun oluşturmaz.

$$\chi_r(x) = \frac{1}{|B(0,r)|} \chi_{B(0,r)} \text{ olsun.}$$

Bu durumda,

$$\frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |\varphi(y)| dy = \frac{1}{|B(0,r)|} \int_{B(0,r)} |\varphi(x-y)| dy = |\varphi| * \chi_r(x)$$

olur.

Bundan dolayı

$$M\varphi = \sup_{r>0} |\varphi| * \chi_r$$

olur.

Konvolüsyon işleminin özelliklerinden dolayı  $|\varphi| * \chi_r$  fonksiyonları sürekli olur. Supremum rasyonel  $r$  sayıları üzerinden alınabildiğinden,  $M\varphi$  ölçülebilir olur. Ayrıca,  $M\varphi$  sürekli fonksiyonların bir supremumu olduğundan alt yarı sürekli olur.

**Teorem 3.2.13.** i). Her  $\varphi$  ve her  $t > 0$  için,

$$|\{M\varphi > t\}| \leq \frac{a}{t} \|\varphi\|_1$$

olacak biçimde (n-boyutuna bağlı) bir  $a > 0$  sayısı vardır.

ii.)  $p \in (1, \infty]$  olmak üzere, herhangi  $f$  için,

$$\|M\varphi\|_p \leq a_p \|\varphi\|_p$$

olacak biçimde bir  $a_p > 0$  sayısı vardır (Peyrière 2018).

**İspat:**

i.)  $K \subset \{M\varphi > t\}$  kompakt kümesi verilsin. Her bir  $x \in K$  için,

$$t < \frac{1}{|B_x|} \int_{B_x} |\varphi(y)| dy$$

olacak şekilde bir açık  $B_x$  yuvarı vardır.

Böylece  $K$  nın  $\{B_x\}_{x \in K}$  örtüsünden sonlu bir örtü elde ederiz ve hemen bir önceki lemmayı uygularsak  $x_1, x_2, \dots, x_k \in K$  noktaları için

$$K \subset \bigcup_{1 \leq j \leq k} B_{x_j}^*$$

durumunu elde ederiz. Ayrıca  $B_{x_j}$  -lerin ayrık ta olduğunu dikkate alarak,

$$|K| \leq \sum_{j=1}^k |B_{x_j}^*| = 3^n \sum_{j=1}^k |B_{x_j}|$$

$$\leq \frac{3^n}{t} \sum_{j=1}^k \int_{B_{x_j}} |\varphi(y)| dy$$

$$= \frac{3^n}{t} \int_{\bigcup_{j=1}^k B_{x_j}} |\varphi(y)| dy$$

$$\leq \frac{3^n}{t} \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(y)| dy$$

Ayrıca, Lebesgue ölçümünün iç regülerliğinden, yani

$|\{M\varphi > t\}| = \sup\{|K| : K \subset \{M\varphi > t\}, K \text{ kompakt}\}$  den sonuç elde edilir.

ii.)  $t > 0$  verilsin.

$$g(x) = \begin{cases} \varphi(x), & |\varphi(x)| > \frac{t}{2} \\ 0, & |\varphi(x)| \leq \frac{t}{2} \end{cases}$$

ve  $\Gamma = \varphi - g$  olsun. Bu durumda  $M\Gamma \leq \frac{t}{2}$  olur, böylece

$$|\{M\varphi > t\}| \subset \left\{Mg > \frac{t}{2}\right\} \cup \left\{M\Gamma \leq \frac{t}{2}\right\} = \left\{Mg > \frac{t}{2}\right\}$$

olur. Buradan da

$$|\{M\varphi > t\}| \leq \frac{2a}{t} \int_{\{|\varphi| > \frac{t}{2}\}} |\varphi(x)| dx$$

elde edilir. Bu da bu teoremin ilk durumunu daha iyi bir sonuca getirir. Ayrıca diğer durumlarda da kullanılabilir.

Distribüsyon, bu eşitsizlikten ve Fubini teoreminden,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} M\varphi(x)^p dx &= p \int_0^\infty t^{p-1} |\{M\varphi > t\}| dt \leq 2pC \int_0^\infty t^{p-2} \left( \int_{|\varphi| > \frac{t}{2}} |\varphi(x)| dx \right) dt \\ &= 2pC \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)| \left( \int_0^{2|\varphi(x)|} t^{p-2} dt \right) dx \\ &= \frac{pC2^p}{p-1} \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|^p dx \end{aligned}$$

elde edilir.

Bazı konvolüsyonların kontrolünü görelim.

**Lemma 3.2.14.**  $\gamma$  fonksiyonu  $(0, \infty)$  aralığında artmayan ve negatif değer alamayan olsun.  $x \in \mathbb{R}^n$  için,  $\psi(x) = \gamma(|x|)$  ve  $\psi$  integrallenebilir olsun. Bu durumda ölçülebilir ve negatif değer almayan bir  $\varphi$  fonksiyonu için

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\psi(x) dx \leq \|\psi\|_1 M\varphi(0)$$

olur (Peyrière 2018).

**İspat:** Öncelikle, her  $j$  için,  $0 < r_j < r_{j+1}$  ve  $\alpha_j > 0$  olmak üzere,

$$\gamma = \sum_{j=1}^k \alpha_j \chi_{(0, r_j)}$$

biçimindeki fonksiyonları için yapalım.

Buradan,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\psi(x)dx &= \sum_{j=1}^k \alpha_j \int_{B(0,r_j)} \varphi(x)dx \\
&\leq (\sum_{j=1}^k \alpha_j |B(0,r_j)|)M\varphi(0) \\
&= \|\psi\|_1 M\varphi(0)
\end{aligned}$$

olur. Şimdi genel durumu yapalım. Herhangi bir  $m > 0$  tamsayısı için,

$$\chi_m = \sum_{j=0}^{m2^{m-1}} \frac{j}{2^m} \chi_{\{j2^{-m} \leq \chi < (j+1)2^{-m}\}}$$

olsun. Bu durumda  $\chi$  artmayan olduğu için  $\{\chi_m\}_{m>1}$  fonksiyon dizisi azalmayan ve noktasal olarak  $\psi$  ye yakınsar. Böylece sonuca, monoton yakınsaklık teoreminden varmış oluruz.

**Tanım 3.2.15.** Bir fonksiyon sadece  $|x|$  ye bağlı ise buna radyal denir. Eğer  $\psi(x) = \chi(|x|)$  ise bu durumda  $\chi$  ye  $\psi$  nin profili denir. Bir önceki lemma yeniden aşağıdaki gibi formüle edilebilir (Peyrière 2018).

**Teorem 3.2.16.**  $u, \psi(x) = \sup_{|y| \geq x} |u(y)|$  integrallenebilirdir, koşulunu sağlayacak biçimde ve  $\mathbb{R}^n$  de ölçülebilir olsun. Bu durumda

$$\varphi \in \bigcup_{1 \leq p \leq \infty} L^p$$

için,

i.  $|\varphi * u(x)| \leq \|\psi\|_1 M\varphi(x);$

ii.  $u_t(y) = \frac{1}{t^n} u\left(\frac{y}{t}\right)$  olmak üzere,

$$\sup_{t>0} |\varphi * u_t(x)| \leq \|\psi\|_1 M\varphi(x);$$

iii. h.h.h.  $x$  için,  $\lim_{t \searrow 0} \varphi * u_t(x) = \varphi(x) \int u(y)dy$

olur (Peyrière 2018).

**İspat:**  $x$  verilsin,  $\Gamma(y)=\varphi(x-y)$  olsun. Bu durumda  $M\Gamma(0) = M\varphi(x)$  olur. Hemen bir önceki lemmadan

$$\begin{aligned} |\varphi * u(x)| &\leq \int |\Gamma(y)| |u(y)| dy \\ &\leq \|\psi\|_1 M\Gamma(0) \\ &= \|\psi\|_1 M\varphi(x) \end{aligned}$$

Bu i.) durumunu ispatlar, Buradan da ii.) durum elde edilebilir, iii.) nin ispatı aşağıdaki lemmadan çıkar.

**Lemma 3.2.17.** Verilen notasyonlar yukarıdaki gibi olmak üzere, eğer  $\varphi$  sürekli ve kompakt desteğe sahip ise,

$$\lim_{t \searrow 0} \int \frac{1}{t^n} u\left(\frac{x}{t}\right) \varphi(-x) dx = \varphi(0) \int u(x) dx$$

olur (Peyrière 2018).

### 3.3. Sobolev Uzayları

Önce bazı notasyonları verelim ve bazılarını tekrar hatırlayalım.

$$C(\Omega) = \{f: f, \Omega \text{ üzerinde sürekli}\}$$

$$\text{supp } f = \overline{\{x \in \Omega: f(x) \neq 0\}}, \text{ } f \text{ nin desteği}$$

$$C_0(\Omega) = \{f \in C(\Omega): \text{supp } f, \Omega \text{ nın bir kompakt alt kümesi}\}$$

$$C^k(\Omega) = \{f \in C(\Omega): f, k \text{ kere sürekli diferansiyellenebilir.}\}$$

$$C_0^k(\Omega) = C^k(\Omega) \cap C_0(\Omega)$$

$$C^\infty = \bigcap_{k=1}^{\infty} C^k(\Omega) \text{ düzgün fonksiyonlar}$$

$C_0^\infty(\Omega) = C^\infty(\Omega) \cap C_0(\Omega)$  (Kompakt destekli düzgün fonksiyonlar, bunlara test fonksiyonları da denir.)

$$\text{Örnek 3.3.1. } \varphi(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{|x|^2-1}}, & x \in B(0,1) \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus B(0,1) \end{cases}$$

olsun.

$\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  ve  $\text{supp}\varphi = \overline{B(0,1)}$  olur.

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$  bir çoklu indis olsun. Bir çoklu indisin mertebesi

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$$

olarak ve  $x \in \mathbb{R}^n$  için  $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$  olarak tanımlanır.

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} u$$

anlamında kullanılır.

**Tanım 3.3.2.**  $u \in L_{\text{loc}}^1(\Omega)$  ve  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  verilsin. Bu durumda eğer her  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$  test fonksiyonu için,

$$\int_{\Omega} u D^\alpha \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v \varphi dx$$

olursa  $v \in L_{\text{loc}}^1(\Omega)$  nin  $u$  nun  $\alpha$ -ıncı kısmi zayıf türevi denir (Ziemer 2012). Tanımdan da görüldüğü gibi fonksiyon ölçümü sıfır olan bir küme üzerinde değiştirmek zayıf türeve bir etkisi olmaz.

$|\alpha| = 1$  ise bu durumda,

$$D^\alpha u = Du = (D_1 u, D_2 u, \dots, D_n u)$$

$u$  nun zayıf gradyeni olur. Burada  $j=1, \dots, n$  için

$$D_j u = \frac{\partial u}{\partial x_j} = D^{(0, \dots, 1, \dots, 0)} u$$

$j$ -inci bileşen 1 dir.

**Örnek 3.3.3.**  $\Omega = (0,2)$  ve

$$u(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1 \\ 1, & 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

$$v(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

olsun. Zayıf anlamda  $u' = v$  olduğunu gösterelim.

Bunun için her  $\varphi \in C_0^\infty(0,2)$  için,

$$\int_0^2 u\varphi' dx = - \int_0^2 v\varphi$$

olduğunu göstermeliyiz. Kısmi integrasyon ve kalkülüsün temel teoreminden

$$\begin{aligned} \int_0^2 u(x)\varphi'(x) dx &= \int_0^1 x\varphi' dx + \int_1^2 1 \cdot \varphi'(x) dx \\ &= x\varphi(x)|_0^1 - \int_0^1 \varphi(x) dx + \varphi(2) - \varphi(1) \\ &= - \int_0^1 \varphi(x) dx \\ &= - \int_0^2 v\varphi(x) dx \end{aligned}$$

olur.

**Tanım 3.3.4.**  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  bir açık küme olsun. Bu durumda  $W^{k,p}(\Omega)$  sobolev uzayı,

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega): |\alpha| \leq k \text{ için } D^\alpha u \in L^p(\Omega)\}$$

şeklinde tanımlanır.

$u \in W^{k,p}(\Omega)$  nın normu,  $1 \leq p < \infty$  için,

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \|u\|_{k,p} = \left( \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} |D^{\alpha}u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

ve  $p = \infty$  için

$$\|u\|_{W^{k,\infty}(\Omega)} = \|u\|_{k,\infty} = \sum_{|\alpha| \leq k} \text{esssup}_{\Omega} |D^{\alpha}u|$$

ile tanımlanır.

$\Omega'$  kümesi  $\Omega$  nın bir açık alt kümesi olmak üzere,  $\bar{\Omega}'$  kümesi  $\Omega$  nın kompakt bir alt kümesi ise  $\Omega$  nın kompakt biçimde  $\Omega$  nın içinde bulunduğunu söyleriz. Bu durum  $\Omega' \Subset \Omega$  ile gösterilir. Eğer, her  $\Omega' \Subset \Omega$  için,  $u \in W^{k,p}(\Omega')$  ise bu durumda  $u \in W_{\text{loc}}^{k,p}(\Omega)$  dır denir (Kinnunen 2020).

$W^{k,p}(\Omega)$  uzayında, verilen norma denk başka normlar da vardır.

$1 \leq p < \infty$  için

$$\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^{\alpha}u\|_p$$

$p = \infty$  için

$$\max_{|\alpha| \leq k} \|D^{\alpha}u\|_{\infty}$$

normları daha önce verdiğimiz norma denktir.

**Teorem 3.3.5.**  $W^{k,p}(\Omega)$  sobolev uzayı bir Banach uzayıdır (Brezis 2010).

$k=1,2,\dots$  için  $C^k(\Omega)$  uzayları sobolev normuna göre tam değildirler.

$W^{k,2}(\Omega)$  sobolev uzayı,

$$\langle D^{\alpha}u, D^{\alpha}v \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} D^{\alpha}u \cdot D^{\alpha}v dx$$

olmak üzere

$$\langle u, v \rangle_{W^{k,2}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \langle D^\alpha u, D^\alpha v \rangle_{L^2(\Omega)}$$

iç çarpımı ile bir Hilbert uzayı olur. Dikkat edilirse,

$$\|u\|_{k,2} = \langle u, u \rangle_{W^{k,2}(\Omega)}^{\frac{1}{2}}$$

olur.

Düzgün fonksiyonlarla yaklaşımı görelim.

$\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  ve

$$\theta(x) = \begin{cases} ce^{\frac{1}{|x|^2-1}} & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1 \end{cases}$$

olsun. Burada  $c > 0$ ,  $\int_{\mathbb{R}^n} \theta(x) dx = 1$  olmasını sağlayan değerdir.  $\varepsilon > 0$  için

$$\theta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \theta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

olsun,  $\theta$  ye standart mollifier denir.

$\theta_\varepsilon \geq 0$ ,  $\text{supp}\theta_\varepsilon = \overline{B(0, \varepsilon)}$  ve

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \theta_\varepsilon(x) dx &= \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{\mathbb{R}^n} \theta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx \\ &= \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{\mathbb{R}^n} \theta(y) \varepsilon^n dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \theta(x) dx = 1 \end{aligned}$$

olur.

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$  bir açık küme ve  $\partial\Omega \neq \emptyset$  olsun.  $\varepsilon > 0$  için,

$$\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega: \text{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$$

olsun.  $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$  için, standart konvolüsyon mollifieri

$$f_\varepsilon: \Omega_\varepsilon \rightarrow [-\infty, \infty]$$

$$f_\varepsilon(x) = (f * \theta_\varepsilon)(x) = \int_{\Omega} f(y) \theta_\varepsilon(x - y) dy$$

biçiminde olur.

$\Omega = \mathbb{R}^n$  olursa,  $\Omega_\varepsilon$  ye gerek kalmaz. Dikkat edilirse her  $x \in \Omega_\varepsilon$  için

$$f_\varepsilon(x) = \int_{\Omega} f(y) \theta_\varepsilon(x - y) dy = \int_{B(x, \varepsilon)} f(y) \theta_\varepsilon(x - y) dy$$

olur. Değişken değiştirme ile  $z = x - y$  den

$$\int_{\Omega} f(y) \theta_\varepsilon(x - y) dy = \int_{\Omega} f(x - z) \theta_\varepsilon(z) dz$$

olur.

Her  $x \in \Omega_\varepsilon$  için,

$$\begin{aligned} |f_\varepsilon(x)| &\leq \left| \int_{B(x, \varepsilon)} f(y) \theta_\varepsilon(x - y) dy \right| \\ &\leq \|\theta_\varepsilon\|_\infty \int_{B(x, \varepsilon)} |f(y)| dy < \infty \end{aligned}$$

olur.

Eğer  $f \in C_0(\Omega)$  ise bu durumda,

$$0 < \varepsilon < \varepsilon_0 = \frac{1}{2} \text{dist}(\text{supp } f, \partial\Omega)$$

olduğunda  $f_\varepsilon \in C_0(\Omega_\varepsilon)$  olur (Kinnunen 2020).

**Teorem 3.3.6.** i.)  $f_\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$

ii.)  $\varepsilon \rightarrow 0$  için, h.h.h.  $f_\varepsilon \rightarrow f$  olur.

iii.)  $f \in C(\Omega)$  ise bu durumda, her  $\Omega' \Subset \Omega$  için  $f_\varepsilon \rightarrow f$  düzgün yakınsak olur.

iv)  $f \in L^p_{loc}(\Omega)$  ve  $1 \leq p < \infty$  ise bu durumda her  $\Omega' \Subset \Omega$  için,  $L^p(\Omega')$  da  $f_\varepsilon \rightarrow f$  olur (Stein 1970).

**Teorem 3.3.7.**  $u \in W^{k,p}(\Omega)$  ve  $1 \leq p < \infty$  olsun. Bu durumda,

i.)  $\Omega_\varepsilon$  da  $D^\alpha u_\varepsilon = D^\alpha u * \theta_\varepsilon$  olur.

ii.) Her  $\Omega' \Subset \Omega$  için,  $W^{k,p}(\Omega')$  da  $u_\varepsilon \rightarrow u$  olur (Kinnunen 2020).

Bu bize düzgün fonksiyonların lokal Sobolev uzayında yoğun olduğunu göstermektedir.

**Teorem 3.3.8. (Meyers-Serrin)**  $u \in W^{k,p}(\Omega)$ ,  $1 \leq p < \infty$  ise bu durumda,  $W^{k,p}(\Omega)$  da  $u_i \rightarrow u$  olacak biçimde  $u_i \in C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$  fonksiyonları vardır (Adams ve Fournier 2003).

**Tanım 3.3.9.**  $1 \leq p < \infty$  olsun. Sınırı sıfır değerli sobolev uzayı  $W_0^{1,p}(\Omega)$ ,  $C_0^\infty(\Omega)$  nın sobolev normuna göre tamlanışıdır. Başka bir deyişle,  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$  ancak ve ancak  $W_0^{1,p}(\Omega)$  uzayında,  $i \rightarrow \infty$  olduğunda,  $u_i \rightarrow u$  olacak biçimde  $u_i \in C_0^\infty(\Omega)$  fonksiyonları vardır.  $W_0^{1,p}(\Omega)$  uzayı,  $W^{1,p}(\Omega)$  uzayının normu ile normlanır (Kinnunen 2020)

Ayrıca  $1 \leq p < \infty$  olmak üzere, fonksiyonların tanım kümesi  $\mathbb{R}^n$  iken Sobolev uzayı ile sıfır değerli Sobolev uzayı çakışır, yani  $W^{1,p}(\mathbb{R}^n) = W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  olur (Kinnunen 2020).

**Teorem 3.3.10.**  $1 < p < \infty$  olsun.  $\{u_i\}$ ,  $W^{1,p}(\Omega)$  uzayında bir sınırlı dizi olsun. Bu durumda,  $k \rightarrow \infty$  için  $L^p(\Omega)$  da zayıf olarak  $u_{i_k} \rightarrow u$  ve  $L^p(\Omega)$  da zayıf olarak  $Du_{i_k} \rightarrow Du$  olur. Ayrıca  $i=1,2,\dots$  için  $u_i \in W_0^{1,p}(\Omega)$  ise bu durumda  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$  olur (Kinnunen 2020).

**Teorem 3.3.11.**  $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$  ise bu durumda  $Mf \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$  ve  $\|Mf\|_\infty = \|f\|_\infty$  olur (Kinnunen 2020).

**İspat:** Her  $x \in \mathbb{R}^n$  ve  $r > 0$  için,

$$\frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} |f(y)| dy \leq \frac{1}{|B(x, r)|} (\|f\|_\infty) |B(x, r)|$$

$$= \|f\|_\infty$$

olur.

Her tarafın  $r > 0$  üzerinde supremumu alınırsa, h.h.h.  $x$  için  $Mf(x) \leq \|f\|_\infty$  olur.

Böylece  $\|Mf\|_\infty \leq \|f\|_\infty$  olur. Bunun bir diğer anlamı,

$$M: L^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^\infty(\mathbb{R}^n)$$

operatörü sınırlı olur.

$T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ve  $T(x) = \sin x$  olsun.

ortalama değer teoreminden,  $\frac{\sin x - \sin y}{x - y} = \sin c$

$\Rightarrow |\sin x - \sin y| \leq |x - y|$  olur.  $y = 0$  alınırsa,

$$|\sin x| \leq |x|$$

olur. Böylece  $T$  sınırlı olur. Fakat  $T(x + y) = \sin x + \sin y$  olmadığı için lineer değildir. Ayrıca  $T$  süreklidir.

**Teorem 3.3.12. (McShane)**  $E \subset \mathbb{R}^n$ ,  $L \in [0, \infty)$  ve  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  bir  $L$ -Lipschitz fonksiyon olsun. Bu durumda her  $x \in E$  için,

$$f(x) = F(x)$$

olan bir  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$   $L$ -Lipschitz fonksiyonu vardır (Kinnunen 2020).

**İspat:**  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ve

$$F(x) = \inf\{f(a) + L|x - a|: a \in E\}$$

olarak tanımlansın.

Her  $b \in E$  için  $F(b) = f(b)$  olduğunu gösterelim.

$$f(b) - f(a) \leq |f(b) - f(a)| \leq L|b - a|$$

olduğundan her  $a \in E$  için  $f(b) \leq f(a) + L|b - a|$  olur.

Tüm  $a \in E$  üzerinde infimum alındığında  $f(b) \leq F(b)$  elde edilir. Diğer taraftan, tanımdan, her  $b \in E$  için  $F(b) \leq f(b)$  olur. Böylece her  $b \in A$  için  $F(b) = f(b)$  olur.

Şimdi de  $F$  nin  $\mathbb{R}^n$  üzerinde L-Lipschitz olduğunu gösterelim.

$x, y \in \mathbb{R}^n$  olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} F(x) &= \inf\{f(a) + L|x - a| : a \in E\} \\ &\geq \inf\{f(a) + L(|y - a| + |x - y|) : a \in E\} \\ &\geq \inf\{f(a) + L|y - a| : a \in E\} + L|x - y| \\ &= F(y) + L|x - y| \end{aligned}$$

olur.

$x$  ve  $y$  nin rolü değiştirerek  $F(y) \leq F(x) + L|x - y|$

Eşitsizliğini verdiği için,

$$|F(x) - F(y)| \leq L|x - y|$$

olur.

### 3.4. Schwartz Sınıfı

**Tanım 3.4.1.**  $S(\mathbb{R}^n) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\beta \partial^\alpha f(x)| < \infty, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n\}$

ye Schwartz sınıfı denir. Eğer  $f \in S(\mathbb{R}^n)$  ise  $f$  ye Schwartz fonksiyonu denir (Mitreia 2013).

Örnekler  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $a \in (0, \infty)$  için,  $f(x) = e^{-a|x|^2}$  ise  $f \in S(\mathbb{R}^n)$  olur. Bu örnekte  $\text{supp} f = \mathbb{R}^n$  dir.  $P(x)$  herhangi bir polinom olmak üzere,  $f(x) = P(x)e^{-|x|^2}$  ise  $f \in S(\mathbb{R}^n)$  olur. Ayrıca,

$$C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset S(\mathbb{R}^n) \subset C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

olduğunu görmek zor değildir.  $S(\mathbb{R}^n)$  nin diğer bazı özellikleri şunlardır:  $S(\mathbb{R}^n)$ , lineer bileşim altında kapalı olduğu için, bir vektör uzayı olur.  $f \in S(\mathbb{R}^n)$  ve  $g \in S(\mathbb{R}^n)$  ise  $f \cdot g \in S(\mathbb{R}^n)$  olur.  $f \in S(\mathbb{R}^n)$  ise  $f$  nin kısmi türevleri de  $S(\mathbb{R}^n)$  nin elemanı olur.  $f \in S(\mathbb{R}^n)$  ise her  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$  ve  $N \in \mathbb{N}$  için

$$|x^\alpha \partial^\beta f(x)| \leq \frac{c}{(1 + |x|)^N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

olacak biçimde (bir)  $c = c_{f,N,\alpha,\beta} \in (0, \infty)$  vardır (Mitrea, 2013). Ayrıca buradan, her  $p \in [1, \infty]$  için,  $S(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$  olur. Böylece  $S(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$  den  $S(\mathbb{R}^n)$  fonksiyonları integrallenebilirdir, yani  $f \in S(\mathbb{R}^n)$  ise  $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx < \infty$  olur (Mitrea 2013).

$\{f_k\} \subset S(\mathbb{R}^n)$  dizisi ve  $f \in S(\mathbb{R}^n)$  verilsin.

Her  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$  ve  $k \rightarrow \infty$  için,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\beta \partial^\alpha [f_k(x) - f(x)]| \rightarrow 0$$

ise  $f_k$  nın  $f$  ye  $S(\mathbb{R}^n)$  de yakınsadığını söyleriz. Ayrıca,  $p \in [1, \infty]$  ve bir  $f_k \in S(\mathbb{R}^n)$  dizisi bir  $f \in S(\mathbb{R}^n)$  elemanına  $S(\mathbb{R}^n)$  de yakınsak ise bu durumda bu  $f_k$  dizisi de  $L^p(\mathbb{R}^n)$  de  $f$  fonksiyonuna yakınsar (Mitrea 2013).



## 4. BULGULAR VE TARTIŞMA

### 4.1. Hardy-Littlewood Maksimal Operatörünün Sürekliliği

Lineer olmayan operatörlerde, bir operatörün sürekliliği o operatörün sınırlı olmasından doğrudan elde edilmez. Bunun iyi bir örneği, Almgren ve Lieb (1989) tarafından, daha önce sınırlı olduğu bildikleri simetrik yeniden düzenleme  $\mathcal{R}: W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \rightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  operatörünün,  $1 < p < n$  ve  $p > 1$  için sürekli olmadığı gösterilmesidir.  $M$  maksimal operatörün,  $L^p(\mathbb{R}^n)$  uzayında sürekliliği,  $M$  nin alt lineer ve sınırlı olmasından çıkar. Kinnunen'in (1997)  $M$  maksimal operatörünü  $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  de sınırlı olduğunu göstermesinden sonra,  $M$  nin  $1 < p < \infty$  için  $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  de sürekli olup olmadığı sorusu belirgin bir şekilde anlamlı olmuştur, önem kazanmıştır. Fakat  $L^p(\mathbb{R}^n)$  den farklı olarak  $M$  maksimal operatörü  $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  de alt lineer değildir. Bu da  $M$  nin  $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  de sürekliliğini göstermede güçlük oluşturur.

Luiro (2007),  $M$  maksimal operatörünü,  $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  de sürekli olduğunu gösterebilmiştir. Şimdi Luiro'nun bu ispatını ve bunu yaparken kullandığı tüm lemma ve teoremleri verelim.

$A \subset \mathbb{R}^n$  ve  $r \in \mathbb{R}^n$  olsun.

$$d(r, A) = \inf_{a \in A} |r - a|$$

ve  $\lambda \geq 0$  için,

$$A_{(\lambda)} = \{x \in \mathbb{R}^n: d(x, A) \leq \lambda\}$$

olsun. Ayrıca  $B_r = B(0, r)$  anlamında kullanılacaktır.

$W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  için norm olarak

$$\|f\|_{1,p} = \|f\|_p + \|\nabla f\|_p$$

kullanılacaktır.

Ayrıca,  $A \subset \mathbb{R}^n$  ölçülebilir kümesi için,  $\chi_A f$  nin  $L^p$  normu  $\|f\|_{p,A}$  ile gösterilecektir.

**Tanım 4.1.1.**  $1 \leq p < \infty$  için,  $f \in L^p$  olsun.  $\mathcal{R}f(x)$  kümesi

$$\mathcal{R}f(x) = \left\{ r \geq 0 : Mf(x) = \limsup_{r_k \rightarrow r} \frac{1}{|B(x, r_k)|} \int_{B(x, r_k)} |f(y)| dy, r_k > 0 \text{ için} \right\}$$

biçiminde tanımlanır ( Luiro 2007 ).

Tanımdan,  $\mathcal{R}f(x)$  kümesinin kapalı olduğu görülür. Ayrıca  $x \in \mathbb{R}^n$  verildiğinde,

$u_x: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  ve  $r \in (0, \infty)$  için

$$u_x(0) = |f(x)|, \quad u_x(r) = \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} |f(y)| dy$$

olarak tanımlansın.  $u_x$  fonksiyonları h.h.h.  $x$  için süreklidir.

Ayrıca, Hölder eşitsizliğinden  $u_x(r) \leq \|f\|_p (|B_r|)^{\frac{1}{p'}-1}$  olduğu için,  $\lim_{r \rightarrow \infty} u_x(r) = 0$  olur.

Tüm bunlardan, h.h.h.  $x$  için  $u_x$  fonksiyonu  $[0, \infty)$  kümesinde en az bir maksimum noktasında sahiptir. Dahası, her  $x \in \mathbb{R}^n$  için,  $\mathcal{R}f(x)$  kümesi boştan farklı olur ve

$$r \in \mathcal{R}f(x), \quad r > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n, Mf(x) = \frac{1}{|B(x, 1)|} \int_{B(x, 1)} |f(y)| dy$$

ve  $0 \in \mathcal{R}f(x)$  koşulunu sağlayan h.h.h.  $Mf(x) = |f(x)|$  olur. Ayrıca,  $f \not\equiv 0$  olmak üzere, her  $R > 0$  için,  $\sup\{r : r \in \mathcal{R}f(x), x \in B(0, R)\} < \infty$  olur.

**Lemma 4.1.2.**  $1 \leq p < \infty$  ve  $j \rightarrow \infty$  için,  $L^p(\mathbb{R}^n)$  de  $f_j \rightarrow f$  yakınsaması var olsun. Bu durumda her  $R > 0$  ve  $\lambda > 0$  için  $j \rightarrow \infty$  olduğunda,

$$|\{x \in B(0, R) : \mathcal{R}f_j(x) \not\subset \mathcal{R}f(x)_{(\lambda)}\}| \rightarrow 0$$

olur (Luiro 2007).

**İspat.** Önce,  $f$  ve tüm  $f_j$  fonksiyonları  $L^p(\mathbb{R}^n)$  de olduğunda, yukardaki kümenin niçin Lebesgue ölçülebilir olduğunu belirtelim.

$u_x$  ortalama fonksiyonların sürekliliği, h.h.h.  $x$  için, aşağıdaki düşüncede bir esas araç olacaktır.

$$\mathcal{N} = \{x: x, f \text{ veya } f_j - \text{lerden hiç birinin Lebesgue noktası olmasın}\}$$

$|\mathcal{N}| = 0$  olur. Ayrıca pozitif rasyonel sayıları  $\mathbb{Q}_+$  ile gösterelim.

$$\begin{aligned} & \{x: \mathcal{R}f_j(x) \notin \mathcal{R}f(x)_\lambda\} \setminus \mathcal{N} \\ &= \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcap_{m=1}^{\infty} \left\{ x: \exists r > 0 \text{ öyle ki } d(r, \mathcal{R}f(x)) > \lambda + \frac{1}{i} \text{ ve } Mf_j(x) < \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} f_j + \frac{1}{m} \right\} \\ & \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{q \in \mathbb{Q}_+} \left[ \left\{ x: d(q, \mathcal{R}f(x)) > \lambda + \frac{1}{i} \right\} \cap \left\{ x: Mf_j(x) < \frac{1}{|B(x,q)|} \int_{B(x,q)} f_j + \frac{1}{m} \right\} \right] \end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan hareketle, keyfi  $q$  ve  $\lambda$  için,

$$\{x: d(q, \mathcal{R}f(x)) > \lambda\}$$

kümesinin ölçülebilir olduğunu göstermek yeterli olur. Yukarıdaki mantığın aynısını kullanarak, özellikle  $r$  nin bir fonksiyonu olan  $\frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f|$  ifadesinin sürekliliği

$$\{x: d(q, \mathcal{R}f(x)) > \lambda\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{q' \in \mathbb{Q}_+ \cap [q-\lambda, q+\lambda]} \left\{ x: Mf(x) > \frac{1}{|B(x,q')|} \int_{B(x,q')} f + \frac{1}{k} \right\}$$

yazılabilir. Buradan ölçülebilirlik çıkar.

Şimdi lemmanın ispatına geçilebilir.  $\mathcal{R}f(x) = \mathcal{R}|f|(x)$  olduğu için iddiayı hem  $f$  hem de  $f_j$  nin negatif olmama durumunda yapmak yeterli olur. h.h.h.  $f \equiv 0$  ise her  $x$  için  $\mathcal{R}f(x), [0, \infty)$  olur.  $\lambda > 0$ ,  $R > 0$  ve  $\varepsilon > 0$  olsun. Hemen hemen her yerde  $x \in B(0, R)$  için,  $d(r, \mathcal{R}f(x)) > \lambda$  olduğunda,

$$\frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} f(y) dy < Mf(x) - \frac{1}{i(x)}$$

olacak biçimde bir  $i(x) \in \mathbb{N}$  vardır. Bu şurdan şöyle görülebilir: Eğer iddia doğru değil ise

$$\frac{1}{|B(x,r_k)|} \int_{B(x,r_k)} f(y) dy \rightarrow Mf(x), \quad d(r_k, \mathcal{R}f(x)) > \lambda$$

olacak biçimde bir  $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$  yarıçap dizisi vardır. Gerekirse alt diziye geçerek ,  $k \rightarrow \infty$  için,  $r_k \rightarrow r$  olduğunu varsayabiliriz. Çünkü  $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$  dizisi sınırlı olmak zorunda kalıyor. Böylece  $r \in \mathcal{R}f(x)$  olur.

$r, d(r, \mathcal{R}f(x)) \geq 0$  koşulunu sağladığı için, bu bir çelişki oluşturur. Böylece,  $E$  ölçülebilir ve  $|E| < \varepsilon$  olmak üzere,

$$\begin{aligned} B(0, R) &\subset \left\{ x: \frac{1}{|B(x, r_k)|} \int_{B(x, r)} f(y) dy \leq Mf(x) - \frac{1}{i}, d(r, \mathcal{R}f(x)) > \lambda \right\} \cup E \\ &= A \cup E \end{aligned}$$

olacak biçimde bir  $i \in \mathbb{N}$  olduğu sonucuna varmış oluruz. Maksimal zayıf tip (1,1) kestirim,  $j \geq j_0$  için

$$\left| \left\{ x \in B(0, R): |M(f - f_j)(x)| \geq \frac{1}{4i} \right\} \right| < \varepsilon$$

olmasını gerektirir. Tüm  $j$  -ler için

$$\begin{aligned} A &\subset \left\{ x: \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} f_j(y) dy \leq Mf(x) - \frac{1}{2i}, d(r, f(x)) > \lambda \text{ ise} \right\} \\ &\cup \left\{ x: \left| \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} f(y) dy - \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} f_j(y) dy \right| \right. \\ &\quad \left. \geq \frac{1}{2i}, \text{ bazı } r - \text{ler için}, d(r, \mathcal{R}f(x)) > \lambda \right\} \\ &= A_j \cup B_j \end{aligned}$$

Benzer mantıktan ve  $|Mf(x) - Mf_j(x)| \leq |M(f - f_j)(x)|$  den,

$$\begin{aligned} A_j &\subset \left\{ x: \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} f_j(y) dy < Mf_j(x) - \frac{1}{4i}, d(r, f(x)) > \lambda \text{ ise} \right\} \\ &\cup \left\{ x: |M(f - f_j)(x)| \geq \frac{1}{4i} \right\} \\ &= C_j \cup D_j \end{aligned}$$

olur.

Şimdi

$$C_j \subset \{x: \mathcal{R}f_j(x) \subset \mathcal{R}f(x)_{(\lambda)}\}$$

olur. Her  $j$  için

$$B(0, R) \subset \{x: \mathcal{R}f_j(x) \subset \mathcal{R}f(x)_{(\lambda)}\} \cup E \cup D_j \cup B_j$$

elde edilir.  $B_j \subset D_j$  ve  $j \geq j_0$  ise  $|D_j| < \varepsilon$  seçiminden, buradan  $j \geq j_0$  ise

$$|\{x \in B(0, R): \mathcal{R}f_j(x) \not\subset \mathcal{R}f(x)_{(\lambda)}\}| < 2\varepsilon$$

olur. İspat tamamlanır.

$1 \leq p < \infty$  olmak üzere,  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$  olsun.  $e_i$ ,  $\mathbb{R}^n$  nin standart taban vektörlerinden birisi olsun. Her  $h \in \mathbb{R}$ ,  $|h| > 0$  için,

$$f_h^i(x) = \frac{f(x + he_i) - f(x)}{|h|}$$

ve

$$f_{\tau(h)}^i(x) = f(x + he_i)$$

olarak tanımlansın.

$|h| \rightarrow 0$  için,  $L^p(\mathbb{R}^n)$  de  $f_{\tau(h)}^i \rightarrow f$  olur,  $p > 1$  ise,  $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  için,  $|h|$  olduğunda,  $L^p(\mathbb{R}^n)$  de  $f_h^i \rightarrow D_i f$  olur.

**Sonuç 4.1.3.**  $1 \leq p < \infty$  ve  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$  olsun. Bu durumda her  $i, 1 \leq i \leq n$ ,  $R > 0$ ,  $\lambda > 0$  için  $h \rightarrow 0$  olduğunda

$$|\{x \in B(0, R): \mathcal{R}f(x) \not\subset \mathcal{R}f_{\tau(h)}^i(x)_{(\lambda)} \text{ veya } \mathcal{R}f_{\tau(h)}^i(x) \not\subset \mathcal{R}f(x)_{(\lambda)}\}| \rightarrow 0$$

olur (Liu 2007).

**İspat:**  $f_{\tau(h)}^i \rightarrow f$  ve lemma 4.1.2. den,  $h \rightarrow 0$  için

$$|\{x \in B_R: \mathcal{R}f(x) \not\subset \mathcal{R}f_{\tau(h)}^i(x)_{(\lambda)}\}| \rightarrow 0$$

olduğunu göstermek yeterlidir. Bu da aslında lemma 4.1.2. den çıkar, çünkü  $|h| < 1$  için,

$$\begin{aligned} & \{x \in B_R: \mathcal{R}f(x) \not\subset \mathcal{R}f_{\tau(h)}^i(x)_{(\lambda)}\} \\ &= \{x \in B_R: \mathcal{R}_{\tau(-h)}^i(x + he_i) \subset \mathcal{R}f(x + he_i)_{(\lambda)}\} \\ &\subset \{y \in B_{R+1}: \mathcal{R}_{\tau(-h)}^i(y) \subset \mathcal{R}f(y)_{(\lambda)}\} - he_i \end{aligned}$$

olur. Böylece sonuç tamamlandı.

$A$  ve  $B$  kümeleri arasındaki Hausdorff uzaklığı

$$\pi(A, B) = \inf\{\delta > 0: A \subset B_{(\delta)} \text{ ve } B \subset A_{(\delta)}\}$$

ile gösterilsin.  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$  olsun. Bu yeni notasyonla önceki sonuç bize  $h \rightarrow 0$  için,

$$|\{x \in B_R: \pi(\mathcal{R}f(x), \mathcal{R}f(x + he_i)) > \lambda\}| \rightarrow 0$$

olacağını söyler. Bu nedenle, bir  $\{h_k\}_{k=1}^{\infty}$ ,  $h_k > 0$ ,  $h_k \rightarrow 0$  dizisi var öyleki  $k \rightarrow \infty$  olduğunda, h.h.h.  $x \in B_R$  için,

$$\pi(\mathcal{R}f(x), \mathcal{R}f(x + h_k e_i)) \rightarrow 0$$

dir. Şimdi maksimal fonksiyonun türevi için bir formül verilecektir.

**Teorem 4.1.4.**  $1 < p < \infty$ ,  $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  olsun. Bu durumda h.h.h.  $x \in \mathbb{R}^n$  için,

$$i.) \forall r \in \mathcal{R}f(x) \text{ ve } r > 0 \text{ için } D_i Mf(x) = \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} D_i |f|(y) dy,$$

ii.)  $0 \in \mathcal{R}f(x)$  ise  $D_i Mf(x) = D_i |f|(x)$  olur (Luiro 2007).

**İspat:**  $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  ise  $Mf = M|f|$  ve  $|f| \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  olduğundan, iddiayı negatif olmayan fonksiyonlar için göstermek yeterlidir.  $R > 0$  olsun.  $\{h_k\}_{k=1}^{\infty}$ ,  $h_k > 0$ ,  $h_k \rightarrow 0$  öyleki  $k \rightarrow \infty$  olduğunda, h.h.h.  $x \in B_R$  için,  $\pi(\mathcal{R}f(x), \mathcal{R}f(x + h_k e_i)) \rightarrow 0$  olan bir dizi seçelim. Bu durumda,

$$i.) k \rightarrow \infty \text{ iken, } \|D_i Mf - (Mf)_{h_k}^i\|_{p, B_R} \rightarrow 0$$

ii.)  $k \rightarrow \infty$  iken,  $\|D_i f - f_{h_k}^i\|_{p, B_R} \rightarrow 0$

iii.)  $k \rightarrow \infty$  iken,  $\|M(D_i f - f_{h_k}^i)\|_{p, B_R} \rightarrow 0$  olur.

Şimdi, gerekirse bir alt dizi çıkartılarak, yukardaki yakınsaklıkları h.h.h. noktasal olarak doğru kabul edebiliriz.

Ayrıca,

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \exists k \in \mathbb{N} \text{ öyle ki } 0 \in \mathcal{R}f(x + h_k e_i) \text{ ve } Mf(x + h_k e_i) \neq f(x + h_k e_i)\}$$

kümesinin ölçümünün sıfır olduğunu hatırlayalım.  $x \in B_R$  bu yukarıdaki küme dışında,  $f$  ve  $D_i f$  nin Lebesgue noktası olsun.  $r \in \mathcal{R}f(x)$  olsun. Şimdi,  $\pi(\mathcal{R}f(x), \mathcal{R}f(x + h_k e_i)) \rightarrow 0$  olduğundan,  $k \rightarrow \infty$  için,  $r_k \rightarrow r$  olan,  $r_k \in \mathcal{R}f(x + h_k e_i)$  yarıçaplarını bulabiliriz. Eğer  $r > 0$  ise,

$$\begin{aligned} D_i Mf(x) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{h_k} (Mf(x + h_k e_i) - Mf(x)) \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{h_k} \left( \frac{1}{|B(x + h_k e_i, r_k)|} \int_{B(x + h_k e_i, r_k)} f(y) dy - \frac{1}{|B(x, r_k)|} \int_{B(x, r_k)} f(y) dy \right) \\ &= \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} D_i f(y) dy \end{aligned}$$

olur.

$|B_{r_k}| \rightarrow |B_r|$  ve  $k \rightarrow \infty$  için,  $L^1(\mathbb{R}^n)$  de

$\chi_{B(x, r_k)} f_{h_k}^i \rightarrow \chi_{B(x, r)} D_i f$  olur.

Diğer yandan,

$$\begin{aligned} D_i Mf(x) &\geq \frac{1}{h_k} \left( \frac{1}{|B(x + h_k e_i, r)|} \int_{B(x + h_k e_i, r)} f(y) dy - \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} f(y) dy \right) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} \frac{f(y + h_k e_i) - f(y)}{h_k} dy \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} D_i f(y) dy$$

elde edilir.

Bunun yerine  $r = 0$  olduğunu varsayalım.  $D_i Mf(x)$  nin alt sınır ispatı şimdi uygulanabilir.  $D_i Mf(x) \geq D_i f(x)$  olur. Sonsuz tane  $k$  için  $r_k = 0$  durumuna sahip olursak  $D_i Mf(x) = D_i f(x)$  olduğuna karar verilebilir. Bir  $k_0$  dan başlayarak  $r_k > 0$  ise  $D_i Mf(x)$  nin üst sınırını çalışırken de olduğu gibi  $r > 0$  durumunda,

$$D_i Mf(x) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{|B(x,r_k)|} \int_{B(x,r_k)} f_{h_k}^i(y) dy = D_i f(x)$$

elde edilir. Çünkü

$$\begin{aligned} & \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \left( \frac{1}{|B(x,r_k)|} \int_{B(x,r_k)} f_{h_k}^i(y) dy - D_i f(x) \right) \right| \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \left( \frac{1}{|B(x,r_k)|} \int_{B(x,r_k)} (f_{h_k}^i(y) - D_i f(y)) dy \right) \right| \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} M(f_{h_k}^i - D_i f)(x) = 0 \end{aligned}$$

dir. Böylece iddia  $B(0,R)$  yuvarında gösterilmiş olur.  $R$  keyfi olduğu için ispat tamamlanır.

**Teorem 4.1.5.** Her  $1 < p < \infty$  için  $M: W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \rightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  sürekli olur (Liuo 2007).

**İspat:**  $j \rightarrow \infty$  için  $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ de  $f_j \rightarrow f$  olsun.  $\|Mf_j - Mf\|_{1,p} \rightarrow 0$  olduğu gösterilmelidir.  $M$  nin  $L^p(\mathbb{R}^n)$  de sürekli olduğunu bildiğimizden,  $1 \leq i \leq n$  durumundaki her  $i$  için  $\|D_i Mf_j - D_i Mf\|_p \rightarrow 0$  olduğunu göstermek yeterli olur. Ayrıca  $f_j$  ve  $f$  nin negatif olmadığını varsayabiliriz. Keyfi  $\varepsilon > 0$  verilsin.

$C_1 = \mathbb{R}^n \setminus B(0,R)$  olmak üzere,  $R > 0$  yi  $\|2MD_i f\|_{p,C_1}$  sağlayacak biçimde seçebiliriz.

Mutlak süreklilikten  $\alpha, |A| < \alpha$  ve  $A \subset B(0, R)$  ölçülebilir iken  $\|2MDif\|_{p,A} < \varepsilon$  olacak biçimde seçilebilir.  $u_x(r), Dif$  nin  $B(x, r)$  yuvarındaki ortalaması ve  $u_x(0) = Dif(x)$  yi gösterebilir. Hemen hemen her  $x \in \mathbb{R}^n$  için,  $u_x$  fonksiyonları  $[0, \infty)$  üzerinde sürekli ve  $r \rightarrow \infty$  olduğunda 0 sayısına yakınsar. Böylece h.h.h.  $x$  için,  $u_x$  fonksiyonu  $[0, \infty)$  üzerinde düzgün sürekli ve bu nedenle

$$|r_1 - r_2| < \delta(x) \text{ iken } |u_x(r_1) - u_x(r_2)| < \frac{\varepsilon}{|B_r|^{\frac{1}{p}}}$$

olacak biçimde bir  $\delta(x) > 0$  bulunabilir.  $|\mathcal{N}| = 0$  olmak üzere,

$$B_R = \left( \bigcup_{i=1}^{\infty} \left\{ x \in B_R : \delta(x) > \frac{1}{i} \right\} \right) \cup \mathcal{N}$$

yazılsın. Bundan,

$$\left| \left\{ x \in B_R : |u_x(r_1) - u_x(r_2)| > \frac{\varepsilon}{|B_r|^{\frac{1}{p}}}, |r_1 - r_2| < \delta \text{ koşulunu sağlayan bir } r_1, r_2 \text{ için} \right\} \right| =: |C_2| < \frac{\alpha}{2}$$

olacak biçimde bir  $\delta > 0$  elde edilir.

$C_2$  ölçülebilirdir. Ayrıca lemma 4.1.2. den,  $j \geq j_0$  için

$$|\{x: \mathcal{R}f_j(x) \notin \mathcal{R}f(x)_{(\delta)}\}| =: |C^j| < \frac{\alpha}{2}$$

olacak biçimde bir  $j_0$  bulunabilir. Bu durumda  $j \geq j_0$  verilsin. Teorem 4.1.4. ten,  $\mathbb{R}^n$  nin h.h.h. her  $r_1 \in \mathcal{R}f_j(x), r_2 \in \mathcal{R}f(x)$  için,

$$\begin{aligned} & |D_i M f_j(x) - D_i M f(x)| \\ &= \left| \frac{1}{|B(x, r_1)|} \int_{B(x, r_1)} D_i f_j(y) dy - \frac{1}{|B(x, r_2)|} \int_{B(x, r_2)} D_i f(y) dy \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \left| \frac{1}{|B(x, r_1)|} \int_{B(x, r_1)} D_i f_j(y) dy - \frac{1}{|B(x, r_1)|} \int_{B(x, r_1)} D_i f(y) dy \right| \\ &+ \left| \frac{1}{|B(x, r_1)|} \int_{B(x, r_1)} D_i f(y) dy - \frac{1}{|B(x, r_2)|} \int_{B(x, r_2)} D_i f(y) dy \right| \\ &\leq M(D_i f_j - D_i f)(x) + \left| \frac{1}{|B(x, r_1)|} \int_{B(x, r_1)} D_i f(y) dy - \frac{1}{|B(x, r_2)|} \int_{B(x, r_2)} D_i f(y) dy \right| \end{aligned}$$

olur.

$$\frac{1}{|B(x, 0)|} \int_{B(x, 0)} D_i f(y) dy := D_i f(x)$$

olarak alındığında, bu eşitsizlik  $r_1 = 0$  veya  $r_2 = 0$  durumlarına da uygulanabilir. Bunun nedeni, h.h.h.  $x$  için  $Mf(x) \geq f(x)$  gerçeğinden ve teorem 4.1.4. ten,  $0 \in \mathcal{R}f(x)$  iken  $D_i Mf(x) = D_i f(x)$  olmasındandır.

Böylece,  $x \notin C_1 \cup C_2 \cup C^j$  ise  $|r_1 - r_2| < \delta$  olacak biçimde  $r_1 \in \mathcal{R}f_j(x)$  ve  $r_2 \in \mathcal{R}f(x)$  alınabilir. Bu  $\delta$  seçiminden,

$$s := \left| \frac{1}{|B(x, r_1)|} \int_{B(x, r_1)} D_i f(y) dy - \frac{1}{|B(x, r_2)|} \int_{B(x, r_2)} D_i f(y) dy \right| < \frac{\varepsilon}{|B_r|^{\frac{1}{p}}}$$

elde edilir.

$x \in C_1 \cup C_2 \cup C^j$  ise  $s \leq 2MD_i f(x)$  elde edilir. Ayrıca  $|C_2 \cup C^j| < \alpha$  olur. Yukarıdaki kestirimler birleştirildiğinde,

$$\|D_i Mf_j - D_i Mf\|_{p, \mathbb{R}^n} \leq \|M(D_i f_j - D_i f)\|_{p, \mathbb{R}^n} + \left\| \frac{\varepsilon}{|B_r|^{\frac{1}{p}}} \right\|_{p, \mathbb{R}^n} + \|2MD_i f\|_{p, C_1} +$$

$\|2MD_i f\|_{p, C_2 \cup C^j}$  elde edilir.  $j \rightarrow \infty$  için, sağdaki ilk terim sıfıra yakınsar. Geriye kalan terimler,  $R$  ve  $\alpha$  nın seçiminden,  $\varepsilon$  dan küçük olur.  $\varepsilon$  keyfi olduğundan,  $j \rightarrow \infty$  iken

$$\|D_i Mf_j - D_i Mf\|_p \rightarrow 0$$

olur. Böylece ispat tamamlanır.

#### 4.2 Hardy-Littlewood Maksimal Operatörünün Sabit Noktaları

Bu alt bölümde,  $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$  için,  $M$  Hardy-Littlewood operatörü her  $x \in \mathbb{R}^n$  için

$$M(f)(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r} |f(x-y)| dy$$

olarak tanımlayalım. Burada  $B_r$ , merkezi orjin ve yarıçapı  $r$  olan yuvarı göstermektedir. Burada,  $M$  nin  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $L^p(\mathbb{R}^n)$  bağlamında sabit fonksiyondan farklı sabit noktalarının varlığını inceleyeceğiz. Bu çalışma Korry (2001) tarafından yapılmıştır.

Bir  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu sıfırdan farklı ve lokal olarak integrallenebilirse bu durumda her  $x \in \mathbb{R}^n$  için,

$$M(f)(x) \geq \frac{c}{(1+|x|)^n}$$

olur. Buradan  $L^1(\mathbb{R}^n)$  uzayında sadece  $f = 0$  fonksiyonun  $M$  nin bir sabit noktası olacağı sonucuna varılır. Ayrıca her  $k \in (0, \infty)$  sabit için  $M(k) = k$  olduğu için  $M$  nin  $L^\infty(\mathbb{R}^n)$  uzayında çok sayıda sabit noktasının olduğunu görmüş oluruz.

**Teorem 4.2.1.**  $p \in [1, \infty]$  olsun. Bu durumda  $M$  nin sabit fonksiyondan farklı bir

$f \in L^p(\mathbb{R}^n)$  sabit noktasının olması için gerekli ve yeterli koşul  $n \geq 3$  ve  $\frac{n}{n-2} < p \leq \infty$

olmasıdır (Korry 2001).

İspata geçmeden önce bazı noktaları açıklığa çıkaralım. Bir  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  nin  $M$  nin bir sabit noktası olması için gerekli ve yeterli koşul  $f$  nin süper-harmonik fonksiyon (yani,  $\Delta$  Laplace operatörü için,  $\Delta(f) \leq 0$ ) ve pozitif olmasıdır.

Lebesgue diferansiyellenebilme teoreminden,  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  ve h.h.h.  $x \in \mathbb{R}^n$  için,

$$f(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r} f(x-y) dy$$

olduğunu biliyoruz. Böylece, buradan h.h.h.  $x \in \mathbb{R}^n$  için,

$$|f(x)| \leq M(f)(x)$$

olur. O halde bir  $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ ,  $M$  nin bir sabit noktasıdır ancak ve ancak  $f$  pozitif ve her  $r > 0$  için h.h.h.  $x \in \mathbb{R}^n$  noktasında

$$\frac{1}{|B_r|} \int_{B_r} f(x-y) dy \leq f(x)$$

olmasıdır. Ayrıca  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ,  $M$  nin sabit fonksiyondan farklı bir sabit noktası olsun  $\varphi$ ,  $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx = 1$  koşulunu sağlayacak biçimde  $S(\mathbb{R}^n)$  Schwartz sınıfındaki bir pozitif fonksiyon olsun. Bu durumda,  $\varphi_t(x) = \frac{1}{t^n} \varphi\left(\frac{x}{t}\right)$  olmak üzere,

$$f_t = f * \varphi_t(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n)$$

biçimindeki bir fonksiyonun da  $M$  nin (sabit fonksiyondan farklı) sabit bir noktası olmasını sağlayan bir  $t > 0$  vardır.  $f_t$  nin  $M$  nin bir sabit noktası olması için

$$f_t \geq M(f_t)$$

olduğunu göstermek yeterlidir. Bu da Fubini teoremi ve  $M$  nin ötelemeye göre değişmeli ( $\tau_\alpha f(x) = f(x-\alpha)$ ,  $\tau_\alpha M = M\tau_\alpha$ ) olmasından çıkar: her  $r > 0$  için  $\chi_r = \frac{1}{|B_r|} \chi_{B_r}$  olsun. Bu durumda

$$M(f_t) = \sup_{r>0} \chi_r * f_t \text{ ve}$$

$$\begin{aligned} \chi_r * (\varphi_t * f)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_t(y) (\chi_r * \tau_y f)(x) dy \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_t(y) M(\tau_y f)(x) dy \\ &= \varphi_t * M(f)(x) = f_t \end{aligned}$$

olur. Lebesgue diferansiyellenebilme teoreminden,  $f$  sabit olmayan bir fonksiyon olduğu için,  $f_t$  nin sabit olmayan bir fonksiyon olmasını sağlayan bir  $t > 0$  var olur.

Şimdi teoremin ispatına geçebiliriz.

**İspat:** “  $\Leftarrow$  ”

$n \geq 3$  ve  $\frac{n}{n-2} < p \leq \infty$  olsun. Önce Riesz potansiyelleri hakkındaki bazı sonuçları söyleyelim:

$$\mathcal{F}_g(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i \langle x, \xi \rangle} g(x) dx, \quad \langle x, \xi \rangle = x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2 + \dots + x_n \xi_n$$

ve  $\mathcal{F}^{-1}$  Fourier dönüşümünün tersini göstermek üzere, klasik biçimde,  $S(\mathbb{R}^n)$  üzerinde  $(I_\alpha)_{\alpha \in [0, n)}$  Riesz potansiyelleri

$$I_\alpha(g) = \mathcal{F}^{-1}[(2\pi|\xi|)^{-\alpha} \mathcal{F}g]$$

olarak tanımlanır.

Hardy-Littlewood-Sobolev temel teoremi,

$1 < q < p < \infty$  ve  $0 < \alpha < \frac{n}{q}$ ,  $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} - \frac{\alpha}{n}$  için

$$\|I_\alpha(g)\|_p \leq C_{p,q} \|g\|_q$$

ve  $\Gamma$  gama fonksiyonu ve  $c_\alpha = \pi^{\frac{-n}{2}} 2^{-\alpha} \frac{\Gamma(\frac{n-\alpha}{2})}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})}$  olmak üzere

$$I_\alpha(g)(x) = c_\alpha \int_{\mathbb{R}^n} \frac{g(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy \quad (4.2.1)$$

integral gösteriminin sağladığını belirtir.

Şimdi iddianın ispatına geçelim.

Adım 1.  $n \geq 3$  ve  $\frac{n}{n-2} < p < \infty$  durumuna bakalım.

$\frac{1}{p} = \frac{1}{q} - \frac{\alpha}{n}$  olmak üzere, her  $1 < q < \min(p, \frac{n}{2})$  ve her  $2 < \alpha < \frac{n}{q}$  için, Fourier dönüşümü aracılığıyla,  $L^q(\mathbb{R}^n)$  ye Hardy-Littlewood-Sobolev teoremiyle genişletilerek,

$S(\mathbb{R}^n)$  için sağlanan

$$\Delta(I_\alpha(g)) = -I_{\alpha-2}(g), \quad \forall g \in L^q(\mathbb{R}^n) \quad (4.2.2)$$

özdeşliği vardır. Ayrıca her sıfırdan farklı pozitif  $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$  fonksiyonu için (4.2.1) ( $\alpha - 2$  uygulanarak) ve (4.2.2) denklemleri  $I_\alpha(g)$  nin  $M$  nin bir sabit noktası olduğunu gösterir. Hardy-Littlewood-Sobolev teoreminden  $I_\alpha(g)$  nin  $M$  nin sabitten farklı bir sabit noktası ve  $L^p(\mathbb{R}^n)$  uzayına ait olduğunu anlarız.

Adım 2.  $n \geq 3$  olduğunu varsayalım.  $M$  nin sabitten farklı bir  $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$  sabit noktasının olduğunu göstermek için (adım 1 den) sonlu  $p$  için bilinen sonucu kullanacağız:  $M$  nin sabitten farklı bir  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$  sabit noktasını seçelim. Bu durumda, ( $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$  olmak üzere,  $\varphi_t \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$  olduğundan),  $L^\infty(\mathbb{R}^n)$  uzayına ait olan ve sabit olmayan  $f_t$  fonksiyonu  $M$  nin bir sabit noktası işlemi tamamlar.

Şimdi ispatın diğer yönünü yapalım: " $\Rightarrow$ "

Adım 1.  $n \geq 3$  olması gerektiğini gösterelim. Çelişki yöntemiyle yapacağız.

$1 \leq p \leq \infty$  durumunda,  $n = 1, 2$  için  $M$  nin  $L^p(\mathbb{R}^n)$  uzayında sabitten farklı  $M$  nin bir sabit noktasının olmadığını gösterebiliriz.

$f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $M$  nin sabit fonksiyondan farklı bir sabit noktası olsun.  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R})$  olduğunu varsayabiliriz. Bu nedenle,  $f$  pozitif bir konkav fonksiyon olur: Her  $x \in \mathbb{R}$  için,

$$f(x) \leq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

olur. (Burada  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x_0) \neq 0$  biçiminde seçilebilir). Fakat  $f \in L^p(\mathbb{R})$ ,

$1 \leq p \leq \infty$  ve sabitten farklı bir pozitif fonksiyon olduğu için bu yukarıdaki eşitsizliğin sağlanmasına imkan yoktur.

Yine,  $1 \leq p \leq \infty$  için, sabitten farklı  $f \in L^p(\mathbb{R}^2)$  nin bir sabit noktası var olmaz. Olsaydı, daha önce söylediğimiz gibi,  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2) \cap L^p(\mathbb{R}^2)$  olarak var sayabilirdik.

$x_0 \in \mathbb{R}^2$  ve  $\varepsilon \in (0,1)$ ,  $t_\varepsilon = f(x_0) - \varepsilon$  olsun.  $|x - x_\varepsilon| \leq \delta$  ise  $f(x) > t_\varepsilon$  olacak biçimde  $\delta > 0$  buluruz.  $\delta < |x - x_\varepsilon| < R$  için

$$G(x) = f(x) + \frac{t_\varepsilon}{\ln(R) - \ln(t_\varepsilon)} (\ln(|x - x_0|) - \ln(t_\varepsilon)) - t_\varepsilon$$

fonksiyonunu göz önünde bulunduralım.  $x \rightarrow \ln(|x - x_0|)$ ,

$C_R = \{x \in \mathbb{R}^2: \delta < |x - x_0| < R\}$  de harmonik ve  $f, C_R$  üzerinde süper-harmonik olduğundan  $G$  de  $C_R$  üzerinde süper-harmonik olur. Ayrıca  $G, C_R$  nin sınırı üzerinde pozitif olur. Böylece maksimum prensibi  $G$  nin  $C_R$  nin kapanışı üzerinde pozitif olduğunu verir. Buradan, sabit  $x$  için, limite geçilerek ( $R \rightarrow \infty$ ), her yerde  $f(x) \geq t_\varepsilon$  olur.  $\varepsilon$  keyfi olduğu için,  $f$  sabit olur, bu çelişki oluşturur.

Bundan sonra,  $n \geq 3$  olduğunu varsayıyoruz.

Adım 2.  $n \geq 3$  için,  $\frac{n}{n-2} < p \leq \infty$  olduğunu göstereceğiz.

$f \in L^p(\mathbb{R}^n) \cap C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ,  $M$  nin sabit fonksiyondan farklı bir sabit noktası olsun.

$f(0) = M(f)(0) > 0$  olduğundan, her  $x \in \mathbb{R}^n$  için,

$$|x| \leq t \Rightarrow f(x) \geq t$$

olacak biçimde bir  $t > 0$  var olur.  $|\cdot|^{2-n}$  fonksiyonu  $\mathcal{D}_R = \{x \in \mathbb{R}^n: t < |x| < R\}$  üzerinde harmonik ve  $f, \mathcal{D}_R$  üzerinde süper-harmonik olduğundan

$$H(x) = f(x) - t^{n-1}|x|^{2-n} + t^{n-1}R^{2-n}$$

fonksiyonu  $\mathcal{D}_R$  üzerinde süper-harmonik olur. Ayrıca  $H, \mathcal{D}_R$  nin sınırı üzerinde pozitiftir. Yine, maksimum prensibi,  $H$  nin  $\mathcal{D}_R$  nin kapanışı üzerinde pozitif olduğunu verir. Böylece limite geçilerek ( $R \rightarrow \infty$ ), her yerde  $f(x) \geq t^{n-1}|x|^{2-n}$  olur.

$f \in L^p(\mathbb{R}^n)$  olduğu varsayımını ve polar koordinatları kullanılarak,  $\frac{n}{n-2} < p \leq \infty$  elde edilir.

### 4.3. Lipschitz Fonksiyonların Maksimal Fonksiyonu

Son olarak, Buckley (1999) tarafından homojen uzaylarda maksimal operatörünün Lipschitz ve Hölder fonksiyonları üzerindeki çalışmasını vereceğiz.

Eğer  $(X, d)$  bir metrik uzay ve  $\mu, X$  üzerinde bir doubling ölçüm ise  $(X, d, \mu)$  ye bir homojen uzay denir. Her bir  $t \in (0, 1]$  için eğer  $f$  sınırlı ve her  $x, y \in X$  için

$|f(x) - f(y)| \leq cd(x, y)^t$  olacak biçimde bir  $c$  sabiti varsa  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  (sürekli) fonksiyonuna  $Lip_t(x)$  Lipschitz sınıfına aittir denir.

$Lip_t(x)$ ,

$$\|f\|_{Lip_t(x)} = \|f\|_{\infty} + \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x, y)^t}$$

normuna göre bir Banach uzayı olur. Genellikle,  $t \in (0,1)$  için,  $Lip_t(x)$  fonksiyonlarına Hölder sürekli fonksiyonlar denir. Burada bunlara toplu olarak işlem uygulanacağından bir tek ad vermek yoluna gidilmiştir. Ayrıca,  $t \in (0,1]$  olmak üzere her  $x, y \in X$  için (sınırlı olmak zorunda olmayan)

$$|f(x) - f(y)| \leq cd(x, y)^t$$

koşulunu sağlayan tüm  $f$  fonksiyonları  $lip_t(x)$  ile gösterelim. Bu uzaya

$$\|f\|_{lip_t(x)} = \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x, y)^t}$$

semi normuna atayalım. Eğer  $X$  sınırlı ise bu durumda  $lip_t(x) = Lip_t(x)$  olur.

$\delta \in (0,1]$  ve bir  $(X, d, \mu)$  homojen uzay verilsin. Eğer her  $x \in X, r > 0, \varepsilon \in (0,1)$  için

$$\mu(B(x, r) \setminus B(x, r(1 - \varepsilon))) \leq K\varepsilon^{\delta} \mu(B(x, r)) \quad 4.3.1$$

olacak biçimde bir  $K \geq 1$  sabit varsa  $(X, d, \mu)$  uzayının  $\delta$  – halkasal azalma özelliğini sağladığını söyleriz.

Eğer  $\delta$  nin değeri ile ilgilenmiyorsak,  $\delta$  ön takısını görmezden gelebiliriz. 1 –halkasal azalma özelliğine güçlü halkasal azalma özelliği adını da veririz.

**Teorem 4.3.1.**  $0 < t, \delta \leq 1$  ve  $(X, d, \mu)$  homojen uzayının  $\delta$  – halkasal azalma özelliğini sağladığını varsayalım. Bu durumda  $s = \min(t, \delta)$  için,  $M: Lip_t(x) \rightarrow Lip_s(x)$  olur (Buckley 1999).

**Teorem 4.3.2.**  $0 < t \leq \delta \leq 1$  ve  $(X, d, \mu)$  homojen uzayının  $\delta$  – halkasal azalma özelliğini sağladığını varsayalım. Bu durumda  $M: lip_t(x) \rightarrow lip_t(x)$  olur (Buckley 1999).

Sadece ilk teoremin ispatı verilecektir. Çünkü diğer ispat ilkin benzemektedir. Ayrıca  $X$  sınırlı ise ilk teoremden ikincisi çıkar.

**İspat 4.3.1.**  $f \in \text{Lip}_t(x)$  ve  $\|f\|_{\text{Lip}_t(x)} = 1$  biçiminde verilsin.  $\|Mf\|_{L^\infty(x)} = \|f\|_{L^\infty(x)}$  olur. Bu nedenle sadece  $Mf$  nin değerlerindeki fark için uygun bir sınır bulunmalıdır. Keyfi olarak verilmiş  $x, y \in X$  için,  $a = d(x, y)$  olsun.  $x, y$  simetrliliğinden,

$$Mf(y) \geq Mf(x) - ca^s$$

koşulunu sağlayan ( $x, y$  den bağımsız) bir  $c$  bulmak yeterlidir.  $\alpha \leq 1$  olduğunu varsayabiliriz, çünkü değer durumunda  $Mf$  deki sınır tek başına bu eşitsizliği verebilmektedir.

$r > 0$  sayısını,

$$Mf(x) \leq \frac{1}{\mu(B(x, r))} \int_{B(x, r)} |f| d\mu + a^s$$

olacak biçimde seçelim.  $r \leq a$  ise bu durumda,

$z \in B(x, r) \cup B(y, r)$  için  $|f(x) - f(z)| \leq 3^t a^t$  olur, böylece

$$\left| \frac{1}{\mu(B(x, r))} \int_{B(x, r)} |f| d\mu - \frac{1}{\mu(B(y, r))} \int_{B(y, r)} |f| d\mu \right| \leq 3^t a^t \leq 3^t a^s$$

olur. Bu da istenen eşitsizliği verir.

Her bir  $0 < c < \infty$  için,  $S_c$

$$\frac{1}{\mu(B(x, r))} \int_{B(x, r)} |g| d\mu - \frac{1}{\mu(B(y, r+a))} \int_{B(y, r+a)} |g| d\mu \leq ca^s$$

koşulunu sağlayan  $g \in L^1(B(x, r+2a))$  fonksiyonlar sınıfı olsun. İspatı bitirmek için, şunu göstereceğiz. Eğer  $r > 0$  ise bu durumda,  $f$  nin  $S_c$  sınıfında yer almasını sağlayan,  $x$  ve  $y$  den bağımsız bir  $c$  sabiti vardır. Ayrıca,

$$F = \left\{ g: \|g\|_{\text{Lip}_t(B(x, r+2a))} \leq 1, \|g\|_{L^\infty(B(x, r+2a))} \leq A \equiv \min\{1, (6r)^t\} \right\}$$

olmak üzere, eğer  $F \subset S_c$  olacak biçimde sabit bir  $c$  varsa bu iddianın elde edilebileceğini göstereceğiz.  $\|f\|_{L^\infty(x)} \leq 1$  olduğundan,  $A = 1$  ise bu iddianın doğru olacağı açıktır. Bu nedenle  $A < 1$  olduğunu ve bir  $c$  sabiti için  $F \subset S_c$  olduğunu varsayalım.  $m = \inf_{z \in B(x, r+2a)} f(z)$  ve  $M = \sup_{z \in B(x, r+2a)} f(z)$  olmak üzere,  $f$  için Lipschitz kestirimi ve  $r > a$  durumunu  $f_1 = f - m$  ve  $f_2 = f - M$  nin  $F$  içinde yer almasını gerektirir. Ayrıca bir  $z_0 \in B(x, r + 2a)$  için  $f(z_0) \geq A$  oluyorsa bu durumda hem  $f$  hem de  $f_1$ ,  $B(x, r + 2a)$  üzerinde negatif olmazlar.  $f_1 \in S_c$  olduğundan,  $f \in S_c$  olur. Benzer biçimde, eğer  $f(z_0) \leq -A$  ise bu durumda hem  $f$  hem de  $f_2$ ,  $B(x, r + 2a)$  üzerinde pozitif olmazlar, böylece  $f_1 \in S_c$  olduğundan,  $f \in S_c$  olur. Bu da iddiayı doğru kılar.

$F \subset S_c$  yı göstermek kaldı. Eğer  $g \in F$  ise bu durumda,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\mu(B(x, r))} \int_{B(x, r)} |g| d\mu - \frac{1}{\mu(B(y, r + a))} \int_{B(y, r+a)} |g| d\mu \\ & \leq \left[ \frac{1}{\mu(B(x, r))} - \frac{1}{\mu(B(y, r + 2a))} \right] \cdot \int_{B(x, r)} |g| d\mu \\ & \leq \left[ \frac{1}{\mu(B(x, r))} - \frac{1}{\mu(B(y, r + a))} \right] \cdot A\mu(B(x, r)) \\ & = A \cdot \left[ \frac{\mu(B(y, r + 2a)) - \mu(B(x, r))}{\mu(B(y, r + 2a))} \right] \\ & \leq AK \cdot \left( \frac{a}{r + 2a} \right)^{-\delta} \end{aligned}$$

olur. Son eşitsizlik (4.3.1) den elde edilir . Ayrıca  $\delta > t$  ise bu durumda

$$AK \cdot \left( \frac{a}{r + 2a} \right)^{-\delta} \leq K(6r)^t \left( \frac{a}{r + 2a} \right)^{-\delta} \leq ca^t$$

olur.  $s < t$  olduğunda,  $r \geq 1$  ise  $A(r + 2a)^{-\delta}$  en çok 1 olur,  $r < 1$  ise  $A(r + 2a)^{-\delta}$  en çok  $6^t$  olur. Bu da ispatı tamamlar.

$M$  yerine  $\tilde{M}$  operatörü alınırsa bu teoremler yine sağlanır.

## 5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Hajlasz ve Onnien (2004), Hardy-Littlewood operatörü üzerinde yapılan çalışmaları inceledikten ve kendisinin bu konuda yaptığı çalışmalardan sonra şunu ispatlamıştır:  $u_y(x) = u(x - y)$  olsun.  $1 < p < \infty$  olmak üzere,  $T: L^p(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$  bir alt lineer operatör olsun. Eğer her  $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$  ve her  $y \in \mathbb{R}^n$  için  $T(u_y) = (Tu)_y$  ise bu durumda  $T$  operatörünün  $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  de sınırlı olduğunu göstermiştir.

Buradan bu koşulları sağlayan her  $T$  operatörlerinin sürekli olup olmadığı araştırılabilir.  $T = M$  olması durumunda, Luiro (1997) tarafından pozitif bir sonuç elde etmesinden sonra bu yöndeki çalışmaların önü daha da açılmıştır.





**6.KAYNAKLAR**

Adams, R. A., Fournier, J. J. F. 2003. Sobolev Spaces. Academic Press. New York.

Almgren Jr, F. J., Lieb, E. H. 1989. Symmetric decreasing rearrangement is sometimes continuous J. *In Am. Math. Soc.* 2, 683-773.

Bachman, G., Narici, L. 1998. Functional Analysis. Dover Publications.

Bollobás, B. 1990. Linear Analysis. Cambridge University Press, Cambridge.

Brezis, H., 2010. Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations. Springer.

Buckley, S.M., 1999. Is the maximal function of a Lipschitz function continuous *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.*, 24:519-528.

Cannon, J. W. 2017. Topology as Fluid Geometry . American Mathematical Soc..

Carl, S., Le, V. K., Motreanu, D. 2007. Nonsmooth Variational Problems and Their Inequalities. Springer.

Evans, L.C., Gariepy, R.F. 1992. Measure Theory and Fine Properties of Functions. CRC Press.

Folland, G.B., 2013. Real Analysis. John Wiley&Sons.

Hajlasz, P. 2019. Analysis I. Eriřim: [<http://www.pitt.edu/~hajlasz/Notatki/Analysis%20I.pdf>.] Eriřim Tarihi: 25.12.2019

Hajlasz, P., Onninen, J. 2004. On boundedness of maximal functions in Sobolev spaces, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.*, 29, 167-176.

Hardy, G. H., Littlewood, J. E. 1930. A maximal theorem with function-theoretic applications. *Acta Mathematica*, 54, 81-116.

Heil, C. 2018. Metrics, Norms, Inner Products, and Operator Theory. Birkhäuser.

Jost, J., 2006. Postmodern Analysis. Springer.

Luiro, H. 2007. Continuity of maximal operator in Sobolev spaces, *Proc. Am. Math. Soc.*,135, 243-251.

Kane, J. M. 2016. Writing Proofs in Analysis. Springer.

Kinnunen, J. 1997. The Hardy-Littlewood maximal function of a Sobolev function, *Israel J. Math.*, 100, 117-124.

KINNUNEN, J. 2020. Sobolev Spaces. Erisim:[[https://math.aalto.fi/~jkkinnun/files/sobolev\\_spaces.pdf](https://math.aalto.fi/~jkkinnun/files/sobolev_spaces.pdf)]. Erisim Tarihi: 01.01.2020

Korry, S. 2001. Fixed points of the Hardy-Littlewood maximal operator, *Collect. Math.*, 52(3):289-294.

Kress, R. 2012. Linear Integral Equations. Springer.

MacCluer, B. 2008. Elementary Functional Analysis. Springer.

[McDonald](#), J., Weiss, N.A. 2012. A Course in Real Analysis. Academic Press.

Mitrea, D. 2013. Distributions, Partial Differential Equations, and Harmonic Analysis. Springer, New York.

Pérez, C., Picon, T., Saari, O., Sousa, M. 2018. Regularity of maximal functions on Hardy–Sobolev spaces. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 50(6), 1007-1015.

Peyrière, J., 2018. An Introduction to Singular Integrals. SIAM.

Shanzhen, L., Yong, D., Dunyan, Y. 2007. Singular Integrals and Related Topics. World Scientific.

Singh, T. B. 2013. Elements of Topology. Chapman and Hall/CRC.

Stein, E.M., 1970. Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions. Princeton university press.

Stein, E.M., Shakarchi, R., 2009. Real Analysis. Princeton University Press.

Thamban, N.M., 2009. Linear Operator Equations. World Scientific.

Wiener, N. 1939. The ergodic theorem, *Duke Math. J.* 5: 1-18.

Ziener, W. P., 2012. Weakly Differentiable Functions. Springer.





## ÖZGEÇMİŞ

1994 yılında Şanlıurfa ilinin Siverek ilçesinde doğdum. İlk, orta ve lise öğrenimimi İzmir’de tamamladım. 2012 yılında Dicle Üniversitesi Ziya Gökalp Eğitim Fakültesi Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği Anabilim Dalında Tezsiz yüksek lisans öğrenimime başladım ve 2017 yılında mezun oldum. 2019 yılında Dicle Üniversitesi Ziya Gökalp Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik öğretmenliğinden mezun oldum. 2018 yılında Dicle Üniversitesi Fen bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisansa başladım. 2019 yılından beri Milli Eğitim Bakanlığına bağlı olarak Ortaokulda Matematik öğretmeni olarak görev yapmaktayım.





DICLE ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
TEZ İNTEHAL FORMU

ÖĞRENCİ BİLGİLERİ

ADI VE SOYADI	Gülistan BUTAKIN
ÖĞRENCİ NO	17804201
EĞİTİM – ÖĞRETİM YILI	2019-2020
YARIYIL	<input checked="" type="checkbox"/> Güz <input type="checkbox"/> Bahar
ANABİLİM DALI	
PROGRAM	Yüksek Lisans
TEZ KONUSU	Maksimal Operatörlerin Regülerlik Özellikleri

İNTEHAL RAPORU BİLGİLERİ

RAPOR TÜRÜ	Tez Savunma Sınavı Sonrası
SAYFA SAYISI	77
BENZERLİK ORANI	%15
RAPORLAMA TARİHİ	09/03/2020

Yukarıda başlığı/konusu gösterilen tez çalışmamın kapak sayfası, giriş, ana bölümler, sonuç ve tartışma kısımlarından oluşan toplam 77 sayfalık kısmına ilişkin, 09/03/2020 tarihinde şahsım/tez danışmanım tarafından Turnitin adlı intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtrelemeler uygulanarak alınmış olan intihal raporuna göre, tezimin benzerlik oranı % 15 'tür.

Uygulanan filtrelemeler:

- Kabul/Onay sayfaları hariç,  
 Kaynakça hariç  
 Alıntılar hariç/dâhil  
 Diğer

Dicle Üniversitesi Fen Enstitüsü Lisansüstü Programlarda Tez Çalışması İntihal Raporu Uygulama Esasları'nı inceledim ve bu Uygulama Esasları'nda belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edilmesi durumunda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini saygılarımla arz ederim.

Gülistan BUTAKIN

09/03/2020

Dr. Öğr. Üyesi Yasin KAYA  
Tez Danışmanı  
09/03/2020

Prof. Dr. Hatun Özlem GÜNEY  
Anabilim Dalı Başkanı  
09/03/2020

Formdaki bilgiler bilgisayar ortamında doldurulmalıdır. El yazısı ile doldurulan formlar geçersiz sayılmaktadır.