

**T.C.**  
**SİNOP ÜNİVERSİTESİ**  
**LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**  
**MATEMATİK ANABİLİM DALI**



**İSTATİSTİKSEL  $\mathcal{A}$ -TOPLANABİLME YARDIMI İLE KOROVKİN  
TİPİ YAKLAŞIM TEOREMLERİ**

**PELİN YILMAZ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**DANIŞMAN**

**PROF. DR. KAMİL DEMİRCİ**

**SİNOP - 2025**

## TEZ KABUL

**Pelin YILMAZ** tarafından hazırlanan “İSTATİSTİKSEL  $\mathcal{A}$ -TOPLANABİLME YARDIMI İLE KOROVKİN TİPİ YAKLAŞIM TEOREMLERİ” başlıklı bu çalışma, 07.01.2025 tarihinde yapılan savunma sınavı sonucunda başarılı bulunarak, jürimiz tarafından **YÜKSEK LİSANS tezi** olarak kabul edilmiştir.

**Başkan**

Prof. Dr. Şeyhmus YARDIMCI  
Ankara Üniversitesi /Fen Fakültesi

İmza

**Üye  
(Danışman)**

Prof. Dr. Kamil DEMİRCİ  
Sinop Üniversitesi /Fen-Edebiyat Fakültesi

İmza

**Üye**

Prof. Dr. Fadime DİRİK  
Sinop Üniversitesi /Fen-Edebiyat Fakültesi

İmza

Enstitü Müdürü

Doç. Dr. Hüseyin Turan ARAT

.....

## ETİK BEYANI

Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında; tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi, tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu, tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi, kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı, bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu, bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Pelin YILMAZ

## ÖZET

### YÜKSEK LİSANS TEZİ

#### İSTATİSTİKSEL $\mathcal{A}$ -TOPLANABİLME YARDIMI İLE KOROVKİN TİPİ YAKLAŞIM TEOREMLERİ

PELİN YILMAZ

SİNOP ÜNİVERSİTESİ LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN: PROF. DR. KAMİL DEMİRCİ

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. İlk olarak temel tanımlara ve klasik Korovkin teoremine yer verilmiştir. Yoğunluk kavramı, istatistiksel yakınsaklık tanım ve teoremleri ifade edilmiş ayrıca yakınsaklıktan daha kuvvetli olan istatistiksel yakınsaklık için Korovkin tipi yaklaşım teoremi; teoremin daha kuvvetli olduğunu gösteren örnek ve süreklilik modülü kullanarak istatistiksel Korovkin tipi yaklaşım teoreminin yakınsaklık oranı verilmiştir. Daha sonra istatistiksel yakınsaklığın daha genişletilmiş hali olan  $\mathcal{A}$ -istatistiksel yakınsaklık tanıtılmış,  $\mathcal{A}$ -istatistiksel yakınsaklık için Korovkin tipi yaklaşım teoremi verilmiştir. Devamında ise  $\mathcal{A}$ -toplanabilme tanıtılmış;  $\mathcal{A}$ -toplanabilme, istatistiksel  $\mathcal{A}$ -toplanabilme ve istatistiksel yakınsaklık arasındaki bağlantıdan söz edilmiştir. Ayrıca istatistiksel  $\mathcal{A}$ -toplanabilme yardımıyla Korovkin tipi yaklaşım teoremi; ve istatistiksel  $\mathcal{A}$ -toplanabilme yardımıyla Korovkin tipi yaklaşım teoreminin süreklilik modülü kullanarak yakınsaklık oranı verilmiştir. Beşinci yani son bölümde ise çift indisli diziler tanıtılmış ve benzer şekilde çift indisli diziler için de Korovkin tipi yaklaşım teoremleri incelenmiş ve örnekler verilmiştir. Ayrıca istatistiksel  $\mathcal{A}$ -toplanabilme yardımıyla Korovkin tipi yaklaşım teoremi verilmiş ve elde edilen yaklaşımın yakınsaklık oranı süreklilik modülü ile incelenmiştir.

**ANAHTAR KELİMELELER:** Korovkin Teoremi; İstatistiksel Yakınsaklık;  $\mathcal{A}$ -İstatistiksel Yakınsaklık; İstatistiksel  $\mathcal{A}$ -Toplanabilme

Ocak 2025, 73 Sayfa

## **ABSTRACT**

## **MSC THESIS**

### **KOROVKIN TYPE APPROXIMATION THEOREMS VIA STATISTICAL $\mathcal{A}$ - SUMMABILITY**

**PELİN YILMAZ**

**SINOP UNIVERSITY INSTITUTE OF GRADUATE PROGRAMS**

**DEPARTMENT OF MATHEMATICS**

**SUPERVISOR: PROF. DR. KAMİL DEMİRCİ**

This thesis consists of five chapters. First, basic definitions and the classical Korovkin theorem are given. The concept of density, the definitions and theorems of statistical convergence are stated, and the Korovkin type approximation theorem for statistical convergence, which is stronger than convergence, and the convergence rate of the statistical Korovkin type approximation theorem is given using the continuity module and the example showing that the theorem is stronger. Then,  $\mathcal{A}$ -statistical convergence, which is an extension of statistical convergence, is introduced and the Korovkin type approximation theorem for  $\mathcal{A}$ -statistical convergence is given. Then  $\mathcal{A}$ -summability is introduced and the connection between  $\mathcal{A}$ -summability, statistical  $\mathcal{A}$ -summability and statistical convergence is mentioned. Also, the Korovkin type approximation theorem with the help of statistical  $\mathcal{A}$ -summability and the rate of convergence of the Korovkin type approximation theorem with the help of statistical  $\mathcal{A}$ -summability using the modulus of continuity are given. In the fifth and last section, sequences with even indices are introduced and similarly, Korovkin type approximation theorems for sequences with even indices are analyzed and examples are given. In addition, the Korovkin type approximation theorem is given with the help of statistical  $\mathcal{A}$ -summability and the convergence rate of the obtained approximation is analyzed with the continuity modulus.

**KEYWORDS:** Korovkin's Theorem; Statistical Convergence;  $\mathcal{A}$ -Statistical Convergence; Statistical  $\mathcal{A}$ -Summability

January 2025, 73 Page

## TEŞEKKÜR

Bu çalışma konusunu bana vererek, çalışmalarımın her safhasında yakın ilgi ve önerileriyle beni yönlendiren, bilgi birikimi ve tecrübesini benimle paylaşan, benden desteğini esirgemeyen ve çalışmamın bu aşamaya gelmesini sağlayan saygıdeğer danışman hocam Sayın Prof. Dr. Kamil DEMİRCİ'ye, çalışmalarımda yardımlarını, her konuda desteklerini esirgemeyen, bilgi birikimi ve tecrübesini benimle paylaşan ve beni daima cesaretlendiren saygıdeğer hocalarım Sayın Prof. Dr. Fadime DİRİK'e ve Sayın Doç. Dr. Sevda YILDIZ' a en içten saygılarımla teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca yüksek lisans eğitimime başlamama vesile olan ve eğitimim boyunca manevi desteğini esirgemeyen annem Rüveyde YEL'e ve kardeşim Selin DURAN'a, yüksek lisans eğitimim süresince verdikleri cesaret, gösterdikleri özveri ve güven için müdürlerim Sayın Meryem FİDAN'a ve Sayın Gülsemin ÜNAL'a, ayrıca her zaman yanımda olan, heyecanımı benimle paylaşan tüm arkadaşlarıma dostlukları ve destekleri için çok teşekkür ederim. Gerek seminer gerek tez çalışmam boyunca her koşulda yanımda olan ve desteğini bir an olsun esirgemeyen hayat arkadaşım Aytaç YILMAZ' a sonsuz teşekkür ederim. Son olarak varlığıyla bana güç veren yaşam kaynağım canım kızım Aylin YILMAZ'a en içten sevgilerimi iletmek isterim.

Pelin YILMAZ

## İÇİNDEKİLER

|                                                                                                                                                           | Sayfa |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| TEZ KABUL .....                                                                                                                                           | ii    |
| ETİK BEYANI.....                                                                                                                                          | iii   |
| ÖZET .....                                                                                                                                                | iv    |
| ABSTRACT.....                                                                                                                                             | v     |
| TEŞEKKÜR .....                                                                                                                                            | vi    |
| İÇİNDEKİLER .....                                                                                                                                         | vii   |
| SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....                                                                                                                       | ix    |
| 1. GİRİŞ .....                                                                                                                                            | 1     |
| 2. GENEL BİLGİLER.....                                                                                                                                    | 3     |
| 2.1. Pozitif Lineer Operatörler .....                                                                                                                     | 3     |
| 2.2. Süreklilik Modülü .....                                                                                                                              | 4     |
| 2.3. Korovkin Tipi Yaklaşım Teoremi.....                                                                                                                  | 4     |
| 3. YOĞUNLUK KAVRAMI VE İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK.....                                                                                                     | 8     |
| 3.1. Yoğunluk Kavramı .....                                                                                                                               | 8     |
| 3.2. İstatistiksel Yakınsaklık .....                                                                                                                      | 9     |
| 3.3. İstatistiksel Yakınsaklık Yardımı İle Korovkin Tipi Yaklaşım Teoremi .....                                                                           | 12    |
| 3.4. İstatistiksel Yakınsaklık Yardımı İle Korovkin Tipi Yaklaşımın, Süreklilik Modülü Yardımıyla Yakınsaklık Oranının Hesaplanması .....                 | 16    |
| 4. $\mathcal{A}$ - İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK.....                                                                                                         | 19    |
| 4.1. $\mathcal{A}$ -İstatistiksel Yakınsaklık İle İlgili Tanım ve Teoremler.....                                                                          | 19    |
| 4.2. $\mathcal{A}$ - İstatistiksel Yakınsaklık Yardımı İle Korovkin Tipi Yaklaşım Teoremi .....                                                           | 23    |
| 4.3. İstatistiksel $\mathcal{A}$ -Toplanabilme.....                                                                                                       | 25    |
| 4.4. İstatistiksel $\mathcal{A}$ -Toplanabilme Yardımı İle Korovkin Tipi Yaklaşım Teoremi .....                                                           | 27    |
| 4.5. İstatistiksel $\mathcal{A}$ -Toplanabilme Yardımı İle Korovkin Tipi Yaklaşımın, Süreklilik Modülü Yardımıyla Yakınsaklık Oranının Hesaplanması ..... | 32    |
| 5. ÇİFT İNDİSLİ DİZİLER İÇİN YAKINSAKLIK YÖNTEMLERİ .....                                                                                                 | 36    |
| 5.1. Çift İndisli Diziler İçin Pringsheim Yakınsaklık .....                                                                                               | 36    |
| 5.2. Çift İndisli Diziler İçin Korovkin Tipi Yaklaşım Teoremi.....                                                                                        | 37    |
| 5.3. Çift İndisli Diziler İçin $\mathcal{A}$ -İstatistiksel Yakınsaklık.....                                                                              | 40    |
| 5.4. Çift İndisli Diziler İçin $\mathcal{A}$ -İstatistiksel Yakınsaklık Yardımı İle Korovkin Tipi                                                         |       |

|                                                                                                    |           |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| Yaklaşım Teoremi .....                                                                             | 44        |
| 5.5. Çift İndisli Diziler İçin $\mathcal{A}$ -Toplanabilme .....                                   | 49        |
| 5.6. Çift İndisli Diziler İçin İstatistiksel $\mathcal{A}$ -Toplanabilme Yardımı İle               |           |
| Korovkin Tipi Yaklaşım Teoremi .....                                                               | 50        |
| 5.7. Çift İndisli Diziler İçin İstatistiksel $\mathcal{A}$ -Toplanabilme Yardımı İle Korovkin Tipi |           |
| Yaklaşımın, Süreklilik Modülü Yardımıyla Yakınsaklık Oranının Hesaplanması .....                   | 56        |
| <b>6. SONUÇ VE ÖNERİLER.....</b>                                                                   | <b>61</b> |
| <b>KAYNAKLAR .....</b>                                                                             | <b>62</b> |
| <b>ÖZGEÇMİŞ .....</b>                                                                              | <b>64</b> |





## SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

### Simgeler

|                        |                                                          |
|------------------------|----------------------------------------------------------|
| $\mathbb{R}$           | : Reel sayılar kümesi                                    |
| $\mathbb{N}$           | : Doğal sayılar kümesi                                   |
| $st$                   | : İstatistiksel yakınsak diziler uzayı                   |
| $c$                    | : Yakınsak diziler uzayı                                 |
| $C[d, e]$              | : $[d, e]$ aralığı üzerinde sürekli fonksiyonların uzayı |
| $ K $                  | : $K$ kümesinin eleman sayısı                            |
| $\delta$               | : Yoğunluk fonksiyonu                                    |
| $\omega(f; g)$         | : $h$ fonksiyonunun süreklilik modülü                    |
| $C_1$                  | : Cesáro Matrisi                                         |
| $\delta_{\mathcal{A}}$ | : $\mathcal{A}$ -yoğunluk fonksiyonu                     |
| $\chi_K$               | : $K$ kümesinin karakteristik fonksiyonu                 |

### Kısaltmalar

|      |                 |
|------|-----------------|
| d.d. | :Diğer durumlar |
|------|-----------------|

## 1. GİRİŞ

Yaklaşım teorisi, matematikçilerin uzun yıllardır üzerinde çalıştığı önemli bir konudur. İlk olarak Weierstrass  $[a, b]$  aralığı üzerinde sürekli her fonksiyona bir polinom fonksiyonu ile yaklaşılabiliyor mu problemini ele almıştır. Bu problem H. Bohman'ın 1951 yılında toplam şeklindeki pozitif lineer operatörler dizisinin  $[0,1]$  aralığı üzerinde sürekli bir fonksiyona yaklaşım problemini araştırmasına neden olmuştur. 1953 yılında aynı problemi tekrar inceleyen P. P. Korovkin problemin daha genel durumlar içinde gerçekleştirildiğini ispatlamıştır. Yaklaşım teorisinde önemli yer tutan Korovkin tipi yaklaşım teoremi birçok matematikçinin araştırmalarında farklı farklı kullanımlarıyla karşımıza çıkmaktadır.

1949 yılında ilk kez Steinhaus tarafından ifade edilen, 1951 yılında Fast tarafından geliştirilen istatistiksel yakınsaklık kavramı, matematiğin farklı alanlarıyla olan ilişkisi nedeniyle uzun yıllar boyunca araştırılmış ve geliştirilmiştir. Bu kavramları 2002 yılında bir araya getirip çalışma konusu yapan Gadjev ve Orhan istatistiksel Korovkin tipi yaklaşım teoremini incelenmiş ve sonrasında  $\mathcal{A}$ -istatistiksel Korovkin tipi yaklaşım teoremini elde etmişlerdir. Matematikçiler tarafından ilgi çeken bu konu 2009 yılında Edely ve Mursaleen tarafından çalışılmıştır. Bu çalışmanın sonucunda  $\mathcal{A}$ -toplanabilme kavramını tanımlamışlardır. Tanımladıkları bu kavramın  $\mathcal{A}$ -istatistiksel yakınsaklık ile ilişkisini incelemişlerdir. 2011 yılında ise Demirci ve Karakuş tarafından istatistiksel  $\mathcal{A}$ -toplanabilme yardımı ile Korovkin tipi yaklaşım teoremi verilmiştir.

İstatistiksel yakınsaklık kavramı çift indisli diziler içinde çalışılmıştır. İlk olarak 2003 yılında Moricz tarafından çalışılan çift indisli diziler için 2010 yılında Demirci ve Dirik tarafından matris toplanabilme metodu kullanılarak daha genel sonuçlar elde edilmiştir. 2013 yılında ise Demirci ve Karakuş tarafından çift indisli diziler için  $\mathcal{A}$ -toplanabilme ve  $\mathcal{A}$ -istatistiksel yakınsaklık kavramları incelenmiş, istatistiksel  $\mathcal{A}$ -toplanabilme yardımıyla Korovkin tipi yaklaşım teoremi verilmiştir.

Hazırlanan bu yüksek lisans tezinde ilk olarak yaklaşımlar teorisinde önemli yeri olan Korovkin tipi yaklaşım teoremi ifade ve ispat edilecek ve teoremin tüm koşullarını sağlayan bir örnek verilecektir. Devamında yoğunluk ve istatistiksel yakınsaklık kavramları tanıtılacak, istatistiksel yakınsaklığın bilinen anlamdaki yakınsaklıktan daha kuvvetli olduğunda dair sonuçlar elde edilecek, istatistiksel yakınsaklık kavramı

kullanılarak Korovkin tipi yaklaşım teoremi incelenecek, teoremin koşullarını sağlayan ancak klasik Korovkin tipi yaklaşım teoreminin koşullarını sağlamayan bir örnek verilecektir. Ayrıca süreklilik modülü yardımıyla istatistiksel Korovkin tipi teoremin yakınsaklık oranı incelenecektir. Devamında  $\mathcal{A}$ -toplanabilme ve  $\mathcal{A}$ -istatistiksel yakınsaklık kavramları tanıtılacak, bu kavramlar yardımıyla Korovkin tipi yaklaşım teoremi incelenecektir. Akabinde  $\mathcal{A}$ -toplanabilme, istatistiksel  $\mathcal{A}$ -toplanabilme ve istatistiksel yakınsaklık arasındaki ilişki ifade edilecek; istatistiksel  $\mathcal{A}$ -toplanabilme yardımıyla Korovkin tipi yaklaşım teoremi ile bu teoremin koşullarını sağlayan ancak klasik Korovkin tipi yaklaşım teoreminin ve istatistiksel Korovkin tipi yaklaşım teoreminin koşullarını sağlamayan bir örnek verilecektir. Ayrıca istatistiksel  $\mathcal{A}$ -toplanabilme yardımıyla Korovkin tipi yaklaşım teoreminin süreklilik modülü yardımıyla yakınsaklık oranı incelenecektir. Devamında çift indisli diziler ve Pringsheim yakınsaklık ( $P$ -yakınsaklık) kavramları tanıtılacak ve  $P$ -yakınsaklık kavramı yardımıyla çift indisli diziler için Korovkin tipi yaklaşım teoremi incelenecek teoremin koşullarını sağlayan bir örnek verilecektir. Çift indisli diziler için  $\mathcal{A}$ -toplanabilme ve  $\mathcal{A}$ -istatistiksel yakınsaklık kavramları tanıtılacak, bu kavram yardımıyla Korovkin tipi yaklaşım teoremi incelenecektir. Bu yüksek lisans tezinde son olarak çift indisli dizilerin  $\mathcal{A}$ -toplanabilme, istatistiksel  $\mathcal{A}$ -toplanabilme ve istatistiksel yakınsaklık arasındaki ilişki ifade edilecek, çift indisli diziler için istatistiksel  $\mathcal{A}$ -toplanabilme yardımıyla Korovkin tipi yaklaşım teoremi ve teoremin koşulları sağlayan ancak klasik Korovkin tipi yaklaşım teoreminin koşullarını ve istatistiksel yakınsaklık yardımıyla Korovkin tipi yaklaşım teoreminin koşullarını sağlamayan bir örnek verilecektir. Ayrıca istatistiksel  $\mathcal{A}$ -toplanabilme yardımıyla Korovkin tipi yaklaşım teoreminin süreklilik modülü yardımıyla yakınsaklık oranı incelenecektir.

## 2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde tez boyunca ihtiyaç duyulacak temel tanım ve teoremler verilecektir.

### 2.1. Pozitif Lineer Operatörler

**2.1.1. Tanım:**  $E$  ve  $F$  reel değerli iki fonksiyon uzayı olsun. Eğer  $E$  dan alınmış herhangi bir  $h$  fonksiyonunu,  $F$  de bir  $g$  fonksiyonuna karşılık getiren bir  $\mathcal{K}$  kuralı varsa,  $E$  uzayında bir operatör tanımlanmıştır denir ve  $g(u) = \mathcal{K}(h(v); u)$  ile gösterilir. Burada  $\mathcal{K}(h(v); u)$  gösterimi yerine  $\mathcal{K}(h; u)$  veya  $\mathcal{K}(h)$  gösterimi kullanılacaktır.  $E$  uzayına  $\mathcal{K}$  operatörünün “tanım kümesi” denir ve  $E = D(\mathcal{K})$  ile gösterilir. Ayrıca  $R(\mathcal{K}) = \{g: \mathcal{K}(h; u) = g(u), h \in D(\mathcal{K})\} \subseteq F$  kümesine de  $\mathcal{K}$  operatörünün “değer kümesi” denir.

**2.1.2. Tanım:**  $h_1$  ve  $h_2$ ,  $E$  lineer uzayında herhangi iki fonksiyon ve  $\forall u, \forall \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$  için  $\mathcal{K}$  operatörü;

$$\mathcal{K}(\mu_1 h_1 + \mu_2 h_2; u) = \mu_1 \mathcal{K}(h_1; u) + \mu_2 \mathcal{K}(h_2; u)$$

koşulunu gerçekliyorsa  $\mathcal{K}$  operatörüne “lineer operatör” denir.

Bu tanımdan görülüyor ki  $\mathcal{K}$  lineer operatörü için  $\mathcal{K}(0; u) = 0$  sağlanır.

**2.1.3. Tanım:**  $E$  ve  $F$  reel değerli fonksiyonların uzayı olmak üzere  $\mathcal{K}: E \rightarrow F$  lineer operatör olsun.  $E$  tanım uzayından alınan  $\forall h(u) \geq 0$  fonksiyonu için  $\mathcal{K}(h; u) \geq 0$  koşulunu gerçekliyor ise  $\mathcal{K}$  operatörüne “pozitif lineer operatör” denir.

**2.1.4. Örnek:** 1912 yılında S. Bernstein,  $[0,1]$  aralığında sürekli bir fonksiyona yakınsayan polinom tanımlamıştır. Bernstein polinomu olarak bilinen bu polinom

$0 \leq u \leq 1$  için

$$\mathcal{B}_n(h; u) = \sum_{k=0}^n h\left(\frac{n}{k}\right) \binom{n}{k} u^k (1-u)^{n-k}$$

şeklinde dir. Burada  $u^k (1-u)^{n-k} \geq 0$  olduğundan  $\mathcal{B}_n(h; u) \geq 0$  olup  $\mathcal{B}_n(h; u)$  pozitif lineer operatördür.

Ayrıca her  $u$  için  $h(u) \leq g(u)$  ise  $\mathcal{K}(h; u) \leq \mathcal{K}(g; u)$  olduğundan  $\mathcal{K}$  pozitif lineer operatörü monoton artandır.

## 2.2 Süreklilik Modülü

Bu kısımda yakınsaklık oranı hesaplamasını yaparken kullanılan süreklilik modülü kavramı ve özellikleri verilecektir.

$C[d, e]$  uzayı,  $[d, e]$  aralığında tanımlı, reel değerli ve aralığın tüm noktalarında sürekli fonksiyonların uzayıdır.  $d, e$  uç noktalarında bu uzayın elemanları sağdan ve soldan sürekli fonksiyonlardır. Herhangi bir  $h \in C[d, e]$  için

$$\|h\|_{C[d,e]} = \sup_{u \in [d,e]} |h(u)|$$

alışılmış supremum normu ile birlikte  $C[d, e]$  bir Banach uzayıdır.

**2.2.1. Tanım:**  $h \in C[d, e]$  olsun.  $\delta \geq 0$  için

$$\omega(h; \delta) = \sup_{\substack{u, v \in [d,e] \\ |v-u| \leq \delta}} |h(v) - h(u)|$$

ile tanımlanan  $\omega(h; \delta)$  ifadesine  $h$  fonksiyonunun süreklilik modülü denir.

Süreklilik modülü;

i)  $\omega(h; \delta) \geq 0$

ii)  $\delta_1 \leq \delta_2 \Rightarrow \omega(h; \delta_1) \leq \omega(h; \delta_2)$

iii)  $\omega(h + g; \delta) \leq \omega(h; \delta) + \omega(g; \delta)$

iv)  $\omega(h; \lambda\delta) \leq \lambda\omega(h; \delta), \lambda \in \mathbb{N}$

v)  $\llbracket \alpha \rrbracket, \alpha$ 'nın tam değerini göstermek üzere  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  için

$$\omega(h; \alpha\delta) \leq (1 + \llbracket \alpha \rrbracket)\omega(h; \delta) \leq (1 + \alpha)\omega(h; \delta)$$

vi)  $\omega(h; |u - v|) \geq |h(u) - h(v)|$

vii)  $|h(u) - h(v)| \leq \left(1 + \frac{|u-v|}{\delta}\right) \cdot \omega(h; \delta)$

özelliklerine sahiptir (Altomare ve Campiti, 1994).

## 2.3. Korovkin Tipi Yaklaşım Teoremi

1951 yılında H. Bohman toplam şeklindeki pozitif lineer operatörler dizisinin  $[0,1]$  aralığında sürekli  $h(u)$  fonksiyonuna yaklaşım problemini incelemiştir. H. Bohman göstermiştir ki;  $u \in [0,1], 0 \leq \alpha_{k,n} \leq 1$  olduğunda

$$\mathcal{K}_n(h; u) = \sum_{k=0}^n h(\alpha_{k,n}) \mathcal{P}_{k,n}(u), \quad \mathcal{P}_{k,n}(u) \geq 0$$

pozitif lineer operatör dizisinin  $n \rightarrow \infty$  için  $[0,1]$  kapalı aralığında  $h$  fonksiyonuna düzgün yakınsaması için gerek ve yeter koşul

$$\mathcal{K}_n(1; u) \Rightarrow 1$$

$$\mathcal{K}_n(v; u) \Rightarrow u$$

$$\mathcal{K}_n(v^2; u) \Rightarrow u^2$$

şeklindedir.

P.P. Korovkin, H. Bohman'nın koşullarının genel halde de gerçekleştiğini gösteren bir teorem ispatlamıştır.

Şimdi yaklaşımlar teorisinde önemli yeri olan, 1953 yılında P.P. Korovkin tarafından verilen yaklaşım teoremi ve bu teoremin ispatı verilecektir.

Tez boyunca  $h_0(v) = 1$ ,  $h_1(v) = v$ ,  $h_2(v) = v^2$  test fonksiyonları kullanılacaktır.

**2.3.1. Teorem:**  $\mathcal{K}_n: C[d, e] \rightarrow C[d, e]$  pozitif lineer operatörlerin bir dizisi olsun.  $\forall h \in C[d, e]$  için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{K}_n(h) - h\|_{C[d, e]} = 0 \quad (2.3.1)$$

gerek ve yeter koşul

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{K}_n(h_i) - h_i\|_{C[d, e]} = 0, i = 0, 1, 2 \quad (2.3.2)$$

olmasıdır (Korovkin, 1953, 1960).

**İspat:** (2.3.1)  $\Rightarrow$  (2.3.2) olduğu açıktır. Çünkü,  $\forall h \in C[d, e]$  için (2.3.1) sağlanmaktadır.

O halde  $h_i \in C[d, e]$  ( $i = 0, 1, 2$ ) olduğundan istenilen elde edilir.

(2.3.2)  $\Rightarrow$  (2.3.1) olduğu gösterilsin.  $\forall h \in C[d, e]$  alınsın. O halde  $\forall \varepsilon > 0$  için  $\exists \delta > 0$  vardır  $\exists |v - u| < \delta$  koşulunu sağlayan  $\forall u, v \in [d, e]$  için  $|h(v) - h(u)| < \varepsilon$  olur.

$|v - u| > \delta$  olduğunda ise  $\frac{(v-u)^2}{\delta^2} \geq 1$  dir. Ayrıca  $h$  fonksiyonu  $[d, e]$  kapalı aralığında sınırlı olduğundan  $\forall u \in [d, e]$  için  $|h(u)| \leq \mathcal{M}$  olacak şekilde  $\mathcal{M} > 0$  sayısı bulunabilir. Dolayısıyla

$$|h(v) - h(u)| \leq |h(v)| + |h(u)| < \mathcal{M} + \mathcal{M} = 2\mathcal{M}$$

gerçeklenir. Buradan  $|h(v) - h(u)| \leq 2\mathcal{M} \frac{(v-u)^2}{\delta^2}$  yazılabilir. O halde  $\forall u, v \in [d, e]$  için  $|h(v) - h(u)| < \varepsilon + 2\mathcal{M} \frac{(v-u)^2}{\delta^2}$  elde edilir. Eşitliğin her iki tarafına  $\mathcal{K}_n$  pozitif lineer operatörü uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
& \mathcal{K}_n(|h(v) - h(u)|; u) \\
& \leq \mathcal{K}_n\left(\varepsilon + 2\mathcal{M} \frac{(v-u)^2}{\delta^2}; u\right) \\
& = \mathcal{K}_n(\varepsilon; u) + \frac{2\mathcal{M}}{\delta^2} \mathcal{K}_n((v-u)^2; u) \\
& = \varepsilon \mathcal{K}_n(1; u) + \frac{2\mathcal{M}}{\delta^2} \{\mathcal{K}_n(v^2; u) - 2u\mathcal{K}_n(v; u) + u^2\mathcal{K}_n(1; u)\} \\
& = \varepsilon + \varepsilon \mathcal{K}_n(1; u) + \frac{2\mathcal{M}}{\delta^2} \{\mathcal{K}_n(v^2; u) - 2u\mathcal{K}_n(v; u) + u^2\mathcal{K}_n(1; u) - 2u^2\} \\
& = \varepsilon + \varepsilon(\mathcal{K}_n(1; u) - 1) + \frac{2\mathcal{M}}{\delta^2} \{(\mathcal{K}_n(v^2; u) - u^2) - 2u(\mathcal{K}_n(v; u) - u) \\
& \quad + u^2(\mathcal{K}_n(1; u) - 1)\} \\
& \leq \varepsilon + \varepsilon|\mathcal{K}_n(1; u) - 1| + \frac{2\mathcal{M}}{\delta^2} \{|\mathcal{K}_n(v^2; u) - u^2| + 2|u||\mathcal{K}_n(v; u) - u| \\
& \quad + |u^2||\mathcal{K}_n(1; u) - 1|\}
\end{aligned} \tag{2.3.3}$$

eşitsizliği elde edilir. Ayrıca  $\mathcal{K}_n$  pozitif lineer operatör olduğundan

$$\begin{aligned}
|\mathcal{K}_n(h; u) - h(u)| &= |\mathcal{K}_n(h; u) - h(u)\mathcal{K}_n(1; u) + h(u)\mathcal{K}_n(1; u) - h(u)| \\
&= |\mathcal{K}_n(h(v) - h(u); u) + h(u) \cdot (\mathcal{K}_n(1; u) - 1)| \\
&\leq \mathcal{K}_n(|h(v) - h(u)|; u) + |h(u)||\mathcal{K}_n(1; u) - 1| \\
&\leq \mathcal{K}_n(|h(v) - h(u)|; u) + \mathcal{M}|\mathcal{K}_n(1; u) - 1|
\end{aligned} \tag{2.3.4}$$

yazılabilir. (2.3.3) ve (2.3.4) kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
|\mathcal{K}_n(h; u) - h(u)| &< \varepsilon + \varepsilon|\mathcal{K}_n(1; u) - 1| + \frac{2\mathcal{M}}{\delta^2} \{|\mathcal{K}_n(v^2; u) - u^2| \\
&\quad + 2|u||\mathcal{K}_n(v; u) - u| + |u^2||\mathcal{K}_n(1; u) - 1|\} + \mathcal{M}|\mathcal{K}_n(1; u) - 1|
\end{aligned}$$

elde edilir. Basit hesaplamalar yapılırsa,

$$\begin{aligned}
|\mathcal{K}_n(h; u) - h(u)| &< \varepsilon + \frac{2\mathcal{M}}{\delta^2} |\mathcal{K}_n(v^2; u) - u^2| + \frac{4\mathcal{M}}{\delta^2} |u||\mathcal{K}_n(v; u) - u| \\
&\quad + \left(\varepsilon + \mathcal{M} + \frac{2\mathcal{M}}{\delta^2} |u^2|\right) |\mathcal{K}_n(1; u) - 1|
\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Son eşitsizliğin her iki tarafının  $u \in [d, e]$  için supremumu alınıp norma geçilirse,

$$\|\mathcal{K}_n(h) - h\|_{C[d,e]}$$

$$< \varepsilon + \mathcal{C}\{\|\mathcal{K}_n(h_0) - h_0\|_{C[d,e]} + \|\mathcal{K}_n(h_1) - h_1\|_{C[d,e]} + \|\mathcal{K}_n(h_2) - h_2\|_{C[d,e]}\}$$

bulunur. Burada  $\mathcal{C} = \sup_{u \in [d,e]} \left\{ \varepsilon + \mathcal{M} + \frac{2\mathcal{M}}{\delta^2} |u^2|, \frac{4\mathcal{M}}{\delta^2} |u|, \frac{2\mathcal{M}}{\delta^2} \right\}$  şeklindedir. Şimdi  $n \rightarrow \infty$

için limit alınırsa hipotezden  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{K}_n(h) - h\|_{C[d,e]} = 0$  elde edilir.

**2.3.2. Örnek:** 2.1.4 Örnek'te tanımlanan Bernstein polinomlar dizisi için  $\mathcal{B}_n(1; u) = 1$ ,  $\mathcal{B}_n(v; u) = u$ ,  $\mathcal{B}_n(v^2; u) = u^2 + \frac{u-u^2}{n}$  olduğu basit hesaplamalar yapıldığında elde edilir (Lorentz, 1986). Buradan  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{B}_n(h_i) - h_i\|_{C[0,1]} = 0$ ,  $i = 0, 1, 2$  olduğundan  $(\mathcal{B}_n)$  Bernstein polinomlarının 2.3.1. Teorem'de verilen Klasik Korovkin teoreminin koşullarını sağladığı görülür. Dolayısıyla  $\forall h \in C[0,1]$  için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{B}_n(h) - h\|_{C[0,1]} = 0$$

olur.



### 3. YOĞUNLUK KAVRAMI VE İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

#### 3.1. Yoğunluk Kavramı

Bu bölümde yoğunluk kavramı tanımlanmıştır.

**3.1.1. Tanım:**  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ , doğal sayıların kuvvet kümesini göstermek üzere  $\underline{\delta}: \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow [0,1]$  fonksiyonu,  $X, Y \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$  için

$$D_1) X \sim Y (X \text{ ile } Y \text{ nin simetrik farkı sonlu}) \Leftrightarrow \underline{\delta}(X) = \underline{\delta}(Y)$$

$$D_2) X \cap Y = \emptyset \Rightarrow \underline{\delta}(X) + \underline{\delta}(Y) \leq \underline{\delta}(X \cup Y)$$

$$D_3) \forall X, Y \text{ için } \underline{\delta}(X) + \underline{\delta}(Y) \leq 1 + \underline{\delta}(X \cap Y)$$

$$D_4) \underline{\delta}(\mathbb{N}) = 1$$

özelliklerini sağlıyorsa  $\underline{\delta}$  fonksiyonuna alt yoğunluk fonksiyonu denir (Freedman ve Sember, 1981).

$\bar{\delta}(X) = 1 - \underline{\delta}(\mathbb{N} \setminus X)$  şeklinde tanımlanan  $\bar{\delta}$  yoğunluğa  $X$  kümesinin üst yoğunluğu denir. Alt ve üst yoğunluğun özellikleri aşağıdaki teoremle ifade edilir.

**3.1.2. Teorem:**  $\underline{\delta}$  alt yoğunluk ve  $\bar{\delta}$  üst yoğunluk olmak üzere  $X, Y \subseteq \mathbb{N}$  için

$$i) X \subseteq Y \Rightarrow \underline{\delta}(X) \leq \underline{\delta}(Y)$$

$$ii) X \subseteq Y \Rightarrow \bar{\delta}(X) \leq \bar{\delta}(Y)$$

$$iii) \forall X, Y \text{ için } \bar{\delta}(X) + \bar{\delta}(Y) \geq \bar{\delta}(X \cup Y)$$

$$iv) \underline{\delta}(\emptyset) = \bar{\delta}(\emptyset) = 0$$

$$v) \bar{\delta}(\mathbb{N}) = 1$$

$$vi) X \sim Y \Rightarrow \bar{\delta}(X) = \bar{\delta}(Y)$$

$$vii) \underline{\delta}(X) \leq \bar{\delta}(Y)$$

dır (Freedman, Sember 1981).

**3.1.3. Tanım:**  $Y \subseteq \mathbb{N}$  olmak üzere  $Y_m = \{n \leq m : n \in Y\}$  kümesinin eleman sayısı  $|Y_m|$  ile gösterilsin.  $Y$  kümesinin alt yoğunluğu

$$\underline{\delta}(Y) = \liminf_{m \rightarrow \infty} \frac{|Y_m|}{m}$$

ve üst yoğunluğu

$$\bar{\delta}(Y) = \limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{|Y_m|}{m}$$

şeklinde tanımlanır. Eğer  $\underline{\delta}(Y) = \bar{\delta}(Y)$  ise  $Y$  kümesi yoğunluğa sahiptir denir ve  $\delta(Y)$  ile gösterilir (Niven ve Zuckerman, 1980).

Yoğunluk için bir başka karakterizasyon şu şekilde verilebilir:

$(y_m)$  pozitif tam sayıların artan bir dizisi ve  $Y = \{y_m : m \in \mathbb{N}\}$  olmak üzere yoğunluk mevcut ise,

$$\delta(Y) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m}{y_m}$$

dir (Niven ve Zuckerman, 1980).

Bu karakterizasyon kullanılarak  $\delta(\{2m : m \in \mathbb{N}\}) = \frac{1}{2}$ ,  $\delta(\{2m + 1 : m \in \mathbb{N}\}) = \frac{1}{2}$ ,  $\delta(\{m^2 : m \in \mathbb{N}\}) = 0$  olduğu kolaylıkla görülebilir. Ayrıca doğal sayıların her bir sonlu alt kümesi de sıfır yoğunluklıdır. Bir  $Y$  kümesi yoğunluğa sahip ise  $\delta(Y) = 1 - \delta(\mathbb{N} \setminus Y)$  olacaktır (Niven ve Zuckerman, 1980; Freedman ve Sember, 1981).

### 3.2. İstatistiksel Yakınsaklık

Bu bölümde istatistiksel yakınsaklık tanımlanmıştır.

**3.2.1. Tanım:**  $Y \subseteq \mathbb{N}$  olmak üzere  $\delta(Y) = 0$  olsun. Eğer  $\varepsilon > 0$  verildiğinde  $\forall m \notin Y$  için  $|y_m - \mathcal{L}| < \varepsilon$  olacak şekilde bir  $N \in \mathbb{N}$  varsa  $y = (y_m)$  dizisi bir  $\mathcal{L}$  sayısına hemen her  $m$  için yakınsaktır denir (Buck 1953).

Bu tanım istatistiksel yakınsaklık tanımından başka bir şey değildir. Bundan sonra bir  $y = (y_m)$  dizisi sıfır yoğunluğa sahip bir kümenin dışındaki her  $m$  için  $\mathcal{P}$  özelliğine sahip ise  $y$  dizisi hemen her  $m$  için  $\mathcal{P}$  özelliğine sahiptir diyeceğiz ve bunu “*h. h. m.*” ile kısıltacağız.

**3.2.2. Tanım:**  $y = (y_m)$  reel terimli bir dizi olsun. Eğer  $\forall \varepsilon > 0$  için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{m \leq n : |y_m - \mathcal{L}| \geq \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde bir  $\mathcal{L}$  sayısı var ise bu  $(y_m)$  dizisi  $\mathcal{L}$  sayısına istatistiksel yakınsaktır denir ve bu durum  $st - \lim y_m = \mathcal{L}$  şeklinde gösterilir (Fast, 1951; Steinhaus, 1951).

**3.2.3. Örnek:**  $y = (y_m)$  dizisinin genel terimi

$$y_m = \begin{cases} 1, & m = k^2 \\ 0, & m \neq k^2 \end{cases} \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

şeklinde tanımlansın.  $\varepsilon > 0$  verildiğinde

$$\{m \leq n: |y_m - 0| \geq \varepsilon\} \subseteq \{m \leq n: y_m \neq 0\}$$

dır. Buradan;

$$|\{m \leq n: |y_m - 0| \geq \varepsilon\}| \leq |\{m \leq n: y_m \neq 0\}| \leq \sqrt{n}$$

elde edilir. Eşitsizlik  $\frac{1}{n}$  ile çarpılıp  $n \rightarrow \infty$  için limit alınır

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{m \leq n: |y_m - 0| \geq \varepsilon\}| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{n} = 0$$

bulunur. Bu da  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{m \leq n: |y_m - 0| \geq \varepsilon\}| = 0$  olmasıdır. Yani  $st - \lim y_m = 0$  elde edilir.

Klasik anlamda yakınsak her dizinin sınırlı olduğunu biliyoruz. Ancak istatistiksel yakınsak dizilerin sınırlı olması gerekmez.

**3.2.4. Örnek:**  $y = (y_m)$  dizisinin genel terimi

$$y_m = \begin{cases} \sqrt{m}, & m = k^2 \\ 0, & m \neq k^2 \end{cases} \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

şeklinde tanımlansın.  $\varepsilon > 0$  verildiğinde

$$\{m \leq n: |y_m - 0| \geq \varepsilon\} \subseteq \{m \leq n: y_m \neq 0\}$$

dır. Buradan;

$$|\{m \leq n: |y_m - 0| \geq \varepsilon\}| \leq |\{m \leq n: y_m \neq 0\}| \leq \sqrt{n}$$

elde edilir. Eşitsizlik  $\frac{1}{n}$  ile çarpılıp  $n \rightarrow \infty$  için limit alınır

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{m \leq n: |y_m - 0| \geq \varepsilon\}| = 0$$

olup  $st - \lim y_m = 0$  elde edilir. Görüldüğü üzere dizi istatistiksel yakınsaktır ancak sınırlı değildir.

İstatistiksel yakınsaklık tanımından da anlaşılabileceği gibi  $y = (y_m)$  dizisi bir  $\mathcal{L}$  sayısına istatistiksel yakınsak ise  $\mathcal{L}$  sayısının herhangi bir  $\varepsilon$  komşuluğunda sonsuz çoklukta terim bulunur. Bu komşuluğun dışında da indis kümesinin yoğunluğu sıfır olmak şartıyla yine diziyeye ait sonsuz çoklukta terim bulunabilir. Dolayısıyla yakınsak diziler uzayını  $c$  ile ve istatistiksel yakınsak diziler uzayını  $st$  ile gösterirsek,  $c \subset st$  dir. Yani istatistiksel yakınsaklık, bilinen anlamdaki yakınsaklıktan daha kuvvetlidir.

İstatistiksel yakınsaklık için bir başka karakterizasyon aşağıdaki teoremle verilmiştir.

**3.2.5. Teorem:**  $y = (y_m)$  dizisi verilsin.  $st - \lim y_m = \mathcal{L}$  olması için gerek ve yeter koşul  $\delta(n_m: m \in \mathbb{N}) = 1$  ve  $\lim_{m \rightarrow \infty} y_{n_m} = \mathcal{L}$  olacak şekilde en az bir  $(y_{n_m})$  yakınsak alt dizisi vardır (Fridy, 1985).

**3.2.6. Örnek:**  $y = (y_m)$  dizisinin genel terimi

$$y_m = \begin{cases} m + 2, & m = n^2, \\ 0, & m \neq n^2, \end{cases} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

şeklinde tanımlansın.  $K = \{m = n^2: m \in \mathbb{N}\}$  ve  $\mathbb{N} \setminus K = \{m \neq n^2: m \in \mathbb{N}\}$  olmak üzere  $\delta(K) = 0$  ve  $\delta(\mathbb{N} \setminus K) = 1$  olur. Buradan  $y_{m_k} = (0, 0, 0, \dots) \rightarrow 0, (m_k \in \mathbb{N} \setminus K \text{ ve } m \in \mathbb{N})$  olduğundan 3.2.5 Teorem'den  $st - \lim y_m = 0$  elde edilir.

O halde 3.2.5 Teorem'den  $st - \lim y_m = \mathcal{L}$  olması için gerek ve yeter koşul  $\forall \varepsilon > 0$  için  $\delta(K) = 1$  olacak şekilde öyle bir  $K \subseteq \mathbb{N}$  alt kümesi ve  $m_0 = m_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  sayısı vardır ki  $m \geq m_0$  olacak şekilde  $\forall m \in K$  için  $|y_m - \mathcal{L}| < \varepsilon$  sağlanır. Kısaca sıfır yoğunluklu indis kümesi dışında (ya da bir yoğunluklu indis kümesi üzerinde)  $y$  dizisi  $\mathcal{L}$  sayısına klasik anlamda yakınsak olması halinde  $y$  dizisi  $\mathcal{L}$  sayısına istatistiksel yakınsaktır.

**3.2.7. Teorem:** Yakınsak her dizi istatistiksel yakınsaktır. Fakat bunun tersi her zaman doğru değildir.

**İspat:**  $y = (y_m)$  dizisi bir  $\mathcal{L}$  sayısına yakınsak olsun. O halde  $\forall \varepsilon > 0$  için  $\exists m_0 \in \mathbb{N}$  var  $\exists \forall m \geq m_0$  olduğundan  $|y_m - \mathcal{L}| < \varepsilon$  olur.  $Y = \{m \leq n: |y_m - \mathcal{L}| \geq \varepsilon\}$  olmak üzere  $|Y_m| \leq m_0$  olur. Buradan  $\delta(Y) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{|Y_m|}{m} \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m_0}{m} = 0$  olduğundan  $st - \lim y_m = \mathcal{L}$  elde edilir.

Tersi için 3.2.3. Örnek'te verilen  $y = (y_m)$  dizisinin  $st - \lim y_m = 0$  olduğu ancak bu dizinin bilinen anlamda yakınsak olmadığı görülür.

**3.2.8. Teorem:** İstatistiksel yakınsak bir dizinin limiti tektir.

**İspat.**  $y = (y_m)$  dizisi  $\mathcal{L}_1$  ve  $\mathcal{L}_2$  sayılarına istatistiksel yakınsak olsun. O halde  $\forall \varepsilon > 0$  için en az bir  $X \subseteq \mathbb{N}$  ve  $(\varepsilon$ 'a bağlı) bir  $m_1$  sayısı bulabilir  $\exists \delta(X) = 0, m > m_1$  ve  $m \in \mathbb{N} \setminus X$  için  $|y_m - \mathcal{L}_1| < \frac{\varepsilon}{2}$  sağlanır.

Aynı şekilde  $\forall \varepsilon > 0$  için en az bir  $Y \subseteq \mathbb{N}$  ve  $(\varepsilon$ 'a bağlı) bir  $m_2$  sayısı bulabilir  $\exists \delta(Y) = 0, m > m_2$  ve  $m \in \mathbb{N} \setminus Y$  için  $|y_m - \mathcal{L}_2| < \frac{\varepsilon}{2}$  sağlanır.

$m_0 = \max\{m_1, m_2\}$  alınırsa  $\forall m \in \mathbb{N} \setminus (X \cap Y)$  ve  $\forall m > m_0$  için

$0 \leq |\mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_2| = |\mathcal{L}_1 - y_m + y_m - \mathcal{L}_2| \leq |y_m - \mathcal{L}_1| + |y_m - \mathcal{L}_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ . Bu ise  $\varepsilon$  keyfi olduğundan  $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2$  olmasıdır.

**3.2.9. Teorem:**  $st - \lim x_m = \mathcal{L}_1$ ,  $st - \lim y_m = \mathcal{L}_2$  ve  $\alpha \in \mathbb{R}$  olsun.

$$(i) \ st - \lim(x_m + y_m) = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$$

$$(ii) \ st - \lim(\alpha y_m) = \alpha \mathcal{L}_2$$

dir (Fast, 1951).

**İspat:**  $i)$   $st - \lim x = \mathcal{L}_1$  olsun. O halde  $X \subseteq \mathbb{N}$  olmak üzere  $\delta(X) = 0$  olduğunda,  $\varepsilon > 0$  verildiğinde  $\forall m > m_1$  ve  $\forall m \in \mathbb{N} \setminus X$  için  $|x_m - \mathcal{L}_1| < \frac{\varepsilon}{2}$  olacak şekilde  $m_1 \in \mathbb{N}$  vardır.  $st - \lim y = \mathcal{L}_2$  olsun. O halde  $Y \subseteq \mathbb{N}$  olmak üzere  $\delta(Y) = 0$  olduğunda,  $\varepsilon > 0$  verildiğinde  $\forall m > m_2$  ve  $\forall m \in \mathbb{N} \setminus Y$  için  $|y_m - \mathcal{L}_2| < \frac{\varepsilon}{2}$  olacak şekilde  $m_2 \in \mathbb{N}$  vardır. Sıfır yoğunluklu iki kümenin arakesiti de sıfır yoğunluklu olacağından  $\delta(X \cap Y) = 0$  dir.  $m_0 = \max\{m_1, m_2\}$  olmak üzere  $\forall m \in \mathbb{N} \setminus (X \cap Y)$  ve  $\forall m > m_0$  için  $|(x_m + y_m) - (\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2)| \leq |x_m - \mathcal{L}_1| + |y_m - \mathcal{L}_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$  olduğundan,  $\forall \varepsilon > 0$  için  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{m \leq n: |(x_m + y_m) - (\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2)| \geq \varepsilon\}| = 0$  bulunur. Yani,

$$st - \lim(x_m + y_m) = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$$

elde edilir.

$ii)$  Eğer  $\alpha = 0$  ise  $\alpha y = 0$  olup  $st - \lim \alpha y = \alpha \mathcal{L}_2$  dir.

Şimdi  $\alpha \neq 0$  olmak üzere  $st - \lim y = \mathcal{L}_2$  olsun. O halde  $Y \subseteq \mathbb{N}$  olmak üzere  $\delta(Y) = 0$  olduğunda,  $\varepsilon > 0$  verildiğinde  $\forall m > m_2$  ve  $\forall m \in \mathbb{N} \setminus Y$  için  $|y_m - \mathcal{L}_2| < \frac{\varepsilon}{|\alpha|}$  olacak şekilde  $m_2 \in \mathbb{N}$  vardır. Böylece  $\forall m \in \mathbb{N} \setminus Y$  ve  $\forall m > m_2$  için

$$|\alpha y_m - \alpha \mathcal{L}_2| \leq |\alpha| |y_m - \mathcal{L}_2| < |\alpha| \frac{\varepsilon}{|\alpha|} = \varepsilon$$

olup,  $\forall \varepsilon > 0$  için  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{m \leq n: |\alpha y_m - \alpha \mathcal{L}_2| \geq \varepsilon\}| = 0$  elde edilir. Yani  $st - \lim(\alpha y_m) = \alpha \mathcal{L}_2$  dir.

### 3.3. İstatistiksel Yakınsaklık Yardımı ile Korovkin Tipi Yaklaşım Teoremi

İlk kez 2002 yılında Gadjeiev ve Orhan tarafından istatistiksel yakınsaklık kavramı kullanılarak Korovkin tipi yaklaşım teoremi verilmiştir. Böylece farklı yakınsaklık türleri yardımı ile Korovkin tipi yaklaşım teoremi çalışılmaya başlanmıştır. Şimdi

önemli bir sonuç olan istatistiksel Korovkin tipi yaklaşım teoremi ve bu teoremin ispatını verilecektir.

**3.3.1. Teorem:**  $\mathcal{K}_n: C[d, e] \rightarrow C[d, e]$  pozitif lineer operatörlerin dizisi olsun.

$\forall h \in C[d, e]$  için

$$st - \lim \|\mathcal{K}_n(h) - h\|_{C[d, e]} = 0 \quad (3.3.1)$$

olması için gerek ve yeter koşul

$$st - \lim \|\mathcal{K}_n(h_i) - h_i\|_{C[d, e]} = 0, \quad i = 0, 1, 2 \quad (3.3.2)$$

dir (Gadjiev ve Orhan, 2002).

**İspat:** (3.3.1)  $\Rightarrow$  (3.3.2) olduğu açıktır. Çünkü,  $\forall h \in C[d, e]$  için (3.3.1) sağlanmaktadır.

O halde  $h_i \in C[d, e]$  ( $i = 0, 1, 2$ ) olduğundan istenilen elde edilir.

(3.3.2)  $\Rightarrow$  (3.3.1) olduğu gösterilsin.  $\forall h \in C[d, e]$  alınsın. O halde  $\forall \varepsilon > 0$  için  $\exists \delta > 0$  vardır  $\exists |v - u| < \delta$  koşulunu sağlayan  $\forall u, v \in [d, e]$  için  $|h(v) - h(u)| < \varepsilon$  olur.

$|v - u| > \delta$  olduğunda ise  $\frac{(v-u)^2}{\delta^2} \geq 1$  dir. Ayrıca  $h$  fonksiyonu  $[d, e]$  kapalı aralığında sınırlı olduğundan  $\forall u \in [d, e]$  için  $|h(u)| \leq \mathcal{M}$  olacak şekilde  $\mathcal{M} > 0$  sayısı bulunabilir. Dolayısıyla

$$|h(v) - h(u)| \leq |h(v)| + |h(u)| < \mathcal{M} + \mathcal{M} = 2\mathcal{M}$$

gerçeklenir. Buradan  $|h(v) - h(u)| \leq 2\mathcal{M} \frac{(v-u)^2}{\delta^2}$  yazılabilir. O halde  $\forall u, v \in [d, e]$  için  $|h(v) - h(u)| < \varepsilon + 2\mathcal{M} \frac{(v-u)^2}{\delta^2}$  elde edilir. Eşitliğin her iki tarafına  $\mathcal{K}_n$  pozitif lineer operatörü uygulanırsa,

$$\begin{aligned} & \mathcal{K}_n(|h(v) - h(u)|; u) \\ & \leq \mathcal{K}_n\left(\varepsilon + 2\mathcal{M} \frac{(v-u)^2}{\delta^2}; u\right) \\ & = \mathcal{K}_n(\varepsilon; u) + \frac{2\mathcal{M}}{\delta^2} \mathcal{K}_n((v-u)^2; u) \\ & = \varepsilon \mathcal{K}_n(1; u) + \frac{2\mathcal{M}}{\delta^2} \{\mathcal{K}_n(v^2; u) - 2u\mathcal{K}_n(v; u) + u^2\mathcal{K}_n(1; u)\} \\ & = \pm \varepsilon + \varepsilon \mathcal{K}_n(1; u) + \frac{2\mathcal{M}}{\delta^2} \{\mathcal{K}_n(v^2; u) - 2u\mathcal{K}_n(v; u) + u^2\mathcal{K}_n(1; u) \pm 2u^2\} \\ & = \varepsilon + \varepsilon(\mathcal{K}_n(1; u) - 1) + \frac{2\mathcal{M}}{\delta^2} \{(\mathcal{K}_n(v^2; u) - u^2) - 2u(\mathcal{K}_n(v; u) - u) \\ & \quad + u^2(\mathcal{K}_n(1; u) - 1)\} \\ & \leq \varepsilon + \varepsilon|\mathcal{K}_n(1; u) - 1| + \frac{2\mathcal{M}}{\delta^2} \{|\mathcal{K}_n(v^2; u) - u^2| + 2|u||\mathcal{K}_n(v; u) - u| \} \end{aligned}$$

$$+|u^2||\mathcal{K}_n(1; u) - 1| \} \quad (3.3.3)$$

eşitsizliği elde edilir. Ayrıca  $\mathcal{K}_n$  pozitif lineer operatör olduğundan

$$\begin{aligned} |\mathcal{K}_n(h; u) - h(u)| &= |\mathcal{K}_n(h; u) - h(u)\mathcal{K}_n(1; u) + h(u)\mathcal{K}_n(1; u) - h(u)| \\ &= |\mathcal{K}_n(h(v) - h(u); u) + h(u) \cdot (\mathcal{K}_n(1; u) - 1)| \\ &\leq \mathcal{K}_n(|h(v) - h(u)|; u) + |h(u)| |\mathcal{K}_n(1; u) - 1| \\ &\leq \mathcal{K}_n(|h(v) - h(u)|; u) + \mathcal{M} |\mathcal{K}_n(1; u) - 1| \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

yazılabilir. (3.3.3) ve (3.3.4) kullanılırsa,

$$\begin{aligned} |\mathcal{K}_n(h; u) - h(u)| &< \varepsilon + \varepsilon |\mathcal{K}_n(1; u) - 1| + \frac{2\mathcal{M}}{\delta^2} \{ |\mathcal{K}_n(v^2; u) - u^2| \\ &\quad + 2|u| |\mathcal{K}_n(v; u) - u| + |u^2| |\mathcal{K}_n(1; u) - 1| \} + \mathcal{M} |\mathcal{K}_n(1; u) - 1| \end{aligned}$$

elde edilir. Basit hesaplamalar yapılırsa,

$$\begin{aligned} |\mathcal{K}_n(h; u) - h(u)| &< \varepsilon + \frac{2\mathcal{M}}{\delta^2} |\mathcal{K}_n(v^2; u) - u^2| + \frac{4\mathcal{M}}{\delta^2} |u| |\mathcal{K}_n(v; u) - u| \\ &\quad + \left( \varepsilon + \mathcal{M} + \frac{2\mathcal{M}}{\delta^2} |u^2| \right) |\mathcal{K}_n(1; u) - 1| \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Son eşitsizliğin her iki tarafının  $u \in [d, e]$  için supremumu alınıp norma geçilirse,

$$\begin{aligned} &\|\mathcal{K}_n(h) - h\|_{C[d, e]} \\ &< \varepsilon + \mathcal{C} \{ \|\mathcal{K}_n(h_0) - h_0\|_{C[d, e]} + \|\mathcal{K}_n(h_1) - h_1\|_{C[d, e]} + \|\mathcal{K}_n(h_2) - h_2\|_{C[d, e]} \} \end{aligned}$$

bulunur. Burada  $\mathcal{C} = \sup_{u \in [d, e]} \left\{ \varepsilon + \mathcal{M} + \frac{2\mathcal{M}}{\delta^2} |u^2|, \frac{4\mathcal{M}}{\delta^2} |u|, \frac{2\mathcal{M}}{\delta^2} \right\}$  şeklindedir.  $\varepsilon' > \varepsilon > 0$  için

$$\begin{aligned} &\{m \leq n: \|\mathcal{K}_n(h) - h\|_{C[d, e]} \geq \varepsilon'\} \\ &\subseteq \{m \leq n: \|\mathcal{K}_n(h_0) - h_0\|_{C[d, e]} + \|\mathcal{K}_n(h_1) - h_1\|_{C[d, e]} \\ &\quad + \|\mathcal{K}_n(h_2) - h_2\|_{C[d, e]} \geq \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{c}\} \end{aligned}$$

olup,

$$\begin{aligned} &|\{m \leq n: \|\mathcal{K}_n(h) - h\|_{C[d, e]} \geq \varepsilon'\}| \\ &\leq |\{m \leq n: \|\mathcal{K}_n(h_0) - h_0\|_{C[d, e]} + \|\mathcal{K}_n(h_1) - h_1\|_{C[d, e]} \\ &\quad + \|\mathcal{K}_n(h_2) - h_2\|_{C[d, e]} \geq \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{c}\}| \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\mathcal{T} := \left\{ m \leq n: \|\mathcal{K}_n(h_0) - h_0\|_{C[d,e]} + \|\mathcal{K}_n(h_1) - h_1\|_{C[d,e]} + \|\mathcal{K}_n(h_2) - h_2\|_{C[d,e]} \geq \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{c} \right\}$$

$$\mathcal{T}_i := \left\{ m \leq n: \|\mathcal{K}_n(h_i) - h_i\|_{C[d,e]} \geq \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{3c} \right\}, \quad i = 0, 1, 2$$

şeklinde alınsın. Buradan  $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_0 \cup \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$  olduğu kolayca görülür. Böylece

$$\left| \left\{ m \leq n: \|\mathcal{K}_n(h) - h\|_{C[d,e]} \geq \varepsilon' \right\} \right| \leq \sum_{i=0}^2 \left| \left\{ m \leq n: \|\mathcal{K}_n(h_i) - h_i\|_{C[d,e]} \geq \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{3c} \right\} \right|$$

elde edilir. Eşitliğin her iki tarafı  $\frac{1}{n}$  ile çarpılıp  $n \rightarrow \infty$  için limit alınırsa hipotezden

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left| \left\{ m \leq n: \|\mathcal{K}_n(h) - h\|_{C[d,e]} \geq \varepsilon' \right\} \right| = 0 \text{ bulunur. Yani } \forall h \in C[d, e] \text{ için}$$

$$st - \lim \|\mathcal{K}_n(h) - h\|_{C[d,e]} = 0$$

elde edilir.

2.3.2. Örnek'te  $(\mathcal{B}_n)$  Bernstein polinomlarının 2.3.1. Teorem'de verdiğimiz klasik Korovkin tipi yaklaşım teoreminin koşullarını sağladığı gösterildi. Yakınsak her dizi istatistiksel yakınsak olduğundan  $(\mathcal{B}_n)$  Bernstein polinomlarının 3.3.1. Teorem'de verilen istatistiksel Korovkin tipi yaklaşım teoreminin koşullarını da sağladığı kolayca görülür.

Şimdi istatistiksel Korovkin tipi yaklaşım teoremin koşullarını sağlayan fakat klasik Korovkin tipi yaklaşım teoremin koşullarını sağlamayan bir pozitif lineer operatör örneği verilsin.

**3.3.2.Örnek:**  $(\mathcal{B}_n)$ , Bernstein polinomları ve  $\alpha = (\alpha_n)$  dizisi

$$\alpha_n := \begin{cases} 1 & , \quad n = k^2 \\ 0 & , \quad n \neq k^2 \end{cases}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

genel terimi ile verilsin. Buradaki  $\alpha = (\alpha_n)$  dizisinin ıraksak bir dizi ve aynı zamanda  $st - \lim \alpha_n = 0$  olduğu açıkça görülmektedir.

Şimdi  $\mathcal{P}_n: C[0,1] \rightarrow C[0,1]$  olmak üzere  $\mathcal{P}_n(h; u) = (1 + \alpha_n)\mathcal{B}_n(h; u)$  şeklinde tanımlı  $(\mathcal{P}_n)$  pozitif lineer operatörler dizisi göz önüne alınsın. 2.3.2. Örnek'ten

$$\mathcal{B}_n(1; u) = 1, \mathcal{B}_n(v; u) = u, \mathcal{B}_n(v^2; u) = u^2 + \frac{u-u^2}{n}$$

dir. Şimdi  $(\mathcal{P}_n)$  dizisinin 3.3.1. Teorem'inin koşullarını sağladığı gösterilsin.

$$i) \mathcal{P}_n(h_0) = (1 + \alpha_n)\mathcal{B}_n(h_0) = 1 + \alpha_n \text{ olup,}$$



$$\|\mathcal{P}_n(h_0) - h_0\|_{C[0,1]} = \sup_{u \in [0,1]} |1 + \alpha_n - 1| = \sup_{u \in [0,1]} |\alpha_n| = \alpha_n$$

elde edilir.  $st - \lim \alpha_n = 0$  olduğundan  $st - \lim \|\mathcal{P}_n(h_0) - h_0\|_{C[0,1]} = 0$  dir.

$$ii) \mathcal{P}_n(h_1) = (1 + \alpha_n)\mathcal{B}_n(h_1) = (1 + \alpha_n)u \text{ olup,}$$

$$\|\mathcal{P}_n(h_1) - h_1\|_{C[0,1]} = \sup_{u \in [0,1]} |(1 + \alpha_n)u - u| = \sup_{u \in [0,1]} |\alpha_n u| = \alpha_n$$

elde edilir.  $st - \lim \alpha_n = 0$  olduğundan  $st - \lim \|\mathcal{P}_n(h_1) - h_1\|_{C[0,1]} = 0$  dir.

$$iii) \mathcal{P}_n(h_2) = (1 + \alpha_n)\mathcal{B}_n(h_2) = (1 + \alpha_n)\left(u + \frac{u - u^2}{n}\right) \text{ olup,}$$

$$\begin{aligned} \|\mathcal{P}_n(h_2) - h_2\|_{C[0,1]} &= \sup_{u \in [0,1]} \left| (1 + \alpha_n)\left(u^2 + \frac{u - u^2}{n}\right) - u^2 \right| \\ &= \sup_{u \in [0,1]} \left| u^2 + \frac{u - u^2}{n} + \alpha_n u^2 + \alpha_n \frac{u - u^2}{n} - u^2 \right| \\ &\leq \sup_{u \in [0,1]} \left| \frac{u - u^2}{n} \right| + \sup_{u \in [0,1]} |u^2 \alpha_n| + \sup_{u \in [0,1]} \left| \alpha_n \frac{u - u^2}{n} \right| \\ &\leq \frac{1}{4n} + \alpha_n + \frac{1}{4n} \alpha_n. \end{aligned}$$

$st - \lim \alpha_n = 0$  ve  $st - \lim \frac{1}{4n} = 0$  olduğundan  $st - \lim \|\mathcal{P}_n(h_2; u) - h_2\|_{C[0,1]} = 0$

elde edilir. Yani  $st - \lim \|\mathcal{P}_n(h_i) - h_i\|_{C[0,1]} = 0$ , ( $i = 0, 1, 2$ ) olduğu görülür.

Dolayısıyla  $(\mathcal{P}_n)$  dizisi istatistiksel Korovkin tipi yaklaşım teoremi koşullarını sağlar. O

halde  $\forall h \in C[0,1]$  için  $st - \lim \|\mathcal{P}_n(h) - h\|_{C[0,1]} = 0$  sonucu elde edilir. Diğer

tarafından  $\alpha = (\alpha_n)$  dizisi klasik anlamda yakınsak olmadığından  $\mathcal{P}_n(h_0) - h_0 = \alpha_n$

olup  $n \rightarrow \infty$  için  $\|\mathcal{P}_n(h_0) - h_0\|_{C[0,1]} \not\rightarrow 0$  olduğundan  $(\mathcal{P}_n)$  dizisi klasik Korovkin tipi

yaklaşım teorem koşullarını sağlamaz. Bu sebeple  $n \rightarrow \infty$  için  $\|\mathcal{P}_n(h) - h\|_{C[0,1]} \not\rightarrow 0$

elde edilir.

### 3.4. İstatistiksel Yakınsaklık Yardımı İle Korovkin Tipi Yaklaşımın, Süreklilik Modülü Yardımıyla Yakınsaklık Oranının Hesaplanması

Bu bölümde istatistiksel Korovkin tipi yaklaşımın, süreklilik modülü yardımıyla yakınsaklık oranını hesaplanmıştır.

**3.4.1. Teorem:**  $\mathcal{K}_n: C[d, e] \rightarrow C[d, e]$  pozitif lineer operatör olsun. Eğer

$$i) st - \lim \|\mathcal{K}_n(h_0) - h_0\|_{C[d,e]} = 0 ,$$

ii)  $\delta_n := \sqrt{\|\mathcal{K}_n(\psi)\|_{C[d,e]}}$  ve  $\psi(v) = (v - u)^2$  olmak üzere  $st - \lim \omega(h; \delta_n) = 0$

koşulları sağlanıyorsa  $\forall h \in C[d, e]$  için  $st - \lim \|\mathcal{K}_n(h) - h\|_{C[d,e]} = 0$  dır.

**İspat:** Süreklilik modülünden dolayı  $u \in [d, e]$  ve  $h \in C[d, e]$  için  $\psi(t) = (v - u)^2$  olmak üzere

$$|h(u) - h(v)| \leq \left(1 + \frac{\psi(v)}{\delta^2}\right) \omega(h; \delta) \quad (3.4.1)$$

gerçeklenir. Ayrıca  $h$  fonksiyonu  $[d, e]$  kapalı aralığında sınırlı olduğundan  $\forall u \in [d, e]$  için  $|h(u)| \leq \mathcal{M}$  olacak şekilde  $\mathcal{M} > 0$  sayısı bulunabilir. Dolayısıyla

$$|h(v) - h(u)| \leq |h(v)| + |h(u)| < \mathcal{M} + \mathcal{M} = 2\mathcal{M}$$

gerçeklenir. Öte yandan,

$$\begin{aligned} |\mathcal{K}_n(h; u) - h(u)| &= |\mathcal{K}_n(h; u) - h(u)\mathcal{K}_n(1; u) + h(u)\mathcal{K}_n(1; u) - h(u)| \\ &\leq \mathcal{K}_n(|h(v) - h(u)|; u) + |h(u)| |\mathcal{K}_n(1; u) - 1| \end{aligned}$$

olur. Burada (3.4.1) eşitsizliği kullanılırsa;

$$\begin{aligned} &|\mathcal{K}_n(h; u) - h(u)| \\ &\leq \mathcal{K}_n\left(\left(1 + \frac{\psi(v)}{\delta^2}\right) \omega(h, \delta); u\right) + |h(u)| |\mathcal{K}_n(1; u) - 1| \\ &= \pm \omega(h; \delta) + \omega(h; \delta) \mathcal{K}_n(1; u) + \frac{\omega(h; \delta)}{\delta^2} \mathcal{K}_n(\psi(v); u) + |h(u)| |\mathcal{K}_n(1; u) - 1| \\ &\leq \omega(h; \delta) + \omega(h; \delta) |\mathcal{K}_n(1; u) - 1| + \frac{\omega(h; \delta)}{\delta^2} \mathcal{K}_n(\psi(v); x) + \mathcal{M} \cdot |\mathcal{K}_n(1; u) - 1| \end{aligned}$$

olur. Bu son eşitsizlikte  $\delta = \delta_n := \sqrt{\|\mathcal{K}_n(\psi)\|_{C[d,e]}}$  alınır ve eşitsizliğin her iki tarafının  $u \in [d, e]$  için supremumu alınıp norma geçilirse,

$$\begin{aligned} &\|\mathcal{K}_n(h) - h\|_{C[d,e]} \\ &\leq \omega(h; \delta) + \omega(h; \delta) \|\mathcal{K}_n(h_0) - h_0\|_{C[d,e]} + \frac{\omega(h; \delta)}{\delta^2} \delta^2 + \mathcal{M} \|\mathcal{K}_n(h_0) - h_0\|_{C[d,e]} \\ &= \omega(h; \delta) \|\mathcal{K}_n(h_0) - h_0\|_{C[d,e]} + 2\omega(h; \delta) + \mathcal{M} \|\mathcal{K}_n(h_0) - h_0\|_{C[d,e]} \end{aligned}$$

elde edilir.  $\varepsilon > 0$  için,

$$\begin{aligned} &\{m \leq n: \|\mathcal{K}_n(h) - h\|_{C[d,e]} \geq \varepsilon\} \\ &\subseteq \{m \leq n: \omega(h; \delta) \|\mathcal{K}_n(h_0) - h_0\|_{C[d,e]} + 2\omega(h; \delta) + \mathcal{M} \|\mathcal{K}_n(h_0) - h_0\|_{C[d,e]} \geq \varepsilon\} \end{aligned}$$

olup,

$$\begin{aligned}
& |\{m \leq n: \|\mathcal{K}_n(h) - h\|_{C[d,e]} \geq \varepsilon\}| \\
& \leq |\{m \leq n: \omega(h; \delta) \|\mathcal{K}_n(h_0) - h_0\|_{C[d,e]} + 2\omega(h; \delta) + \mathcal{M} \|\mathcal{K}_n(h_0) - h_0\|_{C[d,e]} \geq \varepsilon\}|
\end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned}
& |\{m \leq n: \|\mathcal{K}_n(h) - h\|_{C[d,e]} \geq \varepsilon\}| \\
& \leq \left| \left\{ m \leq n: \omega(h; \delta) \geq \sqrt{\frac{\varepsilon}{3}} \right\} \right| \left| \left\{ m \leq n: \|\mathcal{K}_n(h_0) - h_0\|_{C[d,e]} \geq \sqrt{\frac{\varepsilon}{3}} \right\} \right| \\
& \quad + \left| \left\{ m \leq n: \omega(h; \delta) \geq \frac{\varepsilon}{6} \right\} \right| + \left| \left\{ m \leq n: \|\mathcal{K}_n(h_0) - h_0\|_{C[d,e]} \geq \frac{\varepsilon}{3\mathcal{M}} \right\} \right|
\end{aligned}$$

bulunur. Eşitsizliğin her iki tarafı  $\frac{1}{n}$  ile çarpılıp  $n \rightarrow \infty$  için limit alınırsa

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{m \leq n: \|\mathcal{K}_n(h) - h\|_{C[d,e]} \geq \varepsilon\}| = 0$  bulunur. Dolayısıyla

$$st - \lim \|\mathcal{K}_n(h) - h\|_{C[d,e]} = 0$$

sonucu elde edilir.

## 4. $\mathcal{A}$ -İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

### 4.1. $\mathcal{A}$ -İstatistiksel Yakınsaklık İle İlgili Genel Tanım Ve Teoremler

Bu bölümde  $\mathcal{A}$ -yoğunluk ve  $\mathcal{A}$ -istatistiksel yakınsaklık kavramları tanıtılacaktır. Öncelikle  $\mathcal{A}$ -istatistiksel yakınsaklığın tanımı için gerekli olan bazı tanım ve notasyonları verilsin.

$U$  ve  $V$  tüm diziler uzayı olan  $W$  nin iki alt kümesi ve  $\mathcal{A} = (a_{n,m})$  reel yada kompleks terimli sonsuz matris olmak üzere  $u = (u_m) \in U$  ve  $n \geq 1$  için

$$(\mathcal{A}u)_n := \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m}u_m$$

serisi yakınsak ise  $\mathcal{A}u := ((\mathcal{A}u)_n)$  dönüşüm dizisi mevcuttur denir.

Eğer  $\forall u \in U$  için  $\mathcal{A}u$  dönüşüm dizisi mevcut ve  $\mathcal{A}u \in V$  ise  $\mathcal{A}$  matrisi  $U$  dan  $V$  içine bir matris dönüşümü tanımlar denir.

Eğer bir dizisi için  $\mathcal{A}u$  dönüşüm dizisi mevcut ve bir  $\mathcal{L}$  sayısına yakınsak ise  $u$  dizisi  $\mathcal{L}$  sayısına  $\mathcal{A}$ -toplanabilir denir ve  $\mathcal{A} - \lim u = \mathcal{L}$  ile gösterilir.

$U$  dizi uzayını  $V$  içine dönüştüren tüm matrisler sınıfı  $(U, V)$  ile gösterilir ve  $\mathcal{A}$ ,  $U$  dan  $V$  içine bir matris dönüşümü ise  $\mathcal{A} \in (U, V)$  yazılır. Toplamı ya da limiti koruyan matrislerin sınıfı  $(U, V; p)$  ile gösterilir. Özel olarak  $U = V = c$  seçilirse ve  $\mathcal{A} \in (c, c)$  ise  $\mathcal{A}$  matrisine konservatif matris denir.

**4.1.1. Tanım:**  $\mathcal{A} = (a_{n,m}), n, m = 1, 2, 3, \dots$  sonsuz matris olmak üzere bir  $u = (u_m)$  dizisi için  $\lim_m u = \mathcal{L}$  olduğunda  $\lim_n (\mathcal{A}u)_n = \mathcal{L}$  oluyorsa  $\mathcal{A}$  matrisine regüler matris denir (Hardy, 1949).

Bir matrisin regüler matris olması, Silverman -Toeplitz koşulları olarak bilinen teoremlerle ifade edilir.

**4.1.2. Teorem:** Bir  $\mathcal{A} = (a_{n,m})$  matrisinin regüler olması için gerekli ve yeter koşul

$$i) \sup_n \sum_{m=1}^{\infty} |a_{n,m}| < \infty$$

$$ii) \forall m \in \mathbb{N} \text{ için } \lim_n a_{n,m} = 0$$

$$iii) \lim_n \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} = 1$$

koşullarını sağlamasıdır (Hardy, 1949; Boss, 2000).

Aşağıdaki şekilde tanımlı olan  $C_1 = (c_{n,m})$  matrisi regülerdir ve toplanabilme teorisinde (birinci mertebeden) Cesáro matrisi olarak adlandırılmıştır.

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots \end{bmatrix}$$

Bir  $u = (u_m)$  dizisinin  $\mathcal{L}$  sayısına istatistiksel yakınsak olması demek  $\forall \varepsilon > 0$  için

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{m \leq n : |u_m - \mathcal{L}| \geq \varepsilon\}| = 0$  olması demektir. Ya da buna denk olarak

$K(\varepsilon) := \{m \leq n : |u_m - \mathcal{L}| \geq \varepsilon\}$  olmak üzere  $\forall \varepsilon > 0$  için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (C_1 \chi_K)_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \chi_{K(\varepsilon)}(m) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{m \in K} 1 = 0$$

olmasıdır. Burada  $\chi_K$ ,  $K$  kümesinin karakteristik fonksiyonunu göstermektedir.

1991 yılında, Freedman ve Sember istatistiksel yakınsaklık tanımında kullanılan Cesáro matrisi yerine negatif olmayan regüler bir  $\mathcal{A} = (a_{n,m})$  sonsuz matrisini kullanmışlardır. Böylece istatistiksel yakınsaklığı genişletmişler ve  $\mathcal{A}$ -istatistiksel yakınsaklığı elde etmişlerdir.

Şimdi  $\mathcal{A}$  -istatistiksel yakınsaklık ile ilgili bazı tanımlar verilsin.

**4.1.3. Tanım:**  $\mathcal{A} = (a_{n,m})$  negatif olmayan regüler bir matris,  $u = (u_m)$  ve  $K \subseteq \mathbb{N}$  olsun.

$$\delta_{\mathcal{A}}(K) := \lim_n (\mathcal{A}u)_n = \lim_n \sum_{m \in K} a_{n,m}$$

limiti mevcut ise  $\delta_{\mathcal{A}}(K)$  sayısına  $K$  kümesinin  $\mathcal{A}$ -yoğunluğu denir (Freedman ve Sember, 1981).

$\delta_{\mathcal{A}}(K)$  veya  $\delta_{\mathcal{A}}(\mathbb{N} \setminus K)$  yoğunluklarından herhangi biri mevcut ise

$\delta_{\mathcal{A}}(K) = 1 - \delta_{\mathcal{A}}(\mathbb{N} \setminus K)$  dır.

#### 4.1.4. Örnek: Genel terimi

$$a_{n,m} = \begin{cases} 1 & , \quad m = n^2 \\ 0 & , \quad m \neq n^2, n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan  $\mathcal{A} = (a_{n,m})$  matrisini göz önüne alınsın.  $\mathcal{A}$  matrisi negatif olmayan regüler bir matristir.

$$K = \{m = n^2 : n \in \mathbb{N}\} = \{1, 4, 9, \dots\} \Rightarrow \delta_{\mathcal{A}}(K) = \lim_n \sum_{m \in K} a_{n,m} = 1 \text{ olup } \delta_{\mathcal{A}}(K) = 1$$

$$K^c = \{m \neq n^2 : n \in \mathbb{N}\} = \{2, 3, 5, \dots\} \Rightarrow \delta_{\mathcal{A}}(K^c) = \lim_n \sum_{m \in K^c} a_{n,m} = 0$$

olup,  $\delta_{\mathcal{A}}(K^c) = 0$  elde edilir.

**4.1.5. Tanım:**  $\mathcal{A} = (a_{n,m})$  negatif olmayan regüler bir matris olsun.  $\forall \varepsilon > 0$  için  $K(\varepsilon) := \{m \in \mathbb{N} : |u_m - \mathcal{L}| \geq \varepsilon\}$  kümesinin  $\mathcal{A}$ -yoğunluğu sıfır ise  $u = (u_m)$  dizisi  $\mathcal{L}$  sayısına  $\mathcal{A}$ -istatistiksel yakınsaktır denir. Bu durum  $st_{\mathcal{A}} - \lim u = \mathcal{L}$  ile gösterilir. Yani,  $\forall \varepsilon > 0$  için  $K(\varepsilon) := \{m \in \mathbb{N} : |u_m - \mathcal{L}| \geq \varepsilon\}$  olmak üzere,

$$\delta_{\mathcal{A}}(K(\varepsilon)) := \lim_n \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} \chi_{K(\varepsilon)}(m) = \lim_n \sum_{m \in K} a_{n,m} = 0$$

gerçekleniyorsa  $st_{\mathcal{A}} - \lim u = \mathcal{L}$  dir denir (Freedman ve Sember, 1981).

Bu tanımda  $\mathcal{A} = I$  birim matrisi alınırsa klasik anlamdaki yakınsaklık,  $\mathcal{A} = C_1$  Cesáro matrisi alınırsa istatistiksel yakınsaklık elde edilir.

#### 4.1.6. Örnek: Genel terimi

$$a_{n,m} = \begin{cases} 1 & , \quad m = n^2 \\ 0 & , \quad m \neq n^2, n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan  $\mathcal{A} = (a_{n,m})$  matrisini göz önüne alınsın.  $\mathcal{A}$  matrisi negatif olmayan regüler bir matristir. Şimdi  $u = (u_m)$  dizisi,

$$u_m = \begin{cases} \frac{1}{2} & , \quad m = n^2 \\ 0 & , \quad m \neq n^2, n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Buradan

$$K = \{m = n^2 : n \in \mathbb{N}\} = \{1, 4, 9, \dots\} \Rightarrow \delta_{\mathcal{A}}(K) = \lim_n \sum_{m \in K} a_{n,m} = 1$$

$$K^c = \{m \neq n^2: n \in \mathbb{N}\} = \{2,3,5, \dots\} \Rightarrow \delta_{\mathcal{A}}(K^c) = \lim_n \sum_{m \in K} a_{n,m} = 0$$

olduğu kolaylıkla görülebilir.  $\forall \varepsilon > 0$  için  $K(\varepsilon) = \left\{m \in \mathbb{N}: \left|u_m - \frac{1}{2}\right| \geq \varepsilon\right\}$  olmak üzere,

$$\delta_{\mathcal{A}}(K(\varepsilon)) = \lim_n \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} \chi_{K(\varepsilon)}(m) = \lim_n \sum_{m \in K} a_{n,m} = 0$$

olmalıdır. Buradan

$$\delta_{\mathcal{A}}(K(\varepsilon)) = \lim_n \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} \chi_{K(\varepsilon)}(m) = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

yazılır. O halde  $n \rightarrow \infty$  için limit alınırsa  $\delta_{\mathcal{A}}(K(\varepsilon)) = 0$  olduğundan  $st_{\mathcal{A}} - \lim u = \frac{1}{2}$  dir.

$\mathcal{A}$ -istatistiksel yakınsaklık için bir başka karakterizasyon aşağıdaki teoremle verilsin.

**4.1.7. Teorem:**  $st_{\mathcal{A}} - \lim u = \mathcal{L} \Leftrightarrow \delta_{\mathcal{A}}\{n_m: m \in \mathbb{N}\} = 1$  ve  $\lim_n u_{n_m} = \mathcal{L}$  olacak şekilde en az bir  $(u_{n_m})$  yakınsak alt dizisi bulunmasıdır.

**4.1.8. Örnek:** Genel terimi

$$a_{n,m} = \begin{cases} 1 & , \quad m = n^2 + 1 \\ 0 & , \quad m \neq n^2 + 1 \end{cases}, n = 1, 2, \dots$$

şeklinde tanımlanan  $\mathcal{A} = (a_{n,m})$  matrisini göz önüne alınsın.  $\mathcal{A}$  matrisi negatif olmayan regüler bir matristir. Şimdi  $u = (u_m)$  dizisi,

$$u_m = \begin{cases} \frac{1}{5} & , \quad m = n^2 + 1 \\ 0 & , \quad m \neq n^2 + 1 \end{cases}, n = 1, 2, \dots$$

şeklinde tanımlansın.

$$K = \{m = n^2 + 1: n \in \mathbb{N}\} = \{2, 5, 10, \dots\} \Rightarrow \delta_{\mathcal{A}}(K) = \lim_n \sum_{m \in K} a_{n,m} = 1$$

$$K^c = \{m \neq n^2 + 1: n \in \mathbb{N}\} = \{1, 3, 4, \dots\} \Rightarrow \delta_{\mathcal{A}}(K^c) = \lim_n \sum_{m \in K} a_{n,m} = 0$$

bulunur. Buradan  $\delta_{\mathcal{A}}(K) = 1$  ve  $\lim_n u_{n_m} = \frac{1}{5}$  olduğundan 4.1.7. Teorem gereği

$st_{\mathcal{A}} - \lim u = \frac{1}{5}$  elde edilir.

## 4.2. $\mathcal{A}$ -İstatistiksel Yakınsaklık Yardımı İle Korovkin Tipi Yaklaşım Teoremi

Bu bölümde  $\mathcal{A}$ -istatistiksel yakınsaklık yardımı ile Korovkin tipi yaklaşım teoremi verilecektir.

**4.2.1. Teorem:**  $\mathcal{K}_m: C[d, e] \rightarrow C[d, e]$  pozitif lineer operatörlerin dizisi ve  $\mathcal{A} = (a_{n,m})$  negatif olmayan regüler bir matris olsun.  $\forall h \in C[d, e]$  için

$$st_{\mathcal{A}} - \lim \| \mathcal{K}_n(h) - h \|_{C[d,e]} = 0 \quad (4.2.1)$$

olması için gerek ve yeter koşul

$$st_{\mathcal{A}} - \lim \| \mathcal{K}_n(h_i) - h_i \|_{C[d,e]} = 0, \quad i = 0, 1, 2 \quad (4.2.2)$$

dir (Duman ve ark., 2003).

**İspat:** (4.2.1)  $\Rightarrow$  (4.2.2) olduğu açıktır. Çünkü,  $\forall h \in C[d, e]$  için (4.2.1) sağlanmaktadır. O halde  $h_i \in C[d, e]$  ( $i = 0, 1, 2$ ) olduğundan istenilen elde edilir.

(4.2.2)  $\Rightarrow$  (4.2.1) olduğu gösterilsin  $\forall h \in C[d, e]$  alınsın. O halde  $\forall \varepsilon > 0$  için  $\exists \delta > 0$  vardır  $\exists |v - u| < \delta$  koşulunu sağlayan  $\forall u, v \in [d, e]$  için  $|h(v) - h(u)| < \varepsilon$  olur.  $|v - u| > \delta$  olduğunda ise  $\frac{(v-u)^2}{\delta^2} \geq 1$  dir. Ayrıca  $h$  fonksiyonu  $[d, e]$  kapalı aralığında sınırlı olduğundan  $\forall u \in [d, e]$  için  $|h(u)| \leq \mathcal{M}$  olacak şekilde  $\mathcal{M} > 0$  sayısı bulunabilir. Dolayısıyla

$$|h(v) - h(u)| \leq |h(v)| + |h(u)| < \mathcal{M} + \mathcal{M} = 2\mathcal{M}$$

gerçeklenir. Buradan  $|h(v) - h(u)| \leq 2\mathcal{M} \frac{(v-u)^2}{\delta^2}$  yazılabilir. O halde  $\forall u, v \in [d, e]$  için  $|h(v) - h(u)| < \varepsilon + 2\mathcal{M} \frac{(v-u)^2}{\delta^2}$  elde edilir. Eşitliğin her iki tarafına  $\mathcal{K}_n$  pozitif lineer operatörü uygulanırsa,

$$\begin{aligned} & \mathcal{K}_n(|h(v) - h(u)|; u) \\ & \leq \mathcal{K}_n \left( \varepsilon + 2\mathcal{M} \frac{(v-u)^2}{\delta^2}; u \right) \\ & = \mathcal{K}_n(\varepsilon; u) + \frac{2\mathcal{M}}{\delta^2} \mathcal{K}_n((v-u)^2; u) \\ & = \varepsilon \mathcal{K}_n(1; u) + \frac{2\mathcal{M}}{\delta^2} \{ \mathcal{K}_n(v^2; u) - 2u \mathcal{K}_n(v; u) + u^2 \mathcal{K}_n(1; u) \} \\ & = \varepsilon + \varepsilon \mathcal{K}_n(1; u) + \frac{2\mathcal{M}}{\delta^2} \{ \mathcal{K}_n(v^2; u) - 2u \mathcal{K}_n(v; u) + u^2 \mathcal{K}_n(1; u) \} \\ & = \varepsilon + \varepsilon (\mathcal{K}_n(1; u) - 1) + \frac{2\mathcal{M}}{\delta^2} \{ (\mathcal{K}_n(v^2; u) - u^2) - 2u (\mathcal{K}_n(v; u) - u) \} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& +u^2(\mathcal{K}_n(1; u) - 1)\} \\
\leq & \varepsilon + \varepsilon|\mathcal{K}_n(1; u) - 1| + \frac{2\mathcal{M}}{\delta^2}\{|\mathcal{K}_n(v^2; u) - u^2| + 2|u||\mathcal{K}_n(v; u) - u| \\
& + |u^2||\mathcal{K}_n(1; u) - 1|\}
\end{aligned} \tag{4.2.3}$$

eşitsizliği elde edilir. Ayrıca  $\mathcal{K}_n$  pozitif lineer operatör olduğundan

$$\begin{aligned}
|\mathcal{K}_n(h; u) - h(u)| &= |\mathcal{K}_n(h; u) - h(u)\mathcal{K}_n(1; u) + h(u)\mathcal{K}_n(1; u) - h(u)| \\
&= |\mathcal{K}_n(h(v) - h(u); u) + h(u) \cdot (\mathcal{K}_n(1; u) - 1)| \\
&\leq \mathcal{K}_n(|h(v) - h(u)|; u) + |h(u)||\mathcal{K}_n(1; u) - 1| \\
&\leq \mathcal{K}_n(|h(v) - h(u)|; u) + \mathcal{M}|\mathcal{K}_n(1; u) - 1|
\end{aligned} \tag{4.2.4}$$

yazılabilir. (4.2.3) ve (4.2.4) kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
|\mathcal{K}_n(h; u) - h(u)| &< \varepsilon + \varepsilon|\mathcal{K}_n(1; u) - 1| + \frac{2\mathcal{M}}{\delta^2}\{|\mathcal{K}_n(v^2; u) - u^2| \\
&+ 2|u||\mathcal{K}_n(v; u) - u| + |u^2||\mathcal{K}_n(1; u) - 1|\} + \mathcal{M}|\mathcal{K}_n(1; u) - 1|
\end{aligned}$$

elde edilir. Basit hesaplamalar yapılırsa,

$$\begin{aligned}
|\mathcal{K}_n(h; u) - h(u)| &< \varepsilon + \frac{2\mathcal{M}}{\delta^2}|\mathcal{K}_n(v^2; u) - u^2| + \frac{4\mathcal{M}}{\delta^2}|u||\mathcal{K}_n(v; u) - u| \\
&+ \left(\varepsilon + \mathcal{M} + \frac{2\mathcal{M}}{\delta^2}|u^2|\right)|\mathcal{K}_n(1; u) - 1|
\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Son eşitsizliğin her iki tarafının  $u \in [d, e]$  için supremumu alınıp norma geçilirse,

$$\begin{aligned}
&\|\mathcal{K}_n(h) - h\|_{C[d, e]} \\
&< \varepsilon + \mathcal{C}\{\|\mathcal{K}_n(h_0) - h_0\|_{C[d, e]} + \|\mathcal{K}_n(h_1) - h_1\|_{C[d, e]} + \|\mathcal{K}_n(h_2) - h_2\|_{C[d, e]}\}
\end{aligned}$$

bulunur. Burada  $\mathcal{C} = \sup_{u \in [d, e]} \left\{ \varepsilon + \mathcal{M} + \frac{2\mathcal{M}}{\delta^2}|u^2|, \frac{4\mathcal{M}}{\delta^2}|u|, \frac{2\mathcal{M}}{\delta^2} \right\}$  şeklindedir.  $\varepsilon' > \varepsilon > 0$

için

$$\begin{aligned}
&\{m \leq n: \|\mathcal{K}_n(h) - h\|_{C[d, e]} \geq \varepsilon'\} \\
&\subseteq \{m \leq n: \|\mathcal{K}_n(h_0) - h_0\|_{C[d, e]} + \|\mathcal{K}_n(h_1) - h_1\|_{C[d, e]} \\
&\quad + \|\mathcal{K}_n(h_2) - h_2\|_{C[d, e]} \geq \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{\mathcal{C}}\}
\end{aligned}$$

olup,

$$\begin{aligned}
&|\{m \leq n: \|\mathcal{K}_n(h) - h\|_{C[d, e]} \geq \varepsilon'\}| \\
&\leq |\{m \leq n: \|\mathcal{K}_n(h_0) - h_0\|_{C[d, e]} + \|\mathcal{K}_n(h_1) - h_1\|_{C[d, e]}
\end{aligned}$$

$$+ \|\mathcal{K}_n(h_2) - h_2\|_{C[d,e]} \geq \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{c} \Big\}$$

elde edilir. Böylece

$$\mathcal{T} := \left\{ m \leq n: \|\mathcal{K}_n(h_0) - h_0\|_{C[d,e]} + \|\mathcal{K}_n(h_1) - h_1\|_{C[d,e]} + \|\mathcal{K}_n(h_2) - h_2\|_{C[d,e]} \geq \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{c} \right\}$$

$$\mathcal{T}_i := \left\{ m \leq n: \|\mathcal{K}_n(h_i) - h_i\|_{C[d,e]} \geq \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{3c} \right\}, \quad i = 0, 1, 2$$

şeklinde alınsın. Buradan  $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_0 \cup \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$  olduğu kolayca görülür. Böylece

$$\sum_{n \in \mathcal{T}} a_{n,m} \leq \sum_{i=0}^3 \sum_{n \in \mathcal{T}_i} a_{n,m}$$

olmak  $n \rightarrow \infty$  için limit alınırsa hipotezden  $st_{\mathcal{A}} - \lim \|\mathcal{K}_m(h) - h\|_{C[d,e]} = 0$  elde edilir.

#### 4.3. İstatistiksel $\mathcal{A}$ -Toplanabilme

Edely ve Mursaleen 2009 yılında  $\mathcal{A}$ -istatistiksel yakınsaklıktan daha kuvvetli olan istatistiksel  $\mathcal{A}$ -toplanabilme kavramını tanımlamışlar ve sonrasında  $\mathcal{A}$ -istatistiksel yakınsaklık ile ilişkisini incelemişlerdir.

**4.3.1. Tanım:**  $\mathcal{A} = (a_{n,m})$  negatif olmayan regüler bir matris,  $u = (u_m)$  bir dizi olsun.

Eğer  $\forall \varepsilon > 0$  için  $\delta(\{n: |(\mathcal{A}u)_n - \mathcal{L}| \geq \varepsilon\}) = 0$ , yani,

$$\lim_p \frac{1}{p} |\{m \leq p: |(Au)_n - \mathcal{L}| \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise  $u = (u_m)$  dizisi  $\mathcal{L}$  sayısına istatistiksel  $\mathcal{A}$ -toplanabilirdir denir (Edely ve Mursaleen, 2009).

$u = (u_m)$  dizisinin  $\mathcal{L}$  sayısına istatistiksel  $\mathcal{A}$ -toplanabilir olması için gerek ve yeter koşul  $(\mathcal{A}u)_n$  dönüşüm dizisinin  $\mathcal{L}$  sayısına istatistiksel yakınsak olmasıdır. Bu durum  $(\mathcal{A})_{st} - \lim u = \mathcal{L}$  ile gösterilir.

**4.3.2. Teorem:** Eğer bir dizi, sınırlı ve  $\mathcal{L}$  sayısına  $\mathcal{A}$ -istatistiksel yakınsaksa  $\mathcal{A}$ -toplamı  $\mathcal{L}$ 'dir. Bu sebeple  $\mathcal{L}$  sayısına istatistiksel  $\mathcal{A}$ -toplanabilirdir. Fakat tersi doğru değildir. (Edely ve Mursaleen, 2009).

**İspat:**  $\mathcal{A} = (a_{n,m})$  negatif olmayan regüler bir matris,  $u = (u_m)$  sınırlı ve  $\mathcal{L}$ ' ye  $\mathcal{A}$ -istatistiksel yakınsak,  $K(\varepsilon) = \{m \leq n: |u_m - \mathcal{L}| \geq \varepsilon\}$  olsun.

$$\begin{aligned}
& |(\mathcal{A}u)_n - \mathcal{L}| \\
&= \left| \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} u_m + \sum_{m=1}^{\infty} \mathcal{L} a_{n,m} - \sum_{m=1}^{\infty} \mathcal{L} a_{n,m} - \mathcal{L} \right| \\
&\leq \left| \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} (u_m - \mathcal{L}) \right| + |\mathcal{L}| \left| \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} - 1 \right| \\
&= \left| \sum_{m \notin K(\varepsilon)} a_{n,m} (u_m - \mathcal{L}) \right| + \left| \sum_{m \in K(\varepsilon)} a_{n,m} (u_m - \mathcal{L}) \right| + |\mathcal{L}| \left| \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} - 1 \right| \\
&\leq \varepsilon \sum_{m \notin K(\varepsilon)} a_{n,m} + \sup_{m \in K(\varepsilon)} |u_m - \mathcal{L}| \sum_{m \in K(\varepsilon)} a_{n,m} + |\mathcal{L}| \left| \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} - 1 \right|
\end{aligned}$$

$n \rightarrow \infty$  için limit alınırsa,  $\mathcal{A}$  matrisinin regülerliği ve  $\mathcal{A}$ -istatistiksel yakınsak tanımı kullanılarak  $\varepsilon > 0$  keyfi olduğundan  $\lim |(\mathcal{A}u)_n - \mathcal{L}| = 0$  elde edilir.

Dolayısıyla  $st - \lim |(\mathcal{A}u)_n - \mathcal{L}| = 0$  olur. Yani,

$$st - \lim \frac{1}{p} |\{n \leq p: |(\mathcal{A}u)_n - \mathcal{L}| \geq \varepsilon\}| = 0$$

elde edilir. Bu ise  $(\mathcal{A})_{st} - \lim u = \mathcal{L}$  olduğunu gösterir. Karşıtının doğru olmadığını gösteren bir örnek verilsin.

**4.3.3. Örnek:**  $\mathcal{A} = C_1$  Cesáro matrisi alınsın.  $u = (u_m)$  dizisi,

$$u_m = \begin{cases} 1 & , \quad m \text{ tek} \\ 0 & , \quad m \text{ çift} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın.  $(\mathcal{A}u)_n$  dönüşüm dizisi,  $\frac{1}{2}$  sayısına istatistiksel yakınsaktır.

Dolayısıyla  $u = (u_m)$  dizisi  $\frac{1}{2}$  sayısına istatistiksel  $\mathcal{A}$  - toplanabilirdir. Bu durumda  $u = (u_m)$  dizisi  $\frac{1}{2}$  sayısına istatistiksel  $\mathcal{A}$  - toplanabilirdir, fakat  $\mathcal{A}$  - istatistiksel yakınsak değildir.

#### 4.4 İstatistiksel $\mathcal{A}$ -Toplanabilme Yardımıyla Korovkin Tipi Yaklaşım Teoremi

Bu bölümde istatistiksel  $\mathcal{A}$ -toplanabilme yardımıyla Korovkin tipi yaklaşım teoremi verilsin.

**4.4.1. Teorem:**  $\mathcal{K}_m: C[d, e] \rightarrow C[d, e]$  pozitif lineer operatörlerin bir dizisi ve  $\mathcal{A} = (a_{n,m})$  negatif olmayan regüler bir matris olsun.  $\forall h \in C[d, e]$  için

$$st - \lim \left\| \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} \mathcal{K}_m(h) - h \right\|_{C[d,e]} = 0 \quad (4.4.1)$$

olması için gerek ve yeter koşul

$$st - \lim \left\| \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} \mathcal{K}_m(h_i) - h_i \right\|_{C[d,e]} = 0, \quad i = 0, 1, 2 \quad (4.4.2)$$

dır (Demirci ve Karakuş, 2011).

**İspat:** (4.4.1)  $\Rightarrow$  (4.4.2) olduğu açıktır. Çünkü,  $\forall h \in C[d, e]$  için (4.4.1) sağlanmaktadır.

O halde  $h_i \in C[d, e]$  ( $i = 0, 1, 2$ ) olduğundan istenilen elde edilir.

(4.4.2)  $\Rightarrow$  (4.4.1) olduğu gösterilsin..  $\forall h \in C[d, e]$  alınsın. O halde  $\forall \varepsilon > 0$  için  $\exists \delta > 0$  vardır  $\exists |v - u| < \delta$  koşulunu sağlayan  $\forall u, v \in [d, e]$  için  $|h(v) - h(u)| < \varepsilon$  olur.

$|v - u| > \delta$  olduğunda ise  $\frac{(v-u)^2}{\delta^2} \geq 1$  dir. Ayrıca  $h$  fonksiyonu  $[d, e]$  kapalı aralığında sınırlı olduğundan  $\forall u \in [d, e]$  için  $|h(u)| \leq \mathcal{M}$  olacak şekilde  $\mathcal{M} > 0$  sayısı bulunabilir. Dolayısıyla

$$|h(v) - h(u)| \leq |h(v)| + |h(u)| < \mathcal{M} + \mathcal{M} = 2\mathcal{M}$$

gerçeklenir. Buradan  $|h(v) - h(u)| \leq 2\mathcal{M} \frac{(v-u)^2}{\delta^2}$  yazılabilir. O halde  $\forall u, v \in [d, e]$

için  $|h(v) - h(u)| < \varepsilon + 2\mathcal{M} \frac{(v-u)^2}{\delta^2}$  elde edilir. Eşitliğin her iki tarafına  $\mathcal{K}_m$  pozitif lineer operatörü kullanılarak  $\forall n \in \mathbb{N}$  için,

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} \mathcal{K}_m(h; u) - h(u) \right| \\ &= \left| \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} \mathcal{K}_m(h(v); u) - h(u) \pm \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} \mathcal{K}_m(h(u); v) \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} \mathcal{K}_m(h(v) - h(u); u) + h(u) \left( \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} \mathcal{K}_m(1; u) - 1 \right) \right| \\
&\leq \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} \mathcal{K}_m(|h(v) - h(u)|; u) + |h(u)| \left| \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} \mathcal{K}_m(1; u) - 1 \right| \\
&< \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} \mathcal{K}_m \left( \varepsilon + 2\mathcal{M} \frac{(v-u)^2}{\delta^2}; x \right) + |h(u)| \left| \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} \mathcal{K}_m(1; u) - 1 \right| \\
&= \varepsilon \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} \mathcal{K}_m(1; u) + \frac{2\mathcal{M}}{\delta^2} \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} \mathcal{K}_m(h(v-u)^2; u) \\
&\quad + |h(u)| \left| \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} \mathcal{K}_m(1; u) - 1 \right| \\
&= \varepsilon + \varepsilon \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} \mathcal{K}_m(1; u) + \frac{2\mathcal{M}}{\delta^2} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} \mathcal{K}_m(v^2; u) - 2u \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} \mathcal{K}_m(v; u) \right. \\
&\quad \left. + u^2 \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} \mathcal{K}_m(1; u) + 2u^2 \right\} + |h(u)| \left| \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} \mathcal{K}_m(1; u) - 1 \right| \\
&= \varepsilon + \varepsilon \left( \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} \mathcal{K}_m(1; u) - 1 \right) + \frac{2\mathcal{M}}{\delta^2} \left\{ \left( \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} \mathcal{K}_m(v^2; u) - u^2 \right) \right. \\
&\quad \left. - 2u \left( \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} \mathcal{K}_m(v; u) - u \right) + u^2 \left( \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} \mathcal{K}_m(1; u) - 1 \right) \right\} \\
&\quad + \mathcal{M} \left| \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} \mathcal{K}_m(1; u) - 1 \right|
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Son eşitsizliğin her iki tarafının  $u \in [d, e]$  için supremumu alınıp norma geçilirse,

$$\begin{aligned}
&\left\| \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} \mathcal{K}_m(h) - h \right\|_{C[d,e]} \\
&< \varepsilon + \mathcal{C} \left\{ \left\| \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} \mathcal{K}_m(h_0) - h_0 \right\|_{C[d,e]} + \left\| \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} \mathcal{K}_m(h_1) - h_1 \right\|_{C[d,e]} \right. \\
&\quad \left. + \left\| \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} \mathcal{K}_m(h_2) - h_2 \right\|_{C[d,e]} \right\}
\end{aligned}$$

bulunur. Burada  $\mathcal{C} = \sup_{u \in [d,e]} \left\{ \varepsilon + \mathcal{M} + \frac{2\mathcal{M}}{\delta^2}, \frac{4\mathcal{M}}{\delta^2} |u|, \frac{2\mathcal{M}}{\delta^2} |u^2| \right\}$  şeklindedir.  $\varepsilon' > \varepsilon > 0$

için

$$\begin{aligned} & \left\{ n \leq p: \left\| \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} \mathcal{K}_m(h) - h \right\|_{C[d,e]} \geq \varepsilon' \right\} \\ & \subseteq \left\{ n \leq p: \left\| \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} \mathcal{K}_m(h_0) - h_0 \right\|_{C[d,e]} + \left\| \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} \mathcal{K}_m(h_1) - h_1 \right\|_{C[d,e]} \right. \\ & \quad \left. + \left\| \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} \mathcal{K}_m(h_2) - h_2 \right\|_{C[d,e]} \geq \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{\mathcal{C}} \right\} \end{aligned}$$

olup,

$$\begin{aligned} & \left| \left\{ n \leq p: \left\| \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} \mathcal{K}_m(h) - h \right\|_{C[d,e]} \geq \varepsilon' \right\} \right| \\ & \leq \left| \left\{ n \leq p: \left\| \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} \mathcal{K}_m(h_0) - h_0 \right\|_{C[d,e]} + \left\| \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} \mathcal{K}_m(h_1) - h_1 \right\|_{C[d,e]} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \left\| \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} \mathcal{K}_m(h_2) - h_2 \right\|_{C[d,e]} \geq \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{\mathcal{C}} \right\} \right| \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &:= \left\{ n \leq p: \left\| \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} \mathcal{K}_m(h) - h \right\|_{C[d,e]} \geq \varepsilon' \right\} \\ \mathcal{T}_i &:= \left\{ n \leq p: \left\| \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} \mathcal{K}_m(h_i) - h_i \right\|_{C[d,e]} \geq \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{3\mathcal{C}} \right\} \quad (i = 0, 1, 2) \end{aligned}$$

şeklinde alınsın. Buradan  $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_0 \cup \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$  olduğu kolayca görülür. Böylece

$$\begin{aligned} & \left| \left\{ n \leq p: \left\| \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} \mathcal{K}_m(h) - h \right\|_{C[d,e]} \geq \varepsilon' \right\} \right| \\ & \leq \sum_{i=0}^2 \left| \left\{ n \leq p: \left\| \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} \mathcal{K}_m(h_i) - h_i \right\|_{C[d,e]} \geq \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{3\mathcal{C}} \right\} \right| \end{aligned}$$

elde edilir. Eşitliğin her iki tarafı  $\frac{1}{p}$  ile çarpılıp  $p \rightarrow \infty$  için limit alınırsa  $\forall \varepsilon' > 0$  için

$$\lim_p \frac{1}{p} \left\| \left\{ n \leq p : \left\| \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} \mathcal{K}_m(h) - h \right\|_{C[d,e]} \geq \varepsilon' \right\} \right\| = 0$$

bulunur. Yani  $\forall h \in C[d, e]$  için

$$st - \lim \left\| \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} \mathcal{K}_m(h) - h \right\|_{C[d,e]} = 0$$

elde edilir.

Şimdi istatistiksel  $\mathcal{A}$ -toplanabilme yardımıyla Korovkin tipi yaklaşım teoremin koşullarını sağlayan fakat klasik Korovkin tipi yaklaşım teoremin ve istatistiksel Korovkin tipi teoremin koşullarını sağlamayan bir pozitif lineer operatör örneği verilsin.

**4.4.2. Örnek:**  $\mathcal{A} = (a_{n,m})$  matrisi,

$$a_{n,m} = \begin{cases} \frac{1}{n} & , \quad 1 \leq m \leq n, \\ 0 & , \quad \text{dd.} \end{cases} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Cesáro matrisi ve  $\alpha = (\alpha_m)$  dizisi

$$\alpha_m = \begin{cases} 1 & , \quad m \text{ tek} \\ -1 & , \quad m \text{ çift} \end{cases}, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

şeklinde verilsin. Buradaki  $\alpha = (\alpha_m)$  dizisi ıraksak bir dizidir. Aynı zamanda

$K = \{m = 2n - 1 : n \in \mathbb{N}\}$  olmak üzere  $\delta(K) = \frac{1}{2}$  olduğundan  $\alpha = (\alpha_m)$  dizisi istatistiksel yakınsak değildir.  $\mathcal{A} = (a_{n,m})$  negatif olmayan regüler bir matrisi ve  $\alpha = (\alpha_m)$  dizisi için

$$(\mathcal{A}\alpha)_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & , \quad n \text{ tek} \\ 0 & , \quad n \text{ çift} \end{cases}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

yazılabilir. Burada  $st - \lim (\mathcal{A}\alpha)_n = 0$  olduğu açıkça görülmektedir. Şimdi  $u \in [0, 1]$ ,  $h \in C[0, 1]$  ve  $m \in \mathbb{N}$  olmak üzere

$$\mathcal{U}_m(h; u) = (m+1) \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} u^n (1-u)^{m-n} \int_{\frac{n}{m+1}}^{\frac{n+1}{m+1}} h(v) dv$$

şeklinde tanımlı Berstain-Kantrovich operatörünü göz önüne alınsın. Bu operatörü kullanarak  $\alpha = (\alpha_m)$  dizisi yardımıyla

$$\mathcal{T}_m(h; u) = (1 + \alpha_m)\mathcal{U}_m(h; u), \quad u \in [0,1], h \in C[0,1]$$

şeklinde bir pozitif lineer operatör tanımlansın. Şimdi  $(\mathcal{T}_m)$  pozitif lineer operatör dizisinin 4.4.1. Teorem'inin koşullarını sağladığı gösterilsin.

i)  $\mathcal{T}_m(h_0; u) = (1 + \alpha_m)\mathcal{U}_m(h_0; u) = (1 + \alpha_m)h_0(u)$  olup,

$$\left\| \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} \mathcal{T}_m(h_0) - h_0 \right\|_{C[0,1]} = \sup_{u \in [0,1]} |(A\alpha)_n| = (A\alpha)_n$$

elde edilir.  $st - \lim (A\alpha)_n = 0$  olduğundan

$$st - \lim \left\| \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} \mathcal{T}_m(h_0) - h_0 \right\|_{C[0,1]} = 0$$

dır. Benzer hesaplamalar yapılırsa,

ii)  $\mathcal{T}_m(h_1; u) = (1 + \alpha_m)\mathcal{U}_m(h_1; u) = (1 + \alpha_m) \left( h_1(u) \frac{m}{m+1} + \frac{1}{2(m+1)} \right)$  olup,

$$st - \lim \left\| \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} \mathcal{T}_m(h_1) - h_1 \right\|_{C[0,1]} = 0,$$

iii)  $\mathcal{T}_m(h_2; u) = (1 + \alpha_m)\mathcal{U}_m(h_2; u)$

$$= (1 + \alpha_m) \left( h_2(u) \frac{m(m-1)}{(m+1)^2} + h_1(u) \frac{2m}{(m+1)^2} + \frac{1}{3(m+1)^2} \right)$$

olup,

$$st - \lim \left\| \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} \mathcal{T}_m(h_2) - h_2 \right\|_{C[0,1]} = 0$$

olduğu kolaylıkla elde edilir. Yani,

$$st - \lim \left\| \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} \mathcal{T}_m(h_i) - h_i \right\|_{C[0,1]} = 0, \quad i = 0, 1, 2$$

olduğu görülür. Dolayısıyla  $(\mathcal{T}_m)$  dizisi 4.4.1. Teorem'inin koşullarını sağlar. O halde  $\forall h \in C[0,1]$  için



$$st - \lim \left\| \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} T_m(h) - h \right\|_{C[0,1]} = 0$$

sonucu elde edilir. Diğer taraftan  $T_m(h_0) - h_0 = (1 + \alpha_m)h_0 - h_0 = \alpha_m$  olup  $(\alpha_m)$  dizisi klasik ve istatistiksel anlamda yakınsak olmadığından  $(T_m)$  dizisi klasik Korovkin tipi yaklaşım teorem koşullarını ve istatistiksel Korovkin tipi yaklaşım teorem koşullarını sağlamaz.

#### 4.5. İstatistiksel $\mathcal{A}$ -Toplanabilme Yardımıyla Korovkin Tipi Yaklaşımın, Süreklilik Modülü Yardımıyla Yakınsaklık Oranının Hesaplanması

Bu bölümde  $\mathcal{A}$ -istatistiksel Korovkin tipi yaklaşımın, süreklilik modülü yardımıyla yakınsaklık oranı hesaplansın.

**4.5.1. Teorem:**  $\mathcal{K}_m: C[d, e] \rightarrow C[d, e]$  pozitif lineer operatörlerin bir dizisi ve  $\mathcal{A} = (a_{n,m})$  negatif olmayan regüler bir matris olsun. Eğer

$$i) st - \lim \left\| \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} \mathcal{K}_m(h_0) - h_0 \right\|_{C[d,e]} = 0$$

$$ii) \delta_n := \sqrt{\left\| \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} \mathcal{K}_m(\psi) \right\|_{C[d,e]}} \quad \text{ve } \psi(v) = (v - u)^2 \text{ olmak üzere}$$

$st - \lim \omega(h; \delta_n) = 0$  koşulları sağlanıyorsa  $\forall h \in C[d, e]$  için

$$st - \lim \left\| \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} \mathcal{K}_m(h) - h \right\|_{C[d,e]} = 0$$

dır.

**İspat:** Tanımda verilen süreklilik modülünden,  $u \in [d, e]$  ve  $h \in C[d, e]$  için  $\psi(v) = (v - u)^2$  olmak üzere

$$|h(v) - h(u)| \leq \left(1 + \frac{\psi(v)}{\delta^2}\right) \omega(h; \delta) \quad (4.5.1)$$

gerçeklenir. Ayrıca  $h$  fonksiyonu  $[d, e]$  kapalı aralığında sınırlı olduğundan  $\forall u \in [d, e]$  için  $|h(u)| \leq \mathcal{M}$  olacak şekilde  $\mathcal{M} > 0$  sayısı bulunabilir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}
& \left| \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} \mathcal{K}_m(h; u) - h(u) \right| \\
&= \left| \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} \mathcal{K}_m(h(v); u) \pm \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} \mathcal{K}_m(h(u); u) - h(u) \right| \\
&= \left| \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} \mathcal{K}_m(h(v) - h(u); u) + h(u) \left( \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} \mathcal{K}_m(1; u) - 1 \right) \right| \\
&\leq \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} \mathcal{K}_m(|h(v) - h(u)|; u) + |h(u)| \left| \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} \mathcal{K}_m(1; u) - 1 \right| \\
&\leq \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} \mathcal{K}_m \left( \left( 1 + \frac{\psi(v)}{\delta^2} \right) \omega(h, \delta); u \right) + |h(u)| \left| \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} \mathcal{K}_m(1; u) - 1 \right| \\
&= \pm \omega(h; \delta) + \omega(h; \delta) \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} \mathcal{K}_m(1; u) + \frac{\omega(h; \delta)}{\delta^2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} \mathcal{K}_m(\psi(v); u) \\
&\quad + |h(u)| \left| \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} \mathcal{K}_m(1; u) - 1 \right| \\
&\leq \omega(h; \delta) + \omega(h; \delta) \left| \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} \mathcal{K}_m(1; u) - 1 \right| + \mathcal{M} \left| \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} \mathcal{K}_m(1; u) - 1 \right| \\
&\quad + \frac{\omega(h; \delta)}{\delta^2} \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} \mathcal{K}_m(\psi(v); u)
\end{aligned}$$

olur. Bu son eşitsizlikte

$$\delta = \delta_n := \sqrt{\left\| \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} \mathcal{K}_m(\psi) \right\|_{C[d,e]}}$$

alınır ve eşitsizliğin her iki tarafının  $u \in [d, e]$  için supremumu alınıp norma geçilirse,

$$\begin{aligned}
& \left\| \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} \mathcal{K}_m(h) - h \right\|_{C[d,e]} \\
&\leq \omega(h; \delta) + \omega(h; \delta) \left\| \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} \mathcal{K}_m(h_0) - h_0 \right\|_{C[d,e]} \\
&\quad + \mathcal{M} \left\| \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} \mathcal{K}_m(h_0) - h_0 \right\|_{C[d,e]} + \frac{\omega(h; \delta)}{\delta^2} \delta^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \omega(h; \delta) \left\| \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} \mathcal{K}_m(h_0) - h_0 \right\|_{C[d,e]} + 2\omega(h; \delta) \\
&\quad + \mathcal{M} \left\| \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} \mathcal{K}_m(h_0) - h_0 \right\|_{C[d,e]}
\end{aligned}$$

elde edilir.  $\varepsilon > 0$  için,

$$\begin{aligned}
&\left\{ n \leq p: \left\| \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} \mathcal{K}_m(h) - h \right\|_{C[d,e]} \geq \varepsilon \right\} \\
&\subseteq \left\{ n \leq p: \omega(h; \delta) \left\| \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} \mathcal{K}_m(h_0) - h_0 \right\|_{C[d,e]} \right. \\
&\quad \left. + 2\omega(h; \delta) + \mathcal{M} \left\| \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} \mathcal{K}_m(h_0) - h_0 \right\|_{C[d,e]} \geq \varepsilon \right\}
\end{aligned}$$

olup,

$$\begin{aligned}
&\left| \left\{ n \leq p: \left\| \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} \mathcal{K}_m(h) - h \right\|_{C[d,e]} \geq \varepsilon \right\} \right| \\
&\leq \left| \left\{ n \leq p: \omega(h; \delta) \left\| \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} \mathcal{K}_m(h_0) - h_0 \right\|_{C[d,e]} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 2\omega(h; \delta) + \mathcal{M} \left\| \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} \mathcal{K}_m(h_0) - h_0 \right\|_{C[d,e]} \geq \varepsilon \right\} \right|
\end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned}
&\left| \left\{ n \leq p: \left\| \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} \mathcal{K}_m(h) - h \right\|_{C[d,e]} \geq \varepsilon \right\} \right| \\
&\leq \left| \left\{ n \leq p: \omega(h; \delta) \geq \frac{\varepsilon}{6} \right\} \right| \\
&\quad + \left| \left\{ n \leq p: \omega(h; \delta) \geq \sqrt{\frac{\varepsilon}{3}} \right\} \right| \left| \left\{ n \leq p: \left\| \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} \mathcal{K}_m(h_0) - h_0 \right\|_{C[d,e]} \geq \sqrt{\frac{\varepsilon}{3}} \right\} \right|
\end{aligned}$$

$$+ \left\{ n \leq p: \left\| \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} \mathcal{K}_m(h_0) - h_0 \right\|_{C[d,e]} \geq \frac{\varepsilon}{3\mathcal{M}} \right\}$$

elde edilir. Eşitsizliğin her iki tarafı  $\frac{1}{p}$  ile çarpılıp  $p \rightarrow \infty$  için limit alınırsa

$$\lim_p \frac{1}{p} \left\{ n \leq p: \left\| \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} \mathcal{K}_m(h) - h \right\|_{C[d,e]} \geq \varepsilon \right\} = 0$$

bulunur. Dolayısıyla  $\forall h \in C[d, e]$  için

$$st - \lim \left\| \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} \mathcal{K}_m(h) - h \right\|_{C[d,e]} = 0$$

dır.

## 5. ÇİFT İNDİSLİ DİZİLER İÇİN YAKINSAKLIK YÖNTEMLERİ

### 5.1. Çift İndisli Diziler İçin Pringsheim Yakınsaklık

Bu bölümde çift indisli dizilerin tanımı ve Pringsheim (1900) tarafından tanımlanan çift indisli diziler için yakınsaklık kavramı verilecektir.

**5.1.1. Tanım:**  $h: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$

$$(m, n) \rightarrow h(m, n) = u_{m,n}$$

şeklinde tanımlanan  $h$  fonksiyonuna reel terimli bir çift indisli dizi denir. Herhangi bir  $u = (u_{m,n})$  çift indisli dizisi aşağıdaki şekildedir.

$$u = (u_{m,n}) = \begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} & \dots & u_{1,n} & \dots \\ u_{2,1} & u_{2,2} & u_{2,3} & \dots & u_{2,n} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{m,1} & u_{m,2} & u_{m,3} & \dots & u_{m,n} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

Reel terimli bütün çift indisli dizilerin kümesi ise  $\Omega = \{u = (u_{m,n}): \forall m, n \in \mathbb{N} \text{ için } u_{m,n} \in \mathbb{R}\}$  şeklinde gösterilir. Bu küme  $\forall u, v \in \Omega$  ve  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$  için  $\alpha u + \beta v = \alpha u_{m,n} + \beta v_{m,n}$  işlemi ile bir lineer uzaydır.

**5.1.2. Tanım:**  $u = (u_{m,n})$  reel terimli çift indisli bir dizi olsun.  $\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2$  için  $|u_{m,n}| < \mathcal{M}$  olacak şekilde bir  $\mathcal{M} > 0$  sayısı var ise  $u$  dizisine sınırlıdır denir (Pringsheim, 2000).

**5.1.3. Örnek:** Genel terimi aşağıdaki şekilde tanımlı bir  $u = (u_{m,n})$  çift indisli dizisi verilsin.

$$u_{m,n} = \begin{cases} \frac{1}{2m} & , \quad m = n \\ 0 & , \quad \text{dd.} \end{cases}$$

Bu durumda  $\forall m, n \in \mathbb{N}$  için  $|u_{m,n}| \leq \frac{1}{2}$  olup  $u$  dizisi sınırlıdır.

**5.1.4. Tanım:** Bir  $u = (u_{m,n})$  reel terimli çift indisli dizisi verilsin. Eğer  $\forall \varepsilon > 0$  için  $\forall m, n > N$  olduğunda  $|u_{m,n} - \mathcal{L}| < \varepsilon$  olacak şekilde en az bir  $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  sayısı var ise  $u$  dizisi  $\mathcal{L}$  sayısına Pringsheim anlamında yakınsaktır yani kısaca  $\mathcal{P}$ -yakınsak denir ve  $\mathcal{P} - \lim u = \mathcal{L}$  ile gösterilir.

**5.1.5. Örnek:** Genel terimi  $u = (u_{m,n}) = \frac{1}{m+n}$  şeklinde tanımlı bir çift indisli dizi verilsin.  $\mathcal{P} - \lim u = 0$ 'dır. Çünkü  $\forall \varepsilon > 0$  için  $N \in \mathbb{N}$  sayısını  $N > \frac{2}{\varepsilon}$  olacak şekilde seçilsin. 5.1.4 Tanım'dan  $\forall m, n > N$  için  $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N}$  ve  $\frac{1}{m} \leq \frac{1}{N}$  olup,  $|u_{m,n} - 0| = \left| \frac{1}{m+n} \right| < \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} + \frac{1}{N} = \frac{2}{N} < \varepsilon$  elde edilir.

Yakınsak her dizi sınırlıdır. Fakat  $\mathcal{P}$ -yakınsak çift indisli dizilerin sınırlı olması gerekmez.

**5.1.6. Örnek:** Genel terimi aşağıdaki şekilde tanımlı bir  $u = (u_{m,n})$  çift indisli dizisi verilsin.

$$u_{m,n} = \begin{cases} 1 & , \quad m = 1 \\ m & , \quad n = 2 \\ 0 & , \quad d. d. \end{cases}$$

$\mathcal{P} - \lim u = 0$  dir. Ancak bu dizi sınırlı değildir.

**5.1.7. Teorem :** Bir çift indisli dizinin Pringsheim limiti tektir.

**5.1.8. Teorem:**  $u = (u_{m,n}), v = (v_{m,n}) \in \Omega$  olmak üzere  $\mathcal{P} - \lim u_{m,n} = a$  ve  $\mathcal{P} - \lim v_{m,n} = b$  ile  $\lambda \in \mathbb{R}$  olsun. O halde aşağıdaki eşitlikler gerçekleşir (Pringsheim,1900).

$$i) \mathcal{P} - \lim_{m,n \rightarrow \infty} (u_{m,n} + v_{m,n}) = \mathcal{P} - \lim_{m,n \rightarrow \infty} u_{m,n} + \mathcal{P} - \lim_{m,n \rightarrow \infty} v_{m,n} = a + b$$

$$ii) \mathcal{P} - \lim_{m,n \rightarrow \infty} \lambda u_{m,n} = \lambda a$$

$$iii) \mathcal{P} - \lim_{m,n \rightarrow \infty} (u_{m,n} v_{m,n}) = \left( \mathcal{P} - \lim_{m,n \rightarrow \infty} u_{m,n} \right) \left( \mathcal{P} - \lim_{m,n \rightarrow \infty} v_{m,n} \right) = a \cdot b$$

$$iv) \mathcal{P} - \lim_{m,n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{u_{m,n}} \right) = \frac{1}{\mathcal{P} - \lim_{m,n \rightarrow \infty} u_{m,n}} = \frac{1}{a}, \forall m, n \text{ için } v_{m,n} \neq 0, a \neq 0$$

$$v) \mathcal{P} - \lim_{m,n \rightarrow \infty} \left( \frac{u_{m,n}}{v_{m,n}} \right) = \frac{a}{b}, \forall m, n \text{ için } v_{m,n} \neq 0, b \neq 0.$$

## 5.2. Çift İndisli Diziler için Korovkin Tipi Yaklaşım Teoremi

$I \subset \mathbb{R}^2$  kompakt alt kümesi verilsin.  $C(I)$ ,  $I$  kompakt alt kümesinde tanımlı sürekli fonksiyonların uzayı olsun.  $h \in C(I)$  için

$$\|h\|_{C(I)} = \sup_{(u,v) \in I} |h(u,v)|$$

alışılmış supremum normu ile birlikte  $C(I)$  bir Banach uzaydır.

Volkov tarafından 1957 yılında ispatlanan pozitif lineer operatörlerin çift indisli dizisi için Korovkin tipi yaklaşım teoremi verilsin.

Tez boyunca  $h_0(u, v) = 1, h_1(u, v) = u, h_2(u, v) = v, h_3(u, v) = u^2 + v^2$  test fonksiyonları kullanılacaktır.

**5.2.1. Teorem:**  $\mathcal{K}_{m,n}: C(I) \rightarrow C(I)$  pozitif lineer operatörlerin bir dizisi olsun.  $\mathbb{R}^2$  de sınırlı herhangi bir  $h \in C(I)$  için

$$\mathcal{P} - \lim_{m,n} \|\mathcal{K}_{m,n}(h) - h\|_{C(I)} = 0 \quad (5.2.1)$$

olması için gerek ve yeter koşul

$$\mathcal{P} - \lim_{m,n} \|\mathcal{K}_{m,n}(h_i) - h_i\|_{C(I)} = 0, \quad i = 0,1,2,3 \quad (5.2.2)$$

dır (Volkov, 1957).

**İspat:** (5.2.1)  $\Rightarrow$  (5.2.2) olduğu açıktır. Çünkü,  $\forall h \in C(I)$  için (5.2.1) sağlanmaktadır. O halde  $h_i \in C(I)$  ( $i = 0,1,2$ ) olduğundan istenilen elde edilir.

(5.2.2)  $\Rightarrow$  (5.2.1) olduğu gösterilsin.  $\forall h \in C(I)$  alınsın. O halde  $\forall \varepsilon > 0$  için  $\exists \delta > 0$  vardır  $\ni |t - u| < \delta$  ve  $|z - v| < \delta$  koşulunu sağlayan  $\forall (t, z), (u, v) \in I$  için  $|h(t, z) - h(u, v)| < \varepsilon$  olur.  $|t - u| > \delta$  ve  $|z - v| > \delta$  olduğunda ise  $\frac{(t-u)^2 + (z-v)^2}{\delta^2} \geq 1$  dir. Ayrıca  $h$  fonksiyonu  $C(I)$  kompakt olduğundan  $\forall (u, v) \in I$  için  $|h(u, v)| \leq \mathcal{M}$  olacak şekilde  $\mathcal{M} > 0$  sayısı bulunabilir. Dolayısıyla

$$|h(t, z) - h(u, v)| \leq |h(t, z)| + |h(u, v)| < \mathcal{M} + \mathcal{M} = 2\mathcal{M}$$

gerçeklenir. Buradan  $|h(t, z) - h(u, v)| \leq 2\mathcal{M} \frac{(t-u)^2 + (z-v)^2}{\delta^2}$  yazılabilir. O halde  $\forall (t, z), (u, v) \in I$  için  $|h(t, z) - h(u, v)| < \varepsilon + 2\mathcal{M} \frac{(t-u)^2 + (z-v)^2}{\delta^2}$  elde edilir. Eşitliğin her iki tarafına  $\mathcal{K}_{m,n}$  pozitif lineer operatörü uygulanırsa,

$$\begin{aligned} & \mathcal{K}_{m,n} (|h(t, z) - h(u, v)|; u, v) \\ & < \mathcal{K}_{m,n} \left( \varepsilon + 2\mathcal{M} \frac{(t-u)^2 + (z-v)^2}{\delta^2}; u, v \right) \\ & = \mathcal{K}_{m,n} (\varepsilon; u, v) + \frac{2\mathcal{M}}{\delta^2} \mathcal{K}_{m,n} ((t-u)^2 + (z-v)^2; u, v) \\ & = \varepsilon \mathcal{K}_{m,n} (1; u, v) + \frac{2\mathcal{M}}{\delta^2} \{ \mathcal{K}_{m,n} (t^2 + z^2; u, v) - 2u \mathcal{K}_{m,n} (t; u, v) - 2v \mathcal{K}_{m,n} (z; u, v) \\ & \quad + (u^2 + v^2) \mathcal{K}_{m,n} (1; u, v) \} \\ & = \varepsilon \mathcal{K}_{m,n} (1; u, v) + \frac{2\mathcal{M}}{\delta^2} \{ \mathcal{K}_{m,n} (t^2 + z^2; u, v) - 2u \mathcal{K}_{m,n} (t; u, v) \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2v\mathcal{K}_{m,n}(z; u, v) + (u^2 + v^2)\mathcal{K}_{m,n}(1; u, v) \pm 2u^2 \pm 2v^2 \} \\
= & \varepsilon + \varepsilon\mathcal{K}_{m,n}(1; u, v) - 1 + \frac{2\mathcal{M}}{\delta^2} \{ (\mathcal{K}_{m,n}(t^2 + z^2; u, v) - (u^2 + v^2)) \\
& - 2u(\mathcal{K}_{m,n}(t; u, v) - u) - 2v(\mathcal{K}_{m,n}(z; u, v) - v) \\
& + (u^2 + v^2)(\mathcal{K}_{m,n}(1; u, v) - 1) \} \\
\leq & \varepsilon + \varepsilon|\mathcal{K}_{m,n}(1; u, v) - 1| + \frac{2\mathcal{M}}{\delta^2} \{ |\mathcal{K}_{m,n}(t^2 + z^2; u, v) - (u^2 + v^2)| \\
& + 2|u||\mathcal{K}_{m,n}(t; u, v) - u| + 2|v||\mathcal{K}_{m,n}(z; u, v) - v| \\
& + |u^2 + v^2||\mathcal{K}_{m,n}(1; u, v) - 1| \} \tag{5.2.3}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Ayrıca  $\mathcal{K}_{m,n}$ , pozitif lineer operatör olduğundan

$$\begin{aligned}
& |\mathcal{K}_{m,n}(h; u, v) - h(u, v)| \\
= & |\mathcal{K}_{m,n}(h; u, v) - h(u, v)\mathcal{K}_{m,n}(1; u, v) + h(u, v)\mathcal{K}_{m,n}(1; u, v) - h(u, v)| \\
= & |\mathcal{K}_{m,n}(h(t, z) - h(u, v); u, v) + h(u, v)(\mathcal{K}_{m,n}(1; u, v) - 1)| \\
\leq & \mathcal{K}_{m,n}(|h(t, z) - h(u, v)|; u, v) + |h(u, v)||\mathcal{K}_{m,n}(1; u, v) - 1| \\
\leq & \mathcal{K}_{m,n}(|h(t, z) - h(u, v)|; u, v) + \mathcal{M}|\mathcal{K}_{m,n}(1; u, v) - 1| \tag{5.2.4}
\end{aligned}$$

yazılabilir. (5.2.3) ve (5.2.4) kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
& |\mathcal{K}_{m,n}(h; u, v) - h(u, v)| \\
< & \varepsilon + \varepsilon|\mathcal{K}_{m,n}(1; u, v) - 1| + \frac{2\mathcal{M}}{\delta^2} \{ |\mathcal{K}_{m,n}(t^2 + z^2; u, v) - (u^2 + v^2)| \\
& + 2|u||\mathcal{K}_{m,n}(t; u, v) - u| + 2|v||\mathcal{K}_{m,n}(z; u, v) - v| \\
& + |u^2 + v^2||\mathcal{K}_{m,n}(1; u, v) - 1| \} + \mathcal{M}|\mathcal{K}_{m,n}(1; u, v) - 1|
\end{aligned}$$

elde edilir. Basit hesaplamalar yapılırsa,

$$\begin{aligned}
& |\mathcal{K}_{m,n}(h; u, v) - h(u, v)| \\
< & \varepsilon + \left( \varepsilon + \mathcal{M} + \frac{2\mathcal{M}}{\delta^2} |u^2 + v^2| \right) |\mathcal{K}_{m,n}(1; u, v) - 1| \\
& + \frac{4\mathcal{M}}{\delta^2} |u||\mathcal{K}_{m,n}(t; u, v) - u| + \frac{4\mathcal{M}}{\delta^2} |v||\mathcal{K}_{m,n}(z; u, v) - v| \\
& + \frac{2\mathcal{M}}{\delta^2} |u^2 + v^2||\mathcal{K}_{m,n}(t^2 + z^2; u, v) - (u^2 + v^2)|
\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Son eşitsizliğin her iki tarafının  $(u, v) \in I$  için supremumu alınıp norma geçilirse,

$$\|\mathcal{K}_{m,n}(h) - h\|_{C(I)} < \varepsilon + \mathcal{C} \{ \|\mathcal{K}_{m,n}(h_0) - h_0\|_{C(I)} + \|\mathcal{K}_{m,n}(h_1) - h_1\|_{C(I)} \}$$



$$+ \|\mathcal{K}_{m,n}(h_2) - h_2\|_{C(I)} + \|\mathcal{K}_{m,n}(h_3) - h_3\|_{C(I)} \}$$

bulunur. Burada  $\mathcal{C} = \sup_{(u,v) \in I} \left\{ \varepsilon + \mathcal{M} + \frac{2\mathcal{M}}{\delta^2} |u^2 + v^2|, \frac{4\mathcal{M}}{\delta^2} |u|, \frac{4\mathcal{M}}{\delta^2} |v|, \frac{2\mathcal{M}}{\delta^2} \right\}$  şeklindedir.

Şimdi  $m, n \rightarrow \infty$  için limit alınırsa hipotezden  $\mathbb{R}^2$  de sınırlı herhangi bir  $h \in C(I)$  için  $\mathcal{P} - \lim_{m,n} \|\mathcal{K}_{m,n}(h) - h\|_{C(I)} = 0$  elde edilir.

**5.2.2. Örnek:**  $\mathcal{D} := [0,1] \times [0,1]$  olsun.  $(\mathcal{B}_{m,n})$ ,  $C(\mathcal{D})$  de tanımlı iki değişkenli Bernstein operatörü

$$\mathcal{B}_{m,n}(h; u, v) = \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^n h\left(\frac{j}{m}, \frac{k}{n}\right) \binom{m}{j} u^j (1-u)^{m-j} \binom{n}{k} v^k (1-v)^{n-k} \quad (5.2.5)$$

şeklindedir.  $h \in C(\mathcal{D})$  için basit hesaplamalar yapıldığında

$$\mathcal{B}_{m,n}(h_0; u, v) = h_0(u, v), \quad \mathcal{B}_{m,n}(h_1; u, v) = h_1(u, v), \quad \mathcal{B}_{m,n}(h_2; u, v) = h_2(u, v),$$

$$\mathcal{B}_{m,n}(h_3; u, v) = h_3(u, v) + \frac{u-u^2}{m} + \frac{v-v^2}{n} \text{ elde edilir. Buradan Bernstein operatörünün}$$

5.2.1. Teorem’inde verilen çift indisli diziler için Korovkin teoremi koşullarını sağladığı kolaylıkla görülür. Dolayısıyla  $\forall h \in C(\mathcal{D})$  için  $\mathcal{P} - \lim_{m,n} \|\mathcal{B}_{m,n}(h) - h\|_{C(\mathcal{D})} = 0$  olur.

### 5.3. Çift İndisli Diziler İçin $\mathcal{A}$ -İstatistiksel Yakınsaklık

Bu bölümde çift indisli diziler için önce yoğunluk ve istatistiksel yakınsaklık kavramı, devamında ise  $\mathcal{A}$ -istatistiksel yakınsaklık kavramı tanıtılacaktır.

**5.3.1. Tanım:**  $K \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  iki boyutlu bir küme ve  $K$  içinde  $m \leq j, n \leq k$  olacak şekilde  $(m, n)$  lerin kümesi  $K(j, k)$  olsun. Yani,  $K(j, k) = \{m \leq j, n \leq k: (m, n) \in K\}$  dır. Bu durumda  $\mathcal{P} - \lim_{j,k} \frac{|K(j,k)|}{j,k}$  limiti mevcut ise bu limiti değerine  $K$  kümesinin yoğunluğu denir ve  $\delta_2(K)$  ile gösterilir (Moricz, 2003; Mursaleen ve Edely, 2003).

Bu tanım kullanılarak  $\delta_2(\{(m^2, n^2): m, n \in \mathbb{N}\}) = 0$  ve  $\delta_2(\{(m, 2n): m, n \in \mathbb{N}\}) = \frac{1}{2}$  olduğu kolaylıkla görülebilir.

Bir  $K$  kümesi yoğunluğa sahip yani  $\delta_2(K)$  veya  $\delta_2(\mathbb{N}^2 \setminus K)$  yoğunluklarından biri mevcut ise bu durumda  $\delta_2(K) = 1 - \delta_2(\mathbb{N}^2 \setminus K)$  olacaktır.

**5.3.2. Tanım:**  $u = (u_{m,n})$  reel terimli bir çift indisli dizi olsun. Eğer  $\forall \varepsilon > 0$  için  $\{(m,n) \in \mathbb{N}^2 : |u_{m,n} - \mathcal{L}| \geq \varepsilon\}$  kümesinin yoğunluğu sıfır ise  $u = (u_{m,n})$  çift indisli dizisi  $\mathcal{L}$  sayısına istatistiksel yakınsaktır denir ve  $st_2 - \lim u = \mathcal{L}$  ile gösterilir. Yani,

$$st_2 - \lim u = \mathcal{L} \Leftrightarrow \mathcal{P} - \lim_{j,k} \frac{|K(j,k)|}{j,k} = \mathcal{P} - \lim_{j,k} \frac{|\{m \leq j, n \leq k : |u_{m,n} - \mathcal{L}| \geq \varepsilon\}|}{j,k} = 0$$

dır (Moricz,2003; Mursaleen ve Edely,2003).

**5.3.3. Teorem:**  $u = (u_{m,n})$  çift indisli dizisinin bir  $\mathcal{L}$  sayısına istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter koşul  $\delta_2(K) = 1$  olacak şekilde  $K = \{(m,n) : m,n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{N}^2$  alt kümesi vardır ve  $\mathcal{P} - \lim_{m,n} u_{m,n} = \mathcal{L}$  dir. (Mursaleen ve Edely, 2003)

**İspat:**  $(\Rightarrow) st_2 - \lim u = \mathcal{L}$  olsun.  $K_r = \{(m,n) \in \mathbb{N}^2 : |u_{m,n} - \mathcal{L}| \geq \frac{1}{r}\}$  ve  $M_r = \{(m,n) \in \mathbb{N}^2 : |u_{m,n} - \mathcal{L}| < \frac{1}{r}\}$  olacak şekilde seçilsin.  $u = (u_{m,n})$  yakınsak olduğundan  $\delta_2(K_r) = 0$  dir.

$$M_1 \supset M_2 \supset M_3 \supset \dots \supset M_m \supset M_{m+1} \supset \dots \quad (5.3.1)$$

ve

$$\delta_2(M_r) = 1, (r = 1, 2, 3, \dots) \quad (5.3.2)$$

dir. Şimdi  $(m,n) \in M_r$  için  $u$  çift indisli dizisinin  $\mathcal{L}$  ye yakınsak olduğunu gösterilsin. Kabul edelim ki  $u, \mathcal{L}$  ye yakınsak olmasın. Bu durumda  $\forall \varepsilon > 0$  için  $|u_{m,n} - \mathcal{L}| \geq \varepsilon$  olacak şekilde sonsuz çoklukta  $(m,n) \in \mathbb{N}^2$  vardır. Ayrıca  $M_\varepsilon = \{(m,n) : |u_{m,n} - \mathcal{L}| < \varepsilon\}$  ve  $\varepsilon > \frac{1}{r}$  ( $r = 1, 2, 3, \dots$ ) olsun.  $|u_{m,n} - \mathcal{L}| \geq \varepsilon$  olduğundan  $\delta_2(M_\varepsilon) = 0$  ve (5.3.1) den  $M_r \subset M_\varepsilon$  olur. Bu da  $\delta_2(M_r) = 0$  olması ile çelişir. Yani,  $(u_{m,n}) \rightarrow \mathcal{L}$  dir.

$(\Leftarrow) \delta_2(K) = 1$  olacak şekilde  $K = \{(m,n)\} \subseteq \mathbb{N}^2$  alt kümesi ve  $\lim_{m,n} u_{m,n} = \mathcal{L}$  olsun.

Yani  $\forall \varepsilon > 0$  için  $\exists N \in \mathbb{N}$  var  $\exists \forall m, n \geq N$  için  $|u_{m,n} - \mathcal{L}| < \varepsilon$  olur.

O halde  $K_\varepsilon = \{(m,n) : |u_{m,n} - \mathcal{L}| \geq \varepsilon\} \subseteq \mathbb{N}^2 - \{(j_{N+1}, k_{N+1}), (j_{N+2}, k_{N+2}), \dots\}$  dir.

Buradan  $\delta_2(K_\varepsilon) \leq 0 \Rightarrow \delta_2(K_\varepsilon) = 0$  olduğundan  $st_2 - \lim u = \mathcal{L}$  dir.

**5.3.4. Örnek:** Genel terimi aşağıdaki şekilde tanımlı bir  $u = (u_{m,n})$  çift indisli dizisi verilsin.

$$u_{m,n} = \begin{cases} mn & , \quad m \text{ ve } n \text{ kare ise} \\ 1 & , \quad \text{dd.} \end{cases}$$

Bu durumda  $\varepsilon > 0$  için  $|\{(m, n): |u_{m,n} - 1| \geq \varepsilon\}| \leq \sqrt{m}\sqrt{n}$  olup,

$$\delta_2(\{(m, n): |u_{m,n} - 1| \geq \varepsilon\}) \leq \lim_{m,n} \frac{\sqrt{m}\sqrt{n}}{mn} = 0$$

dır. 5.3.3. Teorem'den  $st_2 - \lim u = 1$  elde edilir. Fakat bu dizi yakınsak değildir.

**5.3.5. Teorem:**  $u$  yakınsak bir çift indisli dizi ise istatistiksel olarak da aynı sayıya yakınsaktır. Çünkü sadece sonlu sayıda sınırlı (sınırsız) satır ve\veya sütun vardır.  $K(m, n) \leq s_1 m + s_2 n$  dir. Burada  $s_1$  ve  $s_2$  sonlu sayılardır ve  $u$  çift indisli dizisinin istatistiksel olarak yakınsak olduğu sonucuna varılır.

**5.3.6. Teorem:**  $u$ ,  $L$  sayısına istatistiksel yakınsak bir çift indisli dizi ise limiti tektir.

Ayrıca 5.3.4. Örnek'te görüldüğü üzere istatistiksel yakınsak bir  $u$  çift dizisinin yakınsak olması gerekmez.

Bir  $u = (u_{m,n})$  dizisinin  $\mathcal{L}$  sayısına istatistiksel yakınsak olması demek  $\forall \varepsilon > 0$  için  $\mathcal{P} - \lim_{j,k} \frac{1}{jk} |\{(m, n) \in \mathbb{N}^2: |u_{m,n} - \mathcal{L}| \geq \varepsilon\}| = 0$  olması demektir. Buna denk olarak  $K := K(\varepsilon) = \{(m, n) \in \mathbb{N}^2: |u_{m,n} - \mathcal{L}| \geq \varepsilon\}$  olmak üzere  $\forall \varepsilon > 0$  için

$$\mathcal{P} - \lim_{j,k} (C_1 \chi_K)_{j,k} = \mathcal{P} - \lim_{j,k} \frac{1}{jk} \sum_{m,n=1}^{j,k} \chi_{K(\varepsilon)}(m, n) = \mathcal{P} - \lim_{j,k} \frac{|K(\varepsilon)|}{jk} = 0$$

olmasıdır. Burada  $\chi_K$ ,  $K$  kümesinin karakteristik fonksiyonunu göstermektedir.

İstatistiksel yakınsaklık tanımındaki Cesáro matrisi yerine negatif olmayan regüler bir  $\mathcal{A} = (a_{j,k,m,n})$  matrisini alarak istatistiksel yakınsaklık çift indisli diziler için  $\mathcal{A}$ -istatistiksel yakınsaklığa genişletilmiştir.

Şimdi çift indisli diziler için  $\mathcal{A}$ -istatistiksel yakınsaklık ile ilgili bazı tanımlar verilsin.

**5.3.7. Tanım:**  $\mathcal{A} = (a_{j,k,m,n})$  4-boyutlu bir matris olsun. Verilen bir  $u = (u_{m,n})$  çift indisli dizisi için  $u$  dizisinin  $\mathcal{A}$ -dönüşümü,  $\forall (j, k) \in \mathbb{N}^2$  için seriler Pringsheim anlamında yakınsak olmak koşulu ile

$$(\mathcal{A}u)_{j,k} = \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} a_{j,k,m,n} u_{m,n}$$

şeklinde ve  $\mathcal{A}u := ((\mathcal{A}u)_{j,k})$  ile gösterilir.

İki boyutlu bir matris dönüşümü, yakınsak her diziyi aynı limite sahip yakınsak bir diziye dönüştürüyorsa regüler olduğu ve iki boyutlu matrisler için iyi bilinen karakterizasyonun Silverman-Toeplitz koşulları olduğu ifade edilmiştir. 1926 yılında

Robinson, çift diziler için regülerliği 4-boyutlu matrisler için tanımlamış ve tanıma ek olarak sınırlılık koşulunu eklemiştir. Bu koşul her  $\mathcal{P}$ -yakınsak dizinin sınırlı olmaması üzerine eklenmiştir. Bu sebeple 4-boyutlu matrisler için regülerlik karakterizasyonu Robinson-Hamilton koşulları veya  $\mathcal{RH}$ -regülerlik olarak bilinir.

**5.3.8. Tanım:** Bir  $\mathcal{A} = (a_{j,k,m,n})$  4-boyutlu matrisinin  $\mathcal{RH}$ -regüler olması için gerek ve yeter koşul sınırlı her  $u = (u_{m,n})$  çift indisli dizisi için  $\mathcal{P} - \lim_{m,n} u_{m,n} = \mathcal{L}$  olduğunda  $\mathcal{P} - \lim_{j,k} (Au)_{j,k} = \mathcal{L}$  olmasıdır. Yani, 4-boyutlu bir  $\mathcal{A} = (a_{j,k,m,n})$ , her sınırlı  $\mathcal{P}$ -yakınsak diziyi aynı  $\mathcal{P}$ -limitine sahip bir  $\mathcal{P}$ -yakınsak bir diziye dönüştürüyorsa  $\mathcal{RH}$ -regüler olduğu söylenir.

**5.3.9. Teorem:**  $\mathcal{A} = (a_{j,k,m,n})$ , 4- boyutlu matrisinin  $\mathcal{RH}$ -regüler olması için gerek ve yeter koşul aşağıdaki Robinson Hamilton koşullarını sağlamasıdır.

- i) Her bir  $(m, n) \in \mathbb{N}^2$  için  $\mathcal{P} - \lim_{j,k} a_{j,k,m,n} = 0$
- ii)  $\mathcal{P} - \lim_{j,k} \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} a_{j,k,m,n} = 1$
- iii) Her bir  $n \in \mathbb{N}$  için  $\mathcal{P} - \lim_{j,k} \sum_{m \in \mathbb{N}} |a_{j,k,m,n}| = 0$
- iv) Her bir  $m \in \mathbb{N}$  için  $\mathcal{P} - \lim_{j,k} \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_{j,k,m,n}| = 0$
- v)  $\forall (j, k) \in \mathbb{N}^2$  için  $\sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} |a_{j,k,m,n}|$ ,  $\mathcal{P}$ -yakınsak
- vi)  $\forall (j, k) \in \mathbb{N}^2$  için  $\sum_{m,n > B} |a_{j,k,m,n}| < A$

olacak şekilde sonlu pozitif  $A$  ve  $B$  sayıları vardır (Hamilton, 1926).

**5.3.10. Örnek:** 4- boyutlu Cesáro matrisi olarak adlandırılan ve

$$C = (c_{j,k,m,n}) = \begin{cases} \frac{1}{jk} & , \quad 1 \leq m \leq j, 1 \leq n \leq k \\ 0 & , \quad dd \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan  $C(1,1)$ , 4-boyutlu matrisi regülerdir.

**5.3.11. Tanım:**  $\mathcal{A} = (a_{j,k,m,n})$  4-boyutlu negatif olmayan  $\mathcal{RH}$ -regüler bir matris olsun.  $K \subseteq \mathbb{N}^2$  için

$$\delta_{\mathcal{A}}^2(K) := \mathcal{P} - \lim_{j,k} \sum_{(m,n) \in K} a_{j,k,m,n}$$

limiti mevcut ise, bu limit değerine  $K$  kümesinin  $\mathcal{A}$ -yoğunluğu denir.

**5.3.12. Tanım:**  $\mathcal{A} = (a_{j,k,m,n})$  negatif olmayan  $\mathcal{RH}$ -regüler bir matris ve  $u = (u_{m,n})$  çift indisli bir dizi olsun.  $K \subseteq \mathbb{N}^2$  ve  $\forall \varepsilon > 0$  için  $\delta_{\mathcal{A}}^2(\{(m,n) \in \mathbb{N}^2: |u_{m,n} - L| \geq \varepsilon\})$  limiti sıfır oluyorsa  $u = (u_{m,n})$  dizisi  $\mathcal{L}$  sayısına  $\mathcal{A}$ -istatistiksel yakınsaktır denir. Bu durum  $st_{(\mathcal{A})}^2 - \lim_{m,n} u = \mathcal{L}$  ile gösterilir.

$\mathcal{P}$ -yakınsak her çift indisli dizi aynı sayıya  $\mathcal{A}$ -istatistiksel yakınsaktır. Fakat tersi doğru değildir. Ayrıca  $\mathcal{A}$ -istatistiksel yakınsak bir dizinin sınırlı olması gerekmez.

**5.3.15. Örnek:**  $u = (u_{m,n})$  çift indisli dizisinin genel terimi

$$u = (u_{m,n}) = \begin{cases} mn & , \quad m \text{ ve } n \text{ kare} \\ 1 & , \quad dd. \end{cases}$$

şekilde verilsin.  $u$  dizisi sınırlı bir çift indisli dizi değildir. Ayrıca Pringsheim anlamında yakınsak bir çift indisli dizide değildir. Ancak,  $A = C(1,1)$ , 4-boyutlu Cesáro matrisi alınırsa  $st_{(C(1,1))}^2 - \lim u = 1$  elde edilir.

#### 5.4. Çift İndisli Diziler İçin $\mathcal{A}$ -İstatistiksel Yakınsaklık Yardımı İle Korovkin tipi Yaklaşım Teoremi

Bu bölümde çift indisli diziler için  $\mathcal{A}$  -istatistiksel Korovkin tipi yaklaşım teoremi, ispatı ve teoremin koşullarını sağlayan bir örnek verilecektir.

**5.4.1. Teorem:**  $\mathcal{A} = (a_{j,k,m,n})$  negatif olmayan  $\mathcal{RH}$ -regüler toplanabilir bir matris yöntemi ve  $I \subseteq \mathbb{R}^2$  kompakt alt kümesi olmak üzere  $\mathcal{K}_{m,n}: C(I) \rightarrow C(I)$  pozitif lineer operatörlerin dizisi olsun.  $\forall h \in C(I)$  için

$$st_{(\mathcal{A})}^2 - \lim_{m,n} \|\mathcal{K}_{m,n}(h) - h\|_{C(I)} = 0 \quad (5.4.1)$$

olması için gerek ve yeter koşul

$$st_{(\mathcal{A})}^2 - \lim_{m,n} \|\mathcal{K}_{m,n}(h_i) - h_i\|_{C(I)} = 0, \quad i = 0,1,2,3 \quad (5.4.2)$$

dır (Dirik ve Demirci, 2010).

**İspat:** (5.4.1)  $\Rightarrow$  (5.4.2) olduğu açıktır. Çünkü,  $\forall h \in C(I)$  için (5.4.1) sağlanmaktadır. O halde  $h_i \in C(I)$  ( $i = 0,1,2,3$ ) olduğundan istenilen elde edilir.

(5.4.2)  $\Rightarrow$  (5.4.1) olduğu gösterilsin.  $\forall h \in C(I)$  alınsın. O halde  $\forall \varepsilon > 0$  için  $\exists \delta > 0$  vardır  $\ni |t - u| < \delta$  ve  $|z - v| < \delta$  koşulunu sağlayan  $\forall (t,z), (u,v) \in I$  için  $|h(t,z) - h(u,v)| < \varepsilon$  olur.  $|t - u| > \delta$  ve  $|z - v| > \delta$  olduğunda ise  $\frac{(t-u)^2 + (z-v)^2}{\delta^2} \geq$

1 dir. Ayrıca kompakt  $I$  kümesi üzerinde  $h$  fonksiyonu sürekli olduğundan  $\forall (u, v) \in I$  için  $|h(u, v)| \leq \mathcal{M}$  olacak şekilde  $\mathcal{M} > 0$  sayısı bulunabilir. Dolayısıyla

$$|h(t, z) - h(u, v)| \leq |h(t, z)| + |h(u, v)| < \mathcal{M} + \mathcal{M} = 2\mathcal{M}$$

gerçeklenir. Buradan  $|h(t, z) - h(u, v)| \leq 2\mathcal{M} \frac{(t-u)^2 + (z-v)^2}{\delta^2}$  yazılabilir. O halde

$$\forall (t, z), (u, v) \in I \quad |h(t, z) - h(u, v)| < \varepsilon + 2\mathcal{M} \frac{(t-u)^2 + (z-v)^2}{\delta^2} \quad \text{elde edilir.}$$

Eşitliğin her iki tarafına  $\mathcal{K}_{m,n}$  pozitif lineer operatörü uygulanırsa,

$$\begin{aligned} & \mathcal{K}_{m,n} (|h(t, z) - h(u, v)|; u, v) \\ & < \mathcal{K}_{m,n} \left( \varepsilon + 2\mathcal{M} \frac{(t-u)^2 + (z-v)^2}{\delta^2}; u, v \right) \\ & = \mathcal{K}_{m,n} (\varepsilon; u, v) + \frac{2\mathcal{M}}{\delta^2} \mathcal{K}_{m,n} ((t-u)^2 + (z-v)^2; u, v) \\ & = \varepsilon \mathcal{K}_{m,n} (1; u, v) + \frac{2\mathcal{M}}{\delta^2} \{ \mathcal{K}_{m,n} (t^2 + z^2; u, v) - 2u \mathcal{K}_{m,n} (t; u, v) - 2v \mathcal{K}_{m,n} (z; u, v) \\ & \quad + (u^2 + v^2) \mathcal{K}_{m,n} (1; u, v) \} \\ & = \varepsilon + \varepsilon \mathcal{K}_{m,n} (1; u, v) + \frac{2\mathcal{M}}{\delta^2} \{ \mathcal{K}_{m,n} (t^2 + z^2; u, v) - 2u \mathcal{K}_{m,n} (t; u, v) \\ & \quad - 2v \mathcal{K}_{m,n} (z; u, v) + (u^2 + v^2) \mathcal{K}_{m,n} (1; u, v) - 2u^2 - 2v^2 \} \\ & = \varepsilon + \varepsilon \mathcal{K}_{m,n} (1; u, v) - 1 + \frac{2\mathcal{M}}{\delta^2} \{ (\mathcal{K}_{m,n} (t^2 + z^2; u, v) - (u^2 + v^2)) \\ & \quad - 2u(\mathcal{K}_{m,n} (t; u, v) - u) - 2v(\mathcal{K}_{m,n} (z; u, v) - v) \\ & \quad + (u^2 + v^2)(\mathcal{K}_{m,n} (1; u, v) - 1) \} \\ & \leq \varepsilon + \varepsilon |\mathcal{K}_{m,n} (1; u, v) - 1| + \frac{2\mathcal{M}}{\delta^2} \{ |\mathcal{K}_{m,n} (t^2 + z^2; u, v) - (u^2 + v^2)| \\ & \quad + 2|u| |\mathcal{K}_{m,n} (t; u, v) - u| + 2|v| |\mathcal{K}_{m,n} (z; u, v) - v| \\ & \quad + |u^2 + v^2| |\mathcal{K}_{m,n} (1; u, v) - 1| \} \end{aligned} \tag{5.4.3}$$

eşitsizliği elde edilir. Ayrıca  $\mathcal{K}_{m,n}$ , pozitif lineer operatör olduğundan

$$\begin{aligned} & |\mathcal{K}_{m,n} (h; u, v) - h(u, v)| \\ & = |\mathcal{K}_{m,n} (h; u, v) - h(u, v) \mathcal{K}_{m,n} (1; u, v) + h(u, v) \mathcal{K}_{m,n} (1; u, v) - h(u, v)| \\ & = |\mathcal{K}_{m,n} (h(t, z) - h(u, v); u, v) + h(u, v) (\mathcal{K}_{m,n} (1; u, v) - 1)| \\ & \leq \mathcal{K}_{m,n} (|h(t, z) - h(u, v)|; u, v) + |h(u, v)| |\mathcal{K}_{m,n} (1; u, v) - 1| \\ & \leq \mathcal{K}_{m,n} (|h(t, z) - h(u, v)|; u, v) + \mathcal{M} |\mathcal{K}_{m,n} (1; u, v) - 1| \end{aligned} \tag{5.4.4}$$

yazılabilir. (5.4.3) ve (5.4.4) kullanılırsa,

$$|\mathcal{K}_{m,n} (h; u, v) - h(u, v)|$$

$$\begin{aligned}
&< \varepsilon + \varepsilon |\mathcal{K}_{m,n}(1; u, v) - 1| + \frac{2\mathcal{M}}{\delta^2} \{ |\mathcal{K}_{m,n}(t^2 + z^2; u, v) - (u^2 + v^2)| \\
&\quad + 2|u| |\mathcal{K}_{m,n}(t; u, v) - u| + 2|v| |\mathcal{K}_{m,n}(z; u, v) - v| \\
&\quad + |u^2 + v^2| |\mathcal{K}_{m,n}(1; u, v) - 1| \} + \mathcal{M} |\mathcal{K}_{m,n}(1; u, v) - 1|
\end{aligned}$$

elde edilir. Basit hesaplamalar yapılırsa,

$$\begin{aligned}
&|\mathcal{K}_{m,n}(h; u, v) - h(u, v)| \\
&< \varepsilon + \left( \varepsilon + \mathcal{M} + \frac{2\mathcal{M}}{\delta^2} |u^2 + v^2| \right) |\mathcal{K}_{m,n}(1; u, v) - 1| \\
&\quad + \frac{4\mathcal{M}}{\delta^2} |u| |\mathcal{K}_{m,n}(t; u, v) - u| + \frac{4\mathcal{M}}{\delta^2} |v| |\mathcal{K}_{m,n}(z; u, v) - v| \\
&\quad + \frac{2\mathcal{M}}{\delta^2} |u^2 + v^2| |\mathcal{K}_{m,n}(t^2 + z^2; u, v) - (u^2 + v^2)|
\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Son eşitsizliğin her iki tarafının  $(u, v) \in I$  için supremumu alınıp norma geçilirse,

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{K}_{m,n}(h) - h\|_{C(I)} &< \varepsilon + \mathcal{C} \left\{ \|\mathcal{K}_{m,n}(h_0) - h_0\|_{C(I)} + \|\mathcal{K}_{m,n}(h_1) - h_1\|_{C(I)} \right. \\
&\quad \left. + \|\mathcal{K}_{m,n}(h_2) - h_2\|_{C(I)} + \|\mathcal{K}_{m,n}(h_3) - h_3\|_{C(I)} \right\}
\end{aligned}$$

bulunur. Burada  $\mathcal{C} = \sup_{(u,v) \in I} \left\{ \varepsilon + \mathcal{M} + \frac{2\mathcal{M}}{\delta^2} |u^2 + v^2|, \frac{4\mathcal{M}}{\delta^2} |u|, \frac{4\mathcal{M}}{\delta^2} |v|, \frac{2\mathcal{M}}{\delta^2} \right\}$  şeklindedir.

$\varepsilon' > \varepsilon > 0$  için

$$\begin{aligned}
&\left\{ (m, n) \in \mathbb{N}^2 : \|\mathcal{K}_{m,n}(h) - h\|_{C(I)} \geq \varepsilon' \right\} \\
&\subseteq \left\{ (m, n) \in \mathbb{N}^2 : \|\mathcal{K}_{m,n}(h_0) - h_0\|_{C(I)} + \|\mathcal{K}_{m,n}(h_1) - h_1\|_{C(I)} \right. \\
&\quad \left. + \|\mathcal{K}_{m,n}(h_2) - h_2\|_{C(I)} + \|\mathcal{K}_{m,n}(h_3) - h_3\|_{C(I)} \geq \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{\mathcal{C}} \right\}
\end{aligned}$$

olup,

$$\begin{aligned}
&\left| \left\{ (m, n) \in \mathbb{N}^2 : \|\mathcal{K}_{m,n}(h) - h\|_{C(I)} \geq \varepsilon' \right\} \right| \\
&\leq \left| \left\{ (m, n) \in \mathbb{N}^2 : \|\mathcal{K}_{m,n}(h_0) - h_0\|_{C(I)} + \|\mathcal{K}_{m,n}(h_1) - h_1\|_{C(I)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \|\mathcal{K}_{m,n}(h_2) - h_2\|_{C(I)} + \|\mathcal{K}_{m,n}(h_3) - h_3\|_{C(I)} \geq \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{\mathcal{C}} \right\} \right|
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\mathcal{T} := \left\{ (m, n) \in \mathbb{N}^2 : \|\mathcal{K}_{m,n}(h) - h\|_{C(I)} \geq \varepsilon' \right\}$$

$$\mathcal{T}_i := \left\{ (m, n) \in \mathbb{N}^2 : \|\mathcal{K}_{m,n}(h_i) - h_i\|_{C(I)} \geq \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{4c} \right\}, \quad (i = 0, 1, 2, 3)$$

şeklinde alınsın. Buradan  $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_0 \cup \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2 \cup \mathcal{T}_3$  olduğu kolayca görülür. Böylece tüm  $(j, k) \in \mathbb{N}^2$  için,

$$\sum_{(m,n) \in \mathcal{T}} a_{j,k,m,n} \leq \sum_{i=0}^3 \sum_{(m,n) \in \mathcal{T}_i} a_{j,k,m,n}$$

elde edilir.  $j, k \rightarrow \infty$  için limit alınırsa (5.4.2) den  $\forall h \in C(I)$  için

$$st_{(\mathcal{A})}^2 - \lim_{m,n} \|\mathcal{K}_{m,n}(h) - h\|_{C(I)} = 0$$

elde edilir. 5.4.1. Teorem'de kullanılan  $\mathcal{A}$  matrisi birim çift matris olarak alınırsa ilk olarak Volkov tarafından ortaya konulan ve 5.2.1. Teorem'de ifade edilen klasik anlamdaki sonuç elde edilir.

**5.4.2. Teorem:**  $I \subseteq \mathbb{R}^2$  kompakt alt kümesi olmak üzere  $\mathcal{K}_{m,n}: C(I) \rightarrow C(I)$  pozitif lineer operatörlerin dizisi olsun.  $\forall h \in C(I)$  için

$$st_{C(1,1)}^2 - \lim_{m,n} \|\mathcal{K}_{m,n}(h) - h\|_{C(I)} = 0$$

olması için gerek ve yeter koşul

$$st_{C(1,1)}^2 - \lim_{m,n} \|\mathcal{K}_{m,n}(h_i) - h_i\|_{C(I)} = 0, \quad i = 0, 1, 2, 3$$

dır (Dirik ve Demirci, 2010).

Şimdi çift indisli diziler için  $\mathcal{A}$  -istatistiksel Korovkin tipi yaklaşım teoremini sağlayan ancak çift indisli diziler için Korovkin tipi yaklaşım teoremini sağlamayan bir örnek verilsin.

**5.4.3.Örnek:**  $(\mathcal{B}_{m,n})$ , Bernstein polinomları,  $\mathcal{A} = C(1,1)$  ve  $\alpha = (\alpha_{m,n})$  çift indisli dizisi

$$\alpha_{m,n} := \begin{cases} 1 & , \quad m \text{ ve } n \text{ kare} \\ 0 & , \quad \text{dd.} \end{cases} \quad (5.4.6)$$

genel terimi ile verilsin. Buradaki  $\alpha = (\alpha_{m,n})$  çift indisli dizisi  $\mathcal{P}$ -yakınsak değildir. Aynı zamanda  $st_{C(1,1)} - \lim \alpha_{m,n} = 0$  olduğu açıkça görülmektedir.

Şimdi  $\mathcal{P}_{m,n}: C(D) \rightarrow C(D)$  olmak üzere  $\mathcal{P}_{m,n}(h; u, v) = (1 + \alpha_{m,n})B_{m,n}(h; u, v)$  şeklinde tanımlı  $(\mathcal{P}_{m,n})$  pozitif lineer operatörlerin çift indisli dizisi göz önüne alınsın.

5.2.2. Örnek'ten  $\mathcal{B}_{m,n}(h_0; u, v) = h_0(u, v), \quad \mathcal{B}_{m,n}(h_1; u, v) = h_1(u, v),$



$\mathcal{B}_{m,n}(h_2; u, v) = h_2(u, v)$ ,  $\mathcal{B}_{m,n}(h_3; u, v) = h_3(u, v) + \frac{u-u^2}{m} + \frac{v-v^2}{n}$  dir. Şimdi  $(\mathcal{P}_{m,n})$  dizisinin 5.4.1. Teorem'inin koşullarını sağladığı gösterilsin.

i)  $\mathcal{P}_{m,n}(h_0) = (1 + \alpha_{m,n})\mathcal{B}_{m,n}(h_0) = 1 + \alpha_{m,n}$  olup,

$$\|\mathcal{P}_{m,n}(h_0) - h_0\|_{C(D)} = \sup_{(u,v) \in D} |1 + \alpha_{m,n} - 1| = \sup_{(u,v) \in D} |\alpha_{m,n}| = \alpha_{m,n}$$

elde edilir.  $st_{C(1,1)} - \lim \alpha_{m,n} = 0$  olduğundan

$$st_{C(1,1)} - \lim \|\mathcal{P}_{m,n}(h_0) - h_0\|_{C(D)} = 0 \text{ dir.}$$

ii)  $\mathcal{P}_{m,n}(h_1) = (1 + \alpha_{m,n})\mathcal{B}_{m,n}(h_1) = (1 + \alpha_{m,n})u$  olup,

$$\|\mathcal{P}_{m,n}(h_1) - h_1\|_{C(D)} = \sup_{(u,v) \in D} |(1 + \alpha_{m,n})u - u| = \sup_{(u,v) \in D} |\alpha_{m,n}u| = \alpha_{m,n}$$

elde edilir.  $st_{C(1,1)}^2 - \lim \alpha_{m,n} = 0$  olduğundan

$$st_{C(1,1)}^2 - \lim \|\mathcal{P}_{m,n}(h_1) - h_1\|_{C(D)} = 0 \text{ dir.}$$

iii)  $\mathcal{P}_{m,n}(h_2) = (1 + \alpha_{m,n})\mathcal{B}_{m,n}(h_2) = (1 + \alpha_{m,n})v$  olup,

$$\|\mathcal{P}_{m,n}(h_2) - h_2\|_{C(D)} = \sup_{(u,v) \in D} |(1 + \alpha_{m,n})v - v| = \sup_{(u,v) \in D} |\alpha_{m,n}v| = \alpha_{m,n}$$

elde edilir.  $st_{C(1,1)}^2 - \lim \alpha_{m,n} = 0$  olduğundan

$$st_{C(1,1)}^2 - \lim \|\mathcal{P}_{m,n}(h_2) - h_2\|_{C(D)} = 0 \text{ dir.}$$

iv)  $\mathcal{P}_{m,n}(h_3) = (1 + \alpha_{m,n})\mathcal{B}_{m,n}(h_3) = (1 + \alpha_{m,n})\left(u^2 + v^2 + \frac{u-u^2}{m} + \frac{v-v^2}{n}\right)$  olup,

$$\begin{aligned} & \|\mathcal{P}_{m,n}(h_3) - h_3\|_{C(D)} \\ &= \sup_{(u,v) \in D} \left| (1 + \alpha_{m,n})\left(u^2 + v^2 + \frac{u-u^2}{m} + \frac{v-v^2}{n}\right) - (u^2 + v^2) \right| \\ &\leq \sup_{(u,v) \in D} \left| \frac{u-u^2}{m} \right| + \sup_{(u,v) \in D} \left| \frac{v-v^2}{n} \right| + \sup_{(u,v) \in D} |\alpha_{m,n}(u^2 + v^2)| + \sup_{(u,v) \in D} \left| \frac{u-u^2}{m} \alpha_{m,n} \right| \\ &\quad + \sup_{(u,v) \in D} \left| \frac{v-v^2}{n} \alpha_{m,n} \right| \\ &\leq \frac{1}{4m} + \frac{1}{4n} + 2\alpha_{m,n} + \frac{1}{4m} \alpha_{m,n} + \frac{1}{4n} \alpha_{m,n} \end{aligned}$$

elde edilir.  $st_{C(1,1)}^2 - \lim \alpha_{m,n} = 0$ ,  $st_{C(1,1)}^2 - \lim \frac{1}{4n} = 0$  ve  $st_{C(1,1)}^2 - \lim \frac{1}{4m} = 0$  olduğundan  $st_{C(1,1)}^2 - \lim \|\mathcal{P}_{m,n}(h_3) - h_3\|_{C(D)} = 0$  sonucu elde edilir. Dolayısıyla

$(\mathcal{P}_{m,n})$  dizisinin 5.4.1. Teorem'inin koşullarını sağladığı görülür. Diğer taraftan  $(\alpha_{m,n})$  çift indisli dizisi  $\mathcal{P}$ -yakınsak olmadığından  $(\mathcal{P}_{m,n})$  pozitif lineer operatörlerin çift indisli dizisi klasik Korovkin tipi yaklaşım teorem koşullarını sağlamaz.

## 5.5 Çift İndisli Diziler İçin İstatistiksel $\mathcal{A}$ -Toplanabilme

Bu bölümde çift indisli diziler için istatistiksel  $\mathcal{A}$ -toplanabilme tanımı ve  $\mathcal{A}$ -istatistiksel yakınsaklık,  $\mathcal{A}$ -toplanabilme ile istatistiksel  $\mathcal{A}$ -toplanabilme arasındaki ilişki verilecektir.

**5.5.1. Tanım:**  $\mathcal{A} = (a_{j,k,m,n})$  4-boyutlu  $\mathcal{RH}$ -regüler bir matris,  $u = (u_{m,n})$  çift indisli dizi olsun. Eğer  $\forall \varepsilon > 0$  için  $\delta_{\mathcal{C}(1,1)}^2(\{(j,k) \in \mathbb{N}^2: |(\mathcal{A}u)_{j,k} - \mathcal{L}| \geq \varepsilon\}) = 0$  yani,  $\lim_{p,q} \frac{1}{pq} |\{j \leq p, k \leq q: |(\mathcal{A}u)_{j,k} - \mathcal{L}| \geq \varepsilon\}| = 0$  ise  $u = (u_{m,n})$  çift indisli dizisinin istatistiksel  $\mathcal{A}$ -toplamı  $\mathcal{L}$ 'dir.

$u = (u_{m,n})$  çift indisli dizisinin  $\mathcal{A}$ -toplamı  $\mathcal{L}$  olması için gerek ve yeter koşul  $(\mathcal{A}u)_{j,k}$  dönüşüm dizisinin  $\mathcal{L}$  ye istatistiksel yakınsak olmasıdır. Bu durumda  $(\mathcal{A})_{st}^2 - \lim_{m,n} u_{m,n} = \mathcal{L}$  veya  $st_{\mathcal{C}(1,1)}^2 - \lim_{j,k} (\mathcal{A}u)_{j,k} = \mathcal{L}$  dir.

**5.5.2. Teorem:** Eğer bir çift indisli dizi, sınırlı ve  $\mathcal{L}$  sayısına  $\mathcal{A}$ -istatistiksel yakınsak ise  $\mathcal{A}$ -toplamı  $\mathcal{L}$ 'dir. Bu sebeple  $\mathcal{L}$  sayısına istatistiksel  $\mathcal{A}$ -toplanabilirdir. Fakat tersi doğru değildir. (Demirci ve Karakuş, 2013).

**İspat:**  $\mathcal{A} = (a_{j,k,m,n})$  4-boyutlu  $\mathcal{RH}$ -regüler bir matris,  $u = (u_{m,n})$  sınırlı ve  $\mathcal{L}$ ' ye  $\mathcal{A}$ -istatistiksel yakınsak,  $K(\varepsilon) = \{m \leq p, n \leq q: |u_{mn} - \mathcal{L}| \geq \varepsilon\}$  olsun.

$$\begin{aligned}
|(\mathcal{A}u)_{j,k} - \mathcal{L}| &= \left| \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} a_{j,k,m,n} u_{m,n} + \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} \mathcal{L} a_{j,k,m,n} - \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} \mathcal{L} a_{j,k,m,n} - \mathcal{L} \right| \\
&= \left| \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} a_{j,k,m,n} (u_{m,n} - \mathcal{L}) + \mathcal{L} \left( \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} a_{j,k,m,n} - 1 \right) \right| \\
&\leq \left| \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} a_{j,k,m,n} (u_{m,n} - \mathcal{L}) \right| + |\mathcal{L}| \left| \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} a_{j,k,m,n} - 1 \right| \\
&\leq \left| \sum_{(m,n) \notin K(\varepsilon)} a_{j,k,m,n} (u_{m,n} - \mathcal{L}) \right| + \left| \sum_{(m,n) \in K(\varepsilon)} a_{j,k,m,n} (u_{m,n} - \mathcal{L}) \right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + |\mathcal{L}| \left| \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} a_{j,k,m,n} - 1 \right| \\
& \leq \varepsilon \sum_{(m,n) \notin K(\varepsilon)} a_{j,k,m,n} + \sup_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} |u_{m,n} - \mathcal{L}| \sum_{(m,n) \in K(\varepsilon)} a_{j,k,m,n} \\
& + |\mathcal{L}| \left| \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} a_{j,k,m,n} - 1 \right|
\end{aligned}$$

bulunur.  $\mathcal{A}$ 'nın RH-regülerlik koşulları ve  $\mathcal{A}$  -istatistiksel yakınsaklığı kullanılarak  $\mathcal{P} - \lim |(\mathcal{A}u)_{j,k} - \mathcal{L}| = 0$  bulunur.  $\varepsilon > 0$  keyfi olduğundan  $st_{C(1,1)}^2 - \lim(\mathcal{A}u)_{j,k} = \mathcal{L}$  elde edilir. Karşıtının doğru olmadığını gösteren bir örnek verilsin.

**5.5.3. Örnek:**  $\mathcal{A} = (a_{j,k,m,n})$  matrisi

$$a_{j,k,m,n} = \begin{cases} \frac{1}{jk} & , \quad 1 \leq m \leq j, 1 \leq n \leq k \\ 0 & , \quad dd \end{cases}$$

şeklinde gösterilen Cesáro matrisi olsun.  $\alpha = (\alpha_{m,n})$  çift indisli dizisi  $\alpha_{m,n} = (-1)^{m+n}$  şeklinde tanımlansın.  $\mathcal{A} = (a_{j,k,m,n})$  negatif olmayan  $\mathcal{RH}$ - regüler toplanabilir matris ve  $\alpha = (\alpha_{m,n})$  dizisi için  $st_{C(1,1)}^2 - \lim_{j,k}(\mathcal{A}\alpha)_{j,k} = 0$  dır. Ayrıca  $\alpha = (\alpha_{m,n})$  dizisi Pringsheim anlamda yakınsak değildir.

## 5.6. Çift İndisli Diziler İçin İstatistiksel $\mathcal{A}$ -Toplanabilme Yardımı İle Korovkin Tipi Yaklaşım Teoremi

Bu bölümde çift indisli diziler için istatistiksel  $\mathcal{A}$ -toplanabilme yardımıyla Korovkin tipi yaklaşım teoremi, ispatı ve teoremin koşullarını sağlayan bir örnek verilecektir.

**5.6.1. Teorem:**  $\mathcal{K}_{m,n}: C(I) \rightarrow C(I)$  pozitif lineer operatörlerin bir çift indisli dizisi ve  $\mathcal{A} = (a_{j,k,m,n})$  negatif olmayan RH-regüler toplanabilir bir matris olsun.  $\forall h \in C(I)$  için

$$st_{C(1,1)}^2 - \lim_{j,k} \left\| \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} a_{j,k,m,n} \mathcal{K}_{m,n}(h) - h \right\|_{C(I)} = 0 \quad (5.6.1)$$

olması için gerek ve yeter koşul

$$st_{C(1,1)}^2 - \lim_{j,k} \left\| \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} a_{j,k,m,n} \mathcal{K}_{m,n}(h_i) - h_i \right\|_{C(I)} = 0, \quad i = 0,1,2,3 \quad (5.6.2)$$

dir (Demirci ve Karakuş,2013).

**İspat:** (5.6.1)  $\Rightarrow$  (5.6.2) olduğu açıktır. Çünkü,  $\forall h \in C(I)$  için (5.6.1) sağlanmaktadır. O halde  $h_i \in C(I)$  ( $i = 0,1,2,3$ ) olduğundan istenilen elde edilir.

(5.6.2)  $\Rightarrow$  (5.6.1) olduğu gösterilsin. Kompakt  $I$  kümesinde  $h$  fonksiyonu sürekli olduğundan  $|h(u, v)| \leq \mathcal{M}$  yazabiliriz. Burada  $\mathcal{M} := \|h\|_{C(I)}$  dir. Ayrıca  $h, I$  üzerinde sürekli olduğundan  $\forall \varepsilon > 0$  için  $\exists \delta > 0$  vardır  $\exists |t - u| < \delta$  ve  $|z - v| < \delta$  koşullarını sağlayan  $(u, v) \in I$  için  $|h(t, z) - h(u, v)| < \varepsilon$  olur. Ayrıca  $|t - u| > \delta$  ve  $|z - v| > \delta$  olduğunda ise  $\frac{(t-u)^2 + (z-v)^2}{\delta^2} \geq 1$  dir. Buradan  $|h(t, z) - h(u, v)| \leq \frac{2\mathcal{M}}{\delta^2} \{(t - u)^2 + (z - v)^2\}$  yazılabilir. O halde ile  $\forall (u, v), (t, z) \in I$  için

$$|h(t, z) - h(u, v)| < \varepsilon + \frac{2\mathcal{M}}{\delta^2} \{(t - u)^2 + (z - v)^2\}$$

elde edilir.  $\mathcal{K}_{m,n}$ , pozitif lineer operatör olduğundan,

$$\begin{aligned} & |\mathcal{K}_{m,n}(h; u, v) - h(u, v)| \\ &= |\mathcal{K}_{m,n}(h; u, v) - h(u, v)\mathcal{K}_{m,n}(1; u, v) + h(u, v)\mathcal{K}_{m,n}(1; u, v) - h(u, v)| \\ &= |\mathcal{K}_{m,n}(h(t, z) - h(u, v); u, v) + h(u, v) \cdot (\mathcal{K}_{m,n}(1; u, v) - 1)| \\ &\leq \mathcal{K}_{m,n}(|h(t, z) - h(u, v)|; u, v) + |h(u, v)| |\mathcal{K}_{m,n}(1; u, v) - 1| \\ &\leq \mathcal{K}_{m,n}(|h(t, z) - h(u, v)|; u, v) + \mathcal{M} |\mathcal{K}_{m,n}(1; u, v) - 1| \end{aligned} \quad (5.6.3)$$

yazılabilir. (5.6.3) kullanılıp, basit hesaplamalar yapılırsa,

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} a_{j,k,m,n} \mathcal{K}_{m,n}(h(t, z) - h(u, v); u, v) \right| \\ &\leq \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} a_{j,k,m,n} \mathcal{K}_{m,n}(|h(t, z) - h(u, v)|; u, v) \\ &\quad + |h(u, v)| \left| \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} a_{j,k,m,n} \mathcal{K}_{m,n}(h_0; u, v) - h_0(u, v) \right| \\ &\leq \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} a_{j,k,m,n} \mathcal{K}_{m,n} \left( \varepsilon + \frac{2\mathcal{M}}{\delta^2} \{(t - u)^2 + (z - v)^2\}; u, v \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \mathcal{M} \left| \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} a_{j,k,m,n} \mathcal{K}_{m,n}(h_0; u, v) - h_0(u, v) \right| \\
& < \varepsilon + \left( \varepsilon + \mathcal{M} + \frac{2\mathcal{M}}{\delta^2} (F^2 + G^2) \right) \left| \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} a_{j,k,m,n} \mathcal{K}_{m,n}(h_0; u, v) - h_0(u, v) \right| \\
& + \frac{4\mathcal{M}}{\delta^2} F \left| \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} a_{j,k,m,n} \mathcal{K}_{m,n}(h_1; u, v) - h_1(u, v) \right| \\
& + \frac{4\mathcal{M}}{\delta^2} G \left| \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} a_{j,k,m,n} \mathcal{K}_{m,n}(h_2; u, v) - h_2(u, v) \right| \\
& + \frac{2\mathcal{M}}{\delta^2} \left| \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} a_{j,k,m,n} \mathcal{K}_{m,n}(h_3; u, v) - h_3(u, v) \right|
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada  $F := \max|u|, G := \max|v|$  şeklindedir. Son eşitsizliğin her iki tarafının  $(u, v) \in I$  için supremumu alınıp norma geçilirse,

$$\begin{aligned}
& \left\| \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} a_{j,k,m,n} \mathcal{K}_{m,n}(h) - h \right\|_{C(I)} \\
& < \varepsilon + \mathcal{C} \left\{ \left\| \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} a_{j,k,m,n} \mathcal{K}_{m,n}(h_0) - h_0 \right\|_{C(I)} \right. \\
& + \left\| \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} a_{j,k,m,n} \mathcal{K}_{m,n}(h_1) - h_1 \right\|_{C(I)} + \left\| \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} a_{j,k,m,n} \mathcal{K}_{m,n}(h_2) - h_2 \right\|_{C(I)} \\
& \left. + \left\| \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} a_{j,k,m,n} \mathcal{K}_{m,n}(h_3) - h_3 \right\|_{C(I)} \right\}
\end{aligned}$$

bulunur. Burada  $\mathcal{C} = \sup_{(u,v) \in I} \left\{ \varepsilon + \mathcal{M} + \frac{2\mathcal{M}}{\delta^2} (F^2 + G^2), \frac{4\mathcal{M}}{\delta^2} F, \frac{4\mathcal{M}}{\delta^2} G, \frac{2\mathcal{M}}{\delta^2} \right\}$  şeklindedir.

$\varepsilon' > \varepsilon > 0$  için

$$\left\{ j \leq p, k \leq q : \left\| \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} a_{j,k,m,n} \mathcal{K}_{m,n}(h) - h \right\|_{C(I)} \geq \varepsilon' \right\}$$

$$\begin{aligned}
&\subseteq \left\{ j \leq p, k \leq q: \left\| \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} a_{j,k,m,n} \mathcal{K}_{m,n}(h_0) - h_0 \right\|_{C(I)} \right. \\
&\quad + \left\| \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} a_{j,k,m,n} \mathcal{K}_{m,n}(h_1) - h_1 \right\|_{C(I)} + \left\| \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} a_{j,k,m,n} \mathcal{K}_{m,n}(h_2) - h_2 \right\|_{C(I)} \\
&\quad \left. + \left\| \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} a_{j,k,m,n} \mathcal{K}_{m,n}(h_3) - h_3 \right\|_{C(I)} \geq \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{C} \right\}
\end{aligned}$$

olup,

$$\begin{aligned}
&\left| \left\{ j \leq p, k \leq q: \left\| \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} a_{j,k,m,n} \mathcal{K}_{m,n}(h) - h \right\|_{C(I)} \geq \varepsilon' \right\} \right| \\
&\leq \left| \left\{ j \leq p, k \leq q: \left\| \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} a_{j,k,m,n} \mathcal{K}_{m,n}(h_0) - h_0 \right\|_{C(I)} \right. \right. \\
&\quad + \left\| \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} a_{j,k,m,n} \mathcal{K}_{m,n}(h_1) - h_1 \right\|_{C(I)} + \left\| \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} a_{j,k,m,n} \mathcal{K}_{m,n}(h_2) - h_2 \right\|_{C(I)} \\
&\quad \left. \left. + \left\| \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} a_{j,k,m,n} \mathcal{K}_{m,n}(h_3) - h_3 \right\|_{C(I)} \geq \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{C} \right\} \right|
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
\mathcal{T} &:= \left\{ j \leq p, k \leq q: \left\| \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} a_{j,k,m,n} \mathcal{K}_{m,n}(h) - h \right\|_{C(I)} \geq \varepsilon' \right\} \\
\mathcal{T}_i &:= \left\{ j \leq p, k \leq q: \left\| \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} a_{j,k,m,n} \mathcal{K}_{m,n}(h_i) - h_i \right\|_{C(I)} \geq \frac{\varepsilon' - \varepsilon'}{4C} \right\}, (i = 0, 1, 2, 3)
\end{aligned}$$

şeklinde alınsın. Buradan  $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_0 \cup \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2 \cup \mathcal{T}_3$  olduğu kolayca görülür. Böylece

$$\left| \left\{ j \leq p, k \leq q: \left\| \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} a_{j,k,m,n} \mathcal{K}_{m,n}(h) - h \right\|_{C(I)} \geq \varepsilon' \right\} \right|$$

$$\leq \sum_{i=0}^3 \left\| \left\{ j \leq p, k \leq q: \left\| \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} a_{j,k,m,n} \mathcal{K}_{m,n}(h_i) - h_i \right\|_{C(I)} \geq \frac{\varepsilon' - \varepsilon'}{4C} \right\} \right\|$$

elde edilir. Eşitliğin her iki tarafı  $\frac{1}{pq}$  ile çarpılıp  $p, q \rightarrow \infty$  için limit alınırsa  $\forall \varepsilon' > 0$  için

$$\lim_{p,q} \frac{1}{pq} \left\| \left\{ j \leq p, k \leq q: \left\| \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} a_{j,k,m,n} \mathcal{K}_{m,n}(h) - h \right\|_{C(I)} \geq \varepsilon' \right\} \right\| = 0$$

bulunur. Yani  $\forall h \in C(I)$  için

$$st_{C(1,1)}^2 - \lim \left\| \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} a_{j,k,m,n} \mathcal{K}_{m,n}(h) - h \right\|_{C(I)} = 0$$

elde edilir. Şimdi çift indisli dizilerin istatistiksel  $\mathcal{A}$ -toplanabilme yardımıyla Korovkin tipi yaklaşım teoremi koşullarını sağlayan ama 5.2.1. Teorem'inin ve 5.4.2. Teorem'inin koşullarını sağlamayan iki değişkenli bir pozitif lineer operatör örneği verilsin.

**5.6.2. Örnek:**  $I = [0,1]$  ve  $D := I \times I$  olsun.  $\mathcal{P}_{m,n}: C(D) \rightarrow C(D)$  olmak üzere

$\mathcal{P}_{m,n}(h; u, v) = (1 + \alpha_{m,n})\mathcal{B}_{m,n}(h; u, v)$  şeklinde tanımlı pozitif lineer operatörlerin çift indisli dizisi göz önüne alınsın. Burada  $(\mathcal{B}_{m,n})$  5.2.2. Örnek'te verilen iki değişkenli Bernstein polinomu ve  $\alpha = (\alpha_{m,n})$  ise  $\alpha_{m,n} = (-1)^{m+n}$  şeklinde tanımlı çift indisli dizisi için

$$\mathcal{P}_{m,n}(h_0; u, v) = (1 + \alpha_{m,n})h_0(u, v),$$

$$\mathcal{P}_{m,n}(h_1; u, v) = (1 + \alpha_{m,n})h_1(u, v),$$

$$\mathcal{P}_{m,n}(h_2; u, v) = (1 + \alpha_{m,n})h_2(u, v),$$

$$\mathcal{P}_{m,n}(h_3; u, v) = (1 + \alpha_{m,n}) \left[ h_3(u, v) + \frac{u-u^2}{m} + \frac{v-v^2}{n} \right]$$

şeklinde. Şimdi  $\mathcal{A} = (a_{j,k,m,n})$  4-boyutlu RH-regüler matris olmak üzere  $\mathcal{A} = C(1,1)$  alınsın. 5.5.3 Örnek'ten  $st_{C(1,1)}^2 - \lim_{j,k} (\mathcal{A}\alpha)_{j,k} = 0$ 'dır. Şimdi  $(\mathcal{P}_{m,n})$  pozitif lineer operatörlerin çift indisli dizisinin 5.6.1. Teorem'inin koşullarını sağladığı gösterilsin.

$$i) \left\| \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} a_{j,k,m,n} \mathcal{P}_{m,n}(h_0) - h_0 \right\|_{C(D)} = \sup_{(u,v) \in D} |\alpha_{m,n}| \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} a_{j,k,m,n} = (\mathcal{A}\alpha)_{j,k}$$

elde edilir.  $st_{C(1,1)}^2 - \lim_{j,k} (\mathcal{A}\alpha)_{j,k} = 0$  olduğundan

$$st_{C(1,1)}^2 - \lim_{j,k} \left\| \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} a_{j,k,m,n} \mathcal{P}_{m,n}(h_0) - h_0 \right\|_{C(D)} = 0$$

dır.

$$ii) \left\| \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} a_{j,k,m,n} \mathcal{P}_{m,n}(h_1) - h_1 \right\|_{C(D)} = \sup_{(u,v) \in D} |\alpha_{m,n}| \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} a_{j,k,m,n} = (\mathcal{A}\alpha)_{j,k}$$

$st_{C(1,1)}^2 - \lim_{j,k} (\mathcal{A}\alpha)_{j,k} = 0$  olduğundan

$$st_{C(1,1)}^2 - \lim_{j,k} \left\| \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} a_{j,k,m,n} \mathcal{P}_{m,n}(h_1) - h_1 \right\|_{C(D)} = 0$$

dır.

$$\begin{aligned} iii) \left\| \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} a_{j,k,m,n} \mathcal{P}_{m,n}(h_2) - h_2 \right\|_{C(D)} &= \sup_{(u,v) \in D} |\alpha_{m,n}(u^2 + v^2)| \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} a_{j,k,m,n} \\ &= 2 \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} a_{j,k,m,n} \alpha_{m,n} \\ &= 2(\mathcal{A}\alpha)_{j,k} \end{aligned}$$

$st_{C(1,1)}^2 - \lim_{j,k} (\mathcal{A}\alpha)_{j,k} = 0$  olduğundan

$$st_{C(1,1)}^2 - \lim_{j,k} \left\| \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} a_{j,k,m,n} \mathcal{P}_{m,n}(h_2) - h_2 \right\|_{C(D)} = 0$$

dır.

$$iv) \left\| \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} a_{j,k,m,n} \mathcal{P}_{m,n}(h_3) - h_3 \right\|_{C(D)}$$



$$\begin{aligned}
&\leq \left( \sup_{(u,v) \in D} \left| \frac{u - u^2}{m} \right| + \sup_{(u,v) \in D} \left| \frac{v - v^2}{n} \right| + \sup_{(u,v) \in D} |\alpha_{m,n}(u^2 + v^2)| \right. \\
&\quad \left. + \sup_{(u,v) \in D} \left| \frac{u - u^2}{m} \alpha_{m,n} \right| + \sup_{(u,v) \in D} \left| \frac{v - v^2}{n} \alpha_{m,n} \right| \right) \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} a_{j,k,m,n} \\
&\leq \frac{1}{4m} \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} a_{j,k,m,n} + \frac{1}{4n} \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} a_{j,k,m,n} + 2\alpha_{m,n} \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} a_{j,k,m,n} \\
&\quad + \frac{1}{4m} \alpha_{m,n} \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} a_{j,k,m,n} + \frac{1}{4n} \alpha_{m,n} \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} a_{j,k,m,n}
\end{aligned}$$

elde edilir.

$\mathcal{A} = (a_{j,k,m,n})$  matrisinin  $\mathcal{RH}$ -regüler,  $st_{C(1,1)}^2 - \lim_{j,k} (A\alpha)_{j,k} = 0$ ,  $st_{C(1,1)}^2 - \lim \frac{1}{4n} = 0$  ve  $st_{C(1,1)}^2 - \lim \frac{1}{4m} = 0$  olduğundan

$$st_{C(1,1)}^2 - \lim \left\| \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} a_{j,k,m,n} \mathcal{P}_{m,n}(h_3) - h_3 \right\|_{C(D)} = 0$$

dır. Dolayısıyla 5.6.1. Teorem'inin koşullarını sağlar. Yani,  $\forall h \in C(D)$  için

$$st_{C(1,1)}^2 - \lim_{j,k} \left\| \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} a_{j,k,m,n} \mathcal{P}_{m,n}(h) - h \right\|_{C(I)} = 0$$

elde edilir. Diğer taraftan  $(\alpha_{m,n})$  çift indisli dizisi  $\mathcal{P}$ -yakınsak ve aynı zamanda  $\mathcal{A}$  - istatistiksel yakınsak olmadığından 5.2.1. Teorem'inin ve 5.4.2. Teorem'nin koşullarını sağlamaz.

## 5.7. Çift İndisli Diziler İçin İstatistiksel $\mathcal{A}$ -Toplanabilme Yardımıyla Korovkin Tipi Yaklaşımın, Süreklilik Modülü Yardımıyla Yakınsaklık Oranının Hesaplanması

$h \in C(D)$  olsun.  $\delta \geq 0$  için

$$\omega(h; \delta) = \sup \left\{ |h(t, z) - h(u, v)| : (t, z), (u, v) \in D \text{ ve } \sqrt{(t - u)^2 + (z - v)^2} \leq \delta \right\}$$

ile tanımlanan  $\omega(h; \delta)$  ifadesine  $h$  fonksiyonunun süreklilik modülü denir.

**5.7.1. Teorem:**  $\mathcal{K}_{m,n} : C(D) \rightarrow C(D)$  pozitif lineer operatörlerin bir çift indisli dizisi ve  $\mathcal{A} = (a_{j,k,m,n})$  negatif olmayan  $\mathcal{RH}$ -regüler toplanabilir bir matris olsun.

$$i) st_{C(1,1)}^2 - \lim_{j,k} \left\| \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} a_{j,k,m,n} \mathcal{K}_{m,n}(h_0) - h_0 \right\|_{C(D)} = 0$$

$$ii) \delta := \delta_{(j,k)} := \sqrt{\left\| \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} a_{j,k,m,n} \mathcal{K}_{m,n}(\psi) \right\|_{C(D)}}$$

ve  $\psi(t, z) = (t - u)^2 + (z - v)^2$  olmak üzere  $st_{C(1,1)}^2 - \lim_{j,k} \omega(h; \delta) = 0$  koşulları

sağlanıyorsa  $\forall h \in C(D)$  için

$$st_{C(1,1)}^2 - \lim_{j,k} \left\| \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} a_{j,k,m,n} \mathcal{K}_{m,n}(h) - h \right\|_{C(D)} = 0$$

dır (Demirci ve Karakuş 2013).

**İspat:**  $(u, v) \in D$  ve  $h \in C(D)$  olsun.  $\mathcal{K}_{m,n}$  operatörünün pozitifliğini ve lineerliğini kullanarak  $\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2$  ve her bir  $\delta > 0$  için

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} a_{j,k,m,n} \mathcal{K}_{m,n}(h(t, z); u, v) - h(u, v) \right| \\ & \leq \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} a_{j,k,m,n} \mathcal{K}_{m,n}(|h(t, z) - h(u, v)|; u, v) \\ & \quad + |h(u, v)| \left| \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} a_{j,k,m,n} \mathcal{K}_{m,n}(h_0; u, v) - h_0(u, v) \right| \\ & \leq \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} a_{j,k,m,n} \mathcal{K}_{m,n} \left( \left( 1 + \frac{\psi(t, z)}{\delta^2} \right) \omega(h, \delta); u, v \right) \\ & \quad + |h(u, v)| \left| \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} a_{j,k,m,n} \mathcal{K}_{m,n}(h_0; u, v) - h_0(u, v) \right| \\ & \leq \pm \omega(h; \delta) + \omega(h; \delta) \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} a_{j,k,m,n} \mathcal{K}_{m,n}(h_0; u, v) \\ & \quad + \frac{\omega(h, \delta)}{\delta^2} \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} a_{j,k,m,n} \mathcal{K}_{m,n}(\psi; u, v) \\ & \quad + |h(u, v)| \left| \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} a_{j,k,m,n} \mathcal{K}_{m,n}(h_0; u, v) - h_0(u, v) \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \omega(h; \delta) + \omega(h; \delta) \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} a_{j,k,m,n} \mathcal{K}_{m,n}(h_0; u, v) - h_0(u, v) \\
&+ \frac{\omega(h; \delta)}{\delta^2} \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} a_{j,k,m,n} \mathcal{K}_{m,n}(\psi; u, v) + \\
&+ |h(u, v)| \left| \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} a_{j,k,m,n} \mathcal{K}_{m,n}(h_0; u, v) - h_0(u, v) \right|
\end{aligned}$$

olur. Bu son eşitsizlikte

$$\delta := \delta_{(j,k)} := \sqrt{\left\| \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} a_{j,k,m,n} \mathcal{K}_{m,n}(\psi) \right\|_{C(D)}}$$

alınır ve eşitsizliğin her iki tarafının  $(u, v) \in D$  üzerinden supremumu alınıp norma geçilirse,

$$\begin{aligned}
&\left\| \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} a_{j,k,m,n} \mathcal{K}_{m,n}(h) - h \right\|_{C(D)} \\
&\leq \|h\|_{C(D)} \left\| \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} a_{j,k,m,n} \mathcal{K}_{m,n}(h_0) - h_0 \right\|_{C(D)} \\
&+ \frac{\omega(h; \delta)}{\delta^2} \left\| \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} a_{j,k,m,n} \mathcal{K}_{m,n}(\psi) \right\| \\
&+ \omega(h; \delta) \left\| \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} a_{j,k,m,n} \mathcal{K}_{m,n}(h_0) - h_0 \right\|_{C(D)} + \omega(h; \delta)
\end{aligned}$$

olur. Bu son eşitsizlikte gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\begin{aligned}
&\left\| \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} a_{j,k,m,n} \mathcal{K}_{m,n}(h) - h \right\|_{C(D)} \\
&\leq 2\omega(h; \delta) + \omega(h; \delta) \left\| \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} a_{j,k,m,n} \mathcal{K}_{m,n}(h_0) - h_0 \right\|_{C(D)} \\
&+ \|h\|_{C(D)} \left\| \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} a_{j,k,m,n} \mathcal{K}_{m,n}(h_0) - h_0 \right\|_{C(D)}
\end{aligned}$$

elde edilir.  $\mathcal{C} = \max\{2, \|h\|_{C(D)}\}$  alınsın. Buradan

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} a_{j,k,m,n} \mathcal{K}_{m,n}(h) - h \right\|_{C(D)} \\ & \leq \mathcal{C} \left\{ \omega(h; \delta) + \omega(h; \delta) \left\| \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} a_{j,k,m,n} \mathcal{K}_{m,n}(h_0) - h_0 \right\|_{C(D)} \right. \\ & \quad \left. + \left\| \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} a_{j,k,m,n} \mathcal{K}_{m,n}(h_0) - h_0 \right\|_{C(D)} \right\} \end{aligned}$$

bulunur.  $\varepsilon' > \varepsilon > 0$  için

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &:= \left\{ j \leq p, k \leq q: \left\| \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} a_{j,k,m,n} \mathcal{K}_{m,n}(h) - h \right\| \geq \varepsilon' \right\} \\ \mathcal{T}_1 &:= \left\{ j \leq p, k \leq q: \left\| \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} a_{j,k,m,n} \mathcal{K}_{m,n}(h_0) - h_0 \right\| \geq \frac{\varepsilon'}{3\mathcal{C}} \right\} \\ \mathcal{T}_2 &:= \left\{ j \leq p, k \leq q: \omega(h; \delta) \geq \frac{\varepsilon'}{3\mathcal{C}} \right\} \\ \mathcal{T}_3 &:= \left\{ j \leq p, k \leq q: \omega(h; \delta) \left\| \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} a_{j,k,m,n} \mathcal{K}_{m,n}(h_0) - h_0 \right\|_{C(D)} \geq \frac{\varepsilon'}{3\mathcal{C}} \right\} \end{aligned}$$

şeklinde alınsın. Buradan  $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2 \cup \mathcal{T}_3$  olduğu kolayca görülür. Ayrıca

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_3' &:= \left\{ j \leq p, k \leq q: \omega(h; \delta) \geq \sqrt{\frac{\varepsilon'}{3\mathcal{C}}} \right\} \\ \mathcal{T}_3'' &:= \left\{ j \leq p, k \leq q: \left\| \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} a_{j,k,m,n} \mathcal{K}_{m,n}(h_0) - h_0 \right\| \geq \sqrt{\frac{\varepsilon'}{3\mathcal{C}}} \right\} \end{aligned}$$

şeklinde dir.  $\mathcal{T}_3 \subset \mathcal{T}_3' \cup \mathcal{T}_3''$  olduğundan  $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2 \cup \mathcal{T}_3' \cup \mathcal{T}_3''$  elde edilir. Böylece i) ve ii) kullanılarak

$$\lim_{p,q} \frac{1}{pq} \left| \left\{ j \leq p, k \leq q: \left\| \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} a_{j,k,m,n} \mathcal{K}_{m,n}(h) - h \right\| \geq \varepsilon' \right\} \right| = 0$$

bulunur. Yani,  $\forall h \in C(D)$  için

$$st_{C(1,1)}^2 - \lim_{j,k} \left\| \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} a_{j,k,m,n} \mathcal{K}_{m,n}(h) - h \right\|_{C(D)} = 0$$

elde edilir.



## 6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında tek ve çift indisli diziler için  $\mathcal{A}$ -istatistiksel yakınsaklık yardımıyla Korovkin tipi yaklaşım teoremleri incelenmiştir. İstatistiksel  $\mathcal{A}$ -toplanabilme kavramının  $\mathcal{A}$ -istatistiksel yakınsaklıktan daha kuvvetli olduğu, klasik ve istatistiksel durumlardan daha kuvvetli sonuçların elde edildiği gösterilmiştir.

Bu çalışmalardan elde edilen sonuçlar kullanılarak farklı yakınsaklık çeşitleri ve farklı uzaylarda Korovkin tipi teorem incelenebilir. Böylelikle daha kuvvetli sonuçlar elde edilebilir.



## KAYNAKLAR

- Altomare, F. and Campiti, M. (1914). Korovkin Type Approximation Theory and Its Applications', *de Gruyter Series Studies in Mathematics*, Vol.17, Walter de Gruyter, Berlin- New York.
- Bernstein, S. (1912). Démonstration du théorème de Weierstrass fondée sur le calcul des probabilités. *Communications of the Kharkov Mathematical Society*, 13(1), 1-2
- Boss, J. (2000). Classical and modern methods in summability. *Oxford Science Publications*
- Buck, R. C. (1953). Generalized asymptotic density. *American journal of mathematics*, 75(2), 335-346.
- Demirci, K., & Karakuş, S. (2011). Statistical  $\mathcal{A}$ -summability of positive linear operators. *Mathematical and Computer Modelling*, 53(1-2), 189-195.
- Demirci, K., Karakuş, S. (2013). Korovkin-Type Approximation Theorem for Double Sequences of Positive Linear Operators via Statistical A-Summability. *Results. Math.* 63, 1–13 (2013). <https://doi.org/10.1007/s00025-011-0140-y>
- Dirik, F. and Demirci, K. (2010). Korovkin type approximation theorem for functions of two variables in statistical sense. *Turkish Journal of Mathematics*, 34(1), 73-84. <https://doi.org/10.3906/mat-0802-21>
- Duman, O. Khan, M. K., and Orhan C. (2003).  $\mathcal{A}$  –statistical convergence of approximating operators. *Mathematical Inequalities and Applications*, 6(4), 689-699. <https://doi.org/10.7153/mia-06-62>
- Edely, O. H. H., Mursaleen, M. (2009). On Statistical A-Summability, *Mathematical and Computer Modelling*, 49, 672-680.
- Fast, H. (1951). Sur la convergence statistique. *In Colloquium Mathematicae*, 2(3-4), 241-244
- Freedman, A.R., & Sember, J.J. (1981). Densities and summability. *Pacific Journal of Mathematics*, 95(2), 293-305
- Fridy, J. A. (1985). On statistical convergence. *Analysis*, 5, 301-314.
- Gadjiev, A. D., & Orhan, C. (2002). Some approximation theorems via statistical convergence. *The Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 129-138.
- Hardy, G. H. (1949). Divergent series Oxford University Press. London
- Korovkin, P. P. (1953). "On convergence of linear positive operators in the space of continuous functions", *Doklady Akad. Nauk SSSR.*, 90, 961-964.
- Korovkin, P. P. (1960). Linear Operators and Approximation Theory, *India, Delhi*.
- Lorentz, G.G. (1986). Bernstein polynomials. *Chelsea Publishing Company, New York, U.S.A.*, 133 pp.
- Móricz, F. (2003). Statistical convergence of multiple sequences. *Archiv der Mathematik*, 81, 82- 89
- Niven, I., & Zuckerman, H. S. (1980). An introduction on the theory of numbers. *John Wiley Sons*, 4 th ed. New York.
- Pringsheim, A. (1900). Zur theorie der zweifach unendlichen Zahlenfolgen. *Mathematische Annalen*, 53(3), 289-321
- Robison, G. M. (1926). Divergent double sequences and series. *Transactions of the American Mathematical Society*, 28(1), 50-73

Steinhaus, H. (1951). Sur la convergence ordinaire et la convergence asymptotique. *In Colloquium Mathematicae* 2, 73-74

Volkov, V. I. (1957). On the convergence of sequences of linear positive operators in the space of continuous functions of two variables. *In Doklady Akademii Nauk Russian Academy of Sciences* 115(1), 17-19.





## ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Pelin YILMAZ

Yabancı Dili :İngilizce

### Eğitim Durumu

Lise : Mudanya Ahmet Rüştü (YDA) Lisesi, 2007

Lisans : Sinop Üniversitesi, 2012

### Mesleki Deneyim

İş Yeri : Sinop Valiliği

İl Planlama ve Koordinasyon Müdürlüğü, (2013-...)