GAZİ ÜNİVERSİTESİ

Gazi

1926

KİNG TİP GENELLEŞTİRİLMİŞ SZÁSZ-SHEFFER OPERATÖRLERİ İLE YAKLAŞIM

Tuğba KOÇ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

OCAK 2020

Tuğba KOÇ tarafından hazırlanan "KİNG TİP GENELLEŞTİRİLMİŞ SZÁSZ-SHEFFER OPERATÖRLERİ İLE YAKLAŞIM" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Gazi Üniversitesi Matematik Ana Bilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Nurhayat İSPİR

Matematik Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum. . . . .

Başkan: Prof. Dr. Hatice Gül İNCE İLARSLAN

Matematik Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum. . . . .

Üye: Doç. Dr. Sezgin SUCU

Matematik Ana Bilim Dalı, Ankara Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum. . . . .

Tez Savunma Tarihi: 28/01/2020

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

. . . .

Prof. Dr. Sena YAŞYERLİ

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Tuğba KOÇ
28/01/2020

KİNG TİP GENELLEŞTİRİLMİŞ SZÁSZ-SHEFFER OPERATÖRLERİ İLE YAKLAŞIM

(Yüksek Lisans Tezi)

Tuğba KOÇ

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Ocak 2020

ÖZET

Bu tezde genelleştirilmiş Szász-Sheffer operatörlerinin bazı yaklaşım özellikleri verildi ve lineer fonksiyonları koruyan King tip genelleştirmesi tanımlandı. Bu genelleştirmede, belirli koşulları sağlayan sınırsız diziler yardımı ile daha iyi bir yaklaşım derecesi elde edildi. King tipi operatörlerin yakınsama oranının genelleştirilmiş Szász-Sheffer operatörlerinden daha iyi olduğu ispatlandı ve King tipi operatörlerin yaklaşımlarının Szász-Sheffer operatörlerinden daha iyi olduğu grafikler ile gösterildi. İntegrallenebilir fonksiyonlara yaklaşmak için, genelleştirilmiş Szász-Sheffer-Kantorovich operatörleri tanımlanarak bu operatörün yaklaşım derecesi, süreklilik modülü, Lipschitz sınıfından fonksiyonlar ve Peetre-$\mathcal{K}$ fonksiyoneli cinsinden verildi. Ayrıca Szász-Sheffer-Kantorovich operatörleri için asimptotik yaklaşım formülü Voronovskaja tip teorem ile elde edildi. Aynı zamanda Szász-Sheffer-Kantorovich operatörlerin King tip genelleştirmesi tanımlandı. King tipi operatörlerin Szász-Sheffer-Kantorovich operatörlerinden daha iyi bir yaklaşım oranına sahip olduğu ispatlanarak bu sonuç grafikler ile gösterildi. Son olarak iki değişkenli genelleştirilmiş Szász-Sheffer-Kantorovich operatörleri tanımlanarak tam süreklilik modülü ve kısmi süreklilik modülü yardımıyla yaklaşım hızları elde edildi. Ayrıca Peetre-$\mathcal{K}$ fonksiyoneli ve Lipschitz sınıfından fonksiyonlara yaklaşımı ile ilgili bir sonuç elde edildi.

Bilim Kodu	: 20404
Anahtar Kelimeler	: Sheffer Polinomları, Szász Operatörleri, King Tip Operatörler, Yaklaşım Derecesi
Sayfa Adedi	: 94
Danışman	: Prof. Dr. Nurhayat İSPİR

APPROXIMATION WITH KING TYPE GENERALIZED SZÁSZ-SHEFFER OPERATORS
(M. Sc. Thesis)

Tuğba KOÇ

GAZİ UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
January 2020

ABSTRACT

In this thesis, some approximation properties of generalized Szász-Sheffer operators are given and the King type generalization of these operators which preserves linear functions is introduced. It is proved that the rate of convergence of the King type operators is better than generalized Szász-Sheffer operators. It is supported by graphs that the approximation of King type operators is better than Szász-Sheffer operators. In order to approximate integrable functions, the generalized Szász-Sheffer-Kantorovich operators are defined. The degree of approximation of these operators is given in terms of modulus of continuity and also by means of Lipschitz class and the Petree's K-functional. In addition, the asymptotic approximation formula is obtained by Voronovskaja type theorem for Szász-Sheffer-Kantorovich operators. Moreover, the King type generalization of the Szász-Sheffer-Kantorovich operators is introduced. It is proved that the King type operators have a better order of approximation than Szász-Sheffer-Kantorovich operators and this result is illustrated by graphics. Finally, bivariate Szász-Sheffer-Kantorovich operators are introduced and the degree of approximation for the bivariate case is investigated by using the complete and partial moduli of continuity. The rate of convergence is obtained by means of a Lipschitz type function and the Peetre's K-functional.

Science Code : 20404
Key Words : Sheffer Polynomials, Szász Operators, King Type Operators Degree of Approximation
Page Number : 94
Supervisor : Prof. Dr. Nurhayat İSPİR

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim boyunca engin bilgi birikiminden faydalanmama fırsat veren, bilimsel düşünme yeteneği kazandıran, bu çalışmanın oluşturulmasında büyük bir sabır ve ilgiyle yol gösteren çok değerli hocam Sayın Prof. Dr. Nurhayat İSPİR'e teşekkürü borç bilirim. Çalışmalarımın her aşamasında beni yalnız bırakmayan değerli dostlarıma, beni bugünlere getiren, desteklerini her zaman hissettiğim çok kıymetli aileme teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET iv

ABSTRACT v

TEŞEKKÜR vi

İÇİNDEKİLER vii

ŞEKİLLERİN LİSTESİ ix

SİMGELER VE KISALTMALAR x

1. GİRİŞ 1

2. GENELLEŞTİRİLMİŞ SZÁSZ-SHEFFER OPERATÖRLERİNİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ 5

2.1. Genelleştirilmiş Szász-Sheffer Operatörleri 5

2.2. Genelleştirilmiş Szász-Sheffer Operatörlerinin Yaklaşım Özellikleri 15

2.3. Genelleştirilmiş Szász-Sheffer Operatörlerinin King Tip Genelleştirmesi . 17

2.4. Genelleştirilmiş Szász-Sheffer Operatörlerinin King Tip Genelleştirmesinin Süreklilik Modülü İle Yaklaşım Hızı 21

2.5. $T_n^*\left(f;\alpha_n,\beta_n;x\right)$ Operatörleri ile $T_n\left(f;\alpha_n,\beta_n;x\right)$ Operatörlerinin Karşılaştırılması 23

3. GENELLEŞTİRİLMİŞ SZÁSZ-SHEFFER-KANTOROVICH OPERATÖRLERİNİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ 27

3.1. Genelleştirilmiş Szász-Sheffer-Kantorovich Operatörleri 27

3.2. Genelleştirilmiş Szász-Sheffer-Kantorovich Operatörlerinin Süreklilik Modülü İle Yaklaşım Hızı 36

3.3. Genelleştirilmiş Szász-Sheffer-Kantorovich Operatörlerinin Lipschitz Sınıfından Fonksiyonlara Yaklaşım Oranı 38

3.4. Genelleştirilmiş Szász-Sheffer-Kantorovich Operatörlerinin Peetre-$\mathcal{K}$ Fonksiyoneli İle Yaklaşım Hızı 41

3.5. Genelleştirilmiş Szász-Sheffer-Kantorovich Operatörleri için Voronovskaja tip Teorem 46

Sayfa

3.6. Genelleştirilmiş Szász-Sheffer-Kantorovich Operatörlerinin King Tip Genelleştirmesi 49

3.7. Genelleştirilmiş Szász-Sheffer-Kantorovich Operatörlerinin King Tip Genelleştirmesinin Süreklilik Modülü İle Yaklaşım Hızı 53

3.8. $R_n^*(f;\alpha_n,\beta_n;x)$ Operatörleri ile $R_n(f;\alpha_n,\beta_n;x)$ Operatörlerinin Karşılaştırılması 56

4. İKİ DEĞİŞKENLİ GENELLEŞTİRİLMİŞ SZÁSZ-SHEFFER-KANTOROVICH OPERATÖRLERİNİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ 59

4.1. İki Değişkenli Genelleştirilmiş Szász-Sheffer-Kantorovich Operatörleri . . 59

4.2. İki Değişkenli Genelleştirilmiş Szász-Sheffer-Kantorovich Operatörlerinin Yaklaşım Özellikleri 61

5. SONUÇ 89

KAYNAKLAR 91

ÖZGEÇMİŞ 94

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil **Sayfa**

Şekil 2.1. $T_n\left(f;\alpha_n,\beta_n;x\right)$ ve $S_n\left(f;\alpha_n,\beta_n;x\right)$ operatörlerinin f fonksiyonuna yaklaşımı 17

Şekil 2.2. $T_n\left(f;\alpha_n,\beta_n;x\right)$ ve $T_n^*\left(f;\alpha_n,\beta_n;x\right)$ operatörlerinin f fonksiyonuna yaklaşımı 25

Şekil 3.1. $R_n\left(f;\alpha_n,\beta_n;x\right)$ ve $R_n^*\left(f;\alpha_n,\beta_n;x\right)$ operatörlerinin f fonksiyonuna yaklaşımı 58

Şekil 3.2. $R_n\left(f;\alpha_n,\beta_n;x\right)$ ve $R_n^*\left(f;\alpha_n,\beta_n;x\right)$ operatörlerinin f fonksiyonuna yaklaşımı 58

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklamalar**
$\boldsymbol{C[0,\infty)}$	$[0,\infty)$ aralığındaki sürekli fonksiyonların uzayı
$\boldsymbol{C_B[0,\infty)}$	$[0,\infty)$ aralığındaki sürekli sınırlı fonksiyonların uzayı
$\boldsymbol{\mathcal{K}(f;\delta)}$	f fonksiyonunun Peetre-$\mathcal{K}$ fonksiyoneli
$\boldsymbol{Lip_{M^{\gamma}}}$	γ mertebeli M katsayılı Lipschitz sınıfı
$\boldsymbol{L_n(f;x)}$	L_n lineer pozitif operatörünün f fonksiyonuna uygulanması
$\boldsymbol{R_n(f;\alpha_n,\beta_n;x))}$	Genelleştirilmiş Szász-Sheffer-Kantorovich operatörü
$\boldsymbol{R_n^*(f;\alpha_n,\beta_n;x)}$	King tip genelleştirilmiş Szász-Sheffer-Kantorovich operatörü
$\boldsymbol{S_n(f;x)}$	Szász operatörü
$\boldsymbol{T_n(f;\alpha_n,\beta_n;x)}$	Genelleştirilmiş Szász-Sheffer operatörü
$\boldsymbol{T_n^*(f;\alpha_n,\beta_n;x)}$	King tip genelleştirilmiş Szász-Sheffer operatörü
$\boldsymbol{\omega(f;\delta)}$	f fonksiyonunun süreklilik modülü

1. GİRİŞ

Sürekli fonksiyonlara sınırsız aralıklarda yaklaşmak için kullanılan önemli operatörlerden biri Szász operatörleri ve bu operatörün genelleştirmeleridir.

Szász operatörleri $\forall x \in [0,\infty)$ ve $\forall f \in C[0,\infty)$ için $S_n : C[0,\infty) \to C[0,\infty)$

$$S_n(f;x) = e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{k!} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

olarak tanımlanır [1].

Szász operatörünün önemli genelleştirmelerinden bazıları ortogonal polinomları içeren tipleridir.

İlk olarak Jakimovski-Leviatan tarafından Appell polinomları içeren

$$P_n(f;x) = \frac{e^{-nx}}{A(1)} \sum_{k=0}^{\infty} p_k(nx) f\left(\frac{k}{n}\right)$$

operatörleri tanımlanmıştır [2]. Burada p_k, aşağıdaki üreteç fonksiyonları tarafından tanımlanan Appell polinomları olup

$$A(t)e^{tx} = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(x) t^k$$

A, $|z| < R$, $(R > 1)$'de analitik ve $A(1) \neq 0$ için,

$$A(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k,\ a_0 \neq 0$$

dır. Belirtelim ki $A(z) = 1$ olduğunda $P_n(f;x)$ operatörü Szász operatörüne dönüşür.

Szász operatörünün genelleştirilmeleri ve yaklaşım özellikleri ile ilgili çalışmaların bazıları $[3,4,5,6,7,8,9,10,11,12]$ referanslarında bulunabilir.

Jakimovski-Leviatan operatörlerinin daha genel bir durumu Ismail tarafından [13] de verildi.

[13] de Appell polinomlarından daha genel olan Sheffer polinomları yardımıyla Szász-Sheffer operatörleri

$$L_n(f;x) = \frac{e^{-nxH(1)}}{A(1)} \sum_{k=0}^{\infty} p_k(nx) f\left(\frac{k}{n}\right)$$

biçiminde tanımlanmış ve düzgün yakınsaklık özellikleri incelenmiştir. Burada

$$A(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k,\ H(z) = \sum_{k=1}^{\infty} h_k z^k$$

$|z| < R$, $(R > 1)$'de analitik fonksiyonlar, $\forall k \geq 1$ için $c_k, h_k \in \mathbb{R}$, $c_0 \in \mathbb{R}$, $c_0 \neq 0$, $h_1 \neq 0$ dır. Aynı zamanda $A(1) \neq 0$, $H'(1) = 1$ dir.

Her $x \in [0,\infty)$, $k \geq 0$ olmak üzere $p_k(x)$ Sheffer polinomları

$$A(t)\, e^{xH(t)} = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(x)\, t^k$$

yardımıyla tanımlanır.

Sucu ve Büyükyazıcı, $L_n(f;x)$ operatörünün bir genelleştirmesini yaparak, Sheffer polinomu içeren yeni tip integral operatörleri tanıtıp yaklaşım özelliklerini incelemişlerdir [14].

Mursaleen ve Ansari, $L_n(f;x)$ operatörlerinin Chlodowsky tipini tanımlayarak bu operatöre ilişkin yaklaşım özelliklerini vermiştir [15].

Rao, Wafi ve Deepmala, $L_n(f;x)$ operatörleri için ağırlıklı yaklaşım, istatistiksel yaklaşım ve Voronovskaja tip sonucu kanıtlamıştır [16].

Costabile, Gualtieri ve Napoli, $L_n(f;x)$ operatörleri hakkında bazı sonuçlar sunmuş ve Ismail tipi operatör için asimptotik bir genişleme formülü bulmuşlardır [17].

Dahası, Ismail $L_n(f;x)$ operatörünün Kantorovich formunu

$$L_n^*(f;x) = n\frac{e^{-nxH(1)}}{A(1)} \sum_{k=0}^{\infty} p_k(nx) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(s)\, ds$$

olarak tanımladı.

Sucu ve İbikli, $L_n(f;x)$ ve $L_n^*(f;x)$ operatörlerinin Bessel polinomlarını [18] içeren tipi için farklı yaklaşım özelliklerini incelemiş ve yakınsama oranına ilişkin sonuçlar ortaya koymuşlardır [19].

Szász-Sheffer operatörlerinin ise daha genel bir durumunu [4] de sınırsız diziler yardımı ile tanımlanan Szász operatörlerinden esinlenerek Gal

$$T_n(f;\alpha_n,\beta_n;x) = \frac{e^{\frac{-\alpha_n x H(1)}{\beta_n}}}{A(1)} \sum_{k=0}^{\infty} p_k\left(\frac{\alpha_n x}{\beta_n}\right) f\left(\frac{k\beta_n}{\alpha_n}\right)$$

olarak tanımladı ve operatörün belirli koşulları sağlayan fonksiyonlara yaklaşım derecesini verdi [20].

Bu tez, birinci bölüm giriş bölümü olmak üzere dört bölümden oluşmaktadır.

Biz bu çalışmanın ikinci bölümünde ilk olarak $T_n(f;\alpha_n,\beta_n;x)$ operatörlerini dikkate alıyoruz ve bu operatörlerin daha iyi yaklaşım derecesini veren $T_n^*(f;\alpha_n,\beta_n;x)$ King tipi operatörleri tanımlayıp her iki operatörün yaklaşım derecelerinin bir karşılaştırmasını veriyoruz. Bu durum farklı (α_n), (β_n) dizileri seçilerek grafikler ile gösterilmiştir.

Üçüncü bölümde integrallenebilen fonksiyonlara yaklaşmak için $T_n(f;\alpha_n,\beta_n;x)$ operatörlerinin Kantorovich biçimini tanımlıyoruz.

Szász-Sheffer-Kantorovich operatörleri için süreklilik modülü, Lipschitz sınıfından fonksiyonlar yardımıyla ve Peetre-$\mathcal{K}$ fonksiyoneli ile yaklaşım hızını aynı zamanda asimptotik yaklaşım formülünü Voronovskaja tip teorem ile elde ediyoruz. Bu bölümün önemli bir kesimi Szász-Sheffer-Kantorovich operatörlerinin King tipinin tanımlanmasıdır. King tipi operatörler için yaklaşım derecesi verilerek Szász-Sheffer-Kantorovich operatörleri ile yaklaşım derecesinin bir karşılaştırması yapılıp bunlara ilişkin grafikler verilmiştir.

Tezin son bölümünde Szász-Sheffer-Kantorovich tip operatörlerinin iki değişkenli fonksiyonlara yaklaşımı incelenerek tam süreklilik modülü,kısmi süreklilik modülü ve Peetre-$\mathcal{K}$ fonksiyoneli cinsinden yaklaşım dereceleri elde edilmiştir. Aynı zamanda Lipschitz sınıfından fonksiyonlara yaklaşımı ile ilgili bir sonuç verilmiştir.

2. GENELLEŞTİRİLMİŞ SZÁSZ-SHEFFER OPERATÖRLERİNİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde Szász-Sheffer operatörleri ve bu operatörlerin bir genelleştirilmiş formu tanımlanarak Gal tarafından verilen yaklaşım derecesi ifade edilecektir. Daha sonra genelleştirilmiş Szász-Sheffer operatörlerinin King tipi tanımlanarak genelleştirilmiş Szász-Sheffer operatörleri ile genelleştirilmiş Szász-Sheffer operatörlerinin King tipinin yaklaşım dereceleri karşılaştırılıp yaklaşım oranı grafikler ile desteklenecektir.

2.1. Genelleştirilmiş Szász-Sheffer Operatörleri

$\forall x \in [0, \infty)$ ve $\forall f \in C[0, \infty)$ için $S_n : C[0, \infty) \to C[0, \infty)$ olmak üzere

$$S_n(f; x) = e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{k!} f\left(\frac{k}{n}\right) \tag{2.1}$$

şeklinde tanımlı olan lineer pozitif operatörlere Szász operatörleri denir [1].

Appell polinomlarını içeren Szász operatörlerinin yeni bir genelleştirilmiş tipi Jakimovski ve Leviatan tarafından

$$P_n(f; x) = \frac{e^{-nx}}{A(1)} \sum_{k=0}^{\infty} p_k(nx) f\left(\frac{k}{n}\right)$$

olarak verildi [2].

Burada p_k üretici fonksiyonlar ile tanımlanan Appell polinomları olup

$$A(t) e^{tx} = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(x) t^k$$

A, $|z| < R$, $(R > 1)$' de analitik ve $A(z) \neq 0$ için

$$A(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k,\ a_0 \neq 0$$

dır.

Sheffer polinomlarını içeren Szász operatörlerinin daha genelleştirilmiş formu Ismail tarafından

$$T_n(f;x) = \frac{e^{-nxH(1)}}{A(1)} \sum_{k=0}^{\infty} p_k(nx) f\left(\frac{k}{n}\right) \tag{2.2}$$

olarak tanımlandı [13].

Burada p_k, aşağıdaki üretici fonksiyonlar ile belirlenen Sheffer polinomlarıdır.

$$A(t) e^{xH(t)} = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(x) t^k \tag{2.3}$$

ve

$$A(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \quad , \quad (a_0 \neq 0)$$

$$H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k z^k \quad , \quad (h_1 \neq 0)$$

olup aşağıdaki özelliklerin sağlandığı kabul edilecektir.

(i) $x \in [0, \infty)$ ve $k \in \mathbb{N} \cup 0$ için $p_k(x) \geq 0$

(ii) $A(1) \neq 0$ ve $H'(1) = 1$

(iii) Eş. 2.3, $|t| < R$' de A ve H, $|z| < R$, $(R > 1)$' de analitik fonksiyonlardır.

Eş.2.2 nin daha genelleştirilmiş formu [4] de sınırsız diziler yardımı ile tanımlanan Szász operatörlerinden esinlenerek Gal tarafından aşağıdaki gibi tanımlandı.

2.1.1. Tanım

(α_n), (β_n)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\beta_n}{\alpha_n}=0 \tag{2.4}$$

koşulunu sağlayan iki dizi olsun.

Her $x\in[0,\infty)$ ve $f\in C[0,\infty)$ için $T_n : C[0,\infty)\to C[0,\infty)$ olmak üzere

$$T_n(f;\alpha_n,\beta_n;x)=\frac{e^{\frac{-\alpha_n x H(1)}{\beta_n}}}{A(1)}\sum_{k=0}^{\infty}p_k\left(\frac{\alpha_n x}{\beta_n}\right)f\left(\frac{k\beta_n}{\alpha_n}\right) \tag{2.5}$$

şeklinde tanımlı olan operatörlere genelleştirilmiş Szász-Sheffer operatörleri denir [20].

2.1.2. Lemma

$n\in\mathbb{N}$,$\forall x\in[0,\infty)$ olmak üzere Eş.2.5 ile tanımlı $T_n(f;\alpha_n,\beta_n;x)$ lineer pozitif operatörleri için

(i) $T_n(1;\alpha_n,\beta_n;x)=1$

(ii) $T_n(t;\alpha_n,\beta_n;x)=x+\frac{\beta_n}{\alpha_n}\frac{A'(1)}{A(1)}$

(iii) $T_n\left(t^2;\alpha_n,\beta_n;x\right)$

$$=x^2+x\frac{\beta_n}{\alpha_n}\left(2\frac{A'(1)}{A(1)}+H''(1)+1\right)+\frac{\beta_n^2}{\alpha_n^2}\left(\frac{A''(1)}{A(1)}+\frac{A'(1)}{A(1)}\right)$$

(iv) $T_n\left(t^3;\alpha_n,\beta_n;x\right)=x^3+x^2\frac{\beta_n}{\alpha_n}\left(3H''(1)+3\frac{A'(1)}{A(1)}+3\right)$

$$+x\frac{\beta_n^2}{\alpha_n^2}\left(H'''(1)+3H''(1)+3H''(1)\frac{A'(1)}{A(1)}+6\frac{A'(1)}{A(1)}+1\right)$$

$$+\frac{\beta_n^3}{\alpha_n^3}\left(\frac{A'''(1)}{A(1)}+3\frac{A''(1)}{A(1)}+\frac{A'(1)}{A(1)}\right)$$

$$(v)\;\; T_n\left(t^4;\alpha_n,\beta_n;x\right)=x^4+x^3\frac{\beta_n}{\alpha_n}\left(6H''(1)+4\frac{A'(1)}{A(1)}+6\right)$$

$$+x^2\frac{\beta_n^2}{\alpha_n^2}\left(4H'''(1)+3\left(H''(1)\right)^2+12H''(1)\frac{A'(1)}{A(1)}\right.$$

$$\left.+6\frac{A''(1)}{A(1)}+18H''(1)+18\frac{A'(1)}{A(1)}+7\right)$$

$$+x\frac{\beta_n^3}{\alpha_n^3}\left(H^{(4)}(1)+4H'''(1)\frac{A'(1)}{A(1)}+6H''(1)\frac{A''(1)}{A(1)}+4\frac{A'''(1)}{A(1)}\right.$$

$$\left.+6H'''(1)+18H''(1)\frac{A'(1)}{A(1)}+18\frac{A''(1)}{A(1)}+7H''(1)+14\frac{A'(1)}{A(1)}+1\right)$$

$$+\frac{\beta_n^4}{\alpha_n^4}\left(\frac{A^{(4)}(1)}{A(1)}+6\frac{A'''(1)}{A(1)}+7\frac{A''(1)}{A(1)}+\frac{A'(1)}{A(1)}\right)$$

eşitlikleri geçerlidir.

İspat

Burada Eş.2.5 için $1, t, t^2$ test fonksiyon değerleri Gal tarafından verilmiştir [27]. Şimdi Eş.2.5 için t^3 ve t^4 ün değerlerini bulalım.

(iv) Eş.2.3 nın t'ye göre 3.türevi alınarak $H'(1)=1$ olmak üzere $t=1$, $x=\dfrac{\alpha_n x}{\beta_n}$ için

$$e^{\frac{\alpha_n x H(1)}{\beta_n}}\left(x^3\frac{\alpha_n^3}{\beta_n^3}A(1)+x^2\frac{\alpha_n^2}{\beta_n^2}\left(3H''(1)A(1)+3A'(1)\right)\right.$$

$$\left.+x\frac{\alpha_n}{\beta_n}\left(H'''(1)A(1)+3H''(1)A'(1)+3A''(1)\right)+A'''(1)\right)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}p_k\left(\frac{\alpha_n x}{\beta_n}\right)k(k-1)(k-2)$$

bulunur. Her iki taraf $\dfrac{e^{\frac{-\alpha_n x H(1)}{\beta_n}}}{A(1)}\dfrac{\beta_n^3}{\alpha_n^3}$ ile çarpılarak

$$x^3+x^2\frac{\beta_n}{\alpha_n}\left(3H''(1)+3\frac{A'(1)}{A(1)}\right)$$

$$+x\frac{\beta_n^2}{\alpha_n^2}\left(H'''(1)+3H''(1)\frac{A'(1)}{A(1)}+3\frac{A''(1)}{A(1)}\right)+\frac{\beta_n^3}{\alpha_n^3}A'''(1)$$

$$=\frac{e^{\frac{-\alpha_n x H(1)}{\beta_n}}}{A(1)}\sum_{k=0}^{\infty}p_k\left(\frac{\alpha_n x}{\beta_n}\right)k(k-1)(k-2)\frac{\beta_n^3}{\alpha_n^3}$$

$$=\frac{e^{\frac{-\alpha_n x H(1)}{\beta_n}}}{A(1)}\sum_{k=0}^{\infty}p_k\left(\frac{\alpha_n x}{\beta_n}\right)k^3\frac{\beta_n^3}{\alpha_n^3}-3\frac{e^{\frac{-\alpha_n x H(1)}{\beta_n}}}{A(1)}$$

$$\times\sum_{k=0}^{\infty}p_k\left(\frac{\alpha_n x}{\beta_n}\right)k^2\frac{\beta_n^3}{\alpha_n^3}+2\frac{e^{\frac{-\alpha_n x H(1)}{\beta_n}}}{A(1)}\sum_{k=0}^{\infty}p_k\left(\frac{\alpha_n x}{\beta_n}\right)k\frac{\beta_n^3}{\alpha_n^3}$$

$$= T_n\left(t^3;\alpha_n,\beta_n;x\right) - 3\frac{\beta_n}{\alpha_n}T_n\left(t^2;\alpha_n,\beta_n;x\right) + 2\frac{\beta_n^2}{\alpha_n^2}T_n\left(t;\alpha_n,\beta_n;x\right)$$

elde edilir. Buradan

$$T_n\left(t^3;\alpha_n,\beta_n;x\right) =$$

$$= x^3 + x^2\frac{\beta_n}{\alpha_n}\left(3H''(1) + 3\frac{A'(1)}{A(1)} + 3\right)$$

$$+x\frac{\beta_n^2}{\alpha_n^2}\left(H'''(1) + 3H''(1) + 3H''(1)\frac{A'(1)}{A(1)} + 3\frac{A''(1)}{A(1)} + 6\frac{A'(1)}{A(1)} + 1\right)$$

$$+\frac{\beta_n^3}{\alpha_n^3}\left(\frac{A'''(1) + 3A''(1) + A'(1)}{A(1)}\right)$$

bulunur.

(iv) Eş.2.3 nın t'ye göre 4.türevi alınarak $H'(1) = 1$ olmak üzere $t = 1$, $x = \dfrac{\alpha_n x}{\beta_n}$ için

$$e^{\frac{\alpha_n x H(1)}{\beta_n}}\left(x^4\frac{\alpha_n^4}{\beta_n^4}A(1) + x^3\frac{\alpha_n^3}{\beta_n^3}\left(6H''(1)A(1) + 4A'(1)\right)\right.$$

$$+x^2\frac{\alpha_n^2}{\beta_n^2}\left(4H'''(1)A(1) + 3\left(H''(1)\right)^2A(1) + 12H''(1)A'(1) + 6A''(1)\right)$$

$$\left.+x\frac{\alpha_n}{\beta_n}\left(H^{(4)}(1)A(1) + 4H'''(1)A'(1) + 6H''(1)A''(1) + 4A'''(1)\right) + A^{(4)}(1)\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}p_k\left(\frac{\alpha_n x}{\beta_n}\right)k(k-1)(k-2)(k-3)$$

bulunur. Her iki taraf $\dfrac{e^{\frac{-\alpha_n x H(1)}{\beta_n}}}{A(1)} \dfrac{\beta_n^4}{\alpha_n^4}$ ile çarpılarak

$$x^4 \frac{\alpha_n^4}{\beta_n^4} + x^3 \frac{\alpha_n^3}{\beta_n^3} \left(6H''(1) + 4\frac{A'(1)}{A(1)} \right)$$

$$+x^2 \frac{\alpha_n^2}{\beta_n^2} \left(4H'''(1) + 3(H''(1))^2 + 12H''(1)\frac{A'(1)}{A(1)} + 6\frac{A''(1)}{A(1)} \right)$$

$$+x\frac{\alpha_n}{\beta_n} \left(H^{(4)}(1) + 4H'''(1)\frac{A'(1)}{A(1)} + 6H''(1)\frac{A''(1)}{A(1)} + 4\frac{A'''(1)}{A(1)} \right) + \frac{A^{(4)}(1)}{A(1)}$$

$$= \frac{e^{\frac{-\alpha_n x H(1)}{\beta_n}}}{A(1)} \sum_{k=0}^{\infty} p_k \left(\frac{\alpha_n x}{\beta_n} \right) k(k-1)(k-2)(k-3)\frac{\beta_n^4}{\alpha_n^4}$$

$$= \frac{e^{\frac{-\alpha_n x H(1)}{\beta_n}}}{A(1)} \sum_{k=0}^{\infty} p_k \left(\frac{\alpha_n x}{\beta_n} \right) k^4 \frac{\beta_n^4}{\alpha_n^4} - 6\frac{e^{\frac{-\alpha_n x H(1)}{\beta_n}}}{A(1)} \sum_{k=0}^{\infty} p_k \left(\frac{\alpha_n x}{\beta_n} \right) k^3 \frac{\beta_n^4}{\alpha_n^4}$$

$$+11\frac{e^{\frac{-\alpha_n x H(1)}{\beta_n}}}{A(1)} \sum_{k=0}^{\infty} p_k \left(\frac{\alpha_n x}{\beta_n} \right) k^2 \frac{\beta_n^4}{\alpha_n^4} - 6\frac{e^{\frac{-\alpha_n x H(1)}{\beta_n}}}{A(1)} \sum_{k=0}^{\infty} p_k \left(\frac{\alpha_n x}{\beta_n} \right) k \frac{\beta_n^4}{\alpha_n^4}$$

$$= T_n\left(t^4;\alpha_n,\beta_n;x\right) - 6\frac{\beta_n}{\alpha_n} T_n\left(t^3;\alpha_n,\beta_n;x\right)$$

$$+11\frac{\beta_n^2}{\alpha_n^2} T_n\left(t^2;\alpha_n,\beta_n;x\right) - 6\frac{\beta_n^3}{\alpha_n^3} T_n\left(t;\alpha_n,\beta_n;x\right)$$

elde edilir. Buradan

$$T_n\left(t^4;\alpha_n,\beta_n;x\right) = x^4 + x^3\frac{\beta_n}{\alpha_n} \left(6H''(1) + 4\frac{A'(1)}{A(1)} + 6 \right)$$

$$+x^2\frac{\alpha_n^2}{\beta_n^2}\left(4H'''(1)+3\left(H''(1)\right)^2+12H''(1)\frac{A'(1)}{A(1)}\right.$$

$$\left.+6\frac{A''(1)}{A(1)}+18H''(1)+18\frac{A'(1)}{A(1)}+7\right)$$

$$+x\frac{\beta_n^3}{\alpha_n^3}\left(H^{(4)}(1)+4H'''(1)\frac{A'(1)}{A(1)}+6H''(1)\frac{A''(1)}{A(1)}+4\frac{A'''(1)}{A(1)}\right.$$

$$\left.+6H'''(1)+18H''(1)\frac{A'(1)}{A(1)}+18\frac{H''(1)}{A(1)}+7H''(1)+14\frac{A'(1)}{A(1)}+1\right)$$

$$+\frac{\beta_n^4}{\alpha_n^4}\left(\frac{A^{(4)}+6A'''(1)+7A''(1)+A'(1)}{A(1)}\right)$$

bulunur.

2.1.2.Lemmanın bir sonucu olarak momentleri verebiliriz.

2.1.3. Lemma

Her $x\in[0,\infty)$ için, $n\in\mathbb{N}$ olmak üzere Eş.2.5 ile tanımlı $T_n\left(f;\alpha_n,\beta_n;x\right)$ lineer pozitif operatörleri için

(i) $\mu_{n,1}(x)=T_n\left((t-x);\alpha_n,\beta_n;x\right)$

$$=\frac{\beta_n}{\alpha_n}\frac{A'(1)}{A(1)}$$

(ii) $\mu_{n,2}(x)=T_n\left((t-x)^2;\alpha_n,\beta_n;x\right)$

$$= x\frac{\beta_n}{\alpha_n}\left(H''\left(1\right)+1\right)+\frac{\beta_n^2}{\alpha_n^2}\left(\frac{A''\left(1\right)}{A\left(1\right)}+\frac{A'\left(1\right)}{A\left(1\right)}\right)$$

(iii) $\mu_{n,4}\left(x\right)=T_n\left(\left(t-x\right)^4;\alpha_n,\beta_n;x\right)$

$$= x^2\frac{\beta_n^2}{\alpha_n^2}\left(6H''\left(1\right)+3\left(H''\left(1\right)\right)^2+3\right)$$

$$+x\frac{\beta_n^3}{\alpha_n^3}\left(H^{(4)}\left(1\right)+8H'''\left(1\right)+15H''\left(1\right)+4H'''\left(1\right)\frac{A'\left(1\right)}{A\left(1\right)}\right.$$

$$\left.+6H''\left(1\right)\frac{A''\left(1\right)}{A\left(1\right)}+24H''\left(1\right)\frac{A'\left(1\right)}{A\left(1\right)}+6\frac{A''\left(1\right)}{A\left(1\right)}+16\frac{A'\left(1\right)}{A\left(1\right)}+5\right)$$

$$+\frac{\beta_n^4}{\alpha_n^4}\left(\frac{A^{(4)}\left(1\right)}{A\left(1\right)}+8\frac{A'''\left(1\right)}{A\left(1\right)}+15\frac{A''\left(1\right)}{A\left(1\right)}+6\frac{A'\left(1\right)}{A\left(1\right)}+\frac{1}{5}\right)$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat

(i) 2.1.2.Lemma (i) ve (ii) den

$\mu_{n,1}\left(x\right)=T_n\left(\left(t-x\right);\alpha_n,\beta_n;x\right)$

$$= T_n\left(t;\alpha_n,\beta_n;x\right)-xT_n\left(1;\alpha_n,\beta_n;x\right)$$

$$= \frac{\beta_n}{\alpha_n}\frac{A'\left(1\right)}{A\left(1\right)}$$

dir.

(ii) 2.1.2.Lemma (i),(ii) ve (iii) den

$$\mu_{n,2}(x) = T_n\left((t-x)^2;\alpha_n,\beta_n;x\right)$$

$$= T_n\left(t^2;\alpha_n,\beta_n;x\right) - 2xT_n(t;\alpha_n,\beta_n;x) + x^2T_n(1;\alpha_n,\beta_n;x)$$

$$= x\frac{\beta_n}{\alpha_n}\left(H''(1)+1\right) + \frac{\beta_n^2}{\alpha_n^2}\left(\frac{A''(1)}{A(1)} + \frac{A'(1)}{A(1)}\right)$$

dir.

(iii) 2.1.2.Lemma (i),(ii),(iii),(iv),(v) den

$$\mu_{n,4}(x) = T_n\left((t-x)^4;\alpha_n,\beta_n;x\right)$$

$$= T_n\left(t^4;\alpha_n,\beta_n;x\right) - 4xT_n\left(t^3;\alpha_n,\beta_n;x\right) + 6x^2T_n\left(t^2;\alpha_n,\beta_n;x\right)$$

$$-4x^3T_n(t;\alpha_n,\beta_n;x) + 4x^4T_n(1;\alpha_n,\beta_n;x)$$

$$= x^2\frac{\beta_n^2}{\alpha_n^2}\left(6H''(1) + 3\left(H''(1)\right)^2 + 3\right)$$

$$+x\frac{\beta_n^3}{\alpha_n^3}\left(H^{(4)}(1) + 8H'''(1) + 15H''(1) + 4H'''(1)\frac{A'(1)}{A(1)}\right.$$

$$\left.+6H''(1)\frac{A''(1)}{A(1)} + 24H''(1)\frac{A'(1)}{A(1)} + 6\frac{A''(1)}{A(1)} + 16\frac{A'(1)}{A(1)} + 5\right)$$

$$+\frac{\beta_n^4}{\alpha_n^4}\left(\frac{A^{(4)}(1)}{A(1)}+8\frac{A'''(1)}{A(1)}+15\frac{A''(1)}{A(1)}+6\frac{A'(1)}{A(1)}+\frac{1}{5}\right)$$

bulunur.

2.2. Genelleştirilmiş Szász-Sheffer Operatörlerinin Yaklaşım Özellikleri

Bu kısımda Eş.2.5 ile tanımlı $T_n(f;\alpha_n,\beta_n;x)$ operatörlerinin f fonksiyonuna yaklaşım derecesi ω süreklilik modülü cinsinden ifade edilecektir.

2.2.1. Tanım

$f\in C(I)$, I, $\mathbb{R}$ nin herhangi bir alt aralığı olsun. $\forall\delta>0$ için; $\omega:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ olmak üzere

$$\omega(f;\delta)=\sup_{\substack{x,t\in I\\ |t-x|\leq\delta}}|f(t)-f(x)| \tag{2.6}$$

biçiminde tanımlanan ω fonksiyonuna f nin süreklilik modülü denir [21].

2.2.2. Lemma

$\forall\delta>0$ için; $\omega:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ olmak üzere süreklilik modülü

(i) $\omega(f,\delta)\geq 0,$

(ii) $\delta_1\leq\delta_2$ ise $\omega(f,\delta_1)\leq\omega(f,\delta_2)\,,$

(iii) $m\in\mathbb{N}$ ise $\omega(f,m\delta)\leq m\omega(f,\delta)\,,$

(iv) Her $\lambda \in \mathbb{R}^{+}$ için $\omega(f, \lambda\delta) \leq (\lambda + 1)\, \omega(f, \delta)$,

(v) f,I üzerinde düzgün sürekli $\Leftrightarrow \lim\limits_{\delta \to 0^{+}} \omega(f, \delta) = 0$,

(vi) $|f(t) - f(x)| \leq \omega(f, |t - x|)$

ve

(vii) $|f(t) - f(x)| \leq \left(\dfrac{|t - x|}{\delta} + 1 \right) \omega(f, \delta)$

özelliklerini sağlar [1].

2.2.3. Teorem

$f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $[0, \infty)$ da düzgün sürekli ve $T_n(f; \alpha_n, \beta_n; x)$ Eş.2.5 ile verilen operatör olsun. Her bir $x \in [0, \infty)$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$|T_n(f; \alpha_n, \beta_n; x) - f(x)| \leq (1 + \lambda_{a_n, \beta_n}(x))\, \omega\left(f, \sqrt{\frac{\beta_n}{\alpha_n}} \right) \tag{2.7}$$

dir. Burada

$$\lambda_{a_n, \beta_n}(x) = \sqrt{x\,(H''(1) + 1) + \frac{\beta_n}{\alpha_n} \left(\frac{A''(1) + A'(1)}{A(1)} \right)} \tag{2.8}$$

dır.

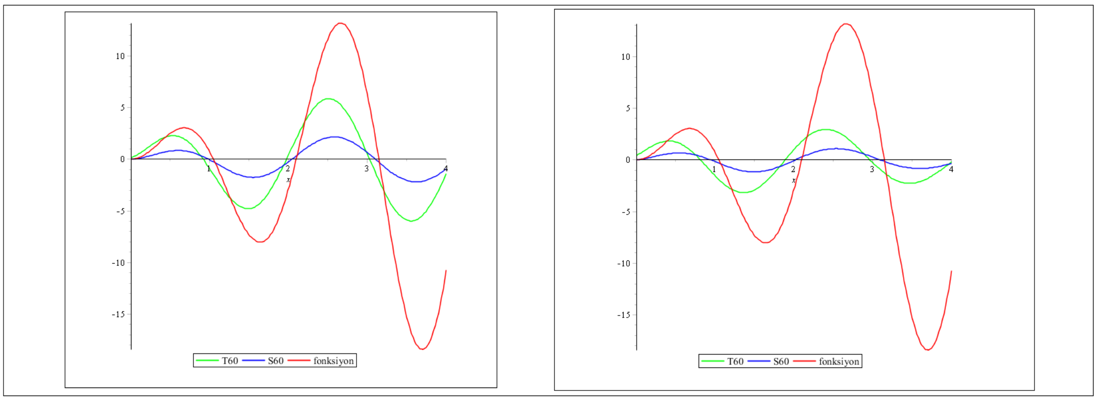
Şimdi genelleştirilmiş Szász-Sheffer operatörlerinin belirli fonksiyonlara yaklaşım derecesinin

$$S_n(f; \alpha_n, \beta_n; x) = e^{\frac{-\alpha_n x}{\beta_n}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{\alpha_n x}{\beta_n} \right)^k f\left(\frac{k\beta_n}{\alpha_n} \right)$$

genelleştirilmiş Szász operatörleri ile ([20]) bir karşılaştırmasını vereceğiz.

Örnek

$A(t) = e^t$, $H(t) = t$ olsun. $n = 60$ için $T_n(f;\alpha_n,\beta_n;x)$ ve $S_n(f;\alpha_n,\beta_n;x)$ operatörlerinin $f(x) = 5x\sin(3x)$ fonksiyonuna yaklaşım oranları şekillerde sırası ile $(\alpha_n) = (n)$, $(\beta_n) = \ln(n)$ ve $(\alpha_n) = (n)$, $(\beta_n) = (\sqrt{n})$ için verilmiştir. Şekillerde $T_n(f;\alpha_n,\beta_n;x)$ operatörleri $''T''$ ile $S_n(f;\alpha_n,\beta_n;x)$ operatörleri $''S''$ ile gösterilmiştir.



Şekil 2.1. $T_n(f;\alpha_n,\beta_n;x)$ ve $S_n(f;\alpha_n,\beta_n;x)$ operatörlerinin f fonksiyonuna yaklaşımı

2.3. Genelleştirilmiş Szász-Sheffer Operatörlerinin King Tip Genelleştirmesi

Yaklaşım teoride standart operatörlerin bir çoğu $n \in \mathbb{N}$, $e_i(x) = x^i$, $i = 0, 1$ olmak üzere $L_n(e_0;x) = e_0(x)$ ve $L_n(e_1;x) = e_1(x)$'i korur.

Bu koşullar özellikle Bernstein operatörleri [23], Szász operatörleri [1] ve Baskakov operatörleri [22] için geçerlidir. Bu operatörlerin her biri için $L_n(e_2;x) \neq e_2(x) = x^2$ dir.

Bununla ilgili ilk çalışma 2003 yılında J.P.King tarafından Bernstein operatörünün [4], $e_2(x) = x^2$ fonksiyonunu koruyacak şekilde genelleştirmesi yapılarak ele alınmış ve daha iyi bir yakınsama oranı elde edilmiştir [28].

King'in sonuçlarının istatistiksel varyasyonları, Duman ve Orhan tarafından çalışılmıştır [24].

Farklı operatörler için de King tipi genelleştirmeler yapılıp yaklaşım özellikleri incelenmiştir.

Duman ve Özarslan, Szász operatörlerinin King tipi genelleştirmesini yaparak klasik Szász operatörlerinden daha iyi yakınsama oranına sahip bir lineer pozitif operatör dizisi elde etmiş ve yaklaşım özelliklerini incelemişlerdir [25].

Ayrıca Duman ve Özarslan, x^2'yi koruyan Meyer-König ve Zeller tipi operatörler [29] üzerindeki bazı yaklaşım sonuçlarını araştırmışlardır [31].

Duman, Özarslan ve Aktuğlu, Szász-Beta operatörleri için King tip çalışmalar yapmıştır [5].

Duman, Özarslan ve Vecchia, Szász-Kantorovich operatörlerinin x'i koruyacak şekilde bir genelleştirmesini tanımlayıp klasik Szász-Kantorovich operatörlerinden daha iyi hata tahminine sahip olduğunu ispatlamıştır [26].

Bu kısımda Eş.2.5 ile verilen $T_n(f;\alpha_n,\beta_n;x)$ operatörleri x'i koruyacak şekilde yeniden düzenlenerek King tipi bir genelleştirmesi tanımlanacak ve bu operatörün süreklilik modülü ile yaklaşım derecesi elde edilecektir. Genelleştirilmiş Szász-Sheffer operatörlerinin King tipi genelleştirmesinin yaklaşım derecesinin, klasik Szász-Sheffer operatörlerinden daha iyi olduğu gösterilecektir.

$\{r_n(x)\}$, $[0,\infty)$ da tanımlı sürekli fonksiyonların bir dizisi ve $0 \leq r_n(x) < \infty$ olsun. $T_n : C[0,\infty) \to C[0,\infty)$ olmak üzere

$$T_n(f;\alpha_n,\beta_n;r_n(x)) = \frac{e^{\frac{-\alpha_n r_n(x) H(1)}{\beta_n}}}{A(1)} \sum_{k=0}^{\infty} p_k\left(\frac{\alpha_n r_n(x)}{\beta_n}\right) f\left(\frac{k\beta_n}{\alpha_n}\right) \tag{2.9}$$

olarak tanımlanırsa

$$T_n(t;\alpha_n,\beta_n;r_n(x)) = r_n(x) + \frac{\beta_n}{\alpha_n}\frac{A'(1)}{A(1)} = x$$

olacak biçimde

$$r_n(x) = x - \frac{\beta_n}{\alpha_n}\frac{A'(1)}{A(1)}$$

olarak bulunur.
Eğer $r_n(x)$, $r_n^*(x)$ olarak değiştirilirse $r_n^* : \left[\frac{A'(1)}{A(1)},\infty\right) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $x \in \left[\frac{A'(1)}{A(1)},\infty\right)$, $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\beta_n}{\alpha_n} = 0$ olmak üzere

$$r_n^*(x) = x - \frac{\beta_n}{\alpha_n}\frac{A'(1)}{A(1)} \tag{2.10}$$

şeklinde tanımlanır ve $\lim\limits_{n\to\infty} r_n^*(x) = x$ özelliğini sağlar.

Her $f \in C\left[\frac{A'(1)}{A(1)}, \infty\right)$ ve $x \in \left[\frac{A'(1)}{A(1)}, \infty\right)$ için genelleştirilmiş Szász-Sheffer operatörlerinin King tipi genelleştirmesi

$T_n^*(f;\alpha_n,\beta_n;x)$

$$= \frac{e^{-\left(\frac{\alpha_n x}{\beta_n} - \frac{A'(1)}{A(1)}\right)H(1)}}{A(1)} \sum_{k=0}^{\infty} p_k\left(\frac{\alpha_n x}{\beta_n} - \frac{A'(1)}{A(1)}\right) f\left(\frac{k\beta_n}{\alpha_n}\right) \tag{2.11}$$

biçiminde tanımlanır.

Eğer $x \in \left[\frac{A'(1)}{A(1)}, \infty\right)$ ise Eş.2.10 ile verilen $r_n^*(x)$'in $\left[\frac{A'(1)}{A(1)}, \infty\right)$ aralığında olduğu görülür.

Diğer yandan 2.1.2.Lemma'dan aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

2.3.1. Lemma

Her $x \geq \frac{A'(1)}{A(1)}$ için

(i) $T_n^*(1;\alpha_n,\beta_n;x) = 1$

(ii) $T_n^*(t;\alpha_n,\beta_n;x) = x$

(iii) $T_n^*\left(t^2;\alpha_n,\beta_n;x\right) = x^2 + x\frac{\beta_n}{\alpha_n}\left(H''(1)+1\right)$

$$+\frac{\beta_n^2}{\alpha_n^2}\left(\frac{A''(1)}{A(1)} - \left(\frac{A'(1)}{A(1)}\right)^2 - \frac{A'(1)}{A(1)}H''(1)\right)$$

eşitlikleri sağlanır.

2.3.1.Lemma'da Eş.2.11 ile verilen $T_n^*(f;\alpha_n,\beta_n;x)$ lineer pozitif operatörlerinin lineer fonksiyonları koruduğu görülmektedir.

Eş.2.11 de verilen $T_n^*(f;\alpha_n,\beta_n;x)$ operatörü lineer pozitif operatör olup $r_n^*(x) = x$ seçildiğinde genelleştirilmiş Szász-Sheffer operatörlerine dönüşmektedir.

2.3.2. Teorem

$T_n^*(f;\alpha_n,\beta_n;x)$ operatörleri $f \in C\left[\frac{A'(1)}{A(1)},b\right]$ fonksiyonuna $\left[\frac{A'(1)}{A(1)},b\right]$ üzerinde düzgün yakınsaktır.

İspat

Sabit $b > \frac{A'(1)}{A(1)}$ ve $T_b : C\left[\frac{A'(1)}{A(1)},\infty\right) \to C\left[\frac{A'(1)}{A(1)},b\right]$ dönüşümü $\forall\ f \in C\left[\frac{A'(1)}{A(1)},b\right]$ için

$$T_b(f) = f_{|\left[\frac{A'(1)}{A(1)},b\right]}$$

olarak tanımlansın.

2.3.1.Lemmadan $i = 0,1,2$ için $\left[\frac{A'(1)}{A(1)},b\right]$ üzerinde düzgün olarak

$$\lim_{n\to\infty} T_b(T_n^*(e_i)) = T_b(e_i) \tag{2.12}$$

dır. Dolayısıyla universal Korovkin teoreminden sonuç sağlanır [21].

2.3.3. Lemma

$\forall x \in \left[\frac{A'(1)}{A(1)},\infty\right)$, $n \in \mathbb{N}$ için

(i) $T_n^*((t-x);\alpha_n,\beta_n;x) = 0$

(ii) $T_n^*\left((t-x)^2;\alpha_n,\beta_n;x\right) = x\frac{\beta_n}{\alpha_n}(H''(1)+1)$

$$+\frac{\beta_n^2}{\alpha_n^2}\left(\frac{A''(1)}{A(1)}-\left(\frac{A'(1)}{A(1)}\right)^2-\frac{A'(1)}{A(1)}H''(1)\right)$$

eşitlikleri sağlanır.

2.4. Genelleştirilmiş Szász-Sheffer Operatörlerinin King Tip Genelleştirmesinin Süreklilik Modülü İle Yaklaşım Hızı

2.4.1. Teorem

$f \in C_B\left[\frac{A'(1)}{A(1)},\infty\right)$ için $T_n^*(f;\alpha_n,\beta_n;x)$ Eş.2.11 ile verilen operatör olsun. Her bir $x \in \left[\frac{A'(1)}{A(1)},\infty\right)$ için

$$|T_n^*(f;\alpha_n,\beta_n;x)-f(x)| \leq 2\omega\left(f;\delta^*_{\alpha_n,\beta_n}(x)\right) \tag{2.13}$$

dir. Burada

$$\delta^*_{\alpha_n,\beta_n}(x)=\sqrt{x\frac{\beta_n}{\alpha_n}(H''(1)+1)+\frac{\beta_n^2}{\alpha_n^2}\left(\frac{A''(1)}{A(1)}-\left(\frac{A'(1)}{A(1)}\right)^2-\frac{A'(1)}{A(1)}H''(1)\right)} \tag{2.14}$$

dir. Düzgün olarak $x \in \left[\frac{A'(1)}{A(1)},b\right] \subset \left[\frac{A'(1)}{A(1)},\infty\right)$ ve $\frac{\beta_n}{\alpha_n} \leq 1$ alınırsa

$$|T_n^*(f;\alpha_n,\beta_n;x)-f(x)| \leq (1+M_1)\,\omega\left(f;\sqrt{\frac{\beta_n}{\alpha_n}}\right)$$

elde edilir. Burada

$$M_1=\sqrt{b(H''(1)+1)+\left(\frac{A''(1)}{A(1)}-\left(\frac{A'(1)}{A(1)}\right)^2-\frac{A'(1)}{A(1)}H''(1)\right)}$$

dir.

İspat

Eş.2.11 ile verilen $T_n^*(f;\alpha_n,\beta_n;x)$ operatörünün lineer pozitif olduğu, 2.2.2.Lemma

(vii), 2.3.1.Lemma(i) ve 2.3.3.Lemma (ii) dikkate alınarak

$$|T_n^*(f;\alpha_n,\beta_n;x)-f(x)| = |T_n^*((f(t)-f(x));\alpha_n,\beta_n;x)|$$

$$\leq T_n^*(|f(t)-f(x)|;\alpha_n,\beta_n;x)$$

$$\leq \frac{e^{-\left(\frac{\alpha_n x}{\beta_n}-\frac{A'(1)}{A(1)}\right)H(1)}}{A(1)}\sum_{k=0}^{\infty} p_k\left(\frac{\alpha_n x}{\beta_n}-\frac{A'(1)}{A(1)}\right)\left|f\left(\frac{\alpha_n x}{\beta_n}\right)-f(x)\right|$$

$$\leq \frac{e^{-\left(\frac{\alpha_n x}{\beta_n}-\frac{A'(1)}{A(1)}\right)H(1)}}{A(1)}\sum_{k=0}^{\infty} p_k\left(\frac{\alpha_n x}{\beta_n}-\frac{A'(1)}{A(1)}\right)\left(1+\frac{\left|k\frac{\beta_n}{\alpha_n}-x\right|}{\delta}\right)\omega(f;\delta)$$

$$\leq \left(1+\frac{1}{\delta}\frac{e^{-\left(\frac{\alpha_n x}{\beta_n}-\frac{A'(1)}{A(1)}\right)H(1)}}{A(1)}\sum_{k=0}^{\infty} p_k\left(\frac{\alpha_n x}{\beta_n}-\frac{A'(1)}{A(1)}\right)\left|k\frac{\beta_n}{\alpha_n}-x\right|\right)\omega(f;\delta)$$

$$\leq \left(1+\frac{1}{\delta}\frac{e^{-\left(\frac{\alpha_n x}{\beta_n}-\frac{A'(1)}{A(1)}\right)H(1)}}{A(1)}\right.$$

$$\left.\times\sum_{k=0}^{\infty}\sqrt{p_k\left(\frac{\alpha_n x}{\beta_n}-\frac{A'(1)}{A(1)}\right)}\sqrt{p_k\left(\frac{\alpha_n x}{\beta_n}-\frac{A'(1)}{A(1)}\right)}\left|k\frac{\beta_n}{\alpha_n}-x\right|\right)\omega(f;\delta)$$

bulunur. Bu eşitlikte toplam üzerine Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulanarak

$$|T_n^*(f;\alpha_n,\beta_n;x)-f(x)|$$

$$\leq \left(1+\frac{1}{\delta}\left(\frac{e^{-\left(\frac{\alpha_n x}{\beta_n}-\frac{A'(1)}{A(1)}\right)H(1)}}{A(1)}\sum_{k=0}^{\infty}p_k\left(\frac{\alpha_n x}{\beta_n}-\frac{A'(1)}{A(1)}\right)\right)^{\frac{1}{2}}\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{e^{-\left(\frac{\alpha_n x}{\beta_n}-\frac{A'(1)}{A(1)}\right)H(1)}}{A(1)}\sum_{k=0}^{\infty}p_k\left(\frac{\alpha_n x}{\beta_n}-\frac{A'(1)}{A(1)}\right)\left|k\frac{\beta_n}{\alpha_n}-x\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)\omega(f;\delta)$$

$$\leq \left(1+\frac{1}{\delta}\left(T_n^*\left((t-x)^2;\alpha_n,\beta_n;x\right)\right)^{\frac{1}{2}}\right)\omega(f;\delta)$$

$$=\left(1+\frac{1}{\delta}\sqrt{x\frac{\beta_n}{\alpha_n}\left(H''(1)+1\right)+\frac{\beta_n^2}{\alpha_n^2}\left(\frac{A''(1)}{A(1)}-\left(\frac{A'(1)}{A(1)}\right)^2-\frac{A'(1)}{A(1)}H''(1)\right)}\right)\omega(f;\delta)$$

elde edilir. Eş.2.14 dikkate alınarak ve $\delta=\delta^*_{\alpha_n,\beta_n}(x)$ seçilerek teoremin sonucuna ulaşılır.

2.5. $T_n^*(f;\alpha_n,\beta_n;x)$ Operatörleri ile $T_n(f;\alpha_n,\beta_n;x)$ Operatörlerinin Karşılaştırılması

Bu kısımda Eş.2.11 de verilen $T_n^*(f;\alpha_n,\beta_n;x)$, genelleştirilmiş Szász-Sheffer operatörlerinin King tipi genelleştirmesi ile Eş.2.5 de verilen $T_n(f;\alpha_n,\beta_n;x)$, genelleştirilmiş Szász-Sheffer operatörlerinin yaklaşım hızları karşılaştırılacaktır. $T_n^*(f;\alpha_n,\beta_n;x)$ operatörlerinin, $T_n(f;\alpha_n,\beta_n;x)$ operatörlerinden daha iyi bir yaklaşım hızına sahip olduğu gösterilecektir.

$f\in C_B\left[\frac{A'(1)}{A(1)},\infty\right)$ olmak üzere

Eş.2.13 den

$$\left|T_n^*(f;\alpha_n,\beta_n;x)-f(x)\right|\leq 2\omega\left(f,\delta^*_{\alpha_n,\beta_n}(x)\right)$$

olduğu bilinmektedir.

$T_n(f;\alpha_n,\beta_n;x)$, genelleştirilmiş Szász-Sheffer operatörleri için $\forall f\in C_B[0,\infty)$, $x\geq 0$

ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$|T_n(f;\alpha_n,\beta_n;x) - f(x)| \leq 2\omega(f,\delta_{\alpha_n,\beta_n}(x))$$

yazılabilir. Burada

$$\delta_{\alpha_n,\beta_n}(x) = \sqrt{x\frac{\beta_n}{\alpha_n}(H''(1)+1) + \frac{\beta_n^2}{\alpha_n^2}\left(\frac{A''(1)+A'(1)}{A(1)}\right)}$$

dır.

$f \in C_B\left[\frac{A'(1)}{A(1)},\infty\right)$, $x \in \left[\frac{A'(1)}{A(1)},\infty\right)$ ve $\frac{\beta_n}{\alpha_n} \leq 1$ olsun. $T_n^*(f;\alpha_n,\beta_n;x)$ operatörlerinin $T_n(f;\alpha_n,\beta_n;x)$ operatörlerinden daha iyi bir yaklaşım hızına sahip olduğunu göstermek için

$$\delta^*_{\alpha_n,\beta_n}(x) \leq \delta_{\alpha_n,\beta_n}(x)$$

olduğu gösterilmelidir.

$$x\frac{\beta_n}{\alpha_n}(H''(1)+1) + \frac{\beta_n^2}{\alpha_n^2}\left(\frac{A''(1)}{A(1)} - \left(\frac{A'(1)}{A(1)}\right)^2 - \frac{A'(1)}{A(1)}H''(1)\right)$$

$$\leq x\frac{\beta_n}{\alpha_n}(H''(1)+1) + \frac{\beta_n^2}{\alpha_n^2}\left(\frac{A''(1)}{A(1)} + \frac{A'(1)}{A(1)}\right)$$

den ve $\frac{\beta_n}{\alpha_n} \leq 1$ olduğundan

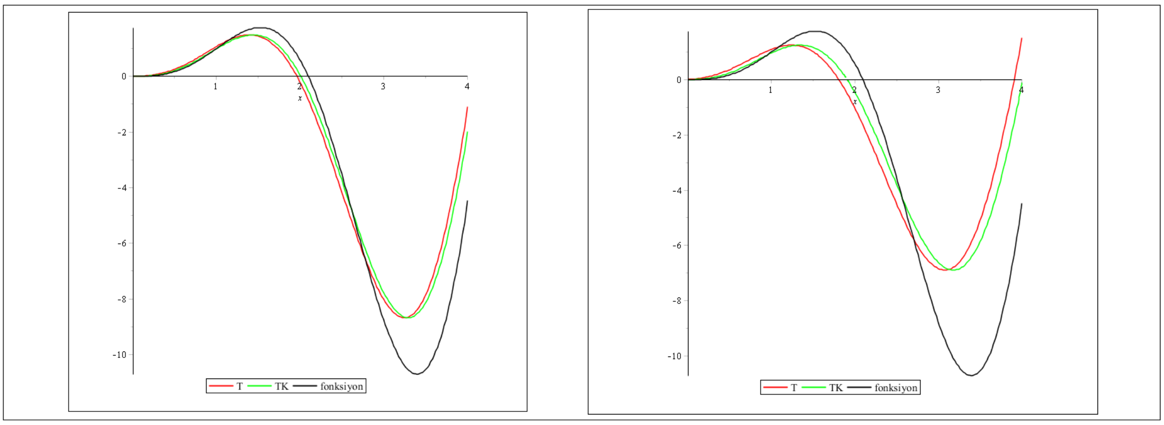
$$-\left(\left(\frac{A'(1)}{A(1)}\right)^2 + \frac{A'(1)}{A(1)}(H''(1)+1)\right) \leq 0$$

eşitsizliği $\forall x \in \left[\frac{A'(1)}{A(1)},\infty\right)$ için sağlandığından dolayı $T_n^*(f;\alpha_n,\beta_n;x)$ operatörleri $T_n(f;\alpha_n,\beta_n;x)$ operatörlerinden daha iyi bir yaklaşım hızına sahiptir.

Bu durumu grafikler ile gösterelim.

Örnek

$T_n(f;\alpha_n,\beta_n;x)$ ve $T_n^*(f;\alpha_n,\beta_n;x)$ operatörlerinde $A(t)=e^t$, $H(t)=t$ seçilerek bu operatörlerin $f(x)=x^2\sin\left(\dfrac{3}{2}x\right)$ fonksiyonuna yaklaşımları şekillerde sırası ile $(\alpha_n)=(n)$, $(\beta_n)=\ln(n)$ ve $(\alpha_n)=(n)$, $(\beta_n)=(\sqrt{n})$ dizileri olmak üzere $n=100$ için verilmiştir. $T_n^*(f;\alpha_n,\beta_n;x)$ operatörlerinin yaklaşım oranının $T_n(f;\alpha_n,\beta_n;x)$ operatörlerinden daha iyi olduğu görülmüştür. Şekilde $T_n(f;\alpha_n,\beta_n;x)$ operatörleri $''T''$ ile $T_n^*(f;\alpha_n,\beta_n;x)$ operatörleri $''TK''$ ile gösterilmiştir.



Şekil 2.2. $T_n(f;\alpha_n,\beta_n;x)$ ve $T_n^*(f;\alpha_n,\beta_n;x)$ operatörlerinin f fonksiyonuna yaklaşımı

3. GENELLEŞTİRİLMİŞ SZÁSZ-SHEFFER-KANTOROVICH OPERATÖRLERİNİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde Sheffer polinomlarını içeren genelleştirilmiş Szász operatörlerinin Kantorovich tipi genelleştirilmesi tanımlanarak süreklilik modülü, Lipschitz sınıfından fonksiyonlar ve Peetre-$\mathcal{K}$ fonksiyoneli yardımı ile yaklaşım hızı hesaplanacaktır. Aynı zamanda bu operatör için asimptotik yaklaşım formülü Voronovskaja tip teorem ile verilecektir.

3.1. Genelleştirilmiş Szász-Sheffer-Kantorovich Operatörleri

3.1.1. Tanım

$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere (α_n) ve (β_n), $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\beta_n}{\alpha_n} = 0$ koşulunu sağlayan iki dizi olsun.

Her $x \in [0,\infty)$ ve $f \in C[0,\infty)$ için $R_n : C[0,\infty) \to C[0,\infty)$ olmak üzere Sheffer polinomlarını içeren genelleştirilmiş Szász operatörlerinin Kantorovich tipi genelleştirmesini aşağıdaki gibi tanımlıyoruz.

$$R_n(f;\alpha_n,\beta_n;x) = \left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right) \frac{e^{\frac{-\alpha_n x H(1)}{\beta_n}}}{A(1)} \sum_{k=0}^{\infty} p_k\left(\frac{\alpha_n x}{\beta_n}\right) \int_{k\frac{\beta_n}{\alpha_n}}^{(k+1)\frac{\beta_n}{\alpha_n}} f(t)\,dt \tag{3.1}$$

3.1.2. Lemma

$R_n(f;\alpha_n,\beta_n;x)$ Eş.3.1 ile verilen operatör olsun. Bu durumda $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\forall x \in [0,\infty)$ için

(i) $R_n(1;\alpha_n,\beta_n;x) = 1$

(ii) $R_n(t;\alpha_n,\beta_n;x) = x + \dfrac{\beta_n}{\alpha_n}\left(\dfrac{A'(1)}{A(1)} + \dfrac{1}{2}\right)$

$$(iii)\ \ R_n\left(t^2;\alpha_n,\beta_n;x\right)=x^2+x\frac{\beta_n}{\alpha_n}\left(2\frac{A'(1)}{A(1)}+H''(1)+2\right)+\frac{\beta_n^2}{\alpha_n^2}\left(\frac{A''(1)+2A'(1)}{A(1)}+\frac{1}{3}\right)$$

$$(iv)\ \ R_n\left(t^3;\alpha_n,\beta_n;x\right)=x^3+x^2\frac{\beta_n}{\alpha_n}\left(3H''(1)+3\frac{A'(1)}{A(1)}+\frac{9}{2}\right)$$

$$+x\frac{\beta_n^2}{\alpha_n^2}\left(H'''(1)+9\frac{H''(1)}{2}+3H''(1)\frac{A'(1)}{A(1)}+\frac{3A''(1)+9A'(1)}{A(1)}+\frac{7}{2}\right)$$

$$+\frac{\beta_n^3}{\alpha_n^3}\left(\frac{A'''(1)}{A(1)}+\frac{9}{2}\frac{A''(1)}{A(1)}+\frac{7}{2}\frac{A'(1)}{A(1)}+\frac{1}{4}\right)$$

$$(v)\ \ R_n\left(t^4;\alpha_n,\beta_n;x\right)=x^4+x^3\frac{\beta_n}{\alpha_n}\left(6H''(1)+4\frac{A'(1)}{A(1)}+8\right)$$

$$+x^2\frac{\beta_n^2}{\alpha_n^2}\left(4H'''(1)+24H''(1)+3\left(H''(1)\right)^2\right.$$

$$\left.+12H''(1)\frac{A'(1)}{A(1)}+\frac{6A''(1)+24A'(1)}{A(1)}+15\right)$$

$$+x\frac{\beta_n^3}{\alpha_n^3}\left(H^{(4)}(1)+8H'''(1)+15H''(1)+4H'''(1)\frac{A'(1)}{A(1)}\right.$$

$$\left.+6H''(1)\frac{A''(1)}{A(1)}+24H''(1)\frac{A'(1)}{A(1)}+\frac{4A'''(1)+24A''(1)+30A'(1)}{A(1)}+6\right)$$

$$+\frac{\beta_n^4}{\alpha_n^4}\left(\frac{A^{(4)}(1)+8A'''(1)+15A''(1)+6A'(1)}{A(1)}+\frac{1}{5}\right)$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat

$$(i)\ \ R_n\left(1;\alpha_n,\beta_n;x\right)=\left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{\frac{-\alpha_n xH(1)}{\beta_n}}}{A(1)}p_k\left(\frac{\alpha_n x}{\beta_n}\right)\int_{k\frac{\beta_n}{\alpha_n}}^{(k+1)\frac{\beta_n}{\alpha_n}}dt$$

$$=\left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{\frac{-\alpha_n xH(1)}{\beta_n}}}{A\left(1\right)}p_k\left(\frac{\alpha_n x}{\beta_n}\right)\frac{\beta_n}{\alpha_n}$$

$$=1$$

$$(ii)\ \ R_n\left(t;\alpha_n,\beta_n;x\right)=\left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{\frac{-\alpha_n xH(1)}{\beta_n}}}{A\left(1\right)}p_k\left(\frac{\alpha_n x}{\beta_n}\right)\int_{k\frac{\beta_n}{\alpha_n}}^{(k+1)\frac{\beta_n}{\alpha_n}}tdt$$

$$=\left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{\frac{-\alpha_n xH(1)}{\beta_n}}}{A\left(1\right)}p_k\left(\frac{\alpha_n x}{\beta_n}\right)\frac{1}{2}\frac{\beta_n^2}{\alpha_n^2}\left(2k+1\right)$$

$$=\left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{\frac{-\alpha_n xH(1)}{\beta_n}}}{A\left(1\right)}p_k\left(\frac{\alpha_n x}{\beta_n}\right)\frac{1}{2}\frac{\beta_n^2}{\alpha_n^2}2k+\left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{\frac{-\alpha_n xH(1)}{\beta_n}}}{A\left(1\right)}p_k\left(\frac{\alpha_n x}{\beta_n}\right)\frac{1}{2}\frac{\beta_n^2}{\alpha_n^2}$$

$$=T_n\left(t;\alpha_n,\beta_n;x\right)+\frac{1}{2}\frac{\beta_n}{\alpha_n}T_n\left(1;\alpha_n,\beta_n;x\right)$$

$$=x+\frac{\beta_n}{\alpha_n}\frac{A'\left(1\right)}{A\left(1\right)}+\frac{\beta_n}{2\alpha_n}$$

$$= x + \frac{\beta_n}{\alpha_n}\left(\frac{A'(1)}{A(1)} + \frac{1}{2}\right)$$

$$(iii)\ \ R_n\left(t^2;\alpha_n,\beta_n;x\right) = \left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{\frac{-\alpha_n x H(1)}{\beta_n}}}{A(1)}p_k\left(\frac{\alpha_n x}{\beta_n}\right)\int\limits_{k\frac{\beta_n}{\alpha_n}}^{(k+1)\frac{\beta_n}{\alpha_n}} t^2 dt$$

$$= \left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{\frac{-\alpha_n x H(1)}{\beta_n}}}{A(1)}p_k\left(\frac{\alpha_n x}{\beta_n}\right)\frac{1}{3}\frac{\beta_n^3}{\alpha_n^3}\left(3k^2+3k+1\right)$$

$$= \left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{\frac{-\alpha_n x H(1)}{\beta_n}}}{A(1)}p_k\left(\frac{\alpha_n x}{\beta_n}\right)\frac{1}{3}\frac{\beta_n^3}{\alpha_n^3}3k^2$$

$$+ \left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{\frac{-\alpha_n x H(1)}{\beta_n}}}{A(1)}p_k\left(\frac{\alpha_n x}{\beta_n}\right)\frac{1}{3}\frac{\beta_n^3}{\alpha_n^3}3k$$

$$+ \left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{\frac{-\alpha_n x H(1)}{\beta_n}}}{A(1)}p_k\left(\frac{\alpha_n x}{\beta_n}\right)\frac{1}{3}\frac{\beta_n^3}{\alpha_n^3}$$

$$= T_n\left(t^2;\alpha_n,\beta_n;x\right) + \frac{\beta_n}{\alpha_n}T_n\left(t;\alpha_n,\beta_n;x\right) + \frac{1}{3}\frac{\beta_n^2}{\alpha_n^2}T_n\left(1;\alpha_n,\beta_n;x\right)$$

$$= x^2 + x\frac{\beta_n}{\alpha_n}\left(\frac{2A'(1)}{A(1)} + H''(1) + 1\right) + \frac{\beta_n^2}{\alpha_n^2}\left(\frac{A''(1)}{A(1)} + \frac{A'(1)}{A(1)}\right)$$

$$+\frac{\beta_n}{\alpha_n}\left(x + \frac{\beta_n}{\alpha_n}\frac{A'(1)}{A(1)}\right) + \frac{1}{3}\frac{\beta_n^2}{\alpha_n^2}$$

$$= x^2 + x\frac{\beta_n}{\alpha_n}\left(2\frac{A'(1)}{A(1)} + H''(1) + 2\right) + \frac{\beta_n^2}{\alpha_n^2}\left(\frac{A''(1)}{A(1)} + 2\frac{A'(1)}{A(1)} + \frac{1}{3}\right)$$

$$(iv)\ \ R_n\left(t^3;\alpha_n,\beta_n;x\right) = \left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{\frac{-\alpha_n x H(1)}{\beta_n}}}{A(1)}p_k\left(\frac{\alpha_n x}{\beta_n}\right)\int\limits_{k\frac{\beta_n}{\alpha_n}}^{(k+1)\frac{\beta_n}{\alpha_n}} t^3 dt$$

$$= \left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{\frac{-\alpha_n x H(1)}{\beta_n}}}{A(1)}p_k\left(\frac{\alpha_n x}{\beta_n}\right)\frac{1}{4}\frac{\beta_n^4}{\alpha_n^4}\left(4k^3 + 6k^2 + 4k + 1\right)$$

$$= \left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{\frac{-\alpha_n x H(1)}{\beta_n}}}{A(1)}p_k\left(\frac{\alpha_n x}{\beta_n}\right)\frac{1}{4}\frac{\beta_n^4}{\alpha_n^4}4k^3$$

$$+ \left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{\frac{-\alpha_n x H(1)}{\beta_n}}}{A(1)}p_k\left(\frac{\alpha_n x}{\beta_n}\right)\frac{1}{4}\frac{\beta_n^4}{\alpha_n^4}6k^2$$

$$+ \left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{\frac{-\alpha_n x H(1)}{\beta_n}}}{A(1)}p_k\left(\frac{\alpha_n x}{\beta_n}\right)\frac{1}{4}\frac{\beta_n^4}{\alpha_n^4}4k$$

$$+ \left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{\frac{-\alpha_n x H(1)}{\beta_n}}}{A(1)}p_k\left(\frac{\alpha_n x}{\beta_n}\right)\frac{1}{4}\frac{\beta_n^4}{\alpha_n^4}$$

$$= T_n\left(t^3;\alpha_n,\beta_n;x\right) + \frac{3}{2}\frac{\beta_n}{\alpha_n}T_n\left(t^2;\alpha_n,\beta_n;x\right)$$

$$+\frac{\beta_n^2}{\alpha_n^2}T_n\left(t;\alpha_n,\beta_n;x\right) + \frac{1}{4}\frac{\beta_n^3}{\alpha_n^3}T_n\left(1;\alpha_n,\beta_n;x\right)$$

$$= x^3 + x^2 \frac{\beta_n}{\alpha_n} \left(3H''(1) + 3\frac{A'(1)}{A(1)} + 3 \right)$$

$$+ x \frac{\beta_n^2}{\alpha_n^2} \left(H'''(1) + 3H''(1) + 3H''(1)\frac{A'(1)}{A(1)} + 3\frac{A''(1)}{A(1)} + 6\frac{A'(1)}{A(1)} + 1 \right)$$

$$+ \frac{\beta_n^3}{\alpha_n^3} \left(\frac{A'''(1)}{A(1)} + 3\frac{A''(1)}{A(1)} + \frac{A'(1)}{A(1)} \right)$$

$$+ \frac{3}{2}\frac{\beta_n}{\alpha_n} \left(x^2 + x\frac{\beta_n}{\alpha_n} \left(2\frac{A'(1)}{A(1)} + H''(1) + 1 \right) + \frac{\beta_n^2}{\alpha_n^2} \left(\frac{A''(1)}{A(1)} + \frac{A'(1)}{A(1)} \right) \right)$$

$$+ \frac{\beta_n^2}{\alpha_n^2} \left(x + \frac{\beta_n}{\alpha_n}\frac{A'(1)}{A(1)} \right) + \frac{1}{4}\frac{\beta_n^3}{\alpha_n^3}$$

$$= x^3 + x^2 \frac{\beta_n}{\alpha_n} \left(3H''(1) + 3\frac{A'(1)}{A(1)} + \frac{9}{2} \right)$$

$$+ x \frac{\beta_n^2}{\alpha_n^2} \left(H'''(1) + 9\frac{H''(1)}{2} + 3H''(1)\frac{A'(1)}{A(1)} + 3\frac{A''(1)}{A(1)} + 9\frac{A'(1)}{A(1)} + \frac{7}{2} \right)$$

$$+ \frac{\beta_n^3}{\alpha_n^3} \left(\frac{A'''(1)}{A(1)} + \frac{9}{2}\frac{A''(1)}{A(1)} + \frac{7}{2}\frac{A'(1)}{A(1)} + \frac{1}{4} \right)$$

$$(v)\;\; R_n\left(t^4; \alpha_n, \beta_n; x\right) = \left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{\frac{-\alpha_n x H(1)}{\beta_n}}}{A(1)} p_k\left(\frac{\alpha_n x}{\beta_n}\right) \int_{k\frac{\beta_n}{\alpha_n}}^{(k+1)\frac{\beta_n}{\alpha_n}} t^4 dt$$

$$= \left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{\frac{-\alpha_n x H(1)}{\beta_n}}}{A(1)} p_k \left(\frac{\alpha_n x}{\beta_n}\right) \frac{1}{5} \frac{\beta_n^5}{\alpha_n^5} \left(5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1\right)$$

$$= T_n\left(t^4; \alpha_n, \beta_n; x\right) + 2\frac{\beta_n}{\alpha_n} T_n\left(t^3; \alpha_n, \beta_n; x\right) + 2\frac{\beta_n^2}{\alpha_n^2} T_n\left(t^2; \alpha_n, \beta_n; x\right)$$

$$+\frac{\beta_n^3}{\alpha_n^3} T_n\left(t; \alpha_n, \beta_n; x\right) + \frac{1}{5}\frac{\beta_n^4}{\alpha_n^4} T_n\left(1; \alpha_n, \beta_n; x\right)$$

$$= x^4 + x^3 \frac{\beta_n}{\alpha_n}\left(6H''(1) + 4\frac{A'(1)}{A(1)} + 8\right)$$

$$+x^2 \frac{\beta_n^2}{\alpha_n^2}\Bigg(4H'''(1) + 24H''(1) + 3\left(H''(1)\right)^2$$

$$+12H''(1)\frac{A'(1)}{A(1)} + 6\frac{A''(1)}{A(1)} + 24\frac{A'(1)}{A(1)} + 15\Bigg)$$

$$+x\frac{\beta_n^3}{\alpha_n^3}\Bigg(H^{(4)}(1) + 8H'''(1) + 15H''(1) + 4H'''(1)\frac{A'(1)}{A(1)} + 6H''(1)\frac{A''(1)}{A(1)}$$

$$+24H''(1)\frac{A'(1)}{A(1)} + 4\frac{A'''(1)}{A(1)} + 24\frac{A''(1)}{A(1)} + 30\frac{A'(1)}{A(1)} + 6\Bigg)$$

$$+\frac{\beta_n^4}{\alpha_n^4}\left(\frac{A^{(4)}(1)}{A(1)} + 8\frac{A'''(1)}{A(1)} + 15\frac{A''(1)}{A(1)} + 6\frac{A'(1)}{A(1)} + \frac{1}{5}\right)$$

elde edilir.

3.1.3. Lemma

Her $x \in [0,\infty)$ için $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

(i) $\mu_{n,1}(x) = R_n\left((t-x);\alpha_n,\beta_n;x\right)$

$$= \frac{\beta_n}{\alpha_n}\left(\frac{A'(1)}{A(1)} + \frac{1}{2}\right)$$

(ii) $\mu_{n,2}(x) = R_n\left((t-x)^2;\alpha_n,\beta_n;x\right)$

$$= x\frac{\beta_n}{\alpha_n}\left(H''(1)+1\right) + \frac{\beta_n^2}{\alpha_n^2}\left(\frac{A''(1)+2A'(1)}{A(1)} + \frac{1}{3}\right)$$

(iii) $\mu_{n,4}(x) = R_n\left((t-x)^4;\alpha_n,\beta_n;x\right)$

$$= x^2\frac{\beta_n^2}{\alpha_n^2}\left(6H''(1) + 3\left(H''(1)\right)^2 + 3\right)$$

$$+x\frac{\beta_n^3}{\alpha_n^3}\left(H^{(4)}(1) + 8H'''(1) + 15H''(1) + 4H'''(1)\frac{A'(1)}{A(1)}\right.$$

$$\left.+6H''(1)\frac{A''(1)}{A(1)} + 24H''(1)\frac{A'(1)}{A(1)} + 6\frac{A''(1)}{A(1)} + 16\frac{A'(1)}{A(1)} + 5\right)$$

$$+\frac{\beta_n^4}{\alpha_n^4}\left(\frac{A^{(4)}(1) + 8A'''(1) + 15A''(1) + 6A'(1)}{A(1)} + \frac{1}{5}\right)$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat

(i) 3.1.2.Lemma (i) ve (ii) dikkate alınarak

$$\mu_{n,1}(x) = R_n\left((t-x);\alpha_n,\beta_n;x\right)$$

$$= R_n\left(t;\alpha_n,\beta_n;x\right) - xR_n\left(1;\alpha_n,\beta_n;x\right)$$

$$= \frac{\beta_n}{\alpha_n}\left(\frac{A'(1)}{A(1)} + \frac{1}{2}\right)$$

elde edilir.

(ii) 3.1.2.Lemma (i), (ii) ve (iii) dikkate alınarak

$$\mu_{n,2}(x) = R_n\left((t-x)^2;\alpha_n,\beta_n;x\right)$$

$$= R_n\left(t^2;\alpha_n,\beta_n;x\right) - 2xR_n\left(t;\alpha_n,\beta_n;x\right) + x^2R_n\left(1;\alpha_n,\beta_n;x\right)$$

$$= x\frac{\beta_n}{\alpha_n}\left(H''(1)+1\right) + \frac{\beta_n^2}{\alpha_n^2}\left(\frac{A''(1)+2A'(1)}{A(1)} + \frac{1}{3}\right)$$

elde edilir.

(iii) 3.1.2.Lemma (i), (ii), (iii), (iv) ve (v) dikkate alınarak

$$\mu_{n,4}(x) = R_n\left((t-x)^4;\alpha_n,\beta_n;x\right)$$

$$= R_n\left(t^4;\alpha_n,\beta_n;x\right) - 4xR_n\left(t^3;\alpha_n,\beta_n;x\right)$$

$$+6x^2R_n\left(t^2;\alpha_n,\beta_n;x\right) - 4x^3R_n\left(t;\alpha_n,\beta_n;x\right) + x^4R_n\left(1;\alpha_n,\beta_n;x\right)$$

$$= x^2 \frac{\beta_n^2}{\alpha_n^2} \left(6H''(1) + 3\left(H''(1)\right)^2 + 3\right)$$

$$+x \frac{\beta_n^3}{\alpha_n^3} \left(H^{(4)}(1) + 8H'''(1) + 15H''(1) + 4H'''(1) \frac{A'(1)}{A(1)}\right.$$

$$\left. +6H''(1) \frac{A''(1)}{A(1)} + 24H''(1) \frac{A'(1)}{A(1)} + 6\frac{A''(1)}{A(1)} + 16\frac{A'(1)}{A(1)} + 5\right)$$

$$+\frac{\beta_n^4}{\alpha_n^4} \left(\frac{A^{(4)}(1) + 8A'''(1) + 15A''(1) + 6A'(1)}{A(1)} + \frac{1}{5}\right)$$

elde edilir.

3.2. Genelleştirilmiş Szász-Sheffer-Kantorovich Operatörlerinin Süreklilik Modülü İle Yaklaşım Hızı

3.2.1. Teorem

$f \in C_B[0,\infty)$ için $R_n(f;\alpha_n,\beta_n;x)$ Eş.3.1 ile verilen operatör olsun. Her bir $x \in [0,\infty)$ için

$$|R_n(f;\alpha_n,\beta_n;x) - f(x)| \leq \left(1 + \lambda^*_{\alpha_n,\beta_n}(x)\right) \omega\left(f; \sqrt{\frac{\beta_n}{\alpha_n}}\right) \tag{3.2}$$

dir. Burada

$$\lambda^*_{\alpha_n,\beta_n}(x) = \sqrt{x\left(H''(1) + 1\right) + \frac{\beta_n}{\alpha_n}\left(\frac{A''(1) + 2A'(1)}{A(1)} + \frac{1}{3}\right)} \tag{3.3}$$

dir.

İspat

Eş.3.1 ile verilen $R_n\left(f;\alpha_n,\beta_n;x\right)$ operatörleri lineer pozitif, 3.1.2.Lemma (i), 3.1.3.Lemma (ii) ve 2.2.2.Lemma (vii) kullanılarak

$$\left|R_n\left(f;\alpha_n,\beta_n;x\right)-f\left(x\right)\right|$$

$$=\left|R_n\left(\left(f\left(t\right)-f\left(x\right)\right);\alpha_n,\beta_n;x\right)\right|$$

$$\leq R_n\left(\left|f\left(t\right)-f\left(x\right)\right|;\alpha_n,\beta_n;x\right)$$

$$\leq\left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)\frac{e^{\frac{-\alpha_n xH(1)}{\beta_n}}}{A\left(1\right)}\sum_{k=0}^{\infty}p_k\left(\frac{\alpha_n x}{\beta_n}\right)\int\limits_{k\frac{\beta_n}{\alpha_n}}^{(k+1)\frac{\beta_n}{\alpha_n}}\left(1+\frac{1}{\delta}\left|t-x\right|\right)\omega\left(f;\delta\right)dt$$

$$\leq\left(1+\frac{1}{\delta}\left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)\frac{e^{\frac{-\alpha_n xH(1)}{\beta_n}}}{A\left(1\right)}\sum_{k=0}^{\infty}p_k\left(\frac{\alpha_n x}{\beta_n}\right)\int\limits_{k\frac{\beta_n}{\alpha_n}}^{(k+1)\frac{\beta_n}{\alpha_n}}\left|t-x\right|dt\right)\omega\left(f;\delta\right)$$

Bu eşitlikte önce integral üzerine daha sonra toplam üzerine Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulanarak

$$\left|R_n\left(f;\alpha_n,\beta_n;x\right)-f\left(x\right)\right|$$

$$\leq\left(1+\frac{1}{\delta}\left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)\frac{e^{\frac{-\alpha_n xH(1)}{\beta_n}}}{A\left(1\right)}\sum_{k=0}^{\infty}p_k\left(\frac{\alpha_n x}{\beta_n}\right)\right.$$

$$\times\left(\left(\int\limits_{k\frac{\beta_n}{\alpha_n}}^{(k+1)\frac{\beta_n}{\alpha_n}}(t-x)^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int\limits_{k\frac{\beta_n}{\alpha_n}}^{(k+1)\frac{\beta_n}{\alpha_n}}dt\right)^{\frac{1}{2}}\right)\omega\left(f;\delta\right)$$

$$\leq\left(1+\frac{1}{\delta}\left(\left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)\frac{e^{\frac{-\alpha_n xH(1)}{\beta_n}}}{A\left(1\right)}\sum_{k=0}^{\infty}p_k\left(\frac{\alpha_n x}{\beta_n}\right)\int\limits_{k\frac{\beta_n}{\alpha_n}}^{(k+1)\frac{\beta_n}{\alpha_n}}(t-x)^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}\right.$$

$$\left.\times\left(\left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)\frac{e^{\frac{-\alpha_n xH(1)}{\beta_n}}}{A\left(1\right)}\sum_{k=0}^{\infty}p_k\left(\frac{\alpha_n x}{\beta_n}\right)\int\limits_{k\frac{\beta_n}{\alpha_n}}^{(k+1)\frac{\beta_n}{\alpha_n}}dt\right)^{\frac{1}{2}}\right)\omega\left(f;\delta\right)$$

$$=\left(1+\frac{1}{\delta}\left(R_n\left((t-x)^2;\alpha_n,\beta_n;x\right)\right)^{\frac{1}{2}}\right)\omega\left(f;\delta\right)$$

$$=\left(1+\frac{1}{\delta}\sqrt{x\frac{\beta_n}{\alpha_n}\left(H''\left(1\right)+1\right)+\frac{\beta_n^2}{\alpha_n^2}\left(\frac{A''\left(1\right)+2A'\left(1\right)}{A\left(1\right)}+\frac{1}{3}\right)}\right)\omega\left(f;\delta\right)$$

elde edilir. Burada Eş.3.3 dikkate alınarak ve $\delta=\sqrt{\dfrac{\beta_n}{\alpha_n}}$ seçilerek teoremin sonucu elde edilir.

3.3. Genelleştirilmiş Szász-Sheffer-Kantorovich Operatörlerinin Lipschitz Sınıfından Fonksiyonlara Yaklaşım Oranı

Eş.3.1 ile verilen $R_n\left(f;\alpha_n,\beta_n;x\right)$ operatörlerinin Lipschitz sınıfından fonksiyonlara yaklaşım oranını verelim.

3.3.1. Tanım

$f \in C_B[0,\infty)$ ve $0<\gamma\leq 1$ bir reel sayı olsun. Her $x,\, t\in[0,\infty)$ için

$$|f(t)-f(x)| \leq M\,|t-x|^{\gamma} \tag{3.4}$$

olacak biçimde $M\in\mathbb{R}^{+}$ varsa, f'ye γ mertebeli M katsayılı Lipschitz sınıfından bir fonksiyon denir. Bu durumda $f\in Lip_M\gamma$ yazılır.

3.3.2. Teorem

$f\in Lip_M\gamma$, $0<\gamma\leq 1$ olmak üzere Eş.3.1 ile verilen $R_n(f;\alpha_n,\beta_n;x)$ operatörünün Lipschitz sınıfından olan fonksiyonlara yaklaşım hızı $M\in\mathbb{R}^{+}$ olmak üzere

$$|R_n(f;\alpha_n,\beta_n;x)-f(x)| \leq M\left(\frac{\beta_n}{\alpha_n}\right)^{\frac{\gamma}{2}}\left(\lambda^{*}_{\alpha_n,\beta_n}(x)\right)^{\gamma}$$

dır. Burada $\lambda^{*}_{\alpha_n,\beta_n}(x)$ Eş.3.3 ile verilmiştir.

İspat

$f\in Lip_M\gamma$ olsun. Eş.3.1 in tanımından ve 3.1.2.Lemma (i) den

$$|R_n(f;\alpha_n,\beta_n;x)-f(x)|$$

$$=\left|\left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)\frac{e^{\frac{-\alpha_n x H(1)}{\beta_n}}}{A(1)}\sum_{k=0}^{\infty}p_k\left(\frac{\alpha_n x}{\beta_n}\right)\int_{k\frac{\beta_n}{\alpha_n}}^{(k+1)\frac{\beta_n}{\alpha_n}}(f(t)-f(x))\,dt\right|$$

$$\leq\left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)\frac{e^{\frac{-\alpha_n x H(1)}{\beta_n}}}{A(1)}\sum_{k=0}^{\infty}p_k\left(\frac{\alpha_n x}{\beta_n}\right)\int_{k\frac{\beta_n}{\alpha_n}}^{(k+1)\frac{\beta_n}{\alpha_n}}|f(t)-f(x)|\,dt$$

dir. $f \in Lip_M\gamma$ olduğundan Eş.3.4 den

$$|R_n(f;\alpha_n,\beta_n;x)-f(x)| \leq \left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)\frac{e^{\frac{-\alpha_n x H(1)}{\beta_n}}}{A(1)}\sum_{k=0}^{\infty}p_k\left(\frac{\alpha_n x}{\beta_n}\right)\int\limits_{k\frac{\beta_n}{\alpha_n}}^{(k+1)\frac{\beta_n}{\alpha_n}} M|t-x|^{\gamma}\,dt$$

dir. Burada $p=\frac{2}{\gamma}$ ve $q=\frac{2}{2-\gamma}$ için önce integral üzerine daha sonra toplam üzerine Hölder eşitsizliği uygulanarak, ayrıca 3.1.2.Lemma (i) ve 3.1.3.Lemma (ii) dikkate alınarak

$$|R_n(f;\alpha_n,\beta_n;x)-f(x)|$$

$$\leq M\left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)\frac{e^{\frac{-\alpha_n x H(1)}{\beta_n}}}{A(1)}\sum_{k=0}^{\infty}p_k\left(\frac{\alpha_n x}{\beta_n}\right)\left(\int\limits_{k\frac{\beta_n}{\alpha_n}}^{(k+1)\frac{\beta_n}{\alpha_n}}\left(|t-x|^{\gamma}\right)^{\frac{2}{\gamma}}dt\right)^{\frac{\gamma}{2}}\left(\int\limits_{k\frac{\beta_n}{\alpha_n}}^{(k+1)\frac{\beta_n}{\alpha_n}}dt\right)^{\frac{2-\gamma}{2}}$$

$$\leq M\left(\left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)\frac{e^{\frac{-\alpha_n x H(1)}{\beta_n}}}{A(1)}\sum_{k=0}^{\infty}p_k^{\frac{2}{\gamma}}\left(\frac{\alpha_n x}{\beta_n}\right)\int\limits_{k\frac{\beta_n}{\alpha_n}}^{(k+1)\frac{\beta_n}{\alpha_n}}|t-x|^2\,dt\right)^{\frac{\gamma}{2}}$$

$$\times\left(\left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)\frac{e^{\frac{-\alpha_n x H(1)}{\beta_n}}}{A(1)}\sum_{k=0}^{\infty}p_k^{\frac{2}{2-\gamma}}\left(\frac{\alpha_n x}{\beta_n}\right)\int\limits_{k\frac{\beta_n}{\alpha_n}}^{(k+1)\frac{\beta_n}{\alpha_n}}dt\right)^{\frac{2-\gamma}{2}}$$

$$= M\left(R_n\left((t-x)^2;\alpha_n,\beta_n;x\right)\right)^{\frac{\gamma}{2}}\left(R_n(1;\alpha_n,\beta_n;x)\right)^{\frac{2-\gamma}{2}}$$

$$= M\left(R_n\left((t-x)^2;\alpha_n,\beta_n;x\right)\right)^{\frac{\gamma}{2}}$$

$$= M\left(\frac{\beta_n}{\alpha_n}\right)^{\frac{\gamma}{2}}\left(x\left(H''(1)+1\right)+\frac{\beta_n}{\alpha_n}\left(\frac{A''(1)+2A'(1)}{A(1)}+\frac{1}{3}\right)\right)^{\frac{\gamma}{2}}$$

elde edilir. Burada Eş.3.3 dikkate alınarak

$$\left|R_n\left(f;\alpha_n,\beta_n;x\right)-f(x)\right| \leq M\left(\frac{\beta_n}{\alpha_n}\right)^{\frac{\gamma}{2}}\left(\lambda^*_{\alpha_n,\beta_n}(x)\right)^{\gamma}$$

sonucu elde edilir.

3.4. Genelleştirilmiş Szász-Sheffer-Kantorovich Operatörlerinin Peetre-$\mathcal{K}$ Fonksiyoneli İle Yaklaşım Hızı

Bu kısımda genelleştirilmiş Szász-Sheffer-Kantorovich operatörlerinin Peetre-$\mathcal{K}$ fonksiyoneli İle yaklaşım hızı verilecektir. Öncelikle Peetre-$\mathcal{K}$ fonksiyonelinin ve 2. süreklilik modülünün tanımını verelim.

3.4.1. Tanım

$f \in C_B[0,\infty)$ olmak üzere $C_B[0,\infty)$ üzerindeki norm

$$\|f\| = \sup_{x\in[0,\infty)} |f(x)| \tag{3.5}$$

olsun. Peetre-$\mathcal{K}$ fonksiyoneli

$$\mathcal{K}_2(f;\delta) = \inf\left\{\|f-g\| + \delta\|g'\| : g \in C_B^2[0,\infty)\right\} \tag{3.6}$$

olup burada

$$C_B^2[0,\infty) = \{g \in C_B[0,\infty) : g', g'' \in C_B[0,\infty)\} \tag{3.7}$$

ve norm

$$\|g\|_{C_B^{(2)}[0,\infty)} = \|g\|_{C_B[0,\infty)} + \|g'\|_{C_B[0,\infty)} + \|g''\|_{C_B[0,\infty)} \tag{3.8}$$

ile verilir.

3.4.2. Tanım

$f \in C_B[0,\infty)$ olsun. $\delta > 0$ için f nin 2. süreklilik modülü

$$\omega_2(f;\delta) = \sup_{0<|h|\leq\delta, x\in[0,\infty)} |f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)| \tag{3.9}$$

olmak üzere, $M > 0$ sayısı vardır ki

$$\mathcal{K}(f;\delta) \leq M\omega_2\left(f;\sqrt{\delta}\right) \tag{3.10}$$

dır.

3.4.3. Teorem

$R_n(f;\alpha_n,\beta_n;x)$ Eş.3.1 ile verilen genelleştirilmiş Szász-Sheffer-Kantorovich operatörleri olsun. Her $f \in C_B[0,\infty)$ ve $\dfrac{\beta_n}{\alpha_n} \leq 1$ olmak üzere

$$|R_n(f;\alpha_n,\beta_n;x) - f(x)| \leq 4\mathcal{K}(f;\delta_{\alpha_n,\beta_n}(x)) + \omega\left(f;\frac{\beta_n}{\alpha_n}\left(\frac{A'(1)}{A(1)}+\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$\leq M_1\omega_2\left(f;\sqrt{\delta_{\alpha_n,\beta_n}(x)}\right) + \omega\left(f;\frac{\beta_n}{\alpha_n}\left(\frac{A'(1)}{A(1)}+\frac{1}{2}\right)\right)$$

olup

$$\delta_{\alpha_n,\beta_n}(x) = \frac{\beta_n}{\alpha_n}\left(x\left(H''(1)+1\right) + \left(\frac{A''(1)+2A'(1)}{A(1)}+\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{A'(1)}{A(1)}+\frac{1}{2}\right)^2\right)$$

dır. Ayrıca M_1, pozitif bir sabit sayıdır.

İspat

$f \in C_B[0,\infty)$ olmak üzere $\bar{R}_n(f;\alpha_n,\beta_n;x)$ yardımcı operatörünü

$$\bar{R}_n(f;\alpha_n,\beta_n;x) = R_n(f;\alpha_n,\beta_n;x) + f(x) - f\left(x + \frac{\beta_n}{\alpha_n}\left(\frac{A'(1)}{A(1)} + \frac{1}{2}\right)\right) \tag{3.11}$$

olarak tanımlayalım.

$\bar{R}_n(1;\alpha_n,\beta_n;x) = 1$ ve $\bar{R}_n(t;\alpha_n,\beta_n;x) = x$

olduğundan

$\bar{R}_n((t-x);\alpha_n,\beta_n;x) = 0$

ve

$$\bar{R}_n\left((t-x)^2;\alpha_n,\beta_n;x\right)$$

$$= \frac{\beta_n}{\alpha_n}\left(x(H''(1)+1) + \frac{\beta_n}{\alpha_n}\left(\frac{A''(1)+A'(1)}{A(1)} - \left(\frac{A'(1)}{A(1)}\right)^2 + \frac{1}{12}\right)\right)$$

dir. $t \in [0,\infty)$ ve $g\epsilon C_B^2[0,\infty)$ olsun. Taylor formülünden

$$g(t) - g(x) = g'(x)(t-x) + \int_x^t (t-u)g''(u)\,du \tag{3.12}$$

dır. $\bar{R}_n(f;\alpha_n,\beta_n;x)$ operatörü Eş.3.12 nin her iki yanına uygulanarak

$\bar{R}_n(g(t);\alpha_n,\beta_n;x) - \bar{R}_n(g(x);\alpha_n,\beta_n;x)$

$$= \bar{R_n}\left((t-x);\alpha_n,\beta_n;x\right)g'(x) + \bar{R_n}\left(\int\limits_x^t (t-u)\,g''(u)\,du;\alpha_n,\beta_n;x\right)$$

elde edilir. Buradan

$$\left|\bar{R_n}\left(g(t);\alpha_n,\beta_n;x\right) - g(x)\right| = \left|\bar{R_n}\left(\int\limits_x^t (t-u)\,g''(u)\,du;\alpha_n,\beta_n;x\right)\right|$$

olur. Eş.3.11, 3.1.3.Lemma (ii) ve $\dfrac{\beta_n}{\alpha_n} \leq 1$ olduğu dikkate alınarak

$$\left|\bar{R_n}\left(g(t);\alpha_n,\beta_n;x\right) - g(x)\right| \leq \bar{R_n}\left(\int\limits_x^t |(t-u)|\,|g''(u)|\,du;\alpha_n,\beta_n;x\right)$$

$$+ \int\limits_x^{x+\frac{\beta_n}{\alpha_n}\left(\frac{A'(1)}{A(1)}+\frac{1}{2}\right)} \left|x + \frac{\beta_n}{\alpha_n}\left(\frac{A'(1)}{A(1)}+\frac{1}{2}\right) - x\right| |g''(u)|\,du$$

$$\leq \|g''\|\left(R_n\,(t-x)^2;\alpha_n,\beta_n;x\right) + \left(\frac{\beta_n}{\alpha_n}\left(\frac{A'(1)}{A(1)}+\frac{1}{2}\right)^2\right)$$

$$= \|g''\|\left(\frac{\beta_n}{\alpha_n}\left(x\left(H''(1)+1\right) + \frac{\beta_n}{\alpha_n}\left(\frac{A''(1)+2A'(1)}{A(1)}+\frac{1}{3}\right)\right) + \left(\frac{\beta_n}{\alpha_n}\left(\frac{A'(1)}{A(1)}+\frac{1}{2}\right)\right)^2\right)$$

$$\leq \|g''\|\,\frac{\beta_n}{\alpha_n}\left(x\left(H''(1)+1\right) + \left(\frac{A''(1)+2A'(1)}{A(1)}+\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{A'(1)}{A(1)}+\frac{1}{2}\right)^2\right)$$

elde edilir. Buradan

$$\left|\bar{R_n}\left(g(t);\alpha_n,\beta_n;x\right) - g(x)\right| \leq \|g''\|\,\delta_{\alpha_n,\beta_n}(x) \tag{3.13}$$

yazalım.

Her $f \in C_B[0,\infty)$ için Eş.3.1 ile tanımlanan $R_n(f;\alpha_n,\beta_n;x)$, 3.1.2. Lemma (i) den ve Eş.3.5 den

$$\left|\bar{R_n}(f;\alpha_n,\beta_n;x)\right| = \left|R_n(f;\alpha_n,\beta_n;x) + f(x) - f\left(x + \frac{\beta_n}{\alpha_n}\left(\frac{A'(1)}{A(1)} + \frac{1}{2}\right)\right)\right|$$

$$\leq |R_n(f;\alpha_n,\beta_n;x)| + |f(x)| + \left|f\left(x + \frac{\beta_n}{\alpha_n}\left(\frac{A'(1)}{A(1)} + \frac{1}{2}\right)\right)\right|$$

$$\leq 3\|f\|$$

bulunur. Buradan $f \in C_B[0,\infty)$ ve $g \in C_B^2[0,\infty)$ alınarak, operatörün lineerliği kullanılarak ve Eş.3.13 dikkate alınarak

$$|R_n(f;\alpha_n,\beta_n;x) - f(x)|$$

$$\leq \left|\bar{R_n}(f;\alpha_n,\beta_n;x) - f(x)\right| + \left|f\left(x + \frac{\beta_n}{\alpha_n}\left(\frac{A'(1)}{A(1)} + \frac{1}{2}\right)\right) - f(x)\right|$$

$$\leq \left|\bar{R_n}((f-g);\alpha_n,\beta_n;x)\right| + \left|\bar{R_n}(g;\alpha_n,\beta_n;x) - g(x)\right| + |g(x) - f(x)|$$

$$+ \left|f\left(x + \frac{\beta_n}{\alpha_n}\left(\frac{A'(1)}{A(1)} + \frac{1}{2}\right)\right) - f(x)\right|$$

$$\leq 4\|f-g\| + \|g''\|\,\delta_{\alpha_n,\beta_n}(x) + \omega_1\left(f;\frac{\beta_n}{\alpha_n}\left(\frac{A'(1)}{A(1)} + \frac{1}{2}\right)\right)$$

bulunur.

Yukarıdaki eşitsizliğin her iki yanının $g \in C_B^2[0,\infty)$ üzerinden infimumu alınarak, Peetre-$\mathcal{K}$ fonksiyonelinin tanımından ve Eş.3.10 dan

$$|R_n(f;\alpha_n,\beta_n;x) - f(x)| \leq 4\mathcal{K}\left(f;\delta_{\alpha_n,\beta_n}(x)\right) + \omega_1\left(f;\frac{\beta_n}{\alpha_n}\left(\frac{A'(1)}{A(1)}+\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$\leq M_1\omega_2\left(f;\sqrt{\delta_{\alpha_n,\beta_n}(x)}\right) + \omega\left(f;\frac{\beta_n}{\alpha_n}\left(\frac{A'(1)}{A(1)}+\frac{1}{2}\right)\right)$$

elde edilir.

3.5. Genelleştirilmiş Szász-Sheffer-Kantorovich Operatörleri için Voronovskaja tip Teorem

Bu kısımda genelleştirilmiş Szász-Sheffer-Kantorovich operatörlerine ait Voronovskaja tip asimptotik yaklaşım formülü verilecektir.

3.5.1. Teorem

$x \in [0,\infty)$ belirli bir nokta ve f, x'in bir komşuluğunda 2 kez türevlenebilir ve sürekli olsun. Bu taktirde

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_n}{\beta_n}\left[R_n(f;\alpha_n,\beta_n;x) - f(x)\right]$$

$$= \left(\frac{A'(1)}{A(1)}+\frac{1}{2}\right)f'(x) + \left(x\left(H''(1)+1\right)\right)\frac{f''(x)}{2!}$$

$$+x^2\left(6H''(1) + 3\left(H''(1)\right)^2 + 3\right) \tag{3.14}$$

eşitliği sağlanır.

İspat

$x \in [0,\infty)$ da sabit bir nokta olsun.Her $t \in [0,\infty)$ için Taylor formülünden

$$f(t) = f(x) + f'(x)(t-x) + \frac{f''(x)}{2!}(t-x)^2 + r(t,x)(t-x)^2 \tag{3.15}$$

biçiminde yazılabilir.

Eş.3.1 ile verilen $R_n(f;\alpha_n,\beta_n;x)$ operatörü Eş.3.15 nin her iki yanına uygulanarak

$$R_n(f;\alpha_n,\beta_n;x)$$

$$= f(x)R_n(1;\alpha_n,\beta_n;x) + f'(x)R_n((t-x);\alpha_n,\beta_n;x)$$

$$+\frac{f''(x)}{2!}R_n((t-x)^2;\alpha_n,\beta_n;x) + R_n(r(t,x)(t-x)^2;\alpha_n,\beta_n;x)$$

elde edilir. 3.1.3.Lemma (i) ve (ii) den

$$R_n((f(t)-f(x));\alpha_n,\beta_n;x) = f'(x)\left[\frac{\beta_n}{\alpha_n}\left(\frac{A'(1)}{A(1)}+\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$+\frac{f''(x)}{2!}\left[x\frac{\beta_n}{\alpha_n}(H''(1)+1)+\frac{\beta_n^2}{\alpha_n^2}\left(\frac{A''(1)}{A(1)}+2\frac{A'(1)}{A(1)}+\frac{1}{3}\right)\right]$$

$$+R_n(r(t,x)(t-x)^2;\alpha_n,\beta_n;x)$$

olup, eşitliğin her iki tarafı $\dfrac{\alpha_n}{\beta_n}$ ile çarpılıp $n\to\infty$ için limit alınarak

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_n}{\beta_n}\left[R_n((f(t)-f(x));\alpha_n,\beta_n;x)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_n}{\beta_n}\left[f'(x)\frac{\beta_n}{\alpha_n}\left(\frac{A'(1)}{A(1)}+\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$+\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_n}{\beta_n}\left[\frac{f''(x)}{2!}\frac{\beta_n}{\alpha_n}x\left(H''(1)+1\right)+\frac{\beta_n^2}{\alpha_n^2}\left(\frac{A''(1)}{A(1)}+2\frac{A'(1)}{A(1)}+\frac{1}{3}\right)\right]$$

$$+\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_n}{\beta_n}R_n(r(t,x)(t-x)^2;\alpha_n,\beta_n;x)$$

$$= \lim_{n\to\infty}f'(x)\left(\frac{A'(1)}{A(1)}+\frac{1}{2}\right)+\lim_{n\to\infty}\frac{f''(x)}{2!}(x\left(H''(1)+1\right)$$

$$+\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_n}{\beta_n}R_n(r(t,x)(t-x)^2;\alpha_n,\beta_n;x)$$

elde edilir. Burada $r(t,x)$ kalan terimin Peano formudur. $r(t,x) \in [0,\infty)$ ve $\lim_{t\to x} r(t,x)=0$ dır.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_n}{\beta_n}R_n(r(t,x)(t-x)^2;\alpha_n,\beta_n;x)$$

ifadesine Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulanarak

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_n}{\beta_n}R_n(r(t,x)(t-x)^2;\alpha_n,\beta_n;x)$$

$$\leq \sqrt{\lim_{n\to\infty}R_n\left(r^2(t;x);\alpha_n,\beta_n;x\right)}\sqrt{\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_n^2}{\beta_n^2}R_n\left((t-x)^4;\alpha_n,\beta_n;x\right)}$$

elde edilir. $r^2(x;x)=0$ olduğundan

$$\lim_{n\to\infty}R_n\left(r^2(t;x);\alpha_n,\beta_n;x\right)=r^2(x;x)=0$$

dır. Dolayısıyla

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_n}{\beta_n}R_n(r\left(t,x\right)\left(t-x\right)^2;\alpha_n,\beta_n;x)=0$$

olur. Buradan

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_n}{\beta_n}\left(R_n\left(f;\alpha_n,\beta_n;x\right)-f\left(x\right)\right)$$

$$=f'\left(x\right)\left(\frac{A'\left(1\right)}{A\left(1\right)}+\frac{1}{2}\right)+\frac{f''\left(x\right)}{2!}\left(x\left(H''\left(1\right)+1\right)\right)$$

elde edilir.

3.6. Genelleştirilmiş Szász-Sheffer-Kantorovich Operatörlerinin King Tip Genelleştirmesi

Lineer pozitif operatörlerin genelleştirmeleri üzerine yapılan çalışmalar, bu operatörler için daha iyi bir hata tahmini sağlamanın yaklaşım teoride önemli bir rol oynadığını göstermektedir. King tipi genelleştirme ile yapılan çalışmaları bir önceki bölümde belirtmiştik.

Bu kısımda Eş.3.1 ile verilen $R_n\left(f;\alpha_n,\beta_n;x\right)$ operatörleri x'i koruyacak şekilde yeniden düzenlenerek King tipi bir genelleştirmesi tanımlanacak ve bu operatörün süreklilik modülü ile yaklaşım derecesi elde edilecektir. Genelleştirilmiş Szász-Sheffer-Kantorovich operatörlerinin King tipi genelleştirmesinin yaklaşım derecesinin, genelleştirilmiş Szász-Sheffer-Kantorovich operatörlerinden daha iyi olduğu gösterilecektir.

$\{r_n\left(x\right)\}$, $[0,\infty)$ da tanımlı sürekli fonksiyonların bir dizisi ve $0\leq r_n\left(x\right)<\infty$ olsun.

$R_n : C[0,\infty) \to C[0,\infty)$ olmak üzere

$$R_n(f;\alpha_n,\beta_n;r_n(x)) = \left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)\frac{e^{\frac{-\alpha_n r_n(x)H(1)}{\beta_n}}}{A(1)}\sum_{k=0}^{\infty} p_k\left(\frac{\alpha_n r_n(x)}{\beta_n}\right)\int\limits_{k\frac{\beta_n}{\alpha_n}}^{(k+1)\frac{\beta_n}{\alpha_n}} f(t)\,dt \tag{3.16}$$

olarak tanımlanırsa

$$R_n(t;\alpha_n,\beta_n;r_n(x)) = r_n(x) + \frac{\beta_n}{\alpha_n}\left(\frac{A'(1)}{A(1)} + \frac{1}{2}\right) = x$$

olacak biçimde

$$r_n(x) = x - \frac{\beta_n}{\alpha_n}\left(\frac{A'(1)}{A(1)} + \frac{1}{2}\right)$$

olarak bulunur. Eğer $r_n(x)$, $r_n^*(x)$ olarak değiştirilirse $r_n^* : \left[\frac{A'(1)}{A(1)} + \frac{1}{2}, \infty\right) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $x \in \left[\frac{A'(1)}{A(1)} + \frac{1}{2}, \infty\right)$, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$r_n^*(x) = x - \frac{\beta_n}{\alpha_n}\left(\frac{A'(1)}{A(1)} + \frac{1}{2}\right) \tag{3.17}$$

olarak tanımlanır ve $\lim\limits_{n\to\infty} r_n^*(x) = x$ özelliğini sağlar.

$f \in C\left[\frac{A'(1)}{A(1)} + \frac{1}{2}, \infty\right)$ ve $x \in \left[\frac{A'(1)}{A(1)} + \frac{1}{2}, \infty\right)$ için genelleştirilmiş Szász-Sheffer-Kantorovich operatörlerinin King Tip genelleştirmesi

$$R_n^*(f;\alpha_n,\beta_n;x)$$

$$= \left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)\frac{e^{\left(\frac{-\alpha_n x}{\beta_n} + \frac{A'(1)}{A(1)} + \frac{1}{2}\right)H(1)}}{A(1)}\sum_{k=0}^{\infty} p_k\left(\frac{\alpha_n x}{\beta_n} - \frac{A'(1)}{A(1)} - \frac{1}{2}\right)\int\limits_{k\frac{\beta_n}{\alpha_n}}^{(k+1)\frac{\beta_n}{\alpha_n}} f(t)\,dt \tag{3.18}$$

biçiminde tanımlanır.

Eğer $x \in \left[\frac{A'(1)}{A(1)}+\frac{1}{2},\infty\right)$ ise Eş.3.17 de verilen $r_n^*(x)$'in $\left[\frac{A'(1)}{A(1)}+\frac{1}{2},\infty\right)$ aralığında olduğu görülür.

Diğer yandan 3.1.2.Lemma'dan aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

3.6.1. Lemma

Her $x \geq \frac{A'(1)}{A(1)}+\frac{1}{2}$ için

(i) $R_n^*(1;\alpha_n,\beta_n;x)=1$

(ii) $R_n^*(t;\alpha_n,\beta_n;x)=x$

(iii) $R_n^*\left(t^2;\alpha_n,\beta_n;x\right)=x^2+x\frac{\beta_n}{\alpha_n}\left(H''(1)+1\right)$

$$+\frac{\beta_n^2}{\alpha_n^2}\left(\frac{A''(1)}{A(1)}-\left(\frac{A'(1)}{A(1)}\right)^2-\frac{A'(1)}{A(1)}H''(1)-\frac{H'(1)}{2}-\frac{5}{12}\right)$$

3.6.1.Lemma'da Eş.3.18 ile verilen $R_n^*(f;\alpha_n,\beta_n;x)$ lineer pozitif operatörlerinin lineer fonksiyonları koruduğu görülmektedir.

Eş.3.18 de verilen $R_n^*(f;\alpha_n,\beta_n;x)$ operatörü lineer pozitif operatör olup $r_n^*(x)=x$ seçildiğinde genelleştirilmiş Szász-Sheffer-Kantorovich operatörlerine dönüşür.

3.6.2. Teorem

$R_n^*(f;\alpha_n,\beta_n;x)$ operatörleri $f \in C\left[\frac{A'(1)}{A(1)}+\frac{1}{2},b\right]$ fonksiyonuna $\left[\frac{A'(1)}{A(1)}+\frac{1}{2},b\right]$ üzerinde düzgün yakınsaktır.

İspat

Sabit $b > \dfrac{A'(1)}{A(1)} + \dfrac{1}{2}$ ve $T_b : C\left[\dfrac{A'(1)}{A(1)} + \dfrac{1}{2}, \infty\right) \to C\left[\dfrac{A'(1)}{A(1)} + \dfrac{1}{2}, b\right]$ dönüşümünü $\forall$ $f \in C\left[\dfrac{A'(1)}{A(1)} + \dfrac{1}{2}, b\right]$ için

$$T_b(f) = f_{|\left[\frac{A'(1)}{A(1)} + \frac{1}{2}, b\right]}$$

olarak tanımlayalım.

3.6.1.Lemmadan $i = 0, 1, 2$ için $\left[\dfrac{A'(1)}{A(1)} + \dfrac{1}{2}, b\right]$ üzerinde düzgün olarak

$$\lim_{n\to\infty} T_b(R_n^*(e_i)) = T_b(e_i) \tag{3.19}$$

dır. Dolayısıyla universal Korovkin teoreminden sonuç sağlanır.

3.6.3. Lemma

$\forall x \in \left[\dfrac{A'(1)}{A(1)} + \dfrac{1}{2}, \infty\right)$, $n \in \mathbb{N}$ için

(i) $R_n^*((t-x); \alpha_n, \beta_n; x) = 0$

(ii) $R_n^*\left((t-x)^2; \alpha_n, \beta_n; x\right) = x\dfrac{\beta_n}{\alpha_n}(H''(1) + 1)$

$$+\frac{\beta_n^2}{\alpha_n^2}\left(\frac{A''(1)}{A(1)} - \left(\frac{A'(1)}{A(1)}\right)^2 - \frac{A'(1)}{A(1)}H''(1) - \frac{H''(1)}{2} - \frac{5}{12}\right)$$

eşitlikleri sağlanır.

3.7. Genelleştirilmiş Szász-Sheffer-Kantorovich Operatörlerinin King Tip Genelleştirmesinin Süreklilik Modülü İle Yaklaşım Hızı

3.7.1. Teorem

$f \in C_B\left[\frac{A'(1)}{A(1)}+\frac{1}{2},\infty\right)$ için $R_n^*(f;\alpha_n,\beta_n;x)$ Eş.3.18 ile verilen operatör olsun. $x \in \left[\frac{A'(1)}{A(1)}+\frac{1}{2},\infty\right)$ için

$$|R_n^*(f;\alpha_n,\beta_n;x)-f(x)| \le 2\omega\left(f;\delta^{***}_{\alpha_n,\beta_n}(x)\right) \tag{3.20}$$

dir. Burada

$$\delta^{***}_{\alpha_n,\beta_n}(x)$$

$$= \sqrt{x\frac{\beta_n}{\alpha_n}(H''(1)+1)+\frac{\beta_n^2}{\alpha_n^2}\left(\frac{A''(1)}{A(1)}-\left(\frac{A'(1)}{A(1)}\right)^2-\frac{A'(1)}{A(1)}H''(1)-\frac{H''(1)}{2}-\frac{5}{12}\right)} \tag{3.21}$$

dir.

İspat

Eş.3.18 ile verilen $R_n^*(f;\alpha_n,\beta_n;x)$ operatörünün lineer pozitif olduğu, 3.6.1.Lemma (i), 3.6.3.Lemma (ii) ve 2.2.2.Lemma (vii) dikkate alınarak

$$|R_n^*(f;\alpha_n,\beta_n;x)-f(x)|$$

$$= |R_n^*((f(t)-f(x));\alpha_n,\beta_n;x)|$$

$$\leq R_n^*\left(\left|f\left(t\right)-f\left(x\right)\right|;\alpha_n,\beta_n;x\right)$$

$$\leq\left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)\frac{e^{\left(\frac{-\alpha_n x}{\beta_n}+\frac{A'(1)}{A(1)}+\frac{1}{2}\right)H(1)}}{A\left(1\right)}\sum_{k=0}^{\infty}p_k\left(\frac{\alpha_n x}{\beta_n}-\frac{A'\left(1\right)}{A\left(1\right)}-\frac{1}{2}\right)$$

$$\times\int\limits_{k\frac{\beta_n}{\alpha_n}}^{(k+1)\frac{\beta_n}{\alpha_n}}\left(1+\frac{1}{\delta}\left|t-x\right|\right)\omega\left(f;\delta\right)dt$$

$$\leq\left(1+\frac{1}{\delta}\left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)\frac{e^{\left(\frac{-\alpha_n x}{\beta_n}+\frac{A'(1)}{A(1)}+\frac{1}{2}\right)H(1)}}{A\left(1\right)}\right.$$

$$\left.\times\sum_{k=0}^{\infty}p_k\left(\frac{\alpha_n x}{\beta_n}-\frac{A'\left(1\right)}{A\left(1\right)}-\frac{1}{2}\right)\int\limits_{k\frac{\beta_n}{\alpha_n}}^{(k+1)\frac{\beta_n}{\alpha_n}}\left|t-x\right|dt\right)\omega\left(f;\delta\right)$$

bulunur. Bu eşitlikte önce integral üzerine daha sonra toplam üzerine Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulanarak

$$\left|R_n^*\left(f;\alpha_n,\beta_n;x\right)-f\left(x\right)\right|$$

$$\leq\left(1+\frac{1}{\delta}\left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)\frac{e^{\left(\frac{-\alpha_n x}{\beta_n}+\frac{A'(1)}{A(1)}+\frac{1}{2}\right)H(1)}}{A\left(1\right)}\right.$$

$$\times\sum_{k=0}^{\infty}p_k\left(\frac{\alpha_n x}{\beta_n}-\frac{A'(1)}{A(1)}-\frac{1}{2}\right)\left(\left(\int\limits_{k\frac{\beta_n}{\alpha_n}}^{(k+1)\frac{\beta_n}{\alpha_n}}|t-x|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int\limits_{k\frac{\beta_n}{\alpha_n}}^{(k+1)\frac{\beta_n}{\alpha_n}}dt\right)^{\frac{1}{2}}\right)\omega(f;\delta)$$

$$\leq\left(1+\frac{1}{\delta}\left(\left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)\frac{e^{\left(\frac{-\alpha_n x}{\beta_n}+\frac{A'(1)}{A(1)}+\frac{1}{2}\right)H(1)}}{A(1)}\right)^{\frac{1}{2}}\right.$$

$$\times\left(\sum_{k=0}^{\infty}p_k\left(\frac{\alpha_n x}{\beta_n}-\frac{A'(1)}{A(1)}-\frac{1}{2}\right)\int\limits_{k\frac{\beta_n}{\alpha_n}}^{(k+1)\frac{\beta_n}{\alpha_n}}|t-x|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\times\left(\left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)\frac{e^{\left(\frac{-\alpha_n x}{\beta_n}+\frac{A'(1)}{A(1)}+\frac{1}{2}\right)H(1)}}{A(1)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\left.\times\left(\sum_{k=0}^{\infty}p_k\left(\frac{\alpha_n x}{\beta_n}-\frac{A'(1)}{A(1)}-\frac{1}{2}\right)\int\limits_{k\frac{\beta_n}{\alpha_n}}^{(k+1)\frac{\beta_n}{\alpha_n}}dt\right)^{\frac{1}{2}}\right)\omega(f;\delta)$$

$$=\left(1+\frac{1}{\delta}\left(R_n^*\left((t-x)^2;\alpha_n,\beta_n;x\right)\right)^{\frac{1}{2}}\right)\omega(f;\delta)$$

$$=\left(1+\frac{1}{\delta}\right.$$

$$\times\sqrt{x\frac{\beta_n}{\alpha_n}\left(H''(1)+1\right)+\frac{\beta_n^2}{\alpha_n^2}\left(\frac{A''(1)}{A(1)}-\left(\frac{A'(1)}{A(1)}\right)^2-\frac{A'(1)}{A(1)}H''(1)-\frac{H''(1)}{2}-\frac{5}{12}\right)}\Bigg)$$

$$\times\omega\left(f;\delta\right)$$

bulunur. Eş.3.21 dikkate alınarak ve $\delta=\delta^{***}_{\alpha_n,\beta_n}(x)$ seçilerek teoremin sonucuna ulaşılır.

3.8. $R_n^*(f;\alpha_n,\beta_n;x)$ Operatörleri ile $R_n(f;\alpha_n,\beta_n;x)$ Operatörlerinin Karşılaştırılması

Bu kısımda Eş.3.18 de verilen $R_n^*(f;\alpha_n,\beta_n;x)$, genelleştirilmiş Szász-Sheffer-Kantorovich operatörlerinin King tip genelleştirmesi ile Eş.3.1 de verilen $R_n(f;\alpha_n,\beta_n;x)$, genelleştirilmiş Szász-Sheffer-Kantorovich operatörlerinin yaklaşım hızları karşılaştırılacaktır. $R_n^*(f;\alpha_n,\beta_n;x)$ operatörlerinin, $R_n(f;\alpha_n,\beta_n;x)$ operatörlerinden daha iyi bir yaklaşım hızına sahip olduğu gösterilecektir.

$f\in C_B\left[\frac{A'(1)}{A(1)}+\frac{1}{2},\infty\right)$ olmak üzere Eş.3.20 den

$$\left|R_n^*(f;\alpha_n,\beta_n;x)-f(x)\right|\leq 2\omega\left(f;\delta^{***}_{\alpha_n,\beta_n}(x)\right)$$

olduğu bilinmektedir.

Eş.3.1 ile verilen $R_n(f;\alpha_n,\beta_n;x)$, genelleştirilmiş Szász-Sheffer-Kantorovich operatörleri için $\forall f\in C_B[0,\infty)$, $x\geq 0$ ve $n\in\mathbb{N}$ olmak üzere

$$\left|R_n(f;\alpha_n,\beta_n;x)-f(x)\right|\leq 2\omega\left(f;\delta^{**}(x)\right)$$

yazılabilir. Burada

$$\delta^{**}(x)=\sqrt{x\frac{\beta_n}{\alpha_n}\left(H''(1)+1\right)+\frac{\beta_n^2}{\alpha_n^2}\left(\frac{A''(1)}{A(1)}+2\frac{A'(1)}{A(1)}+\frac{1}{3}\right)}$$

dir.

$f \in C_B\left[\frac{A'(1)}{A(1)}+\frac{1}{2},\infty\right)$, $x \in \left[\frac{A'(1)}{A(1)}+\frac{1}{2},\infty\right)$ ve $\frac{\beta_n}{\alpha_n} \leq 1$ olsun. $R_n^*(f;\alpha_n,\beta_n;x)$ operatörlerinin, $R_n(f;\alpha_n,\beta_n;x)$ operatörlerinden daha iyi bir yaklaşım hızına sahip olduğunu göstermek için

$$\delta^{***}_{\alpha_n,\beta_n}(x) \leq \delta^{**}_{\alpha_n,\beta_n}(x)$$

olduğu gösterilmelidir.

$$x\frac{\beta_n}{\alpha_n}\left(H''(1)+1\right)+\frac{\beta_n^2}{\alpha_n^2}\left(\frac{A''(1)}{A(1)}-\left(\frac{A'(1)}{A(1)}\right)^2-\frac{A'(1)}{A(1)}H''(1)-\frac{H''(1)}{2}-\frac{5}{12}\right)$$

$$\leq x\frac{\beta_n}{\alpha_n}\left(H''(1)+1\right)+\frac{\beta_n^2}{\alpha_n^2}\left(\frac{A''(1)}{A(1)}+2\frac{A'(1)}{A(1)}+\frac{1}{3}\right)$$

den ve $\frac{\beta_n}{\alpha_n} \leq 1$ olduğundan

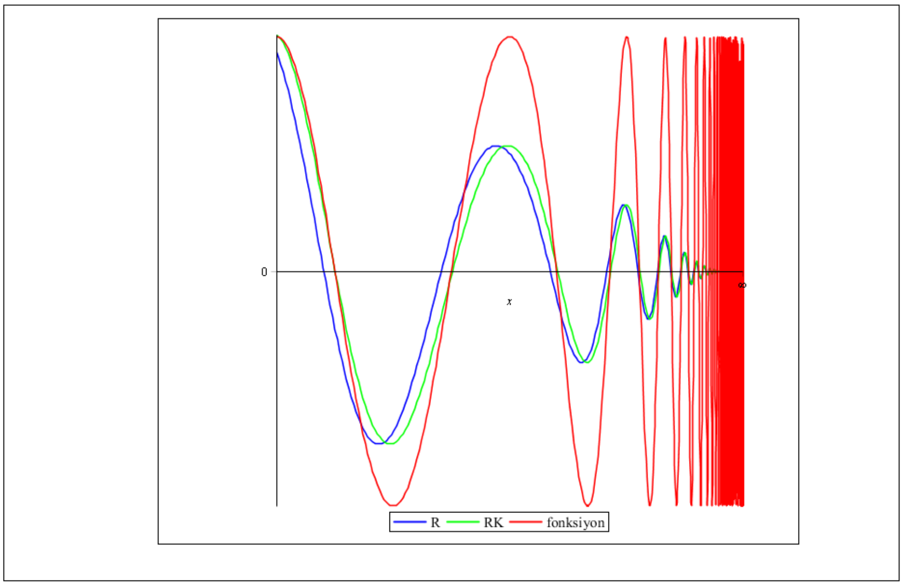
$$-\left(\left(\frac{A'(1)}{A(1)}\right)^2+\frac{A'(1)}{A(1)}\left(H''(1)+2\right)+\frac{H''(1)}{2}+\frac{3}{4}\right) \leq 0$$

eşitsizliği $\forall x \in \left[\frac{A'(1)}{A(1)}+\frac{1}{2},\infty\right)$ için sağlandığından dolayı $R_n^*(f;\alpha_n,\beta_n;x)$ operatörleri, $R_n(f;\alpha_n,\beta_n;x)$ operatörlerinden daha iyi bir yaklaşım hızına sahiptir.

Bu durumu grafikler ile gösterelim.

Örnek

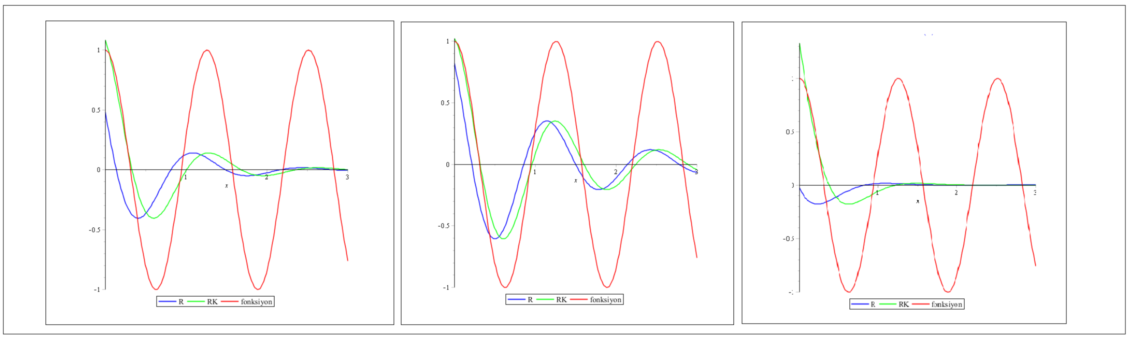
$R_n(f;\alpha_n,\beta_n;x)$ ve $R_n^*(f;\alpha_n,\beta_n;x)$ operatörlerinde $A(t)=e^t$, $H(t)=t$ seçilerek bu operatörlerin $f(x)=\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ fonksiyonuna yaklaşımının şekilde $(\alpha_n)=(n)$, $(\beta_n)=(\sqrt{n})$ dizileri olmak üzere $n=60$ için $R_n^*(f;\alpha_n,\beta_n;x)$ operatörlerinin yaklaşım oranının, $R_n(f;\alpha_n,\beta_n;x)$ operatörlerinden daha iyi olduğu görülmüştür. Şekilde $R_n(f;\alpha_n,\beta_n;x)$ operatörleri $''R''$ ile $R_n^*(f;\alpha_n,\beta_n;x)$ operatörleri $''RK''$ ile gösterilmiştir.



Şekil 3.1. $R_n(f;\alpha_n,\beta_n;x)$ ve $R_n^*(f;\alpha_n,\beta_n;x)$ operatörlerinin f fonksiyonuna yaklaşımı

Örnek

$A(t) = e^t$, $H(t) = t$ olsun. $n = 60$ için $R_n(f;\alpha_n,\beta_n;x)$ ve $R_n^*(f;\alpha_n,\beta_n;x)$ operatörlerinin $f(x) = \cos(5x)$ fonksiyonuna yaklaşım oranları ilk şekilde $(\alpha_n) = (n)$, $(\beta_n) = (\sqrt{n})$, ikinci şekilde $(\alpha_n) = (n)$, $(\beta_n) = \ln(n)$ ve üçüncü şekilde $(\alpha_n) = (\sqrt{n+1})$, $(\beta_n) = \left(\sqrt{\ln(n+10)}\right)$ için verilmiştir. Şekillerde $R_n(f;\alpha_n,\beta_n;x)$ operatörleri $''R''$ ile $R_n^*(f;\alpha_n,\beta_n;x)$ operatörleri $''RK''$ ile gösterilmiştir.



Şekil 3.2. $R_n(f;\alpha_n,\beta_n;x)$ ve $R_n^*(f;\alpha_n,\beta_n;x)$ operatörlerinin f fonksiyonuna yaklaşımı

4. İKİ DEĞİŞKENLİ GENELLEŞTİRİLMİŞ SZÁSZ-SHEFFER-KANTOROVICH OPERATÖRLERİNİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde iki değişkenli genelleştirilmiş Szász-Sheffer-Kantorovich operatörleri tanımlanarak bazı yaklaşım özellikleri incelenecektir. Tanımladığımız bu operatörün merkezi momentleri, ayrıca tam süreklilik modülü, kısmi süreklilik modülü, Lipschitz sınıfından fonksiyonlar ve Peetre-$\mathcal{K}$ fonksiyoneli yardımı ile yaklaşım hızı hesaplanacaktır.

4.1. İki Değişkenli Genelleştirilmiş Szász-Sheffer-Kantorovich Operatörleri

4.1.1. Tanım

$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $(\alpha_n), (\beta_n), (\gamma_m), (\zeta_m)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\beta_n}{\alpha_n} = 0, \lim_{m\to\infty} \frac{\zeta_m}{\gamma_m} = 0 \tag{4.1}$$

koşullarını sağlayan diziler olsun. $I = [0, \infty)$ olmak üzere $\forall x, y \in (I^2)$ ve $\forall f \in C(I^2)$ için $R_{n,m} : C(I^2) \to C(I^2)$ olmak üzere iki değişkenli genelleştirilmiş Szász-Sheffer-Kantorovich operatörlerini aşağıdaki gibi tanımlıyoruz.

$$R_{n,m}(f; \alpha_n, \beta_n, \gamma_m, \zeta_m; x, y) = \left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)\left(\frac{\gamma_m}{\zeta_m}\right) \frac{e^{\frac{-\alpha_n x H(1)}{\beta_n}}}{A(1)} \frac{e^{\frac{-\gamma_m y H(1)}{\zeta_m}}}{A(1)}$$

$$\times \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} p_k\left(\frac{\alpha_n x}{\beta_n}\right) p_j\left(\frac{\gamma_m y}{\zeta_m}\right) \int_{k\frac{\beta_n}{\alpha_n}}^{(k+1)\frac{\beta_n}{\alpha_n}} \int_{j\frac{\zeta_m}{\gamma_m}}^{(j+1)\frac{\zeta_m}{\gamma_m}} f(t, s)\, dt ds \tag{4.2}$$

4.1.2. Lemma

$R_{n,m}(f; \alpha_n, \beta_n, \gamma_m, \zeta_m; x, y)$ Eş.4.2 ile verilen operatör olsun. Bu durumda $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\forall x,y\in(I^2)$ için

(i) $R_{n,m}\left(1;\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\zeta_m;x,y\right)=1$

(ii) $R_{n,m}\left(t;\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\zeta_m;x,y\right)=x+\dfrac{\beta_n}{\alpha_n}\left(\dfrac{A'(1)}{A(1)}+\dfrac{1}{2}\right)$

(iii) $R_{n,m}\left(s;\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\zeta_m;x,y\right)=y+\dfrac{\zeta_m}{\gamma_m}\left(\dfrac{A'(1)}{A(1)}+\dfrac{1}{2}\right)$

(iv) $R_{n,m}\left(t^2;\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\zeta_m;x,y\right)=x^2+x\dfrac{\beta_n}{\alpha_n}\left(2\dfrac{A'(1)}{A(1)}+H''(1)+2\right)$

$+\dfrac{\beta_n^2}{\alpha_n^2}\left(\dfrac{A''(1)+2A'(1)}{A(1)}+\dfrac{1}{3}\right)$

(v) $R_{n,m}\left(s^2;\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\zeta_m;x,y\right)=y^2+y\dfrac{\zeta_m}{\gamma_m}\left(2\dfrac{A'(1)}{A(1)}+H''(1)+2\right)$

$+\dfrac{\zeta_m^2}{\gamma_m^2}\left(\dfrac{A''(1)+2A'(1)}{A(1)}+\dfrac{1}{3}\right)$

eşitlikleri sağlanır.

4.1.2.Lemmanın bir sonucu olarak momentleri verebiliriz.

4.1.3. Lemma

$\forall x,y\in(I^2)$ için $n\in\mathbb{N}$ olmak üzere

(i) $R_{n,m}\left((t-x);\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\zeta_m;x,y\right)=\dfrac{\beta_n}{\alpha_n}\left(\dfrac{A'(1)}{A(1)}+\dfrac{1}{2}\right)$

$$(ii)\ \ R_{n,m}\left((s-y);\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\zeta_m;x,y\right)=\frac{\zeta_m}{\gamma_m}\left(\frac{A'(1)}{A(1)}+\frac{1}{2}\right)$$

$$(iii)\ \ R_{n,m}\left((t-x)^2;\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\zeta_m;x,y\right)=x\frac{\beta_n}{\alpha_n}\left(H''(1)+1\right)$$

$$+\frac{\beta_n^2}{\alpha_n^2}\left(\frac{A''(1)+2A'(1)}{A(1)}+\frac{1}{3}\right)$$

$$(iv)\ \ R_{n,m}\left((s-y)^2;\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\zeta_m;x,y\right)=y\frac{\zeta_m}{\gamma_m}\left(H''(1)+1\right)$$

$$+\frac{\zeta_m^2}{\gamma_m^2}\left(\frac{A''(1)+2A'(1)}{A(1)}+\frac{1}{3}\right)$$

eşitlikleri sağlanır.

4.2. İki Değişkenli Genelleştirilmiş Szász-Sheffer-Kantorovich Operatörlerinin Yaklaşım Özellikleri

4.2.1. Tanım

$I=[0,\infty)$ olmak üzere $f\in C_B(I^2)$, $\delta>0$ ve $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)\in I^2$ olsun.

$$\omega(f;\delta)=\sup_{\substack{\rho(M_1,M_2)\leq\delta\\ M_1,M_2\in I^2}}\left|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)\right| \tag{4.3}$$

olarak tanımlı ω fonksiyonuna f'nin tam süreklilik modülü denir [13].

Burada $\rho(M_1,M_2)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ dir.

4.2.2. Teorem

$f \in C_B(I^2)$, $\delta > 0$ ve $(x,y) \in I^2$ olsun. Eş.4.2 ile verilen $R_{n,m}(f;\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\zeta_m;x,y)$ operatörü için

$$|R_{n,m}(f;\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\zeta_m;x,y) - f(x,y)| \leq 2\omega(f;\delta_{n,m}(x,y)) \tag{4.4}$$

dir. Burada

$$\delta_{n,m}(x,y)$$

$$= \sqrt{\left(x\frac{\beta_n}{\alpha_n} + y\frac{\zeta_m}{\gamma_m}\right)(H''(1)+1) + \left(\frac{\beta_n^2}{\alpha_n^2} + \frac{\zeta_m^2}{\gamma_m^2}\right)\left(\frac{A''(1)+2A'(1)}{A(1)} + \frac{1}{3}\right)} \tag{4.5}$$

her bir belirli $(x,y) \in I^2$ için noktasal olarak elde edilir. I^2 nin bir kompakt alt kümesinde

$$\delta_{n,m} = \sqrt{\frac{\beta_n}{\alpha_n} + \frac{\zeta_m}{\gamma_m}}$$

dir.

İspat

Eş.4.2 ile verilen $R_{n,m}(f;\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\zeta_m;x,y)$ operatörü lineer pozitif, 4.1.2.Lemma (i) den $R_{n,m}(1;\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\zeta_m;x,y) = 1$ olduğundan, 2.2.2.Lemma (vii), 4.1.3.Lemma (iii) ve (iv) dikkate alınarak

$$|R_{n,m}(f;\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\zeta_m;x,y) - f(x,y)|$$

$$= \left| \left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)\left(\frac{\gamma_m}{\zeta_m}\right) \frac{e^{\frac{-\alpha_n x H(1)}{\beta_n}}}{A(1)} \frac{e^{\frac{-\gamma_m y H(1)}{\zeta_m}}}{A(1)} \right.$$

$$\times \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} p_k\left(\frac{\alpha_n x}{\beta_n}\right) p_j\left(\frac{\gamma_m y}{\zeta_m}\right) \int\limits_{k\frac{\beta_n}{\alpha_n}}^{(k+1)\frac{\beta_n}{\alpha_n}} \int\limits_{j\frac{\zeta_m}{\gamma_m}}^{(j+1)\frac{\zeta_m}{\gamma_m}} f(t,s)\,dtds$$

$$-\left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)\left(\frac{\gamma_m}{\zeta_m}\right)\frac{e^{\frac{-\alpha_n x H(1)}{\beta_n}}}{A(1)}\frac{e^{\frac{-\gamma_m y H(1)}{\zeta_m}}}{A(1)}$$

$$\left.\times \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} p_k\left(\frac{\alpha_n x}{\beta_n}\right) p_j\left(\frac{\gamma_m y}{\zeta_m}\right) \int\limits_{k\frac{\beta_n}{\alpha_n}}^{(k+1)\frac{\beta_n}{\alpha_n}} \int\limits_{j\frac{\zeta_m}{\gamma_m}}^{(j+1)\frac{\zeta_m}{\gamma_m}} dtds f(x,y)\right|$$

$$\leq \left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)\left(\frac{\gamma_m}{\zeta_m}\right)\frac{e^{\frac{-\alpha_n x H(1)}{\beta_n}}}{A(1)}\frac{e^{\frac{-\gamma_m y H(1)}{\zeta_m}}}{A(1)}$$

$$\times \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} p_k\left(\frac{\alpha_n x}{\beta_n}\right) p_j\left(\frac{\gamma_m y}{\zeta_m}\right) \int\limits_{k\frac{\beta_n}{\alpha_n}}^{(k+1)\frac{\beta_n}{\alpha_n}} \int\limits_{j\frac{\zeta_m}{\gamma_m}}^{(j+1)\frac{\zeta_m}{\gamma_m}} \left|f(t,s)-f(x,y)\right| dtds$$

$$\leq \left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)\left(\frac{\gamma_m}{\zeta_m}\right)\frac{e^{\frac{-\alpha_n x H(1)}{\beta_n}}}{A(1)}\frac{e^{\frac{-\gamma_m y H(1)}{\zeta_m}}}{A(1)} \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} p_k\left(\frac{\alpha_n x}{\beta_n}\right) p_j\left(\frac{\gamma_m y}{\zeta_m}\right)$$

$$\times \int\limits_{k\frac{\beta_n}{\alpha_n}}^{(k+1)\frac{\beta_n}{\alpha_n}} \int\limits_{j\frac{\zeta_m}{\gamma_m}}^{(j+1)\frac{\zeta_m}{\gamma_m}} \left(1+\frac{1}{\delta}\sqrt{(t-x)^2+(s-y)^2}\right)\omega(f;\delta)\,dtds$$

$$\leq \omega\left(f;\delta\right)\left[\left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)\left(\frac{\gamma_m}{\zeta_m}\right)\frac{e^{\frac{-\alpha_n x H(1)}{\beta_n}}}{A\left(1\right)}\frac{e^{\frac{-\gamma_m y H(1)}{\zeta_m}}}{A\left(1\right)}\right.$$

$$\times\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}p_k\left(\frac{\alpha_n x}{\beta_n}\right)p_j\left(\frac{\gamma_m y}{\zeta_m}\right)\int\limits_{k\frac{\beta_n}{\alpha_n}}^{(k+1)\frac{\beta_n}{\alpha_n}}\int\limits_{j\frac{\zeta_m}{\gamma_m}}^{(j+1)\frac{\zeta_m}{\gamma_m}}dtds$$

$$+\frac{1}{\delta}\left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)\left(\frac{\gamma_m}{\zeta_m}\right)\frac{e^{\frac{-\alpha_n x H(1)}{\beta_n}}}{A\left(1\right)}\frac{e^{\frac{-\gamma_m y H(1)}{\zeta_m}}}{A\left(1\right)}$$

$$\left.\times\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}p_k\left(\frac{\alpha_n x}{\beta_n}\right)p_j\left(\frac{\gamma_m y}{\zeta_m}\right)\int\limits_{k\frac{\beta_n}{\alpha_n}}^{(k+1)\frac{\beta_n}{\alpha_n}}\int\limits_{j\frac{\zeta_m}{\gamma_m}}^{(j+1)\frac{\zeta_m}{\gamma_m}}\left((t-x)^2+(s-y)^2\right)^{\frac{1}{2}}dtds\right]$$

Burada önce integral üzerine daha sonra toplam üzerine Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulanarak

$$\left|R_{n,m}\left(f;\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\zeta_m;x,y\right)-f\left(x,y\right)\right|$$

$$\leq \omega\left(f;\delta\right)$$

$$\times\left[1+\frac{1}{\delta}\left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)\left(\frac{\gamma_m}{\zeta_m}\right)\frac{e^{\frac{-\alpha_n x H(1)}{\beta_n}}}{A\left(1\right)}\frac{e^{\frac{-\gamma_m y H(1)}{\zeta_m}}}{A\left(1\right)}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}p_k\left(\frac{\alpha_n x}{\beta_n}\right)p_j\left(\frac{\gamma_m y}{\zeta_m}\right)\right.$$

$$\times\left(\int_{k\frac{\beta_n}{\alpha_n}}^{(k+1)\frac{\beta_n}{\alpha_n}}\int_{j\frac{\zeta_m}{\gamma_m}}^{(j+1)\frac{\zeta_m}{\gamma_m}}(t-x)^2+(s-y)^2\,dtds\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{k\frac{\beta_n}{\alpha_n}}^{(k+1)\frac{\beta_n}{\alpha_n}}\int_{j\frac{\zeta_m}{\gamma_m}}^{(j+1)\frac{\zeta_m}{\gamma_m}}dtds\right)^{\frac{1}{2}}\Bigg]$$

$$\leq\omega\left(f;\delta\right)\Bigg[1+\frac{1}{\delta}$$

$$\times\left(\left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)\left(\frac{\gamma_m}{\zeta_m}\right)\frac{e^{\frac{-\alpha_n xH(1)}{\beta_n}}}{A\left(1\right)}\frac{e^{\frac{-\gamma_m yH(1)}{\zeta_m}}}{A\left(1\right)}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}p_k\left(\frac{\alpha_n x}{\beta_n}\right)p_j\left(\frac{\gamma_m y}{\zeta_m}\right)\right.$$

$$\left.\times\int_{k\frac{\beta_n}{\alpha_n}}^{(k+1)\frac{\beta_n}{\alpha_n}}\int_{j\frac{\zeta_m}{\gamma_m}}^{(j+1)\frac{\zeta_m}{\gamma_m}}\left((t-x)^2+(s-y)^2\right)dtds\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\times\left(\left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)\left(\frac{\gamma_m}{\zeta_m}\right)\frac{e^{\frac{-\alpha_n xH(1)}{\beta_n}}}{A\left(1\right)}\frac{e^{\frac{-\gamma_m yH(1)}{\zeta_m}}}{A\left(1\right)}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}p_k\left(\frac{\alpha_n x}{\beta_n}\right)p_j\left(\frac{\gamma_m y}{\zeta_m}\right)\right.$$

$$\left.\times\int_{k\frac{\beta_n}{\alpha_n}}^{(k+1)\frac{\beta_n}{\alpha_n}}\int_{j\frac{\zeta_m}{\gamma_m}}^{(j+1)\frac{\zeta_m}{\gamma_m}}dtds\right)^{\frac{1}{2}}\Bigg]$$

$$=\omega\left(f;\delta\right)\left(1+\frac{1}{\delta}\left(R_n\left((t-x)^2;\alpha_n,\beta_n;x\right)+R_m\left((s-y)^2;\gamma_m,\zeta_m;y\right)\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$

elde edilir. Burada Eş.4.5 dikkate alınarak ve $\delta=\delta_{n,m}\left(x,y\right)$ seçilerek teoremin sonucuna ulaşılır.

4.2.3. Tanım

$I=[0,\infty)$ olsun. $f\in C_B\left(I^2\right)$, $\delta>0$ olmak üzere

$$\omega^{(1)}\left(f;\delta_n\left(x\right)\right)=\sup_{\left(x_1,y\right),\left(x_2,y\right)\in I^2}\sup_{\left|x_1-x_2\right|\leq\delta}\left|f\left(x_1,y\right)-f\left(x_2,y\right)\right| \tag{4.6}$$

$$\omega^{(2)}\left(f;\delta_m\left(y\right)\right)=\sup_{\left(x,y_1\right),\left(x,y_2\right)\in I^2}\sup_{\left|y_1-y_2\right|\leq\delta}\left|f\left(x,y_1\right)-f\left(x,y_2\right)\right| \tag{4.7}$$

süreklilik modüllerine sırasıyla f'nin x ve y ye göre kısmi süreklilik modülleri denir [27].

Bu süreklilik modüllerinin tanımından $\rho\left(M_1,M_2\right)=\delta$ alırsak

$$\left|f\left(x_1,y_1\right)-f\left(x_2,y_2\right)\right|\leq\omega\left(f;\rho\left(M_1,M_2\right)\right) \tag{4.8}$$

$\delta=\left|x_1-x_2\right|$ için $\left|f\left(x_1,y\right)-f\left(x_2,y\right)\right|\leq\omega^{(1)}\left(f;\left|x_1-x_2\right|\right)$

$\delta=\left|y_1-y_2\right|$ için $\left|f\left(x,y_1\right)-f\left(x,y_2\right)\right|\leq\omega^{(2)}\left(f;\left|y_1-y_2\right|\right)$ dir.

4.2.4. Teorem

$f\in C_B\left(I^2\right)$, $\delta>0$ ve $(x,y)\in I^2$ olsun. Eş.4.2 ile verilen $R_{n,m}\left(f;\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\zeta_m;x,y\right)$ operatörü için

$$\left|R_{n,m}\left(f;\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\zeta_m;x,y\right)-f\left(x,y\right)\right|$$

$$\leq\left(1+\phi_{\alpha_n,\beta_n}\left(x\right)\right)\omega^{(1)}\left(f;\sqrt{\frac{\beta_n}{\alpha_n}}\right)+\left(1+\phi_{\gamma_m,\zeta_m}\left(y\right)\right)\omega^{(2)}\left(f;\sqrt{\frac{\zeta_m}{\gamma_m}}\right) \tag{4.9}$$

dir.

Burada

$$\phi_{\alpha_n,\beta_n}(x)=\sqrt{x\left(H''(1)+1\right)+\frac{\beta_n}{\alpha_n}\left(\frac{A''(1)+2A'(1)}{A(1)}+\frac{1}{3}\right)} \tag{4.10}$$

ve

$$\phi_{\gamma_m,\zeta_m}(y)=\sqrt{y\left(H''(1)+1\right)+\frac{\zeta_m}{\gamma_m}\left(\frac{A''(1)+2A'(1)}{A(1)}+\frac{1}{3}\right)} \tag{4.11}$$

dir.

İspat

Eş.4.2 ile verilen $R_{n,m}(f;\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\zeta_m;x,y)$ operatörü lineer pozitif, 4.1.2.Lemma (i) den $R_{n,m}(1;\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\zeta_m;x,y)=1$ olduğu dikkate alınarak ve 2.2.2.Lemma (vii) kullanılarak

$$|R_{n,m}(f;\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\zeta_m;x,y)-f(x,y)|$$

$$\leq\left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)\left(\frac{\gamma_m}{\zeta_m}\right)\frac{e^{\frac{-\alpha_n x H(1)}{\beta_n}}}{A(1)}\frac{e^{\frac{-\gamma_m y H(1)}{\zeta_m}}}{A(1)}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}p_k\left(\frac{\alpha_n x}{\beta_n}\right)p_j\left(\frac{\gamma_m y}{\zeta_m}\right)$$

$$\times\int\limits_{k\frac{\beta_n}{\alpha_n}}^{(k+1)\frac{\beta_n}{\alpha_n}}\int\limits_{j\frac{\zeta_m}{\gamma_m}}^{(j+1)\frac{\zeta_m}{\gamma_m}}|f(t,s)-f(x,y)|\,dtds$$

$$\leq\left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)\left(\frac{\gamma_m}{\zeta_m}\right)\frac{e^{\frac{-\alpha_n x H(1)}{\beta_n}}}{A(1)}\frac{e^{\frac{-\gamma_m y H(1)}{\zeta_m}}}{A(1)}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}p_k\left(\frac{\alpha_n x}{\beta_n}\right)p_j\left(\frac{\gamma_m y}{\zeta_m}\right)$$

$$\times \int\limits_{k\frac{\beta_n}{\alpha_n}}^{(k+1)\frac{\beta_n}{\alpha_n}} \int\limits_{j\frac{\zeta_m}{\gamma_m}}^{(j+1)\frac{\zeta_m}{\gamma_m}} \left| f(t,s) - f(x,s) + f(x,s) - f(x,y) \right| dtds$$

$$\leq \left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)\left(\frac{\gamma_m}{\zeta_m}\right)\frac{e^{\frac{-\alpha_n x H(1)}{\beta_n}}}{A(1)}\frac{e^{\frac{-\gamma_m y H(1)}{\zeta_m}}}{A(1)}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} p_k\left(\frac{\alpha_n x}{\beta_n}\right) p_j\left(\frac{\gamma_m y}{\zeta_m}\right)$$

$$\times \int\limits_{k\frac{\beta_n}{\alpha_n}}^{(k+1)\frac{\beta_n}{\alpha_n}} \int\limits_{j\frac{\zeta_m}{\gamma_m}}^{(j+1)\frac{\zeta_m}{\gamma_m}} \left(1 + \frac{1}{\delta_n}\sqrt{(t-x)^2}\right)\omega^{(1)}(f;\delta_n)\, dtds$$

$$+ \left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)\left(\frac{\gamma_m}{\zeta_m}\right)\frac{e^{\frac{-\alpha_n x H(1)}{\beta_n}}}{A(1)}\frac{e^{\frac{-\gamma_m y H(1)}{\zeta_m}}}{A(1)}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} p_k\left(\frac{\alpha_n x}{\beta_n}\right) p_j\left(\frac{\gamma_m y}{\zeta_m}\right)$$

$$\times \int\limits_{k\frac{\beta_n}{\alpha_n}}^{(k+1)\frac{\beta_n}{\alpha_n}} \int\limits_{j\frac{\zeta_m}{\gamma_m}}^{(j+1)\frac{\zeta_m}{\gamma_m}} \left(1 + \frac{1}{\delta_m}\sqrt{(s-y)^2}\right)\omega^{(2)}(f;\delta_m)\, dtds$$

$$\leq \omega^{(1)}(f;\delta_n)\left[\left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)\left(\frac{\gamma_m}{\zeta_m}\right)\frac{e^{\frac{-\alpha_n x H(1)}{\beta_n}}}{A(1)}\frac{e^{\frac{-\gamma_m y H(1)}{\zeta_m}}}{A(1)}\right.$$

$$\times \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} p_k\left(\frac{\alpha_n x}{\beta_n}\right) p_j\left(\frac{\gamma_m y}{\zeta_m}\right) \int\limits_{k\frac{\beta_n}{\alpha_n}}^{(k+1)\frac{\beta_n}{\alpha_n}} \int\limits_{j\frac{\zeta_m}{\gamma_m}}^{(j+1)\frac{\zeta_m}{\gamma_m}} dtds$$

$$+\frac{1}{\delta_n}\left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)\left(\frac{\gamma_m}{\zeta_m}\right)\frac{e^{\frac{-\alpha_n x H(1)}{\beta_n}}}{A(1)}\frac{e^{\frac{-\gamma_m y H(1)}{\zeta_m}}}{A(1)}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}p_k\left(\frac{\alpha_n x}{\beta_n}\right)p_j\left(\frac{\gamma_m y}{\zeta_m}\right)$$

$$\left.\times\int_{k\frac{\beta_n}{\alpha_n}}^{(k+1)\frac{\beta_n}{\alpha_n}}\int_{j\frac{\zeta_m}{\gamma_m}}^{(j+1)\frac{\zeta_m}{\gamma_m}}\left(\left((t-x)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)dtds\right]$$

$$+\omega^{(2)}(f;\delta_m)\left[\left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)\left(\frac{\gamma_m}{\zeta_m}\right)\frac{e^{\frac{-\alpha_n x H(1)}{\beta_n}}}{A(1)}\frac{e^{\frac{-\gamma_m y H(1)}{\zeta_m}}}{A(1)}\right.$$

$$\times\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}p_k\left(\frac{\alpha_n x}{\beta_n}\right)p_j\left(\frac{\gamma_m y}{\zeta_m}\right)\int_{k\frac{\beta_n}{\alpha_n}}^{(k+1)\frac{\beta_n}{\alpha_n}}\int_{j\frac{\zeta_m}{\gamma_m}}^{(j+1)\frac{\zeta_m}{\gamma_m}}dtds$$

$$+\frac{1}{\delta_m}\left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)\left(\frac{\gamma_m}{\zeta_m}\right)\frac{e^{\frac{-\alpha_n x H(1)}{\beta_n}}}{A(1)}\frac{e^{\frac{-\gamma_m y H(1)}{\zeta_m}}}{A(1)}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}p_k\left(\frac{\alpha_n x}{\beta_n}\right)p_j\left(\frac{\gamma_m y}{\zeta_m}\right)$$

$$\left.\times\int_{k\frac{\beta_n}{\alpha_n}}^{(k+1)\frac{\beta_n}{\alpha_n}}\int_{j\frac{\zeta_m}{\gamma_m}}^{(j+1)\frac{\zeta_m}{\gamma_m}}\left(\left((s-y)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)dtds\right]$$

$$\leq\omega^{(1)}(f;\delta_n)\left[1+\frac{1}{\delta_n}\left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)\left(\frac{\gamma_m}{\zeta_m}\right)\frac{e^{\frac{-\alpha_n x H(1)}{\beta_n}}}{A(1)}\frac{e^{\frac{-\gamma_m y H(1)}{\zeta_m}}}{A(1)}\right.$$

$$\times\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}p_k\left(\frac{\alpha_n x}{\beta_n}\right)p_j\left(\frac{\gamma_m y}{\zeta_m}\right)\int\limits_{k\frac{\beta_n}{\alpha_n}}^{(k+1)\frac{\beta_n}{\alpha_n}}\int\limits_{j\frac{\zeta_m}{\gamma_m}}^{(j+1)\frac{\zeta_m}{\gamma_m}}(t-x)\,dtds\right]$$

$$+\omega^{(2)}(f;\delta_m)\left[1+\frac{1}{\delta_m}\left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)\left(\frac{\gamma_m}{\zeta_m}\right)\frac{e^{\frac{-\alpha_n xH(1)}{\beta_n}}}{A(1)}\frac{e^{\frac{-\gamma_m yH(1)}{\zeta_m}}}{A(1)}\right.$$

$$\times\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}p_k\left(\frac{\alpha_n x}{\beta_n}\right)p_j\left(\frac{\gamma_m y}{\zeta_m}\right)\int\limits_{k\frac{\beta_n}{\alpha_n}}^{(k+1)\frac{\beta_n}{\alpha_n}}\int\limits_{j\frac{\zeta_m}{\gamma_m}}^{(j+1)\frac{\zeta_m}{\gamma_m}}(s-y)\,dtds\right]$$

Burada önce integral üzerine daha sonra toplam üzerine Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulanarak

$$|R_{n,m}(f;\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\zeta_m;x,y)-f(x,y)|$$

$$=\omega^{(1)}(f;\delta_n)\left[1+\frac{1}{\delta_n}\left(\left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)\left(\frac{\gamma_m}{\zeta_m}\right)\frac{e^{\frac{-\alpha_n xH(1)}{\beta_n}}}{A(1)}\frac{e^{\frac{-\gamma_m yH(1)}{\zeta_m}}}{A(1)}\right.\right.$$

$$\left.\times\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}p_k\left(\frac{\alpha_n x}{\beta_n}\right)p_j\left(\frac{\gamma_m y}{\zeta_m}\right)\int\limits_{k\frac{\beta_n}{\alpha_n}}^{(k+1)\frac{\beta_n}{\alpha_n}}\int\limits_{j\frac{\zeta_m}{\gamma_m}}^{(j+1)\frac{\zeta_m}{\gamma_m}}(t-x)^2\,dtds\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\times\left(\left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)\left(\frac{\gamma_m}{\zeta_m}\right)\frac{e^{\frac{-\alpha_n xH(1)}{\beta_n}}}{A(1)}\frac{e^{\frac{-\gamma_m yH(1)}{\zeta_m}}}{A(1)}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}p_k\left(\frac{\alpha_n x}{\beta_n}\right)p_j\left(\frac{\gamma_m y}{\zeta_m}\right)\right.$$

$$\left.\left.\times\int\limits_{k\frac{\beta_n}{\alpha_n}}^{(k+1)\frac{\beta_n}{\alpha_n}}\int\limits_{j\frac{\zeta_m}{\gamma_m}}^{(j+1)\frac{\zeta_m}{\gamma_m}}dtds\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$+\omega^{(2)}(f;\delta_m)\left[1+\frac{1}{\delta_m}\left(\left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)\left(\frac{\gamma_m}{\zeta_m}\right)\frac{e^{\frac{-\alpha_n x H(1)}{\beta_n}}}{A(1)}\frac{e^{\frac{-\gamma_m y H(1)}{\zeta_m}}}{A(1)}\right.\right.$$

$$\left.\times\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}p_k\left(\frac{\alpha_n x}{\beta_n}\right)p_j\left(\frac{\gamma_m y}{\zeta_m}\right)\int\limits_{k\frac{\beta_n}{\alpha_n}}^{(k+1)\frac{\beta_n}{\alpha_n}}\int\limits_{j\frac{\zeta_m}{\gamma_m}}^{(j+1)\frac{\zeta_m}{\gamma_m}}(s-y)^2\,dtds\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\times\left(\left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)\left(\frac{\gamma_m}{\zeta_m}\right)\frac{e^{\frac{-\alpha_n x H(1)}{\beta_n}}}{A(1)}\frac{e^{\frac{-\gamma_m y H(1)}{\zeta_m}}}{A(1)}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}p_k\left(\frac{\alpha_n x}{\beta_n}\right)p_j\left(\frac{\gamma_m y}{\zeta_m}\right)\right.$$

$$\left.\left.\times\int\limits_{k\frac{\beta_n}{\alpha_n}}^{(k+1)\frac{\beta_n}{\alpha_n}}\int\limits_{j\frac{\zeta_m}{\gamma_m}}^{(j+1)\frac{\zeta_m}{\gamma_m}}dtds\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$=\omega^{(1)}(f;\delta_n)\left[1+\frac{1}{\delta_n}\left(R_n(t-x)^2;x\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$+\omega^{(2)}(f;\delta_m)\left[1+\frac{1}{\delta_m}\left(R_n(s-y)^2;y\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$=\left(1+\frac{1}{\delta_n}\sqrt{x\frac{\beta_n}{\alpha_n}\left(H''(1)+1\right)+\frac{\beta_n^2}{\alpha_n^2}\left(\frac{A''(1)+2A'(1)}{A(1)}+\frac{1}{3}\right)}\right)\omega^{(1)}(f;\delta_n)$$

$$+\left(1+\frac{1}{\delta_m}\sqrt{y\frac{\zeta_m}{\gamma_m}\left(H''\left(1\right)+1\right)+\frac{\zeta_m^2}{\gamma_m^2}\left(\frac{A''\left(1\right)+2A'\left(1\right)}{A\left(1\right)}+\frac{1}{3}\right)}\right)\omega^{(2)}\left(f;\delta_m\right)$$

elde edilir.

Eş.4.10 ile Eş.4.11 dikkate alınarak ve $\delta_n = \sqrt{\frac{\beta_n}{\alpha_n}}$, $\delta_m = \sqrt{\frac{\zeta_m}{\gamma_m}}$ seçilerek teoremin sonucuna ulaşılır.

4.2.5. Tanım

f, $I^2 = [0,\infty)\times[0,\infty)$ da tanımlı bir fonksiyon, $x = (x_1, x_2)$, $t = (t_1, t_2)$ I^2 nin keyfi noktaları ve $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ olmak üzere

$$\left|f\left(x_1, x_2\right) - f\left(t_1, t_2\right)\right| \leq C\left\|x - t\right\|^{\gamma} \tag{4.12}$$

ve $0 < \gamma \leq 1$ ise f, I^2 de C sabitine göre γ.mertebeden Lipschitz sınıfındandır denir ve $f \in Lip_C\gamma$ yazılır.

4.2.6. Teorem

$R_{n,m}\left(f;\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\zeta_m;x,y\right)$ Eş.4.2 ile verilen iki değişkenli genelleştirilmiş Szász-Sheffer-Kantorovich operatörleri olsun. $f \in Lip_C\gamma$ için

$$\left|R_{n,m}\left(f;\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\zeta_m;x,y\right) - f\left(x,y\right)\right| \leq C\left(\delta_{n,m}\left(x,y\right)\right)^{\frac{\gamma}{2}} \tag{4.13}$$

$0 < \gamma \leq 1$ dir. Burada $\delta_{n,m}\left(x,y\right)$ Eş.4.5 ile verilmiştir.

İspat

$f \in Lip_C\gamma$ olsun. Eş.4.2 ile verilen $R_{n,m}\left(f;\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\zeta_m;x,y\right)$ nin tanımı ve 4.1.2.Lemma (i) dikkate alınarak

$$\left|R_{n,m}\left(f;\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\zeta_m;x,y\right) - f\left(x,y\right)\right|$$

$$= \left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)\left(\frac{\gamma_m}{\zeta_m}\right)\frac{e^{\frac{-\alpha_n x H(1)}{\beta_n}}}{A(1)}\frac{e^{\frac{-\gamma_m y H(1)}{\zeta_m}}}{A(1)}$$

$$\times \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} p_k\left(\frac{\alpha_n x}{\beta_n}\right) p_j\left(\frac{\gamma_m y}{\zeta_m}\right) \int\limits_{k\frac{\beta_n}{\alpha_n}}^{(k+1)\frac{\beta_n}{\alpha_n}} \int\limits_{j\frac{\zeta_m}{\gamma_m}}^{(j+1)\frac{\zeta_m}{\gamma_m}} f(t,s)\,dtds$$

$$- \left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)\left(\frac{\gamma_m}{\zeta_m}\right)\frac{e^{\frac{-\alpha_n x H(1)}{\beta_n}}}{A(1)}\frac{e^{\frac{-\gamma_m y H(1)}{\zeta_m}}}{A(1)}$$

$$\times \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} p_k\left(\frac{\alpha_n x}{\beta_n}\right) p_j\left(\frac{\gamma_m y}{\zeta_m}\right) \int\limits_{k\frac{\beta_n}{\alpha_n}}^{(k+1)\frac{\beta_n}{\alpha_n}} \int\limits_{j\frac{\zeta_m}{\gamma_m}}^{(j+1)\frac{\zeta_m}{\gamma_m}} dtds f(x,y)$$

$$\leq \left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)\left(\frac{\gamma_m}{\zeta_m}\right)\frac{e^{\frac{-\alpha_n x H(1)}{\beta_n}}}{A(1)}\frac{e^{\frac{-\gamma_m y H(1)}{\zeta_m}}}{A(1)}$$

$$\times \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} p_k\left(\frac{\alpha_n x}{\beta_n}\right) p_j\left(\frac{\gamma_m y}{\zeta_m}\right) \int\limits_{k\frac{\beta_n}{\alpha_n}}^{(k+1)\frac{\beta_n}{\alpha_n}} \int\limits_{j\frac{\zeta_m}{\gamma_m}}^{(j+1)\frac{\zeta_m}{\gamma_m}} |f(t,s) - f(x,y)|\,dtds$$

Eş.4.12 kullanılarak

$$|R_{n,m}(f;\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\zeta_m;x,y) - f(x,y)|$$

$$\leq \left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)\left(\frac{\gamma_m}{\zeta_m}\right)\frac{e^{\frac{-\alpha_n x H(1)}{\beta_n}}}{A(1)}\frac{e^{\frac{-\gamma_m y H(1)}{\zeta_m}}}{A(1)} \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} p_k\left(\frac{\alpha_n x}{\beta_n}\right) p_j\left(\frac{\gamma_m y}{\zeta_m}\right)$$

$$\times \int_{k\frac{\beta_n}{\alpha_n}}^{(k+1)\frac{\beta_n}{\alpha_n}} \int_{j\frac{\zeta_m}{\gamma_m}}^{(j+1)\frac{\zeta_m}{\gamma_m}} C\left((x-t)^2+(s-y)^2\right)^{\frac{\gamma}{2}} dtds$$

Burada $p=\frac{2}{\gamma}$ ve $q=\frac{2}{2-\gamma}$ için önce integral üzerine daha sonra toplam üzerine Hölder eşitsizliği uygulanarak

$$|R_{n,m}(f;\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\zeta_m;x,y)-f(x,y)|$$

$$\leq C\left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)\left(\frac{\gamma_m}{\zeta_m}\right)\frac{e^{\frac{-\alpha_n x H(1)}{\beta_n}}}{A(1)}\frac{e^{\frac{-\gamma_m y H(1)}{\zeta_m}}}{A(1)}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}p_k\left(\frac{\alpha_n x}{\beta_n}\right)p_j\left(\frac{\gamma_m y}{\zeta_m}\right)$$

$$\times\left(\int_{k\frac{\beta_n}{\alpha_n}}^{(k+1)\frac{\beta_n}{\alpha_n}} \int_{j\frac{\zeta_m}{\gamma_m}}^{(j+1)\frac{\zeta_m}{\gamma_m}} \left((x-t)^2+(s-y)^2\right) dtds\right)^{\frac{\gamma}{2}}$$

$$\times\left(\int_{k\frac{\beta_n}{\alpha_n}}^{(k+1)\frac{\beta_n}{\alpha_n}} \int_{j\frac{\zeta_m}{\gamma_m}}^{(j+1)\frac{\zeta_m}{\gamma_m}} dtds\right)^{\frac{2-\gamma}{2}}$$

$$\leq C\left[\left(\left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)\left(\frac{\gamma_m}{\zeta_m}\right)\frac{e^{\frac{-\alpha_n x H(1)}{\beta_n}}}{A(1)}\frac{e^{\frac{-\gamma_m y H(1)}{\zeta_m}}}{A(1)}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\left(p_k\left(\frac{\alpha_n x}{\beta_n}\right)\right)^{\frac{2}{\gamma}}\left(p_j\left(\frac{\gamma_m y}{\zeta_m}\right)\right)^{\frac{2}{\gamma}}\right.\right.$$

$$\left.\times\int_{k\frac{\beta_n}{\alpha_n}}^{(k+1)\frac{\beta_n}{\alpha_n}} \int_{j\frac{\zeta_m}{\gamma_m}}^{(j+1)\frac{\zeta_m}{\gamma_m}} \left((x-t)^2+(s-y)^2\right) dtds\right)^{\frac{\gamma}{2}}$$

$$\times\left(\left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)\left(\frac{\gamma_m}{\zeta_m}\right)\frac{e^{\frac{-\alpha_n xH(1)}{\beta_n}}}{A(1)}\frac{e^{\frac{-\gamma_m yH(1)}{\zeta_m}}}{A(1)}\right.$$

$$\left.\left.\times\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\left(p_k\left(\frac{\alpha_n x}{\beta_n}\right)\right)^{\frac{2}{2-\gamma}}\left(p_j\left(\frac{\gamma_m y}{\zeta_m}\right)\right)^{\frac{2}{2-\gamma}}\int\limits_{k\frac{\beta_n}{\alpha_n}}^{(k+1)\frac{\beta_n}{\alpha_n}}\int\limits_{j\frac{\zeta_m}{\gamma_m}}^{(j+1)\frac{\zeta_m}{\gamma_m}}dtds\right)^{\frac{2-\gamma}{2}}\right]$$

$$\leq C\left(R_n\left((t-x)^2;x\right)+R_m\left((s-y)^2;y\right)\right)^{\frac{\gamma}{2}}$$

$$\leq C\left(\left(x\frac{\beta_n}{\alpha_n}+y\frac{\zeta_m}{\gamma_m}\right)(H''(1)+1)+\left(\frac{\beta_n^2}{\alpha_n^2}+\frac{\zeta_m^2}{\gamma_m^2}\right)\left(\frac{A''(1)+2A'(1)}{A(1)}+\frac{1}{3}\right)\right)^{\frac{\gamma}{2}}$$

elde edilir. Burada Eş.4.5 dikkate alınarak teoremin sonucuna ulaşılır.

4.2.7. Tanım

$I^2=[0,\infty)\times[0,\infty)$ da tanımlı f fonksiyonu, (x_1,y), (x_2,y) I^2 nin keyfi noktaları olmak üzere

$$|f(x_1,y)-f(x_2,y)|\leq C_1|x_1-x_2|^{\gamma_1},\ 0<\gamma_1\leq 1 \tag{4.14}$$

koşulunu sağlarsa, f fonksiyonu I^2 de x değişkenine göre Lipschitz koşulunu sağlar veya x değişkenine göre $Lip\gamma_1$ sınıfındandır denir ve bu $f\in Lip_x\gamma_1$ biçiminde gösterilir.

Benzer şekilde (x,y_1), (x,y_2) I^2 nin keyfi noktaları olmak üzere

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\leq C_2|y_1-y_2|^{\gamma_2},\ 0<\gamma_2\leq 1 \tag{4.15}$$

koşulunu sağlarsa f fonksiyonu y değişkenine göre Lipschitz koşulunu sağlar veya y değişkenine göre $Lip\gamma_2$ sınıfındandır denir ve bu $f\in Lip_y\gamma_2$ biçiminde gösterilir.

4.2.8. Teorem

$R_{n,m}(f;\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\zeta_m;x,y)$ Eş.4.2 ile verilen iki değişkenli genelleştirilmiş Szász-Sheffer-Kantorovich operatörü olsun. $f \in Lip_x\gamma_1 \cap Lip_y\gamma_2$ için

$$|R_{n,m}(f;\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\zeta_m;x,y) - f(x,y)|$$

$$\leq C_1\left(\frac{\beta_n}{\alpha_n}\right)^{\frac{\gamma_1}{2}}(\phi_{\alpha_n,\beta_n}(x))^{\gamma_1} + C_2\left(\frac{\zeta_m}{\gamma_m}\right)^{\frac{\gamma_2}{2}}(\phi_{\gamma_m,\zeta_m}(y))^{\gamma_2} \tag{4.16}$$

$0 < \gamma_1,\gamma_2 \leq 1$ dir.

İspat

$f \in Lip_x\gamma_1 \cap Lip_y\gamma_2$ olsun. Eş.4.2 ile verilen $R_{n,m}(f;\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\zeta_m;x,y)$ nin tanımından

ve Eş.4.2 nin monotonluk özelliğinden

$$|R_{n,m}(f;\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\zeta_m;x,y) - f(x,y)|$$

$$\leq \left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)\left(\frac{\gamma_m}{\zeta_m}\right)\frac{e^{\frac{-\alpha_n x H(1)}{\beta_n}}}{A(1)}\frac{e^{\frac{-\gamma_m y H(1)}{\zeta_m}}}{A(1)}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}p_k\left(\frac{\alpha_n x}{\beta_n}\right)p_j\left(\frac{\gamma_m y}{\zeta_m}\right)$$

$$\times\int_{k\frac{\beta_n}{\alpha_n}}^{(k+1)\frac{\beta_n}{\alpha_n}}\int_{j\frac{\zeta_m}{\gamma_m}}^{(j+1)\frac{\zeta_m}{\gamma_m}}|f(t,s) - f(x,y)|\,dtds$$

$$\leq \left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)\left(\frac{\gamma_m}{\zeta_m}\right)\frac{e^{\frac{-\alpha_n x H(1)}{\beta_n}}}{A(1)}\frac{e^{\frac{-\gamma_m y H(1)}{\zeta_m}}}{A(1)}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}p_k\left(\frac{\alpha_n x}{\beta_n}\right)p_j\left(\frac{\gamma_m y}{\zeta_m}\right)$$

$$\times \int_{k\frac{\beta_n}{\alpha_n}}^{(k+1)\frac{\beta_n}{\alpha_n}} \int_{j\frac{\zeta_m}{\gamma_m}}^{(j+1)\frac{\zeta_m}{\gamma_m}} \left| f(t,s) - f(x,s) + f(x,s) - f(x,y) \right| dtds$$

bulunur.

$$\left| R_{n,m}(f; \alpha_n, \beta_n, \gamma_m, \zeta_m; x, y) - f(x,y) \right| \leq |I_1| + |I_2|$$

diyelim. Eş.4.14 dikkate alınarak

$$|I_1| = \left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)\left(\frac{\gamma_m}{\zeta_m}\right)\frac{e^{\frac{-\alpha_n x H(1)}{\beta_n}}}{A(1)}\frac{e^{\frac{-\gamma_m y H(1)}{\zeta_m}}}{A(1)}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} p_k\left(\frac{\alpha_n x}{\beta_n}\right) p_j\left(\frac{\gamma_m y}{\zeta_m}\right)$$

$$\times \int_{k\frac{\beta_n}{\alpha_n}}^{(k+1)\frac{\beta_n}{\alpha_n}} \int_{j\frac{\zeta_m}{\gamma_m}}^{(j+1)\frac{\zeta_m}{\gamma_m}} \left| f(t,s) - f(x,s) \right| dtds$$

$$|I_1| \leq \left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)\left(\frac{\gamma_m}{\zeta_m}\right)\frac{e^{\frac{-\alpha_n x H(1)}{\beta_n}}}{A(1)}\frac{e^{\frac{-\gamma_m y H(1)}{\zeta_m}}}{A(1)}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} p_k\left(\frac{\alpha_n x}{\beta_n}\right) p_j\left(\frac{\gamma_m y}{\zeta_m}\right)$$

$$\times \int_{k\frac{\beta_n}{\alpha_n}}^{(k+1)\frac{\beta_n}{\alpha_n}} \int_{j\frac{\zeta_m}{\gamma_m}}^{(j+1)\frac{\zeta_m}{\gamma_m}} C_1 |t-x|^{\gamma_1} dtds,\ 0 < \gamma_1 \leq 1$$

olur. Burada $p = \frac{2}{\gamma_1}$ ve $q = \frac{2}{2-\gamma_1}$ için önce integral üzerine daha sonra toplam üzerine Hölder eşitsizliği uygulanarak

$$|I_1| \leq C_1 \left[\left(\left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)\left(\frac{\gamma_m}{\zeta_m}\right)\frac{e^{\frac{-\alpha_n x H(1)}{\beta_n}}}{A(1)}\frac{e^{\frac{-\gamma_m y H(1)}{\zeta_m}}}{A(1)}\right.\right.$$

$$\times \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\left(p_k\left(\frac{\alpha_n x}{\beta_n}\right)\right)^{\frac{2}{\gamma_1}}\left(p_j\left(\frac{\gamma_m y}{\zeta_m}\right)\right)^{\frac{2}{\gamma_1}}\int\limits_{k\frac{\beta_n}{\alpha_n}}^{(k+1)\frac{\beta_n}{\alpha_n}}\int\limits_{j\frac{\zeta_m}{\gamma_m}}^{(j+1)\frac{\zeta_m}{\gamma_m}}|t-x|^2\,dtds\right)^{\frac{\gamma_1}{2}}$$

$$\times\left(\left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)\left(\frac{\gamma_m}{\zeta_m}\right)\frac{e^{\frac{-\alpha_n x H(1)}{\beta_n}}}{A(1)}\frac{e^{\frac{-\gamma_m y H(1)}{\zeta_m}}}{A(1)}\right.$$

$$\left.\times \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\left(p_k\left(\frac{\alpha_n x}{\beta_n}\right)\right)^{\frac{2}{2-\gamma_1}}\left(p_j\left(\frac{\gamma_m y}{\zeta_m}\right)\right)^{\frac{2}{2-\gamma_1}}\int\limits_{k\frac{\beta_n}{\alpha_n}}^{(k+1)\frac{\beta_n}{\alpha_n}}\int\limits_{j\frac{\zeta_m}{\gamma_m}}^{(j+1)\frac{\zeta_m}{\gamma_m}}dtds\right)^{\frac{2-\gamma_1}{2}}\Bigg]$$

$$=C_1\left(R_n\left((t-x)^2;x\right)\right)^{\frac{\gamma_1}{2}}$$

$$=C_1\left(x\frac{\beta_n}{\alpha_n}\left(H''(1)+1\right)+\frac{\beta_n^2}{\alpha_n^2}\left(\frac{A''(1)+2A'(1)}{A(1)}+\frac{1}{3}\right)\right)^{\frac{\gamma_1}{2}}$$

bulunur. Burada Eş.4.10 dikkate alınarak

$$|I_1|\leq C_1\left(\frac{\beta_n}{\alpha_n}\right)^{\frac{\gamma_1}{2}}\left(\phi_{\alpha_n,\beta_n}(x)\right)^{\gamma_1}$$

elde edilir.

$$|I_2|=\left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)\left(\frac{\gamma_m}{\zeta_m}\right)\frac{e^{\frac{-\alpha_n x H(1)}{\beta_n}}}{A(1)}\frac{e^{\frac{-\gamma_m y H(1)}{\zeta_m}}}{A(1)}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}p_k\left(\frac{\alpha_n x}{\beta_n}\right)p_j\left(\frac{\gamma_m y}{\zeta_m}\right)$$

$$\times\int\limits_{k\frac{\beta_n}{\alpha_n}}^{(k+1)\frac{\beta_n}{\alpha_n}}\int\limits_{j\frac{\zeta_m}{\gamma_m}}^{(j+1)\frac{\zeta_m}{\gamma_m}}|f(x,s)-f(x,y)|\,dtds$$

Eş.4.15 dikkate alınarak

$$|I_2| \leq \left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)\left(\frac{\gamma_m}{\zeta_m}\right)\frac{e^{\frac{-\alpha_n x H(1)}{\beta_n}}}{A(1)}\frac{e^{\frac{-\gamma_m y H(1)}{\zeta_m}}}{A(1)}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}p_k\left(\frac{\alpha_n x}{\beta_n}\right)p_j\left(\frac{\gamma_m y}{\zeta_m}\right)$$

$$\times \int_{k\frac{\beta_n}{\alpha_n}}^{(k+1)\frac{\beta_n}{\alpha_n}}\int_{j\frac{\zeta_m}{\gamma_m}}^{(j+1)\frac{\zeta_m}{\gamma_m}} C_2\left|s-y\right|^{\gamma_2} dtds,\ 0<\gamma_2\leq 1$$

olur. Burada $p=\frac{2}{\gamma_2}$ ve $q=\frac{2}{2-\gamma_2}$ için önce integral üzerine daha sonra toplam üzerine Hölder eşitsizliği uygulanarak

$$|I_2| \leq C_2\left[\left(\left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)\left(\frac{\gamma_m}{\zeta_m}\right)\frac{e^{\frac{-\alpha_n x H(1)}{\beta_n}}}{A(1)}\frac{e^{\frac{-\gamma_m y H(1)}{\zeta_m}}}{A(1)}\right.\right.$$

$$\left.\times\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\left(p_k\left(\frac{\alpha_n x}{\beta_n}\right)\right)^{\frac{2}{\gamma_2}}\left(p_j\left(\frac{\gamma_m y}{\zeta_m}\right)\right)^{\frac{2}{\gamma_2}}\int_{k\frac{\beta_n}{\alpha_n}}^{(k+1)\frac{\beta_n}{\alpha_n}}\int_{j\frac{\zeta_m}{\gamma_m}}^{(j+1)\frac{\zeta_m}{\gamma_m}}\left|s-y\right|^{2} dtds\right)^{\frac{\gamma_2}{2}}$$

$$\times\left(\left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)\left(\frac{\gamma_m}{\zeta_m}\right)\frac{e^{\frac{-\alpha_n x H(1)}{\beta_n}}}{A(1)}\frac{e^{\frac{-\gamma_m y H(1)}{\zeta_m}}}{A(1)}\right.$$

$$\left.\left.\times\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\left(p_k\left(\frac{\alpha_n x}{\beta_n}\right)\right)^{\frac{2}{2-\gamma_2}}\left(p_j\left(\frac{\gamma_m y}{\zeta_m}\right)\right)^{\frac{2}{2-\gamma_2}}\int_{k\frac{\beta_n}{\alpha_n}}^{(k+1)\frac{\beta_n}{\alpha_n}}\int_{j\frac{\zeta_m}{\gamma_m}}^{(j+1)\frac{\zeta_m}{\gamma_m}} dtds\right)^{\frac{2-\gamma_2}{2}}\right]$$

$$= C_2\left(R_n\left((s-y)^2;y\right)\right)^{\frac{\gamma_2}{2}}$$

$$= C_2 \left(y \frac{\zeta_m}{\gamma_m} \left(H'' \left(1 \right) + 1 \right) + \frac{\zeta_m^2}{\gamma_m^2} \left(\frac{A'' \left(1 \right) + 2A' \left(1 \right)}{A \left(1 \right)} + \frac{1}{3} \right) \right)^{\frac{\gamma_2}{2}}$$

elde edilir. Burada Eş.4.11 dikkate alınarak

$$|I_2| \leq C_2 \left(\frac{\zeta_m}{\gamma_m} \right)^{\frac{\gamma_2}{2}} \left(\phi_{\gamma_m, \zeta_m} \left(y \right) \right)^{\gamma_2}$$

elde edilir.

$$|R_{n,m} \left(f; \alpha_n, \beta_n, \gamma_m, \zeta_m; x, y \right) - f \left(x, y \right)| \leq |I_1| + |I_2|$$

olduğundan

$$|R_{n,m} \left(f; \alpha_n, \beta_n, \gamma_m, \zeta_m; x, y \right) - f \left(x, y \right)|$$

$$\leq C_1 \left(\frac{\beta_n}{\alpha_n} \right)^{\frac{\gamma_1}{2}} \left(\phi_{\alpha_n, \beta_n} \left(x \right) \right)^{\gamma_1} + C_2 \left(\frac{\zeta_m}{\gamma_m} \right)^{\frac{\gamma_2}{2}} \left(\phi_{\gamma_m, \zeta_m} \left(y \right) \right)^{\gamma_2}, \; 0 < \gamma_1, \gamma_2 \leq 1$$

sonucuna ulaşılır.

4.2.9. Tanım

$I = [0, \infty)$ olsun. $C_B^2 \left(I^2 \right)$, I^2 de ikinci kısmi türevleri mevcut ve sürekli olan $f \in C_B \left(I^2 \right)$ fonksiyonlarının uzayıdır ve $C_B^2 \left(I^2 \right)$ uzayındaki norm

$$\|f\|_{C_B^2(I^2)} = \|f\|_{C_B(I^2)} + \sum_{i=1}^{2} \left(\left\| \frac{\partial^i f}{\partial x^i} \right\|_{C_B(I^2)} + \left\| \frac{\partial^i f}{\partial y^i} \right\|_{C_B(I^2)} \right) \tag{4.17}$$

biçimindedir ve $\|, \|_{C_B(I^2)}$, Eş.3.5 ile verilen normdur.

$f \in C_B \left(I^2 \right)$ fonksiyonunun Peetre-$\mathcal{K}$ fonksiyoneli

$$\mathcal{K} \left(f; \delta \right) = \inf_{g \in C_B^2(I^2)} \left\{ \|f - g\|_{C_B(I^2)} + \delta \|g\|_{C_B(I^2)}, \delta > 0 \right\} \tag{4.18}$$

biçiminde tanımlanır.

Ayrıca $\forall\delta > 0$ için

$$\mathcal{K}\left(f;\delta\right) \leq C\omega_2\left(f;\sqrt{\delta}\right) \tag{4.19}$$

dir.

Burada $\omega_2\left(f;\sqrt{\delta}\right)$ ikinci süreklilik modülüdür.

4.2.10. Teorem

$R_{n,m}\left(f;\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\zeta_m;x,y\right)$ Eş.4.2 ile verilen iki değişkenli genelleştirilmiş Szász-Sheffer-Kantorovich operatörleri olsun. Her $f \in C_B\left(I^2\right)$ için ve $\dfrac{\beta_n}{\alpha_n} \leq 1$, $\dfrac{\zeta_m}{\gamma_m} \leq 1$ olmak üzere

$$\left|R_{n,m}\left(f;\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\zeta_m;x,y\right) - f\left(x,y\right)\right| \leq 4\mathcal{K}\left(f,\delta_{n,m}\left(x,y\right)\right)$$

$$+\omega\left(f;\sqrt{\left(\frac{\beta_n}{\alpha_n}\left(\frac{A'(1)}{A(1)}+\frac{1}{2}\right)\right)^2+\left(\frac{\zeta_m}{\gamma_m}\left(\frac{A'(1)}{A(1)}+\frac{1}{2}\right)\right)^2}\right)$$

$$\leq C_1\omega_2\left(f;\sqrt{\delta_{n,m}\left(x,y\right)}\right)+\omega\left(f;\sqrt{\left(\frac{\beta_n}{\alpha_n}\left(\frac{A'(1)}{A(1)}+\frac{1}{2}\right)\right)^2+\left(\frac{\zeta_m}{\gamma_m}\left(\frac{A'(1)}{A(1)}+\frac{1}{2}\right)\right)^2}\right)$$

dir. Burada C_1 pozitif bir sabit sayı ve

$$\delta_{n,m}\left(x,y\right) = \left(C_{\alpha_n,\beta_n}\left(x\right)+C_{\gamma_m,\zeta_m}\left(y\right)\right)$$

$$= \left(\frac{\beta_n}{\alpha_n} \left(x\left(H''\left(1\right)+1\right) + \left(\frac{A''\left(1\right)+2A'\left(1\right)}{A\left(1\right)} + \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{A'\left(1\right)}{A\left(1\right)} + \frac{1}{2} \right)^2 \right) \right)$$

$$+ \left(\frac{\zeta_m}{\gamma_m} \left(y\left(H''\left(1\right)+1\right) + \left(\frac{A''\left(1\right)+2A'\left(1\right)}{A\left(1\right)} + \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{A'\left(1\right)}{A\left(1\right)} + \frac{1}{2} \right)^2 \right) \right)$$

dir.

İspat

$f \in C_B\left(I^2\right)$ olmak üzere $\overline{R_{n,m}}\left(f;\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\zeta_m;x,y\right)$ yardımcı operatörünü

$$\overline{R_{n,m}}\left(f;\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\zeta_m;x,y\right) = R_{n,m}\left(f;\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\zeta_m;x,y\right)$$

$$+f\left(x,y\right) - f\left(\left(x + \frac{\beta_n}{\alpha_n}\left(\frac{A'\left(1\right)}{A\left(1\right)} + \frac{1}{2}\right)\right), \left(y + \frac{\zeta_m}{\gamma_m}\left(\frac{A'\left(1\right)}{A\left(1\right)} + \frac{1}{2}\right)\right)\right) \tag{4.20}$$

olarak tanımlayalım.

$$\overline{R_{n,m}}\left(1;\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\zeta_m;x,y\right) = 1 \tag{4.21}$$

$$\overline{R_{n,m}}\left(t;\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\zeta_m;x,y\right) = x,\ \overline{R_{n,m}}\left(s;\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\zeta_m;x,y\right) = y \tag{4.22}$$

olduğundan

$$\overline{R_{n,m}}\left(t-x;\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\zeta_m;x,y\right) = 0,\ \overline{R_{n,m}}\left(s-y;\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\zeta_m;x,y\right) = 0 \tag{4.23}$$

dır.

$t, s \in [0, \infty)$ ve $g \in C_B^2(I^2)$ olsun. Taylor formülünden

$$g(t,s) - g(x,y)$$

$$= g'(x)(t-x) + \int\limits_x^t (t-u) g''(u) du + g'(y)(s-y) + \int\limits_y^s (s-v) g''(v) dv \tag{4.24}$$

dir.

$\overline{R_{n,m}}(f; \alpha_n, \beta_n, \gamma_m, \zeta_m; x, y)$ operatörü Eş.4.24 nın her iki yanına uygulanarak ve Eş.4.23 dikkate alınarak

$$\overline{R_{n,m}}(g(t,s); \alpha_n, \beta_n, \gamma_m, \zeta_m; x, y) - \overline{R_{n,m}}(g(x,y); \alpha_n, \beta_n, \gamma_m, \zeta_m; x, y)$$

$$= \overline{R_{n,m}}((t-x); \alpha_n, \beta_n, \gamma_m, \zeta_m; x, y) g'(x)$$

$$+\overline{R_{n,m}}\left(\int\limits_x^t (t-u) g''(u) du; \alpha_n, \beta_n, \gamma_m, \zeta_m; x, y\right)$$

$$+\overline{R_{n,m}}((s-y); \alpha_n, \beta_n, \gamma_m, \zeta_m; x, y) g'(y)$$

$$+\overline{R_{n,m}}\left(\int\limits_y^s (s-v) g''(v) dv; \alpha_n, \beta_n, \gamma_m, \zeta_m; x, y\right)$$

$$= \overline{R_{n,m}}\left(\int\limits_x^t (t-u) g''(u) du; \alpha_n, \beta_n, \gamma_m, \zeta_m; x, y\right)$$

$$+\overline{R_{n,m}}\left(\int_{y}^{s}(s-v)\,g''(v)\,dv;\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\zeta_m;x,y\right)$$

elde edilir.

Eş.4.20 dan

$$\left|\overline{R_{n,m}}\left((g(t,s);\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\zeta_m;x,y)-g(x,y)\right)\right|$$

$$\leq R_{n,m}\left(\int_{x}^{t}|(t-u)|\,|g''(u)|\,du;\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\zeta_m;x,y\right)$$

$$+\int_{x}^{x+\frac{\beta_n}{\alpha_n}\left(\frac{A'(1)}{A(1)}+\frac{1}{2}\right)}\left|x+\frac{\beta_n}{\alpha_n}\left(\frac{A'(1)}{A(1)}+\frac{1}{2}\right)-x\right|\,|g''(u)|\,du$$

$$+R_{n,m}\left(\int_{y}^{s}|(s-v)|\,|g''(v)|\,dv;\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\zeta_m;x,y\right)$$

$$+\int_{y}^{y+\frac{\zeta_m}{\gamma_m}\left(\frac{A'(1)}{A(1)}+\frac{1}{2}\right)}\left|y+\frac{\zeta_m}{\gamma_m}\left(\frac{A'(1)}{A(1)}+\frac{1}{2}\right)-y\right|\,|g''(v)|\,dv$$

yazarız. Burada 4.1.3.Lemma (iii), (iv) ve $\dfrac{\beta_n}{\alpha_n}\leq 1$, $\dfrac{\zeta_m}{\gamma_m}\leq 1$ olduğunu dikkate alarak

$$\left|\overline{R_{n,m}}\left((g(t,s);\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\zeta_m;x,y)-g(x,y)\right)\right|$$

$$\leq \|g''\|_{C_B^2(I^2)} \left(R_{n,m}\left((t-x)^2; \alpha_n, \beta_n, \gamma_m, \zeta_m; x, y\right) + \left(\frac{\beta_n}{\alpha_n} \left(\frac{A'(1)}{A(1)} + \frac{1}{2} \right) \right)^2 \right)$$

$$+ \|g''\|_{C_B^2(I^2)} \left(R_{n,m}\left((s-y)^2; \alpha_n, \beta_n, \gamma_m, \zeta_m; x, y\right) + \left(\frac{\zeta_m}{\gamma_m} \left(\frac{A'(1)}{A(1)} + \frac{1}{2} \right) \right)^2 \right)$$

$$\leq \|g''\|_{C_B^2(I^2)} \left(\frac{\beta_n}{\alpha_n} \left(x\left(H''(1)+1\right) + \left(\frac{A''(1)+2A'(1)}{A(1)} + \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{A'(1)}{A(1)} + \frac{1}{2} \right)^2 \right) \right)$$

$$+ \|g''\|_{C_B^2(I^2)} \left(\frac{\zeta_m}{\gamma_m} \left(y\left(H''(1)+1\right) + \left(\frac{A''(1)+2A'(1)}{A(1)} + \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{A'(1)}{A(1)} + \frac{1}{2} \right)^2 \right) \right)$$

$$= \|g''\|_{C_B^2(I^2)} \left(C_{\alpha_n,\beta_n}(x) + C_{\gamma_m,\zeta_m}(y) \right)$$

yazalım. Böylece $g \in C_B^2(I^2)$ için

$$\left| \overline{R_{n,m}}\left((g(t,s); \alpha_n, \beta_n, \gamma_m, \zeta_m; x, y) - g(x,y)\right) \right|$$

$$\leq \|g''\|_{C_B^2(I^2)} \left(C_{\alpha_n,\beta_n}(x) + C_{\gamma_m,\zeta_m}(y) \right) \tag{4.25}$$

elde edilir. Her $f \in C_B(I^2)$ için Eş.4.2 ile verilen $R_{n,m}(f; \alpha_n, \beta_n, \gamma_m, \zeta_m; x, y)$ den ve Lemma 4.1.2. (i) den

$$\left| \overline{R_{n,m}}(f; \alpha_n, \beta_n, \gamma_m, \zeta_m; x, y) \right|$$

$$\leq \left| R_{n,m}(f; \alpha_n, \beta_n, \gamma_m, \zeta_m; x, y) \right| + \left| f(x,y) \right|$$

$$+\left|f\left(x+\frac{\beta_n}{\alpha_n}\left(\frac{A'(1)}{A(1)}+\frac{1}{2}\right)\right),\left(y+\frac{\zeta_m}{\gamma_m}\left(\frac{A'(1)}{A(1)}+\frac{1}{2}\right)\right)\right|$$

$$\leq 3\left\|f\right\|_{C_B(I^2)}$$

bulunur. Buradan $f \in C_B(I^2)$ ve $g \in C_B^2(I^2)$ alarak, operatörün lineerliği kullanılarak ve Eş.4.25 dikkate alınarak

$$\left|R_{n,m}(f;\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\zeta_m;x,y)-f(x,y)\right|$$

$$\leq\left|\overline{R_{n,m}}(f;\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\zeta_m;x,y)-f(x,y)\right|$$

$$+\left|f\left(x+\frac{\beta_n}{\alpha_n}\left(\frac{A'(1)}{A(1)}+\frac{1}{2}\right)\right),\left(y+\frac{\zeta_m}{\gamma_m}\left(\frac{A'(1)}{A(1)}+\frac{1}{2}\right)\right)-f(x,y)\right|$$

$$\left|R_{n,m}(f;\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\zeta_m;x,y)-f(x,y)\right|\leq\left|\overline{R_{n,m}}((f-g);\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\zeta_m;x,y)\right|$$

$$+\left|\overline{R_{n,m}}(g;\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\zeta_m;x,y)-g(x,y)\right|+\left|g(x,y)-f(x,y)\right|$$

$$+\left|f\left(\left(x+\frac{\beta_n}{\alpha_n}\left(\frac{A'(1)}{A(1)}+\frac{1}{2}\right)\right),\left(y+\frac{\zeta_m}{\gamma_m}\left(\frac{A'(1)}{A(1)}+\frac{1}{2}\right)\right)\right)-f(x,y)\right|$$

$$\leq 4\left\|f-g\right\|_{C_B(I^2)}+\left\|g''\right\|_{C_B^2(I^2)}\left(C_{\alpha_n,\beta_n}(x)+C_{\gamma_m,\zeta_m}(y)\right)$$

$$+\omega\left(f;\sqrt{\left(\frac{\beta_n}{\alpha_n}\left(\frac{A'(1)}{A(1)}+\frac{1}{2}\right)\right)^2+\left(\frac{\zeta_m}{\gamma_m}\left(\frac{A'(1)}{A(1)}+\frac{1}{2}\right)\right)^2}\right)$$

bulunur.

$$\delta_{n,m}(x,y) = \left(C_{\alpha_n,\beta_n}(x) + C_{\gamma_m,\zeta_m}(y)\right)$$

denilirse yukarıda elde edilen eşitlikte $g \in C_B^2(I^2)$ üzerinden infimum alınarak ve Eş.4.19 kullanılarak

$$|R_{n,m}(f;\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\zeta_m;x,y) - f(x,y)| \leq 4\mathcal{K}(f,\delta_{n,m}(x,y))$$

$$+\omega\left(f;\sqrt{\left(\frac{\beta_n}{\alpha_n}\left(\frac{A'(1)}{A(1)}+\frac{1}{2}\right)\right)^2+\left(\frac{\zeta_m}{\gamma_m}\left(\frac{A'(1)}{A(1)}+\frac{1}{2}\right)\right)^2}\right)$$

$$\leq C_1\omega_2\left(f;\sqrt{\delta_{n,m}(x,y)}\right)+\omega\left(f;\sqrt{\left(\frac{\beta_n}{\alpha_n}\left(\frac{A'(1)}{A(1)}+\frac{1}{2}\right)\right)^2+\left(\frac{\zeta_m}{\gamma_m}\left(\frac{A'(1)}{A(1)}+\frac{1}{2}\right)\right)^2}\right)$$

elde edilir.

Bu bölümde incelenen $R_{n,m}(f;\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\zeta_m;x,y)$ operatörlerinin x^2+y^2 yi koruyacak biçimde yeniden düzenlenerek King tipi bir genelleştirmesi yapılabilir. Bu genelleştirmenin tam süreklilik modülü cinsinden yaklaşım derecesi $R_{n,m}(f;\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\zeta_m;x,y)$ operatörlerinden daha iyi olacaktır.

5. SONUÇ

Yaklaşım teorisinin önemli problemlerinden biri, sürekli veya integrallenebilir fonksiyonlara operatörlerle yaklaşımda en iyi yakınsama oranının bulunmasıdır.

Bu çalışmada pozitif reel eksende sürekli fonksiyonlara yaklaşmak için genel bir Szász-Sheffer operatörü dikkate alındı. Bu genelleştirmede belirli koşulu sağlayan (α_n) ve (β_n) dizileri önemli bir rol oynar.

Bu tezde genelleştirilmiş Szász-Sheffer operatörlerinden daha iyi bir yaklaşım oranı elde etmek için operatörün King tipi genelleştirmesi tanımlanarak (α_n) ve (β_n) dizilerinin farklı seçimleri ile daha iyi yaklaşım oranları elde edildi. İntegrallenebilir fonksiyonlara yaklaşmak için tanımlanan genelleştirilmiş Szász-Sheffer-Kantorovich operatörlerinin King tipi genelleştirilmesiyle fonksiyonlara yaklaşımda daha küçük bir hata oranı bulundu.

Bu çalışmada elde edilen sonuçların önemi operatörün taban elemanında yer alan (α_n) ve (β_n) dizileridir. Bu dizilere bağlı olarak yakınsaklığın daha iyi olduğu grafiklerle de gösterilmiştir.

Sheffer polinomları gibi ortogonal polinomları içeren operatörler için benzer çalışmalar yapılabilir.

KAYNAKLAR

1. Szász, O., (1950). Generalization of S. Bernstein's polynomials to the infinite interval. J*ournal of research of the National Bureau of Standards*, 45(3), 239-245.

2. Jakimovski, A. and Leviatan, D. (1969). Generalized Szász operators for the approximation in the infinite interval. *Mathematica*, 11(2), 97-103.

3. Agrawal, P. N. and Kasana, H. S. (1994). On simultaneous approximation by Szász-Mirakjan operators. *Bulletin of the Institute of Mathematics Academia Sinica,* 22(2), 181-188

4. Cetin, N. and Ispir, N. (2013). Approximation by complex modified Szász-Mirakjan operators. *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica*, 50(3), 355-372.

5. Duman, O., Özarslan, M.A., Aktuğlu, H. (2008). Better error estimation for Szász-Mirakjan-Beta operators. *Journal of Computational Analysis and Applications*, 10(1), 53-59.

6. Duman, O. and Özarslan, M. A. (2007). Szász-Mirakjan type operators providing a better error estimation. *Applied Mathematics Letters* 20(12), 1184-1188.

7. Della Vecchia, B., Mastroianni, G. and Szabados, J. (2006). Weighted approximation of functions by Szász-Mirakyan-type operators. *Acta Mathematica Hungarica* 111(4), 325-345.

8. Gupta, V. and Noor, M. A. (2006). Convergence of derivatives for certain mixed Szász-Beta operators. *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* 321(1), 1-9.

9. Gupta, V., Vasishtha, V. and Gupta, M.K. (2002). Rate of convergence of the Szász-Kantorovitch-Bezier operators for bounded variation functions. *Publications de l Institut Mathematique*, 72(86), 137-143.

10. Özarslan, M.A., Duman, O. (2008) Local approximation results for Szász-Mirakjan type operators. *Archiv der Mathematik*, (Basel) 90(2), 144-149.

11. Srivastava, H.M. and Gupta, V. (2003). A certain family of summation integral type operators. *Mathematical and Computer Modelling*. 37(12), 1307-1315.

12. Totik, V. (1983). Uniform approximation by Szász-Mirakjan type operators. *Acta Mathematica Hungarica,* 41(4), 291-307.

13. Ismail, M. E. H. (1974). On a generalization of Szász operators, *Mathematica*, 39(2) 259-267.

14. Sucu, S. and Büyükyazici, I. (2012). Integral operators containing Sheffer

polynomials. *Bulletin of Mathematical Analysis and Applications,* 4(4), 56-66.

15. Mursaleen, M., Ansari, K. J. Approximation by generalized Szasz Operators Involving Sheffer Polynomials. *Department of Mathematics*, 16(1), 14.

16. Rao, N. and Wafi, A. (2017). Approximation by Szász Type Operators Including Sheffer Polynomials. *Journal of Mathematics and Applications.* 40(13), 135-148.

17. Costabile, F. A., Gualtieri, M. I. and Napoli, A. (2018). Some results on generalized Szász operators involving Sheffer polynomials. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 3337(1), 244-255.

18. Roman, S. (1984). *The umbral calculus* (Second edition). New York: Academic Press, 95-188.

19. Sucu, S. and Ibikli, E. (2013). Rate of convergance of Szász type operators including Sheffer polynomials. *Studia Universitatis Babeş-Bolyai Mathematica*, 58(1) 55-63.

20. Gal, S. G. 5(2014). Approximation with an arbitrary order by generalized Szász-Mirakjan operators. *Studia Universitatis Babeş-Bolyai Mathematica*, 59(1), 77-81.

21. Altomare, F. and Campiti, M. (1994). Korovkin-type Approximation Theory and its Application. *Walter de Gruyter Studies in Mathematics*, 17(11), 627.

22. Baskakov, V. A. (1957). An instance of a sequence of linear positive operators in the space of continuous functions. *Doklady Akademii Nauk*, 113(2), 249-251.

23. Bernstein, S. N. (1912). Démonstration du théorème de Weierstrass fondée sur le calcul des probabilités, *Communications of the Kharkov Mathematical Societ,* 2 (13), 1-2.

24. Duman, O. and Orhan, C. (2006). An abstract version of the Korovkin approximation theorem. *Publicationes mathematicae*, 69, 33-46.

25. Duman, O. and Özarslan, M.A. Szász-Mirakjan type operators providing a better error estimation. *Applied Mathematics Letters* 20(12), 1184-1188.

26. Duman, O., Özarslan, M. A. and Della Vecchia, B. (2008). Modified Szász-Mirakjan-Kantorovich Operators Preserving Linear Functions. *Turkish Journal of Mathematics*, 33(2), 151-158.

27. Gal, S.G. and Anastassiou, G. A. (2000). *Approximation Theory: Moduli of Continuity and Global Smoothness Preservation*, (First edition) New York: Birkhäuser, 80-466.

28. Gupta, V., Agarwal, R.P. (2014). *Convergence estimates in approximation theory* (First edition). India: Springer International Publishing, 8.

29. King, J. P. (2003). Positive linear operators which preserve x^2. *Acta Mathematica Hungarica*, 99(3), 203-208.

30. Meyer-König, W. and Zeller, K. (1960). Bernsteinsche Potenzreihen. *Studia Mathematica*, 19(1), 89-94.

31. Özarslan, M.A. and Duman, O. (2007). MKZ type operators providing a better estimation on [1/2,1). *Canadian Mathematical Bulletin*, 50(3), 434-439.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, Adı	:	KOÇ, Tuğba
Uyruğu	:	T.C.
Doğum tarihi ve yeri	:	1989, Ankara
Medeni hali	:	Bekar
Telefon	:	05465106368
e-mail	:	tugbaaa.koc@gmail.com

Eğitim

Derece	**Eğitim Birimi**	**Mezuniyet Tarihi**
Yüksek lisans	Gazi Üniversitesi/Matematik Böl.	Devam ediyor.
Lisans	Niğde Üniversitesi/Matematik Böl.	2013
Lise	Rauf Denktaş Lisesi	2006

Yabancı Dil

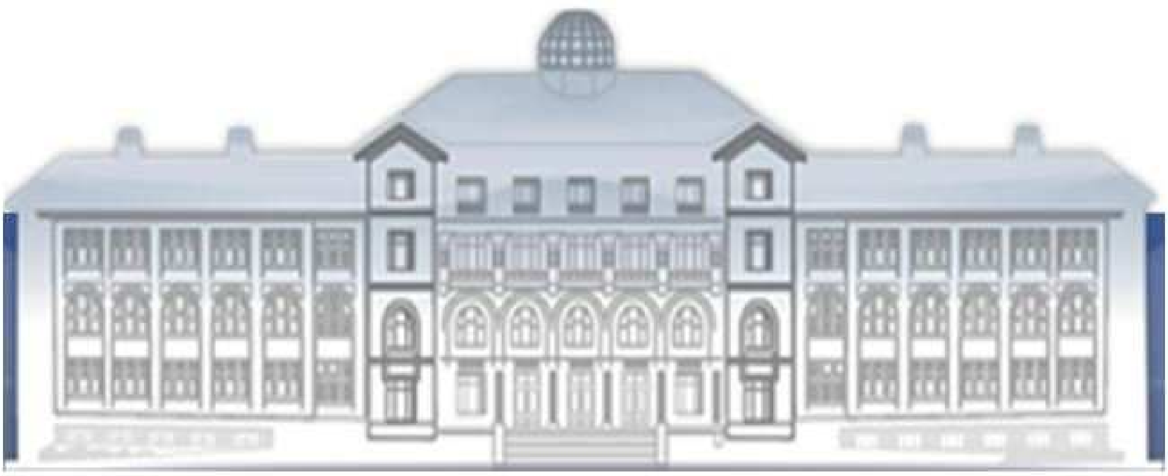
İngilizce

Yayınlar

Koç, T. and İspir, N. (2019). Genelleştirilmiş Szasz-Sheffer Operatörleri ile İntegrallenebilir Fonksiyonlara Yaklaşım. *14. Ankara Matematik Günleri Gazi Üniversitesi* , 117

Hobiler

Fotoğraf çekmek, Enstrüman çalmak, Müze gezmek, Okumak



GAZİ GELECEKTİR...