



**TC**

**ÇANAKKALE ONSEKİZ MART ÜNİVERSİTESİ**

**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**



**BAZI ÖZEL EĞRİLERİN DOĞAL ÇİFTLERİ**

**ÜZERİNE**

**Duygu YENİÇIRAK**

**Matematik Anabilim Dalı**

**ÇANAKKALE**

**Not: Tez kapağı yüksek lisans tezlerinde “Turkuaz”, doktora tezlerinde “Mavi” dir. (Tez basımı aşamasında bu sayfa basılmayacaktır. Tez dış kapak örneğidir)**

**TC**  
**ÇANAKKALE ONSEKİZ MART ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**  
**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**BAZI ÖZEL EĞRİLERİN DOĞAL ÇİFTLERİ**  
**ÜZERİNE**

**Duygu YENİÇIRAK**

**Matematik Anabilim Dalı**

Tezin Sunulduğu Tarih: **20/01/2020**

**Tez Danışmanı:**

**Doç. Dr. Çetin CAMCI**

**ÇANAKKALE**

Duygu YENİÇIRAK tarafından Doç. Dr. Çetin CAMCI yönetiminde hazırlanan ve 20/01/2020 tarihinde aşağıdaki jüri karşısında sunulan “**Bazı Özel Eğrilerin Doğal Çiftleri Üzerine**” başlıklı çalışma, Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**’nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak oy birliği ile kabul edilmiştir.

## **JÜRİ**

Prof. Dr. Kazım İLARSLAN .....

**Başkan**

Doç. Dr. Çetin CAMCI .....

**Üye**

Dr. Öğr. Üyesi Mehmet GÜMÜŞ .....

**Üye**

Prof. Dr. Levent GENÇ

Müdür

Fen Bilimleri Enstitüsü

Sıra No: .....

## İNTİHAL (AŞIRMA) BEYAN SAYFASI



**Bu tezde görsel, işitsel ve yazılı biçimde sunulan tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uyularak tarafımdan elde edildiğini, tez içinde yer alan ancak bu çalışmaya özgü olmayan tüm sonuç ve bilgileri tezde kaynak göstererek belirttiğimi beyan ederim.**

Duygu YENİÇIRAK

## TEŞEKKÜR

Bu tezin gerçekleŐtirilmesinde, üç yıl boyunca bilgilerini bizlerle paylaŐan, her sorumuza sabırla cevap veren ve her sıkıntımızda bir an olsun desteğini esirgemeyen saygı değer danışman hocam Doç. Dr. etin CAMCI'ya, tezin düzenlemesinde önemli katkıları olan Dr. Öğr. Üyesi Mehmet GÜMÜŞ'e, çalışma süresince yanımda olan çalışma arkadaŐım Burhan BİLGİN'e, hayatımın her döneminde maddi ve manevi tüm desteğini gösteren canım aileme sonsuz teŐekkürlerimi sunarım.

Duygu YENİÇIRAK  
anakkale, Ocak 2020



## SİMGELER VE KISALTMALAR

$\mathbb{R}$	Reel vektör uzayı
$\mathbb{R}^n$	$n$ -boyutlu standart reel vektör uzayı
$\mathbb{R}^3$	3-boyutlu reel vektör uzayı
$E^n$	$\mathbb{R}^n$ uzayı ile birleştirilen afin uzay
$I$	$\mathbb{R}$ 'nin açık alt aralığı
$\bar{D}$	3-boyutlu Öklid uzayında Darboux göstergesi
$T$	$\gamma$ eğrisinin teğet (tanjant) vektör alanı
$N$	$\gamma$ eğrisinin asli normal vektör alanı
$B$	$\gamma$ eğrisinin binormal vektör alanı
$\tau$	$\gamma$ eğrisinin torsiyonu
$\kappa$	$\gamma$ eğrisinin eğriliği
$T_B$	$\gamma_B$ eğrisinin teğet vektör alanı
$N_B$	$\gamma_B$ eğrisinin asli normal vektör alanı
$B_B$	$\gamma_B$ eğrisinin binormal vektör alanı
$\tau_B$	$\gamma_B$ eğrisinin torsiyonu
$\kappa_B$	$\gamma_B$ eğrisinin eğriliği
$T_{\bar{D}}$	$\gamma_{\bar{D}}$ eğrisinin teğet vektör alanı
$N_{\bar{D}}$	$\gamma_{\bar{D}}$ eğrisinin asli normal vektör alanı
$B_{\bar{D}}$	$\gamma_{\bar{D}}$ eğrisinin binormal vektör alanı
$\tau_{\bar{D}}$	$\gamma_{\bar{D}}$ eğrisinin torsiyonu
$\kappa_{\bar{D}}$	$\gamma_{\bar{D}}$ eğrisinin eğriliği

## ÖZET

### BAZI ÖZEL EĞRİLERİN DOĞAL ÇİFTLERİ ÜZERİNE

Duygu YENİÇIRAK

Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Doç. Dr. Çetin CAMCI

20/01/2020, 42

Bu tez çalışması 5 ana bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, giriş ana başlığı altında diferensiyel geometrinin kullanım alanları ve eğriler teorisi ile ilgili yapılmış önceki çalışmalardan bahsedildi. İkinci bölümde, temel tanım ve teorem ana başlığı altında tezin ilerleyen bölümlerinde kullanılacak gerekli bilgilere yer verildi. Üçüncü bölümde, Öklid üç uzayında normal ve rektifyan küresel eğriler ana başlığı altında, sırasıyla normal küresel eğriler ve rektifyan küresel eğriler ile ilgili çalışmalara yer verildi. Dördüncü bölümde, bazı özel eğrilerin doğal çift eğrileri ana başlığı altında, doğal çift eğrileri ile Camcı'nın (2019) çalışmasında tanımladığı (2.10) denklemi arasında bir ilişkinin var olduğu gösterildi. Daha sonra bu ilişkiden yola çıkarak Camcı'nın küresel eğriden yine küresel bir eğri elde ettiği denklemin birim hızlı eğrilere uyguladığı (2.10) denklemini bu çalışmada doğal eğri çift denklemi olarak adlandırdık. Camcı (2019), (2020a) ve (2020b) çalışmalarında, bu denklem ile bazı eğri aileleri arasında geçiş yapılabileceğini göstermiştir. Camcı'nın bu doğal eğri çift denklemi ile eğriler arası yapmış olduğu geçişlerden bahsettikten sonra, üçüncü bölümde tanımladığımız normal ve rektifyan küresel eğriler arasında doğal eğri çift denklemi ile geçiş yapılabileceği gösterildi. Son olarak da rektifyan eğrinin doğal çiftinin karakterizasyonu bu doğal eğri çift denklemi ile elde edildi. Beşinci bölümde, bu tezdeki özgün çalışmalardan kısaca bahsedildi ve bu çalışmaların Minkowski uzayının farklı boyutlarında incelenebileceği öne sürüldü.

**Anahtar sözcükler:** Rektifyan Küresel Eğri, Normal Küresel Eğri, Doğal Çift Eğrisi

## ABSTRACT

### ON NATURAL PAIRS OF SOME SPECIAL CURVES

Duygu YENİÇIRAK

Çanakkale Onsekiz Mart University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Master of Science Thesis in Mathematical Science

Advisor: Assoc. Prof. Dr. Çetin CAMCI

01/20/2020, 42

This thesis consists of five chapters. In the first chapter, the use spheres of differential geometry and previous studies on the theory of curves are mentioned under the main title of introduction. In the second chapter, all the concepts to be used in the following sections of the thesis are given under the main title of the basic definition and theorem. In the third chapter, the studies on the normal spherical curves and rectifying spherical curves are given under the main title of normal and rectifying spherical curves in Euclidean 3- spaces, respectively. In the fourth chapter, under the heading of natural pair curves of some special curves, it is shown that there is a relationship between natural pair curves and the equation (2.10) defined by Camcı (2019). Then, based on this relationship, the equation (2.10) in which Camcı's applied to the unit-speed curves of the equation (2.10) which obtained again a global curve from the global curve, we named the natural curve pair equation in this study. Camcı (2019), (2020a) ve (2020b) showed that this equation can be used to switch between some curve families. In this section, after mentioning the transitions between the curves with the natural curve pair equation, it was shown that the transition between the normal and rectifying spherical curves we defined in the third section can be made with the natural curve pair equation. Finally, we obtained the characterization of the natural pair of the rectifying curve with this natural curve pair equation. In the fifth chapter, the original studies in this thesis are briefly mentioned and it is suggested that these studies can be examined in different dimensions of Minkowski space.

**Keywords:** Rectifying Spherical Curve, Normal Spherical Curve, Natural Pair Curves

# İÇİNDEKİLER

## Sayfa No

TEZ SINAVI SONUÇ FORMU .....	ii
İNTİHAL (AŞIRMA) BEYAN SAYFASI .....	iii
TEŞEKKÜR.....	iv
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	v
ÖZET.....	vi
ABSTRACT.....	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	ix
BÖLÜM 1	
GİRİŞ.....	1
BÖLÜM 2	
TEMEL TANIM VE TEOREMLER .....	5
2.1. Üç Boyutlu Öklid Uzayındaki Temel Bilgiler.....	5
2.2. Üç Boyutlu Öklid Uzayında Küresel Eğrilerin Uygulamaları.....	18
BÖLÜM 3 .....	23
ÖKLİD ÜÇ UZAYINDA NORMAL VE REKTİFYAN KÜRESEL EĞRİLER .....	23
3.1. Normal Küresel Eğri .....	23
3.2. Rektifyan Küresel Eğri.....	26
BÖLÜM 4.....	28
BAZI ÖZEL EĞRİLERİN DOĞAL EĞRİ ÇİFTLERİ .....	28
4.1. Doğal Çift Eğrisi.....	28
4.1.1. Bertrand ve Küresel Doğal Çift Eğrisi .....	30
4.1.2. k-Slant Helis ve (k+1)-Slant Helis Doğal Eğri Çifti .....	31
4.1.3. Mannheim Doğal Çift Eğrisi.....	33
4.1.4. Normal Küresel ve Rektifyan Küresel Doğal Eğri Çifti .....	34
4.1.5. Rektifyan Eğrilerin Doğal Eğri Çifti .....	37
BÖLÜM 5	
SONUÇ VE ÖNERİLER.....	39
KAYNAKLAR .....	40
ÖZGEÇMİŞ .....	I

## ŞEKİLLER DİZİNİ

	<b>Sayfa No</b>
Şekil 1. Sağ ve sol dairesel helis .....	7
Şekil 2. Rektifyan düzlem, normal düzlem, oskülatör düzlem .....	11
Şekil 3. Mannheim eğri çifti .....	12
Şekil 4. Bertrand eğri çifti .....	12
Şekil 5. Bertrand eğri.....	19
Şekil 6. Normal Küresel Eğri.....	37



# BÖLÜM 1

## GİRİŞ

Geometri biliminin önemli konularından birisi olan diferensiyel geometri, integral matematik, diferensiyel matematik, lineer cebir ve çok kutuplu cebir metotları kullanılarak geometrideki problemleri araştıran matematiğin bir alanıdır. Diferensiyel geometri, matematiğin diğer alanlarında kullanıldığı gibi bilimin birçok farklı alanında kullanılmaktadır. Bunlara aşağıdaki gibi bazı örnekler verilir.

Fizik bilimi alanında, Einstein'in Genel Görelilik teorisi ve sicim teorisi dâhil olmak üzere teorik çalışmalarında diferensiyel geometriyi sıklıkla kullanmaktadır. Ayrıca çekimsel merkez ve kara deliklerin çalışmalarını açıklamada, Lagrange mekaniği ve Hamilton mekaniğinde uygulamalarında diferensiyel geometrinin bazı temel teoremleri kullanılmaktadır.

Ekonometri alanında Phillips (1958) tarafından yapılan bir çalışmada Phillips eğrisi, değiş-tokuş ve enflasyon-işsizlik gösterimi ile iktisadın temel ilkelerini oluşturmuştur.

Mühendislik alanında sinyal işleme sisteminin kategorileri arasında yer alan ve matematik tekniklerin sıklıkla kullanıldığı dijital sinyal işleme sisteminde sorunların çözümünde diferensiyel geometri kullanılır.

Robot ve bilgisayar modellemelerinde cebirsel geometri metotları, antenlerin yapımında ve canlıların kan akış sistemi ve damar diziliminin nasıl olduğunu açıklamada fraktal geometri kullanılmaktadır.

Diferensiyel geometri; eğrilerin diferensiyel geometrisi, yüzeylerin diferensiyel geometrisi, manifoldlar, kompleks manifoldlar, diferensiyel topoloji, Riemann geometrisi, lif demetler olmak üzere birçok çalışma konularına sahiptir. Bu tez çalışması, eğrilerin diferensiyel geometrisi üzerine olacaktır. Eğriler teorisi, analitik geometrinin kurucusu olan Descartes'in cebir ve geometri arasındaki ilişkiyi ortaya çıkarmasıyla temel bir ilerleme sağlamıştır. Bu gelişim, Descartes (1596-1650) tarafından var olan tüm düzlem geometri problemlerini denklemler yardımıyla ifade edilebileceğini göstermesiyle sağlanmıştır. Bilindiği gibi eğrileri günlük hayatımızda olduğu gibi bilimin birçok alanında görülmektedir. Bunlara aşağıdaki gibi bazı örnekler verilir.

Diferensiyel geometri, kinetik mimaride olduğu gibi mimari çalışmalarda serbest formlu yüzeylerin tasarımı ve üretiminde sıklıkla kullanılmaktadır (Pottmann ve ark., 2008). Mimari tasarımda kemer yapımında zincir eğrileri yer almaktadır. Bunlara örnek olarak Wembley Stadyumu'nun kemeri ve Missouri eyaletindeki St. Louis Gateway kemeri verilir.

Fizik'te bir elektronun elektromanyetik alanda oluşturduğu eğriler, bir hortumdan akan suyun veya havaya atılan bir tenis topunun izlediği yolun parabolik eğri oluşturması ve gökbilimcilerin öncelikli olarak çalıştığı konularından olan gök cisimlerinin ve galaksilerin hareketlerini belirlenmesinde eğriler görülmektedir. Kalpteki elektrik akımının grafiğini gösteren EKG yani elektrokardiyogram işlemlerinde eğrilerin hareketleri hastalığın tanısını belirleme önemli bir husustur.

Eğriler teorisinde özel bir eğri olan helis eğrileri; fizik, tıp, mühendislik, biyoloji ve bilgisayar tasarım gibi sayısız uygulamaları bulunmaktadır. Helis eğrilerinin ilk defa Watson ve Crick (1953) tarafından nükleit asitlerde önemli rollerin bulunduğu gözlemlendi. Bu gözlem DNA'nın moleküler bir modelinin iç içe geçmiş iki helisten oluştuğu üzerine olmuştur. Helis eğrileri; nano yaylar, karbon nano borular, protein yapısında alfa helisleri, DNA çift ve kollajen üçlü sarmal, lipid çift katmanları, Salmonella ve E. colideki bakteriyel flagella, spirochetes bakteri şekilleri, vidalar, yaylar, helis merdivenler ve deniz kabukları gibi birçok yerde bulunmaktadır. Matematiksel olarak helis eğrisi, Lancret (1802) tarafından üç boyutlu Öklid uzayında her noktasındaki teğeti, sabit doğrultuda sabit açı yapan eğri olarak tanımlamıştır. Daha sonra ise Venant (1845) tarafından bir eğrinin genel helis olması, eğrilikler oranının sabit olmasını karşılıklı gerektirdiğini ispatlamıştır. Ayrıca, eğriligi sıfırdan farklı olan helis eğrileri küresel helis olarak adlandırılır. Bilindiği gibi helis eğrileri 0-slant helis eğriler ve slant ise 1-slant helis eğrilerdir. Üç boyutlu Öklid uzayında slant helis eğrilerin ilk olarak tanımı Blum (1965) tarafından verilmesine rağmen gerçek anlamda icadı Izumiya ve Takeuchi (2004) tarafından yapılmıştır. Slant helislerin ve helislerin genel bir hali olan  $k$ -slant helisler ise ilk kez Ali (2010) tarafından tanımlanmıştır.

Bu özel eğrilere ek olarak; Bertrand eğriler, normal eğriler, oskülatör eğriler, rektifyan eğriler, Mannheim eğri, küresel eğriler ve doğal çift eğrileri bilinen diğer bazı eğri aileleridir. Bertrand eğrileri Venant (1845) tarafından ortaya atılan bir açık problem üzerine bulunmuştur. Kısaca bu açık problem, üç boyutlu Öklid uzayında bir eğrinin asli normali başka bir eğrinin asli normali olup olamayacağı sorusuydu. Bu probleme çözüm Bertrand (1850) tarafından gelmiştir. Böyle ikinci bir eğrinin var olabilmesi için gerekli ve yeter koşul verilen bu eğrilerin eğrilik ve torsiyonu arasında sabit katsayı içeren doğrusal bir ilişki olmasıdır ( Parkinson, 1932, s. 649). Bir eğriyi belirlemede kullanılan karakteristik denklem, eğrilik ve torsiyon olmak üzere iki nicel değişkenden oluşmaktadır. Aynı zamanda eğrinin Frenet vektörleri, eğriyi belirlemede kullanılmaktadır. Bir eğrinin frenet vektörleri;  $T$  (teğet),  $N$  (asli normal) ve  $B$  (binormal) vektörleridir. Frenet vektörleri için;  $\{T, N\}$  vektörlerinin gerdiği düzlem oskülatör düzlem,  $\{T, B\}$  vektörlerinin gerdiği düzlem rektifyan düzlem ve

$\{N, B\}$  vektörlerinin gerdiği düzlem ise normal düzlemdir. Sırasıyla bu düzlemlerde yatan eğrilere oskülatör eğri, rektifyan eğri ve normal eğri denir (Struik, 1950). Rektifyan eğri tanımı ilk olarak Chen (2003) tarafından yapılmıştır. Daha sonra Chen (2003), rektifyan eğri olma koşulunu eğrinin eğrilikleri oranının sabit olmayan doğrusal bir fonksiyon olması gerektiğini ispatlamıştır.

Bu çalışmada sıklıkla kullanılan diğer bir özel eğri ise küresel eğrilerdir. Küresel eğriler, bir küre yüzeyinde çizilen ya da yatan eğrilerdir (Karger ve Novak, 1985). Örnek olarak, Seifert'in küresel spirali, küresel helis ve küresel spiraller verilir. Wong (1972), torsiyonun hiçbir yerde sıfır olmadığını varsaymak zorunda kalmadan, bir eğrinin kürede yatması içi gerekli ve yeterli koşulu sağladı. Sonra, Breuer ve Gottlieb (1971) tarafından küresel bir eğriyi karakterize eden diferansiyel denklemin eğrinin eğrilik yarıçapını, torsiyon cinsinden belirlenebileceğini göstermiştir. Ardından Wong (1972), Breuer ve Gottlieb tarafından elde edilen küresel eğri karakterizasyonunun, eğrilik ve burulma üzerinde herhangi bir ön koşul olmaksızın küresel eğri olması için gerekli yeterli koşul olduğunu kanıtlamıştır. Küresel eğriler ile ilgili yapılan çalışmalar incelendiğinde, üç boyutlu Öklid uzayında küresel eğriler yardımıyla birçok özel eğrilerin elde edildiği görülmektedir. Örneğin, Izumiya ve Takeuchi (2002) çalışmalarında küresel eğrilerden Bertand eğrilerin elde edilebileceğini ve aynı zamanda Chen ve Dillen (2005) küresel eğrilerden tüm rektifyan eğrileri elde edilebileceğini çalışmasında göstermiştir. Bilindiği gibi eğrilerin her noktasındaki oskülatör küresi birbirine eşit değildir. Fakat küresel eğriler öyle özel eğrilerdir ki, her noktasındaki oskülatör küresi sabittir ve üzerinde yattığı küreye eşittir. Bu verilerden, üç boyutlu Öklid uzayında küresel eğriler ile oskülatör küre arasında bir ilişkinin var olduğunu açıkça görülmektedir. Bu ilişkiden, küresel eğriler ile başka hangi eğriler arasında nasıl bir ilişki elde edilebilir sorusu ortaya atılmış oldu. Bu soru üzerinden yola çıkarak, üç boyutlu Öklid uzayındaki rektifyan ve normal eğriler ile küresel eğriler arasında bir ilişki bulma arayışına gidildi. Bu ilişkiyi, ele alınan bazı eğrilerin rektifyan, normal ve oskülatör düzlemleri arasında geçişler yapılarak sağlandı. Bu geçişlerden de küresel eğriler ile rektifyan ve normal eğriler arasında bir bağlantı kurulmuş oldu. Bu bağlantı sayesinde, iki yeni özel eğri olan rektifyan küresel ve normal küresel eğriler elde edildi. Daha sonra küresel eğri olma karakterizasyonunun faydalanarak bu yeni özel eğri ailelerin karakteristik denklemleri belirlenmiştir. Elde edilen bu özel eğrilerin varlığı küresel helislerin genel denklemi kullanılarak desteklenmiştir. Böylece bu çalışmayla eğiler teorisine, yeni özel eğri sınıfları olan rektifyan küresel ve normal küresel eğri kavramları kazandırılmıştır.

Öklid üç uzayında her  $\gamma$  Frenet eğrisi için,  $\gamma$  eğrisinin asli normal vektör alanına teğet

bir birim hızlı  $\beta$  eğrisi vardır. Deshmukh, Chen ve Alghanemi (2018) çalışmalarında  $\beta$  eğrisini  $\gamma$  eğrisinin doğal çifti olarak ifade etmişlerdir. Daha sonra; Frenet eğrilerin doğal çift eğrilerinin küresel eğri, helis ve eğriliği sabit olan eğriler olması için gerek ve yeter koşulu belirlenmiştir. Bu tez çalışmasında, Camcı (2019) tarafından tanımlanan,  $\beta'' = \kappa_\beta \gamma'$  eşitliğindeki  $(\gamma, \beta)$  eğri çiftinin bir doğal çift eğrisi olduğunu ve bu doğal çift denkleminde bazı özel eğri aileleri arası geçişlerin sağlanabileceği gösterilmiştir. Aynı zamanda bu doğal çift denklemi ile bazı eğri sınıflarını karakterize eden eğrilik ve burulma ile ilgili denklemler elde edilmiştir.



## BÖLÜM 2

### TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde, tezin ilerleyen bölümlerinde sıklıkla kullanacağımız temel tanımlara ve teoremlere yer verilmiştir.

#### 2.1. Üç Boyutlu Öklid Uzayındaki Temel Bilgiler

**Tanım 2.1.1.**  $B$  kümesi boştan farklı ve  $F$  cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Eğer,  $f: B \times B \rightarrow V$  dönüşümü aşağıdaki iki önermeyi sağlıyorsa  $B$ 'ye  $V$  ile birleşen **Afin uzay** denir. Bu önermeler

- 1)  $\forall P \in B$  ve  $\forall v \in V$  için  $f(P, Q) = v$  olacak şekilde bir tek  $Q \in B$  vektörü vardır.
- 2)  $\forall P, Q, S \in B$  için  $f(P, Q) + f(Q, S) = f(P, S)$ .

biçimindedir (Hacısalihoglu, 1998).

**Tanım 2.1.2.**  $V$ ,  $n$  boyutlu reel vektör uzayı ve  $A$ ,  $V$  ile birleşen afin uzay olsun.  $A$ 'da bulunan  $P_i$  ( $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ ) noktaları için  $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0P_n}\}$  vektör sistemi  $V$ 'nin bir bazını oluşturuyorsa  $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$  kümesine  $A$  afin uzayının bir **afin çatısı** denir. Ayrıca,  $P_0$  noktasına çatının **başlangıç noktası**,  $P_i$  ( $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ ) noktalarına **afin çatının uç noktaları** denir (Hacısalihoglu, 1998).

**Tanım 2.1.3.**  $\mathbb{R}^n$  vektör uzayında Öklid iç çarpımı,

$$\langle, \rangle: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

Burada  $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$  ve  $y = (y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$  şeklinde tanımlanır. Bu iç çarpım yardımıyla  $E^n$ 'de uzaklık ve metrik kavramları tanımlanır. Sonuç olarak  $E^n$  Afin uzayı  **$n$  boyutlu Öklid uzay** adını alır. Burada  $\mathbb{R}^n = \{\vec{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n): x_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n\}$  biçimindedir (Hacısalihoglu, 1998).

**Tanım 2.1.4.**  $E^n$  uzayında  $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$  sıralı  $(n + 1)$ 'li nokta kümesi için  $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0P_n}\}$  vektör sistemi  $\mathbb{R}^n$ 'nin bir ortonormal bazı ise  $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$  çatısına **dik çatı** veya **Öklid çatısı** denir (Hacısalıhoğlu, 1998).

**Tanım 2.1.5.**  $E^n$  uzayında  $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$  dik çatısının her elemanı,

$$\overrightarrow{P_0P} = \sum_{i=1}^n x_i \overrightarrow{P_0P_i}$$

biçiminde yazılır. Böylece,

$$\begin{aligned} x_i: E^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ P &\rightarrow x_i(P) = x_i \end{aligned}$$

biçimindeki,  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  dönüşümler kümesine **Öklid koordinat sistemi** denir (Hacısalıhoğlu, 1998).

**Örnek 2.1.1.**  $E^n$  uzayında,  $E_0 = (0, 0, \dots, 0), E_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, E_n = (0, 0, \dots, 1)$  noktaları **dik çatı** oluşturur (Hacısalıhoğlu, 1998).

**Tanım 2.1.6.**  $E^n$  uzayında  $\{E_0, E_1, \dots, E_n\}$  çatısına **standart Öklid çatısı** veya **dik çatı** denir (Hacısalıhoğlu, 1998).

**Tanım 2.1.7.**  $I$ ,  $\mathbb{R}$ 'nin bir açık alt aralığı olsun.  $\gamma: I \rightarrow E^n$  diferensiyellenebilir dönüşümü  $\forall s \in I$  için  $\gamma'(s) \neq 0$  oluyorsa  $\gamma$  dönüşümüne **n boyutlu uzayda regüler eğri** denir (Sabuncuoğlu, 2004).

**Tanım 2.1.8.**  $I$  kümesi  $\mathbb{R}$  reel vektör uzayının bir açık alt aralığı olmak üzere,

$$\begin{aligned} \gamma: I \subset \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\rightarrow \gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t)) \end{aligned}$$

tanımlanan diferensiyellenebilir fonksiyona **üç boyutlu Öklid uzayında eğri** denir

(O'Neill, 1997).

**Tanım 2.1.9.** Üç boyutlu Öklid uzayı  $E^3$ 'te,  $\gamma$  eğrisi  $I \subset \mathbb{R}$  açık aralığında tanımlansın. Şayet,  $\gamma$  eğrisi  $\forall t \in I$  için  $\|\gamma'(t)\| \neq 0$  şartını gerçekleştiriyor ise  $\gamma$  eğrisine **üç boyutlu Öklid uzayında regüler eğri (düzenli eğri)** denir (O'Neill, 1997).

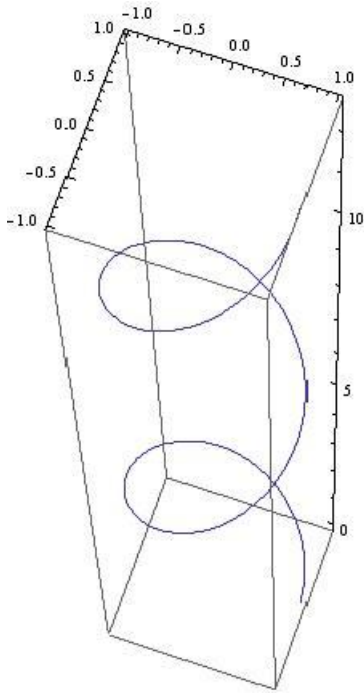
**Örnek 2.1.2.** Üç boyutlu Öklid uzayı  $E^3$ 'te  $r$  ve  $h$  sabitleri sıfırdan büyük olmak üzere,

$$\gamma(t) = (r \cos t, r \sin t, ht)$$

şeklinde bir sağ dairesel helis alınsın. Aynı zamanda,  $h < 0$  sabit değeri için eğri sol dairesel helis olacaktır. Bu eğrinin birinci türevi,

$$\gamma'(t) = (-r \sin t, r \cos t, h) \neq 0$$

şeklinde olduğundan, eğri regüler bir sağ dairesel helistir.  $\gamma$  eğrisi,  $r = 1$  ve  $h = 1$  sabit değerleri için görüntüsü Şekil 1.'deki gibidir. (Millman ve Parker, 1977).



Şekil 1. Sağ ve sol dairesel helis

**Tanım 2.1.10.** Üç boyutlu Öklid uzayı  $E^3$ 'te,  $\gamma$  eğrisi,  $I \subset \mathbb{R}$  açık aralığında tanımlansın. Bu durumda  $a, b \in I$  olmak üzere,

$$\int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$

reel sayısına,  $t = a$  ile  $t = b$  noktaları arasında  $\gamma$  eğrisinin **yay uzunluğu** denir (O'Neill, 1997).

**Tanım 2.1.11.** Üç boyutlu Öklid uzayı  $E^3$ 'te,  $\gamma$  eğrisi,  $I \subset \mathbb{R}$  açık aralığında tanımlansın. Her  $s$  reel sayısı için,

$$\|\gamma'(s)\| = 1$$

şartını sağlıyorsa,  $\gamma$  eğrisine **birim hızlı eğri** denir. Burada  $s$ , eğrinin yay parametresidir (Hacısalıhoğlu, 1998).

**Tanım 2.1.12.**  $\gamma$  eğrisi,  $I \subset \mathbb{R}$  açık aralığında tanımlansın. Eğer  $h: J \rightarrow I$  fonksiyonu,  $J$  açık aralığında diferensiyellenebiliyorsa,  $\gamma$  ve  $h$  fonksiyonlarının bileşkesi olan

$$\gamma \circ h = \beta = \gamma(h): J \rightarrow I$$

biçimindeki  $\beta$  fonksiyonu diferensiyellenebilir bir eğri olmaktadır. Burada  $\beta$  eğrisi  $h$  ile  $\gamma$ 'nın **yeniden parametrizasyonu** olarak adlandırılır (O'Neill, 1997).

**Tanım 2.1.13.** Üç boyutlu Öklid uzayı  $E^3$ 'te,  $T = \gamma'$ ,  $N = \frac{\gamma''}{\|\gamma''\|}$ ,  $B = T \times N$  olmak üzere  $\{T(s), N(s), B(s)\}$  kümesine  $\gamma$  eğrisinin  $\gamma(s)$  noktasındaki **Serret-Frenet çatısı** denir. Ayrıca  $T, N, B$  vektörlerine **Frenet vektör alanları** denir (Sabuncuoğlu, 2004).

**Tanım 2.1.14.** Üç boyutlu Öklid uzayı  $E^3$ 'te,  $\gamma$  eğrisi,  $I \subset \mathbb{R}$  açık aralığında tanımlı birim hızlı bir eğri olsun. Eğrinin birim tanjant vektör alanı  $\gamma' = T$  olmak üzere,  $\gamma$  eğrisinin eğriliği olan  **$\kappa$  reel değerli fonksiyon**,

$$\begin{aligned}\kappa: I &\rightarrow \mathbb{R} \\ s &\rightarrow \kappa(s) = \|T'(s)\| = \|\gamma''(s)\|\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır (O'Neill, 1997).

**Tanım 2.1.15.** Üç boyutlu Öklid uzayı  $E^3$ 'te,  $\gamma$  eğrisi,  $I \subset \mathbb{R}$  açık aralığında tanımlanan birim hızlı eğrisi için bu eğrinin torsiyonu olan  $\tau$  reel değerli fonksiyon,

$$\begin{aligned}\tau: I &\rightarrow \mathbb{R} \\ s &\rightarrow \tau(s) = -\langle B'(s), N(s) \rangle\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır (O'Neill, 1997).

**Tanım 2.1.16.** Üç boyutlu Öklid uzayı  $E^3$ 'te,  $\gamma$  eğrisi,  $\kappa > 0$  eğriliğine sahip birim hızlı bir eğri olsun. Burada  $\gamma$ 'nın **asli normal vektör alanı**  $N$  ve **binormal vektör alanı**  $B$ ,

$$N = \frac{T'}{\kappa}$$

$$B = T \times N$$

şeklinde tanımlanır (O'Neill, 1997).

**Tanım 2.1.17.** Üç boyutlu Öklid uzayı  $E^3$ 'te,  $\gamma$  eğrisinin Frenet elemanları  $\{T, N, B, \tau, \kappa\}$  olmak üzere,

$$D(s) = \tau(s)T(s) + \kappa(s)B(s)$$

tanımlanan vektör alanına,  $\gamma$  eğrisinin **Darboux vektör alanı** denir. Ayrıca,

$$\bar{D}(s) = \frac{D(s)}{\|D(s)\|} = \frac{1}{\sqrt{\kappa^2(s) + \tau^2(s)}} (\tau(s)T(s) + \kappa(s)B(s))$$

vektörüne ise  $\gamma$ 'nın **Darboux göstergesi (Küresel Darboux resmi)** denir (Izumiya ve

Takeuchi, 2002).

**Tanım 2.1.18.** Üç boyutlu Öklid uzayı  $E^3$ 'te,  $\gamma$  eğrisi  $I \subset \mathbb{R}$  açık aralığında tanımlı regüler bir eğri olsun. Böylece  $\gamma$  eğrisinin Frenet elemanları,

$$T(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \quad N(t) = B(t) \times T(t) \quad B(t) = \frac{\gamma'(t) \times \gamma''(t)}{\|\gamma'(t) \times \gamma''(t)\|}$$

$$\kappa(t) = \frac{\|\gamma'(t) \times \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3} \quad \tau(t) = \frac{\det(\gamma'(t), \gamma''(t), \gamma'''(t))}{\|\gamma'(t) \times \gamma''(t)\|^2}$$

şeklinde hesaplanır (O'Neill, 1997).

**Tanım 2.1.19.** Üç boyutlu Öklid uzayı  $E^3$ 'te,  $\gamma$  eğrisi,  $I \subset \mathbb{R}$  açık aralığında tanımlı birim hızlı eğrisinin Frenet vektörlerin dönüşüm formülleri matris notasyonu ile,

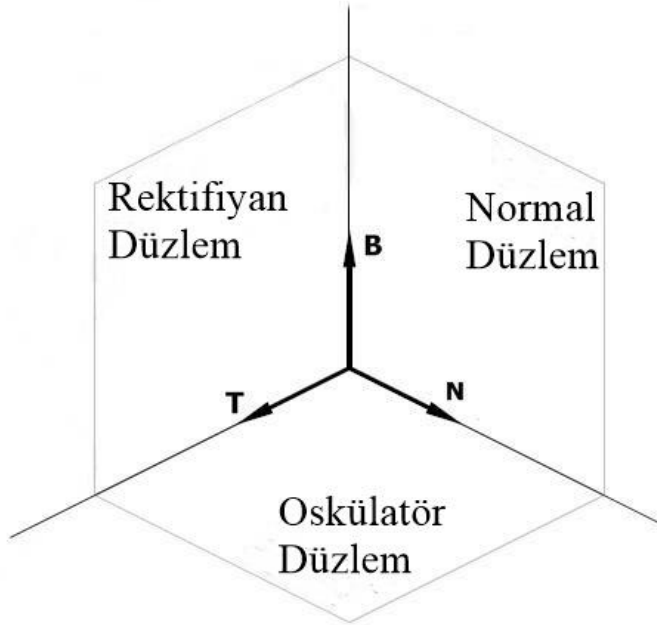
$$\begin{pmatrix} \vec{T}' \\ \vec{N}' \\ \vec{B}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{T} \\ \vec{N} \\ \vec{B} \end{pmatrix}$$

şeklinde verilir (Struik, 1950).

**Tanım 2.1.20.** Üç boyutlu Öklid uzayı  $E^3$ 'te,  $\gamma$  eğrisi,  $I \subset \mathbb{R}$  açık aralığında tanımlı birim hızlı bir eğri olsun. Böylece,

- i.*  $\gamma$  eğrisinin, birim teğet vektör alanı ile asli normal vektör alanının gerdiği düzlem **oskületör düzlem** olarak tanımlanır. Oskületör düzlemde yatan eğriye **oskületör eğri** denir.
- ii.*  $\gamma$  eğrisinin, asli normal vektör alanı ile binormal vektör alanının gerdiği düzlem **normal düzlem** olarak tanımlanır. Normal düzlemde yatan eğriye **normal eğri** denir.
- iii.*  $\gamma$  eğrisinin, birim teğet vektör alanı ile binormal vektör alanının gerdiği düzlem **rektifyan düzlem** olarak tanımlanır. Rektifyan düzlemde yatan eğriye **rektifyan eğri** denir.

Burada oskületör kelimesi **yapışan** veya **öpen**, normal kelimesi **dik anlamında** ve rektifiyan kelimesi **tamamlayan** anlamındadır (Struik, 1950).



Şekil 2. Rektifiyan düzlem, normal düzlem, oskületör düzlem

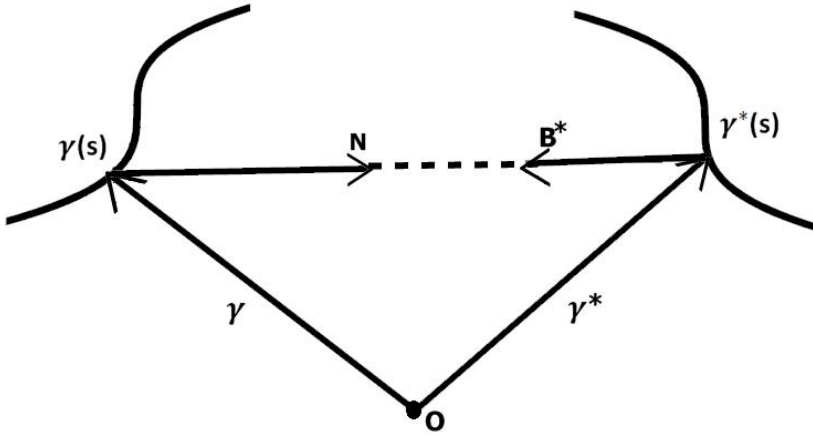
**Teorem 2.1.1.** Üç boyutlu Öklid uzayı  $E^3$ 'te, bir eğrinin oskületör düzlemde yatması için gerek ve yeter koşul, eğrinin düzlemsel eğri ( $\tau = 0$ ) olmasıdır (Struik, 1950).

**Teorem 2.1.2.** Üç boyutlu Öklid uzayı  $E^3$ 'te,  $\gamma$  eğrisi,  $I \subset \mathbb{R}$  açık aralığında tanımlı birim hızlı bir eğri olsun. O halde,  $\gamma$  eğrisinin rektifiyan bir eğri olması için gerek ve yeter koşul,  $\gamma$  eğrisinin eğrilikleri oranının  $s$  yay parametresine bağlı doğrusal bir fonksiyon yani,

$$\frac{\tau(s)}{\kappa(s)} = as + b$$

olmasıdır. Burada  $a \neq 0$  ve  $b$  sabit reel sayılardır (Chen, 2003).

**Tanım 2.1.21.** Üç boyutlu Öklid uzayı  $E^3$ 'te,  $\gamma$  ve  $\gamma^*$  eğrileri,  $I \subset \mathbb{R}$  açık aralığında tanımlı ve bu eğrilerin Frenet elemanları sırasıyla  $\{T, N, B, \tau, \kappa\}$ ,  $\{T^*, N^*, B^*, \tau^*, \kappa^*\}$  olsun. Eğer,  $\gamma$  eğrisinin asli normal vektörü,  $\gamma^*$  eğrisinin binormal vektörü ile çakışiyorsa  $\gamma$  eğrisine **Mannheim eğri** denir. Ayrıca  $\gamma^*$ ,  $\gamma$  eğrisinin bir Mannheim eğri çiftidir ve  $(\gamma, \gamma^*)$  çifti **Mannheim eğri çifti** olarak adlandırılır (Miller, 1905; Liu ve Wang, 2008).



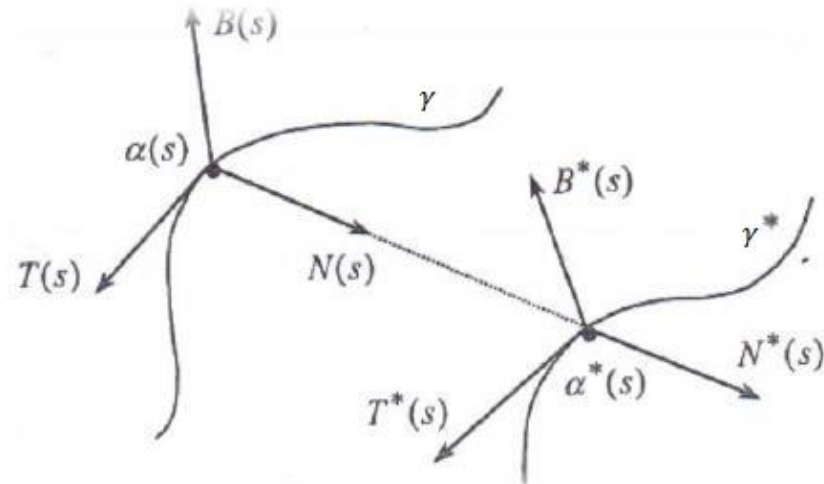
Şekil 3. Mannheim eğri çifti

**Teorem 2.1.3.** Üç boyutlu Öklid uzayı  $E^3$ 'te,  $\gamma$  eğrisi,  $I \subset \mathbb{R}$  açık aralığında tanımlı bir eğri ve eğrilikleri  $\tau, \kappa$  olsun. O halde,  $\gamma$ 'nın Mannheim eğri olması aşağıdaki eşitliğin sağlanmasını çift yönlü gerektirir.

$$\tau^2 + \kappa^2 = k\tau$$

Burada  $k$  bir reel sayıdır (Miller, 1905; Liu ve Wang, 2008).

**Tanım 2.1.22.** Üç boyutlu Öklid uzayı  $E^3$ 'te,  $\gamma$  ve  $\gamma^*$  eğrileri,  $I \subset \mathbb{R}$  açık aralığında tanımlı ve bu eğrilerin Frenet elemanları sırasıyla  $\{T, N, B, \tau, \kappa\}, \{T^*, N^*, B^*, \tau^*, \kappa^*\}$  olsun. Eğrilerin her noktasında asli normal vektörlerinden oluşan  $\{N, N^*\}$  kümesi lineer bağımlı ise  $(\gamma, \gamma^*)$  çiftine **Bertrand eğri çifti** denir (Bertrand, 1850).



Şekil 4. Bertrand eğri çifti

**Tanım 2.1.23.** Üç boyutlu Öklid uzayı  $E^3$ 'te,  $(\gamma, \gamma^*)$  Bertrand eğri çifti verilsin. Burada  $\gamma$  ve  $\gamma^*$  eğrilerine **Bertrand eğri** denir (Hsiung, 1981).

**Teorem 2.1.4.** Üç boyutlu Öklid uzayı  $E^3$ 'te,  $(\gamma, \gamma^*)$  Bertrand çifti olsun. Bu durumda,  $\gamma^*$  eğrisi

$$\gamma^*(s) = \gamma(s) + \lambda N(s)$$

şeklinindedir. Burada  $\lambda$  sabit reel sayısı Bertrand eğri çiftlerinin karşılıklı noktaları arasındaki uzaklığı ifade eder (Hacısalıhoğlu, 1998).

**Teorem 2.1.5.** Üç boyutlu Öklid uzayı  $E^3$ 'te  $\gamma$  eğrisi,  $I \subset \mathbb{R}$  açık aralığında tanımlı bir eğri ve eğrilikleri  $\tau, \kappa$  olsun. O halde,  $\gamma$  eğrisinin Bertrand eğri olması, aşağıdaki eşitliğin sağlanmasını çift yönlü gerektirir.

$$\lambda\kappa + \mu\tau = 1$$

Burada  $\lambda, \mu$  bir reel sayıdır (Hacısalıhoğlu, 1998).

**Teorem 2.1.6.**  $n \geq 4$  olmak üzere,  $E^n$  uzayında eğrilikleri sıfırdan farklı olan bir eğrinin Bertrand çifti olamaz (Matsuda ve Yorozu, 2003).

**Tanım 2.1.24.** Üç boyutlu Öklid uzayı  $E^3$ 'te  $\gamma$  eğrisi,  $I \subset \mathbb{R}$  açık aralığında tanımlı bir eğri ve eğrinin Frenet elemanları  $\{T, N, B, \tau, \kappa\}$  olsun. Burada  $\gamma$  eğrisinin teğet vektör alanı, sabit doğrultuda sabit açı yaparsa  $\gamma$  **genel (silindirik) helis** eğrisidir. Aynı zamanda helis eğrileri, **0-slant helis** eğrileridir (Millman ve Parker, 1977).

**Teorem 2.1.7.** Üç boyutlu Öklid uzayı  $E^3$ 'te  $\gamma$  eğrisi,  $I \subset \mathbb{R}$  açık aralığında tanımlı bir eğri ve eğrilikleri  $\tau, \kappa$  olsun. Böylece,  $\gamma$  eğrisinin helis eğrisi olması ancak ve ancak eğriliğinin bir reel katı torsiyonuna karşılık gelmesiyle mümkündür (Lancret, 1802).

**Tanım 2.1.25.** Üç boyutlu Öklid uzayı  $E^3$ 'te  $\gamma$  eğrisi,  $I \subset \mathbb{R}$  açık aralığında tanımlı bir eğri ve eğrinin Frenet elemanları  $\{T, N, B, \tau, \kappa\}$  olsun. Burada  $\gamma$  eğrisinin asli normal vektör alanı, sabit doğrultuda sabit açı yaparsa  $\gamma$  bir **slant helis** eğrisidir. Aynı zamanda slant helis eğrileri, 1-slant helis eğrilerdir (Izumiya ve Takeuchi, 2004).

**Teorem 2.1.8.** Üç boyutlu Öklid uzayı  $E^3$ 'te  $\gamma$  eğrisi,  $\kappa > 0$  eğriliğine sahip birim hızlı bir eğri olsun. Burada  $\gamma$  eğrisinin eğrilikleri  $\tau$  ve  $\kappa$  olmak üzere  $\gamma$ 'nın slant helis eğri olması,

$$\sigma = \frac{\kappa^2}{(\kappa^2 + \tau^2)^{3/2}} \left( \frac{\tau}{\kappa} \right)'$$

fonksiyonunun sabit olmasını karşılıklı gerektirir. Aynı zamanda  $\sigma \equiv 0$  iken,  $\gamma$  genel bir helistir (Izumiya ve Takeuchi, 2004).

**Tanım 2.1.26.** Üç boyutlu Öklid uzayı  $E^3$ 'te  $\gamma$  eğrisi,  $I \subset \mathbb{R}$  açık aralığında tanımlı bir eğri ve eğrinin Frenet elemanları  $\{T, N, B, \tau, \kappa\}$  olsun. O halde,

$$\gamma_{k+1}(s) = \frac{\gamma_k'(s)}{\|\gamma_k'(s)\|}$$

$\gamma_{k+1}$ , sabit doğrultuda sabit açı yapıyorsa yani

$$\langle \gamma_{k+1}, u \rangle = \cos \theta$$

eşitliği gerçekleşiyorsa  $\gamma$  eğrisine **k-slant helis eğrisi** denir. Burada,

$$u = aT + bN + cB$$

$$\gamma_0(s) = \gamma(s)$$

$$\gamma_1(s) = \frac{\gamma_0'(s)}{\|\gamma_0'(s)\|}$$

biçimindedir (Ali, 2010).

**Teorem 2.1.9.** Üç boyutlu Öklid uzayı  $E^3$ 'te  $\gamma$  eğrisi,  $I \subset \mathbb{R}$  açık aralığında tanımlı regüler eğrisinin Frenet vektörleri  $\{T, N, B\}$  olsun. Eğrinin  $T, N$  ve  $B$  vektörlerinin integral eğrilerine sırasıyla **teğet yön eğrisi**, **asli normal yön eğrisi** ve **binormal yön eğrisi** denir (Choi ve Kim, 2012).

**Teorem 2.1.10.** Üç boyutlu Öklid uzayı  $E^3$ 'te  $\gamma$  ve  $\beta$  eğrileri,  $I \subset \mathbb{R}$  açık aralığında tanımlı ve bu eğrilerin Frenet elemanları sırasıyla  $\{T, N, B, \tau, \kappa\}$ ,  $\{T_\beta, N_\beta, B_\beta, \tau_\beta, \kappa_\beta\}$  olsun. Bu takdirde,

$$\begin{aligned}
 T_\beta &= N & N_\beta &= \frac{\delta^*}{\omega} & B_\beta &= \frac{\delta}{\omega} \\
 \kappa_\beta &= \omega & \tau_\beta &= \frac{\kappa^2}{\omega^2} \left( \frac{\tau}{\kappa} \right)'
 \end{aligned}$$

olacak biçimde bir  $\beta$  eğrisi vardır. Burada,

$$\delta(s) = \tau(s)T(s) + \kappa(s)B(s)$$

$$\delta^*(s) = -\kappa(s)T(s) + \tau(s)B(s)$$

$$\omega = \sqrt{\tau^2 + \kappa^2}$$

biçimindedir (Deshmukh, Chen ve Alghanemi, 2018).

**Tanım 2.1.27.** Üç boyutlu Öklid uzayı  $E^3$ 'te,  $\gamma: I \rightarrow S^2$  eğrisi  $\sigma$  yay parametrisine sahip birim küresel eğri olsun. Burada  $\gamma' = \frac{d\gamma}{d\sigma}$  olmak üzere,  $\gamma$  eğrisinin birim teğet vektörü  $T(\sigma) = \gamma'(\sigma)$  şeklindedir. Böylece  $s(\sigma) = \gamma(\sigma) \times T(\sigma)$  şeklinde tanımlanan  $s(\sigma)$  vektörü ile birlikte  $\gamma$  eğrisi boyunca elde edilen ortonormal  $\{\gamma(\sigma), T(\sigma), s(\sigma)\}$  çatısına  $\gamma$  eğrisinin **Sabban çatısı** denir (Izumiya ve Takeuchi, 2002).

**Teorem 2.1.11.** Üç boyutlu Öklid uzayı  $E^3$ 'te,  $\gamma: I \rightarrow S^2$  birim küresel eğrisi için küresel Frenet formülleri,

$$\gamma'(\sigma) = T(\sigma)$$

$$T'(\sigma) = -\gamma(\sigma) + \kappa_g(\sigma)s(\sigma)$$

$$s'(\sigma) = -\kappa_g(\sigma)T(\sigma)$$

şeklindedir. Burada  $\kappa_g(\sigma)$ ,  $\gamma$  eğrisinin  $S^2$ 'deki geodezik eğriliği olup

$$\kappa_g(\sigma) = \det(\gamma(\sigma), T(\sigma), T'(\sigma))$$

ile verilir (Izumiya ve Takeuchi, 2002).

**Tanım 2.1.28.** Üç boyutlu Öklid uzayı  $E^3$ 'te,  $\gamma$  birim hızlı eğri ve  $s_0 \in I$  olmak üzere,  $\gamma(s)$  sayısının  $K$  küresine göre kuvveti,

$$f: I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$s \rightarrow f(s) = \langle \gamma(s) - d, \gamma(s) - d \rangle - r^2$$

şeklindedir. Burada  $d$  kürenin merkezi,  $r$  kürenin yarıçapıdır. Eğer,

- a)  $f(s_0) = 0$
- b)  $f'(s_0) = 0$
- c)  $f''(s_0) = 0$
- d)  $f'''(s_0) = 0$

oluyorsa,  $K$  küresi  $\gamma$  eğrisine  $\gamma(s_0)$  noktasında **üçüncü basamaktan değişiyor** denir (Sabuncuoğlu, 2004).

**Teorem 2.1.12.** Üç boyutlu Öklid uzayı  $E^3$ 'te,  $\gamma$  birim hızlı bir eğri ve  $s_0 \in I$  olsun. O halde,  $\gamma$  eğrisine  $\gamma(s_0)$  noktasında üçüncü basamaktan değen bir ve yalnız bir küre vardır. Bu küre ise **oskületör (eğrilik) küresidir** (Sabuncuoğlu, 2004).

**Tanım 2.1.29.** Bir eğrinin üzerindeki noktaların tamamı küre üzerinde yer alıyor ise bu eğri **küresel eğri** olarak isimlendirilir (Karger ve Novak, 1985).

**Teorem 2.1.13.** Üç boyutlu Öklid uzayı  $E^3$ 'te,  $\gamma$  eğrisi,  $I \subset \mathbb{R}$  açık aralığında tanımlı eğrisinin  $\tau$  ve  $\kappa$  eğrilikleri sıfırdan farklı reel sayılar olsun. O halde,  $\gamma$  eğrisi küresel eğridir ancak ve ancak,

$$\left( \left( \frac{1}{\kappa} \right)' \frac{1}{\tau} \right)' + \frac{\tau}{\kappa} = 0 \quad (2.1)$$

denklemini sağlar. (2.1) denkleminin çözümü,

$$\frac{1}{\kappa} = A \cos \left( \int_0^s \tau(u) du \right) + B \sin \left( \int_0^s \tau(u) du \right) \quad (2.2)$$

biçimindedir. Burada, kürenin yarıçapı  $R = \sqrt{A^2 + B^2}$ 'dir (Breuer ve Gottlieb, 1971; Kreyszig, 1959; Wong, 1972). Böylece (2.2) denklemini,

$$\frac{1}{\kappa} = R \left( \frac{A}{R} \cos \left( \int_0^s \tau(u) du \right) + \frac{B}{R} \sin \left( \int_0^s \tau(u) du \right) \right) \quad (2.3)$$

şeklinde yazılabilir. (2.3) denkleminde,  $\cos \theta_0 = \frac{A}{R}$  ve  $\sin \theta_0 = \frac{B}{R}$  eşitlikleri yerine yazılarak gerekli işlemler yapıldığında,

$$\frac{1}{\kappa(s)} = R \cos \left( \int \tau(s) ds + \theta_0 \right) \quad (2.4)$$

elde edilir. Burada  $R \in \mathbb{R}$ ,  $\theta_0 \in [0, 2\pi]$ 'dir (Wong, 1972).

## 2.2. Üç Boyutlu Öklid Uzayında Küresel Eğrilerin Uygulamaları

Üç boyutlu Öklid uzayında bilindiği gibi birçok eğri, küresel eğriler yardımıyla elde edilmektedir. Bu eğrilere rektifyan eğrileri ve Bertrand eğrileri örnek olarak verilebilir.

İlk olarak küresel eğriler yardımıyla inşa edilen Bertrand eğrileri, Izumiya ve Takeuchi (2002) tarafından küre üzerinde aldığı birim hızlı bir eğriyi kullanarak tanımladığı uzay eğrisi ile tüm Bertrand eğrilerini elde edilebileceğini göstermiştir. Izumiya ve Takeuchi, bu çalışmasına üç boyutlu Öklid uzayında birim hızlı bir  $\gamma$  eğrisini alarak başlamıştır. Bu eğrinin her noktasındaki teğet vektörü,  $\gamma$  eğrisine dik olduğu açıkça görülmektedir. Böylece Sabban çatısı,

$$\{\gamma(s), T = \gamma'(s), Y(s) = \gamma(s) \times T(s)\}$$

şeklinde olur. Bu çatının Frenet vektörlerin türevi,

$$\begin{pmatrix} \gamma' \\ T' \\ Y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \kappa_g \\ 0 & -\kappa_g & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma \\ T \\ Y \end{pmatrix}$$

biçiminde bulunur. Burada  $\kappa_g(s) = \det(\gamma, T, T')$  eşitliği, eğrinin küre üzerindeki geodezik eğriliğini ifade etmektedir. Izumiya ve Takeuchi tanımladığı bu Sabban çatısı ile Teorem 2.2.1. verilir.

**Teorem 2.2.1.** Üç boyutlu Öklid uzayı  $E^3$ 'te,  $\gamma$  eğrisi küresel eğri olmak üzere,

$$\gamma^*(s) = a \int \gamma(s) ds + a \cot \theta \int Y(s) ds + c$$

şeklinde tanımlanan bir eğri Bertrand eğrisidir. Burada  $\gamma$  eğrisi küresel eğri iken  $\gamma^*$  eğrisi Bertrand eğri olmaktadır. Böylece tüm Bertrand eğrilerini bu metotla elde edilir (Izumiya ve Takeuchi, 2002).

Teorem 2.2.1. ile ifade edilen teoremin varlığı Örnek 2.2.1. yardımıyla desteklenmiştir.

**Örnek 2.2.1.** Üç boyutlu Öklid uzayı  $E^3$ 'te,  $\gamma(t) = (\sin t, \sin t \cos t, \cos^2 t)$  şeklinde bir küresel eğrisi ele alınsın. Bu küresel eğri için  $a = 1$  ve  $\cot \theta = 1$  seçilirse,

$$\gamma^*(t) = (\gamma_1^*(t), \gamma_2^*(t), \gamma_3^*(t))$$

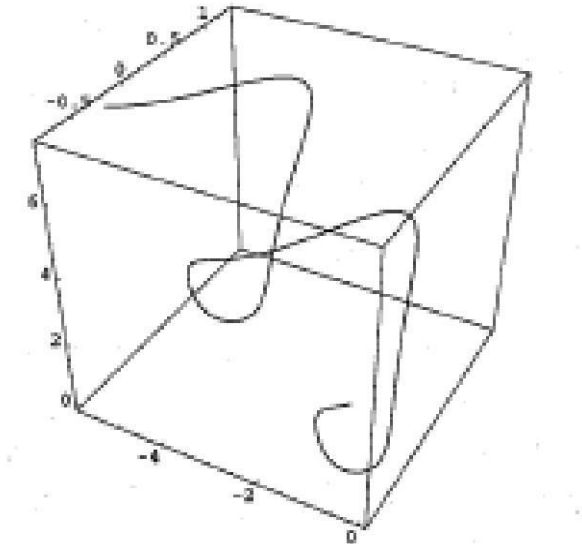
Bertrand eğrisi elde edilir. Böylece gerekli hesaplamalarla  $\gamma^*(t)$  eğrisinin bileşenleri,

$$\gamma_1^*(t) = -\cos t + \frac{1}{\sqrt{2}} \left( -\frac{1}{2} F \left( t, \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \left( -4E \left( t, \frac{1}{2} \right) + 3F \left( t, \frac{1}{2} \right) \right) \right)$$

$$\gamma_2^*(t) = -2 \arctan \left( \frac{\sqrt{2} \sin t}{\sqrt{3 + \cos(2t)}} \right) - \frac{1}{4} \cos(2t) + \frac{\sqrt{3 + \cos(2t)} \sin t}{2\sqrt{2}}$$

$$\gamma_3^*(t) = \frac{t}{2} - \frac{\cos t \sqrt{3 + \cos(2t)}}{2\sqrt{2}} + \frac{3}{2} \log \left( \sqrt{2} \cos t + \sqrt{3 + \cos(2t)} + \frac{1}{4} \sin(2t) \right)$$

şeklindedir. Burada  $F(t, m) = \int_0^t \frac{d\sigma}{1 - m \sin^2 \sigma}$  bir fonksiyondur. O halde,  $\gamma^*(t)$  eğrisine ait grafik Şekil 5.'teki gibidir (Izumiya ve Takeuchi, 2002).



Şekil 5. Bertrand eğri

Küresel eğrilerin güzel bir uygulamasını da Chen ve Dillen (2005) tarafından yapılan çalışmalarda görülmektedir. Chen ve Dillen, tüm rektifyan eğrilerin küresel eğrilerden elde

edilebileceğini Teorem 2.2.2. ile ifade etmiştir.

**Teorem 2.2.2.** Üç boyutlu Öklid uzayı  $E^3$ 'te,  $\alpha$  regüler bir eğri ve  $\kappa > 0$  olsun. O halde,  $\alpha$  eğrisinin rektifyan eğri olması,

$$\alpha(t) = (a \sec t)\omega(t)$$

eşitliğinin sağlanmasını iki yönlü gerektirir. Burada  $t$  değişkeni eğrinin yay pamarresi,  $\omega$  küre üzerindeki birim hızlı eğri ve  $a$  sabit bir sayıdır (Chen ve Dillen, 2005).

Bu bölümde son olarak Camcı'nın (2019), (2020a) ve (2020b) yapmış olduğu çalışmalar ile ilgili temel bilgiler verilmiştir.

Birim küre üzerinde,  $(I, \gamma)$  koordinat komşuluğuna sahip bir  $\gamma$  eğrisi alınsın. Burada,

$$C(S^2) = \{\gamma \mid \gamma \text{ regüler küresel eğri}\}$$

$$C(E^3) = \{\gamma \mid \gamma \text{ regüler eğri}\}$$

olmak üzere,

$$I: C(S^2) \rightarrow C(E^3)$$

$$\gamma \rightarrow I(\gamma) = \int S_\gamma \gamma du \quad (2.5)$$

dönüşüm tanımlansın. Burada,

$$\begin{aligned} S_\gamma: I &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\rightarrow S_\gamma(t, \theta_0) \end{aligned}$$

diferensiyellenebilir bir fonksiyondur. Verilen bu ön bilgiler doğrultusunda Teorem 2.2.3 verilir.

**Teorem 2.2.3.** (2.5) denkleminde tanımlanan  $I(\gamma)$ 'nın küresel eğri olması,

$$S_{\gamma}(t, \theta_0) = \|\gamma'\| \cos\left(\int_{t_0}^t \frac{\det(\gamma, \gamma', \gamma'')}{\|\gamma'\|^2} du + \theta_0\right) \quad (2.6)$$

denkleminin sağlanması için gerekli ve yeterlidir (Camcı, 2019).

Teorem 2.2.3. ifadesinde bahsi geçen  $\gamma$  eğrisi birim hızlı bir eğri olsun. Bu durumda,  $T = \gamma'$  bir küresel eğri olur. Burada (2.5) eşitliğinde,  $\gamma$  yerine  $\gamma'$  alındığında,

$$I(\gamma') = \int S_{\gamma'} \gamma' du \quad (2.7)$$

elde edilir. (2.7) eşitliğinde,  $I(\gamma')$  bir  $\beta$  birim hızlı eğrisinin tanjant vektörü olduğu kabul edilsin. Ayrıca  $\beta$  eğrisinin Frenet elemanları  $\{T_{\beta}, N_{\beta}, B_{\beta}, \tau_{\beta}, \kappa_{\beta}\}$  şeklinde olsun. Bu bilgileri göz önüne alınarak Teorem 2.2.4. verilir.

**Teorem 2.2.4.**  $I(\gamma') = \beta'$  eğrisinin küresel eğri olması,

$$S_{\gamma'}(t, \theta_0) = \|\gamma''\| \cos\left(\int_{t_0}^t \frac{\det(\gamma', \gamma'', \gamma''')}{\|\gamma''\|^2} du + \theta_0\right) \quad (2.8)$$

eşitliğinin sağlanması için gerekli ve yeterlidir. Burada  $\tau = \frac{\det(\gamma', \gamma'', \gamma''')}{\|\gamma''\|^2}$  ve  $\kappa = \|\gamma''\|$  denklemleri, (2.8) eşitliğinde yerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$S_{\gamma'} = \kappa \cos\left(\int \tau(s) ds + \theta_0\right) \quad (2.9)$$

eşitliliği elde edilir. Son olarak da,  $\beta$  eğrisinin eğriliklerini hesaplamak için (2.7) eşitliğinin eğri boyunca türevi alındığında,

$$\beta'' = S_{\gamma'} \gamma' \quad (2.10)$$

olur ve (2.10) eşitliğin normu,

$$\|\beta''\| = \kappa_\beta = S_{\gamma'} \quad (2.11)$$

biçimindedir. (2.10) ve (2.11) eşitliklerinden,

$$N_\beta = T \quad (2.12)$$

olduğu görülür. (2.12) eşitliğinin eğri boyunca türevi alındığında,

$$-\kappa_\beta T_\beta + \tau_\beta B_\beta = \kappa N \quad (2.13)$$

elde edilir. (2.13) denkleminin normu alındığında,

$$\kappa_\beta^2 + \tau_\beta^2 = \kappa^2 \quad (2.14)$$

olur. Böylece  $\beta$  eğrisinin eğrilikleri

$$\tau_\beta = \kappa \sin \left( \int \tau(s) ds + \theta_0 \right) \quad (2.15)$$

$$\kappa_\beta = \kappa \cos \left( \int \tau(s) ds + \theta_0 \right) \quad (2.16)$$

biçiminde elde edilir (Camcı, 2019).

## BÖLÜM 3

### ÖKLİD ÜÇ UZAYINDA NORMAL VE REKTİFYAN KÜRESEL EĞRİLER

Bu bölüm iki alt başlıktan oluşmaktadır. Birinci alt başlıkta, ilk olarak 3-boyutlu Öklid uzayında  $\gamma$  birim hızlı eğrisinin binormal vektörünü integre ederek bir  $\gamma_B$  eğrisi tanımlanmıştır. Bu iki eğrinin Frenet vektörlerinin gerdiği uzaylar belirlenip, bu uzaylar arası geçişler gösterilmiştir. Bu veriler ışığında yeni bir eğri olan normal küresel eğri kavramı verilmiştir. Son olarak, küresel eğri olma karakterizasyonunu kullanarak bu yeni eğriyi karakterize eden denklem belirlenmiştir.

İkinci alt başlıkta ise,  $\gamma$  eğrisinin Darboux göstergesi integre edilerek bir  $\gamma_{\bar{D}}$  eğrisi tanımlanmıştır. Birinci alt başlıktaki yapılan çalışmaya benzer olarak  $\gamma$  ve  $\gamma_{\bar{D}}$  eğrilerinin Frenet vektörlerinin gerdiği uzaylar belirlenip, bu uzaylar arası geçişler gösterilmiştir. Bu veriler ışığında yeni bir eğri olan rektifyan küresel eğri kavramı verilmiştir. Son olarak da küresel eğri olma karakterizasyonu kullanılarak bu yeni eğriyi karakterize eden denklem belirlenmiştir.

#### 3.1. Normal Küresel Eğri

**Tanım 3.1.1.** Üç boyutlu Öklid uzayı  $E^3$ 'te,  $\gamma$  birim hızlı eğrisinin Frenet elemanları  $\{T, N, B, \tau, \kappa\}$  şeklinde olsun. Bu eğrinin binormal vektörü integre edilerek

$$\begin{aligned}\gamma_B: I &\rightarrow E^3 \\ s &\rightarrow \gamma_B(s) = \int B(s)ds\end{aligned}$$

şeklinde bir  $\gamma_B$  eğrisi tanımlansın (Choi ve Kim, 2012). Bu eğrinin Frenet elemanları ise,

$$\{T_{\gamma_B} = T_B, N_{\gamma_B} = N_B, B_{\gamma_B} = B_B, \tau_{\gamma_B} = \tau_B, \kappa_{\gamma_B} = \kappa_B\}$$

şeklinde gösterilsin. Gerekli hesaplamalar yapıldığında,  $\gamma_B$  eğrisinin Frenet elemanları

$$T_B = B \qquad N_B = -N \qquad B_B = T \qquad (3.1)$$

$$\tau_B = \kappa \qquad \kappa_B = \tau \qquad (3.2)$$

şeklinde elde edilir.

Burada,  $\gamma$  ve  $\gamma_B$  eğrisinin her noktasındaki Frenet vektörleri incelendiğinde Sonuç 3.1.1., Sonuç 3.1.2. ve Sonuç 3.1.3 ifadelerine ulaşılır.

**Sonuç 3.1.1.**  $\gamma$  eğrisinin teğet ve normal vektörleri ile  $\gamma_B$  eğrisinin binormal ve normal vektörlerine bakıldığında,  $\gamma$  eğrisinin  $\{T, N\}$  vektörlerinin gerdiği uzay ile  $\gamma_B$  eğrisinin  $\{B_B, N_B\}$  vektörlerinin gerdiği uzay birbirine eşit olduğu görülür. Böylece  $\gamma$  eğrisinin oskulator düzlemi ile  $\gamma_B$  eğrisinin normal düzlemi birbirine paralel olur.

**Sonuç 3.1.2.**  $\gamma$  eğrisinin teğet ve binormal vektörleri ile  $\gamma_B$  eğrisinin teğet ve binormal vektörlerine bakıldığında,  $\gamma$  eğrisinin  $\{T, B\}$  vektörlerinin gerdiği uzay ile  $\gamma_B$  eğrisinin  $\{B_B, T_B\}$  vektörlerinin gerdiği uzay birbirine eşit olduğu görülür. Böylece  $\gamma$  eğrisinin rektifiyan düzlemi ile  $\gamma_B$  eğrisinin rektifiyan düzleminin birbirine paralel olur.

**Sonuç 3.1.3.**  $\gamma$  eğrisinin normal ve binormal vektörleri ile  $\gamma_B$  eğrisinin normal ve teğet vektörlerine bakıldığında,  $\gamma$  eğrisinin  $\{N, B\}$  vektörlerinin gerdiği uzay ile  $\gamma_B$  eğrisinin  $\{N_B, T_B\}$  vektörlerinin gerdiği uzayın birbirine eşit olduğu görülür. Böylece  $\gamma$  eğrisinin normal düzlemi ile  $\gamma_B$  eğrisinin oskulator düzlemi birbirine paralel olur.

Sonuç 3.1.1. ve Sonuç 3.1.3 ifadelerinden Tanım 3.1.2. elde edilir.

**Tanım 3.1.2.** Eğer  $\gamma_B$  eğrisi küresel eğri ise  $\gamma$  eğrisine **normal küresel eğri** denir.

Sonuç 3.1.1., Sonuç 3.1.3. ve Tanım 3.1.2. ifadelerinden Sonuç 3.1.4 elde edilir.

**Sonuç 3.1.4.**  $\gamma$  eğrisinin küresel eğri olması için gerek ve yeter koşul  $\gamma_B$  eğrisinin normal küresel eğri olmasıdır.

Böylece, Sonuç 3.1.4. ile bir eğrinin normal küresel eğri olması için gerek ve yeter koşulu belirlendi. Bilindiği gibi yeni tanımlanan bir eğrinin ya da var olan eğrinin yeni bir karakterizasyonunu belirlemek önemli bir çalışmadır. Bundan dolayı, bir sonraki basamak bu yeni eğrinin karakterizasyonunu belirlemek oldu.

**Teorem 3.1.1.** Üç boyutlu Öklid uzayı  $E^3$ 'te,  $\gamma$  eğrisi normal küresel eğridir ancak ve ancak

$$\frac{1}{\tau(s)} = R \cos \left( \int \kappa(s) ds + \theta_0 \right) \quad (3.3)$$

denklemini sağlar.

**İspat.** Varsayalım ki,  $\gamma$  eğrisi normal küresel eğri olsun. Böylece, Tanım 3.1.2.'den  $\gamma_B$  küresel eğri olur ve

$$\left( \left( \frac{1}{\kappa_B} \right)' \frac{1}{\tau_B} \right)' + \frac{\tau_B}{\kappa_B} = 0 \quad (3.4)$$

denklemini sağlar. Burada (3.4) denklemini,  $\kappa_B$  ve  $\tau_B$  değerleri (3.2) eşitlikleri kullanılarak yeniden düzenlendiğinde,

$$\left( \left( \frac{1}{\tau} \right)' \frac{1}{\kappa} \right)' + \frac{\kappa}{\tau} = 0 \quad (3.5)$$

denklemini elde edilir. Daha sonra, (3.5) denkleminde  $t = \int_0^s \kappa ds$  parametrik dönüşümü yapıp,  $y = \frac{1}{\tau}$  alındığında,

$$\ddot{y}(t) + y(t) = 0 \quad (3.6)$$

diferansiyel denklemini elde edilir. (3.6) diferansiyel denklemin çözümü ise,

$$\frac{1}{\tau(s)} = R \cos \left( \int \kappa(s) ds + \theta_0 \right)$$

şeklinde bulunur.

### 3.2. Rektifyan Küresel Eğri

**Tanım 3.2.1.** Üç boyutlu Öklid uzayı  $E^3$ 'te,  $\gamma$  birim hızlı eğrisinin Darboux göstergesi integre edilerek,

$$\begin{aligned}\gamma_{\bar{D}}: I &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ s &\rightarrow \gamma_{\bar{D}}(s) = \int \bar{D}(s) ds\end{aligned}$$

biçiminde bir  $\gamma_{\bar{D}}$  eğrisi tanımlansın. Burada Darboux göstergesi

$$\bar{D}(s) = \frac{1}{\sqrt{\kappa^2(s) + \tau^2(s)}} (\tau(s)T(s) + \kappa(s)B(s))$$

biçimindedir. Bu eğrinin Frenet elemanları,

$$\{T_{\gamma_{\bar{D}}} = T_{\bar{D}}, N_{\gamma_{\bar{D}}} = N_{\bar{D}}, B_{\gamma_{\bar{D}}} = B_{\bar{D}}, \tau_{\gamma_{\bar{D}}} = \tau_{\bar{D}}, \kappa_{\gamma_{\bar{D}}} = \kappa_{\bar{D}}\}$$

şeklinde gösterilsin. Gerekli hesaplamalar yapılırsa,  $\gamma_{\bar{D}}$  eğrisinin Frenet elemanları

$$T_{\bar{D}} = \frac{\tau T + \kappa B}{\sqrt{\tau^2 + \kappa^2}} \quad N_{\bar{D}} = \frac{-\kappa T + \tau B}{\sqrt{\tau^2 + \kappa^2}} \quad B_{\bar{D}} = -N \quad (3.7)$$

$$\tau_{\bar{D}} = \sqrt{\tau^2 + \kappa^2} \quad \kappa_{\bar{D}} = \frac{\kappa' \tau + \tau' \kappa}{\sqrt{\tau^2 + \kappa^2}} \quad (3.8)$$

olarak bulunur. Burada,  $\gamma$  ve  $\gamma_{\bar{D}}$  eğrisinin her noktasındaki Frenet vektörleri incelendiğinde Sonuç 3.2.1. ifadesi elde edilir.

**Sonuç 3.2.1.**  $\gamma$  eğrisinin teğet ve binormal vektörleri ile  $\gamma_{\bar{D}}$  eğrisinin teğeti ve normal vektörlerine bakıldığında,  $\gamma$  eğrisinin  $\{T, B\}$  vektörlerinin gerdiği uzay ile  $\gamma_{\bar{D}}$  eğrisinin  $\{T_{\bar{D}}, N_{\bar{D}}\}$  vektörlerinin gerdiği uzayın birbirine eşit olduğu görülür. Böylece,  $\gamma$  eğrisinin rektifyan düzlemi ile  $\gamma_{\bar{D}}$  eğrisinin oskulator düzlemi birbirine paralel olur.

Elde edilen Sonuç 3.2.1. ifadesinden Tanım 3.2.2. verilir.

**Tanım 3.2.2.** Eğer  $\gamma_{\bar{D}}$  eğrisi küresel eğri ise  $\gamma$  eğrisine **rektifyan küresel eğri** denir.

Sonuç 3.2.1 ve Tanım 3.2.2. ifadelerinden Sonuç 3.2.2. elde edilir.

**Sonuç 3.2.2.**  $\gamma$  eğrisinin küresel eğri olması için gerek ve yeter koşul  $\gamma_{\bar{D}}$  eğrisini rektifyan küresel eğri olmasıdır.

Böylece, Sonuç 3.2.2. ile bir eğrinin rektifyan küresel eğri olabilmesi için gerek ve yeter koşul belirlendi. Bundan sonraki basamak ise bu yeni eğrinin karakterizasyonunu belirlemek oldu.

**Teorem 3.2.1.** Üç boyutlu Öklid uzayı  $E^3$ 'te,  $\gamma$  eğrisi rektifyan küresel eğridir ancak ve ancak,

$$\frac{1 + \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^2}{\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'} = R \cos\left(\int \sqrt{\tau^2(s) + \kappa^2(s)} ds + \theta_0\right) \quad (3.9)$$

denklemini sağlar. Burada  $\gamma$  eğrisi helis değildir.

**İspat.** Varsayalım ki,  $\gamma$  eğrisi rektifyan küresel eğri olsun. Böylece Tanım 3.2.2.'den  $\gamma_{\bar{D}}$  küresel eğri olur ve

$$\frac{1}{\kappa_{\bar{D}}(s)} = R \cos\left(\int \tau_{\bar{D}}(s) ds + \theta_0\right) \quad (3.10)$$

denklemini sağlar. Burada (3.10) denkleminde, (3.8) eşitlikleri yerine yazıldığında,

$$\frac{\sqrt{\tau^2 + \kappa^2}}{\kappa'\tau + \tau'\kappa} = R \cos\left(\int \tau_{\bar{D}}(s) ds + \theta_0\right) \quad (3.11)$$

denklemini elde edilir. (3.11) denkleminde gerekli düzenlemeler yapıldığında, (3.9) denkleminde ulaşılır.

## BÖLÜM 4

### BAZI ÖZEL EĞRİLERİN DOĞAL EĞRİ ÇİFTLERİ

Bu bölümde, ilk olarak Deshmukh, Chen ve Alghanemi (2018) tarafından tanımlanan doğal çift eğrisinden bahsedilmiştir. Daha sonra Camcı (2019) tarafından tanımlanan (2.10) denklemdeki eğri çiftinin, bir doğal eğri çifti olduğu açıkça görülüp ve bu eşitliğe ise doğal eğri çift denklemi olarak adlandırılmıştır. Camcı bu doğal eğri çift denkleminden,  $k$ -slant helis eğri ile  $(k + 1)$ -slant helis eğri, Bertrand eğri ile küresel eğri gibi bazı özel eğriler arasında geçişlerin var olduğunu ve bu doğal eğri çift denklemi ile Mannheim eğrilerin doğal çiftlerinin karakterizasyonunu elde edileceğini göstermiştir (Cımcı, 2019; Cımcı, 2020a; Cımcı, 2020b). Yapılan bu çalışmalardan sırasıyla bahsedildikten sonra, doğal eğri çift denklemi ile yeni tanımladığımız rektifyan ve normal küresel eğriler arasındaki geçiş gösterilmiştir. Ek olarak, küresel helislerin genel denklemi kullanılarak yeni tanımladığımız bu iki eğriye örnek verilmiştir. Son olarak da rektifyan eğrinin doğal çiftinin karakterizasyonu, bu doğal eğri çift denklemi yardımıyla elde edilmiştir.

#### 4.1. Doğal Çift Eğrisi

Üç boyutlu Öklid uzayı  $E^3$ 'te,  $\gamma$  eğrisi  $I \subset \mathbb{R}$  açık aralığında tanımlansın. Bu durumda,  $\gamma$  eğrisinin Frenet vektörleri  $T, N, B$  olmak üzere,

$$\begin{aligned}\beta: I &\rightarrow E^3 \\ s &\rightarrow \beta(s) = \int N(s)ds\end{aligned}$$

tanımlanır (Choi ve Kim, 2012). Burada  $\beta$  eğrisinin Serret-Frenet vektörleri  $T_\beta, N_\beta, B_\beta$  olmak üzere  $T_\beta = N$  olduğu görülür. Burada,  $dom(\chi) \subset E^n$

$$\chi: dom(\chi) \rightarrow T_p E^n$$

dönüşüm ve

$$\gamma: I \rightarrow dom(\chi) \subset E^n$$

olmak üzere,

$$\chi(\gamma(t)) = \frac{d\gamma}{dt}$$

koşulunu sağlayan eğriye  $\chi$ 'in **integral eğrisi** denir (Hacısalıhoğlu, 2000). Burada açıkça görülmektedir ki,  $\chi$  vektör alanı sadece  $\gamma$  eğrisi boyunca değil aynı zamanda  $\gamma$  eğrisini kapsayan  $dom(\chi)$  bölgesinde de bir vektör alanıdır. Bu yüzden Deshmukh, Chen ve Alghanemi (2018) çalışmalarında  $\beta = \int N ds$  eğrisinin  $T_\beta, N_\beta, B_\beta$  Frenet vektörlerinin hesaplanmasında  $\chi$ 'in integral eğrisini ayırt edemeyeceğini belirtmiştir. Deshmukh, Chen ve Alghanemi (2018) bu karışıklığı gidermek için normali ve teğeti paralel olan eğrilere **doğal çift (natural pair)** eğrisi olarak adlandırmıştır.

Deshmukh, Chen ve Alghanemi (2018) çalışmalarında,  $\gamma: I \rightarrow E^3$  Frenet eğrisinin  $\{T, N, B, \tau, \kappa\}$  Frenet elemanları olmak üzere,

$$\begin{aligned} T_\beta &= N & N_\beta &= \frac{\delta^*}{\omega} & B_\beta &= \frac{\delta}{\omega} \\ \tau_\beta &= \frac{\kappa^2}{\omega^2} \left( \frac{\tau}{\kappa} \right)' & \kappa_\beta &= \omega \end{aligned}$$

olacak biçimde  $\beta: I \rightarrow E^3$  eğrisinin var olduğunu ispatlamışlardır (Deshmukh, Chen ve Alghanemi, 2018). Burada açıkça görülmektedir ki  $(\gamma, \beta)$  eğri çifti, bir doğal eğri çiftidir. Bu çalışmada  $\beta$  eğrisine  $\gamma$  eğrisinin doğal çifti olarak adlandırılacaktır.

**Tanım 4.1.1.** Eğer  $(\gamma, \beta)$  eğri çifti doğal eğri çifti ise,  $\gamma$ 'nın teğeti ile  $\beta$ 'nın normali çakışıktır (Deshmukh, Chen ve Alghanemi, 2018).

**Teorem 4.1.1.** Üç boyutlu Öklid uzayı  $E^3$ 'te,  $\gamma: I \rightarrow E^3$  birim hızlı eğri ve  $\beta: J \rightarrow E^3$  Frenet eğrisi olmak üzere,  $(\gamma, \beta)$  eğri çiftinin doğal eğri çifti olması,

$$\beta'' = \kappa_\beta \gamma' \tag{4.1}$$

eşitliğinin gerçekleşmesini çift yönlü olarak gerektirir.

**İspat.** (4.1) denklemi altında, (2.12) eşitliğine bakıldığında,  $\gamma$  eğrisinin teğeti ile  $\beta$  eğrisinin asli normal vektörü eşit olduğu görülmektedir. Bu da  $\gamma$  ve  $\beta$  eğrilerinin teğeti ve normalinin paralel olduğu sonucuna götürür. Böylece Tanım 4.1.1.'den  $(\gamma, \beta)$  eğri çifti bir doğal eğri çifti olur.

Sonuç olarak Teorem 4.1.1'den, (2.10) denklemi doğal eğri çift denklemi olarak adlandırılır. Bu doğal eğri çift denklemini sağlayan eğri ailelerini ve bazı eğri aileleri karakterize eden denklemler aşağıda sırasıyla verilmiştir.

#### 4.1.1. Bertrand ve Küresel Doğal Çift Eğrisi

**Teorem 4.1.1.1.**  $\beta$  eğrisinin Bertrand eğri olması için gerek ve yeter koşul  $\gamma$  eğrisinin küresel eğri olmasıdır.

**İspat.** Kabul edelim ki, (2.10) eşitliğinde  $\beta$  eğrisi Bertrand eğri olsun. Bu durumda,

$$\lambda\kappa_\beta + \mu\tau_\beta = 1 \quad (4.2)$$

eşitliği sağlanır. (4.2) eşitliğinde,  $\kappa_\beta$  ve  $\tau_\beta$  değerleri yerine yazılarak gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$\kappa\sqrt{\lambda^2 + \kappa^2} \left( \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + \kappa^2}} \cos\left(\int \tau(s)ds + \theta_0\right) + \frac{\mu}{\sqrt{\lambda^2 + \kappa^2}} \sin\left(\int \tau(s)ds + \theta_0\right) \right) = 1 \quad (4.3)$$

elde edilir. (4.3) eşitliğinde  $\cos \theta_0 = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + \kappa^2}}$ ,  $\sin \theta_0 = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda^2 + \kappa^2}}$  ve  $R = \sqrt{\lambda^2 + \kappa^2}$  alındığında,

$$\kappa R \left( \cos \theta_0 \cos \left( \int \tau(s)ds + \theta \right) + \sin \theta_0 \sin \left( \int \tau(s)ds + \theta \right) \right) = 1 \quad (4.4)$$

olur ve (4.4) eşitliği düzenlendiğinde,

$$\frac{1}{\kappa(s)} = R \cos \left( \int \tau(s)ds + \theta_0 \right)$$

elde edilir. Bu da bize,  $\gamma$  eğrisinin bir küresel eğri olduğunu gösterir.

Tersine, (2.10) eşitliğinde  $\gamma$  eğrisi küresel eğri olsun. Bu durumda,

$$\frac{1}{\kappa(s)} = R \cos \left( \int \tau(s) ds + \theta_0 \right) \quad (4.5)$$

eşitlik sağlanır. (4.5) denkleminde,  $R = \sqrt{A^2 + B^2}$ ,  $\cos \theta_0 = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}$  ve  $\sin \theta_0 = -\frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}$  alındığında,

$$1 = \kappa \sqrt{A^2 + B^2} \left( \cos \left( \int \tau(s) ds + \theta \right) \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} + \sin \left( \int \tau(s) ds + \theta \right) \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right) \quad (4.6)$$

olur ve (4.6) eşitliği gerekli düzenlemeler ile,

$$1 = \kappa \cos \left( \int \tau(s) ds + \theta_0 \right) A + \kappa \sin \left( \int \tau(s) ds + \theta_0 \right) B \quad (4.7)$$

halini alır. Burada, (2.15) ve (2.16) eşitliklerine bakıldığında (4.7) denkleminin

$$\lambda \kappa_\beta + \mu \tau_\beta = 1 \quad (4.8)$$

biçiminde olduğu görülür. Sonuç olarak (4.8) eşitliği,  $\beta$  eğrisinin bir Bertrand eğrisi olduğunu gösterir (Camcı, 2020a).

#### 4.1.2. $k$ -Slant Helis ve $(k+1)$ -Slant Helis Doğal Eğri Çifti

**Teorem 4.1.2.1.**  $\beta$  eğrisinin  $(k + 1)$ -slant helis eğri olması,  $\gamma$  eğrisinin  $k$ -slant helis eğri olmasını çift yönlü gerektirir.

**İspat.** Kabul edelim ki, (2.10) eşitliğinde,  $\beta_0 = \beta$  ve  $\gamma_0 = \gamma$  olmak üzere,

$$\beta_1 = \frac{\beta_0'}{\|\beta_0'\|} = \gamma = \gamma_0$$

$$\beta_2 = \frac{\beta_1'}{\|\beta_1'\|} = \frac{\gamma_0'}{\|\gamma_0'\|} = \gamma_1$$

$$\beta_3 = \frac{\beta_2'}{\|\beta_2'\|} = \frac{\gamma_1'}{\|\gamma_1'\|} = \gamma_2$$

·  
·  
·

$$\beta_{k+2} = \frac{\beta_{k+1}'}{\|\beta_{k+1}'\|} = \frac{\gamma_k'}{\|\gamma_k'\|} = \gamma_{k+1}$$

elde edilir. Sonuç olarak,

$\gamma$  eğrisinin helis eğri olması,  $\beta$  eğrisinin slant helis eğri olmasını çift yönlü gerektirir.

$\gamma$  eğrisinin slant helis eğri olması,  $\beta$  eğrisinin 2-slant helis eğri olmasını çift yönlü gerektirir.

$\gamma$  eğrisinin 2-slant helis eğri olması,  $\beta$  eğrisinin 3-slant helis eğri olmasını çift yönlü gerektirir.

·  
·  
·

$\gamma$  eğrisinin  $k$ -slant helis eğri olması,  $\beta$  eğrisinin  $(k + 1)$ -slant helis eğri olmasını çift yönlü gerektirir.

O halde,  $\gamma$  eğrisinin  $k$ -slant helis eğri olması,  $\beta$  eğrisinin  $(k + 1)$ -slant helis eğri

olmasını çift yönlü gerektirir (Camcı, 2019).

#### 4.1.3. Mannheim Doğal Çift Eğrisi

**Teorem 4.1.3.1.**  $\beta$  eğrisinin Mannheim eğri olması,  $\gamma$  eğrisinin eğrilikleri arasında

$$\kappa(s) = R \cos \left( \int_0^s \tau(u) du + \theta_0 \right)$$

bağıntısının olmasını çift yönlü gerektirir.

**İspat.** Kabul edelim ki, (2.10) eşitliğinde  $\beta$  eğrisi Mannheim eğri olsun. Bu durumda,  $k$  bir reel sayı olmak üzere

$$\kappa_\beta^2 + \tau_\beta^2 = k\tau_\beta \quad (4.9)$$

eşitliği sağlanır. Yukarıdaki (4.9) denkleminde, (2.15) ve (2.16) eşitliğindeki  $\kappa_\beta$  ve  $\tau_\beta$  değerleri yerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapıldığında  $\gamma$  eğrisinin eğriligi,

$$\kappa = R \sin \left( \int \tau(s) ds + \theta_0 \right)$$

biçiminde elde edilir. Burada  $R = k$  kabul edilmiştir.

Tersine,  $\gamma$  eğrisinin eğrilikleri arasında,

$$\kappa(s) = R \cos \left( \int_0^s \tau(u) du + \theta_0 \right) \quad (4.10)$$

şeklinde bir bağıntı var olsun. Burada  $\theta = \int_0^s \tau(u) du + \theta_0$  kabul edildiğinde, (4.10) denklemi

$$\kappa = R \cos \theta \quad (4.11)$$

olur. Daha sonra (4.11) denklemi,  $\beta$  eğrisinin eğrilikleri olan (2.15) ve (2.16) eşitliklerinde yerine yazıldığında,

$$\kappa_\beta = R \cos^2 \theta \quad (4.12)$$

$$\tau_\beta = \cos \theta \sin \theta \quad (4.13)$$

elde edilir. (4.12) eğriliği ve (4.13) torisyon değerleri, Mannheim eğri olma koşulu olan,

$$\kappa_\beta^2 + \tau_\beta^2 = k\tau_\beta$$

eşitliği sağlar. Sonuç olarak  $\beta$  eğrisi bir Mannheim eğrisi olur (Camcı, 2020b).

#### 4.1.4. Normal Küresel ve Rektifyan Küresel Doğal Eğri Çifti

**Teorem 4.1.4.1.**  $\beta$  eğrisinin rektifyan küresel eğri olması için gerek ve yeter koşul  $\gamma$  eğrisinin normal küresel eğri olmasıdır.

**İspat.** Kabul edelim ki, (2.10) eşitliğinde  $\beta$  eğrisi rektifyan küresel eğri olsun. Böylece Teorem 3.2.1.'den,

$$\frac{1 + \left(\frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta}\right)^2}{\left(\frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta}\right)'} = R \cos \left( \int \sqrt{\tau_\beta^2(s) + \kappa_\beta^2(s)} ds + \theta_0 \right) \quad (4.14)$$

eşitliği sağlanır. Eğer  $\tau_\beta$  ve  $\kappa_\beta$  değerleri olan (2.15) ve (2.16) eşitlikleri (4.14) denkleminde yerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\frac{1 + (\tan \theta)^2}{\theta'(1 + (\tan \theta)^2)} = R \cos \left( \int \kappa(s) ds + \theta_0 \right) \quad (4.15)$$

elde edilir. Burada  $\theta = \int \tau(s)ds + \theta_0$ 'dır. Dahası (4.15) eşitliğini,

$$\frac{1}{\tau(s)} = R \cos\left(\int \kappa(s) ds + \theta_0\right) \quad (4.16)$$

biçiminde yazılır. Sonuç olarak (4.16) eşitliğinden,  $\gamma$  eğrisinin normal küresel eğri olduğu açıkça görülür.

Tersine işlemler takip edildiğinde,  $\gamma$  eğrisi normal küresel eğri iken  $\beta$  eğrisi rektifyan küresel eğri olduğu açıkça görülmektedir.

**Örnek 4.1.4.1.** Üç boyutlu Öklid uzayı  $E^3$ 'te, küresel helislerin genel denklemi olan,

$$\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$$

eğrisinin sırasıyla bileşenleri,

$$\alpha_1(t) = \frac{r}{2} \left( \frac{1}{w(a+1)} \sin(w(a+1)t + \theta_0) + \frac{1}{w(a-1)} \sin(w(a-1)t + \theta_0) \right)$$

$$\alpha_2(t) = \frac{r}{2} \left( -\frac{1}{w(a+1)} \cos(w(a+1)t + \theta_0) + \frac{1}{w(a-1)} \cos(w(a-1)t + \theta_0) \right)$$

$$\alpha_3(t) = r \sin(awt + \theta_0)$$

biçimindedir (Scofield, 1995). Burada  $w = \frac{1}{r}$ ,  $a^2 + r^2 = 1$  dir. Ayrıca,  $\theta_0 = 0$  kabul edilecektir.

Küresel helislerin genel denklemi olan  $\alpha$  eğrisi keyfi hızlı bir eğridir. Gerekli hesaplamalarla,

$$t = \frac{\arcsin(aws)}{aw} = h^{-1}(s)$$

şeklinde dönüşüm yapılarak  $\alpha$  eğrisi,  $s$  yay parametresi ile yeniden parametrelendirilirse,

$$\gamma(s) = \alpha(h^{-1}(s))$$

halini alır. Böylece,  $\gamma$  birim hızlı küresel helislerin genel denklemi

$$\gamma(s) = \left( \begin{array}{c} \frac{r}{2} \left( \frac{1}{w(a+1)} \sin \left( \frac{(a+1)}{a} \arcsin(aws) \right) + \frac{1}{w(a-1)} \sin \left( \frac{(a-1)}{a} \arcsin(aws) \right) \right), \\ \frac{r}{2} \left( -\frac{1}{w(a+1)} \cos \left( \frac{(a+1)}{a} \arcsin(aws) \right) + \frac{1}{w(a-1)} \cos \left( \frac{(a-1)}{a} \arcsin(aws) \right) \right), \\ r \sin(\arcsin(aws)) \end{array} \right)$$

şeklinde elde edilir. Bu  $\gamma$  eğrisinin binormal vektörü gerekli hesaplamalar sonucunda,

$$B(s) = \left( -a \cos \left( \frac{\arcsin(aws)}{a} \right), -a \sin \left( \frac{\arcsin(aws)}{a} \right), r \right)$$

şeklinde bulunur. Bölüm 3'ün birinci alt başlığından da bahsedildiği gibi, birim hızlı küresel eğrinin binormal vektörünü integre ederek tanımlanan eğri bir normal küresel eğri olmaktadır. Bu durumda,  $\gamma_B = \int B(s)ds$  eğrisi açıkça

$$\gamma_B(s) = \left( \int -a \cos \left( \frac{\arcsin(aws)}{a} \right) ds, \int -a \sin \left( \frac{\arcsin(aws)}{a} \right) ds, rs + r_0 \right) \quad (4.17)$$

şeklinde tanımlanan eğri bir normal küresel eğri olmaktadır. Daha sonra 2.10 eşitliğinde  $\gamma$  eğrisi yerine  $\gamma_B$  eğrisi alındığında,

$$\beta'' = S_{\gamma_B'} \gamma_B' \quad (4.18)$$

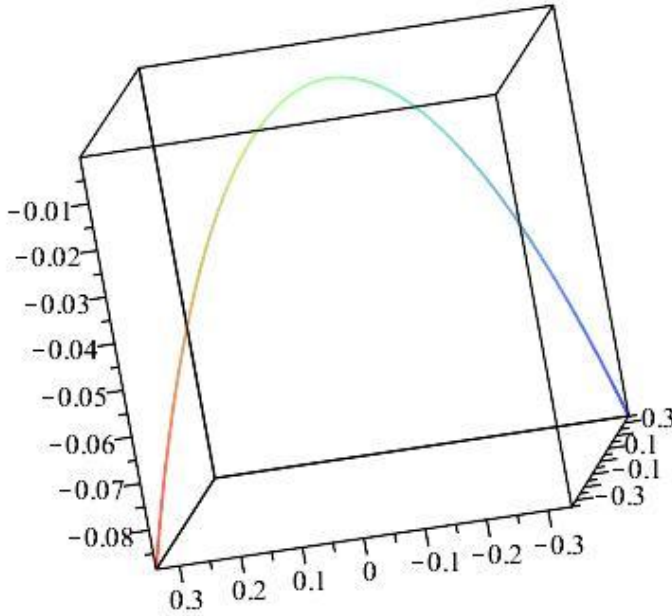
elde edilir. (4.18) denklemi iki kere integre edildiğinde

$$\beta = \iint S_B B ds^2 \quad (4.19)$$

elde edilir. Teorem 4.1.4.1. ifadesi ile (4.19) eğrisinin bir rektifiyan küresel eğri olduğu kolayca görülür. Dahası, (4.17) eşitliğinde  $a = \frac{1}{2}$ ,  $r = \frac{\sqrt{3}}{2}$  ve  $w = \frac{2}{\sqrt{3}}$  değerleri alındığında,

$$\gamma_B(s) = \left( \int -\frac{1}{2} \cos\left(\frac{\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{3}}s\right)}{\frac{1}{2}}\right) ds, \int -\frac{1}{2} \sin\left(\frac{\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{3}}s\right)}{\frac{1}{2}}\right) ds, \frac{\sqrt{3}}{2}s + r_0 \right)$$

şeklinde bir normal küresel eğri elde edilir. Bu normal küresel eğrinin grafiği ise Şekil 6.'da gösterilmektedir.



Şekil 6. Normal Küresel Eğri

#### 4.1.5. Rektifiyan Eğrilerin Doğal Eğri Çifti

**Teorem 4.1.5.1.**  $\beta$  eğrisi rektifiyan eğri olması,  $\gamma$  eğrisinin torsiyonunun

$$\tau(s) = \frac{1}{as^2 + 2bs + \frac{1+b^2}{a}} \quad (4.20)$$

olmasını çift yönlü gerektirir.

**İspat.** Kabul edelim ki, (2.10) eşitliğinde  $\beta$  eğrisi rektifyan eğri olsun. Bu durumda, Tanım 2.1.22.'den  $\beta$  eğrisinin eğrilikleri oranı,

$$\frac{\tau_\beta(s)}{\kappa_\beta(s)} = as + b \quad (4.21)$$

şeklinde olur. (4.21) denkleminde  $\tau_\beta$  ve  $\kappa_\beta$  değerleri (2.15), (2.16) eşitlikleri kullanılarak gerekli düzenlemeler yapıldığında, (4.20) eşitliği elde edilir.



## BÖLÜM 5

### SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, öncelikle üç boyutlu Öklid uzayında yeni özel eğriler olan normal küresel eğri ve rektifyan küresel eğri kavramları elde edildi. Bu yeni özel eğrilerin karakteristik denklemlerini, küresel eğrilerin karakterizasyonunu kullanarak belirlendi. Daha sonra Camcı (2019) tarafından tanımlanan  $\beta'' = \kappa_\beta \gamma'$  eşitliğinin  $(\gamma, \beta)$  doğal eğri çiftinden oluştuğu gösterildi ve bu eşitlik doğal eğri çift denklemi olarak adlandırıldı. Bu doğal eğri çift denkleminde normal küresel eğri ve rektifyan küresel eğri arasında geçişler elde edildi. Küresel helislerin genel denklemi kullanılarak bu yeni özel eğrilere örnek verildi. Böylece yeni özel eğrilerin varlığı örneklerle desteklendi. Ayrıca, üç boyutlu Öklid uzayında doğal eğri çift denklemiyle bir rektifyan eğrinin doğal çiftinin karakteristik denklemi belirlendi. Böylece “hangi eğrinin doğal çifti rektifyan eğridir?” problemine çözüm bulundu. Bu tezdeki çalışmalar, Minkowski uzayının farklı boyutlarına genişletilebilir. Bu farklı uzaylardaki çalışmalardan da diğer doğal eğri çiftlerinin karakteristik denklemleri ve eğriler arası geçişler elde edilebilir. Sonuç olarak bu tez çalışması birçok matematikçilere farklı çalışma konuları sunmuş oldu.

## KAYNAKLAR

- Ali, T. A. (2010). *New special curves and their spherical indicatrices*. Global Journal of Advanced Research on Classical and Modern Geometries, 1(2), 28-38. Erişim Adresi: <http://geometry-math-journal.ro/wp-content/uploads/2012/09/New%20special%20curves%20and%20their%20spherical%20indicatrices.pdf>
- Bertrand, J. (1850). *Mémoire sur la theories de courbes a double courbure*. Journal de mathématiques pures et appliquées, 15(1850), 332-350. Erişim Adresi: [http://sites.mathdoc.fr/JMPA/PDF/JMPA\\_1850\\_1\\_15\\_A20\\_0.pdf](http://sites.mathdoc.fr/JMPA/PDF/JMPA_1850_1_15_A20_0.pdf)
- Blum, R. (1965). *A remarkable class of Mannheim curves*. Summer Research Institute of the Canadian Mathematical Congress, 9, 223-228. Erişim adresi: [https://www.cambridge.org/core/services/aop-cambridge-core/content/view/B64FE3C03708A27A4E00888CFA34E34/S0008439500052796a.pdf/remarkable\\_class\\_of\\_mannheimcurves.pdf](https://www.cambridge.org/core/services/aop-cambridge-core/content/view/B64FE3C03708A27A4E00888CFA34E34/S0008439500052796a.pdf/remarkable_class_of_mannheimcurves.pdf)
- Breuer, S., ve Gottlieb, D. (1971). *Explicit characterization of spherical curves*. Proceedings of the American Mathematical Society, 27(1), 126-127. Erişim Adresi: <https://www.ams.org/journals/proc/1971-027-01/S0002-9939-1971-0270275-2/S0002-9939-1971-0270275-2.pdf>
- Camcı, Ç. (2019). *How can we construct a k-slant curve from a given spherical curve?*. Erişim Adresi: <https://arxiv.org/pdf/1912.13392.pdf>
- Camcı, Ç. (2020a). *On a New Type Bertrand Curve*. Erişim Adresi: <https://arxiv.org/pdf/2001.02298.pdf>
- Camcı, Ç. (2020b). *On V-Mannheim Curve*. (Yayımlanmamış makale)
- Chen, B. Y. (2003). *When does the position vector of a space curve always lie in its rectifying plane?*. The American Mathematical Monthly, 110(2), 147-152. Erişim Adresi: <https://www.tandfonline.com/doi/pdf/10.1080/00029890.2003.11919949>
- Chen, B. Y., ve Dillen, F. (2005). *Rectifying curves as centrodes and extremal curves*. Bulletin of the Institute of Mathematics Academia Sinica, 33(2) 77-90. Erişim Adresi: [https://w3.math.sinica.edu.tw/bulletin/bulletin\\_old/d332/33201.pdf](https://w3.math.sinica.edu.tw/bulletin/bulletin_old/d332/33201.pdf)
- Choi, J. H., ve Kim, Y. H. (2012). *Associated curves of a Frenet curve and their applications*. Applied Mathematics and Computation, 218(18), 9116-9124. Erişim Adresi: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0096300312002044>
- Deshmukh, S., Chen, B. Y., ve Alghanemi, A. (2018). *Natural Mates of Frenet Curves in*

- Euclidean 3-Space*. Turkish Journal of Mathematics, 42, 2826-2840. Erişim Adresi: [https://www.researchgate.net/publication/324922627\\_Natural\\_mates\\_of\\_Frenet\\_curves\\_in\\_Euclidean\\_3-space](https://www.researchgate.net/publication/324922627_Natural_mates_of_Frenet_curves_in_Euclidean_3-space)
- Hacısalihoglu, H. H. (1998). *Diferensiyel Geometri Cilt: 1 (4. Baskı)*. Hacısalihoglu Yayıncılık.
- Hsiung, C. C. (1981). *A First Course in Differential Geometry*.
- Izumiya, S., ve Takeuchi, N. (2002). *Generic properties of helices and Bertrand curves*. Journal of Geometry, 74(2002), 97-109. Erişim Adresi: <https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/PL00012543.pdf>
- Izumiya, S., ve Takeuchi, N. (2004). *New special curves and developable surfaces*. Turkish Journal of Mathematics, 28(2004), 153-163. Erişim Adresi: <http://journals.tubitak.gov.tr/math/issues/mat-04-28-2/mat-28-2-6-0301-4.pdf>
- Karger, A., ve Novak, J. (1985). *Space Kinematics and Lie Groups*. Gordon and Breach Science Publishers.
- Kreyszig, E. (1959). *Differential Geometry*. Mathematical Exposition No:11, Toronto and Oxford University Press, 352. Erişim Adresi: [https://www.cambridge.org/core/services/aop-cambridge-core/content/view/4816C2E6DC064F8D92D41D011B04AAF0/S0013091500002881a.pdf/e\\_kreyszig\\_differential\\_geometry\\_mathematical\\_expositions\\_no\\_11\\_toronto\\_and\\_oxford\\_university\\_press\\_1959\\_pp\\_xiv\\_352\\_48s.pdf](https://www.cambridge.org/core/services/aop-cambridge-core/content/view/4816C2E6DC064F8D92D41D011B04AAF0/S0013091500002881a.pdf/e_kreyszig_differential_geometry_mathematical_expositions_no_11_toronto_and_oxford_university_press_1959_pp_xiv_352_48s.pdf)
- Lancret, M. A. (1802). *Memoire sur les courbes a double courbe*. Memoires presentes a l'Institut des sciences, lettres et arts par divers savants, tome 1, (1806). 416-454. Erişim Adresi: [http://sites.mathdoc.fr/JMPA/PDF/JMPA\\_1850\\_1\\_15\\_A20\\_0.pdf](http://sites.mathdoc.fr/JMPA/PDF/JMPA_1850_1_15_A20_0.pdf)
- Liu, H., ve Wang, F. (2008). *Mannheim Partner Curve in 3-Space*. Journal of Geometry, 88(2008), 120-126. Erişim Adresi: <https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/s00022-007-1949-0.pdf>
- Matsuda, H., ve Yorozu, S. (2003). *Notes on Bertrand Curves*. Yokohama Mathematical Journal, 50, 41-58. Erişim Adresi: [https://www.researchgate.net/publication/40623656\\_Notes\\_on\\_Bertrand\\_curves](https://www.researchgate.net/publication/40623656_Notes_on_Bertrand_curves)
- Miller, J. (1905). *Note on Tortuous Curves*. Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, 24, 51-55. doi: <https://doi.org/10.1017/S0013091500033356>
- Millman, R. S., ve Parker, G. D. (1977). *Elements of Differential Geometry*. Prentice-Hall.
- O'Neill, B. (1997). *Elementary Diferantial Geometry*. Second Edition.
- Parkinson, G. A. (1932). *Pairs of Curves in An  $S_n$* . Annals of Mathematics, Second Series,

- 33 (4), 649-657. Erişim Adresi:  
[https://www.jstor.org/stable/1968209?seq=1#metadata\\_info\\_tab\\_contents](https://www.jstor.org/stable/1968209?seq=1#metadata_info_tab_contents)
- Pottmann, H., Schiffner, A., ve Wallner, J. (2008). *Geometry of Architectural Freeform Structures*. Internationale Mathematische Nachrichten, 209(2008), 15-28. Erişim Adresi: <http://www.geometrie.tugraz.at/wallner/arch-immn.pdf>
- Sabuncuoğlu, A. (2004). *Diferensiyel Geometri*. Nobel Basımevi, Ankara.
- Saint-Venant, J. C. (1845). *Memoire sur les lignes courbes non planes*. Journal de l'Ecole polytechnique.
- Scofield, P. D. (1995). *Curves of Constant Precession*. The American Mathematical Monthly, 102(6), 531-537. Erişim Adresi: <http://www.jasoncantarella.com/downloads/Amer.%20Math.%20Monthly%201995%20Scofield.pdf>
- Struik, D. J. (1950). *Lectures on Classical Differential Geometry*. Addison-Wesley Press, INC.
- Watson, J. D., ve Crick, F. H. (1953). *Molecular structures of nucleic acids*. Nature, 171, 737-738. Erişim Adresi: <http://erwan.lageat.free.fr/R1/Articles/Articles%20nature/Crick%20and%20Watson%201953.doc>
- Wong, Y. C. (1972). *On an explicit characterization of spherical curves*. Proceedings of the American Mathematical Society, 34(1), 239-242. Erişim Adresi: <https://www.ams.org/journals/proc/1972-034-01/S0002-9939-1972-0295224-3/S0002-9939-1972-0295224-3.pdf>

## ÖZGEÇMİŞ

### KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Duygu YENİÇIRAK  
Doğum Yeri : Konak/İZMİR  
Doğum Tarihi : 12.08.1993

### EĞİTİM DURUMU

Lisans Öğrenimi : Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi, Fen-Edebiyat  
Fakültesi, Matematik Bölümü, 2012-2016  
Yüksek Lisans Öğrenimi : Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi, Fen Bilimleri  
Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, 2017-2020  
Bildiği Yabancı Diller : İngilizce

### BİLİMSEL FAALİYETLERİ

#### a) Bildiriler

1) Uluslararası

“Öklid Uzayında Rektifyan Küresel Eğriler Üzerine” Sunum Sertifikası, Manisa Celal  
Bayar Üniversitesi, 16. Uluslararası Geometri Sempozyumu, 2018.

### İLETİŞİM

E-posta Adresi : [dyguyncrk93@hotmail.com](mailto:dyguyncrk93@hotmail.com)  
ORCID : 0000-0002-0745-8255