

T.C.
EGE ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü

GRAFLARDA MÜKEMMEL ROMAN BASKINLIK SAYISI

Hüseyin TOKAT

Danışman: Prof. Dr. Alpay KIRLANGIÇ

Matematik Anabilim Dalı
Bilgisayar Bilimleri

İzmir
2024

Hüseyin TOKAT tarafından Doktora tezi olarak sunulan ‘‘Graflarda Mükemmel Roman Baskınlık Sayısı’’ başlıklı bu alışma EÜ Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmelięi ile EÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Eğitim ve Öğretim Yönergesi’nin ilgili hükümleri uyarınca tarafımızdan değerlendirilerek savunmaya değer bulunmuş ve 05.09.2024 tarihinde yapılan tez savunma sınavında aday oybirliği/oyçokluğu ile başarılı bulunmuştur.

Jüri üyeleri

İmza

Jüri Başkanı : Prof. Dr. Alpay KIRLANGIÇ

Raportör Üye: Prof. Dr. Aysun AYTAÇ

Üye : Prof. Dr. Ersin ASLAN

Üye : Doç. Dr. Gökşen Bacak TURAN

Üye : Doç. Dr. İbrahim ŞENTÜRK

EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

EÜ Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin ilgili hükümleri uyarınca Doktora Tezi olarak sunduğum “Baskınlık Parametreleri” başlıklı bu tezin kendi çalışmam olduğunu, sunduğum tüm sonuç, doküman, bilgi ve belgeleri bizzat ve bu tez çalışması kapsamında elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara atıf yaptığımı ve bunları kaynaklar listesinde usulüne uygun olarak verdiğimi, tez çalışması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını, bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya diğer bir üniversitede başka bir tez çalışması içinde sunmadığımı, bu tezin planlanmasından yazımına kadar bütün safhalarda bilimsel etik kurallarına uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul edeceğimi beyan ederim.

05/09/2024

İmzası

Hüseyin TOKAT

ÖZET

GRAFLARDA MÜKEMMEL ROMAN BASKINLIK SAYISI

TOKAT, Hüseyin

Doktora Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Alpay KIRLANGIÇ

Ağustos 2024, 38 sayfa

Graf teorisinde baskınlık, bir grafin belirli tepelerinin diğer tüm tepelerle olan bağlantısını ifade eder. Bir grafin baskınlık sayısı, grafin en küçük baskın kümesinin boyutudur. Roman baskınlık, bir grafin tepelerine belirli bir şekilde sayılar atayarak grafin her tepesini belirli bir strateji altında korumak amacıyla geliştirilmiştir. Bu yöntemde, her tepe 0, 1 ve 2 ile etiketlenir. Bu strateji, Roma İmparatorluğu dönemindeki garnizon sistemine benzer şekilde, belirli tepelerde "asker" bulundurarak diğer tepelerin savunmasını sağlamayı hedefler. Roman baskınlık kavramında 0 ile işaretlenen tepenin birden fazla 2 ile işaretlenmiş komşu tepesi bulunabilir. Dolayısıyla, bir tepeyi bastırmak için birden fazla kaynak harcanmaktadır. Bu belirsizlik ve karmaşa içeren durumdan kurtulmak amacıyla mükemmel Roman baskınlık sayısı tanımlanmıştır.

Bölüm 1'de, temel tanımlar ve bazı baskınlık ölçümlerinin tanımları verilmiştir.

Bölüm 2'de, graf işlemleri ve mükemmel Roman baskınlık sayısı ile ilgili çalışmalar ve sonuçlar verilmiştir.

Bölüm 3'te, grid grafların mükemmel Roman baskınlık sayısı hesaplanmıştır. Grid graflar için Roman baskınlık ve mükemmel Roman baskınlık sayıları arasındaki farklar detaylı olarak gösterilmiştir.

Bölüm 4'te, P_n^{---} , P_n^{+++} , P_n^{-++} , C_n^{---} , C_n^{--+} graflarının mükemmel Roman baskınlık değerleri verilmiştir. Ayrıca, n tepeli bir G grafinin transformasyon grafi olan G^{--+} için mükemmel Roman baskınlık değeri hesaplanmıştır.

Anahtar sözcükler: Baskınlık Sayısı, Roman Baskınlık Sayısı, Mükemmel Roman Baskınlık Sayısı, Grid Graflar, Transformasyon Graflar.

ABSTRACT

PERFECT ROMAN DOMINATION NUMBER IN GRAPHS

TOKAT, Hüseyin

Ph.D. in Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Alpay KIRLANGIÇ

August 2024, 38 pages

In graph theory, domination refers to the connection of certain vertices of a graph with all other vertices. The domination number of a graph is the size of the smallest dominating set of the graph. Roman domination is a concept developed to protect each vertex of the graph under a specific strategy by assigning certain numbers to the vertices of a graph. In this method, each vertex is labeled with 0, 1, or 2. This strategy aims to ensure the defense of other vertices by placing "soldiers" on certain vertices, similar to the garrison system during the Roman Empire. In the concept of Roman domination, a vertex marked with 0 can have multiple neighboring vertices marked with 2. Therefore, multiple resources are spent to dominate a single vertex. In order to get rid of this uncertainty and confusion, the perfect Roman dominance number has been defined.

In Chapter 1, basic definitions and definitions of some domination measures are provided.

In Chapter 2, graph operations and studies and results related to the perfect Roman domination number are presented.

In Chapter 3, the perfect Roman domination number of grid graphs is calculated. The differences between Roman domination and perfect Roman domination numbers for grid graphs are shown in detail.

In Chapter 4, the perfect Roman domination values of the graphs P_n^{---} , P_n^{+++} , P_n^{-++} , C_n^{---} , and C_n^{+++} are provided. Additionally, the perfect Roman domination value for G^{-++} , the transformation graph of a graph G with n vertices, is calculated.

Keywords: Domination Number, Roman Domination Number, Perfect Roman Domination Number, Grid Graphs, Transformation Graphs.

ÖNSÖZ

Bu tezimin konusu olan mükemmel Roman baskınlık kavramı hem araştırma sürecinde hem de bir şeyler üretme sürecinde bana farklı bakış açıları ve bilimsel zenginlik kattı. Konunun çıkış noktası ve derinliği hep yeni bir şeyler keşfetmenin mutluluğunu verdi. Öğrenme ve keşif sonrası üretebilmek ile gelen zafer duygusunu da bana sonuna kadar hissettirdi. Dolayısıyla, bu tez, sadece akademik kariyerimde değil, aynı zamanda kişisel gelişimimde de önemli bir yere sahiptir.

Bu süreçte yanımda olan ve tecrübesiyle, anlayışı ile her türlü zorluğun altından kalkmamı sağlayan tez danışmanı hocam Sayın Prof. Dr. Alpay Kırlangıç'a teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, her koşulda beni desteklemiş ve bu günlere gelmem konusunda her türlü fedakarlığı yapmış olan aileme sonsuz teşekkür ederim.

Son olarak, bu tez çalışmasının, baskınlık alanında yeni ufuklar açacağına ve ileride yapılacak çalışmalara ışık tutacağına inanıyorum. Bu süreç boyunca öğrendiklerim ve kazandığım deneyimler, kariyerimin her aşamasında bana yol gösterecek.

İZMİR

05/09/2024

Hüseyin TOKAT

İÇİNDEKİLER

Sayfa

İÇ KAPAK	ii
KABUL VE ONAY SAYFASI	iii
ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI	v
ÖZET	vii
ABSTRACT	ix
ÖNSÖZ	xi
İÇİNDEKİLER	xiii
ŞEKİLLER DİZİNİ	xv
TABLolar DİZİNİ	xvii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	xix
1 GİRİŞ	1
2 BASKINLIK SAYISI İLE İLGİLİ BAZI SONUÇLAR VE TANIMLAR	11
2.1 Graf İşlemleri	11
2.2 Literatürde Yeralan Sonuçlar	15
3 GRID GRAFLAR	20
3.1 Grid Grafların Mükemmel Roman Baskınlık Sayısı	20
3.2 Grid Graflar Üzerinde İki Parametrenin Karşılaştırılması	25
4 TRANSFORMASYON GRAFLAR	27
5 SONUÇ	32
KAYNAKLAR DİZİNİ	34
TEŞEKKÜR	37
ÖZGEÇMİŞ	38

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Şekil</u>	<u>Sayfa</u>
1.1 Vezir Baskınlık Problemi için satranç tahtası (Curro, 2014)	1
1.2 Vezir Baskınlık Problemi Çözümü (Curro, 2014)	2
1.3 Roma İmparatorluğu	6
1.4 Roma İmparatorluğu'nun Graf ile Modellenmesi (Curro, 2014)	7
2.1 $P_9 \times P_9$ Grid Grafi	12
2.2 P_6 yol grafi ve P_6^{--} transformasyon grafi	14
2.3 P_6^{+++} transformasyon grafi	14
2.4 Grid graflar üzerinde 2 ile işaretlenmiş tepelerin oluşturduğu örtü şemaları	16
3.1 $P_n \times P_m$ Grafında Oluşan Desenler (Patterns)	21
3.2 $P_n \times P_m$ Grafının İlk ve Son Satırları	22
3.3 $P_n \times P_m$ Grafının İlk ve Son Sütunları	22
3.4 $P_n \times P_m$ Grafının Tepeleri	23
4.1 G_0 etkilenmiş alt grafları	29
4.2 P_n^{+++} grafında $n \bmod 5 \equiv 1$ ise oluşan ayrık G_0 grafları	29
4.3 P_n^{+++} grafında $n \bmod 5 \equiv 2$ ise oluşan ayrık G_0 grafları	29
4.4 P_n^{+++} grafında $n \bmod 5 \equiv 3$ ise oluşan ayrık G_0 grafları	30
4.5 P_n^{+++} grafında $n \bmod 5 \equiv 4$ ise oluşan ayrık G_0 grafları	30
4.6 P_n^{+++} grafında $n \bmod 5 \equiv 0$ ise oluşan ayrık G_0 grafları	31

TABLOLAR DİZİNİ

ÇizelgeSayfa

3.1 Mükemmel Roman baskınlık sayısı ve Roman baskınlık sayısı arasındaki farklar	26
---	----

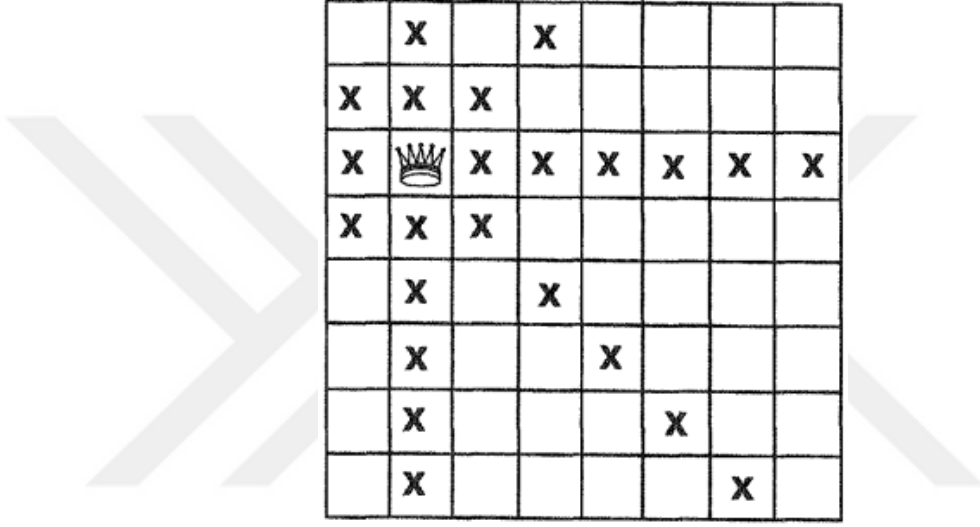


SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklama</u>
$V(G)$	G grafının tepe kümesi
$E(G)$	G grafının ayrıt kümesi
$N(u)$	u tepesinin açık komşuluğu
$N[u]$	u tepesinin kapalı komşuluğu
$N(S)$	S kümesinin açık komşuluğu
$N[S]$	S kümesinin kapalı komşuluğu
$\gamma(G)$	G grafının baskınlık sayısı
$\gamma_R(G)$	G grafının Roman baskınlık sayısı
$\gamma_R^P(G)$	G grafının mükemmel Roman baskınlık sayısı
$G_1 \times G_2$	G_1 ve G_2 graflarının kartezyen çarpımı
$G_1 \circ G_2$	G_1 ve G_2 graflarının taçlama işlemi
$G_1[G_2]$	G_1 ve G_2 graflarının bileşke işlemi

1 GİRİŞ

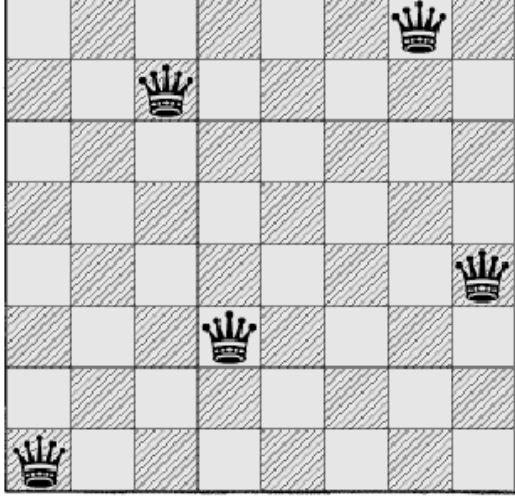
19. yüzyılda 8×8 satranç tahtasının tüm karelerini kontrol etmek (bastırmak ya da örtmek) için en az kaç tane vezir gerektiği araştırılmıştır. Şekil 1.1'de 8×8 satranç tahtası üzerinde bir vezir verilmiştir. Vezir satranç tahtası üzerinde yatay, dikey ya da diyagonal şekilde hareket edebilir (hareket yolunda herhangi başka bir satranç taşı olmadığını varsayalım). Şekil 1.1'de vezirin kontrol edebileceği kareler 'X' ile gösterilmiştir. Buradaki problem Vezir Baskınlık Problemi olarak bilinir (De Jaenisch, 1862).



Şekil 1.1: Vezir Baskınlık Problemi için satranç tahtası (Curro, 2014)

Çözüm için problemde, satranç tahtası üzerindeki kareleri merkezler ve vezir taşlarının hareketleri bu merkezler arasındaki bağlantılar olarak modelleyebiliriz. 8×8 satranç tahtası üzerine doğru konumlarda yerleştirilecek 5 vezir ile tüm satranç tahtası kontrol edilebilir (Şekil 1.2).

Bir ağ merkezler ve merkezler arasındaki bağlantı hatlarından oluşur. Ağlar, birbirine bağlı bilgisayarları, verileri hatta günümüzde sık sık kullanılan sosyal ilişkileri temsil ederler. Tasarlanmış bir ağ üzerinde kullanım amaçlarına göre bazı merkezler diğer merkezlerden daha kritik öneme sahiptirler. Örneğin, bazı merkezler ile diğer merkezlerin hepsine erişim sağlanabilir ve bu sayede



Şekil 1.2: Vezir Baskınlık Problemi Çözümü (Curro, 2014)

merkezlerin bir bölümü ile tüm ağ kontrol edilebilir. Her ağ, merkezleri tepeler, bağlantıları da ayrıtlar olacak şekilde bir graf ile modellenilebilir.

$G = (V(G), E(G))$ bir graf olmak üzere $V(G)$ kümesi grafın tepeler kümesini, $E(G)$ kümesi de grafın ayrıtlar kümesini belirtir. $|V(G)| = n$ grafın tepe sayısıdır. $u \in V(G)$ ve $v \in V(G)$ olmak üzere u ve v tepeleri arasında bir ilişki varsa G grafında $uv \in E(G)$ olarak bir ayrıt vardır.

Bir G grafında, u tepesinin ayrıtlar ile bitişik olduğu tepe sayısı $deg_G(u)$ ile gösterilir ve u tepesinin derecesi olarak isimlendirilir. G grafının minimum derecesi $\delta(G) = \min\{deg_G(u) : u \in V(G)\}$ olarak gösterilir. Benzer şekilde G grafının maksimum derecesi $\Delta(G) = \max\{deg_G(u) : u \in V(G)\}$ olarak ifade edilir.

Bir satranç tahtasını bir G grafi ile modelleyebiliriz. Satranç tahtasının belirli sayıdaki karesinden diğer karelerini kontrol etmek (ya da bastırmak) gibi graf üzerinde de grafın belirli tepeleri ile tüm grafın bastırılması mümkündür. Bu durumda problem, Graf (Tepe) Baskınlık Problemi olarak ifade edilir.

Graf (Tepe) Baskınlık Problemi, bir grafın baskınlık sayısını, yani en küçük baskın kümenin boyutunu bulmayı amaçlar. Minimum Baskınlık Problemi

olarak da adlandırılan bu problem NP-zor bir problemdir. Bu problem (Ore, 1962) ve (Berge, 1973) tarafından ortaya konmuş ve araştırılmıştır.

(Haynes, 1998)'de yazarlar, Minimum Baskınlık Problemi için belirli kısıtlamalar altında bir baskın kümenin bulunması durumunu incelemiştir. Bu problem de Kısıtlı Baskınlık Problemi olarak isimlendirilmiştir. Bu problemde, belirli tepelerin veya ayrıtların dahil edilmesi veya hariç tutulması gerekmektedir.

Aynı zamanda (Haynes, 1998)'de yazarlar, baskın kümenin, grafın bağlı bir alt grafını oluşturduğu, yani, baskın kümenin elemanları arasında herhangi bir bağlantı kopukluğu olmadığı bir problem tanımlamıştır. Bu problem Bağlı Baskınlık Problemi (Connected Domination Problem) olarak isimlendirilir.

(Cockayne, 2005)'de yazarlar, Toplam Baskınlık Problemi'ni (Total Domination Problem) tanımlamıştır. Bu problemde, baskın kümenin her bir üyesinin aynı zamanda baskın kümenin diğer üyelerinden de en az birisi ile komşu olması gerekmektedir.

Baskınlık kavramınının tanımını verebilmek için komşuluk tanımına ihtiyaç vardır. Bir grafın baskın kümesi grafın diğer elemanları ile komşu olmalıdır.

Tanım 1.1. (Berge, 1962) $u \in V(G)$ olmak üzere $N(u) = \{v \in V(G); u \neq v, uv \in E(G)\}$ kümesi, u tepesinin açık komşuluğu olarak isimlendirilir. $N[u] = \{u\} \cup N(u)$ kümesi de u tepesinin kapalı komşuluğu olarak isimlendirilmektedir. Benzer şekilde $S \subseteq V(G)$ olmak üzere $N(S) = \{v \in V \setminus S; \forall u \in S \text{ için } \exists uv \in E(G)\}$ kümesi, S kümesinin açık komşuluğudur. $N[S] = S \cup N(S)$ kümesi de S kümesinin kapalı komşuluğudur.

Tanım 1.2. (Ore, 1962) G birleştirilmiş bir graf ve $S \subseteq V(G)$ olmak üzere G grafındaki her bir tepe, S kümesinden bir tepeye komşu ya da S kümesinde içeriliyor ise S kümesine G grafının baskın kümesi denir. Bir grafın birden fazla baskın kümesi olabilir ve bu kümeler arasında en az elemana sahip olan kümenin eleman sayısına G grafının baskınlık sayısı denir ve $\gamma(G)$ ile gösterilir.

Graf teorisinde baskınlık, bir grafın belirli tepelerinin diğer tüm tepelerle olan bağlantısını ifade eder. Bir grafın baskınlık sayısı, grafın en küçük baskın kümesinin boyutudur. Başka bir deyişle, bir grafın tüm tepelerine komşu olan en küçük tepe kümesinin eleman sayısıdır. Bu kavram, Matematik, Bilgisayar Bilimleri, Biyoloji ve Sosyal Bilimler gibi alanlarda, karmaşık sistemlerin anlaşılması ve yönetilmesi için temel araçlar arasında yer almaktadır.

Baskınlık kavramının uygulama alanlarından birisi ağ tasarımı ve analizidir. Bir bilgisayar ağında güvenliğin sağlanması veya haberleşmenin en verimli şekilde yapılabilmesi için ağ üzerinde bulunan tepeleri daha az kaynak harcayarak kontrol edebilecek tepelerin belirlenmesi önemlidir.

Baskınlık sadece bilgisayar ağları üzerinde değil, aynı zamanda sosyal ağ yapılarının incelenmesi ve analiz edilebilmesinde de rol oynar. Bir toplum üzerinde etkili olan bireylerin toplumun diğer üyeleri üzerindeki etkisi ile bilgi yayılımı kolaylaşmaktadır. Günümüzde kullanılan sosyal medya uygulamaları birer sosyal ağa örnek olarak verilebilir. Bilgi yayılımı için sosyal medyada etkili kişiler daha fazla kişiye ulaşabilir ve bu sayede aktarılmak istenen bilgi daha fazla kişi tarafından öğrenilebilir. Günümüzde bu durum 'Instagram' uygulaması üzerinden bir ürünün reklamını yapmak için sık sık kullanılmaktadır.

Baskınlık aynı zamanda biyoinformatik alanında kullanılmaktadır. Gen ve protein etkileşim ağlarında baskınlık, biyolojik süreçlerin anlaşılmasına ve önemli biyomoleküllerin belirlenmesine yardımcı olmaktadır.

Baskınlık kavramının bir başka kullanım alanı da oyun teorisinde stratejik etkileşimlerin modellenmesinde ve analiz edilmesidir.

Şimdi baskın fonksiyonu tanımlayalım.

Tanım 1.3. (Ore, 1962) $f : V \rightarrow \{0, 1\}$ bir fonksiyon olmak üzere,

$$\forall v \in V(G) : f(v) = 0, \exists u \in V(G) : f(u) = 1 \wedge uv \in E(G)$$

koşulunu sağlıyor ise f fonksiyonuna baskın fonksiyon denir. Her $v \in V(G)$

için $g \neq f$ ve $g(v) \leq f(v)$ olacak şekilde bir g baskın fonksiyonu yok ise f minimal baskın fonksiyonudur. Buradan, baskınlık sayısı;
 $\gamma(G) = \min_f \sum_{v \in V(G)} f(v)$ olarak hesaplanır.

Baskın fonksiyonunu graf üzerindeki tepelerin 0 ve 1 ile etiketlenmesi olarak ele alabiliriz. Fonksiyon tarafından 1 ile işaretlenmiş tepeler baskın kümeye karşılık gelmektedir. Bu durumda, baskınlık kavramında baskın kümenin her elemanı 1'dir ve eşittir. Baskın kümenin elemanları arasında bir üstünlük yoktur. Ancak bir ağ üzerinde ağın elemanları arasında bir üstünlük bulunabilir. Örneğin, sunucular ve bilgisayarların içerildiği bir ağda ağı kontrol etmek için sunucuların açık üstünlüğü vardır. Bu gibi durumlarda baskınlık kavramı yerine kullanılacak bir başka ölçüm de Roman baskınlıktır. Roman baskınlık, bir grafın tepelerine belirli bir şekilde sayılar atayarak grafın her tepesini belirli bir strateji altında korumak amacıyla geliştirilmiştir. Bu yöntemde, her tepe 0, 1 ve 2 ile etiketlenir. Bu strateji, Roma İmparatorluğu dönemindeki garnizon sistemine benzer şekilde, belirli tepelerde "asker" bulundurarak diğer tepelerin savunmasını sağlamayı hedefler.

Roman baskınlık kavramının tarihsel tanımı ve kullanımı, III. ve IV. yüzyılda Roma İmparatorluğu'nun askeri strajesine dayanmaktadır. III. yüzyılda (201-300) Roma İmparatorluğu Avrupa, Kuzey Afrika ve Yakın Doğu üzerinde geniş topraklara sahipti. Şekil 1.3'te Roma İmparatorluğu'nun haritası verilmiştir. İmparatorluğun kendisinin ve sınırlarının uçtan uca güvenliği yaklaşık 50 adet lejyon birliği ile sağlanmaktaydı.

Ancak IV. yüzyıla gelindiğinde dönemin savaşları ve krizleri nedeniyle imparatorluk güç kaybetmiş ve lejyonlarının sayısı çok hızlı bir şekilde yarıya düşmüştü. Bu durum sonucunda, imparatorluğun topraklarının savunulması için bir savunma stratejisi geliştirilmesi gerekiyordu.

Dönemin imparatoru Büyük Constantine (Constantine the Great) bu sorunu çözmek için bir savunma strajesi geliştirmiştir. Lejyon birliklerini daha mobil



Şekil 1.3: Roma İmparatorluğu

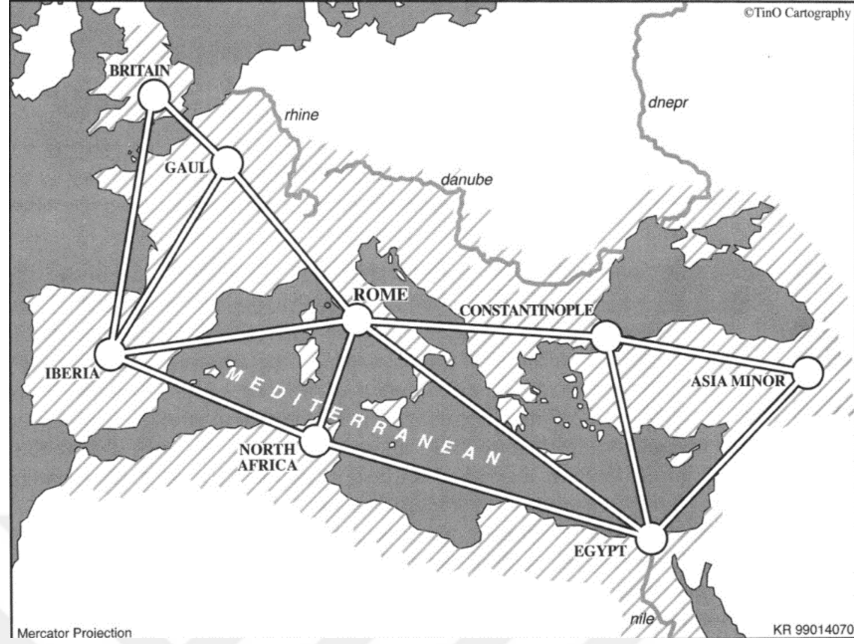
olan Bölge Orduları (Field Armies)'na dönüştürmüştür. Çıkan isyanlar ve yağmalara karşı bu birlikler kullanılmıştır.

Bu sayede, yakın bölgelerde çıkan bir savaşta ya da baskına müdahale edilecek ordu kavramının (ileri savunma stratejisi) ortaya çıkmasını sağlamıştır. Ayrıca döneminde yerel paralı asker (par time militias) kavramının oluşmasını sağlamıştır. Oluşturulan bölge orduları (FAs) farklı birimlerden oluşmaktaydı. Öyle ki her bir bölge ordusu yaklaşık 6 lejyon birliğinden oluşmaktaydı.

Bu yeni stratejiye göre, bir bölgede bir ya da daha fazla bölge ordusu varsa o bölge güvenli kabul ediliyordu. Dahası, bölge ordusu olmayan bir bölge, yakınındaki bir başka bölgede birden fazla bölge ordusu varsa ve o bölgeden tek adımda bir bölge ordusu gelebiliyorsa güvenliği sağlanabilir bölge olarak kabul edilmekteydi.

İmparatorluğun bölgeleri grafın tepeleri olacak şekilde ve bu bölgeler arasındaki yolları da grafın ayrıtları olacak şekilde düşündüğümüzde Şekil 1.4'te görülen graf ortaya çıkmaktadır. Roma İmparatoru'nun bir sonraki karşılaşacağı sorun ise bu mobil orduların hangi bölgelere yerleştirileceği

olacaktı. Dönemin savaşları ve isyanları sebebi ile iyice güç kaybetmiş olan imparatorluğun elinde 4 adet bölge ordusu kalmıştı.



Şekil 1.4: Roma İmparatorluğu'nun Graf ile Modellenmesi (Curro, 2014)

Roma İmparatoru, 2 bölge ordusunu Roma'ya, 2 bölge ordusunu ise Constantinople (İstanbul)'de bulundurmıştır. Bu durum stratejik olarak hatalı olmuştur. Bu strateji altında güvenli ya da güvenliği sağlanabilir bir durumda olmayan Britanya'nın ilk kaybedilen bölge olması şaşırtıcı değildir. Günümüz analizlerinde orduların, 1 bölge ordusu Britanya'da, 2 bölge ordusu Roma'da ve 1 bölge ordusu Asia Minor'de olacak şekilde konumlandırılması imparatorluğun güvenliğini sağlayacağını göstermektedir. Bir başka çözüm ise 2 bölge ordusunun Gaul'de, 2 bölge ordusunun da Egypt'de (Mısır) olması olarak söylenebilir.

Ancak bu çözümler imparatorluğun iki başkentinden birisini savunmasız bırakmayı içerdiği için dönemin imparatoru tarafından düşünülmemiştir.

Bu strateji dünyada en az iki defa daha kullanılmıştır. XIX. yüzyılda İngiliz İmparatorluğu'nun dünya üzerindeki denizleri ve kendi kıyılarını korumak için

Savaş Filoları (Battle Fleets) kullanması bu stratejinin bir örneğidir. Bir diğer kullanımı da Amerika Birleşik Devletleri'nin Soğuk savaş sonrası dört Kuvvet Birimleri (Unit of Forces) ile beş bölgeyi korumasıdır.

Roman baskınlık, bir grafın tepelerine belirli bir şekilde sayılar atayarak her tepenin korunmasını sağlayan bir yaklaşımı temsil eder. Bu yaklaşımda, her tepe 0, 1 veya 2 ile etiketlenir. Etiketleme, tepelerin birbirini koruma kapasitesine göre yapılır.

Roman baskınlık probleminde, 2 ile etiketlenen bir tepe, hem kendisini hem de bir komşularını koruyabilirken, 1 ile etiketlenen bir tepe sadece kendisini koruyabilir. 0 ile etiketlenen tepeler ise koruma altında değildir ve korunmaları komşu tepeler tarafından sağlanmalıdır.

Roman baskınlık sayısı, bir grafın tüm tepelerini yukarıda ifade edilen şekilde koruyabilmek için gereken en küçük toplam etiket değeridir.

Bu bağlamda, Roman baskınlık problemi, grafın tüm tepelerini minimum toplam etiket değeri ile korumayı amaçlamaktadır. Roman baskınlık, büyük ve karmaşık ağların yönetimi ve korunmasında etkin bir yapıya sahiptir. Örneğin (Pagourtzis, 2002) ve (Shang, 2007)'de ağlara kablosuz sunucu yerleştirilmesi ve konumlandırılması konuları araştırılmıştır.

(Dreyer, 2000) ve (Cockayne, 2004)'de yazarlar, Roman baskınlık problemini graf teoriye taşıyarak ele almışlardır.

Tanım 1.4. (Cockayne, 2004) G grafında $f(u) = 0$ olan her u tepesi en az bir tane $f(v) = 2$ olan v tepesine komşu ise $f : V(G) \rightarrow \{0, 1, 2\}$ fonksiyonu Roman baskın fonksiyon olarak adlandırılır. u tepesinin ağırlığı $f(u)$ olarak gösterilir ve fonksiyonun ağırlığı $w(f)$, tüm tepelerin ağırlıklarının toplamıdır ($\sum_{u \in V(G)} f(u)$). G grafında minimum ağırlığa sahip fonksiyonun ağırlığına G grafının Roman baskınlık sayısı adı verilir ve $\gamma_R(G)$ ile gösterilir.

(Dreyer, 2000)'de yazar Roman baskınlık fonksiyonunu ağaçlar üzerinde hesaplayabilen polinomial zamanda çalışan bir algoritma sunmuştur. Çevre içermeyen ve birleştirilmiş bir G grafının ağaçlardan oluşabilen bir orman olarak ele alan bu çözümde $G = \cup T_i = T_1 \cup T_2 \cup \dots \cup T_n$ olacak şekilde G grafının Roman baskınlık sayısının $\gamma_R(G) = \sum \gamma_R(T_i)$ olduğunu göstermiştir.

Ayrıca (Cockayne, 2004)'de yazarlar, baskınlık sayısı ve Roman baskınlık sayısını karşılaştırarak iki ölçüm arasında ilişkiler kurmuşlardır. Ortaya konulan bu sonuçlar Bölüm 2'de verilmiştir.

(Cockayne, 2005)'de yazarlar, grid grafların Roman baskınlık sayısı için bir üst sınır tanımlamışlardır. Ayrıca herhangi bir G grafi için alt sınır tanımlamışlardır.

(Liedloff, 2008)'de yazarlar, aralık (interval) graflar ve co-graflar gibi bazı graf sınıflarında Roman baskınlık sayısını lineer zamanda hesaplayabilen algoritmalar ortaya koymuşlardır.

(Curro, 2014)'de yazarlar $\gamma_R(G)$ 'nin NP -tam problem olduğunu göstermişlerdir.

Ayrıca (Curro, 2014)'de yazarlar Roman baskınlık sayısı için grid graflar üzerinde araştırmalar yapmıştır. (Cockayne, 2005)'de bulunan alt ve üst sınırı iyileştirmişlerdir.

Roman baskınlık, graf teorisinde önemli bir kavram olup, bir grafın tüm tepelerinin belirli bir strateji altında korunmasını sağlar. Roman baskınlık kavramında 0 ile işaretlenen tepenin birden fazla 2 ile işaretlenmiş komşu tepesi bulunabilir. Dolayısıyla, bir tepelyi bastırmak için birden fazla kaynak harcanmaktadır. Tarihsel hikayemize sadık kaldığımızda 0 ile işaretli bölgeye gelecek ordunun 2 ile işaretlenmiş hangi tepeden geleceği belirsizdir. Bu belirsizlik ve karmaşa içeren durumdan kurtulmak ve sorunu çözmek amacıyla Mükemmel Roman baskınlık kavramı (Henning, 2018) tarafından tanımlanmıştır.

Tanım 1.5. (Henning, 2018) $G = (V(G), E(G))$ grafında $f(u) = 0$ olan her u tepesi tam olarak (kesinlikle) bir tane $f(v) = 2$ olan v tepesine komşu ise $f : V(G) \rightarrow \{0, 1, 2\}$ fonksiyonu mükemmel Roman baskın fonksiyonu olarak adlandırılır. u tepesinin ağırlığı $f(u)$ olarak gösterilir ve fonksiyonun ağırlığı $w(f)$, tüm tepelerin ağırlıklarının toplamıdır ($\sum_{u \in V(G)} f(u)$). G grafında minimum ağırlığa sahip fonksiyonun ağırlığına G grafının mükemmel Roman baskınlık sayısı denir ve $\gamma_R^P(G)$ ile gösterilir.

G grafında tanımlı bir f mükemmel Roman baskınlık fonksiyonu $V(G) = (V_0, V_1, V_2)$ olacak şekilde tepeler kümesinin bir parçalanışını gösterir. $V_i = \{v \in V(G) : f(v) = i\}$ olarak gösterilir.

Eğer $|V_i| = n_i$ olarak gösterilirse $|V(G)| = n_0 + n_1 + n_2$ 'dir. Ayrıca f fonksiyonunun ağırlığı;
 $f(V) = \sum_{u \in V(G)} f(u) = 2.n_2 + 1.n_1 + 0.n_0 = 2.n_2 + n_1$ 'dir.

Bölüm 2'de, graf işlemleri ve mükemmel Roman baskınlık sayısı ile ilgili çalışmalar ve sonuçlar verilmiştir.

Bölüm 3'te, grid grafların mükemmel Roman baskınlık sayısı hesaplanmıştır. Grid graflar için Roman baskınlık ve mükemmel Roman baskınlık sayıları arasındaki farklar detaylı olarak gösterilmiştir.

Bölüm 4'te, P_n^{---} , P_n^{+++} , P_n^{--+} , C_n^{--+} , C_n^{---} graflarının mükemmel Roman baskınlık değerleri verilmiştir. Ayrıca, n tepeli bir G grafının transformasyon grafi olan G^{--+} için mükemmel Roman baskınlık değeri hesaplanmıştır.

2 BASKINLIK SAYISI İLE İLGİLİ BAZI SONUÇLAR VE TANIMLAR

2.1 Graf İşlemleri

Günümüzde kullanılan ağları modellemek için belirli özellikleri olan büyük graflar kullanılmaktadır. Bu grafların oluşturulması için graf işlemleri kullanılmaktadır.

Graf işlemleri, karmaşık sistemlerin modellenmesi ve analizi için güçlü araçlar sunar. Örneğin, Kartezyen çarpım işlemi, iki grafın birleşimiyle yeni bir graf oluşturur ve bu yeni graf, orijinal grafların özelliklerini taşır. Bu tür işlemler, büyük ve karmaşık ağların (örneğin, iletişim ağları, sosyal ağlar) modellenmesinde ve analizinde kullanılır. Graf işlemleri sayesinde, sistemlerin davranışları ve dinamikleri daha iyi anlaşılabilir.

Graf işlemleri, algoritma tasarımı ve optimizasyon süreçlerinde de kritik bir rol oynar. Birçok graf problemi, belirli işlemler kullanılarak daha basit ve çözümü daha kolay alt problemlere indirgenebilir. Bu sayede, graf problemlerinin çözümünde zaman ve kaynak tasarrufu sağlanabilir.

Graf işlemleri, veri analizi ve bilgi keşfi süreçlerinde de önemli bir rol oynar. Sosyal ağ analizi, biyoinformatik, finansal ağlar gibi alanlarda, büyük veri kümelerinin analizi için grafikler kullanılır. Graf işlemleri, bu verilerin yapılandırılmasında ve ilişkilerin keşfedilmesinde kullanılırlar.

Graf işlemleri, iki veya daha fazla grafın birleştirilmesi, ayrılması veya dönüştürülmesiyle yeni grafların elde edilmesini sağlar. Kullanılan bazı graf işlemleri, toplam (join) işlemi, kartezyen çarpımı(cartesian product), graf birleşimi (graph union) ve transformasyon işlemidir.

Tanım 2.1. G ve H graflarının toplama işlemi sonucu oluşan $G + H$ grafının tepeler kümesi $V(G) \cup V(H)$ ve ayrıtlar kümesi $E(G) \cup E(H) \cup \{uv : u \in$

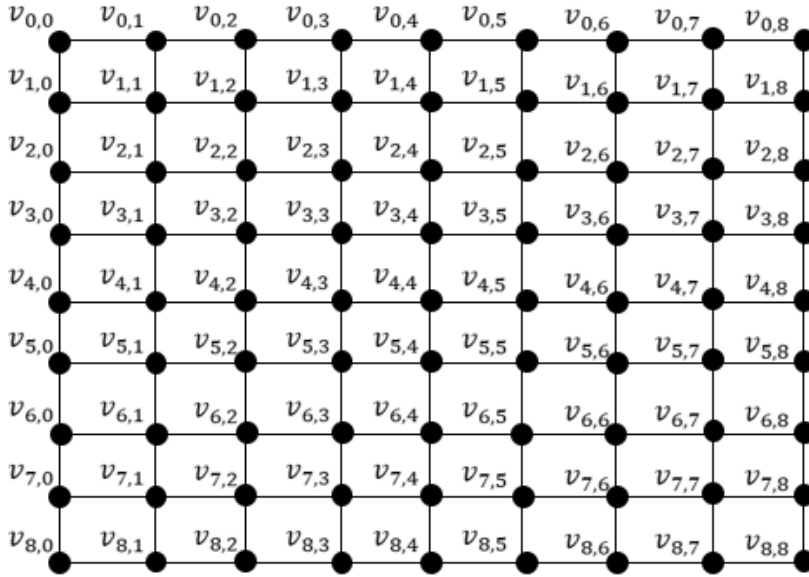
$V(G), v \in V(H)\}$ olarak tanımlanır.

Tanım 2.2. (Sabidussi, 1960) G ve H graflarının kartezyen çarpımı hesaplanırken, $G \times H$ grafinin tepeler kümesi $V(G) \times V(H)$ olarak bulunur ve $u, v \in G$ ve $u', v' \in H$ olmak üzere, $G \times H$ grafindaki (u, u') ve (v, v') tepelerinin bir ayrıt ile birleştirilmiş olması için

- $G \times H$ grafinda $u=v$ ve H grafinda u' tepesi v' tepesine komşu olmalı veya
- $G \times H$ grafinda $u' = v'$ ve G grafinda u tepesi v tepesine komşu olmalıdır.

Tanım 2.3. Grid graf, n ve m tepeli iki yol grafin kartezyen çarpımı sonucu oluşan $n * m$ tepeli graflardır. $P_n \times P_m$ olarak gösterilmektedir.

n ve m tepeli iki yol grafin kartezyen çarpımı sonucu oluşan bir grid graf, n adet satıra ve m adet sütuna sahiptir. Şekil 2.1'te $P_9 \times P_9$ grid grafi gösterilmiştir. Tepeler kümesi $V(P_n \times P_m) = \{v_{i,j}; 0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m\}$ olarak ifade edilir.



Şekil 2.1: $P_9 \times P_9$ Grid Grafi

Tanım 2.4. (Harary, 1962) G bir graf olsun. Bir G grafinin ayrıt (line) grafi $L(G)$ ile gösterilir ve $V(L(G)) = E(G)$ 'dir. Ayrıt grafin ayrıtlar kümesi

ise G grafında komşu olan ayrıtlara karşılık gelen tepelerin bir ayrıt ile birleştirilmesiyle elde edilir.

Tanım 2.5. (Chartrand, 1986) Bir G grafının tümleyen grafi \overline{G} ile gösterilir ve $V(\overline{G}) = V(G)$ 'dir. G grafında komşu olmayan iki tepe \overline{G} grafında bir ayrıt ile birleştirilmiştir. Dolayısıyla, G grafında komşu olan iki tepe \overline{G} grafında komşu değildir.

Tanım 2.6. (Wu, 2005),(Xu, 2008) G bir graf olsun. u ve v , $V(G) \cup E(G)$ kümesinin iki elemanı olsun. u ve v , G grafında komşu iki tepe ya da ayrıt ise, ya da biri tepe biri ayrıt olmak üzere, tepe ayrıtın uç tepesi (ilişkili) ise " + " simgesi ile, ilişkili değil ise " - " simgesi ile gösterilir. xyz , $\{+, -\}$ simgelerinin 3 elemanlı permütasyonları olsun. u ve v için,

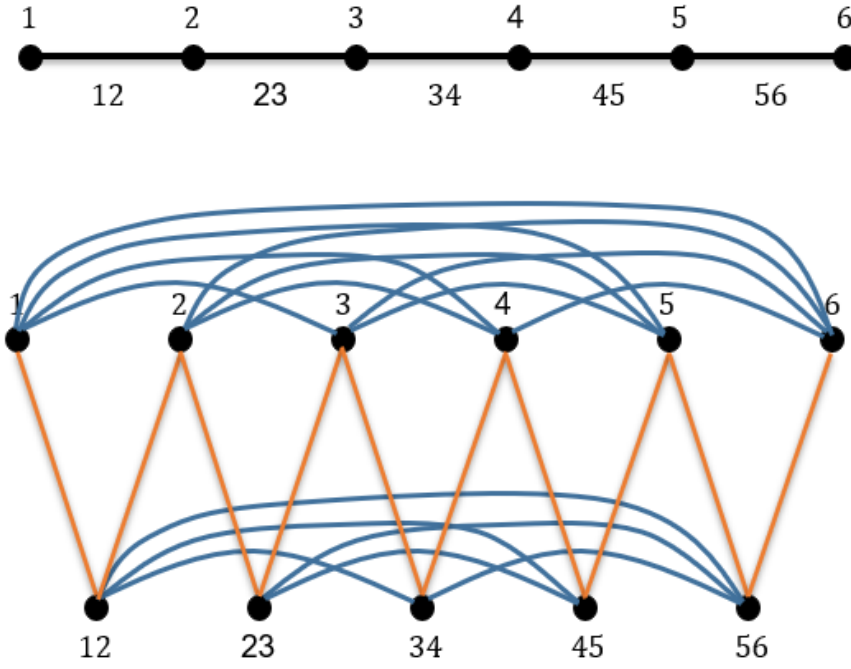
- u ve v 'nin ikisi de grafın tepeler kümesine ait ise xyz 'nin birinci terimi x 'e karşılık gelir.
- u ve v 'nin ikisi de grafın ayrıtlar kümesine ait ise xyz 'nin ikinci terimi y 'ye karşılık gelir.
- u ve v 'den birisi grafın tepeler kümesine ve diğeri de ayrıtlar kümesine ait ise xyz 'nin üçüncü terimi z 'ye karşılık gelir.

G grafının G^{xyz} transformasyon (transformation) grafının tepeler kümesi $V(G) \cup E(G)$ 'dir. G^{xyz} grafının iki tepesi u ve v arasında, xyz 'de karşılık gelen terim " + " ise bir ayrıt konur. Aksi halde, " - " ise aralarına ayrıt konmaz.

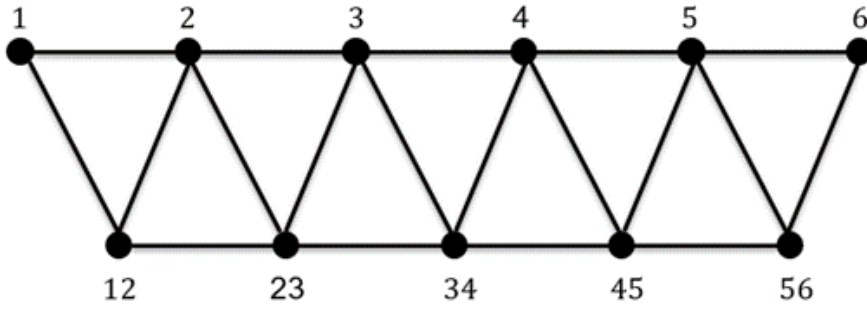
$\{+, -\}$ simgelerinin 3 elemanlı permütasyonlarının sayısını düşündüğümüzde, bu sayı 8 olup G grafından 8 farklı transformasyon grafi elde edilir. Elde edilen G^{+++} grafi, G grafının total grafına izomorftur. Benzer şekilde, G^{---} grafi, sözü edilen total grafın tümleyen grafına izomorftur. Ayrıca, G^{++-} ve G^{-+-} , G^{+-+} ve G^{-+-} , G^{-++} ve G^{+--} transformasyon grafları, birbirinin tümleyen graflarıdır.

Transformasyon graf kavramını daha iyi anlayabilmek için P_6 yol grafının transformasyon graflarını inceleyelim. Şekil 2.2'de P_6 grafının P_6^{-+-} transfor-

masyon grafi verilmiştir. Şekil 2.3'de P_6 grafının P_6^{+++} transformasyon grafi verilmiştir.



Şekil 2.2: P_6 yol grafi ve P_6^{--} transformasyon grafi



Şekil 2.3: P_6^{+++} transformasyon grafi

Tanım 2.7. (Bondy, 1976) $u \in V(G)$ ve $v \in V(G)$ olsun. u, v tepeleri arasındaki en kısa yolun ayrıtlarının sayısına bu tepeler arasındaki uzaklık adı verilir ve $d_G(u, v)$ ile gösterilir. Bir G grafının tüm (u, v) tepe çiftleri arasındaki uzaklıkların en büyüğüne G grafın çapı adı verilir ve $diam(G)$ ile gösterilir.

Tanım 2.8. (Henning, 1998) Packing, G grafi üzerinde kapalı komşulukları ayrık olan maksimal sayıya sahip kümedir. Bir başka deyişle, herhangi iki tepesi arasında en az 3 uzaklık bulunan kümeye Packing denir.

2.2 Literatürde Yeralan Sonuçlar

Bu kısımda, Roman baskınlık sayısı ve mükemmel Roman baskınlık sayısı için literatürde yeralan sonuçlar verilecektir. Aşağıdaki teoremlerde G grafinin tepe sayısı n 'dir.

Teorem 2.9. (Cockayne, 2004) Bir G grafi için $\gamma(G), \gamma_R(G) \leq n$ 'dir.

Teorem 2.10. (Cockayne, 2004) Bir G grafi için $\gamma(G) \leq \gamma_R(G) \leq 2 \cdot \gamma(G)$ 'dir.

Teorem 2.11. (Cockayne, 2004) Bir G grafinde $\gamma_R(G) = 2 \cdot \gamma(G)$ ise G grafi Roman graf olarak isimlendirilir.

Bu teorem aynı zamanda $|V_1| = n_1 = 0$ olacak şekilde minimal Roman baskınlık fonksiyonunun olduğunu ifade eder.

Teorem 2.12. (Cockayne, 2004) Bir G grafi için $\gamma(G) = \gamma_R(G) = 1$ olması için gerek ve yeter koşul $G \cong K_n$ olmasıdır.

Teorem 2.13. (Cockayne, 2004) Bir G grafi için $\gamma(G) = \gamma_R(G) = n$ olması için gerek ve yeter koşul $G \cong \overline{K_n}$ olmasıdır.

Teorem 2.14. (Cockayne, 2004) Bir G grafinde $u \in V_1$ ve $v \in V_2$ ise $uv \notin E(G)$ 'dir.

Teorem 2.15. (Cockayne, 2004) Bir $G \neq \overline{K_n}$ grafinde $\gamma_R(G) \geq \lceil \frac{2 \cdot n}{\Delta(G)+1} \rceil$ 'dir.

Teorem 2.16. (Cockayne, 2004) İzole tepe içermeyen bir G grafinde n_1 minimum ise $n_0 \geq \frac{3 \cdot n}{7}$ 'dir.

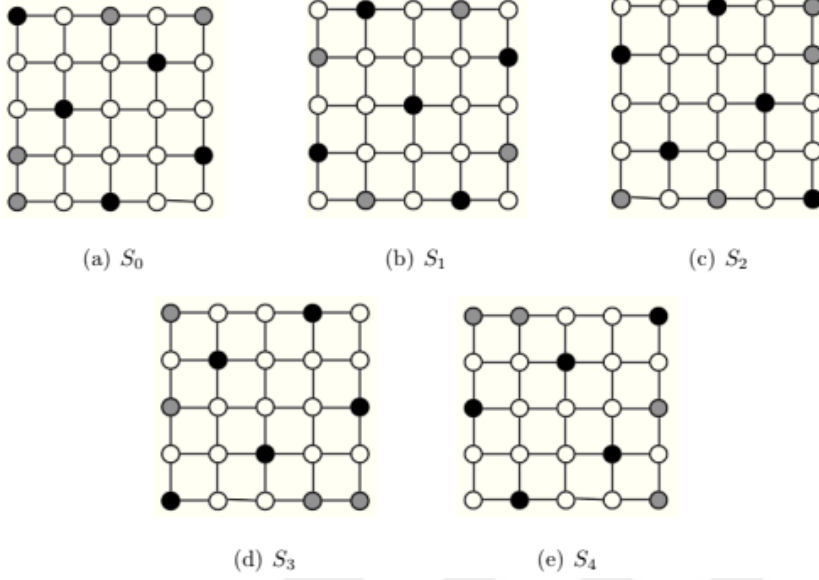
Teorem 2.17. (Cockayne, 2005) $P_n \times P_m$ bir grid graf ve $m, n \geq 5$ olmak üzere,

$$\gamma_R(P_n \times P_m) \leq 2 \cdot (\lceil \frac{m \cdot n}{5} \rceil + \lceil \frac{m}{5} \rceil + \lceil \frac{n}{5} \rceil) \text{ 'dir.}$$

Teorem 2.18. (Curro, 2014) $\gamma_R(P_1 \times P_n)$ ve $\gamma_R(P_2 \times P_n)$ grid graflar olmak üzere,

$$\gamma_R(P_1 \times P_n) = \lceil \frac{2 \cdot n}{3} \rceil$$

$$\gamma_R(P_2 \times P_n) = n + 1 \text{ 'dir.}$$



Şekil 2.4: Grid graflar üzerinde 2 ile işaretlenmiş tepelerin oluşturduğu örtü şemaları

Teorem 2.17'de (Cockayne, 2005) tarafından verilen üst sınırın kanıtı, Şekil 2.4'teki şemalar yardımı ile (Curro, 2014)'de farklı bir şekilde yapılmıştır.

Ayrıca (Curro, 2014)'de yazarlar, grid grafların Roman baskınlık sayısı için (Cockayne, 2005)'de verilmiş alt sınır ve üst sınır için iyileştirilmiş bir alt sınır ve keskin bir üst sınır vermişlerdir.

$$\text{Teorem 2.19. (Curro, 2014)} \quad \gamma_R(P_n \times P_m) \geq \lceil \frac{2 \cdot m \cdot n + m + n - 2}{5} \rceil$$

Teorem 2.20. (Curro, 2014) $P_n \times P_m$ bir grid graf ve $m, n \geq 5$ olmak üzere,

$$\gamma_R(P_n \times P_m) \leq \begin{cases} \lfloor \frac{2 \cdot m \cdot n + m + n - 2}{5} \rfloor - 1, & m, n \text{ mod } 5 \equiv 4 \text{ ise} \\ \lfloor \frac{2 \cdot m \cdot n + m + n - 2}{5} \rfloor, & \text{aksihalde} \end{cases}$$

'dir.

(Henning, 2018)'de yazarlar, ağaçlar için mükemmel Roman baskınlık sayısını araştırmışlardır ve aşağıdaki sonucu ortaya koymuşlardır.

”Her kümesi beş tepe üzerinde P_5 içermek üzere, P_5 graflarının merkez tepeleri birleştirilmiş olacak şekilde parçalanış içeren tüm T ağaçlarının ailesi \mathcal{T} olsun. Merkez tepelerin oluşturduğu alt ağaca, T ağacının alt ağacı diyoruz ve her bir P_5 yoluna T ağacının bir taban yolu diyoruz. \mathcal{T} ailesindeki bir ağaç, alt ağacı bir P_6 yolu içeren ve altı taban yoluna sahip olan bir ağaç olacaktır.”

Teorem 2.21. (Henning, 2018) T , $n \geq 3$ olacak şekilde bir ağaç olsun. O halde,

$$\gamma_R^P(T) \leq \frac{4}{5}n \iff T \in \mathcal{T}' \text{ dir.}$$

(Henning, 2018)'de yazarlar, regüler grafların mükemmel Roman baskınlık sayısını araştırmışlardır. Kübik graflar için mümkün olan en iyi sınırı bulmuşlardır. Dahası k -regüler graflar için üst sınır hesaplamışlardır.

Teorem 2.22. (Henning, 2018) $n \geq 3$ olmak üzere,

$$\gamma_R^P(C_n) \leq \frac{4}{5}n \text{ 'dir ve eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter koşul } n = 5 \text{ olmasıdır.}$$

Teorem 2.23. (Henning, 2018) G , n tepeli bir kübik graf olmak üzere,

$$\gamma_R^P(G) \leq \frac{3}{4}n \text{ 'dir ve bu mümkün olan en iyi sınırdır.}$$

Teorem 2.24. (Henning, 2018) G , n tepeli ve $k \geq 4$ olacak şekilde bir k -regüler graf olmak üzere,

$$\gamma_R^P(G) \leq \left(\frac{k^2+k+3}{k^2+3k+1} \right) n \text{ 'dir.}$$

Mükemmel Roman baskınlık sayısı ile ilgili güncel çalışmalar (Banerjee, 2019)'de bulunabilir. Yazarlar mükemmel Roman baskınlık probleminin kordal (chordal) graflar, düzlemsel (planar) graflar ve iki parçalı (bipartite) graflar için $NP - tam$ olduğunu göstermişlerdir.

Teorem 2.25. (Banerjee, 2019) Mükemmel Roman Baskınlık Problem'i kordal (chordal) graflar için $NP - tam$ 'dır.

Teorem 2.26. (Banerjee, 2019) *Mükemmel Roman Baskınlık Problem'i düzlemsel (planar) graflar için NP – tam'dır.*

Teorem 2.27. (Banerjee, 2019) *Mükemmel Roman Baskınlık Problem'i iki parçalı (bipartite) graflar için NP – tam'dır.*

(Yue, 2020)'de yazarlar, F co-grafının mükemmel Roman baskınlık sayısı için doğrusal(linear) zamanda çalışan bir algoritma oluşturmuşlardır.

Teorem 2.28. (Yue, 2020) *F co-grafının mükemmel Roman baskınlık sayısı için doğrusal(linear) zamanda hesaplanabilir.*

Ayrıca (Yue, 2020)'de yazarlar, Roman baskınlık sayısı ve mükemmel Roman baskınlık sayısı arasındaki ilişkiyi göstermişlerdir.

Teorem 2.29. (Yue, 2020) *F bir graf olmak üzere $\gamma_R^P(F) \geq \gamma_R(F)$ 'dir.*

(Paleta, 2020)'de yazarlar, grafların bazı ikili işlemler altında mükemmel Roman baskınlık değerlerini hesaplamışlardır. Yazarların kullandığı işlemler, birleşim (join), taçlama (corona), ayırıt taçlama (edge corona), tamamlayıcı prizma (complementary prisms) ve bileşke (composition) işlemleridir.

Teorem 2.30. (Paleta, 2020) *$G = (V(G), E(G))$, n tepeli ve trivial olmayan (birden fazla tepesi olan) bir graf olmak üzere*

$$\gamma_R^P(G \circ K_1) = \min\{w_G(f) + n - |V_2| : f = (V_0, V_1, V_2) \in PRD(G)\}$$

Teorem 2.31. (Paleta, 2020) *G ve H birleştirilmiş, G tam olmayan ve H , $\gamma(H) = 1$ olacak şekilde n tepeli iki graf olsunlar. O halde,*

$$\alpha = \min\{(n-1)(|V_1| + |V_2 \cap N_G(V_2)|) + w_G(f) : f = (V_0, V_1, V_2) \in PRD(G)\}$$

olmak üzere,

$$\gamma_R^P(G[H]) \leq \alpha \text{ 'dir.}$$

(Almulhim, 2022)'de yazarlar, grid grafların mükemmel Roman baskınlık sayısı için üst sınır vermişlerdir.

Teorem 2.32. (Almulhim, 2022) *$r, s > 5$ olmak üzere, eğer $G \in \{P_r \times P_s, P_s \times P_r, C_r \times C_s\}$ ise $\gamma_R^P(G) \leq \frac{2}{3}|G|$ 'dir.*

Teorem 2.19 ve Teorem 2.20’de görüldüğü gibi grid grafların Roman baskınlık sayısı için alt ve üst sınırlar elde edilmiştir. Ancak kesin bir sonuç ortaya konmamıştır. Bu durum, bizi grid grafların mükemmel Roman baskınlık sayısını araştırmak için motive etmiştir. Bu amaç doğrultusunda, grid grafların mükemmel Roman baskınlık sayısı için kesin bir sonuç elde edilerek Bölüm 3’te kanıtlanmıştır.



3 GRID GRAFLAR

3.1 Grid Grafların Mükemmel Roman Baskınlık Sayısı

Grid grafların baskınlık ve Roman baskınlık değerleri üzerine yapılan çalışmalarda baskın tepelerin belirlenmesi (Cockayne, 2005), (Curro, 2014), (Talon, 2019) ve (Almulhim, 2022) tarafından araştırılmıştır. Bu araştırmaları incelediğimizde aşağıdaki gözlem elde edilmiştir.

Gözlem 3.1. $f = (V_0, V_1, V_2)$ fonksiyonu $P_n \times P_m$ grafi üzerinde bir mükemmel Roman baskınlık fonksiyonu olsun. Her $v \in V_2$ tepesinin kapalı komşuluğu, $P_n \times P_m$ grafi üzerinde bir $K_{1,4}$, $K_{1,3}$, $K_{1,2}$ graf kopyası oluşturur.

Mükemmel Roman baskınlık tanımından, her $u \in V_0$ tepesi $w \in V_2$ olan tam olarak bir w tepesine komşudur. Dolayısıyla yukarıda bahsettiğimiz graf kopyaları ortak tepe içermezler ve mükemmel Roman baskınlık fonksiyonu üzerinde her birinin ağırlığı 2'dir.

Gözlem 3.1 geliştirilerek aşağıdaki gözlemler elde edilmiştir.

Gözlem 3.2. $f = (V_0, V_1, V_2)$ fonksiyonu $P_n \times P_m$ grafi üzerinde bir mükemmel Roman baskınlık fonksiyonu olsun. Grid graf üzerinde oluşan $K_{1,4}$, $K_{1,3}$, $K_{1,2}$ graf kopyaları, mükemmel baskınlık sayısı tanımından dolayı ayrık olmalıdır.

Gözlem 3.3. $f = (V_0, V_1, V_2)$ fonksiyonu $P_n \times P_m$ grafi üzerinde bir mükemmel Roman baskınlık fonksiyonu olsun. O halde, Gözlem 3.2'den dolayı V_2 kümesindeki herhangi iki tepe arasındaki uzaklık en az 3 olmalıdır.

Gözlem 3.4. $f = (V_0, V_1, V_2)$ fonksiyonu $P_n \times P_m$ grafi üzerinde bir mükemmel Roman baskınlık fonksiyonu olsun. O halde, $|V_2(P_n \times P_m)| \leq \lfloor \frac{n \cdot m}{5} \rfloor$

Yukarıdaki gözlemler kullanılarak aşağıdaki teorem ortaya konulmuştur.

Teorem 3.5. $n \geq 5$, $m \geq 5$ ve

$$k_1 = \begin{cases} 2, & m \bmod 5 \equiv 4 \text{ ise} \\ 1, & m \bmod 5 \equiv 2, 3 \text{ ise} \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases}$$

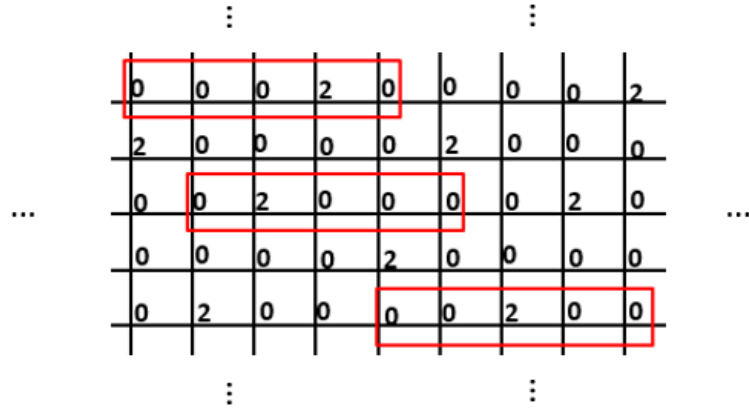
$$k_2 = \begin{cases} 2, & n \bmod 5 \equiv 3, 4 \text{ ise} \\ 1, & n \bmod 5 \equiv 1, 2 \text{ ise} \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases}$$

tam sayı olmak üzere, $\gamma_R^P(P_n \times P_m) = 2 \cdot \lfloor \frac{n \cdot m}{5} \rfloor + 2 \cdot (\lfloor \frac{n}{5} \rfloor + \lfloor \frac{m}{5} \rfloor) + k_1 + k_2$ 'dir.

Kanıt. $f(V_0, V_1, V_2)$, $P_n \times P_m$ grafi için mükemmel Roman baskınlık fonksiyonu olsun. $P_n \times P_m$ grafi i . satırında P_m grafının kopyasını, j . sütununa P_n grafının kopyasını içermektedir. i . satır ve j . sütunda yer alan tepeyi $v_{i,j}$ olarak isimlendirelim. $P_n \times P_m$ grafi üzerinde mükemmel Roman baskınlık fonksiyonunu oluşturabilmek için öncelikle V_2 kümesinin elemanı olacak tepeler düşünülmelidir. Buradan karşımıza iki durum çıkar.

Durum 1: $v_{i,j} \in V_2$ ve $\deg(v_{i,j}) = 4$ olsun. Bu durumda $N(v_{i,j}) = 4$ 'tür ve mükemmel Roman baskınlık fonksiyonu tanımından biliyoruz ki, her $u \in N(v_{i,j})$ tepesi için $u \in V_0$ 'dır. Mükemmel Roman baskınlık fonksiyonu tanımından, u tepesinin V_2 kümesinde tam olarak bir komşu tepesi vardır.

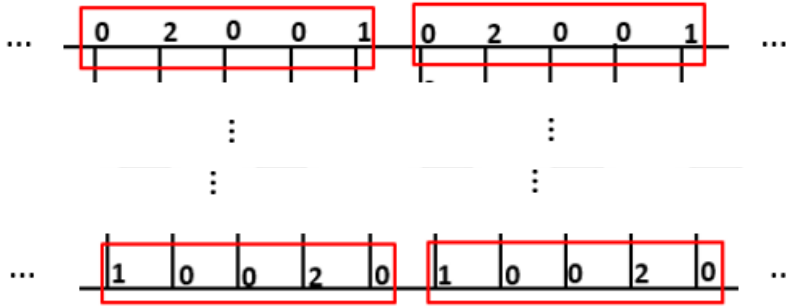
$w, v_{i,j} \in V_2$ aynı satır veya aynı sütunda ve k pozitif bir tam sayı olmak üzere, $d(w, v_{i,j}) = 5k$ 'dir. Aksi halde, $d(w, v_{i,j}) \geq 3$ 'dir. Buradan, Şekil 3.1'te gösterilen desenler (patterns) ortaya çıkmaktadır. Oluşan her desen (pattern), V_2 kümesinden bir tepe ve V_0 kümesinden 4 tepe içermektedir.



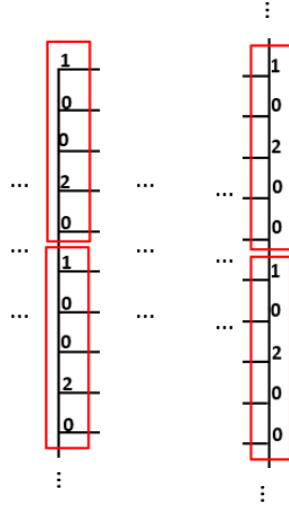
Şekil 3.1: $P_n \times P_m$ Grafında Oluşan Desenler (Patterns)

Durum 2: $v_{i,j} \in V_2$ ve $\deg(v_{i,j}) \leq 3$ olsun. O halde iki alt durum ortaya çıkar.

Altdurum 1: $v_{i,j} \in V_2$ ve $\deg(v_{i,j}) = 3$ olsun. Bu tepeler $P_n \times P_m$ grafının ilk satırında, son satırında, ilk sütununda ya da son sütununda ($P_n \times P_m$ grafının sınırında olarak isimlendirilecektir (Sharifani, 2020)) olacaktır. Bu durumda, $P_n \times P_m$ grafının sınırında her 5 tepede bir desenler oluşacaktır. Bu desenler Şekil 3.2 ve Şekil 3.3'te gösterilmiştir. Bu desenlerin bir tepesi V_2 kümesinde, üç tepesi V_0 kümesinde ve bir tepesi V_1 kümesindedir. Birinci satır ve son satırda $2 \cdot \lfloor \frac{m}{5} \rfloor$ desen oluşacaktır. Ayrıca, birinci sütun ve son sütunda $2 \cdot \lfloor \frac{n}{5} \rfloor$ tane desen oluşacaktır. Dolayısıyla, her biri V_1 kümesinden bir tepe içeren $2 \cdot (\lfloor \frac{m}{5} \rfloor + \lfloor \frac{n}{5} \rfloor)$ tane desen oluşacaktır.



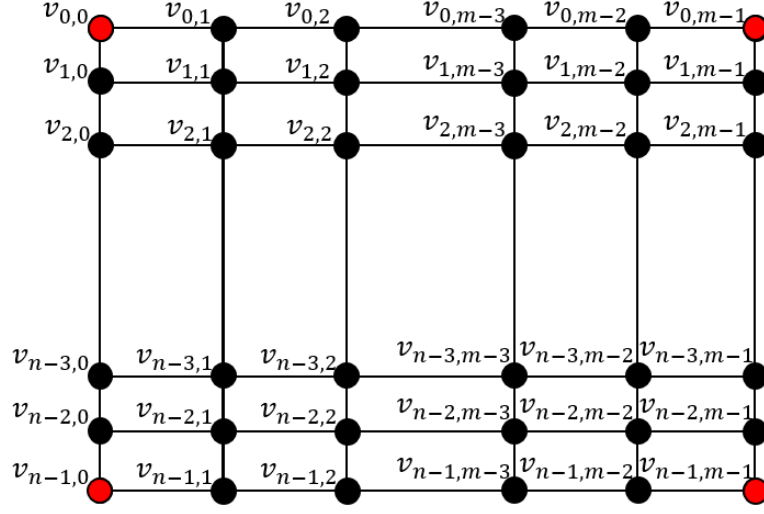
Şekil 3.2: $P_n \times P_m$ Grafının İlk ve Son Satırları



Şekil 3.3: $P_n \times P_m$ Grafının İlk ve Son Sütunları

Altdurum 2: $v_{i,j} \in V_2$ ve $\deg(v_{i,j}) = 2$ olsun. $P_n \times P_m$ grafında bu durumu sağlayan 4 tepe bulunmaktadır. Bu tepeler $P_n \times P_m$ grafının köşeleri olarak

isimlendirilir. Bu tepeler $v_{0,0}$, $v_{n-1,0}$, $v_{0,m-1}$, $v_{n-1,m-1}$ tepeleridir ve Şekil 3.4'de gösterilmiştir.



Şekil 3.4: $P_n \times P_m$ Grafının Tepeleri

- $v_{0,0}$ tepesi her zaman V_1 kümesidir.
- $v_{n-1,0}$ tepesi
 - eğer $n \bmod 5 \equiv 1, 3$, $v_{n-1,0} \in V_1$
 - eğer $n \bmod 5 \equiv 0$, $v_{n-1,0} \in V_2$
 - aksi halde, $v_{n-1,0} \in V_0$
- $v_{0,m-1}$ tepesi
 - eğer $m \bmod 5 \equiv 3, 4$, $v_{0,m-1} \in V_1$
 - eğer $m \bmod 5 \equiv 0$, $v_{0,m-1} \in V_2$
 - aksi halde, $v_{0,m-1} \in V_0$
- $v_{n-1,m-1}$ tepesi
 - eğer $m \bmod 5 \equiv 2, 4$, $v_{n-1,m-1} \in V_1$
 - eğer $m \bmod 5 \equiv 0$, $v_{n-1,m-1} \in V_2$
 - aksi halde, $v_{n-1,m-1} \in V_0$

Bu 4 tepe V_2 kümesinin elemanı olabilir. Dolayısıyla Alt Durum 1'de oluşan desenlerde içermektedir.

V_0 kümesindeki tepeler mükemmel Roman baskınlık fonksiyonunun ağırlığını arttırmamaktadır. Diğer yandan, V_1 kümesindeki tepeler mükemmel Roman baskınlık fonksiyonunun ağırlığını arttırmaktadır. Bu durumu, aşağıdaki gibi fonksiyonlar yardımı ile ifade edebiliriz.

$$k_1 = \begin{cases} 2, & m \bmod 5 \equiv 4 \text{ ise} \\ 1, & m \bmod 5 \equiv 2, 3 \text{ ise} \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases}$$

$$k_2 = \begin{cases} 2, & n \bmod 5 \equiv 3, 4 \text{ ise} \\ 1, & n \bmod 5 \equiv 1, 2 \text{ ise} \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases}$$

$0 \leq i \leq \frac{n-4}{5}, 0 \leq j \leq \frac{m-4}{5}$ olmak üzere Durum 1 ve Durum 2 kullanılarak V_2 kümesi aşağıdaki gibi oluşturulabilir;

$$\{v_{5i,5j+4}, v_{5i+1,5j+1}, v_{5i+2,5j+3}, v_{5i+3,5j}, v_{5i+4,5j+2}\}$$

Buradan, $|V_2| = \lfloor \frac{n \cdot m}{5} \rfloor$ 'dir. Gözlem 3.4'e göre minimum mükemmel Roman baskınlık fonksiyonu için V_2 kümesinin eleman sayısı maksimal olmalıdır. Diğer yandan, $P_n \times P_m$ grafinin tüm tepeleri sadece $V_2 \cup V_0$ kümesi ile bastırılmaz. Dolayısıyla geriye kalan tepeler V_1 kümesinin elemanı olmalıdır. Buradan,

$$|V_1| = 2 \cdot (\lfloor \frac{n}{5} \rfloor + \lfloor \frac{m}{5} \rfloor) + k_1 + k_2.$$

Dolayısıyla;

$$\gamma_R^P(P_n \times P_m) = 2 \cdot |V_2| + |V_1|$$

$$\gamma_R^P(P_n \times P_m) = 2 \cdot \lfloor \frac{n \cdot m}{5} \rfloor + 2 \cdot (\lfloor \frac{n}{5} \rfloor + \lfloor \frac{m}{5} \rfloor) + k_1 + k_2 \quad \square$$

Grid graflara benzer şekilde çevre grafların kartezyen çarpımı ile oluşturulan torus grafları için elde ettiğimiz sonucu aşağıdaki teoremden verebilmiştir.

Teorem 3.6. $n \bmod 5 \equiv 0$ ve $m \bmod 5 \equiv 0$ olmak üzere $n \geq 5$ ve $m \geq 5$ olsun. O halde,

$$\gamma_R(C_n \times C_m) = \gamma_R^P(C_n \times C_m) = \frac{2.n.m}{5} \text{ 'dir.}$$

Kanıt. $f(V_0, V_1, V_2)$ fonksiyonu, $n \bmod 5 \equiv 0$ ve $m \bmod 5 \equiv 0$ olmak üzere $C_n \times C_m$ grafi için mükemmel Roman baskınlık fonksiyonu olsun. $C_n \times C_m$ grafi 4-regüler bir graftır. $V_2 = \{v_{5i,5j+4}, v_{5i+1,5j+1}, v_{5i+2,5j+3}, v_{5i+3,5j}, v_{5i+4,5j+2}\}$ kümesi torus graf için bir minimum baskın kümedir. Dolayısıyla, $V_0 = V(C_n \times C_m) \setminus V_2$ ve $V(C_n \times C_m) = V_0 \cup V_2$ 'dir. Ayrıca, u ve v tepeleri V_2 kümesinin herhangi iki elemanı olmak üzere $N[v] \cap N[u] = \emptyset$ 'dir. Buradan, Teorem 2.11'ye göre torus grafların Roman graf olduğu görülür ve $|V_2| = \frac{n.m}{5}$ olduğundan kanıt tamamlanır. \square

Theorem 3.6'dan görüldüğü gibi $n \bmod 5 \equiv 0$ ve $m \bmod 5 \equiv 0$ olmak üzere $\gamma_R(C_n \times C_m) = \gamma_R^P(C_n \times C_m)$ 'dir. Ancak Teorem 2.19 ve Teorem 3.5'den grid graflar için elde edilen Roman baskınlık ve mükemmel Roman baskınlık sayılarının bazı n ve m değerleri için farklı olduğu görülmektedir. Dolayısıyla, Teorem 3.5'de bulduğumuz sonuç ile grid grafların Roman baskınlık sayısı arasındaki ilişkiler aşağıda ortaya konmuştur.

3.2 Grid Graflar Üzerinde İki Parametrenin Karşılaştırılması

Mükemmel Roman baskınlık değeri ile Roman baskınlık değeri arasında $\gamma_R^P(G) \geq \gamma_R(G)$ olacak şekilde bir ilişki bulunmaktadır. Grid grafların Roman baskınlık değeri için Teorem 2.19'de gösterilen bir alt sınır bulunmaktadır. Dolayısıyla, $\gamma_R^P(P_n \times P_m) \geq \gamma_R(P_n \times P_m) \geq \lceil \frac{2.m.n+m+n-2}{5} \rceil$ 'dir.

Teorem 2.19, Roman baskınlık sayısı için grid graflar üzerinde bir alt sınır vermektedir ve Teorem 3.5, grid graflar üzerinde mükemmel Roman Baskınlık sayısının tam sonucunu vermektedir. Bu teoremler kullanarak grid graflar üzerinde Roman baskınlık sayısı ile mükemmel Roman baskınlık sayısı arasında oluşan fark hesaplanacaktır. Bu kıyaslamayı yapabilmek için n ve m değerlerini

birbirlerinden bağımsız olarak arttırılmalıdır. Grafın tepe sayısı büyüdükçe ortaya çıkacak olan fark incelenmiştir.

Teorem 3.5’de bulunan sonuç ile Teorem 2.19’de verilen alt sınır kıyaslandığında, Grid graf üzerinde her 5×5 alt grafta tekrarlanan sabit bir fark ortaya çıkmaktadır. Bu fark, Tablo 3.1’de gösterilmiştir.

m/n	$n \bmod 5 \equiv 1$	$n \bmod 5 \equiv 2$	$n \bmod 5 \equiv 3$	$n \bmod 4 \equiv 0$	$n \bmod 5 \equiv 0$
$m \bmod 5 \equiv 1$	0	0	1	0	0
$m \bmod 5 \equiv 2$	1	1	2	2	1
$m \bmod 5 \equiv 3$	1	1	1	1	0
$m \bmod 5 \equiv 4$	1	2	2	2	1
$m \bmod 5 \equiv 0$	1	1	1	1	0

Tablo 3.1: Mükemmel Roman baskınlık sayısı ve Roman baskınlık sayısı arasındaki farklar

Tablo 3.1’de görüldüğü üzere, mükemmel Roman baskınlık değeri ve Roman baskınlık değeri belirli koşullar altında eşittir. Ayrıca aradaki fark en fazla 2 olmaktadır.

Elde edilen mükemmel Roman baskınlık sayısı beklendiği gibi Roman baskınlık sayısının alt sınırından büyük veya eşit olduğu görülmüştür. Bu durum, grid graflar üzerinde Roman baskınlık sayısı ve mükemmel Roman baskınlık sayısının, n ve m değerlerinin belirli durumlarında aynı sonucu verdiği görülmektedir.

4 TRANSFORMASYON GRAFLAR

Transformasyon graflar için literatüre baktığımızda Roman baskınlık veya mükemmel Roman baskınlık değerleri için herhangi bir sonuç gözlemedik. Bu durum bizi bu konuyu araştırmak için motive etti. Bu bölümde, yol grafin transformasyon grafları olan $P_n^{---}, P_n^{+++}, P_n^{--+}$ graflarını ve çevre grafin transformasyon grafları olan C_n^{--+}, C_n^{---} graflarının mükemmel Roman baskınlık değerlerini hesaplayacağız. Dahası, n tepeli bir G grafının transformasyon grafi olan G^{--+} için mükemmel Roman baskınlık değerini vereceğiz. Bu bölümde vereceğimiz sonuçlar, *2nd International Conference on Information Technologies and Their Applications (ITTA 2024)*'de sunulmuştur.

Theorem 4.1. $n \geq 3$, pozitif tam sayı olmak üzere, $\gamma_R^P(P_n^{--+}) = 5$ 'tir.

Kanıt. $f = (V_0, V_1, V_2)$ fonksiyonu P_n^{--+} grafi üzerinde tanımlı bir mükemmel Roman baskınlık fonksiyonu olsun. P_n^{--+} grafında $\deg_{P_n}(v) = \delta(P_n)$ ve $uv \in E(P_n)$ olacak şekilde $u, uv \in V(P_n^{--+})$ tepeleri vardır. Buradan,

$V_2 = \{u, uv\}$ olmak üzere $|V_0| = 2n - 4$ 'tür ve

$|V_1| = |V(P_n^{--+})| - |V_2 \cup V_0| = 1$ 'dir. Dolayısıyla,

$$\gamma_R^P(P_n^{--+}) = 2|V_2| + |V_1|$$

$$\gamma_R^P(P_n^{--+}) = 5 \text{ 'tir.}$$

□

Theorem 4.2. $n \geq 3$, pozitif tam sayı olmak üzere, $\gamma_R^P(P_n^{---}) = 4$ 'tür.

Kanıt. P_n^{---} grafının çapı 2'dir. Buradan, $f = (V_0, V_1, V_2)$ fonksiyonu P_n^{---} grafi üzerinde tanımlı bir mükemmel Roman baskınlık fonksiyonu olmak üzere $|V_2| = 1$ 'dir. Dolayısıyla iki durum ortaya çıkar.

Durum 1: $v \in V_2$ tepesi için $\deg(v) = \Delta(P_n^{---})$ ise P_n^{---} grafında $|V_0| = |N(v)|$ 'dir. Dolayısıyla $|V_0| = 2n - 3$ 'tür ve $|V_1| = |V(P_n^{---})| - |V_2 \cup V_0| = 2$ 'dir.

Buradan,

$$\gamma_R^P(P_n^{---}) = 2|V_2| + |V_1|$$

$$\gamma_R^P(P_n^{---}) = 2 + 2$$

$$\gamma_R^P(P_n^{---}) = 4 \tag{3}$$

Durum 2: $v \in V_2$ tepesi için $\deg(v) < \Delta(P_n^{---})$ ise P_n^{---} grafında $|V_0| = |N(v)|$ 'dir. Dolayısıyla, $|V_0| = 2n - 6$ 'dır ve $|V_1| = |V(P_n^{---})| - |V_2 \cup V_0| = 4$ 'tür.

Buradan,

$$\begin{aligned}\gamma_R^P(P_n^{---}) &= 2|V_2| + |V_1| \\ \gamma_R^P(P_n^{---}) &= 2 + 4 \\ \gamma_R^P(P_n^{---}) &= 6\end{aligned}\tag{4}$$

Sonuç olarak (3) ve (4)'den kanıt tamamlanır. \square

Teorem 4.3. $n \geq 3$, pozitif tam sayı olmak üzere, $\gamma_R^P(C_n^{--+}) = 6$ 'dır.

Kanıt. $f = (V_0, V_1, V_2)$ fonksiyonu C_n^{--+} grafi üzerinde tanımlı bir mükemmel Roman baskınlık fonksiyonu olsun. C_n^{--+} grafi $n - 1$ regüler bir graftır C_n^{--+} grafında $v \in V(C_n)$ ve $uv \in E(C_n)$ olacak şekilde $u, uv \in V(C_n^{--+})$ tepeleri vardır. Buradan,

$V_2 = \{u, uv\}$ olmak üzere $|V_0| = 2n - 4$ 'tür ve

$|V_1| = |V(C_n^{--+})| - |V_2 \cup V_0| = 2$ 'dir. Dolayısıyla,

$$\gamma_R^P(C_n^{--+}) = 2|V_2| + |V_1|$$

$$\gamma_R^P(C_n^{--+}) = 6\text{'tir.} \quad \square$$

Teorem 4.4. $n \geq 3$, pozitif tam sayı olmak üzere, $\gamma_R^P(C_n^{---}) = 6$ 'dır.

Kanıt. C_n^{---} grafının çapı 2'dir ve C_n^{---} grafi $n - 2$ regüler graftır. Buradan, $f = (V_0, V_1, V_2)$ fonksiyonu C_n^{---} grafi üzerinde tanımlı bir mükemmel Roman baskınlık fonksiyonu olmak üzere $|V_2| = 1$ 'dir. $v \in V_2$ tepesi için $\deg(v) = \Delta(C_n^{---})$ olduğundan C_n^{---} grafında $|V_0| = |N(v)|$ 'dir. Dolayısıyla $|V_0| = 2n - 5$ 'dir ve $|V_1| = |V(C_n^{---})| - |V_2 \cup V_0| = 4$ 'dir. Buradan,

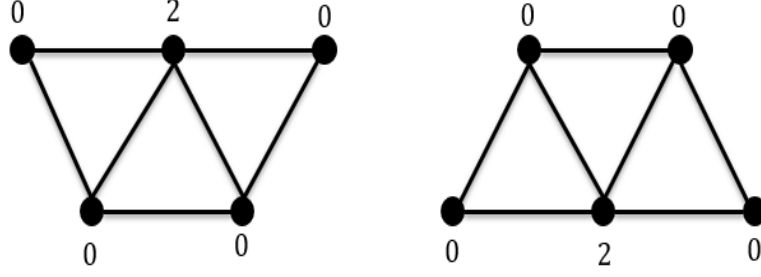
$$\gamma_R^P(C_n^{---}) = 2|V_2| + |V_1|$$

$$\gamma_R^P(C_n^{---}) = 2 + 4$$

$$\gamma_R^P(C_n^{---}) = 6\text{'dir.} \quad \square$$

Gözlem 4.5. $f(V_0, V_1, V_2)$, P_n^{+++} grafi üzerinde tanımlı mükemmel Roman baskınlık fonksiyonu olsun. $v \in V_2$ (P_n^{+++}) ve $\deg(v) = 4$ olmak üzere $N[v]$ tepelerinin oluşturduğu etkilenmiş alt graflar Şekil 4.1'de gösterilmiştir.

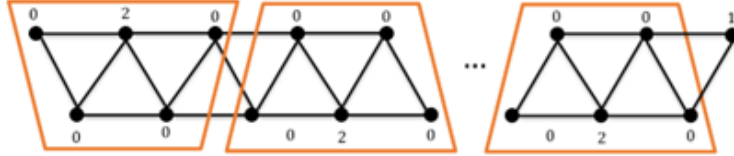
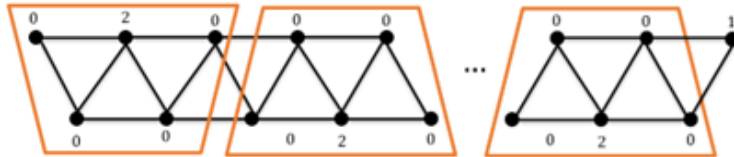
Mükemmel Roman baskınlık fonksiyonunun ağırlığının minimizasyonu için

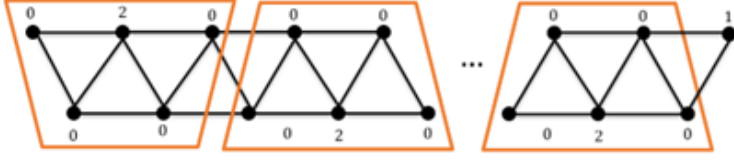
Şekil 4.1: G_0 etkilenmiş alt grafları

ayrık G_0 kopya graflarının sayısı maksimal olmalıdır.

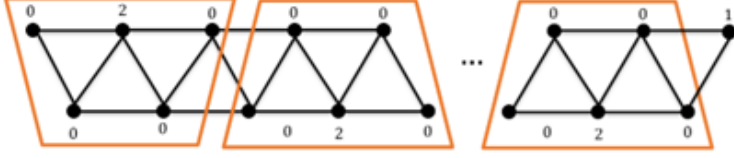
Buna göre aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.6. $n \geq 3$, pozitif tam sayı olmak üzere,

$$\gamma_R^P(P_n^{+++}) = 2 \lfloor \frac{2n-1}{5} \rfloor + \begin{cases} 0, & n \bmod 5 \equiv 3 \text{ ise} \\ 1, & n \bmod 5 \equiv 1 \text{ ise 'dir.} \\ 2, & \text{aksi halde} \end{cases}$$
Şekil 4.2: P_n^{+++} grafında $n \bmod 5 \equiv 1$ ise oluşan ayrık G_0 graflarıŞekil 4.3: P_n^{+++} grafında $n \bmod 5 \equiv 2$ ise oluşan ayrık G_0 grafları



Şekil 4.4: P_n^{+++} grafında $n \bmod 5 \equiv 3$ ise oluşan ayrık G_0 grafları



Şekil 4.5: P_n^{+++} grafında $n \bmod 5 \equiv 4$ ise oluşan ayrık G_0 grafları

Kanıt. $f = (V_0, V_1, V_2)$ fonksiyonu P_n^{+++} grafi üzerinde tanımlı bir mükemmel Roman baskınlık fonksiyonu olsun. Bu durumda, Gözlem 4.5’de bahsedilen G_0 etkilenmiş alt graflarının sayısı $\lfloor \frac{2n-1}{5} \rfloor$ olacaktır. Her bir G_0 etkilenmiş alt grafında bir tane tepe V_2 kümesinde, diğer 4 tepe V_0 kümesindedir. P_n^{+++} grafının tamamı G_0 etkilenmiş alt graf kopyaları ile her zaman bastırılmayacağından 5 durum ortaya çıkar.

Durum 1: $n \bmod 5 \equiv 1$ olsun. Bu durumda, G_0 etkilenmiş alt grafları tarafından örtülemeyen 1 tepe vardır ve mükemmel Roman baskınlık fonksiyonu tanımına göre bu tepe V_1 kümesinde olmak zorundadır. Şekil 4.2’de gösterilmiştir.

Durum 2: $n \bmod 5 \equiv 2$ olsun. Bu durumda, G_0 etkilenmiş alt grafları tarafından örtülemeyen 3 tepe vardır ve $v_n \in V_2$, v_{n-1} , $v_{n-1,n} \in V_0$ olarak bastırılırlar. Şekil 4.3’de gösterilmiştir.

Durum 3: $n \bmod 5 \equiv 3$ olsun. Bu durumda, G_0 etkilenmiş alt grafları tarafından örtülemeyen tepe yoktur. Şekil 4.4’de gösterilmiştir.

Durum 4: $n \bmod 5 \equiv 4$ olsun. Bu durumda, G_0 etkilenmiş alt grafları tarafından örtülemeyen 2 tepe vardır ve v_{n-1} , $v_{n-1,n} \in V_1$ olarak bastırılırlar. Şekil 4.5’de gösterilmiştir.

Durum 5: $n \bmod 5 \equiv 0$ olsun. Bu durumda, G_0 etkilenmiş alt grafları

5 SONUÇ

Bu tezde, bir baskınlık ölçümü olan mükemmel Roman baskınlık sayısı incelenmiştir. Öncelikle, mükemmel Roman baskınlık sayısı için daha önce yapılan çalışmalara yer verilmiştir.

Ardından, kartezyen çarpım sayesinde büyük graf yapılarının oluşturulması ele alınmıştır. Yol graflar üzerinde kartezyen çarpım kullanılarak grid graflar oluşturulmuştur. Grid grafların mükemmel Roman baskınlık sayısı hesaplanmıştır ve aşağıdaki sonuç elde edilmiştir.

- $n \geq 5, m \geq 5$ ve

$$k_1 = \begin{cases} 2, & m \bmod 5 \equiv 4 \text{ ise} \\ 1, & m \bmod 5 \equiv 2, 3 \text{ ise} \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases}$$

$$k_2 = \begin{cases} 2, & n \bmod 5 \equiv 3, 4 \text{ ise} \\ 1, & n \bmod 5 \equiv 1, 2 \text{ ise} \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases}$$

tam sayı olmak üzere, $\gamma_R^P(P_n \times P_m) = 2 \cdot \lfloor \frac{n \cdot m}{5} \rfloor + 2 \cdot (\lfloor \frac{n}{5} \rfloor + \lfloor \frac{m}{5} \rfloor) + k_1 + k_2$ 'dir.

Daha sonra, grid grafların Roman baskınlık sayısı için varolan alt sınır ile mükemmel Roman baskınlık sayısı için bulunan sonuç kıyaslanmıştır. Grid graf üzerinde her 5x5 alt grafta tekrarlanan sabit bir fark ortaya çıkmıştır. Bu fark, Tablo 3.1'de gösterilmiştir.

Ayrıca, iki çevre grafın kartezyen çarpımı ile oluşturulan torus grafları üzerinde, $n \bmod 5 \equiv 0$ ve $m \bmod 5 \equiv 0$ olmak üzere,

$$\gamma_R(C_n \times C_m) = \gamma_R^P(C_n \times C_m) = \frac{2 \cdot n \cdot m}{5} \text{ olduğu gösterilmiştir.}$$

Son olarak, bir graf işlemi olan transformasyon işlemi ile grafın kendisini, tümleyenini ve ayırt grafını kullanarak transformasyon graflar oluşturulmuştur. Transformasyon graflar için aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

- $n \geq 3$, pozitif tam sayı olmak üzere, $\gamma_R^P(P_n^{- - +}) = 5$ 'dir.
- $n \geq 3$, pozitif tam sayı olmak üzere, $\gamma_R^P(P_n^{- - -}) = 4$ 'tür.
- $n \geq 3$, pozitif tam sayı olmak üzere, $\gamma_R^P(C_n^{- - +}) = 6$ 'dir.
- $n \geq 3$, pozitif tam sayı olmak üzere, $\gamma_R^P(C_n^{- - -}) = 6$ 'dır.
- $n \geq 3$, pozitif tam sayı olmak üzere,

$$\gamma_R^P(P_n^{+++}) = 2 \lfloor \frac{2n-1}{5} \rfloor + \begin{cases} 0, & n \bmod 5 \equiv 3 \text{ ise} \\ 1, & n \bmod 5 \equiv 1 \text{ ise} \\ 2, & \text{aksi halde} \end{cases}$$
 'dır.
- $G = (V(G), E(G))$ birleştirilmiş bir graf ve $1 \leq i \leq n$ için $\forall x_i \in V(G)$ olmak üzere $\deg_{G^{--}}(x_i) = 1$ ve $x_i \neq x_j$ için $N_G(x_i) = x_j$ olsun. Bu durumda, $k = \min\{\deg_G(x_j)\}$ olmak üzere, $\gamma_R^P(G^{--}) = k + 3$ 'tür.

Roman baskınlık sayısı ve mükemmel Roman baskınlık sayısı arasındaki ilişki Teorem 2.29'de verilmiştir. Grid graflar için Roman baskınlık sayısı ve mükemmel Roman baskınlık sayısının grid graflar üzerindeki sonuçlarının eşit olacağı düşünülebilir. Ancak, elde edilen sonucun Roman baskınlık sayısının alt sınırından (Teorem 2.19) büyük ya da eşit olduğu durumlar görülmüştür. Bu durum, n ve m değerlerinin belirli durumlarında, grid graflar üzerinde Roman baskınlık sayısı ve mükemmel Roman baskınlık sayısının farklı olduğunu göstermektedir.

Roman baskınlık ve mükemmel Roman baskınlık sayıları transformasyon graflar üzerine taşınmış ve mükemmel Roman baskınlık sayısı için sonuçlar elde edilmiştir. Teorem 2.29 kullanılarak, bulunan sonuçların Roman baskınlık sayısı için üst sınır olduğu söylenebilir.

Kaynaklar

- Almulhim A. and Akwu A.D. and Subaiei B.A., (2022). The Perfect Roman Domination Number of the Cartesian Product of Some Graphs. *Journal of Mathematics*, Article ID 1957027.
- Banerjee S. and Keil J.M. and Pradhan D., (2019). Perfect Roman Domination in graph. *Theoretical Computer Science*, Vol 796, pp. 1-21.
- Berge C., (1962). *The theory of Graphs and its Applications*. Wiley, New York.
- Berge C., (1973). *Graphs and Hypergraphs*. North Holland, Amsterdam.
- Bondy, J.A. and Murty U.S.R.. (1976). *Graph Theory with Applications*. London, Macmillan Press Ltd., 263p. Springer, Cham.
- Chartrand, G. and Lesniak, L., (1986). *Graphs and digraphs*. Wadsworth Inc., Belmont, California.
- Cockayne E.J., Dawes R.M. and Hedetniemi S.T. (1980). Total Domination in Graphs. *Networks*, 10, pp. 211-219.
- Cockayne E.J., Dreyer P.A., Hedetniemi S.M. and Hedetniemi S.T. (2004). Roman Domination in Graphs. *Discrete Math.*, 278 (1-3), pp. 11-22.
- Cockayne E.J., Grobler P.J.P., Gründlingh W.R., Munganga J., van Vuuren J.H., (2005). Protection of a Graph. *Utilitas Mathematica*, 67 pp. 19–32.
- Curro, V., (2014). The Roman domination problem on grid graphs. Ph.D. thesis, Universita di Catania
- Dreyer P.A., Jr., (October 2000). Applications and variations of domination in graphs. Ph.D. Thesis, Rutgers University.
- Harary F., (1962). *Graph Theory*. Addison-Wesley Publishing Company.
- Haynes T. W., Hedetniemi S., Slater P. (1998). *Fundamentals of Domination in Graphs*. CRC Press, Boca Raton.

- Haynes T. W., Hedetniemi S., Slater P. (1998). *Domination in Graphs Volume 2: Advanced Topics*. Routledge, New York.
- Henning M.A., (1998). Packing in trees. *Discrete Mathematics*, 186, pp. 145-155.
- Henning M.A and Yeo A., (2013). *Total Domination in Graphs*. Springer, Ed. 2013th.
- Henning M.A and Klostermeyer W.F., (2018). Perfect Roman Domination in Regular Graphs. *Appl. Anal. Discrete Math.*, 12, pp. 143-152.
- Henning M.A and Klostermeyer W.F. and MacGillivray G., (2018). Perfect Roman Domination in Trees. *Discrete Appl. Math.*, 236, pp. 235-245.
- De Jaenisch, C.F. (1862). *Applications de l'Analyse Mathematique au Jeu des Echecs*. Petrograd.
- Liedloff M., Kloks T., Liu J., Peng S.-L., (2008). Efficient algorithms for Roman domination on some classes of graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 156 (18), pp. 3400-3415.
- Ore O., (1962). *Theory of Graphs*. American Mathematical Society Colloquium Publications, 38, Providence, RI.
- Pagourtzis A., Penna P., Schlude K., Steinhofel K., Taylor D.S., Widmayer P., (2002). Server Placements, Roman Domination and other Dominating Set Variants. *Proceedings of the IFIP 17th World Computer Congress - TC1 Stream / 2nd IFIP International Conference on Theoretical Computer Science: Foundations of Information Technology in the Era of Networking and Mobile Computing*, pp. 280-291.
- Paleta L.M. and Jamil F.P., (2020). More on Perfect Roman Domination in Graphs. *Discrete Appl. Math.*, 13(3), pp. 529-548.

- ReVelle C.S. and Rosing K.E., (2000). Defendens imperium romanum: a classical problem in military strategy. *Amer. Math. Mon.*, 107(7), pp. 585-594.
- Sabidussi, G., (1959/1960). Graph Multiplication. *Mathematische Zeitschrift* 72, pp. 446-457.
- Shang W., Hu X., (2007). The roman domination problem in unit disk graphs. *Computational Science*, volume 4489. Springer Berlin Heidelberg.
- Sharifani P. and Hooshmandasl M. R. and Alambardar Meybodi M., (2020). An explicit construction of optimal dominating and $[1, 2]$ -dominating sets in grid. *AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics*, 17(3), pp. 870-876.
- Talon A. and Michaël R., (2019). The 2-domination and Roman Domination Numbers of Grid Graphs. *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, 21(1), #9.
- Yue J. and Song J., (2020). Note on the Perfect Roman Domination number of graphs. *Applied Mathematics and Computation*, 364, pp.124685.
- Wu, B., Zhang, L. and Zhang, Z., (2005). The Transformation Graph G^{xyz} when $xyz = - + +$. *Discrete Mathematics*, 296, pp. 218-238.
- Xu, L. and Wu, B., (2008). Transformation Graph G^{-+-} . *Discrete Mathematics*, 308, pp. 5144-5148.

TEŞEKKÜR

Bu araştırma döneminde de her zaman olduğu gibi, bana her türlü desteği, sabrı ve bilgeliğini sunan, bana her anlamda rehberlik eden, bilgi ve deneyimlerini esirgemeyen kıymetli tez danışmanım Sayın Prof. Dr. Alpay Kırlangıç'a minnettar olduğumu belirtmek isterim.

Hayatımın her alanında benim motivasyonumu güçlendiren, daha fazlasını yapmak için teşvik eden, yardımını asla esirgemeyen ve her zaman yanımda duran Büşra Demirel'e sonsuz teşekkür ederim.

Birlikte çalışmaya başladığımdan bu yana her konuda bana destek olan ve benim gelişimimi sağlayan MYO ailesine teşekkür ederim. Beni bu aileye kabul eden Sayın Burçin Önder'e her şey için teşekkür ederim.

Ayrıca, her koşulda beni desteklemiş ve bu günlere gelmem konusunda her türlü fedakarlığı yapmış olan aileme sonsuz teşekkür ederim.

05/09/2024

İmzası

Hüseyin Tokat

ÖZGEÇMİŞ

2012 yılında Gökçeada Atatürk Anadolu Öğretmen Lisesi'nden mezun oldu. Aynı yıl Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'ne başladı. 2016 yılında Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü Bilgisayar Bilimleri Ağırlıklı Matematik opsiyonundan mezuniyetini tamamladı. 2018 yılında Ege Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Bilgisayar Bilimleri dalında Yüksek Lisans eğitimi bitirdi. Aynı yıl, Ege Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Bilgisayar Bilimleri Dalında Doktora eğitimine başladı.

