



GENELLEŞTİRİLMİŞ METRİK UZAYLARDA BAZI ORTAK SABİT
NOKTA TEOREMLERİ VE UYGULAMALARI

Nesrin MANAV

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ARALIK 2019

Nesrin MANAV tarafından hazırlanan "GENELLEŞTİRİLMİŞ METRİK UZAYLARDA BAZI ORTAK SABİT NOKTA TEOREMLERİ VE UYGULAMALARI" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Gazi Üniversitesi Matematik Ana Bilim Dalında DOKTORA TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. A. Duran TÜRKOĞLU
Matematik Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum.

Başkan: Prof. Dr. Hakan EFE
Matematik Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum.

Üye: Doç. Dr. Murat OLGUN
Matematik Ana Bilim Dalı, Ankara Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum.

Üye: Prof. Dr. İshak ALTUN
Matematik Ana Bilim Dalı, Kırıkkale Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum.

Üye: Doç. Dr. Vildan ÖZTÜRK
Matematik Ana Bilim Dalı, Ankara Hacı Bayram Veli Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum.

Tez Savunma Tarihi: 06/12/2019

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Doktora Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....
Prof. Dr. Sena YAŐYERLİ
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Nesrin MANAV

06/12/2019

GENELLEŞTİRİLMİŞ METRİK UZAYLARDA BAZI ORTAK SABİT NOKTA TEOREMLERİ VE UYGULAMALARI

(Doktora Tezi)

Nesrin MANAV

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Aralık 2019

ÖZET

Bu tezde genelleőtirilmiő metrik uzay yapısı ele alınmıőtır. Bu yapı üzerinde tanımlı dönüşümlerin sabit noktaya sahip olma koőulları ve özellikleri incelenmiőtır. Modüler metrik ve genelleőtirilmiő metrik kavramlarından hareketle genelleőtirilmiő modüler metrik kavramı verilmiőtır. Örnekler yardımıyla genelleőtirilmiő modüler metrik yapısının içerdėđi diğer metrik uzaylara değinilmiőtır. Banach Büzölme Dönüşümü İlkesinden hareketle büzölme ve quasi-büzölme dönüşümleri(Ćirić) genelleőtirilmiő metrik uzaylarda verilmiőtır. Çođul değerli büzölme dönüşümleri de genelleőtirilmiő modüler metrik uzaylarda incelenmiőtır. Bu metrik uzayların topolojik yapısı ortaya konarak bazı önemli işlemlerin neden bu uzaylarda da yapılabildiği açıklanmıőtır. Caristi ve Feng-Liu sabit nokta teoremleri ve sonuçları uygulaması ile beraber genelleőtirilmiő modüler metrik uzaylarda ifade ve ispat edilmiőtır. Uygulama olarak, başlangıç değer koőulları ile verilen kısmi diferansiyel denklemlerin çözümü incelenmiőtır.

Bilim Kodu : 20405

Anahtar Kelimeler : Sabit nokta teoremi, modüler metrik, çoğul değerli dönüşüm,
Caristi tip, Feng-Liu tip dönüşüm, genelleştirilmiş metrik uzaylar

Sayfa Adedi : 56

Danışman : Prof. Dr. A. Duran TÜRKÖĞLU

SOME COMMON FIXED POINT THEOREMS IN GENERALIZED METRIC
SPACES AND THEIR APPLICATIONS

(Ph. D. Thesis)

Nesrin MANAV

GAZİ UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

December 2019

ABSTRACT

Generalized metric space structure is given in this thesis. Conditions of having fixed point and its properties are studied defined mappings on its own structure. The definition of generalized modular metric space is explained starting from modular metric and generalized metric concepts. Other metric spaces that are included in the modular metric structure that are generalized by changing some of them are mentioned. Based on the Banach Contraction Principle, contraction and partial-contraction mappings (Ćirić) are performed in generalized metric spaces. Multivalued contraction mappings were also analyzed in generalized modular metric spaces. The topological structure of these metric spaces emerges. Caristi and Feng-Liu type fixed point theorems and results are applied together with the application of generalized modular metric spaces are expressed and proven. As application, the existence of solutions for a partial differential differential equation with initial value conditions was investigated.

Science Code : 20405

Key Words : Fixed point theorem, modular metric, multivalued mapping,
Caristi type, Feng-Liu type, generalized metric spaces

Page Number : 56

Supervisor : Prof. Dr. A. Duran TÜRKOĞLU

TEŞEKKÜR

Tüm doktora sürecim boyunca değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren, iyi kaynaklarla yol gösteren, bana değerli zamanımı ayıran, bir akademisyen ve baba olarak yaptığı her şeyle bana en güzel örneklerden biri olan sayın danışmanım Prof. Dr. A. Duran TÜRKOĞLU' na teşekkür ederim. Tez sürecimde kıymetli yorumlarını dile getiren ve yapıcı eleştirileriyle yol gösteren sayın Tez İzleme Komite üyelerim; Prof. Dr. Hakan EFE ve Doç. Dr. Murat OLGUN'a teşekkür ederim. Sabit Nokta Teorisi ile ilgilenen ekibin bir parçası olduğum için müteşekkirim ve bu ekipten yardımları için Prof. Dr. İshak ALTUN' a teşekkür ederim. Tüm eğitim hayatıma emeklerini katan hocalarıma, akademik ortamımdaki arkadaşlarıma, hayatımın bu dünyaya gelmeden önceki parçası da olup beni her anımda olduğu gibi doktora sürecimde de destekleyen birtanecik kardeşim Dr. Nesibe MANAV' a, çok uzaklarda olsa da hep desteğini hissettiğim Prof. Dr. Mohamed A. Khamsi ve Dr. Raymond Ray'e teşekkür ederim. Ayrıca doktora sürecim boyunca 2211-E ve 2214-A destekleriyle çalışma yapabilmemi sağlayan TÜBİTAK(Türkiye Bilimsel ve Teknik Araştırma Kurumu)' a destekleri için teşekkür ederim. Her yorulduğumda yanlarıma koşup yeniden başlamak için gereken her şeyi bulduğum, bana her daim destek olan, her durumda sevgi ile yaklaşan, saygıdeğer bir birey olarak beni içimde yaşadığım dünyaya yararlı olacak şekilde yetiştiren aileme, annem Sadike ve babam Ahmet MANAV' a, tüm güzel ve anlamlı kelimelerle teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR	ix
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER	5
2.1. Temel Tanımlar	5
2.2. Temel Teoremler	18
3. GENELLEŞTİRİLMİŞ MODÜLER METRİK UZAYLAR İÇİN SABİT NOKTA TEOREMLERİ	21
3.1. Genelleştirilmiş Modüler Metrik	22
3.2. Genelleştirilmiş Modüler Metrik Uzaylarda Banach Büzülme İlkesi	25
3.3. Genelleştirilmiş Modüler Metrik Uzaylarda Ćirić Sabit Nokta Teoremi	27
4. GENELLEŞTİRİLMİŞ MODÜLER METRİK UZAYLARDA ÇOĞUL DEĞERLİ DÖNÜŞÜMLER İÇİN BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİ	33
4.1. Genelleştirilmiş Modüler Metrik Uzayların Bazı Özellikleri	34
4.2. Genelleştirilmiş Modüler Metrik Uzayda Çoğul Değerli Dönüşümler İçin Caristi Sabit Nokta Teoremi	39
4.3. Genelleştirilmiş Modüler Metrik Uzayda Çoğul Değerli Dönüşümler İçin Feng-Liu Tip Sabit Nokta Teoremi	41
4.4. Uygulama	44

	Sayfa
5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	49
KAYNAKLAR	51
ÖZGEÇMİŞ	55



SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklamalar
$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$	$\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ dizisinin alt limiti
$B(X)$	X kümesinin sınırlı bütün kümeleri ailesi
$C(X)$	X kümesinin kapalı bütün alt kümelerinin ailesi
$\mathcal{N}(A)$	Herhangi bir $A \subseteq X$ kümesinin boş kümeden farklı bütün alt kümelerinin ailesi
$CB(X)$	X kümesinin kapalı ve sınırlı bütün alt kümelerinin ailesi
(X, d)	X kümesi üzerinde tanımlı d metriği ile verilen metrik uzay
(X, ρ)	X kümesi üzerinde tanımlı ρ modüleri ile verilen modüler uzay
(X, ω)	X kümesi üzerinde tanımlı ω ile verilen modüler metrik uzay
τ_{XD}	D -modüler metriğinin verilen X kümesi üzerinde ürettiği topoloji
$P(X)$	X kümesinin bütün alt kümeleri ailesi
$\delta_{D, \lambda(C)}$	Herhangi bir $C \subseteq X$ kümesinin (X, D) GMMU' da D_λ genelleştirilmiş modülerine göre çapı
$\mathcal{O}(x)$	Her bir $x \in X$ için $\{x, f(x), f^2(x), \dots\}$ şeklinde alınan f fonksiyonuna bağlı iterasyon dizisi kümesi
$GMMU$	Genelleştirilmiş modüler metrik uzay
$B(x)_{\lambda, \mu}$	Herhangi $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$ ve $\mu > 0$ için ω modüler metriği ile X kümesi üzerinde tanımlanan açık yuvar
JS	Jleli-Samet metrik uzayı
$\tau(\omega)$	X kümesi üzerinde ω modüler metriğinin ürettiği topoloji
$\inf_{b \in B} D_\lambda(a, b)$	$B \subseteq X$ kümesi üzerinde D_λ genelleştirilmiş metriği ile tanımlanan metrik değerler kümesinin en büyük alt sınırı
$\sup_{b \in B} D_\lambda(a, b)$	$B \subseteq X$ kümesi üzerinde D_λ genelleştirilmiş metriği ile tanımlanan metrik değerler kümesinin en küçük üst sınırı
$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$	$\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ dizisinin üst limiti

1. GİRİŞ

Sabit Nokta Teorisi, günümüzde pek çok matematikçi tarafından çalışılan ve sayısız alanda uygulamaları olan bir matematik disiplini. Klasik analizin hızla gelişimine paralel olarak gelişmiştir. Diferansiyel ve integral denklemler için varlık teoremlerinin ispatlanmasındaki yeri sayesinde önemi son birkaç on yılda giderek artmıştır. Belli koşullar altındaki X kümesinin, üzerine bir dönüşüm olan f dönüşümü ile bir ya da daha çok sabit noktaya sahip olması bu teoremin basit bir özetidir.

Sabit Nokta Teorisi(SNT) üç ana alana ayrılmıştır: Metrik SNT, Topolojik SNT ve Ayrık SNT. Bu sınıflandırmayı sağlayan üç ana teorem sırasıyla; Banach, Brouwer ve Tarski Sabit Nokta teoremleri olmuştur.

Banach Büzülme İlkesi, tam metrik uzaylar üzerinde tanımlı her büzülme dönüşümünün bir tek sabit noktaya sahip olduğunu basit ve anlaşılır bir matematiksel ifadeyle söyler ve analizin sabit nokta teorisinde en fazla uygulama alanına sahip olan ilkedir. Böyle olmasında bu ilkenin bazı önemli özellikleri rol oynamıştır. Örneğin; dönüşümlerin büzülme durumlarının anlaşılır olması, koşullarının kolayca test edilebilmesi, sadece tam metrik uzay yapısını gerektirmesi, yapıcı olan ve işlem basamakları rahatça takip edilebilen bir algoritma kullanması, diferansiyel ve integral denklemlerin çözümünün varlığı ve tekliği araştırılırken başarılı yaklaşımı, bu denklemlerin uygulama alanlarında kullanılması bu nedenler arasında sayılabilir [1]. Bu ilke temelde başka matematikçiler tarafından önceden biliniyor olsa da ilk kez Banach' ın 1922 yılındaki tezinde açık bir şekilde ifade edilmiş ve integral denklemin çözümünün varlığını göstermek için kullanılmıştır [2].

Önce büzülme dönüşümünün tanımı ve ardından Banach Büzülme İlkesinin ifadesi verilmiştir.

(X, d) bir metrik uzay ve $f : X \rightarrow X$ herhangi bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in X$ için

$$d(f(x), f(y)) \leq k d(x, y) \quad (1.1)$$

olacak şekilde bir $k \geq 0$ sabiti var ise f dönüşümüne Lipschitz dönüşümü denir. En küçük k sabitine f ' nin Lipschitz sabiti denir. $f : X \rightarrow X$ Lipschitz dönüşümünün $k < 1$ olacak biçimde bir Lipschitz sabiti var ise bu dönüşüme büzülme dönüşümü denir.

Banach Büzülme Dönüşümü İlkesi:

(X, d) tam metrik uzay ve $f : X \rightarrow X$ bir büzülme dönüşümü olsun. Bu durumda her $x \in X$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = x_0$ 'dir. f ' nin bir x_0 sabit noktası vardır. Dahası,

$$d(f^n(x), x_0) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x, f(x)) \quad (1.2)$$

dir [3].

Bu ilkenin genelleştirmeleri de matematikçilerin ilgisini çekmiş ve metrik uzayın genelleştirilmesi ya da büzülme dönüşümünün genelleştirilmesi yoluyla yapılmıştır. Modüler metrik uzaylar üzerinde verilen sabit nokta teoremi uzayın, quasi-büzülme yardımıyla verilen Ćirić sabit nokta teoremi dönüşümünün daha genel olmasına verilebilecek yapılan önemli çalışmalardandır [4-6].

Banach Büzülme Dönüşümü İlkesi çoğul değerli dönüşümlere ilk defa Nadler tarafından genişletilmiştir [7]. Nadler, bu konudaki ana teoremini şöyle açıklamıştır: " (X, d) tam metrik uzay, $f : X \rightarrow CB(X)$ çoğul değerli büzülme dönüşümü olsun. Bu durumda f sabit noktaya sahiptir." Burada Nadler, herhangi $A, B \in CB(X)$, yani X kümesinin kapalı ve sınırlı herhangi A ve B kümeleri ve her $a \in A$ için, bir $\varepsilon > 0$ alındığında

$$d(a, b) \leq H(A, B) + \varepsilon \quad (1.3)$$

sağlanacak biçimde bir $b \in B$ bulunur, sonucunu Hausdorff metriği için açıklamıştır. (Burada B kümesinin kompakt olması b elemanının varlığını garanti eder.) (X, d) bir metrik uzay ve $CB(X)$, X kümesinin kapalı ve sınırlı alt kümeleri ailesi olmak üzere her $x, y \in CB(X)$ için

$$H(A, B) = \max \left\{ \sup_{x \in A} d(x, B), \sup_{y \in B} d(y, A) \right\} \quad (1.4)$$

şeklinde verilen $H : CB(X) \times CB(X) \rightarrow [0, \infty)$ dönüşümüne Hausdorff metriği denir. Sabit nokta teoreminin ifadesinde kullandığı çoğul değerli büzülme dönüşümü ile Nadler, (X, d_1) ve (Y, d_2) iki metrik uzay, $f : X \rightarrow CB(Y)$ bir dönüşüm, $\alpha \in \mathbb{R}$ bir sabit olmak üzere,

$$H(f(x), f(z)) \leq \alpha d_1(x, z) \quad (1.5)$$

her $x, z \in X$ için sağlayan f dönüşümünü kastetmiştir. Burada bu dönüşüme aynı

zamanda çoğul değerli Lipschitz dönüşümü denir. α sayısı 1' den küçük ise bu durumda f dönüşümüne çoğul değerli büzülme dönüşümü denir.

Hausdorff metriği yardımıyla verilen çoğul değerli dönüşüm için sabit noktanın varlığı ve teklığı ile ilgili teorem aşağıda verilmiştir:

(X, d) tam metrik uzay olsun. $CB(X)$ ile X 'in kapalı ve sınırlı tüm alt kümelerinin ailesi gösterilsin ve H Hausdorff metriği olsun. $f : X \rightarrow CB(X)$ çoğul değerli bir dönüşüm olmak üzere, eğer her $x, y \in X$ için

$$H(f(x), f(y)) \leq k d(x, y) \quad (1.6)$$

olacak biçimde $k < 1$ sabiti var ise $x \in f(x)$ olacak biçimde bir $x \in X$ noktası vardır.

Bu teoremden iki noktaya dikkat çekilebilir. Birincisi, Banach Büzülme İlkesinin aksine, x sabit noktasının tek olmamasıdır, olmasına da gerek yoktur. İkincisi, X tam metrik uzaydır, $(CB(X), H)$ da tamdır [8].

Genelleştirilmiş modüler metrik uzayların yapısal olarak incelendiği bu tezin içeriği beş başlık altında toplanmıştır.

Başlarken çoğul değerli fonksiyonların bazı temel özelliklerinden bahsedilmiştir. Genelleştirilmiş modüler metrik uzaylar(GMMU) üzerinde açık yuvar tanımları verilmiş ve bunların ürettiği iki önemli topoloji ele alınmıştır. Bu topolojiler GMMU' da daha önce bahsedilen diğer topolojilerle karşılaştırılmıştır.

Genelleştirilmiş Hausdorff modüler metrik tanımı verilmiştir. Ardından çoğul değerli Lipschitz dönüşümü, D-çoğul değerli büzülme dönüşümü gibi yeni tanımlar yapılmıştır. Bunların arasındaki ilişki açıklanmış ve Genelleştirilmiş Banach Büzülme İlkesi yardımıyla GMMU' ın çoğul değerli bir dönüşüm için boş kümeden farklı, D-kapalı ve sınırlı herhangi bir alt kümesinde sabit noktanın varlık ve teklilik koşulları araştırılmıştır.

Sabit noktaya sahip dönüşümlerin davranışlarını inceleyen, iyi bilinen bazı sabit nokta teoremleri çoğul değerli dönüşümler için de ispatlanmıştır. Bunlardan ikisi bu bölümde ele alınmıştır: Caristi ve Feng-Liu tipleri. Burada Feng-Liu tipi, Hausdorff metriği kullanmadan diğer çalışmalardan çok farklı bir yönde sabit nokta sonuçlarının genişlemesidir. Bu tip yaklaşımlar yardımıyla sabit noktanın varlığının hangi koşulları gerektirdiği GMMU' da araştırılmıştır.

Sonuç bölümünde, GMMU'da homojen olmayan lineer parabolik parçalı diferansiyel denklemlerde başlangıç değer problemi için örnek niteliğinde bir uygulama verilmiştir.



2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

2.1. Temel Tanımlar

Bu bölümde genelleştirilmiş modüler metrik yapısını kurarken yararlanılan bazı temel tanım ve teoremler yer almaktadır.

1990 yılında Khamsi, Kozłowski ve Reich tarafından modüler fonksiyon uzaylarında sabit nokta teorisi ilk kez ve detaylı olarak çalışılmıştır [9]. Modüler fonksiyon uzayları, Nakano tarafından daha önceden tanımlanmış olan modüler vektör uzaylarının lineer olmayan özel bir durumudur [10]. Modüler fonksiyon uzayları ilk kez Musielak ve Orlicz tarafından ortaya konmuştur [11]. Bu çalışmaların ardından modüler metrik yapısı da Chistyakov tarafından oluşturulmuştur [4, 5]. Abdou ve Khamsi, modüler metrik uzaylarda sabit nokta teoremlerini araştırmışlar ve sabit noktaya sahip olabilecek dönüşümlerin nasıl bir yapıya sahip olmaları gerektiğini kurallarıyla ortaya koymuşlardır [12]. Abdou ve Khamsi' nin çalışmaları Chistyakov' un çalışmalarından modüler metriğin ele alınışı bakımından temel olarak farklıdır. Bu tez boyunca Abdou ve Khamsi' nin yaklaşımı ile aynı yaklaşım benimsenmiştir.

Metrik yapısını genelleştirmek, metrik uzayların klasik yapısı ve bunun getirdiği sonuçlara bakıldığında bazı anlamlı ve derin kavrayışlar doğurduğu için ilginçtir. Örneğin, klasik bir metrik uzayda üçgen eşitsizliğinin üzerinde yapılan ufak değişiklikler artık o uzayın bilinen bazı metrik uzay özelliklerini sağlamamasına neden olabilir. Bu durum ve örneklerine bakmadan önce bazı tanımlar verilmiştir.

Nakano tarafından verilen modüler tanımını aşağıda verilmiştir [10]:

2.1.1. Tanım

X , \mathbb{R} üzerinde bir lineer vektör uzayı olsun. Aşağıdaki koşulları her $x, y \in X$ için sağlayan $\rho : X \rightarrow [0, \infty]$ fonksiyonuna *regüler modüler* denir:

- (1) $\rho(x) = 0$ olması için gerek ve yeter şart $x = 0$ 'dir ,
- (2) $\rho(\alpha x) = \rho(x)$, ise $|\alpha| = 1$ 'dir ,
- (3) Her $\alpha \in [0, 1]$ için $\rho(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \rho(x) + \rho(y)$ 'dir .

Burada ρ regüler modüleri X vektör uzayı üzerinde tanımlanmıştır.

$$X_\rho = \{x \in X; \lim_{\alpha \rightarrow 0} \rho(\alpha x) = 0\} \quad (2.1)$$

kümesine de *modüler vektör uzayı* denir.

X_ρ uzayında herhangi bir $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi ve bir $x \in X_\rho$ elemanı seçilsin. Eğer bu dizinin ρ dönüşümü altındaki görüntüsü için $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n - x) = 0$ koşulu sağlanıyorsa, $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi x noktasına *ρ -yakınsar* denir.

Eğer herhangi bir $K \neq 0$ ve her $x \in X_\rho$ için;

$$\rho(2x) \leq K\rho(x), \quad (2.2)$$

oluyorsa ρ' ya Δ_2 -koşulunu sağlıyor denir. Dahası, her $x, y, x_n \in X_\rho$ için $\{x_n\}$ dizisi x noktasına ρ -yakınsak olduğunda

$$\rho(x - y) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n - y), \quad (2.3)$$

oluyorsa ρ' ya *Fatou özelliğini sağlıyor* denir.

En yaygın kullanımı ile metrik tanımını aşağıda verilmiştir:

2.1.2. Tanım

X boş kümeden farklı bir küme ve $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ dönüşümü her $x, y, z \in X$ için aşağıdaki özellikleri sağlasın:

$$(M1) \quad d(x, y) = 0 \iff x = y,$$

$$(M2) \quad d(x, y) = d(y, x),$$

$$(M3) \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$$

Bu durumda d dönüşümüne X kümesi üzerinde bir *metrik* ve (X, d) ikilisine de *metrik uzay* denir. Burada belirtilen koşullar metrik koşulları olarak adlandırılır.

Jleli ve Samet tarafından tanımlanan genelleştirilmiş metrik uzay kavramı aşağıda verilmiştir [13]:

2.1.3. Tanım

X boş kümeden farklı bir küme olsun. $\mathcal{D} : X \times X \rightarrow [0, \infty]$ fonksiyonu ve herhangi bir

$x \in X$ için

$$\mathcal{C}(\mathcal{D}, X, x) = \{\{x_n\} \subset X; \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{D}(x_n, x) = 0\}. \quad (2.4)$$

kümesi tanımlansın. Aşağıdaki koşulları sağlayan $\mathcal{D} : X \times X \rightarrow [0, \infty]$ fonksiyonuna X üzerinde bir *genelleştirilmiş metrik* denir:

- (\mathcal{D}_1) Her $(x, y) \in X \times X$ için $\mathcal{D}(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$ dir;
- (\mathcal{D}_2) Her $(x, y) \in X \times X$ için $\mathcal{D}(x, y) = \mathcal{D}(y, x)$ olur;
- (\mathcal{D}_3) Her $(x, y) \in X \times X$ ve $\{x_n\} \in \mathcal{C}(\mathcal{D}, X, x)$ için;

$$\mathcal{D}(x, y) \leq C \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathcal{D}(x_n, y) \quad (2.5)$$

eşitsizliğini sağlayan bir $C > 0$ sabiti vardır.

(X, \mathcal{D}) ikilisine *genelleştirilmiş metrik uzay* denir.

Genelleştirilmiş metrik yapısı hem metrik, hem de modüler yapısını kapsamaktadır [13]. Verilen Tanım 2.1.3' deki koşullar $C = 1$ ile birlikte metrik şartlarının tümünü sağlar:

- (\mathcal{D}_1) Her $(x, y) \in X \times X$ için $\mathcal{D}(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$ dir.
 - (\mathcal{D}_2) Her $(x, y) \in X \times X$ için $\mathcal{D}(x, y) = \mathcal{D}(y, x)$ olur.
- Metriğin ilk iki şartı kolayca sağlanır. Üçgen eşitsizliğine bakılırsa,
- (\mathcal{D}_3) Her $(x, y) \in X \times X$ için,

$$\mathcal{D}(x, y) \leq \mathcal{D}(x, x_1) + \mathcal{D}(x_1, x_2) + \mathcal{D}(x_2, x_3) + \dots + \mathcal{D}(x_n, y) \quad (2.6)$$

ve $\{x_n\} \in \mathcal{C}(\mathcal{D}, X, x)$ için;

$$\mathcal{D}(x, y) \leq \mathcal{D}(x_n, y) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathcal{D}(x_n, y) \quad (2.7)$$

eşitsizliği sağlanır.

(X, ρ) modüler vektör uzayı olmak üzere $D_\rho : X \times X \rightarrow [0, \infty]$ dönüşümünü her $x, y \in X$ için $D_\rho(x, y) = \rho(x - y)$ olarak tanımlansın. Eğer ρ Fatou özelliğine sahipse D_ρ, X üzerinde genelleştirilmiş metrik olur.

Czerwik 1993' te b-metrik uzay kavramını şöyle tanımlamıştır [14]:

2.1.4. Tanım

X boş kümeden farklı bir küme ve $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ dönüşümü her $x, y, z \in X$ için aşağıdaki özellikleri sağlasın:

- (b1) $d(x, y) = 0 \iff x = y$,
- (b2) $d(x, y) = d(y, x)$,
- (b3) $d(x, y) \leq s[d(x, z) + d(z, y)]$ olacak biçimde bir $s \geq 1$ vardır.

Bu durumda d dönüşümüne X kümesi üzerinde bir *b-metrik* ve (X, d) ikilisine de *b-metrik uzay* denir.

Burada her $x, y \in X$ ve her $n \in \mathbb{N}$, $\{x_n\} \in C(d, X, x)$ için (b3) özelliği yazılırsa:

$$d(x, y) \leq sd(x, x_n) + sd(x_n, y) \quad (2.8)$$

elde edilir. Bu da $n \rightarrow \infty$ için;

$$d(x, y) \leq s \limsup_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y) \quad (2.9)$$

olması, yani $C = s$ ile (\mathcal{D}_3) koşulunun sağlanması demektir.

Hitzler ve Seda, dislocated metrik uzayı aşağıdaki gibi tanımlamıştır [15]:

2.1.5. Tanım

X boş kümeden farklı bir küme ve $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ dönüşümü her $x, y, z \in X$ için aşağıdaki özellikleri sağlasın:

- (b1) $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$,
- (b2) $d(x, y) = d(y, x)$,
- (b3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Bu durumda d dönüşümüne X kümesi üzerinde bir *dislocated metrik* ve (X, d) ikilisine de *dislocated metrik uzay* denir.

Metrik yapısına benzer şekilde dislocated metrik yapısının da genelleştirilmiş metrik tarafından kapsandığı gösterilebilir.

Chistyakov tarafından modüler metrik tanımı verilmiş ve modüler metriğin birçok özelliği incelenmiştir [16]. Bu bölümün devamında, Chistyakov' un çalışmasında açıkladığı modüler metrik tanımının bazı özellikleri ve ilişkili örnekleri verilmiştir.

2.1.6. Tanım

X boş kümeden farklı bir küme ve $w : (0, \infty) \times X \times X \rightarrow [0, \infty]$ fonksiyonu verilsin.

- (i) Her bir $\lambda > 0$ ve $x, y \in X$ için, $w_\lambda(x, y) = 0 \iff x = y$ 'dır;
- (ii) Her bir $\lambda > 0$ ve $x, y \in X$ için, $w_\lambda(x, y) = w_\lambda(y, x)$;
- (iii) Her bir $\lambda, \mu > 0$ ve $x, y, z \in X$ için $w_{\lambda+\mu}(x, y) \leq w_\lambda(x, z) + w_\mu(y, z)$.

Bu durumda yukarıdaki (i), (ii) ve (iii) özelliklerini sağlayan w dönüşümüne X üzerinde bir *modüler metrik* denir. Eğer (i) şartının yerine, aşağıdaki şart konulursa;

- (i') Her bir $\lambda > 0$ ve $x \in X$ için $w_\lambda(x, x) = 0$,
- w 'ya X 'de *yarı modüler metrik* denir.

2.1.7. Örnek

1. Her $\lambda > 0$ için (X, d) (yarı) metrik uzayı verilmiş olsun. Bu durumda

$$w_\lambda^a(x, y) = \begin{cases} 0; & x = y; \\ \infty; & x \neq y, \end{cases} \quad (2.10)$$

şeklinde tanımlanan w_λ^a dönüşümü bir modüler metriktir:

- (i) Her bir $\lambda > 0$ ve $x, y \in X$ için, $w_\lambda^a(x, y) = 0 \iff x = y$ 'dır;
- (ii) Her bir $\lambda > 0$ ve $x, y \in X$ için, $w_\lambda^a(x, y) = w_\lambda^a(y, x)$;
- (iii) Her bir $\lambda, \mu > 0$ ve $x, y, z \in X$ için (2.10)' dan sadece iki durum söz konusu olabilir:

(1) $w_{\lambda+\mu}^a(x, y) = 0$ durumunda metriğin tanımına göre sadece 0 ve ∞ değerlerini alabileceği için (iii) koşulu sağlanır.

(2) $w_{\lambda+\mu}^a(x, y) = \infty$ durumunda $x \neq y$ demektir. O zaman $x \neq z$ veya $y \neq z$ durumlarından biri sağlanır. Böylece yine (iii) koşulu sağlanmış olur.

Yani her bir $\lambda, \mu > 0$ ve $x, y, z \in X$ için $w_{\lambda+\mu}^a(x, y) \leq w_\lambda^a(x, z) + w_\mu^a(y, z)$ sağlanır.

2. d , X üzerinde metrik olsun. Azalmayan bir $\varphi : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ fonksiyonu . Bu durumda

$$w_\lambda^b(x, y) = \frac{d(x, y)}{\varphi(\lambda)} \quad (2.11)$$

aynı küme üzerinde bir modüler metriktir. Modüler metrik tanımının ilk iki koşulu burada kolaylıkla gösterilebilir. Her $\lambda > 0$ için

$$w_\lambda^b(x, y) = \frac{d(x, y)}{\varphi(\lambda)} = \frac{d(x, y)}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{\varphi(\lambda)} \quad (2.12)$$

olsun. Her $\lambda, \mu > 0$ için

$$\frac{\lambda + \mu}{\varphi(\lambda + \mu)} \leq \frac{\lambda}{\varphi(\lambda)} \quad (2.13)$$

sağlanır. Buradan,

$$\begin{aligned} \frac{d(x, y)}{\varphi(\lambda)} &\leq \frac{d(x, z)}{\varphi(\lambda + \mu)} + \frac{d(z, y)}{\varphi(\lambda + \mu)} \\ &\leq \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \cdot \frac{d(x, z)}{\varphi(\lambda)} + \frac{\mu}{\lambda + \mu} \cdot \frac{d(z, y)}{\varphi(\mu)} \\ &\leq \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \cdot w_\lambda(x, z) + \frac{\mu}{\lambda + \mu} \cdot w_\mu(y, z) \end{aligned} \quad (2.14)$$

olduğundan her bir $\lambda, \mu > 0$ ve $x, y, z \in X$ için (iii) özelliği sağlanmış olur.

3. d , X üzerinde metrik olsun.

$$w_\lambda^c(x, y) = \begin{cases} \infty; & \lambda \leq d(x, y), \\ 0; & \lambda > d(x, y); \end{cases} \quad (2.15)$$

w_λ^c modüler metriktir.

Chistyakov' un çalışmalarında yer alan motivasyonu aşağıda verilmiştir [16]. Chistyakov' a göre, bir X kümesi üzerinde tanımlanan modüler metrik aslında aşağıdaki gibi verilen fiziksel bir terimi ifade eder:

Herhangi bir $\lambda > 0$ parametresi zamanı gösterson. Her $x, y \in X$ için x noktasından y

noktasına λ zamanında gidilirken hız değişimi

$$0 \leq w_\lambda(x, y) \leq \infty \quad (2.16)$$

olarak ifade edilsin. Bu dönüşüm metrik tanımının tüm koşullarını sağlar. X üzerinde $w_\lambda : (0, \infty) \times X \times X \rightarrow [0, \infty]$ olarak verildiğinde $w = \{w_\lambda : \lambda > 0\} \equiv \{w_\lambda\}_{\lambda > 0}$ kümesi bir $\lambda > 0$ parametresi için bu şekildeki tüm fonksiyonları ve bunların hız alanını temsil eder.

Zaman $\lambda > 0$ parametresi ile gösterilirse, $\lambda \rightarrow \frac{\lambda}{h(\lambda)}$ olacak biçimde her $h : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, $h(\lambda) > 0$ fonksiyonu için $\frac{\lambda}{h(\lambda)}$ oranı azalmayan bir fonksiyon ifade eder. (X, d) bir metrik uzay ve her $x, y \in X$ verilsin. Bu durumda

$$w_\lambda(x, y) = \frac{d(x, y)}{h(\lambda)} = \frac{\lambda}{h(\lambda)} \cdot \frac{d(x, y)}{\lambda} \quad (2.17)$$

ile gösterilen fonksiyon x ile y noktaları arasında λ zamanına göre ölçeklendirilmiş ortalama hızı ifade eder. $h(\lambda) = \lambda$ alındığında ise bu ifade ortalama hıza dönüşür.

Metrik(uzaklık) ile modüler metrik(hız alanı) arasındaki fark, her $\lambda > 0$ için $w_\lambda(x, y) = \infty$ olduğunda ortaya çıkar. $w_\lambda(x, y) = \infty$ olması x ile y noktaları arasında λ zamanına göre hesaplanamayan bir durum olduğunu belirtir.

Herhangi bir X kümesi üzerinde tanımlanan w modüler metriğinin herhangi $x, y \in X$ için belirttiği denklik bağıntısı aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

2.1.8. Tanım

X boş kümeden farklı bir küme ve w , X üzerinde yukarıdaki Tanım 2.1.6 koşullarını sağlayan bir modüler olsun. Herhangi iki $x, y \in X$ elemanının $X \times X$ üzerindeki ilişkisi $\overset{w}{\sim}$ bağıntısı yardımıyla aşağıdaki gibi verilmiştir:

$$x \overset{w}{\sim} y \iff \lim_{\lambda \rightarrow \infty} w_\lambda(x, y) = 0. \quad (2.18)$$

Bu bağıntıda her $x \in X$ için (i) özelliğinden $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} w_\lambda(x, x) = 0$ olduğundan bağıntı yansıyandır. Her $x, y \in X$ için (ii) özelliğinden $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} w_\lambda(x, y) = 0$ olduğunda $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} w_\lambda(y, x) = 0$ olur, bu durumda bağıntı simetriktir. Her $x, y, z \in X$ için $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} w_\lambda(x, y) = 0$ ve $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} w_\mu(y, z) = 0$ olduğunda (iii) özelliğinden $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} w_{\lambda+\mu}(x, z) = 0$ olur, bu durumda bağıntı geçişmelidir. $\overset{w}{\sim}$ bağıntısı yukarıda

gösterilen yansıma, simetri ve geçişli olma özelliklerini sağladığından bu bağıntıya X üzerinde bir *denklik bağıntısı* denir.

X/\sim ifadesi ile X 'in \sim bağıntısıyla elde edilen bölüm kümesi gösterilmiştir. Bir $x \in X$ elemanı için her bir elemanın denklik sınıfı X/\sim bölüm kümesinde aşağıdaki gibi gösterilir:

$$X_w^o(x) = \{y \in X : y \sim x\} \quad (2.19)$$

Eş.2.19' daki küme x elemanına \sim denklik bağıntısı ile bağlı olan X 'in elemanlarını içerir.

$$\tilde{d}: (X/\sim) \times (X/\sim) \rightarrow [0, \infty] \quad (2.20)$$

fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlandığında;

$$\tilde{d}(X_w^o(x), X_w^o(y)) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} w_\lambda(x, y), \quad x, y \in X, \quad (2.21)$$

iyi tanımlıdır ve metrik aksiyomlarını sağlar.

2.1.9. Tanım

Herhangi bir $x_0 \in X$ elemanı için denklik sınıfı kümesi Eş.2.19' daki tanım ile $X_w = X_w^o(x_0)$ olarak gösterilir. Burada X_w kümesine üzerinde tanımlı \sim bağıntısı ile *modüler küme* denir.

Tanım 2.1.9' dan yararlanarak, her $x, y \in X_w$ için

$$d_w^o(x, y) = \inf\{\lambda > 0 : w_\lambda(x, y) \leq \lambda\} \quad (2.22)$$

şeklinde verilen dönüşüm bir metriktir. $d_w^o(x, y)$ dönüşümü ile X_w kümesi de bir metrik uzay olur. Aşağıdaki Örnek 2.1.10 ile $d_w^o(x, y)$ metriğine birbirinden farklı kümeler üzerindeki modüler yapılar yardımıyla örnekler verilmiştir.

2.1.10. Örnek

Örnek 2.1.7' de tanımları verilen w^a, w^b ve w^c modülerleri ele alırsa, sırasıyla:

$$1. \text{ ve } 3. \text{ örnekleri için } \begin{cases} X_w = \{x_0\}, & d_w^o(x, y) = 0, \\ X_w = X, & d_w^o(x, y) = d(x, y). \end{cases}$$

2. φ fonksiyonu alttan sınırlı ise, $X_w = \{x_0\}$ ve $d_w^o(x, y) = 0$ olur. Diğer yandan, eğer $\lambda \rightarrow \infty$ iken $\varphi(\lambda) \rightarrow \infty$ ise, $(0, \infty)$ üzerinde $\psi(\lambda) = \lambda\varphi(\lambda)$ kesin artan fonksiyon olsun. $\lambda > 0$ olduğunda $X_w = X$ ve

$$d_w^o(x, y) = \psi^{-1}(d(x, y)) \quad (2.23)$$

olur. Özellikle, herhangi bir $p \in \mathbb{R}$ için $p > 0$ sabiti ile $\varphi(\lambda) = \lambda^p$ olarak tanımlanırsa; $d_w^o(x, y) = (d(x, y))^{1/(p+1)}$ olur. Bu üç örnekte elde edilen uzaylar iyi bilinen metrik uzaylardır.

2.1.11. Tanım

X boş kümeden farklı bir küme ve w_λ onun üzerinde tanımlı ve Tanım 2.1.6' daki (i) ve (ii) şartlarına ek olarak aşağıdaki (iv) koşulunu sağlayan bir modüler metrik olsun. Bu durumda $w : (0, \infty) \times X \times X \rightarrow [0, \infty]$ fonksiyonuna X 'de *konveks modüler (metrik)* denir.

$$(iv) \quad w_{\lambda+\mu}(x, y) \leq \frac{\lambda}{\lambda + \mu} w_\lambda(x, z) + \frac{\mu}{\lambda + \mu} w_\mu(y, z) \quad (2.24)$$

Burada, Tanım 2.1.6' daki (i) şartını (i') ile değiştirirsek, w 'ya X 'de *konveks yarı modüler (metrik)* denir. Bu durumda,

$$X_w^* \equiv X_w^*(x_0) = \{x \in X : w_\lambda(x, x_0) < \infty \text{ olacak biçimde } \exists \lambda = \lambda(x) > 0 \text{ vardır.}\} \quad (2.25)$$

kümesi *konveks modüler küme* olur.

Her $x, y \in X_w^*$ için;

$$d_w^*(x, y) = \inf\{\lambda > 0 : w_\lambda(x, y) \leq 1\} \quad (2.26)$$

metriği ile (X_w^*, d_w^*) uzayı Tanım 2.1.2' deki metrik koşullarını sağlar. Dolayısıyla (X_w^*, d_w^*) uzayı metrik uzaydır.

2.1.12. Tanım

X boş kümeden farklı ve w , X üzerinde tanımlı modüler olsun. Her $x \in X$ ve $\lambda = \lambda(\{x_n\}, x) > 0$ sayıları için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} w_\lambda(x_n, x) = 0 \quad (2.27)$$

sağlanıyorsa X_w^* 'deki $\{x_n\}$ dizisi *modüler yakınsaktır* denir. Burada x e $\{x_n\}$ dizisinin *modüler limiti* denir.

2.1.13. Tanım

X boş kümeden farklı ve w , X üzerinde tanımlı modüler olsun. Her $x, y \in X$ ve her $\lambda > 0$ sayısı için; w , x ve y 'ye bağlı ise, yani;

$$x \neq y \implies w_\lambda(x, y) \neq 0, \quad (2.28)$$

olacak biçimde w 'ya X üzerinde *katı modüler* denir.

2.1.14. Tanım

(X, d) metrik uzay ve X 'de her $x, y \in X$ için

$$d(T(x), T(y)) \leq kd(x, y) \quad (2.29)$$

koşulunu sağlayan $k \in [0, 1)$ varsa $T : X \rightarrow X$ dönüşümüne *büzülme dönüşümü* denir.

2.1.15. Örnek

$I = [a, b]$, $|I| = b - a$, (M, d) metrik uzay, $X = M^I$ ve φ fonksiyonu $[0, \infty)$ aralığında $\varphi(x) = 0 \iff x = 0$ ile $[\varphi] \equiv \lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x)/x = \sup_{x > 0} (\varphi(x)/x) \in (0, \infty]$ koşullarını sağlayan konveks fonksiyon olsun. $(M, \|\cdot\|)$ ile refleksif Banach uzayı, $L_1(I; M)$ ile tüm kuvvetli ölçülebilir ve Bochner integrallenebilir $x : I \rightarrow M$ dönüşümlerinin uzayı, $L^\varphi(I; M)$ kümesi ile $\rho(x) = \int_I \varphi(\|x(t)\|) dt$ klasik Orlicz konveks modüleri olduğunda bazı $\alpha = \alpha(x) > 0$ sabit sayıları için $\rho(\alpha x) > 0$ koşulunu sağlayan tüm kuvvetli ölçülebilir $x : I \rightarrow M$ dönüşümlerinin Orlicz uzayı gösterilmiştir. Bir $x \in X$ için x 'in I 'daki salınım miktarı $|x(I)| \equiv |x(I)|_d = \sup\{d(x(t), x(s)) : s, t \in I\}$ kümesi aynı zamanda $x(I) = \{x(t) : t \in I\} \subset M$ görüntü kümesinin çapıdır. Riesz-Medvedev

varyasyonunun sınırlı dönüşümlerini gösteren $GV_\varphi(I; M)$ kümesi I üzerinde genelleştirilmiş sınırlı φ varyasyonlarının kümesidir. Yani $GV_\varphi(I; M) = X_w^*$ ' dir. Burada $V_\varphi(x, I) = w_1(x, x_0) = \sup\{\sum_{i=1}^n |I_i| \varphi(|x(I_i)|/|I_i|) : n \in \mathbb{N}, \{t_i\}_0^n \prec I\}$ kümesi x^o sabit dönüşümünden bağımsız olarak ifade edilir. $x_0 \in M$ için $X_w^* = \{x \in GV_\varphi(I; M) : x(a) = x_0\}$ olur. Burada $I_i = \{t_{i-1}, t_i\}$, $|I_i| = t_i - t_{i-1}$, $\{t_i\}_{i=0}^n$ için I aralığının parçalanışıdır. $f : [a, b] \times M \rightarrow M$ (Carathéodory-tip) fonksiyonu aşağıdaki özelliklere sahiptir:

- (1) Her bir $x \in M$ için fonksiyon : $f(\cdot, x) = [t \rightarrow f(t, x)] : [a, b] \rightarrow M$ kuvvetli ölçülebilir ve bazı $y_0 \in M$ için $f(\cdot, y_0) \in L^\varphi([a, b]; M)$ 'dir;
- (2) $L > 0$ sabiti neredeyse tüm $t \in [a, b]$ için ve $x, y \in M$ için $\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\|$ 'dir.

Böylece integral operatörü;

$$(Tx)(t) = x_0 + \int_a^t f(s, x(s)) ds, \quad x \in X_w^*, t \in [a, b] \quad (2.30)$$

X_w^* modüler kümesinde tanımlı bir dönüşümdür ve bu durumda aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$w_{L(b-a)\lambda}(Tx, Ty) \leq w_\lambda(x, y) \quad \forall \lambda > 0, \quad x, y \in X_w^*. \quad (2.31)$$

Bu eşitsizlik modüler metrik uzaylarda integral operatörü için büzülme dönüşümü ifade eder. T dönüşümünün iyi tanımlı olduğu, (1)' de ve (2)' de verilen eşitsizlikleri sağladığı kolayca gösterilebilir.

2.1.16. Tanım

X boş kümeden farklı bir küme ve $f : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Bu durumda $f(x) = x$ olacak biçimde bir $x \in X$ varsa x noktasına f dönüşümünün X kümesindeki bir sabit noktası denir.

Bir dönüşümün sabit noktası hiç olmayabilir, birden çok ya da tek olabilir. Aşağıda yalın bazı örnekler verilmiştir.

2.1.17. Örnek

$X = [0, \infty)$ kümesi için aşağıdaki f dönüşümlerine bakalım:

- (1) $f(x) = x^2 + 1$ dönüşümünün herhangi bir sabit noktası yoktur.
- (2) $f(x) = x^2$ dönüşümünün $x_1 = 0$ ve $x_2 = 1$ olacak şekilde iki sabit noktası vardır.
- (3) $f(x) = \frac{x}{6}$ için $x = 0$ noktası bu dönüşümün tek sabit noktasıdır.

Aşağıda M.A. Khamsi' nin modüler metrik yapısına yaklaşımı verilen tanımlar yardımıyla açıklanmaya çalışılmıştır [17].

2.1.18. Tanım

X boş kümeden farklı bir küme ve \sum ile X ' in alt kümelerinin boş olmayan σ -cebiri gösterilsin. \mathcal{P} ile X ' in alt kümelerinin δ -halkası gösterilmek üzere her bir $A \in \sum$ ve $E \in \mathcal{P}$ için $E \cap A \in \mathcal{P}$ olsun. Bu durumda verilen $K_n \in \mathcal{P}$ kümelerinin artan dizisi için $X = \bigcup K_n$ sağlanır. ε ile \mathcal{P} ile yazılabilen tüm basit fonksiyonların lineer uzayı gösterilsin. \mathcal{M}_∞ ile $\{g_n\} \subset \varepsilon$, $|g_n| \leq |f|$ ve her $x \in X$ için $g_n(x) \rightarrow f(x)$ sağlayan $f : X \rightarrow [-\infty, \infty] \times [-\infty, \infty]$ fonksiyonu ile verilen genişletilmiş ölçülebilir fonksiyonların uzayı gösterilsin. $\rho : \mathcal{M}_\infty \rightarrow [0, \infty]$ fonksiyonu iyi tanımlı, konveks ve çift fonksiyon olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan ρ fonksiyonuna *regüler konveks pseudo-modüler* denir:

- (i) $\rho(0) = 0$,
- (ii) $f, g \in \mathcal{M}_\infty$ ve her $x \in X$ için $|f(x)| \leq |g(x)|$ için $\rho(f) \leq \rho(g)$ oluyorsa ρ ' ya *monoton*,
- (iii) $A, B \in \varepsilon$, $A \cap B \neq \emptyset$ ve $f \in \mathcal{M}_\infty$ için $\rho(1_{A \cup B}) \leq \rho(1_A) + \rho(1_B)$ oluyorsa ρ ' ya *ortogonal alttoplamsal*,
- (iv) $f \in \mathcal{M}_\infty$ ve her $x \in X$ için $|f_n(x)| \uparrow |f(x)|$ için $\rho(f_n) \uparrow \rho(f)$ oluyorsa ρ ' ya *Fatou özelliğine sahiptir*,
- (v) $g_n \in \varepsilon$ için $|g_n(x)| \downarrow 0$ için $\rho(g_n) \downarrow 0$ oluyorsa ρ ' ya ε ' da *sıralı süreklidir* denir.

Benzer şekilde ölçü uzaylarında her $g \in \varepsilon$ için $\rho(g1_A) = 0$ oluyorsa $A \in \sum$ ' ya ρ -sıfır denir. Ölçülebilir kümelerin herhangi çiftinin simetrik farkı ρ -sıfır olması aynı zamanda ρ -sıfır' da ölçülebilir fonksiyonların farkını ifade eder. Herhangi bir özellik için bu özelliğin sağlanmadığı kümenin ölçüsü ρ -sıfır ise bu özellik ρ -hhy(*hemen her yerde*) *sağlanıyor* denir. Böylece ρ -hhy olan her $f \in \mathcal{M}(X, \sum, \mathcal{P}, \rho)$ fonksiyonları için

$$\mathcal{M}(X, \sum, \mathcal{P}, \rho) = \{f \in \mathcal{M}_\infty; |f(x)| \leq \infty, \quad \rho - hhy\} \quad (2.32)$$

kümesi bir denklik sınıfıdır. $\mathcal{M}(X, \sum, \mathcal{P}, \rho)$ yerine kısaca \mathcal{M} yazılabilir. ρ fonksiyonu regüler pseudo-modüler olsun.

(a) Her $\alpha > 0$ için $\rho(\alpha f) = 0$ için $f = 0$ ρ -hhy oluyorsa ρ fonksiyonuna *regüler yarı-modüler* denir.

(b) Eğer $\rho(f) = 0$ için $f = 0$ ρ -hhy oluyorsa ρ fonksiyonuna *regüler modüler* denir.

Her $f \in \mathcal{M}$, $E \in \Sigma$ için $\rho(f, E) = \rho(f1_E)$ alınsın. Bu durumda $\rho(f, E)$ bir regüler pseudo-modülerdir.

Vektör uzayı $L(X, \Sigma)$ üzerinde modüler fonksiyon uzayı, \mathcal{M} ölçülebilir fonksiyonların uzayı olmak üzere kısaca $L_\rho = \{f \in \mathcal{M}; \lambda \rightarrow 0 \text{ iken } \rho(\lambda f) \rightarrow 0\}$ olarak verilsin. Bu durumda $f, g \in L_\rho$ için

$$\|f\|_\rho = \inf \left\{ \alpha > 0; \rho\left(\frac{f}{\alpha}\right) \leq 1 \right\} \quad (2.33)$$

ile verilen norma *Lüksemburg normu* denir.

Burada her $\lambda > 0$ ve $f, g \in L_\rho$ için $w_\lambda(f, g) = \rho((f - g)/\lambda)$ olduğundan w_λ dönüşümü L_ρ uzayında modüler metriktir.

Burada ayrıca, $\varphi : [0, \infty] \rightarrow [0, \infty]$ iken $\lambda > 0$ için,

$$L^\varphi := \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; \rho(\lambda f) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(\lambda |f(x)|) dx < \infty \right\} \quad (2.34)$$

fonksiyon uzayı olmak üzere,

$$w_\lambda(f, g) = \rho(f, g) = \int_{\mathbb{R}} \varphi\left(\frac{|f(x) - g(x)|}{\lambda}\right) dx \quad (2.35)$$

ifadeleri $\lambda > 0$ ve her $f, g \in L^\varphi$ için w_λ 'nin L^φ de bir modüler metrik olduğunu gösterir.

Yapılan ispatlarda aşağıda Tanım 2.1.19' da verilen Abdou ve Khamsi' nin kullandığı şekilde Δ_2 koşulu kullanılmıştır [12].

2.1.19. Tanım

X_w uzayı üzerinde tanımlı w modüler metriği ile bir modüler metrik uzay olmak üzere

bazı $\lambda > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} w_\lambda(x_n, x) = 0 \quad (2.36)$$

sağlanıyorken her $\lambda > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} w_\lambda(x_n, x) = 0 \quad (2.37)$$

sağlanıyorsa w modülleri Δ_2 koşulunu sağlıyor denir.

2.2. Temel Teoremler

Daha önce başka kaynaklarda değinilmiş olan ve tanımlar kısmında yer verilen metrik yapıları ile ilgili sabit nokta teoremlerini ifade ve ispat ederken kullanılacak bazı temel teoremlere ve ispatlarına değinilmiştir [16].

2.2.1 Teorem

X_w boş kümeden farklı ve w , X_w üzerinde tanımlı modüler olsun. $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset X_w$ dizisi ve $x \in X_w$ alalım. Bu durumda; $n \rightarrow \infty$ iken $d_w^0(x_n, x) \rightarrow 0$ olması için gerek ve yeter şart her $\lambda > 0$ için $n \rightarrow \infty$ olduğunda $w_\lambda(x_n, x) \rightarrow 0$ olmasıdır. Benzer durum, Cauchy dizisi için de geçerlidir.

İspat

$\{x_n\} \rightarrow x$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ vardır ki her $n > n_0(\varepsilon)$ için $d_w^0(x_n, x) < \varepsilon$ sağlanır. Herhangi $0 < \mu < \lambda$ ve her $x, y \in X$ için;

$$w_{\lambda+0}(x, y) \leq w_\lambda(x, y) \leq w_{\lambda-0}(x, y) \leq w_{\mu+0}(x, y) \leq w_\mu(x, y) \leq w_{\mu-0}(x, y) \quad (2.38)$$

özelliği modüler metrik için sağlanır. Her $n > n_0(\varepsilon)$ için

$$w_\varepsilon(x, y) \leq w_{\varepsilon-0}(x, y) < \varepsilon \quad (2.39)$$

olur. $\lambda > 0$ için her $n > n_0(\min \varepsilon, \lambda)$ dersek

$$w_\lambda(x_n, x) \leq w_{\min\{\varepsilon, \lambda\}}(x_n, x) < \min\{\varepsilon, \lambda\} \leq \varepsilon \quad (2.40)$$

olur. Buradan $w_\lambda(x, y) \rightarrow 0$ olduğu sonucuna varılır.

Diğer taraftan, $\varepsilon > 0$ için $w_\varepsilon(x_n, x) \rightarrow 0$ olur ve öyle bir $n_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ vardır ki, her $n > n_1(\varepsilon)$ için $w_\varepsilon(x_n, x) \leq \varepsilon$ olur. d_w^0 tanımından $n > n_1(\varepsilon)$ için $d_w^0(x_n, x) \leq \varepsilon$ olur ki, bu da $d_w^0(x_n, x) \rightarrow 0$ olması demektir. Eğer w konveks ise, $d_w^0(x_n, x) \rightarrow 0$ ve $d_w^*(x_n, x) \rightarrow 0$ durumları denktir.

$\{x_n\}$ ile verilen Cauchy dizisini her $\lambda > 0$ için

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} d_w^0(x_n, x_m) = 0 \iff \lim_{n,m \rightarrow \infty} w_\lambda(x_n, x_m) = 0 \quad (2.41)$$

sağlanır. Dolayısıyla benzer sonuç Cauchy dizileri için de elde edilir.

2.2.2 Teorem

X_w boş kümeden farklı ve w, X_w üzerinde tanımlı modüler olsun.

(a) X_w ve X_w^* modüler uzayları modüler yakınsaklık ile kapalıdır. Yani; eğer $x \in X$ için X_w ya da X_w^* 'dan alınan $\{x_n\}$ dizisi için $x_n \xrightarrow{w} x$ oluyorsa; $x \in X_w$ ya da $x \in X_w^*$ olmalıdır.

(b) Eğer w, X 'de katı modüler ise; modüler limit (eğer varsa) tek olarak tanımlanabilir.

İspat

(a) $\{x_n\} \subset X, x \in X$ ve $\{x_n\} \rightarrow x$ olsun. Herhangi $\varepsilon > 0$ ve öyle bir $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ vardır ki her $n > n_0(\varepsilon)$ için modüler metrik tanımının (iii) şartından

$$w_{\varepsilon+\lambda_0}(x, x^0) \leq w_\varepsilon(x, x_{n_0}) + w_{\lambda_0}(x^0, x_{n_0}) \leq \varepsilon + w_{\lambda_0}(x^0, x_{n_0}) \quad (2.42)$$

elde edilir. Eğer $\{x_n\} \subset X_w^*$ ise, x_{n_0} da X_w^* kümesinde yer alır. $\lambda_0 > 0$ vardır ki, $w_{\lambda_0}(x^0, x_{n_0}) < \infty$ olur. Dolayısıyla $w_{\varepsilon+\lambda_0}(x, x^0) < \infty$ elde edilir. Böylece $x \in X_w^*$ elde edilir. Benzer durum $\lambda \rightarrow \infty$ olduğunda X_w için de geçerlidir.

(b) Limitin tekliğini ispatlamak için tersini kabul edelim ve iki farklı limit alınsın. Yani $\{x_n\} \subset X_w^*$ için $x_n \rightarrow x$ ve $x_n \rightarrow y$ gibi w 'ya göre iki farklı noktaya yakınsasın. Bu durumda, $w_\lambda(x_n, x) \rightarrow 0$ ve $w_\mu(x_n, y) \rightarrow 0$ olacak biçimde $\lambda, \mu > 0$ sayıları bulunur. Yine (iii) aksiyomundan $w_{\lambda+\mu}(x, y) \leq w_\lambda(x_n, x) + w_\mu(x_n, y) \rightarrow 0$ olur. Böylece $w_{\lambda+\mu}(x, y) = 0$ 'dır ve w ile $x = y$ olur. w katı ise $x = y$ olur.

2.2.3 Teorem

X_w^* 'deki metrik yakınsaklığın eğer d_w ile w modüler ise ve eğer d_w^* ile w konveks modüler ise modüler yakınsaklığa denk olması için gerek ve yeter şart w modülerinin Δ_2 -şartını sağlamasıdır. Yani; eğer $\{x_n\} \subset X_w^*$, $x \in X_w^*$ ve $\lambda > 0$ iken $\lim_{n \rightarrow \infty} w_\lambda(x_n, x) = 0$ oluyorsa; $\lim_{n \rightarrow \infty} w_{\frac{\lambda}{2}}(x_n, x) = 0$ olmasıdır.

2.2.4 Teorem

(X, d) , $T : X \rightarrow X$ dönüşümü ile tam metrik uzay olsun. Bu durumda T , X 'de tek bir x^* sabit noktasına sahiptir (yani $T(x^*) = x^*$). Dahası, x^* için herhangi bir $x_0 \in X$ elemanını alırsak; $\{x_n\}$ dizisi için $x_n = T(x_{n-1})$ olacağından $x_n \rightarrow x^*$ 'dir.

2.2.5 Teorem

(X_w^*, d_w^*) , $T : X_w^* \rightarrow X_w^*$ dönüşümü ile konveks modüler metrik uzay olsun.

(a) Her $\lambda > 0$ için $w_\lambda(x, y) \leq \lambda$ olduğunda $d_w^0(Tx, Ty) \leq kd_w^0(x, y)$ ile $w_{k\lambda+0}(Tx, Ty) \leq k\lambda$ birbirine denktir.

(b) X 'de verilen w , konveks modüler olsun. $d_w^*(Tx, Ty) \leq kd_w^*(x, y)$ olması için gerek ve yeter şart, her $\lambda > 0$ için $w_\lambda(x, y) \leq 1$ oluyorsa $w_{k\lambda+0}(Tx, Ty) \leq 1$ olmasıdır.

2.2.6 Teorem

w , X 'de katı konveks modüler ve X_w^* modülleri tam ve her $\lambda > 0$ için $T : X_w^* \rightarrow X_w^*$ modüler büzülme dönüşümü olsun. Bu durumda, öyle bir $x_\lambda \in X_w^*$ vardır ki; $w_\lambda(x_\lambda, Tx_\lambda) < \infty$ olur. Dahası T dönüşümü sabit noktaya sahiptir; yani, bazı $x_* \in X_w^*$ elemanları için $Tx_* = x_*$ şeklinde bir büzülmedir.

T 'nin x_* sabit noktası tektir ve her bir $x \in X_w^*$ için $\{T^n x\}_{n=1}^\infty$ dizi iterasyonu x_* noktasına modüler yakınsaktır.

3. GENELLEŞTİRİLMİŞ MODÜLER METRİK UZAYLAR İÇİN SABİT NOKTA TEOREMLERİ

Bir önceki bölümde, Jleli ve Samet tarafından sunulan çalışmanın bir metrik uzayın nasıl bir genelleştirilmesi olduğundan bahsedilmiştir. Onların çalışmasında, bu genelleştirmenin metrik uzaylardan, b-metrik uzaylardan, dislocated metrik uzaylardan ve modüler vektör uzaylarından daha genel olduğu gösterilmiştir [13].

Ancak modüler metrik uzay yapısı için daha özel bir genelleştirme gerekmiştir. Bu açık genelleştirilmiş modüler metrik uzay yapısını tanımlayarak kapatılmıştır. Ardından Banach Büzülme İlkesini genelleştirilmiş modüler metrik ile verilmiştir. Jleli ve Samet' in ilgili çalışmasında Teorem 4.3 için Ćirić sabit nokta teoreminin bir genişlemesi benzer bir çalışmanın yol göstericiliği ile verilmiştir [18].

X boş kümeden farklı herhangi bir küme olsun. $D : X \times X \rightarrow [0, \infty]$ şeklinde verilen D fonksiyonu için, her $x \in X$ için $C(D, X, x) = \{\{x_n\} \subset X; \lim_{n \rightarrow \infty} D(x_n, x) = 0\}$ bir küme olmak üzere her $(x, y) \in X \times X$ ve $\{x_n\} \subset C(D, X, x)$ için

$$D(x, y) \leq C \limsup_{n \rightarrow \infty} D(x_n, y) \quad (3.1)$$

olacak biçimde bir $C > 0$ sayısını bulanabiliyorsa bu durumda bir genelleştirilmiş metrik olduğu bir önceki bölümde açıklanmıştır. Şimdi modüler vektör uzayı yapısının nasıl genelleştirilmiş modüler metrik yapısı tarafından kapsandığı gösterilecektir. Öncesinde klasik metrik, b-metrik yapılarını vermek örenği daha anlaşılır kılacaktır. En son olarak da modüler metrik uzay yapısını nasıl kapsadığını gösterilecektir.

Modüler metrik uzaylar, Chistyakov tarafından modüler fonksiyonun fiziksel bir açıklaması olarak şu şekilde verilmişti: Herhangi bir küme üzerinde tanımlanan metrik, kümenin herhangi iki elamanı arasındaki sonlu mesafeyi ifade eder. $\lambda > 0$ bu iki nokta arasındaki mesafeyi alındığında zaman olmak üzere, $\omega_\lambda(x, y)$ fonksiyonu bu iki nokta arasındaki mesafenin λ zamanda alındığını ifade eden ortalama hız fonksiyonu olacaktır.

Ancak yapılan bu tezdeki yaklaşımımız bundan farklı olarak daha önce de belirtildiği gibi Abdou ve Khamsi' nin çalışmasında olduğu gibi modüler metrik uzayları Nakano' nun çalışmasının daha genel lineer olmayan türü olarak alınacaktır [12].

3.1. Genelleştirilmiş Modüler Metrik

3.1.1. Tanım

X herhangi bir küme olmak üzere D fonksiyonu her $x \in X$ için $D : (0, \infty) \times X \times X \rightarrow [0, \infty]$ aşağıdaki özelliklerle tanımlansın:

(GMM1) Her $(x, y) \in X \times X$ ve her $\lambda > 0$ için $D_\lambda(x, y) = 0$ ancak ve ancak $x = y$,

(GMM2) Her $(x, y) \in X \times X$ ve her $\lambda > 0$ için $D_\lambda(x, y) = D_\lambda(y, x)$,

(GMM3) Her $(x, y) \in X \times X$, bazı $\lambda > 0$, ve $\{x_n\} \subset X$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} D_\lambda(x_n, x) = 0$ olduğunda,

$$D_\lambda(x, y) \leq C \limsup_{n \rightarrow \infty} D_\lambda(x_n, y) \quad (3.2)$$

olacak biçimde bir $C > 0$ sayısı vardır.

Bu özellikleri sağlayan D 'ye *genelleştirilmiş modüler metrik*, (X, D) ikilisine de *genelleştirilmiş modüler metrik uzay* denir.

3.1.2. Örnek

Klasik metrik $d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ ile verilen fonksiyon olmak üzere (GMM1), (GMM2) ve $C = 1$ için (GMM3) özelliğini sağlar.

Aynı X kümesi için $d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ metriği de b-metrik tanımında üçüncü özellik her $x, y, z \in X$ ve bazı $s \geq 1$ için;

$$d(x, y) \leq s[d(x, z) + d(z, y)] \quad (3.3)$$

şeklinde olduğundan (GMM1), (GMM2) ve $C = s$ için (GMM3) özellikleri sağlanır.

Modüler Vektör Uzaylarına yeniden bakılırsa:

(X, ρ) modüler vektör uzayı olsun. $D : (0, \infty) \times X \times X \rightarrow [0, \infty]$ fonksiyonu $D_\lambda(x, y) = \rho\left(\frac{x-y}{\lambda}\right)$ olarak tanımlayalım ve aşağıdaki özelliklere bakılırsa:

(1) Her $x, y \in X$ ve her $\lambda > 0$ için $D_\lambda(x, y) = 0$ ancak ve ancak $x = y$,

- (2) Her $(x, y) \in X \times X$ ve her $\lambda > 0$ için $D_\lambda(x, y) = D_\lambda(y, x)$,
 (3) Eğer ρ Fatou özelliğine sahipse her $\lambda > 0$ ve $\{x_n\} \subset X$ için $\{\frac{x_n}{\lambda}\} \rightarrow \frac{x}{\lambda}$ 'ya ρ -yakınsak olsun. Bu durumda; her $x, y, x_n \in X$ ve $C = 1$ sayısı için

$$\rho\left(\frac{x-y}{\lambda}\right) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \rho\left(\frac{x_n-y}{\lambda}\right) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \rho\left(\frac{x_n-y}{\lambda}\right) \quad (3.4)$$

olduğundan,

$$D_\lambda(x, y) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} D_\lambda(x_n, y) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} D_\lambda(x_n, y) \quad (3.5)$$

sağlanır.

Modüler metrik uzaylarına yeniden bakarsak:

(X, ω) modüler metrik uzayı olsun. $D : (0, \infty) \times X \times X \rightarrow [0, \infty]$ fonksiyonu $D_\lambda(x, y) = \omega_\lambda(x, y)$ olarak tanımlanır ve aşağıdaki özelliklere bakılırsa:

- (1) Her $x, y \in X$ ve her $\lambda > 0$ için $D_\lambda(x, y) = 0$ ancak ve ancak $x = y$,
 (2) Her $(x, y) \in X \times X$ ve her $\lambda > 0$ için $D_\lambda(x, y) = D_\lambda(y, x)$,
 (3) Eğer ω_λ Fatou özelliğine sahipse bazı $\lambda > 0$ ve $\{x_n\} \subset X$ ve her $x \in X$ ve $C = 1$ sayısı için;

$$\omega_\lambda(x, y) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \omega_\lambda(x_n, y) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \omega_\lambda(x_n, y) \quad (3.6)$$

olduğundan,

$$D_\lambda(x, y) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} D_\lambda(x_n, y) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} D_\lambda(x_n, y) \quad (3.7)$$

sağlanır.

Şimdi verilecek örneklerle neden daha genel bir metrik tanımlanmaya ihtiyaç duyulduğu gösterilecektir:

3.1.3. Örnek

$X = \{1, 2, 3\}$ kümesi ve $D : (0, \infty) \times X \times X \rightarrow [0, \infty]$ dönüşümü $\lambda > 0$ için $D_\lambda(1, 1) = D_\lambda(2, 2) = D_\lambda(3, 3) = 0$, $D_\lambda(1, 2) = D_\lambda(2, 1) = 2$, $D_\lambda(1, 3) =$

$D_\lambda(3, 1) = 6$, $D_\lambda(2, 3) = D_\lambda(3, 2) = 2$ olacak biçimde verilsin. Bu dönüşüm GMM_1 ve GMM_2 özelliklerini sağlar. Ancak $D_{\lambda+\mu}(1, 3) \leq D_\lambda(1, 2) + D_\mu(2, 3)$ eşitsizliğinin sonucu $6 \leq 4$ olduğundan (X, D) bir modüler metrik uzay değildir. GMM_3 özelliğinden $\lim_{n \rightarrow \infty} D_\lambda(x_n, x) = 0$, yani $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ elde edilir. Eğer $x = y$ alınrsa GMM_3 sağlanır, eğer $x \neq y$ alınrsa $D_\lambda(x, y) \leq C \limsup_{n \rightarrow \infty} D_\lambda(x_n, y)$ sağlanır.

Önce Banach, sonra Ćirić anlamında (X, D) uzayın üzerindeki büzölmelerin yapısını incelenecek, ama öncesinde bazı tanımları verilecektir.

3.1.4. Tanım

(X, D) genelleştirilmiş modüler metrik uzay olsun.

(1) Herhangi bir $\{x_n\} \subset X$ dizisi bazı $\lambda > 0$ için $n \rightarrow \infty$ iken $D_\lambda(x_n, x) \rightarrow 0$ oluyorsa bu diziyeye $x \in X$ noktasına D -yakınsak denir.

(2) Her $n, m \rightarrow \infty$ ve bazı $\lambda > 0$ iken $D_\lambda(x_n, x_m) \rightarrow 0$ oluyorsa $\{x_n\} \subset X$ dizisine D -Cauchy dizisi denir.

(3) Herhangi bir $C \subset X$ için $\{x_n\} \subset C$ dizisi D -yakınsak ve limiti aynı C içinde kalıyorsa C 'ye D -kapalı denir.

(4) Herhangi bir $C \subset X$ için $\{x_n\} \subset C$ dizisi bazı $\lambda > 0$ için D -Cauchy iken yani $\lim_{n \rightarrow \infty} D_\lambda(x_n, x_m) = 0$ olduğunda $\lim_{n \rightarrow \infty} D_\lambda(x_n, x) = 0$ olacak biçimde bir $x \in C$ noktası varsa C , D -tamdır denir.

(5) Herhangi $C \subset X$ bazı $\lambda > 0$ için

$$\delta_{D,\lambda}(C) = \sup\{D_\lambda(x, y); x, y \in C\} < \infty \quad (3.8)$$

oluyorsa C 'ye D -sınırlıdır denir.

Genelleştirilmiş metriklerin üçgen eşitsizliğinin yanı sıra klasik metriklerin sağladığı birçok özelliği de sağlamadığı görülür. Bu yüzden aşağıdaki özelliğin hangi koşullar altında sağlandığı sorusu önemlidir.

3.1.5. Lemma

(X, D) genelleştirilmiş modüler metrik uzay olsun. $\{x_n\} \subset X$ herhangi bir dizi, $x, y \in X$ bazı $\lambda > 0$ için $n \rightarrow \infty$ iken $D_\lambda(x_n, x) \rightarrow 0$ ve $D_\lambda(x_n, y) \rightarrow 0$ oluyorsa $x = y$ olur.

İspat

(GMM3) özelliğinden; $D_\lambda(x, y) \leq C \limsup_{n \rightarrow \infty} = 0$, olur ve buradan (GMM1) özelliğinden; $D_\lambda(x, y) = 0 \iff x = y$ sağlanır.

3.2. Genelleştirilmiş Modüler Metrik Uzaylarda Banach Büzülme İlkesi

3.2.1. Tanım

(X, D) genelleştirilmiş modüler metrik uzay olsun. $f : X \rightarrow X$ dönüşümü her $x, y \in X$ için,

$$D_1(f(x), f(y)) \leq k D_1(x, y), \quad (3.9)$$

olacak biçimde $k \in (0, 1)$ varsa f 'ye D -büzülme denir. Eğer $f(x) = x$ oluyorsa x 'e f 'nin sabit noktası denir.

Sabit noktanın tekliğine bakılırsa:

3.2.2. Lemma

(X, D) genelleştirilmiş modüler metrik uzay ve $f : X \rightarrow X$ dönüşümü bir D -büzülme dönüşümü olsun. Eğer $D_1(\omega_1, \omega_2) < \infty$ olacak biçimde f 'nin ω_1 ve ω_2 gibi iki sabit noktası varsa bunlar eşittir.

İspat

f 'nin ω_1 ve ω_2 gibi iki sabit noktası için $D_1(\omega_1, \omega_2) < \infty$ olsun. f bir D -büzülme dönüşümü olduğundan;

$$D_1(\omega_1, \omega_2) = D_1(f(\omega_1), f(\omega_2)) \leq k D_1(\omega_1, \omega_2), \quad (3.10)$$

olacak biçimde $k \in (0, 1)$ vardır. $D_1(\omega_1, \omega_2) < \infty$ olduğundan $D_1(\omega_1, \omega_2) = 0$ olur. (GMM1)'den $\omega_1 = \omega_2$ 'dir.

(X, D) genelleştirilmiş modüler metrik uzay olsun. $f : X \rightarrow X$ dönüşümünü alınsın.

Her $x \in X$ için;

$$\mathcal{O}(x) = \{x, f(x), f^2(x), \dots\}, \quad (3.11)$$

biçiminde bir küme tanımlarsak bazı $\lambda > 0$ için,

$$\delta_{D,\lambda}(x) = \sup\{D_\lambda(f^n(x), f^m(x)); n, m \in \mathbb{N}\}, \quad (3.12)$$

olur.

3.2.3 Teorem

(X, D) genelleştirilmiş modüler metrik uzay ve X tam olsun. $f : X \rightarrow X$ bir D -büzülme dönüşümünü alınsın. Bazı $x_0 \in X$ için $\delta_{D,1}(x_0)$ sonlu olsun. Bu durumda $\{f^n(x_0)\}$ f 'nin sabit noktası ω 'ya D -yakınsaktır. Dahası, eğer her $x \in X$ için $D_1(x, \omega) < \infty$ ise $\{f^n(x)\}$ ω 'ya D -yakınsaktır.

İspat

Herhangi bir $x_0 \in X_D$ alalım ve $\delta_{D,1}(x_0) < \infty$ sağlasın. Buradan her $n, p \in \mathbb{N}$ için

$$D_1(f^{n+p}(x_0), f^n(x_0)) \leq k^n D_1(f^p(x_0), x_0) \leq k^n \delta_{D,1}(x_0), \quad (3.13)$$

sağlanır. $k < 1$ olduğundan, $\{f^n(x_0)\}$ dizisi D -Cauchy olur. X_D uzayı D -tam olduğundan, öyle bir $\omega \in X_D$ noktası bulunabilir ki $\lim_{n \rightarrow \infty} D_1(f^n(x_0), \omega) = 0$ eşitliği sağlanır. Buradan;

$$D_1(f^n(x_0), f(\omega)) \leq k D_1(f^{n-1}(x_0), \omega); \quad n = 1, 2, \dots, \quad (3.14)$$

elde edilir. O halde $\lim_{n \rightarrow \infty} D_1(f^n(x_0), f(\omega)) = 0$ olur. $f(\omega) = \omega$ olduğundan, sabit nokta tanımından ω noktası f 'nin sabit noktasıdır. Şimdi de herhangi bir $x \in X_D$ noktasını $D_1(x, \omega) < \infty$ koşulunu sağlayacak şekilde alalım. Bu durumda her $n \geq 1$ için,

$$D_1(f^n(x), \omega) = D_1(f^n(x), f^n(\omega)) \leq k^n D_1(x, \omega), \quad (3.15)$$

sağlanır. $k < 1$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} D_1(f^n(x), \omega) = 0$ olacağından $\{f^n(x)\}$ dizisi ω 'ya D -yakınsaktır.

Her $x, y \in X_D$ için $D_1(x, y) < \infty$ olsun, o zaman f 'nin en fazla bir sabit noktası vardır. Dahası eğer, X_D uzayı D -tam ve her $x \in X_D$ için $\delta_{D,1}(x) < \infty$ ise, tüm orbitleri f 'nin tek sabit noktasına D -yakınsar. Metrik uzaylarda, $d(x, y)$ her zaman sonludur. Bu nedenden, her büzülmenin en fazla bir sbait noktası vardır. Dahası, tüm büzölmelerin orbitleri de sınırlıdır. $f : M \rightarrow M$ bir büzölme olsun, M uzayı d metriği ile birlikte bir metrik uzay olsun. O zaman, her $n \in \mathbb{N}$ ve $x \in M$ için,

$$d(f^{n+1}(x), f^n(x)) \leq k^n d(f(x), x), \quad (3.16)$$

sağlanır. Üçgen eşitsizliğinden $k < 1$ için,

$$\begin{aligned} d(f^{n+p}(x), f^n(x)) &\leq \sum_{k=0}^{p-1} d(f^{n+k+1}(x), f^{n+k}(x)) \\ &\leq \sum_{k=0}^{p-1} k^{n+k} d(f(x), x) \\ &\leq \frac{1}{1-k} d(f(x), x), \end{aligned} \quad (3.17)$$

elde edilir. Sonuç olarak her $x \in M$ için

$$\sup\{d(f^n(x), f^t(x)); n, t \in \mathbb{N}\} \leq \frac{1}{1-k} d(f(x), x) < \infty, \quad (3.18)$$

olur.

3.3. Genelleştirilmiş Modöler Metrik Uzaylarda Ćirić Sabit Nokta Teoremi

Öncelikle quasi-büzölmenin genelleştirilmiş modöler metrik uzaylardaki tanımını verilsin:

3.3.1. Tanım

(X, D) genelleştirilmiş modöler metrik uzay olsun. Her $x, y \in X$ için $f : X \rightarrow X$ dönüşümü;

$$D_1(f(x), f(y)) \leq k \max \left\{ D_1(x, y), D_1(x, f(x)), D_1(y, f(y)), D_1(x, f(y)), D_1(y, f(x)) \right\}, \quad (3.19)$$

olacak biçimde $k \in (0, 1)$ sayısı varsa f 'ye D -quasi-büzölme dönüşümü denir.

Sabit noktanın tekliği konusunda D -quasi-büzölme dönüşümü D -büzölme dönüşümüne benzerdir.

3.3.2. Lemma

(X, D) genelleştirilmiş modüler metrik uzay olsun. $f : X \rightarrow X$ bir D -quasi-büzölme dönüşümü olsun. Bu durumda f 'nin herhangi $\omega \in X$ sabit noktası varsa $D_\lambda(\omega, \omega) < \infty$ ise $D_\lambda(\omega, \omega) = 0$ olur.

İspat

$\omega \in X$ sabit noktası olsun ve $D_\lambda(\omega, \omega) < \infty$ sağlasın. Bu durumda f bir quasi-büzölme dönüşümü olduğundan;

$$D_\lambda(\omega, \omega) = D_\lambda(f(\omega), f(\omega)) \leq k D_\lambda(\omega, \omega) \quad (3.20)$$

elde edilir. $k \in (0, 1)$ olduğundan $D_\lambda(\omega, \omega) = 0$ elde edilir.

Benzer şekilde aşağıdaki 3.3.3.Lemma da ispatlanabilir.

3.3.3. Lemma

(X, D) genelleştirilmiş modüler metrik uzay olsun. Her $\omega_1, \omega_2 \in X$ için $f : X \rightarrow X$ D -quasi-büzölme dönüşümü;

$D_1(\omega, \omega) < \infty$ olduğunda ω , f 'nin sabit noktası ise $D_1(\omega, \omega) = 0$ olur. $D_1(\omega_1, \omega_2) < \infty$, $D_1(\omega_1, \omega_1) < \infty$ ve $D_1(\omega_2, \omega_2) < \infty$ olduğunda ω_1 ve ω_2 , f 'nin sabit noktası ise $\omega_1 = \omega_2$ 'dir.

İspat

f 'nin sabit noktası ω olsun. Buradan

$$\begin{aligned} D_1(\omega, \omega) &= D_1(f(\omega), f(\omega)) \\ &\leq k \max \{D_1(\omega, \omega), D_1(\omega, f(\omega)), D_1(\omega, f(\omega)), D_1(\omega, f(\omega)), D_1(\omega, f(\omega))\} \\ &\leq k D_1(\omega, \omega) \end{aligned} \quad (3.21)$$

olur. $k < 1$ ve $D_1(\omega, \omega) < \infty$ olduğundan, $D_1(\omega, \omega) = 0$ olur. $\omega_1, \omega_2 \in X_D$ noktalarını

alalım ve bunlar f ' nin iki sabit noktası olsun. $D_1(\omega_1, \omega_2) < \infty, D_1(\omega_1, \omega_1) < \infty$ olduğundan ve $D_1(\omega_2, \omega_2) < \infty$ ' dir. f dönüşümü D -quasi-büzülme dönüşümü olduğundan, öyle bir $k < 1$ vardır ki

$$\begin{aligned} D_1(\omega_1, \omega_2) &= D_1(f(\omega_1), f(\omega_2)) \\ &\leq k \max \{D_1(\omega_1, \omega_2), D_1(\omega_1, f(\omega_1)), D_1(\omega_2, f(\omega_2)), D_1(\omega_1, f(\omega_2)), D_1(\omega_2, f(\omega_1))\}. \\ &= k \max \{D_1(\omega_1, \omega_2), D_1(\omega_1, \omega_1), D_1(\omega_2, \omega_2)\}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

sağlanır. $D_1(\omega_1, \omega_1) < \infty$ ve $D_1(\omega_2, \omega_2) < \infty$ olduğundan, $D_1(\omega_1, \omega_1) = D_1(\omega_2, \omega_2) = 0$ elde edilir. Şimdi

$$D_1(\omega_1, \omega_2) \leq k D_1(\omega_1, \omega_2). \quad (3.23)$$

olur. Böylece $D_1(\omega_1, \omega_2) < \infty$ ve $k < 1$ olduğundan $D_1(\omega_1, \omega_2) = 0$ sonucuna ulaşılır.

Jleli ve Samet çalışmalarında şu teoremi vermişlerdir:

3.3.4 Teorem

(X, D) genelleştirilmiş metrik uzay ve $f : X \rightarrow X$ D -quasi-büzülme dönüşümü olsun. $\delta_{D,1}(x_0) < \infty$ olacak biçimde $x_0 \in X$ varsa $\{f^n(x_0)\}$ bazı $\omega \in X$ noktasına D -yakınsak olur. Eğer $D_1(x_0, f(\omega)) < \infty$ ve $D_1(\omega, f(\omega)) < \infty$ oluyorsa ω, f ' nin sabit noktasıdır.

Bu teoremin kaçırdığı nokta ters bir örnekle açıklanmıştır [18].

Şimdi bu durum için çözüm olan genelleştirilmiş modüler metrik için Ćirić Sabit Nokta Teoremi aşağıda verilmiştir.

3.3.5 Teorem

(X, D) genelleştirilmiş metrik uzay, X D -tam ve $f : X \rightarrow X$ D -quasi-büzülme dönüşümü olsun. (GMM3) özelliğindeki C sabiti için $k < \frac{1}{C}$ ve $\delta_{D,1}(x_0) < \infty$ olacak biçimde $x_0 \in X$ varsa bu durumda $\{f^n(x_0)\}$ bazı $\omega \in X$ noktasına D -yakınsak olur. Eğer $D_1(x_0, f(\omega)) < \infty$ ve $D_1(\omega, f(\omega)) < \infty$ ve $D_1(\omega, f(\omega)) < \infty$ oluyorsa ω, f ' nin sabit noktasıdır.

İspat

f dönüşümü D -quasi-büzülme dönüşümü olsun. Bu durumda her $p, r, n \in \mathbb{N}$ ve $x \in X_D$ için öyle bir $k \in (0, 1)$ vardır ki,

$$\begin{aligned} & D_1(f^{n+p+1}(x), f^{n+r+1}(x)) \\ & \leq k \max \{D_1(f^{n+p}(x), f^{n+r}(x)), D_1(f^{n+p}(x), f^{n+p+1}(x)), D_1(f^{n+r}(x), f^{n+r+1}(x)), \\ & D_1(f^{n+p}(x), f^{n+r+1}(x)), D_1(f^{n+r}(x), f^{n+p+1}(x))\} \end{aligned} \quad (3.24)$$

sağlanır. Her $x \in X_D$ için $\delta_{D,1}(f(x)) \leq k \delta_{D,1}(x)$ olduğundan her $n \geq 1$ için,

$$\delta_{D,1}(f^n(x_0)) \leq k^n \delta_{D,1}(x_0), \quad (1)$$

sağlanır. Üstteki eşitsizlikten her $n, m \in \mathbb{N}$ için

$$D_1(f^n(x_0), f^{n+t}(x_0)) \leq \delta_{D,1}(f^n(x_0)) \leq k^n \delta_{D,1}(x_0), \quad (2)$$

elde edilir. $\delta_{D,1}(x_0) < \infty$ ve $k < 1/C \leq 1$ için,

$$\lim_{n,t \rightarrow \infty} D_1(f^n(x_0), f^{n+t}(x_0)) = 0, \quad (3.25)$$

elde edilir. Bu da, $\{f^n(x_0)\}$ dizisinin D -Cauchy dizisi olması demektir. X_D uzayı D -tam olduğundan, öyle bir $\omega \in X_D$ vardır ki $\lim_{n \rightarrow \infty} D_1(f^n(x_0), \omega) = 0$ olur, yani $\{f^n(x_0)\}$ dizisi ω noktasına D -yakınsaktır. Şimdi de $D_1(x_0, f(\omega)) < \infty$ ve $D_1(\omega, f(\omega)) < \infty$ olduğunu kabul edelim. (2) eşitsizliğinden ve (GMM_3) özelliğinden her $n, m \in \mathbb{N}$ için

$$D_1(\omega, f^n(x_0)) \leq C \limsup_{t \rightarrow \infty} D_1(f^n(x_0), f^{n+t}(x_0)) \leq C k^n \delta_{D,1}(x_0) \quad (3)$$

bulunur .

$$\begin{aligned} & D_1(f(x_0), f(\omega)) \\ & \leq k \max \{D_1(x_0, \omega), D_1(x_0, f(x_0)), D_1(\omega, f(\omega)), D_1(f(x_0), \omega), D_1(x_0, f(\omega))\} \end{aligned} \quad (3.26)$$

ve ve (1), (2), (3), $k < 1/C \leq 1$ ' den

$$D_1(f^2(x_0), f(\omega)) \leq \max \{k^2 C \delta_{D,1}(x_0), k D_1(\omega, f(\omega)), k^2 D_1(\omega, f(x_0))\} \quad (3.27)$$

elde edilir. Bu şekilde devam edersek $n \geq 1$ için

$$D_1(f^n(x_0), f(\omega)) \leq \max \{k^n C \delta_{D,1}(x_0), k D_1(\omega, f(\omega)), k^n D_1(\omega, f(x_0))\}, \quad (3.28)$$

elde edilir. Dahası, $D_1(x_0, f(\omega)) < \infty$ ve $\delta_{D,1}(x_0) < \infty$ olduğunda

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} D_1(f^n(x_0), f(\omega)) \leq k D_1(\omega, f(\omega)), \quad (3.29)$$

olur. Yine (GMM_3) özelliğini uygularsak

$$D_1(\omega, f(\omega)) \leq C \limsup_{n \rightarrow \infty} D_1(f^n(x_0), f(\omega)) \leq k C D_1(\omega, f(\omega)) \quad (3.30)$$

elde edilir. $k C < 1$ ve $D_1(\omega, f(\omega)) < \infty$ için, $D_1(\omega, f(\omega)) = 0$ olur, yani $f(\omega) = \omega$ ' dir.



4. GENELLEŞTİRİLMİŞ MODÜLER METRİK UZAYLARDA ÇOĞUL DEĞERLİ DÖNÜŞÜMLER İÇİN BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİ

Çoğul değerli dönüşümler uygulamalı ve teorik matematikte birçok uygulama alanına sahiptir. Çoğul değerli dönüşümler Kontrol Teorisi, Konveks Optimizasyon, Diferansiyel İçerme ve ekonomi gibi alanlarda kendine sıklıkla uygulama alanı bulmaktadır. Topoloji, reel değerli fonksiyonlar teorisi, doğrusal olmayan fonksiyonel analiz, oyun teorisi, matematiksel ekonomi vb. alanlar da eklenebilir.

Başlarken çoğul değerli fonksiyonların bazı temel özelliklerinden bahsedilmiştir. Genelleştirilmiş modüler metrik uzaylarda(GMMU) açık yuvarlar ve onların ürettiği iki önemli topoloji ele alınmıştır. Bu topolojiler GMMU' da daha önce bahsedilen diğer topolojilerle karşılaştırılmıştır. Bunu yapabilmek için de bazı tanımlar verilmiştir [19].

Genelleştirilmiş Hausdorff modüler metrik tanımını verilmiştir. Ardından çoğul değerli Lipschitz dönüşümü, D-çoğul değerli büzülme gibi yeni tanımlar yapılmıştır. Ardından bunların arasındaki ilişkiye odaklanılmıştır. Genelleştirilmiş Banach Büzülme İlkesi yardımıyla GMMU' da çoğul değerli dönüşüm için boş kümeden farklı, D-kapalı ve sınırlı herhangi alt kümede sabit noktaya sahip olma koşulları araştırılmıştır.

Nadler, çoğul değerli büzülmeler için sabit nokta teorisini ortaya koyduktan sonra birçok matematikçi bunu birçok farklı yönde geliştirmiştir ve bugün de çalışmalar devam etmektedir. Sabit noktaya sahip dönüşümlerin davranışlarını inceleyen iyi bilinen bazı sabit nokta teoremleri çoğul değerli dönüşümler için de ispatlanmıştır. Bunlardan ikisi bu bölümde ele alınmıştır: Caristi ve Feng-Liu tip yaklaşımlar sabit noktanın varlığını GMMU' da ispatlamak için kullanılmıştır.

Sonuç olarak, GMMU'da homojen olmayan lineer parabolik parçalı diferansiyel denklemlerde başlangıç değer problemi için örnek niteliğinde bir uygulama verilmiştir.

Bu bölümün devamında GMMU' da çoğul değerli dönüşüm tanımı ve bazı sabit nokta sonuçları verilmiştir.

Nadler tarafından çoğul değerli büzülme dönüşümlerini iki sabit nokta teoremi için ispatlamıştır [7]. İlki, Banach' ın Büzülme Dönüşümü İlkesinin genelleştirilmesidir, yani çoğul değerli dönüşüm tam metrik uzayların boş kümeden farklı kapalı ve sınırlı alt

kümesi üzerine tanımlandığında bir sabit noktaya sahiptir. İkincisi, Edelstein' in elde ettiği sonucun daha genel bir durumu olan, kompakt çoğul değerli yerel büzölmeler için olan sabit nokta teoremidir. Nadler' in çalışması diğer metrik uzaylara da uygulanmıştır [6, 9, 18, 21, 24, 25, 28–31, 33–36, 38, 40, 41].

Feng ve Liu tarafından, Nadler' in elde ettiği sonuçların Pompei-Hausdorff metriği kullanılmadan en önemli bir genelleştirmelerinden biri verilmiştir [20]. Feng ve Liu' nun çalışmasından sonra onların elde ettiği sonuçlar farklı metrik uzaylara uygulanmıştır [23]. Bu tezde Feng-Liu teoremi GMMU' da ele alınacaktır.

4.1. Genelleştirilmiş Modüler Metrik Uzayların Bazı Özellikleri

(X_D, D) bir GMMU ve $\{x_n\} \subset X_D$ olsun. Her $x \in B$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} D_\lambda(x_n, x) = 0$ bazı λ ' lar için sağlanırken dizinin elemanlarının sayılamayacak kadarı B ' nin içinde yer alıyor ise $B \subset X_D$ alt kümesine X_D ' nin D -dizisel açık bir alt kümesidir denir. Yani $\{x_n\} \subset X_D$ dizisi alındığında her $n \in \mathbb{N}$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} D_\lambda(x_n, x) = 0$ sağlandığında $x_n \in B$ olacak biçimde $n \geq n_0$ için bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır.

Burada $B(x, \epsilon) := \{y \in X_D : D_\lambda(x, y) < \epsilon\}$ olarak X_D üzerinde $x \in X_D$ merkezli $\epsilon > 0$ yarıçaplı bir açık yuvar tanımlayalım. X_D ' den alınan bir A kümenin açık olması; her $x \in A$ için öyle bir $\epsilon > 0$ bulunur. Öyleyse $B(x, \epsilon) \subseteq A$ dir. Açık kümelerin ailesi τ_D ile gösterilsin.

X_D ' nin tüm dizisel açık alt kümelerinin ailesi τ_{X_D} olsun. X_D ' nin her yakınsak dizisi (X_D, τ_{X_D}) topolojik uzayında da yakınsaktır. Yani, (X_D, τ_{X_D}) uzayında tüm boş kümeden farklı kapalı alt kümelerinin ailesi $\mathcal{C}(X_D)$ olsun. X_D ' nin boş kümeden farklı herhangi B alt kümesi ve herhangi bir $x \in X_D$ için $D_\lambda(x, B) = \inf\{D_\lambda(x, y) : y \in B\}$ olarak alınır, $D_\lambda(x, B) = 0$ özelliğini sağlayan tüm alt kümelerinin ailesi de \mathcal{P} olsun. Herhangi bir $x \in X_D$ ve B alt kümesi için, $D_\lambda(x, B) = 0$ sağlayan her $x \in X_D$ için $x \in B$ olur. Bu durumda, $\mathcal{P} = \mathcal{C}(X_D)$ olduğu gösterilsin.

$B \subset \mathcal{C}(X_D)$, $x \in X_D$ ve B ' deki herhangi bir $\{x_n\}$ dizisi için eğer $D_\lambda(x, B) = 0$ oluyorsa, $\lim_{n \rightarrow \infty} D_\lambda(x_n, x) = 0$ olur. X_D üzerindeki τ_{X_D} topolojisinin tanımından, her $A \in \tau_D$ için $\{x_n\} \subset A$ dizisi alındığında her $n \in \mathbb{N}$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} D_\lambda(x_n, x) = 0$ sağlandığından $x_n \in A$ olacak biçimde $n \geq n_0$ için bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Burada $B \subset \mathcal{C}(X_D)$ ' ye dönersek, $B \cap A \neq \emptyset$ olur, dolayısıyla $x \in B = \bar{B}$ dir. Sonuç olarak $\mathcal{C}(X_D) \subset \mathcal{P}$ dir. Eğer $B \subset \mathcal{P}$, $x \in X_D - B$ ve dizi olarak X_D ' de $\lim_{n \rightarrow \infty} D_\lambda(x_n, x) = 0$ alalım. Her $x \in B$ için $D_\lambda(x, B) = 0$ koşulunu sağlayan B ' nin içinde herhangi bir $\{x_{n_k}\} \subseteq \{x_n\}$ alt dizisi bulunamaz. Öyleyse $B \in \mathcal{C}(X_D)$ olur. Sonuç olarak $\mathcal{C}(X_D) = \mathcal{P}$ dir.

τ_{X_D} 'nin özellikleri τ_D topolojisi ile örtüşür [43]. Örneğin, modüler vektör uzaylarını alırsak $x \in X_\rho$ ve $r \geq 0$ için ρ -yuvarı $B_\rho(x, r)$ ile gösterilmiş ve $B_\rho(x, r) = \{y \in X_\rho; \rho(x - y) < r\}$ ile tanımlanmıştır [22]. B_ρ açık yuvar ve X_ρ vektör uzayında A bir alt kümesidir. (τ_ρ) topolojisi örneğinde, X_ρ 'nin ρ -açık kümelerin hepsi X_ρ modüler uzayındaki τ_{X_ρ} 'nin açık kümelerine denktir.

Chistyakov [16] modüler açık yuvarları ve onların topolojik yapısını şu şekilde tanımlamıştır: ω modüler metrik olsun ve eğer $x \in A$, $\lambda > 0$ iken $\mu > 0$ olacak biçimde $B(x)_{\lambda, \mu} \subset A$ oluyorsa X 'in boş kümeden farklı bir alt kümesi ω -açık denir. $\tau(\omega)$ ile X_ω 'nin tüm ω -açık kümelerinin kümesi gösterilirse, X_ω uzayının topolojisi olan ω -topoloji modüler metrik uzayda τ_{X_D} 'ye denk olur.

Eğer JS-metrik uzayını ve üzerinde tanımlanan JS-metrik uzayının topolojisini alırsak, JS-metrik uzayında alışılmış topolojiyi buluruz ve τ_{X_D} 'ye denk olur [23].

Sırada, genelleştirilmiş Hausdorff modüler tanımı verilmiştir. Ardından da bir sonraki bölüm için gerekli olan materyaller ve aralarındaki ilişki ele alınmıştır.

4.1.1. Tanım

(X, d) bir metrik uzay, 2^X , X 'in bütün alt kümeleri ailesi olsun. Her boş kümeden farklı $A, B, U \subset X$ alt kümeleri alınsın.

$$\mathcal{C}(X) = \{U \neq \emptyset : U \subset X \text{ kapalı}\}, \mathcal{CB}(X) = \{U \neq \emptyset : U \subset X \text{ kapalı ve sınırlı}\}, \\ \mathcal{N}_\varepsilon(U) = \{y \in X : d(y, U) \leq \varepsilon\}$$

olacak biçimde $\varepsilon > 0$ vardır. $\mathcal{CB}(X)$ üzerinde her $a \in A$ için $d(a, B) = \inf_{b \in B} d(a, b)$ olduğunda *Hausdorff-Pompeiu metrik* şu şekilde tanımlanmıştır:

$$H(A, B) = \max \left\{ \sup_{a \in A} d(a, B), \sup_{b \in B} d(b, A) \right\} \quad (4.1)$$

Daha geometrik bir ifade ile:

$$H(A, B) = \inf \{ \varepsilon > 0 : A \subset \mathcal{N}_\varepsilon(B) \text{ ve } B \subset \mathcal{N}_\varepsilon(A) \} \quad (4.2)$$

gösterilir. Burada her $x, y \in X$ için çoğul değerli bir $T : X \rightarrow X$ dönüşümü

$$H(T(x), T(y)) \leq d(x, y) \quad (4.3)$$

koşulunu sağlıyorsa bu dönüşüme *genişlemeyen dönüşüm* denir.

4.1.2. Tanım

(X_D, D) bir GMMU olsun. Her boş kümeden farklı $A, B \subset X_D$ alt kümesi için $\mathcal{C}(X_D)$ üzerinde $D_\lambda(a, B) = \inf_{b \in B} D_\lambda(a, b)$ olduğunda *genelleştirilmiş Hausdorff modüler* şu şekilde tanımlanmıştır:

$$H_D(\lambda, A, B) = \max\left\{\sup_{a \in A} D_\lambda(a, B), \sup_{b \in B} D_\lambda(b, A)\right\} \quad (4.4)$$

Eğer $\mathcal{C}(X_D)$ üzerinde $D_1(a, B) = \inf_{b \in B} D_1(a, b)$ olduğunda $\lambda = 1$ ise, o zaman

$$H_D(A, B) = \max\left\{\sup_{a \in A} D_1(a, B), \sup_{b \in B} D_1(b, A)\right\} \quad (4.5)$$

olur.

4.1.3. Örnek

Eğer yukarıda kullanılan 3.1.3.Örnek üzerinden devam edilirse, $X = \{1, 2, 3\}$ kümesi ve $D : (0, \infty) \times X \times X \rightarrow [0, \infty]$ dönüşümü $\lambda > 0$ için $D_\lambda(1, 1) = D_\lambda(2, 2) = D_\lambda(3, 3) = 0$, $D_\lambda(1, 2) = D_\lambda(2, 1) = 2$, $D_\lambda(1, 3) = D_\lambda(3, 1) = 6$, $D_\lambda(2, 3) = D_\lambda(3, 2) = 2$ olacak biçimde verilsin. $A = \{1, 2\}$, $B = \{3\} \subset X$ için $D_\lambda(a, \{3\}) = \inf_{b \in \{3\}} D_\lambda(a, b)$ ve $D_\lambda(\{1, 2\}, b) = \inf_{a \in \{1, 2\}} D_\lambda(a, b)$ olduğunda

$$H_D(\lambda, \{1, 2\}, \{3\}) = \max\left\{\sup_{a \in \{1, 2\}} D_\lambda(a, \{3\}), \sup_{b \in \{3\}} D_\lambda(b, \{1, 2\})\right\}, \quad (4.6)$$

için tüm olası sonuçlar kolayca hesaplanabilir.

Abdou ve Khamsi çalışmalarında modüler metrik uzaylar için büzülme tipi çoğul değerli dönüşüm yapısını sabit noktanın varlığını göstermek için araştırmıştır ve modüler metrik uzaylarda çoğul değerli modüler büzülme dönüşümlerinin sabit noktasının varlığını ispatlamışlardır [12]. Yine çalışmalarında Nadler ve Edelstein sabit nokta sonuçlarının daha da genel sonuçlara uygulanabileceğini söylemişlerdir [7]. Onların bu çalışması GMMU için benzer fikirler ve genelleştirmeler konusunda ilham verici ve yol göstericidir.

Öncelikle, Lipschitz dönüşümü tanımlanmıştır, sabit nokta ve daha genel bir sonuca

ulaşmak için daha önceki çalışmaların yardımıyla $\lambda = 1$ alınmış ve GMMU' da D -çoğul değerli büzülme tanımlanmıştır [12]. D -kuvvetli Cauchy dizisi gibi önemli tanımlara yeniden değinilmiştir. Ardından, tüm bu tanımlar arasındaki ilişkiler ve hepsinin genelleştirilmiş Hausdorff metrik ile ilişkisi irdelenmiştir. GMMU' da D -çoğul değerli büzülme dönüşümü için ilişkili sabit nokta teoremleri sırayla verilmiştir.

4.1.4. Tanım

(X_D, D) bir GMMU olsun. Eğer her $x, y \in X_D$, $k \geq 0$ sabiti varsa ve $a \in f(x)$ alındığında $b \in f(y)$ elemanı

$$D_1(a, b) \leq k D_1(x, y) \quad (4.7)$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde bulunabiliyorsa $f : X_D \rightarrow \mathcal{C}(X_D)$ dönüşümüne *çoğul değerli Lipschitz dönüşümü* denir. $x \in f(x)$ oluyorsa $x \in X_D$ noktasına f ' nin *sabit noktası* denir. Eğer $k < 1$ oluyorsa f dönüşümüne *D -çoğul değerli büzülme* denir.

4.1.5. Örnek

Bir önceki örnekte olduğu gibi X ' de $f : X \rightarrow \mathcal{C}(X)$ dönüşümünü $f(1) = f(2) = 1$ and $f(3) = 2$ alırsak her $a \in f(x)$ için $D_1(a, b) \leq k D_1(x, y)$ olacak biçimde bir $b \in f(y)$ bulabiliriz.

4.1.6. Tanım

X_D bir GMMU ve $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de X_D ' de bir dizi olsun.

(1) Eğer bazı $\lambda > 0$ için $\sum_{n=1}^{\infty} D_{\lambda}(x_n, x_{n+1}) < \infty$ oluyorsa X_D ' deki $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisine D -kuvvetli Cauchy denir.

(2) Eğer M ' deki her D -kuvvetli Cauchy dizisi $\{x_n\}$ bazı $\lambda > 0$ için $\sum_{n=1}^{\infty} D_{\lambda}(x_n, x_{n+1}) < \infty$ koşulunu $\lim_{n \rightarrow \infty} D_{\lambda}(x_n, x) = 0$ olacak biçimde bir $x \in M$ olacak biçimde sağlıyorsa X_D ' nin M alt kümesine D -kuvvetli tamdır denir. (3) Eğer her yakınsak $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X_D$ dizisi ve $\lim_{n \rightarrow \infty} D_1(x_n, x) = 0$ koşulunu sağlayan $x \in X_D$ için

$$D_1(x, y) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} D_1(x_n, y), \quad (4.8)$$

koşulu $y \in X_D$ ' de oluyorsa D' ye, 1-Fatou özelliğine sahiptir denir.

(X_D, D) bir GMMU olsun. $f : X_D \rightarrow \mathcal{C}(X_D)$ bir çoğul değerli dönüşüm ve $x, y \in X_D$ olsun. Bazı $k \geq 0$ için $0 < D_1(x, y) < \infty$ ile $H_D(f(x), f(y)) \leq k D_1(x, y)$ koşulu her $a \in f(x)$ için bir $b \in f(y)$ bulunuyorsa bu durumda $\varepsilon = \frac{1-k}{2} D_1(x, y) > 0$ için;

$$\begin{aligned}
 D_1(a, b) &\leq H_D(f(x), f(y)) + \varepsilon \\
 &\leq k D_1(x, y) + \varepsilon \\
 &= k D_1(x, y) + \frac{1-k}{2} D_1(x, y) \\
 &= \frac{1+k}{2} D_1(x, y),
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

elde edilir. Burada eğer $\frac{1+k}{2} = k'$ ise $D_1(a, b) \leq k' D_1(x, y)$ ' dir.

Bu noktada X_D uzayında D -çoğul değerli büzülme dönüşümü f için sabit noktanın varlığından bahsedilmiştir.

4.1.7 Teorem

(X_D, D) bir GMMU olsun. X_D , D -kuvvetli tam ve D , 1-Fatou özelliğini sağlasın. $f : X_D \rightarrow \mathcal{C}(X_D)$ dönüşümü D -çoğul değerli büzülme dönüşümü olsun. Bazı $x_0 \in X_D$ için $D_1(x_0, x)$ sonlu ve $x \in f(x_0)$ olsun. Bu durumda f' nin bir sabit noktası vardır.

İspat

Bazı $x_1 \in f(x_0)$ için $D_1(x_0, f(x)) < \infty$ olacak biçimde bir $x_0 \in X_D$ alalım. Bu durumda $D_1(x_1, x_2) < \infty$ için öyle bir $x_2 \in f(x_1)$ vardır ki

$$D_1(x_1, x_2) \leq k D_1(x_0, x_1), \tag{4.10}$$

olur. Burada $D_1(x_2, x_3) < \infty$ için

$$D_1(x_2, x_3) \leq k^2 D_1(x_0, x_1), \tag{4.11}$$

olur. Böyle devam edersek f D -çoğul değerli büzülmesi için her $x_0 \in f(x_n)$ için $x_{n+1} \in f(x_n)$ olacak biçimde $x_1 \in f(x_{n+1})$ koşulunu sağlayan bir $\{x_n\}$ dizisi inşa etmiş oluruz.

Her $n \geq 0$ için $D_1(x_n, x_{n+1}) < \infty$ olduğunda

$$D_1(x_n, x_{n+1}) \leq k^n D_1(x_0, x_1) \quad (4.12)$$

olur. $k < 1$ olduğunda $\sum_{n=1}^{\infty} D_1(x_n, x_{n+1})$ toplamı yakınsaktır, bu durumda $\{x_n\}$ dizisi D -kuvvetli Cauchy' dir. Bir GMMU olan X_D ' de D -kuvvetli tam olduğundan, herhangi bir $x \in X_D$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} D_1(x_n, x) = 0$ sağlar. $x_0 \in f(x)$ olduğunda, her $x_1 \in f(x_n)$ için

$$D_1(x_0, x_1) \leq k D_1(x_n, x), \quad (4.13)$$

sağlanır ve D_1 , 1-Fatou özelliğine sahiptir.

$$D_1(x_0, x_1) \leq k D_1(x, x) \leq k \liminf_{n \rightarrow \infty} D_1(x_n, x), \quad (4.14)$$

olduğundan $\lim_{n \rightarrow \infty} D_1(x_0, x_1) = 0$ ' dir. Sonuç olarak x , f ' nin sabit noktası olur.

4.2. Genelleştirilmiş Modüler Metrik Uzayda Çoğul Değerli Dönüşümler İçin Caristi Sabit Nokta Teoremi

Caristi tarafından, genel sabit nokta teoremini ispatlanmıştır ve tam metrik uzaylarda Büzülme Dönüşümü İlkesinin genelleştirmesini verilmiştir [26]. Yine aynı çalışmasında, Banach uzaylarında bazı sabit nokta teoremleri için zayıf dönüşümlerin karakteristiklerini ve uygulamasını vermiştir. Onun çalışmasını izleyen çalışmalarda birçok yazar, Caristi yaklaşımını farklı metrik uzaylar için genişletmiştir [27]. Caristi tip uzaylar için bir uygulama olarak de bakılabilir [42].

Sırayla Caristi ve Feng-Liu tipindeki sabit nokta teoremleri verilmiştir.

4.2.1 Teorem

X_D uzayı bir D -tam GMMU ve $f : X_D \rightarrow CB(X_D)$ genişlemeyen bir dönüşüm olsun. Her $x \in X_D$ ve $y \in f(x)$ için bir $z \in f(y)$ var ve

$$D_1(x, y) \leq \Theta_D(x, y) - \Theta_D(y, z) \quad (4.15)$$

sağlansın. $CB(X_D)$ alt kümesi X_D ' de D -kapalı ve sınırlı bir alt küme ve $\Theta_D : X_D \times X_D \rightarrow [0, \infty]$ fonksiyonu ilk değişkenine göre alttan yarı süreklili olsun. Bu durumda

$D_1(x_n, x_{n+1}) < \infty$ için f' nin bir sabit noktası vardır.

İspat

$x_0 \in X_D$ ve $x_1 \in f(x_0)$ alalım. Eğer $x_1 = x_0$, ise ispat biter. Öyleyse $x_0 \neq x_1$ alalım. Son kullanılan eşitsizlik yardımıyla $x_2 \in f(x_1)$ için

$$D_1(x_0, x_1) \leq \Theta_D(x_0, x_1) - \Theta_D(x_1, x_2), \quad (4.16)$$

elde edilir. Bu şekilde devam ederek $x_n \neq x_{n+1}$ için $x_n \in f(x_n)$ bulunur. $x_{n+1} \in f(x_n)$ için

$$0 < D_1(x_{n-1}, x_n) \leq \Theta_D(x_{n-1}, x_n) - \Theta_D(x_n, x_{n+1}), \quad (4.17)$$

elde edilir. Buradan $\Theta_D(x_{n-1}, x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ artmayan dizidir ve $\omega > 0$ ' a yakınsar. Son eşitsizliğin her iki tarafından limit alınırsa $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} D_1(x_{n-1}, x_n) &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \{\Theta_D(x_{n-1}, x_n) - \Theta_D(x_n, x_{n+1})\}, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} D_1(x_{n-1}, x_n) &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \Theta_D(x_{n-1}, x_n) - \lim_{n \rightarrow \infty} \Theta_D(x_n, x_{n+1}), \\ \lim_{n \rightarrow \infty} D_1(x_{n-1}, x_n) &\leq \omega \quad \omega = 0 \end{aligned} \quad (4.18)$$

Aynı yolla $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinin D -Cauchy olduğunu da gösterilebilir.

ω , f' nin sabit noktası olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} D_1(\omega, f(\omega)) &\leq D_{\frac{1}{2}}(\omega, x_{n+1}) - D_{\frac{1}{2}}(f(\omega), x_{n+1}), \\ &\leq D_{\frac{1}{2}}(\omega, x_{n+1}) - H_D(f(\omega), f(x_{n+1})), \\ &\leq D_{\frac{1}{2}}(\omega, x_{n+1}) - D_{\frac{1}{2}}(\omega, x_n), \end{aligned} \quad (4.19)$$

ve son eşitsizlikten limite geçilirse,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} D_1(\omega, f(\omega)) &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} D_{\frac{1}{2}}(\omega, x_{n+1}) - \lim_{n \rightarrow \infty} D_{\frac{1}{2}}(\omega, x_n), \\ \lim_{n \rightarrow \infty} D_1(\omega, f(\omega)) &\leq D_{\frac{1}{2}}(\omega, \omega) - D_{\frac{1}{2}}(\omega, \omega) = 0 \end{aligned} \quad (4.20)$$

elde edilir. Dolayısıyla ω , f' nin sabit noktasıdır.

Bu teorem farklı şekillerde genelleştirilerek ifade de edilebilir.

4.3. Genelleştirilmiş Modüler Metrik Uzayda Çoğul Değerli Dönüşümler İçin Feng-Liu Tip Sabit Nokta Teoremi

Feng ve Liu, Hausdorff metriğini kullanmadan aşağıdaki Teorem 4.3.3. 'ün ifadesi ve ispatında kullanılan sonuçları vermiştir [20]. Bu sonuçlardan hareketle bu bölümde GMMU' da bazı tanımlar verilmiştir. X_D ' de \emptyset dışındaki 2^{X_D} alt kümeleri için $f : X_D \rightarrow 2^X$ dönüşümü çoğul değerli dönüşüm olur. Her $x \in X_D$ için $x \in f(x)$ koşulunu sağlarsa, x noktası bu dönüşümün sabit noktasıdır.

4.3.1. Tanım

$T : X_D \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu her $\{x_n\} \subset X_D$ ve her $x \in X_D$ için

$$x_n \rightarrow x \Rightarrow T(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} T(x_n) \quad (4.21)$$

koşulunu alt limite göre sağlıyorsa *alt-yarı sürekli* denir.

Bu durumda, verilen T ve f fonksiyonları için $T(x) = D_\lambda(x, f(x))$ olduğunda $\beta \in (0, 1)$ için,

$$I_{D, \beta}^x(f) = \{a \in f(x); \beta D_\lambda(x, a) \leq D_\lambda(x, f(x))\} \subset X_D \quad (4.22)$$

kümesi Eş. 4.22 ile tanımlanmıştır.

Burada f fonksiyonu D -alt-yarı sürekli ve $D_1(x, f(x)) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} D_1(x_n, f(x_n))$ koşulu sağlanıyorsa $\{x_n\} \in X_D$ dizisi de $x \in X_D$ ' e yakınsaktır.

4.3.2. Örnek

Örnek 3.1.3. üzerinden açıklamaya devam edilirse $f : X \rightarrow \mathcal{C}(X)$ çoğul değerli dönüşümü $f(x) = 3$, $\beta = \frac{1}{2}$, $x \in X$ ile verilsin. Herhangi $a \in f(x)$ için $\beta D_1(x, a) \leq D_1(x, f(x))$ olduğunu hesaplamalarla kolayca gösterilebilir. Bu durumda $D_1(x, f(x)) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} D_1(x_n, f(x_n))$ f fonksiyonu D -alt yarı sürekli her $\{x_n\} \in X$ dizisi $x \in X$ ' e yakınsaktır.

4.3.3 Teorem

(X_D, D) bir tam GMMU ve f dönüşümü X_D ' de bir D -çoğul değerli dönüşüm olsun. Her $x \in X_D$ için bir $y \in I_{D,\beta}^x(f)$ vardır ki $\frac{K}{\beta} < 1$ olacak biçimde $K > 0$ sabiti için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$D_1(y, f(y)) \leq K D_1(x, y). \quad (4.23)$$

$D_1(x_0, f(x_0)) < \infty$ olacak biçimde $x_0 \in X_D$ vardır. Her $n \in \mathbb{N}$ için $D_1(x_n, x_{n+1}) < \infty$ olduğunda X_D ' de $\{x_n\}$ dizisi $\beta D_1(x_{n+1}, x_{n+2}) \leq K D_1(x_n, x_{n+1})$ koşulunu sağlar ve $x_{n+1} \in f(x_n)$ iken $\beta D_1(x_{n+1}, f(x_{n+1})) \leq K D_1(x_n, f(x_n))$ olur.

Eğer dizi D -kuvvetli Cauchy dizisi ve $D_1(x, f(x))$ ile belirlenen dönüşüm D -alt-yarı sürekli olursa o zaman f sabit bir noktaya sahiptir.

İspat

Her $x \in X_D$ için $f(x) \in X_D$ olsun. Öyleyse $I_{D,b}^x(f)$ kümesi boş kümeden farklıdır. $D_1(x_0, f(x_0)) < \infty$ olacak biçimde $x_0 \in X_D$ seçilsin. $D_1(y, f(y)) \leq K D_1(x, y)$ olduğundan, öyle bir $x_1 \in I_{D,\beta}^{x_0}(f)$ vardır ki,

$$D_1(x_1, f(x_1)) \leq K D_1(x_0, x_1) \quad (4.24)$$

elde edilir. $x_1 \in I_{D,\beta}^{x_0}(f)$ iken $x_1 \in f(x_0)$ ve buradan da aşağıdaki eşitsizliği elde edilir;

$$\beta D_1(x_0, x_1) \leq D_1(x_0, f(x_0)) < \infty. \quad (4.25)$$

$x_1 \in X_D$ seçimini $D_1(x_1, f(x_1)) < \infty$ olacak biçimde yapılınsın. $D_1(y, f(y)) \leq K D_1(x, y)$ olduğundan öyle bir $x_2 \in I_{D,\beta}^{x_1}(f)$ vardır ki,

$$D_1(x_2, f(x_2)) \leq K D_1(x_1, x_2) \quad (4.26)$$

elde edilir. $x_2 \in I_{D,\beta}^{x_1}(f)$ seçiminden $x_2 \in f(x_1)$ ve

$$b D_1(x_1, x_2) \leq D_1(x_1, f(x_1)) < \infty \quad (4.27)$$

bulunur. Bu şekilde seçim yapmaya devam edilirse, $x_{n+1} \in M$ alınırsa

$D_1(x_{n+1}, f(x_{n+1})) < \infty$ olur. $D_1(y, f(y)) \leq K D_1(x, y)$ ' den öyle bir $x_{n+1} \in I_{D,\beta}^{x_n}(f)$ vardır ki,

$$D_1(x_n, f(x_n)) \leq K D_1(x_n, x_{n+1}) \quad (4.28)$$

Eş. 4.28 sağlanır. $x_{n+1} \in I_{D,\beta}^{x_n}(f)$ ' den $x_{n+1} \in f(x_n)$ elde edilir ve

$$\beta D_1(x_n, x_{n+1}) \leq D_1(x_n, f(x_n)) < \infty \quad (4.29)$$

olur. Buradan $x_{n+1} \in f(x_n)$ iken

$$\beta D_1(x_{n+1}, x_{n+2}) \leq D_1(x_n, f(x_{n+1})) \leq K D_1(x_n, x_{n+1}), \quad (4.30)$$

elde edilir. Bu da aşağıdaki Eş. 4.31' i verir;

$$\beta D_1(x_{n+1}, f(x_{n+1})) \leq D_1(x_n, f(x_{n+1})) \leq K D_1(x_n, f(x_n)). \quad (4.31)$$

Yine devam edersek, $\frac{K}{\beta} < 1$ her $x \in X_D$ için

$$D_1(x_{n+1}, f(x_{n+1})) \leq \frac{K}{\beta} D_1(x_n, f(x_n)) \quad (4.32)$$

ve $\sum_{n=1}^{\infty} D_1(x_n, x_{n+1}) < \infty$ iken

$$D_1(x_{n+1}, f(x_{n+1})) \leq \left(\frac{K}{\beta}\right)^n D_1(x_0, x_1), \quad (4.33)$$

elde edilir. $\{x_n\}$ dizisi D -kuvvetli Cauchy ve X_D uzayı D -kuvvetli tam ise aşağıdaki Eş. 4.34 elde edilir;

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} D_1(x_n, x_{n+1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} D_1(x_n, f(x_n)). \quad (4.34)$$

$D_1(x, f(x))$ D -alt-yarı sürekli olduğundan, $f(z) \in X_D$ için,

$$0 \leq D_1(z, f(z)) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} D_1(x_n, f(x_n)); \quad (4.35)$$

elde ederiz ki böylece $z \in f(z)$ bulunur.

4.4. Uygulama

Çoğul değerli dönüşümlerin hangi alanlarda nasıl uygulamalar buldukları bu bölümde açıklanmış ve örneklendirilmiştir. Bu alanlardan ve uygulamalarından bahsedeceğimiz ilki, modüler vektör uzayları için olan çoğul değerli dönüşümler Khamsi ve diğerleri tarafından verilmiştir [22]. Burada, modüler anlamda düzgün normal yapı özelliğine sahip modüler vektör uzayları için düzgün Lipschitz dönüşümleri yardımıyla sabit noktanın varlığı araştırılmış ve gerekli koşullar ortaya konmuştur. Bulunan sonuçlar değişken üslü uzaylara da uygulanmıştır. Başka bir uygulama olarak Padcharoen ve diğerlerinin çalışması da açıklayıcı bir örnektir [39]. Bu örnekte de basit diferansiyel denklemler, kısmi diferansiyel denklemler ve sınır değer problemi için çözümün varlığını ve teklğini göstermek için, Banach'ın tezinde olduğu gibi, sabit nokta teoremlerinden yararlanılmıştır ve genelleştirilmiş büzülme dönüşümü yardımıyla bazı sabit nokta teoremlerini ispatlanmıştır.

Sinirbilim, tıbbi görüntüleme, bilgisayar grafikleri, yer bilim ve akışkanlar dinamiği gibi sayısız alanda kullanışlı olan Moebius şeridi ve Klein şişesi gibi topolojik yapıların bilgisayar modellemesini oluşturabilmek için cebirsel topolojiden yararlanarak n-boyutlu yüzeylerin özellikleri araştırılmıştır. Çünkü, örneğin Moebius şeridi bir uçak kanadının temel parçalarından biridir. Şerit tipindeki yapıların teknik ve fiziksel özellikleri, şerit tanım kümesi olarak alındığında kısmi diferansiyel denklemin çözümü yoluyla da tanımlanabilir. Aynı işlemler nano-teknolojik bir yapı ve biyolojik bir ağla ilgili problemlerin tanımlanmasında da kullanılır. Örneğin, kanın akışı ya da yoldaki trafiğin akışı graflar üzerindeki kısmi diferansiyel denklem çözümleriyle ifade bulur. Burada kullanılan nesnelere dijital nesnelere olarak adlandırılıp graflarla ifade edilmiştir ve üzerlerinde topolojik özellikler tanımlanmıştır. İçlerinde buldukları yapı da dijital topolojik uzay olarak tanımlanmıştır [32].

Şimdi, GMMU üzerinde, G bir graf olmak üzere, grafların kümesi $\mathcal{G} := \{G : V(G) = B_w, \Delta \subset E(G) \text{ ile yönlü bir graf} \}$ ile verilsin. Bu \mathcal{G} kümesinden alınan bir graf üzerinde bir homojen olmayan lineer parabolik kısmi diferansiyel denklem için başlangıç değer problemi aşağıda incelenmiştir [28]:

Diferansiyel denklemde türevli ifade iki ya da daha fazla değişkene bağlıysa kısmi diferansiyel denklem adını alır. Örneğin,

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = G \quad (4.36)$$

ifadesinde u bağımlı değişken, x, y bağımsız değişkenler ve A, B, C, D, E, F, G' den elde edilen diskriminant $B^2 - 4AC$ yardımıyla eğer $B^2 - 4AC < 0$ ise eliptik, $B^2 - 4AC > 0$ ise hiperbolik ve $B^2 - 4AC = 0$ ise parabolik denklem olarak sınıflandırılır.

$$\begin{cases} f_t(x, t) = f_{xx}(x, t) + S(x, t, f(x, t), f_x(x, t)), -\infty < x < \infty, 0 < t \leq T, \\ f(x, 0) = \phi(x) \geq 0, \end{cases} \quad (4.37)$$

aynı değerli $x \in X_D$ için, S sürekli ve ϕ sürekli diferansiyellenebilir, ϕ ve ϕ' sınırlı olsun. Eş. 4.37 probleminin çözümü için, $I = [0, T]$ olduğunda $\mathbb{R} \times I$ üzerinde tanımlı $f \equiv f(x, t)$ fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlar:

(i) $f, f_t, f_x, f_{xx} \in C(\mathbb{R} \times I)$ (Burada $C(\mathbb{R} \times I)$ tüm reel değerli fonksiyonların kümesidir.)' dir.

(ii) f, f_x fonksiyonları $\mathbb{R} \times I$ da sınırlıdır.

(iii) $f_t(x, t) = f_{xx}(x, t) + S(x, t, f(x, t), f_x(x, t)), (x, t) \in \mathbb{R} \times I.$

(iv) Tüm $x \in \mathbb{R}$ için $f(x, 0) = \phi(x) \geq 0$ 'dır.

Eş.4.37' de verilen diferensiyel denklem problemi aşağıdaki integral denklem problemine, her $x \in \mathbb{R}$ ve $0 < t \leq T$ için

$$K(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \quad (4.38)$$

olduğunda denktir. Yani

$$f(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x - \delta, t) \phi(\delta) d\delta + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} K(x - \delta, t - u) S(\delta, u, f(\delta, u), f_x(\delta, u)) d\delta du \quad (4.39)$$

denkleminin çözümü Eş. 4.37 denklem sisteminin çözümünü verir.

$$\|f\| := \sup_{x \in \mathbb{R}, t \in I} |f(x, t)| + \sup_{x \in \mathbb{R}, t \in I} |f_x(x, t)| \quad (4.40)$$

için

$$B := \{f(x, t) : f, f_x \in C(\mathbb{R} \times I), \|f\| < \infty\} \quad (4.41)$$

alalım. D_1 fonksiyonunu B' de

$$D_1(x, y) := \frac{1}{\lambda} \omega_1(x, y) = \frac{1}{\lambda^2} |x - y| \quad (4.42)$$

şeklinde verilsin. Açıktır ki, B_ω için D -tam ve üreticilerinden bağımsızdır. D_1 bir GMM' dir, alt-yarı süreklili ve Feng-Liu-tipi sağladığı kolayca gösterilebilir.

4.4.1 Teorem

Problemi aşağıdaki gibi alınsın:

$$\begin{aligned} f_t(x, t) &= f_{xx}(x, t) + S(x, t, f(x, t), f_x(x, t)), \quad -\infty < x < \infty, 0 < t \leq T, \\ f(x, 0) &= \phi(x) \geq 0 \end{aligned} \quad (4.43)$$

ve alınsın ki;

- (i) $|s| < c$ ve $|p| < c$ ile $c > 0$ için $S(x, t, s, p)$ fonksiyonu her $\mathbb{R} \times I$ kompakt alt kümesinde x ve t ' de düzgün Hölder süreklidir.
- (ii) $q \in (0, 1)$ için $c_S \leq T + 2\pi^{-\frac{1}{2}} T^{\frac{1}{2}} \leq q$ sağlayan $s_1 \leq s_2$ ve $p_1 \leq p_2$ olduğunda $(s_1, p_1), (s_2, p_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ için

$$0 \leq \frac{1}{\lambda} S[(x, t, s_2, p_2) - S(x, t, s_1, p_1)] \quad (4.44)$$

$$c_S \leq \left[\frac{s_2 - s_1 + p_2 - p_1}{\lambda} \right] \quad (4.45)$$

olacak biçimde c_S sabiti vardır. (iii) s ve p sınırlı olduğunda S sınırlıdır.

O zaman problem bir çözüme sahiptir.

İspat

$x \in B_\omega$ yukarıdaki problemin çözümü olması için gerek ve yeter şart $x \in B_\omega$ integral denklemin çözümü olmasıdır. G grafımı $V(G) = B_\omega$ ve $E(G) = \{(z, v) \in B_\omega \times B_\omega : z(x, t) \leq v(x, t) \text{ ve } z_x(x, t) \leq v_x(x, t) \text{ her bir } (x, t) \in \mathbb{R} \times I\}$ ile alalım. $E(G)$ kısmi sıralı ve $(B_\omega, E(G))$ (A) özelliğini sağlasın.

(A) Özelliği: $(V(G), G)$ ikilisine $V(G)$ ' den alınan herhangi bir $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi için

$n \rightarrow \infty$ iken $x_n \rightarrow x$ ve $(x_n, x_{n+1}) \in E(G)$ olduğunda her $n \in \mathbb{N}$ için $(x_n, x) \in E(G)$ oluyorsa, (A) özelliğine sahiptir denir.

$f : B_\omega \rightarrow B_\omega$ dönüşümü $x \in \mathbb{R}$ için

$$f(u(x, t)) := \int_{-\infty}^{\infty} K(x - \delta, t) \phi(\delta) d\delta + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} K(x - \delta, t - u) S(\delta, u, f(\delta, u), f_x(\delta, u)) d\delta du \quad (4.46)$$

sağlıyorsa problemi çözdüğümüz zaman çözüm f' nin sabit noktasının varlığını verir. $(z, v), (z_x, v_x), (f(z), f(v)), (f(z_x), f(v_x)) \in E(G)$ ve f' nin tanımından ve (ii)' den;

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\lambda} |f(v(x, t)) - f(z(x, t))| \\ & \leq \frac{1}{\lambda} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} K(x - \delta, t - u) |S(\delta, u, v(\delta, u), v_x(\delta, u)) - S(\delta, u, z(\delta, u), z_x(\delta, u))| d\delta du \\ & \leq \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} K(x - \delta, t - u) c_S \left\{ \frac{1}{\lambda} \|v(\delta, u) - z(\delta, u) + v_x(\delta, u) - z_x(\delta, u)\| \right\} d\delta du \\ & \leq c_S D_1(z, v) \end{aligned} \quad (4.47)$$

dir. Buradan,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\lambda} |f_x(v(x, t)) - f_x(z(x, t))| \leq c_S D_1(z, v) \int_{-\infty}^{\infty} K(x - \delta, t) \phi(\delta) d\delta \\ & \leq 2\pi^{-\frac{1}{2}} T^{\frac{1}{2}} c_S D_1(z, v) \end{aligned} \quad (4.48)$$

elde edilir.

Çözümler beraber ele alınırsa,

$$\begin{aligned} D_1(f(z), f(v)) & \leq (T + 2\pi^{-\frac{1}{2}} T^{\frac{1}{2}}) c_S D_1(z, v) \\ D_1(f(z), f(v)) & \leq c D_1(z, v), \quad c \in (0, 1) \\ |f(z) - f(v)| & \leq \lambda^2 |z - v|, \quad \lambda \in (0, 1) \end{aligned} \quad (4.49)$$

bulunur. $b \in (0, 1)$ için $b D_1(z, v) \leq D_1(z, f(z))$ iken Feng-Liu'nun bakış açısıyla;

$$\begin{aligned} \lambda^2 |v - f(v)| &\leq \lambda^2 H_d(f(z), f(v)) \leq \lambda^2 |z - v| \\ d(v, f(v)) &\leq H_d(f(z), f(v)) \leq d(z, v) \\ D_1(v, f(v)) &\leq H_D(f(z), f(v)) \leq D_1(z, v) \end{aligned} \tag{4.50}$$

Buradan son teoremin ifadesinde olduğu gibi, $z = f(z)$ sağlayan $z \in B_w$ vardır ki problemin çözümü olur.



5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tezin girişinde tek ve çoğul değerli dönüşümler için sabit nokta teoremleri hem teorik hem de uygulamalı olarak tarihsel gelişimiyle beraber anlatılmıştır.

İkinci bölümünde temel tanım ve teoremler verilerek ilerleyen bölümlerde sık sık kullanılan tanım ve teoremlere kısa bir göz atılması uygun görülmüştür.

Üçüncü bölümde tek değerli sabit nokta dönüşümleri genelleştirilmiş modüler metrik uzaylarda Banach ve Ćirić anlamında verilmiştir.

Dördüncü bölümde Caristi ve Feng-Liu tipindeki sabit nokta teoremleri çoğul değerli dönüşümler için topolojik yapısı da göz önünde bulundurularak incelenmiştir. Konuyu daha anlaşılır hale getirmek adına bu teoremlerin bilindik diferansiyel problemlerin çözümünde kullanılmasıyla uygulamada irdelenmiştir.

Bu tezde güncel bilgiler veriler yardımıyla sabit nokta literatüründe var olan çalışmalar genişletilmiştir. Banach Büzülme Dönüşümü İlkesi ve Sabit Nokta Teorisi üzerine çalışmalar birçok alanda mevcuttur ve sürekli yeni alanlarda yeni çalışmalar yapılmaya devam etmektedir. Hatta okuyucu bu yazıyı okurken bile her an bir tanesinin yayınlanması muhtemeldir. Bu yüzden bu tezde yapılan çalışmalar genelleştirilmiş modüler metrik uzaylara sadece giriş niteliğindedir ve çok farklı yönlerde genişletilebilir.

Son yıllarda elektrik yüklü akışkanlar(akıllı sıvılar, örneğin lityum polimetarilit) üzerine yapılan çalışmaların modellenmesinde Lebesgue ve Sobolev uzaylarından, özellikle L_p ve $W^{1,p}$, p sabit iken faydalanılmaktadır. Burada klasik teknikle Dirichlet enerji problemi enerjiyi ifade eden fonksiyonele p' nin değişken olması ile çevirilmektedir. Bu da doğal olarak modüler ile tanımlanmaktadır [12]. Yani bu problem Luxemburg normu ile ifade edilmektedir. Modüler metrik kavramı ile bu problemi ele almak işlemleri daha da basitleştirmiştir. Bu yüzden GMMU yapısı gelecek çalışmalar için daha da fazla uygulama alanı bulacaktır.



KAYNAKLAR

1. Almezal, S., Ansari, Q. H. and Khamsi, M.A. (2014). *Topics in Fixed Point Theory*. Springer International Publishing Switzerland, 1-101.
2. Banach, S. (1922). Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leurs applications aux équations intégrales. *Fundamenta Mathematicae*, 3(1), 133-181.
3. Khamsi, M. A., Kozłowski, W. M. (2015). *Fixed point theory in modular function spaces*. Springer/Birkhauser, New York.
4. Chistyakov, V. V. (2010). Modular metric spaces, I: Basic concepts. *Nonlinear Analysis*, 72(1), 1-14.
5. Chistyakov, V. V. (2010). Modular metric spaces, II: Application to superposition operators. *Nonlinear Analysis*, 72(1), 15-30.
6. Ćirić, L.B. (1974). A generalization of Banach's contraction principle. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 45, 267-273.
7. Nadler, S.B.Jr. (1969). Multi-valued contraction mappings. *Pacific Journal of Mathematics*, 30, 475-488.
8. Khamsi, M. A., Kirk, W. A. (2001). An Introduction to Metric Spaces and Fixed Point Theory. *John Wiley, New York*.
9. Khamsi, M.A., Kozłowski, W.A. and Reich, S. (1990). Fixed point theory in modular function spaces. *Nonlinear Analysis*, 14, 935-953.
10. Nakano, H. (1950). *Modulated Semi-Ordered Linear Spaces*. Maruzen, Tokyo.
11. Musielak, J. (1983). *Orlicz Spaces and Modular Spaces*. Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1034-226.
12. Abdou, A.A.N., Khamsi, M.A., (2014). Fixed points of multivalued contraction mappings in modular metric spaces. *Fixed Point Theory and Applications* , 249.
13. Jleli, M., Samet, B. (2015). A Generalized Metric Space and Related Fixed Point Theorems. *Fixed Point Theory and Applications* , 61(14).
14. Czerwik, S. (1993). Contraction mappings in b-metric spaces. *Acta Mathematica et Informatica Universitatis Ostraviensis*, 1, 5-11.
15. Hitzler, P, Seda, A. K. (2000). Dislocated topologies. *Journal of Electrical Engineering*, 51(12), 3-7.

16. Chistyakov, V.V. (2015). *Metric Modular Spaces Theory and Applications*. SpringerBriefs in Mathematics, Springer: Cham, Switzerland.
17. Khamsi, M.A. (2015). Generalized metric spaces: A survey. *Journal of Fixed Point Theory and Applications*, 17, 455-475.
18. Karapinar, E., O'Regan, D., de Hierro, A.F.R.L. and Shahzad, N. (2016). Fixed point theorems in new generalized metric spaces. *Journal of Fixed Point Theory and Applications*, 18, 645-671.
19. Turkoglu, D., Manav, N. (2019). Feng-Liu Type Fixed Point Results for Multivalued Mappings in GMMS. *Mathematics*, 7(1031).
20. Feng, Y., Liu, S. (2006). Fixed point theorems for multi-valued contractive mappings and multi-valued Caristi type mappings. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 317, 103-112.
21. Abdoua, A.A.N., Khamsi, M.A. (2017). Fixed point theorems in modular vector spaces. *Journal of Nonlinear Sciences and Applications*, 10, 4046-4057.
22. Alfuraidan, M.R., Khamsi, M.A. and Manav, N. (2017). A Fixed Point Theorem for Uniformly Lipschitzian Mappings in Modular Vector Spaces. *Filomat*, 31, 5435-5444.
23. Altun, I., Arifi, N.A., Jleli, M., Lashin, A. and Samet, B. (2016). Feng-Liu type fixed point results for multivalued mappings on JS-metric spaces. *Journal of Nonlinear Sciences and Applications*, 9, 3892-3897.
24. Berinde, M., Berinde, V. (2007). On a general class of multi-valued weakly Picard mappings. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* , 326, 772-782.
25. Bin Dehaish, B.A.B., Latif, A. (2012). Fixed point results for multivalued contractive maps. *Fixed Point Theory and Applications*, 61.
26. Caristi, J. (1976). Fixed point theorems for mappings satisfying inwardness conditions. *Transactions of the American Mathematical Society*, 215, 241-251.
27. Arutyunov, A.V., Gel'man, B.D., Zhukovskiy, E.S. and Zhukovskiy, S.E. (2019). Caristi-like Condition, Existence of Solutions to Equations and Minima of Functions in Metric Spaces. *Fixed Point Theory*, 20, 31-58.
28. Borisut, P.; Khammahawong, K. and Kumam, P. (2018). Fixed Point Theory Approach to Existence of Solutions with Differential Equations; *Differential Equations*, IntechOpen, London, UK.
29. Ćirić, L.B. (2009). Multi-valued nonlinear contraction mappings. *Nonlinear*

- Analysis*, 71, 2716–2723.
30. Ćirić, L.B., Ume, J.S. (2002). Common fixed point theorems for multi-valued nonself mappings. *Publicationes Mathematicae Debrecen*, 60, 359-371.
 31. Daffer, P.Z., Kaneko, H. (1995). Fixed points of generalized contractive multivalued mappings. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 192, 655-666.
 32. Evako, A. V. (2017). Structure of a Parabolic Partial Differential Equation on Graphs and Digital spaces. Solution of PDE on Digital Spaces: a Klein Bottle, a Projective Plane, a 4D Sphere and a Moebius Band. *Applied Mathematics and Physics*, 5(1), 19-27.
 33. Benavides, T.D., Khamsi, M.A. and Samadi, S. (2001). Uniformly Lipschitzian mappings in modular function spaces. *Nonlinear Analysis*, 46, 267-278.
 34. Hussain, N., Yasmin, N. and Shafqat, N. (2014). Multi-Valued Ćirić Contractions on Metric Spaces with Applications. *Filomat*, 28, 1953-1964.
 35. Kamran, T., Kiran, Q. (2011). Fixed point theorems for multi-valued mappings obtained by altering distances. *Mathematical and Computer Modelling*, 54, 2772-2777.
 36. Klim, D., Wardowski, D. (2007). Fixed point theorems for set-valued contractions in complete metric spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 334, 132-139.
 37. Khamsi, M.A., Kozłowski, W.M. (2010). On asymptotic pointwise contractions in modular function spaces. *Nonlinear Analysis*, 73, 2957-2967.
 38. Mizoguchi, N., Takahashi, W. (1989). Fixed point theorems for multivalued mappings on complete metric spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 141, 177-188.
 39. Padcharoen, A., Kumam, P. and Gopal, D. (2017). Coincidence and periodic point results in a modular metric spaces endowed with a graph and applications. *Creative Mathematics and Informatics*, 26, 95-104.
 40. Reich, S. (1983). Some problems and results in fixed point theory. In *Topological Methods in Nonlinear Functional Analysis*. *Contemporary Mathematics*, Toronto, ON, Canada, American Mathematical Society: Providence, RI, USA. 21, 179-187.
 41. Suzuki, T. (2008). Mizoguchi-Takahashi's fixed point theorem is a real generalization of Nadler's. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 340, 752-755.

42. Turkoglu, D., Kilinc, E. (2016). Some Fixed Point Results for Caristi Type Mappings in Modular Metric Spaces with an Application. *International Journal of Nonlinear Analysis and Applications* , 12, 15-21.
43. Turkoglu, D., Manav, N. (2018). Fixed Point Theorems in New Type of Modular Metric Spaces. *Fixed Point Theory and Applications*, 25.



ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, Adı : MANAV, Nesrin
 Uyruğu : T.C.
 Doğum tarihi ve yeri : 29/03/1988, Muğla
 Medeni hali : Bekar
 Telefon : 0 531 630 21 13
 e-mail : nmanav@erzincan.edu.tr,
 nesrinmanav2@gmail.com.



Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Doktora	Gazi Üniversitesi/Matematik Böl.	Devam ediyor.
Yüksek lisans	Atatürk Üniversitesi/Matematik Böl.	2013
Lisans	Cumhuriyet Üniversitesi/Matematik Eğt.	2010
Lise	Ortaca Lisesi	2005

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2011-Halen	Erzincan Binali Yıldırım Üniversitesi	Araştırma Görevlisi

Yabancı Dil

İngilizce, İtalyanca, Japonca.

Yayımlar

1. Turkoglu, D., Manav, N. (2018). Fixed Point Theorems in New Type of Modular Metric Spaces, *Fixed Point Theory and Applications*, 25.
2. D. Turkoglu, N. Manav, (2019). Feng-Liu Type Fixed Point Results for Multivalued Mappings in GMMS, *Mathematics*, 7, 1031.

Uluslararası Bildiriler

1. Turkoglu, D., Manav, N. (Sep 4-8, 2019). Some Fixed Point Results on Modular \mathcal{F} -Metric Spaces, ICMS-III(3rd International Conference on Mathematical Sciences) Maltepe University, Istanbul, Turkey.
2. Turkoglu, D., Manav, N. (Aug 27-30, 2019). Common Fixed Point Results On Modular \mathcal{F} -Metric Spaces And An Application, ICEMSA-8(8th International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications) University of Baku, Baku, Azerbaijan.
3. Turkoglu, D., Manav, N. (Jul 15, 2016). Generalized Modular Metric Spaces and Their Application, ICAA(International Conference on Analysis and Its Applications), Ahi Evran Univeristy, Kirsehir, Turkey.
4. Manav, N. (2016, 11 Oct). On Generalized Modular Metric Spaces. National University of Ireland Galway, Galway, Ireland.

Ulusal Bildiriler

1. Manav, N., Türkoğlu, D. (2018, 12-15 Eylül). Modüler Metrik Uzaylarda Graf Yapısı Üzerine Sabit Nokta Teoremleri. 31. Ulusal Matematik Sempozyumu, Erzincan Binali Yıldırım Üniversitesi, Erzincan.

Hobiler

Teknoloji: Office, Word, Excel, Scientific, Maple, Latex, C++, Web.

Spor: Koşu, Yüzme, Savunma Sporları, Eşli Danslar, Binicilik, Rafting.



GAZİ GELECEKTİR..