T.C.

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FOKAS DENKLEMİNİN KESİN ÇÖZÜMLERİ

Tuğba YAŞA

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Matematik Programı

Danışman

Dr. Öğr. Üyesi Selmahan SELİM

Ocak, 2025

T.C.

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FOKAS DENKLEMİNİN KESİN ÇÖZÜMLERİ

Tuğba YAŞA tarafından hazırlanan tez çalışması 23.01.2025 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, Matematik Programı **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Dr. Öğr. Üyesi Selmahan SELİM
Yıldız Teknik Üniversitesi
Danışman

Jüri Üyeleri

Dr. Öğr. Üyesi Selmahan SELİM, Danışman
Yıldız Teknik Üniversitesi ________________________

Prof. Dr. Özgür YILDIRIM, Üye
Yıldız Teknik Üniversitesi ________________________

Dr. Öğr. Üyesi Meltem UZUN, Üye
İstanbul Sabahattin Zaim Üniversitesi ________________________

Danışmanım Dr. Öğr. Üyesi Selmahan SELİM sorumluluğunda tarafımca hazırlanan “Fokas Denkleminin Kesin Çözümleri” başlıklı çalışmada veri toplama ve veri kullanımında gerekli yasal izinleri aldığımı, diğer kaynaklardan aldığım bilgileri ana metin ve referanslarda eksiksiz gösterdiğimi, araştırma verilerine ve sonuçlarına ilişkin çarpıtma ve/veya sahtecilik yapmadığımı, çalışmam süresince bilimsel araştırma ve etik ilkelerine uygun davrandığımı beyan ederim. Beyanımın aksinin ispatı halinde her türlü yasal sonucu kabul ederim.

Tuğba YAŞA

İmza

Bu çalışma, “Yıldız Teknik Üniversitesi Bilimsel Araştırma Proje Koordinatörlüğü’nün FYL-2024-6326” numaralı projesi ile desteklenmiştir.

Aileme

ve

Sevgili Eşime

TEŞEKKÜR

Bu yüksek lisans tezinin hazırlanması ve gerekli çalışmaların yapılması esnasında, bana vakit ayırıp gerekli yardım ve desteğini esirgemeyen, kıymetli fikirleriyle bana yol gösteren, karamsar olduğum vakitlerde başarılı olacağıma dair beni motive eden çok değerli danışman hocam Dr. Öğr. Üyesi Selmahan SELİM'e teşekkürlerimi sunarım.

Bu yoğun çalışma dönemimde, her zaman olduğu gibi ilgi ve desteklerini eksik etmeyen ve her daim anlayış gösteren aileme ve eşime teşekkürlerimi sunarım.

Tuğba YAŞA

İÇİNDEKİLER

KISALTMA LİSTESİ

ADD	Adi Diferansiyel Denklem
KDD	Kısmi Diferansiyel Denklem

TABLO LİSTESİ

ÖZET

Fokas Denkleminin Kesin Çözümleri

Tuğba YAŞA

Matematik Anabilim Dalı
Matematik Programı
Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Selmahan SELİM

Yüksek boyutlu lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemler için kesin çözümlerinin oluşturulması bazı fiziksel olayları bilmede önemli bir rol oynar. Bu nedenle diferansiyel denklemlerin kesin çözümlerini bulmak için bir çok güçlü yöntemler geliştirilmiştir.

Bu tezde (4+1)-boyutlu Fokas denkleminin kesin çözümlerini bulmak amacıyla ϕ^6-model açılım yöntemi ve yeni ϕ^6-model açılım yöntemi uygulanmıştır. Uygulama adımında elde edilen lineer olmayan cebirsel denklem sisteminin çözümü, kendi ürettiğimiz Matlab kodları kullanılarak elde edilmiştir. Tezin giriş bölümünde, (4+1)-boyutlu Fokas denklemi ile ilgili yapılan literatür araştırmasının bir özeti sunulmuş ve gerekli tanımlar verilmiştir. İkinci bölümde, çalışmanın daha iyi anlaşılabilmesi için Fokas denkleminin kesin çözümleri için uygulanan bazı yöntemlerin teorik adımları ve bu yöntemlerin Fokas denklemine uygulanması ile elde edilen çözümler verilmiştir. Üçüncü ve dördüncü bölümlerde ise sırasıyla ϕ^6-Model Açılım Yöntemi ve Yeni ϕ^6-Model Açılım Yönteminin teorik adımları ayrıntılı olarak ele alınmıştır. Bu yöntemler (4+1)-boyutlu Fokas denklemine uygulanmış ve Fokas denkleminin kesin çözümleri elde edilmiştir. Elde edilen bu

çözümler eliptik fonksiyonlar, hiperbolik fonksiyonlar ve trigonometrik fonksiyonlar biçiminde ifade edilmiştir. Beşinci bölümde (4+1)-boyutlu Fokas denklemine sırasıyla uygulanan ϕ^6-Model Açılım Yöntemi ve Yeni ϕ^6-Model Açılım Yöntemleriyle elde edilen kesin çözümlerin değerlendirmesi yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Fokas denklemi, Kesin çözümler, ϕ^6-model açılım yöntemi

ABSTRACT

Exact Solutions of the Fokas Equation

Tuğba YAŞA

Department of Mathematics
Master of Science Thesis

Supervisor: Dr. Öğr. Üyesi Selmahan SELİM

The creation of exact solutions for high-dimensional nonlinear partial differential equations plays an important role in knowing some physical phenomena. For this reason, many powerful methods have been developed to find exact solutions of differential equations.

In this thesis, the ϕ^6-model expansion method and the new ϕ^6-model expansion method have been applied in order to find exact solutions of the (4+1)-dimensional Fokas equation. The solution of the nonlinear algebraic equation system obtained in the application step has been obtained using our own Matlab codes. In the introduction section of the thesis, a summary of the literature research conducted on the (4+1)-dimensional Fokas equation has been presented and necessary definitions have been given. In the second section, the theoretical steps of some methods applied for the exact solutions of the Fokas equation and the solutions obtained by applying these methods to the Fokas equation have been given for a better understanding of the study. In the third and fourth sections, the theoretical steps of the ϕ^6-Model Expansion Method and the New ϕ^6-Model Expansion Method have been discussed in detail, respectively. These methods are applied to the (4+1)-dimensional Fokas equation and exact solutions of the Fokas equation are obtained. These obtained solutions are expressed in the form of elliptic functions, hyperbolic functions and trigonometric functions. In the fifth section, the exact solutions obtained by the ϕ^6-Model Expansion Method and the New ϕ^6-Model Expansion Methods, respectively, applied to the (4+1)-dimensional Fokas equation are evaluated.

Keywords: Fokas equation, Exact solutions, ϕ^6-model expansion method

1
GİRİŞ

1.1 Literatür Özeti

Doğada karşımıza çıkan birçok olay matematiksel olarak ifade edildikten sonra açıklanmaya çalışılmıştır. Bu olayların tanımlandığı problemler genel olarak diferansiyel denklemlerle ifade edilmiştir.

Lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemler özellikle mühendislik alanında birçok fiziksel olguyu matematiksel olarak modelleyebilmek için yaygın olarak kullanılmıştır. Günümüzde çok yaygın mühendislik alanları olduğu düşünülürse, bu kullanım alanı fizik, biyoloji, kimya, genetik, istatistik, yer bilimleri, tıp, meteoroloji, hidrodinamik, katı fiziği, kuantum mekaniği, dalga dinamiği, lineer olmayan optik gibi birçok alanı kapsar.

Son zamanlarda elektronik ve bilgisayar alanlarında yaşanan teknolojik gelişmeler yazılım sektöründe birçok ilerlemeye yol açmış ve hem sembolik hem de sayısal programlama için bazı hesaplama araçları geliştirilmiştir. Bu hesaplama araçlarından biri de bu tez çalışmasında yararlanılmış olan Matlab uygulamasıdır. Bu hesaplama araçlarının geliştirilmesi ile birlikte lineer olmayan birçok denklemin çözümünde büyük ilerleme kaydedilmiştir. Birçok bilim insanı bu konuda kapsamlı araştırmalar yapmış ve bu alanda yeni denklemler geliştirmiştir. Bunlardan bazıları Hirota, Davey Stewartson (DS), Fokas-Lenells, Fisher, Phi Four, Kolmogorov-Petrovskii-Piskunov, Mikhailov-Novikov-Wang, Krichever-Novikov, Jaulent-Miodek, Burgers-Huxley, Biswas-Milovic, Biswas-Arshed denklemleridir. Yukarıda sıralanan denklemler bu alanda geliştirilen ve birçok araştırmacı tarafından incelenen denklemlerin sadece bir kısmını yansıtmaktadır. Bu denklemlerden biri de bu çalışmada kullanılacak olan (4+1)-boyutlu Fokas denklemidir [1].

Son zamanlarda birçok bilim insanı yukarıda sıralanan denklemlerin ve daha birçoğunun kesin çözümlerini elde etmek için çalışmalar yapmış ve bu çalışmalar doğrultusunda birçok çözüm yöntemi geliştirmişlerdir. Bu yöntemlerden bazıları; sinüs-kosinüs yöntemi, exp fonksiyon yöntemi, F-açılım yöntemi, genelleştirilmiş Kudryashov yöntemi, değiştirilmiş basit denklem yöntemi [2-3-4-5], (G' / G)-)-açılım yöntemi [6-7], genişletilmiş tanh fonksiyonu yöntemi [8], ϕ^6-model açılım yöntemi [9-10-11-12-13] vb çeşitli yöntemlerdir. Bu geliştirilen yöntemlerden biri de bu tez çalışmasında kullanılan ϕ^6-model açılım yöntemi ve yeni ϕ^6-model açılım yöntemidir [14].

1.2 Tezin Amacı

Bu tezde, (4+1)-boyutlu lineer olmayan Fokas denkleminin kesin çözümlerinin, ϕ^6-model açılım yöntemi ve yeni ϕ^6-model açılım yöntemi kullanılarak elde edilmesi amaçlanmıştır.

1.3 Hipotez

ϕ^6-model açılım yöntemi ve yeni ϕ^6-model açılım yöntemi ile (4+1)-boyutlu Fokas denkleminin kesin çözümleri elde edilir.

1.4 Temel Tanımlar

Tanım

Bir denklemde, bilinmeyen fonksiyonun belirli bir değişkene göre türevli olması durumunda bu değişkene bağımsız değişken ve denklemde türevi bulunan fonksiyona da bağımlı değişken denir. Bağımlı bir değişkeni ve bağımlı değişkenin bir ya da birden fazla bağımsız değişkene göre türevlerini içeren bir denkleme diferansiyel denklem denir. Diferansiyel denklemler adi diferansiyel denklemler ve kısmi diferansiyel denklemler olmak üzere iki grupta toplanır [15].

Tanım

Bir diferansiyel denklemde aranan fonksiyon tek bir bağımsız değişken içeriyorsa denkleme adi diferansiyel denklem denir. Bir adi diferansiyel denklem x bağımsız değişken, y bağımlı değişken ve y'nin x'e göre n. türevi $y^{(n)}$ olmak üzere

$$(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

şeklinde yazılabilir [15].

Tanım

Bir diferansiyel denklemdeki bağımlı değişkenin, iki veya daha fazla bağımsız değişkenin fonksiyonu olması ve bu bağımlı değişkenin bağımsız değişkenlere göre çeşitli mertebeden kısmi türevlerini içermesi durumunda bu tür diferansiyel denklemlere kısmi diferansiyel denklemler denir. Bir kısmi diferansiyel denklemde x ve y bağımsız değişkenler ve u bağımlı değişken olmak üzere

$$(x, y, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, \dots) = 0$$

şeklinde yazılabilir [15].

Tanım

Eğer bir diferansiyel denklem, bağımlı değişken ve onun kısmi türevleri birinci dereceden ve katsayıları sabit ya da bağımsız değişkenlerin fonksiyonu ise bu denkleme lineer denklem denir. Bir diferansiyel denklem lineer değilse lineer olmayan (non-linear) diferansiyel denklem denir [16].

Tanım

Kısmi diferansiyel denklemde içerisinde yer alan bağımlı değişkenlerden en yüksek kısmi türevlenme sayısı, denklemin mertebesini ve en yüksek kısmi türevin kuvveti denklemin derecesini verir. İkinci mertebeden bir bağımlı ve iki bağımsız değişkeni olan lineer kısmi diferansiyel denklem genel olarak

$$A(x, y)z_{xx} + B(x, y)z_{xy} + C(x, y)z_{yy} + D(x, y)z_x + E(x, y)z_y + F(x, y)z = G(x, y)$$

şeklinde gösterilebilir.

Bir kısmi diferansiyel denklemde en yüksek mertebeden terimlerin dereceleri bir ve bu terimler denklemde çarpım halinde bulunmuyor ise (denklemdeki diğer düşük mertebeden terimlerin ve bağımlı değişkenlerin bulunuş şeklinden bağımsız olarak) bu denkleme yarı (semi) lineerdir denir.

Tanım

Lineer olmayan bir adi diferansiyel denklemde en yüksek mertebeden lineer olan terim $\frac{d^k u}{dx^k}$ ve en yüksek mertebeden lineer olmayan terimi $u^p\left(\frac{d^q u}{dx^q}\right)^s$ ile verilsin. N dengeleme sayısı olmak üzere N+k=Np+s(N+q) eşitliği yazılabilir.

2
(4+1)-BOYUTLU FOKAS DENKLEMİ

(4+1)-boyutlu lineer olmayan Fokas denklemi şu şekildedir:

$$4u_{tx} - u_{xxxy} + u_{xyyy} + 12u_x u_y + 12uu_{xy} - 6u_{zw} = 0 \tag{2.1}$$

Burada u dalga fonksiyonunu, t zamansal değişkeni, x, y, z ve w ise uzaysal değişkenleri temsil eder. Fokas denklemi akışkanlar dinamiği, okyanus mühendisliği ve diğer bilim alanlarında önemli bir rol oynar. Değişen fiziksel koşullara sahip nehir ve kanallardaki elastik ve elastik olmayan etkileşimler, iç veya yüzey dalgaları Fokas denklemi kullanılarak modellenmektedir. Bu denklem yakın zamanda Fokas tarafından entegre edilebilir Kadomtsev–Petviashvili (KP) ve Davey–Stewartson (DS) denklemlerinin Lax çiftlerinin bazı daha yüksek boyutlu lineer olmayan dalga denklemlerine genişletilmesiyle türetilmiştir. Lineer olmayan dalga teorisindeki Kadomtsev–Petviashvili (KP) ve Davey–Stewartson (DS) lineer olmayan denklemleri, sırasıyla sudaki veya derin ve daha geniş su kanallarındaki yüzey dalgalarını ve iç dalgaları temsil etmek için kullanılır. Kadomtsev–Petviashvili (KP) ve Davey–Stewartson (DS) denklemlerinin fiziksel uygulamaları Fokas denkleminin önemini göstermektedir [17]. Fokas denkleminin fiziği, zorunlu olarak KP ve DS denklemlerinin fiziksel doğasından kaynaklanmaktadır. (4+1)-boyutlu lineer olmayan Fokas denkleminin önemli uygulamaları, matematiksel fizikte daha yüksek boyutlu integrallenebilir bir model olarak kabul edildiği gerçek dünya problemlerinde bulunmaktadır. Bu sebepten (4+1)-boyutlu Fokas denkleminin kesin çözümlerini aramak önemlidir [18].

2.1 Fokas Denkleminin Kesin Çözümleri için Uygulanan Yöntemlerden Bazıları

2.1.1 Geliştirilmiş F-Açılım Yöntemi

Bir kısmi diferansiyel denklem

$$\mathrm{G}(u, u_t, u_x, u_y, u_z, u_w, u_{tt}, u_{xx}, u_{yy}, u_{zz}, u_{ww}, \dots) = 0 \tag{2.2}$$

olsun. Burada u, (x, y, z, w) uzay değişkenleri ve t zaman değişkenin bir fonksiyonudur, G, u ve türevlerinin bir polinom fonksiyonudur. (2.2) kısmi diferansiyel denklemi, seyahat eden dalga (traveling wave) dönüşümü kullanılarak adi diferansiyel denkleme dönüştürülebilir:

$$u(x, y, z, t, w) = U(\xi)\,, \;\; \xi = \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z + \rho w + \nu t + \varepsilon \tag{2.3}$$

burada $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \rho$ dalga boylarıdır ve v frekanstır. (2.3) dönüşümü kullanılarak, denklem (2.2),

$$P(U, U', U'', U''', \dots)=0 \tag{2.4}$$

şeklinde adi diferansiyel denkleme (ADD) indirgenir. Burada $(')$, U nun ξ ye göre türevini gösterir ve P, $U(\xi)$'nin bir polinomudur.

Yöntemin adımları aşağıda verilmektedir [19]:

Adım 1: Denklem (2.4)'ün çözümünün şu şekilde olduğu varsayılır:

$$U(\xi) = \sum_{i=-N}^{N} A_i \big(b + F(\xi)\big)^i \tag{2.5}$$

$F(\xi)$, aşağıda verilen yeni ansatz denklemini sağlar:

$$F'(\xi) = d_0 + d_1 F(\xi) + d_2 F^2(\xi) + d_3 F^3(\xi)\,. \tag{2.6}$$

Burada $d_0, d_1, d_2\ ve\ d_3$ keyfi sabitlerdir.

Adım 2: (2.5) denklemindeki $N(> 0)$, homojen denge ilkesinden (en yüksek mertebeden türev terimi ile en yüksek mertebeden lineer olmayan terim arasındaki homojen dengesinden) yararlanılarak elde edilir. $A_{-N}, A_{-N+1}, \dots, A_0, A_1, \dots, A_N$ seri katsayıları ile $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \rho, v$ daha sonra belirlenecek parametrelerdir.

Adım 3: Denklem (2.5)'i Denklem (2.6) ile birlikte Denklem (2.4)'te yerine yazılarak ve $\frac{F^i(\xi)}{(b+F(\xi))^j}$ nin farklı kuvvetlerinin katsayılarını sıfıra eşitleyerek, cebirsel bir denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemi, Mathematica yazılımı yardımıyla çözülerek parametre değerleri elde edilebilir.

Adım 4: Adım 3'te elde edilen parametre değerleri Denklem (2.5)'de yerine koyularak Denklem (2.4)'ün çözümü elde edilmiş olur.

(2.1) Fokas denkleminde Denklem (2.3)'de verilen dalga dönüşümü yapılıp ardından iki kere integrasyondan sonra

$$\alpha_1\alpha_2(\alpha_2^2-\alpha_1^2)U''+(4\alpha_1 v-6\alpha_3\rho)U+6\alpha_1\alpha_2U^2=0 \tag{2.7}$$

adi diferansiyel denklemi elde edilir.

Yöntemin adımlarının Fokas denklemine uygulanışı aşağıdaki gibidir:

Burada dalga çözümleri, geliştirilmiş F-açılım yöntemi kullanılarak oluşturulmuştur. Denklem (2.7)'de homojen denge ilkesini uygulayarak, denklem (2.7)'nin çözümünün

$$U(\xi)=\frac{A_{-2}}{\left(b+F(\xi)\right)^2}+\frac{A_{-1}}{b+F(\xi)}+A_0+A_1\left(b+F(\xi)\right)+A_2\left(b+F(\xi)\right)^2 \tag{2.8}$$

şeklinde olduğu varsayılır.

Denklem (2.8)'i Denklem (2.6) ile birlikte Denklem (2.7)'de yerine koyarak ve $\frac{F^i(\xi)}{\left(b+F(\xi)\right)^j}$ nin farklı kuvvetlerinin katsayılarını sıfıra eşitleyerek, A_{-2},A_{-1},A_0, A_1, $A_2,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\rho,v,b$ ve ε parametrelerinde bir denklem sistemi elde edilir. Bu cebirsel denklem sistemi Mathematica kullanılarak çözülür ve elde edilen çözüm ailelerinden biri aşağıda verilmiştir

Aile 1 için:

$d_0=d_3=0,$

$A_{-2}=0\,,\quad A_{-1}=0,\quad A_0=(\alpha_1^2-\alpha_2^2)bd_2(bd_2-d_1),$

$$A_1=(\alpha_1^2-\alpha_2^2)d_2(d_1-2bd_2), \tag{2.9}$$

$A_2=(\alpha_1^2-\alpha_2^2)d_2^2\,,\quad \rho=\frac{\alpha_1\left((\alpha_2^3-\alpha_1^2\alpha_2)\,d_1^2+4v\right)}{6\alpha_3}.$

$A_{-2}=0,\quad A_{-1}=0,\quad A_0=\frac{(\alpha_1^2-\alpha_2^2)(6b^2\,d_2^2-6b\,d_2\,d_1+d_1^2)}{6},$

$$A_1 = (\alpha_1^2 - \alpha_2^2)d_2(d_1 - 2bd_2), \tag{2.10}$$

$$A_2 = (\alpha_1^2 - \alpha_2^2)d_2^2 , \quad \rho = \frac{\alpha_1(\alpha_2(\alpha_1^2-\alpha_2^2)\,d_1^2+4v)}{6\alpha_3} .$$

Denklem (2.1)’in aşağıdaki kesin çözümleri, çözüm kümesi (2.9)’dan

$$u_{11}(x,y,z,w,t) = \frac{(\alpha_1^2-\alpha_2^2)\,d_1^2\,d_2 e^{d_1(\xi+\xi_0)}}{\left(d_2 e^{d_1(\xi+\xi_0)}-1\right)^2} \;,\; d_1 > 0 \tag{2.11}$$

$$u_{12}(x,y,z,w,t) = -\frac{(\alpha_1^2-\alpha_2^2)\,d_1^2\,d_2 e^{d_1(\xi+\xi_0)}}{\left(d_2 e^{d_1(\xi+\xi_0)}+1\right)^2} \;,\; d_1 < 0 \tag{2.12}$$

şeklinde oluşturulur.

Ayrıca, çözüm kümesi (2.10)’dan Denklem (2.1)’in kesin çözümleri de şu şekilde oluşturulur:

$$u_{13}(x,y,z,w,t) = \frac{(\alpha_1^2-\alpha_2^2)\,d_1^2\left(d_2 e^{d_1(\xi+\xi_0)}\left(d_2 e^{d_1(\xi+\xi_0)}+4\right)+1\right)}{6\left(d_2 e^{d_1(\xi+\xi_0)}-1\right)^2} \;,\; d_1 > 0 \tag{2.13}$$

$$u_{14}(x,y,z,w,t) = \frac{(\alpha_1^2-\alpha_2^2)\,d_1^2\left(d_2 e^{d_1(\xi+\xi_0)}\left(d_2 e^{d_1(\xi+\xi_0)}-4\right)+1\right)}{6\left(d_2 e^{d_1(\xi+\xi_0)}+1\right)^2} \;,\; d_1 < 0 \tag{2.14}$$

Diğer çözümler için [19] incelenebilir.

2.1.2 Genelleştirilmiş exp($-\phi(\xi)$)-Açılım Yöntemi

Yöntemin adımları aşağıda verilmektedir [19]:

Adım 1: Adi diferansiyel denklem (2.4)’ün çözümünün aşağıdaki gibi olduğu varsayılır:

$$\psi(\xi) = \sum_{i=0}^{N} A_i\left(exp\left(-\phi(\xi)\right)\right)^i \tag{2.15}$$

burada $A_i \ (0 \le i \le N)$, $A_N \neq 0$ hesaplamamız gereken gerçel sabitlerdir ve $\phi \neq \phi(\xi)$,

$$\phi'(\xi) = a\,exp\left(-\phi(\xi)\right) + b\,exp\left(\phi(\xi)\right) + c \tag{2.16}$$

yardımcı adi diferansiyel denklemi sağlar. Burada a , b ve c sabitlerdir.

Adım 2: $N(> 0)$, Denklem (2.4)’ün en yüksek mertebeden türev terimi ile lineer olmayan terim arasındaki homojen denge kullanılarak hesaplanabilir.

Adım 3: Denklem (2.5) ve (2.6)'yı Denklem (2.4)'te yerine yazılarak $e^{(-\phi(\xi))}$ ye göre bir polinom elde edilir. $\left(e^{(-\phi(\xi))}\right)^{j}$ nin farklı kuvvetlerinin katsayıları sıfıra eşitlenerek cebirsel denklemler elde edilir. Bu denklem sistemi Mathematica yardımıyla çözülerek parametrelerin değerleri elde edilir.

Adım 4: Adım 3'te elde edilen parametre değerleri Denklem (2.5)'te yerine yazılarak, Denklem (2.4)'ün çözümü elde edilebilir.

Fokas denklemine uygulanması

(2.1) Fokas denkleminde Denklem (2.3)'de verilen dalga dönüşümü yapılıp ardından iki kere integrasyondan sonra

$$\alpha_1\alpha_2(\alpha_2^2-\alpha_1^2)U''+(4\alpha_1 v-6\alpha_3\rho)U+6\alpha_1\alpha_2U^2=0 \tag{2.17}$$

adi diferansiyel denklemi elde edilir.

Denklem (2.17)'de homojen denge ilkesini uygulayarak Denklem (2.71)'nin çözümünün

$$U(\xi)=A_0+A_1\,exp(-\emptyset\,(\xi))+A_2\left(exp\left(-\phi(\xi)\right)\right)^2 \tag{2.18}$$

olduğu varsayılır.

Denklem (2.18) ve Denklem (2.16)'yı Denklem (2.17)'de yerine koyarak ve $\left(\mathrm{e}^{(-\phi(\xi))}\right)^{\mathrm{i}}$ katsayıları sıfıra eşitlenerek $A_0\,,A_0\,,A_0\,,a\,,ab\,,c\,,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\rho,v$ ve ε parametrelerini içeren cebirsel denklemler elde edilir. Elde edilen denklem sistemi Mathematica yardımıyla çözülür ve çözüm aileleri elde edilir. Bu çözüm ailelerinden biri aşağıda verilmektedir:

$$A_0=ab(\alpha_1^2-\alpha_2^2)\quad,\quad A_1=ac(\alpha_1^2-\alpha_2^2)\,,$$
$$A_2=a^2(a_1^2-\alpha_2^2)\quad,\quad v=\frac{\alpha_2(\alpha_1\alpha_2^2-\alpha_1^3)(4ab-c^2)+6\alpha_3\rho}{4\alpha_1}\,.$$

Yukarıdaki çözümden, Denklem (2.1)'in aşağıdaki soliton çözümleri şu şekilde oluşturulur:

Tip 1: $a=1,\ b\neq 0,\ c^2-4b>0$ için;

$$u_1(\xi)=\frac{ab(\alpha_1^2-\alpha_2^2)\,sech^2\left(\frac{\sqrt{c^2-4b}}{2}(\xi+\xi_0)\right)(2(a-1)b\cosh\left(\sqrt{c^2-4b}(\xi+\xi_0)\right)+2(a+1)b-c^2)}{\left(\sqrt{c^2-4b}\tanh\left(\frac{\sqrt{c^2-4b}}{2}(\xi+\xi_0)\right)+c\right)^2}$$

Tip 2: $a=1,\ b\neq 0,\ c^2-4b<0$ için;

$$u_2(\xi)=\frac{ab(\alpha_1^2-\alpha_2^2)\,sech^2\left(\frac{\sqrt{4b-c^2}}{2}(\xi+\xi_0)\right)(2(a-1)b\cos\left(\sqrt{4b-c^2}(\xi+\xi_0)\right)+2(a+1)b-c^2)}{\left(c-\sqrt{4b-c^2}\tan\left(\frac{\sqrt{4b-c^2}}{2}(\xi+\xi_0)\right)+c\right)^2}$$

Tip 3: $a=1,\ b=0,\ c\neq 0,\ c^2-4b>0$ için;

$$u_3(\xi)=\frac{a(\alpha_1^2-\alpha_2^2)\left(c^2(a+e^{c(\xi+\xi_0)}-1)+b(e^{c(\xi+\xi_0)}-1)\right)^2}{\left(e^{c(\xi+\xi_0)}-1\right)^2}$$

Tip 4: $a=1,\ b\neq 0,\ c\neq 0,\ c^2-4b=0$ için;

$$u_4(\xi)=a(\alpha_1^2-\alpha_2^2)\left(\frac{ac^4(\xi+\xi_0)^2}{(2c(\xi+\xi_0)+2)^2}+b-\frac{c^3(\xi+\xi_0)}{2c(\xi+\xi_0)+2}\right)$$

Tip 5: $c=0,\ a>0,\ b>0$ için;

$$u_5(\xi)=\frac{(\alpha_1^2-\alpha_2^2)b}{2}\sqrt{\frac{a}{b}}csc^2\left(\sqrt{ab}(\xi+\xi_0)\right)\left(csin\left(2\sqrt{ab}(\xi+\xi_0)\right)+2b\sqrt{\frac{a}{b}}\right)$$

Tip 6: $c=0,\ a<0,\ b<0$ için;

$$u_6(\xi)=\frac{(\alpha_1^2-\alpha_2^2)b}{2}\sqrt{\frac{a}{b}}csc^2\left(\sqrt{ab}(\xi+\xi_0)\right)\left(2b\sqrt{\frac{a}{b}}-csin\left(2\sqrt{ab}(\xi+\xi_0)\right)\right)$$

Tip 7: $c=0,\ a>0,\ b<0$ için;

$$u_7(\xi)=\frac{(\alpha_1^2-\alpha_2^2)\sqrt{-ab}}{2}csch^2\left(\sqrt{-ab}(\xi+\xi_0)\right)\left(csin\left(2\sqrt{-ab}(\xi+\xi_0)\right)-2b\sqrt{-\frac{a}{b}}\right)$$

Tip 8: $c=0,\ a<0,\ b>0$ için;

$$u_8(\xi)=\frac{(\alpha_1^2-\alpha_2^2)\sqrt{-ab}}{2}csch^2\left(\sqrt{-ab}(\xi+\xi_0)\right)\left(csin\left(2\sqrt{-ab}(\xi+\xi_0)\right)+2b\sqrt{-\frac{a}{b}}\right)$$

Tip 9: $b=0,\ c=0$ için;

$$u_9(\xi) = (\alpha_1^2 - \alpha_2^2)\left(ab + \frac{c(\xi+\xi_0)+1}{(\xi+\xi_0)^2}\right).$$

2.1.3 Genişletilmiş F-Açılım Yöntemi

F-açılım yöntemine dayanarak, genişletilmiş F-açılım yönteminin adımları aşağıda verilmiştir [20]:

Adım 1:

$$F(u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, \dots) = 0 \tag{2.19}$$

şeklinde lineer olmayan kısmi diferansiyel denklem (KDD) ele alalım.

$u(x, t) = U(\xi)$, $\xi = x - ct$

dönüşümü kullanılarak denklem (2.19)

$$F(U, U', U'', \dots) = 0 \tag{2.20}$$

şeklinde lineer olmayan adi diferansiyel denklem (ADD) olarak yeniden yazılabilir. Burada $(')$, ξ ye göre türevi ifade etmektedir.

Adım 2: Denklem (2.20) ADD'nin çözümünün

$$U(\xi) = A_0 + \sum_{i=1}^{N}\left(A_iF^i(\xi) + B_iF^{-i}(\xi)\right) \tag{2.21}$$

veya

$$U(\xi) = A_0 + \sum_{i=1}^{N}\left(A_iF^i(\xi) + B_iF^{i-1}(\xi)F'(\xi)\right) \tag{2.22}$$

şeklinde yazıldığı varsayılır. Burada A_i, B_i (i = 1, 2, . . ., n) daha sonra belirlenecek sabitlerdir, N homojen denge ilkesiyle elde edilen pozitif bir tam sayıdır ve $F(\xi)$ aşağıdaki denklemi sağlar,

$$\left(F'(\xi)\right)^2 = h_0 + h_1F(\xi) + h_2F^2(\xi) + h_3F^3(\xi) + h_4F^4(\xi) \tag{2.23}$$

burada h_0, h_1, h_2, h_3, h_4 sabitlerdir.

Adım 3: Denklem (2.21) veya denklem (2.22), denklem (2.23) ile birlikte denklem (2.20)'de yerine yazılır ve ardından elde edilen sistemin $F^j(\xi)F'^k(\xi)$ nın $(j =$

$1, 2, \dots, \; k = 0{,}1)$ tüm katsayılarını sıfıra eşitleyerek $A_0, A_i, B_i \; (i = 1, 2, \dots, N)$ için lineer olmayan cebirsel denklemler elde edilir.

Adım 4: Adım 3'teki cebirsel denklem sistemi çözülerek $A_0, A_i, B_i \; (i = 1{,}2, \dots, N)$ sabitleri elde edilir ve daha sonra bu sabitleri ve h_0, h_1, h_2, h_3 ve h_4 için seçilen özel koşullara bağlı olarak denklem (2.23)'ün çözümleri, denklem (2.21) (veya denklem (2.22))'de yerine yazılarak denklem (2.19)'un çözümleri hemen elde edilebilir**.**

Yöntemin Fokas denklemine uygulanması:

Fokas denkleminde

$u(x, y, z, t, w) = \phi(\xi)$, $\xi = \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta w + \varepsilon t$

dönüşümü yapılarak

$$(\alpha\beta^3 - \alpha^3\beta)\phi^{(4)} + (4\alpha\epsilon - 6\gamma\delta)\phi'' + 12\alpha\beta(\phi')^2 + 12\alpha\beta\phi\phi'' = 0 \qquad (2.24)$$

şeklinde ADD'e indirgenir. Burada α, β, γ, δ ve ε sıfır olmayan sabitlerdir. Denklem (2.24)'te $\phi^{(4)}$ ve $(\phi')^2$ arasındaki homojen dengeleme ilkesinden n + 4 = $2n$ + 2 elde edilir ve buradan n=2 bulunur.

Denklem (2.24)'ün

$$\phi(\xi) = A_0 + A_1F(\xi) + A_2F^2(\xi) + \frac{B_1}{F(\xi)} + \frac{B_2}{F^2(\xi)} \qquad (2.25)$$

şeklinde çözümlere sahip olduğu varsayılır. Denklem (2.25) ve denklem (2.23), denklem (2.24)'de yerine yazılarak ve daha sonra ortaya çıkan sistemin F^k nın (k = −6, . . . , 6) tüm katsayıları sıfıra eşitlenerek aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

h_1 = h_3 = 0 olduğunda, genel eliptik denklem (2.23)

$$F'(\xi)^2 = h_0 + h_2F^2(\xi) + h_4F^4(\xi) \qquad (2.26)$$

denkleme indirgenir. Denklem (2.26)'nın çözümleri Tablo 2.1'de verilmiştir.

Bu durumda, aşağıdaki çözümler kümesi elde edilir:

$A_1 = A_2 = B_1 = 0$, $B_2 = h_0(\alpha^2 - \beta^2)$,

$\epsilon = \frac{-2\alpha\beta^3 h_2 + 3\gamma\delta - 6\alpha\beta A_0 + 2\alpha^3\beta h_2}{2\alpha}$.

$A_1 = B_1 = B_2 = 0$, $A_2 = h_4(\alpha^2 - \beta^2)$,

$\epsilon = \frac{-2\alpha\beta^3 h_2 + 3\gamma\delta - 6\alpha\beta A_0 + 2\alpha^3\beta h_2}{2\alpha}$.

$A_1 = B_1 = 0$, $A_2 = h_4(\alpha^2 - \beta^2)$, $B_2 = h_0(\alpha^2 - \beta^2)$,

$\epsilon = \frac{-2\alpha\beta^3 h_2 + 3\gamma\delta - 6\alpha\beta A_0 + 2\alpha^3\beta h_2}{2\alpha}$. (2.27)

Burada A_0, h_0, h_2 ve h_4 keyfi sabitlerdir ve α, β, γ ve δ sıfırdan farklı sabitlerdir.

Tablo 2.1 $F'(\xi)^2 = h_0 + h_2F^2(\xi) + h_4F^4(\xi)$ Denkleminin (ξ) Çözümleri

Durum	h_0	h_2	h_4	$F(\xi)$
1	1	-(m^2+1)	m^2	$sn(\xi)$ veya $cd(\xi)$
2	$1-m^2$	$2m^2-1$	-m^2	$cn(\xi)$
3	m^2-1	$2-m^2$	-1	$dn(\xi)$
4	m^2	-(m^2+1)	1	$ns(\xi)$ veya $dc(\xi)$
5	-m^2	$2m^2-1$	$1-m^2$	$nc(\xi)$
6	-1	$2-m^2$	m^2-1	$nd(\xi)$
7	1	$2-m^2$	$1-m^2$	$sc(\xi)$
8	1	$2m^2-1$	-$m^2(1-m^2)$	$sd(\xi)$
9	$1-m^2$	$2-m^2$	1	$cs(\xi)$
10	-$m^2(1-m^2)$	$2m^2-1$	1	$ds(\xi)$
11	$\frac{1}{4}$	$\frac{1-2m^2}{2}$	$\frac{1}{4}$	$ns(\xi) \pm cs(\xi)$
12	$\frac{1-m^2}{4}$	$\frac{1+m^2}{2}$	$\frac{1-m^2}{4}$	$nc(\xi) \pm sc(\xi)$
13	$\frac{m^2}{4}$	$\frac{m^2-2}{2}$	$\frac{1}{4}$	$ns(\xi) \pm ds(\xi)$
14	$\frac{m^2}{4}$	$\frac{m^2-2}{2}$	$\frac{m^2}{4}$	$sn(\xi) \pm icn(\xi)$

Tablo 2.1'de bulunan

$sn(\xi) = sn(\xi, m)$, $cd(\xi) = cd(\xi, m)$, $cn(\xi) = cn(\xi, m)$, $dn(\xi) = dn(\xi, m)$,

$ns(\xi) = ns(\xi, m)$, $cs(\xi) = cs(\xi, m)$, $ds(\xi) = ds(\xi, m)$, $sc(\xi) = sc(\xi, m)$,

$sd(\xi) = sd(\xi, m)$ fonksiyonları $0 < m < 1$ modüllü Jacobi eliptik fonksiyonlardır.

Bu fonksiyonlar $m \to 1$ iken hiperbolik fonksiyonlara dönüşürler:

$sn(\xi, 1) = tanh(\xi)$, $cn(\xi, 1) = sech(\xi)$, $dn(\xi, 1) = sech(\xi)$,
$ns(\xi, 1) = coth(\xi)$, $cs(\xi, 1) = csch(\xi)$, $ds(\xi, 1) = csch(\xi)$,
$sc(\xi, 1) = sinh(\xi)$, $sd(\xi, 1) = sinh(\xi)$, $nc(\xi, 1) = cosh(\xi)$,
$cd(\xi, 1) = 1$, $nd(\xi, 1) = cosh(\xi)$,

ve $m \to 0$ iken trigonometrik fonksiyonlara dönüşürler:

$sn(\xi, 0) = sin(\xi)$, $cn(\xi, 0) = cos(\xi)$, $dn(\xi, 0) = 1$, $ns(\xi, 0) = csc(\xi)$,
$cs(\xi, 0) = cot(\xi)$, $ds(\xi, 0) = csc(\xi)$, $sc(\xi, 0) = tan(\xi)$,
$sd(\xi, 0) = sin(\xi)$, $nc(\xi, 0) = sec(\xi)$, $cd(\xi, 0) = cos(\xi)$, $nd(\xi, 0) = 1$.

Denklem (2.27), sırasıyla denklem (2.25)'de yazılarak denklem (2.1)'in formal çözümleri elde edilir:

$$u(x, y, z, w, t) = A_0 + \frac{h_0(\alpha^2 - \beta^2)}{F^2(\xi)} \, , \tag{2.28}$$

$$u(x, y, z, w, t) = A_0 + h_4(\alpha^2 - \beta^2)F^2(\xi) \, , \tag{2.29}$$

$$u(x, y, z, w, t) = A_0 + h_4(\alpha^2 - \beta^2)F^2(\xi) + \frac{h_0(\alpha^2 - \beta^2)}{F^2(\xi)} \, . \tag{2.30}$$

Burada $\xi = \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta w + \varepsilon t$ dır ve $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ve ε denklem (2.27)'de belirlenir.

Denklem (2.28), (2.29) ve (2.30) dan Tablo 2.1'deki çözümler dikkate alınarak (2.1) Fokas denkleminin birçok kesin çözümü elde edilebilir.

Tablo 2.1'in 1.satırını kullanarak Fokas denkleminin çözümünü bulalım. Diğer satırlar için benzer şekilde çözümler bulunabilir.

$h_0 = 1$, $h_2 = -(m^2 + 1)$, $h_4 = m^2$ olduğunda denklem (2.26)'nın çözümü,

$F(\xi) = sn(\xi)$ veya $F(\xi) = cd(\xi)$

dir. Bunlar, denklem (2.28)-(2.30)'da yerlerine yazılarak (2.1) Fokas denkleminin Jacobi Eliptik fonksiyon çözümleri elde edilebilir:

Denklem (2.28)'den,

$$u(x,y,z,\omega,t) = A_0 + \frac{(\alpha^2-\beta^2)}{sn^2(\xi,m)} = A_0 + (\alpha^2-\beta^2)ns^2(\xi,m)\ , \tag{2.31}$$

veya

$$u(x,y,z,\omega,t) = A_0 + \frac{(\alpha^2-\beta^2)}{cd^2(\xi,m)} = A_0 + (\alpha^2-\beta^2)dc^2(\xi,m) \tag{2.32}$$

çözümleri elde edilir. Burada

$\xi = \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta w + ((2\alpha\beta^3\ (m^2+1) + 3\gamma\delta - 6\alpha\beta A_0 + 2\alpha^3\beta(-m^2-1))\ /2\alpha)t$

dir.

$m \rightarrow 1$ için; sn$(\xi, m) \rightarrow$ tanh(ξ) olduğundan, çözüm (2.31)

$$u(x,y,z,\omega,t) = A_0 + \frac{(\alpha^2-\beta^2)}{tanh^2(\xi)} = A_0 + (\alpha^2-\beta^2)coth^2(\xi) \tag{2.33}$$

olur. Burada

$\xi = \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta w + ((4\alpha\beta^3 + 3\gamma\delta - 6\alpha\beta A_0 - 4\alpha^3\beta)/2\alpha)t$

dir.

$m \rightarrow 0$ için; dc$(\xi, m) \rightarrow sec(\xi)$ olduğundan, çözüm (2.32)

$$u(x,y,z,\omega,t) = A_0 + \frac{(\alpha^2-\beta^2)}{cos^2(\xi)} = A_0 + (\alpha^2-\beta^2)sec^2(\xi) \tag{2.34}$$

olur. Burada

$\xi = \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta w + ((2\alpha\beta^3 + 3\gamma\delta - 6\alpha\beta)\ A_0 - 2\alpha^3\beta)/2\alpha)t$

dir.

Denklem (2.29)'dan,

$$u(x,y,z,w,t) = A_0 + m^2(\alpha^2-\beta^2)sn^2(\xi,m), \tag{2.35}$$

veya

$$u(x,y,z,w,t) = A_0 + m^2(\alpha^2-\beta^2)cd^2(\xi,m) \tag{2.36}$$

çözümleri elde edilir. Burada

$\xi = \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta w + ((2\alpha\beta^3\ (m^2 + 1) + 3\gamma\delta - 6\alpha\beta A_0 + 2\alpha^3\beta(-m^2 - 1))/2\alpha)t$

dir.

$m \to 1$ için; sn$(\xi, m) \to$ tanh(ξ) olduğundan, çözüm (2.35)

$$u(x, y, z, w, t) = A_0 + m^2(\alpha^2 - \beta^2)tanh^2(\xi) \tag{2.37}$$

olur. Burada

$\xi = \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta w + ((4\alpha\beta^3 + 3\gamma\delta - 6\alpha\beta A_0 - 4\alpha^3\beta)/2\alpha)t$

dir.

Denklem (2.30)'dan,

$$u(x, y, z, \omega, t) = A_0 + \frac{(\alpha^2 - \beta^2)}{sn^2(\xi, m)} + m^2(\alpha^2 - \beta^2)sn^2(\xi, m) \tag{2.38}$$

veya

$$u(x, y, z, \omega, t) = A_0 + \frac{(\alpha^2 - \beta^2)}{cd^2(\xi, m)} + m^2(\alpha^2 - \beta^2)cd^2(\xi, m) \tag{2.39}$$

$m \to 1$ için; sn$(\xi, m) \to$ tanh(ξ) olduğundan, çözüm (2.38)

$$u(x, y, z, \omega, t) = A_0 + (\alpha^2 - \beta^2)\coth^2(\xi) + (\alpha^2 - \beta^2)\tanh^2(\xi) \tag{2.40}$$

olur. Burada

$\xi = \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta w + ((4\alpha\beta^3 + 3\gamma\delta - 6\alpha\beta A_0 - 4\alpha^3\beta)/2\alpha)t$

dir.

$m \to 0$ için; cd$(\xi, m) \to$ cos(ξ) olduğundan (2.39) çözümü, (2.34) çözümü ile aynı olur.

3
ϕ^6-MODEL AÇILIM YÖNTEMİ

3.1 ϕ^6-Model Açılım Yönteminin Teorik Adımları

Kısmi diferansiyel denklem

$$F(u, u_t, u_x, u_y, u_z, u_{xx}, u_{yy}, u_{zz}, \dots) = 0 \tag{3.1}$$

şeklinde olsun.

Burada u; x, y, z, t bağımsız değişkenlerinin bilinmeyen bir fonksiyonudur. F, $u = u(x, y, z, t)$ ve onun en yüksek mertebeli kısmi türevlerin ve lineer olmayan terimlerin yer aldığı bir polinomdur.

Yöntemin ana adımları şu şekildedir [21]:

Adım 1:

$u(x,t) = U(\xi)$ ve uygulanacak denkleme uygun ξ dalga dönüşümü kullanılarak kısmi diferansiyel denklem aşağıdaki formda adi diferansiyel denkleme dönüştürülür.

$$X(U, U', U'', \dots) = 0 \tag{3.2}$$

Adım 2:

Denklem (3.2)'nin çözümünün

$$U(\xi) = \frac{\alpha_0 + \sum_{k=1}^{2N} \alpha_k \theta(\xi)^k}{b_0 + \sum_{k=1}^{2N} b_k \theta(\xi)^k} \tag{3.3}$$

şeklinde olduğu varsayılır. Burada α_k ve β_k *(k=0,1, 2,...,2N)* daha sonra belirlenecek sabit parametrelerdir.

Denklem (3.3)'deki *N* değeri dengelenme ilkesi kullanılarak elde edilmektedir.

Adım 3:

Yöntemin yardımcı denklemleri

$$\theta'^2(\xi) = h_0 + h_2\theta^2(\xi) + h_4\theta^4(\xi) + h_6\theta^6(\xi) \ , \tag{3.4}$$

$$\theta''(\xi) = h_2\theta(\xi) + 2h_4\theta^3(\xi) + 3h_6\theta^5(\xi)$$

dir. Burada h_i $(i = 0, 2, ,4, 6)$, $h_6 \neq 0$ olacak şekilde gerçel sabitlerdir. Denklem (3.4) ve (3.3) birlikte denklem (3.2)'de yerine yazılırsa $\theta(\xi)$ nin kuvvetlerine göre sonlu bir seri elde edilir. Aynı kuvvetli $\theta(\xi)$ nin katsayıları sıfıra eşitlenerek cebirsel denklemler elde edilir. Elde edilen bu cebirsel denklem sistemi Matlab yardımıyla çözülür.

Adım 4:

Denklem (3.4)'ün aşağıdaki çözüme sahip olduğu iyi bilinmektedir [21]:

$$\theta(\xi) = \frac{\phi(\xi)}{\sqrt{f\phi^2(\xi)+g}} \ . \tag{3.5}$$

Burada $f\phi^2(\xi) + g > 0$ dır ve $\phi(\xi)$,

$$\phi'^2(\xi) = l_0 + l_2\phi^2(\xi) + l_4\phi^4(\xi) \tag{3.6}$$

eliptik denklemin çözümünü ifade etmektedir ve l_j $(j = 0, 2, 4)$ gerçel sabitlerdir.

Ayrıca denklem (3.5)'de bulunan f ve g

$$h_2^4(l_2 - h_2)[9l_0l_4 - (l_2 - h_2)(2l_2 + h_2)] + 3h_6[3l_0l_4 - (l_2^2 - h_2^2)]^2 = 0 \tag{3.7}$$

kısıtlama koşulu altında

$$f = \frac{h_4(l_2-h_2)}{(l_2-h_2)^2+3l_0l_4-2l_2(l_2-h_2)} \ ,$$

$$g = \frac{3h_4l_0}{(l_2-h_2)^2+3l_0l_4-2l_2(l_2-h_2)}$$

şeklinde olan sabitlerdir.

Adım 5:

Denklem (3.6)'nın çözümlerinin denklem (3.5)'te yerine yazılması ve ardından denklem (3.5)'in denklem (3.3)'te yerine yazılmasıyla denklem (3.1)'in kesin çözümleri elde edilmiş olur.

Denklem (3.6)'nın Jacobi Eliptik Fonksiyon Çözümleri Tablo 3.1'de verilmektedir.

Tablo 3.1 Denklem (3.6)'nın Jacobi Eliptik Çözümleri

Durum	l_0	l_2	l_4	$\theta(\xi)$
1	1	-(m^2+1)	m^2	$sn(\xi)$ veya $cd(\xi)$
2	$1-m^2$	$2m^2-1$	-m^2	$cn(\xi)$
3	m^2-1	$2-m^2$	-1	$dn(\xi)$
4	m^2	-(m^2+1)	1	$ns(\xi)$ veya $dc(\xi)$
5	-m^2	$2m^2-1$	$1-m^2$	$nc(\xi)$
6	-1	$2-m^2$	m^2-1	$nd(\xi)$
7	1	$2-m^2$	$1-m^2$	$sc(\xi)$
8	1	$2m^2-1$	-$m^2(1-m^2)$	$sd(\xi)$
9	$1-m^2$	$2-m^2$	1	$cs(\xi)$
10	-$m^2(1-m^2)$	$2m^2-1$	1	$ds(\xi)$
11	$\frac{1-m^2}{4}$	$\frac{1+m^2}{2}$	$\frac{1-m^2}{4}$	$nc(\xi)\pm sc(\xi)$ veya $\frac{cn(\xi)}{1\pm sn(\xi)}$
12	$\frac{-(1-m^2)^2}{4}$	$\frac{1+m^2}{2}$	-$\frac{1}{4}$	$cn(\xi)\pm dn(\xi)$
13	$\frac{1}{4}$	$\frac{1-2m^2}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{sn(\xi)}{1\pm cn(\xi)}$
14	$\frac{1}{4}$	$\frac{1+m^2}{2}$	$\frac{(1-m^2)^2}{4}$	$\frac{sn(\xi)}{cn(\xi)\pm dn(\xi)}$

Tablo 3.2 Jacobi Eliptik Fonksiyonları ve Limitleri

Fonksiyon	$m \to 1$	$m \to 0$	Fonksiyon	$m \to 1$	$m \to 0$
$sn(\xi, m)$	$tanh(\xi)$	$\sin(\xi)$	$ds(\xi, m)$	$csch(\xi)$	$\csc(\xi)$
$cs(\xi, m)$	$csch(\xi)$	$\cot(\xi)$	$cn(\xi, m)$	$sech(\xi)$	$\cos(\xi)$
$dn(\xi, m)$	$sech(\xi)$	1	$cd(\xi, m)$	1	$\cos(\xi)$
$nc(\xi, m)$	$cosh(\xi)$	$\sec(\xi)$	$ns(\xi, m)$	$coth(\xi)$	$\csc(\xi)$
$sc(\xi, m)$	$sinh(\xi)$	$tan(\xi)$	$sd(\xi, m)$	$sinh(\xi)$	$\sin(\xi)$
$nd(\xi, m)$	$cosh(\xi)$	1	$dc(\xi, m)$	1	$\sec(\xi)$

3.2 ϕ^6-Model Açılım Yönteminin Fokas Denklemine Uygulanması

(4+1)-boyutlu lineer olmayan Fokas denklemi

şeklindedir.

$$4u_{tx} - u_{xxxy} + u_{xyyy} + 12u_x u_y + 12uu_{xy} - 6u_{zw} = 0 . \tag{3.8}$$

Fokas denkleminde

$$u(x, y, z, t, \omega) = U(\xi) \ , \quad \xi = \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta\omega + \varepsilon t$$

dalga dönüşümü kullanılarak

$$(\alpha\beta^3 - \alpha^3\beta)U^{(4)} + (4\varepsilon\alpha - 6\gamma\delta)U'' + 12\alpha\beta(U')^2 + 12\alpha\beta UU'' = 0 \tag{3.9}$$

şeklinde adi diferansiyel denkleme dönüştürülür.

Bu adi diferansiyel denklemde iki kez integralleme yapılırsa

$$(\alpha\beta^3 - \alpha^3\beta)U'' + (4\varepsilon\alpha - 6\gamma\delta)U + 6\alpha\beta U^2 = 0 \tag{3.10}$$

denklemi elde edilir. Denklem (3.10)'dan dengelenme sayısı, homojen dengelenme ilkesinden yararlanarak, $U''\sim U^2$ terimleri kullanılarak

$$N + 2 = 2N$$

$N = 2$

olarak bulunur.

Bu dengelenme sayısı (3.3) denkleminde yerine yazılırsa

$$U(\xi) = \frac{\alpha_0 + \sum_{k=0}^{4} \alpha_k \theta^k(\xi)}{b_0 + \sum_{k=0}^{4} b_k \theta^k(\xi)} \tag{3.11}$$

olur. (3.11) denklemi

$$U(\xi) = \frac{\alpha_0+\alpha_1\theta(\xi)+\alpha_2\theta^2(\xi)+\alpha_3\theta^3(\xi)+\alpha_4\theta^4(\xi)}{b_0+b_1\theta(\xi)+b_2\theta^2(\xi)+b_3\theta^3(\xi)+b_4\theta^4(\xi)} \tag{3.12}$$

halini alır ve denklem (3.4) ile birlikte denklem (3.10)'da yerine yazılır. Böylece $\theta(\xi)$ nin kuvvetlerine göre sonlu bir seri elde edilmiş olur. Bu ifadede $\theta(\xi)$ nin aynı kuvvetlerinin katsayıları sıfıra eşitlenerek aşağıdaki denklemler oluşturulur:

θ^0: $6\alpha\beta^3 a_0^2 + 4\alpha\varepsilon\alpha_0 b_0 - 6\gamma\delta\alpha_0 b_0 - 2\alpha\beta^3\alpha_0 b_2 h_0 + 2\alpha\beta^3\alpha_2 b_0 h_0 + 2\alpha^3\beta\alpha_0 b_2 h_0 - 2\alpha^3\beta\alpha_2 b_0 h_0$;

θ^1: $-\alpha\beta^3\alpha_0 b_1 h_2 - 6\alpha\beta^3\alpha_0 b_3 h_0 + \alpha\beta^3\alpha_1 b_0 h_2 - 2\alpha\beta^3\alpha_1 b_2 h_0 + 2\alpha\beta^3\alpha_2 b_1 h_0 + 6\alpha\beta^3\alpha_3 b_0 h_0 + \alpha^3\beta\alpha_0 b_1 h_2 + 6\alpha^3\beta\alpha_0 b_3 h_0 - \alpha^3\beta\alpha_1 b_0 h_2 + 2\alpha^3\beta\alpha_1 b_2 h_0 - 2\alpha^3\alpha_2 b_1 h_0 - 6\alpha^3\beta\alpha_3 b_0 h_0 + 12\alpha\beta\alpha_0\alpha_1 + 4\alpha\varepsilon\alpha_0 b_1 + 4\alpha\varepsilon\alpha_1 b_0 - 6\gamma\delta\alpha_0 b_1 - 6\gamma\delta\alpha_1 b_0$;

θ^2: $-4\alpha\beta^3\alpha_0 b_2 h_2 - 12\alpha\beta^3\alpha_0 b_4 h_0 - 6\alpha\beta^3\alpha_1 b_3 h_0 + 4\alpha\beta^3\alpha_2 b_0 h_2 + 6\alpha\beta^3\alpha_3 b_1 h_0 + 12\alpha\beta^3\alpha_4 b_0 h_0 + 4\alpha^3\beta\alpha_0 b_2 h_2 + 12\alpha^3\beta\alpha_0 b_4 h_0 + 6\alpha^3\beta\alpha_1 b_3 h_0 - 4\alpha^3\beta\alpha_2 b_0 h_2 - 6\alpha^3\beta\alpha_3 b_1 h_0 - 12\alpha^3\beta\alpha_4 b_0 h_0 - 6\gamma\lambda\alpha_0 b_2 - 6\gamma\delta\alpha_1 b_1 - 6\gamma\delta\alpha_2 b_0 + 4\alpha\varepsilon\alpha_0 b_2 + 4\alpha\varepsilon\alpha_1 b_1 + 4\alpha\varepsilon\alpha_2 b_0 + 6\alpha\beta a_1^2 + 12\alpha\beta\alpha_0\alpha_2$;

θ^3: $-2\alpha\beta^3\alpha_0 b_1 h_4 - 9\alpha\beta^3\alpha_0 b_3 h_2 + 2\alpha\beta^3\alpha_1 b_0 h_4 - 3\alpha\beta^3\alpha_1 b_2 h_2 - 12\alpha\beta^3\alpha_1 b_4 h_0 + 3\alpha\beta^3\alpha_2 b_1 h_2 - 4\alpha\beta^3\alpha_2 b_3 h_0 + 9\alpha\beta^3\alpha_3 b_0 h_2 + 4\alpha\beta^3\alpha_3 b_2 h_0 + 12\alpha\beta^3\alpha_4 b_1 h_0 + 2\alpha^3\beta\alpha_0 b_1 h_4 + 9\alpha^3\beta\alpha_0 b_3 h_2 - 2\alpha^3\beta\alpha_1 b_0 h_4 + 3\alpha^3\beta\alpha_1 b_2 h_2 + 12\alpha^3\beta\alpha_1 b_4 h_0 - 3\alpha^3\beta\alpha_2 b_1 h_2 + 4\alpha^3\beta\alpha_2 b_3 h_0 - 9\alpha^3\beta\alpha_3 b_0 h_2 - 4\alpha^3\beta\alpha_3 b_2 h_0 - 12\alpha^3\beta\alpha_4 b_1 h_0 - 6\gamma\delta\alpha_0 b_3 - 6\gamma\delta\alpha_1 b_2 - 6\gamma\delta\alpha_2 b_1 - 6\gamma\delta\alpha_3 b_0 + 4\alpha\varepsilon\alpha_0 b_3 + 4\alpha\varepsilon\alpha_1 b_2 + 4\alpha\varepsilon\alpha_2 b_1 + 4\alpha\varepsilon\alpha_3 b_0 + 12\alpha\beta\alpha_0\alpha_3 + 12\alpha\beta\alpha_1\alpha_2$;

θ^4: $-6\alpha\beta^3\alpha_0 b_2 h_4 - 16\alpha\beta^3\alpha_0 b_4 h_2 - 8\alpha\beta^3\alpha_1 b_3 h_2 + 6\alpha\beta^3\alpha_2 b_0 h_4 - 10\alpha\beta^3\alpha_2 b_4 h_0 + 8\alpha\beta^3\alpha_3 b_1 h_2 + 16\alpha\beta^3\alpha_4 b_0 h_2 + 10\alpha\beta^3\alpha_4 b_2 h_0 + 6\alpha^3\beta\alpha_0 b_2 h_4 + 16\alpha^3\beta\alpha_0 b_4 h_2 + 8\alpha^3\beta\alpha_1 b_3 h_2 - 6\alpha^3\beta\alpha_2 b_0 h_4 + 10\alpha^3\beta\alpha_2 b_4 h_0 - 8\alpha^3\beta\alpha_3 b_1 h_2 - 16\alpha^3\beta\alpha_4 b_0 h_2 - 10\alpha^3\beta\alpha_4 b_2 h_0 - 6\gamma\delta\alpha_0 b_4 - 6\gamma\delta\alpha_1 b_3 - 6\gamma\delta\alpha_2 b_2 - 6\gamma\delta\alpha_3 b_1 - 6\gamma\delta\alpha_4 b_0 + 4\alpha\varepsilon\alpha_0 b_4 + 4\alpha\varepsilon\alpha_1 b_3 + 4\alpha\varepsilon\alpha_2 b_2 + 4\alpha\varepsilon\alpha_3 b_1 + 4\alpha\varepsilon\alpha_4 b_0 + 12\alpha\beta\alpha_0\alpha_4 + 12\alpha\beta\alpha_1\alpha_3 + 6\alpha\beta a_2^2$;

θ^5: $- 3\alpha\beta^3\alpha_0 b_1 h_6 - 12\,\alpha\beta^3\alpha_0 b_3 h_4 + 3\,\alpha\beta^3\alpha_1 b_0 h_6 - 4\,\alpha\beta^3\alpha_1 b_2 h_4 - 15\alpha\beta^3\alpha_1 b_4 h_2 + 4\,\alpha\beta^3\alpha_2 b_1 h_4 - 5\,\alpha\beta^3\alpha_2 b_3 h_2 + 12\,\alpha\beta^3\alpha_3 b_0 h_4 + 5\,\alpha\beta^3\alpha_3 b_2 h_2 - 6\,\alpha\beta^3\alpha_3 b_4 h_0 + 15\,\alpha\beta^3\alpha_4 b_1 h_2 + 6\,\alpha\beta^3\alpha_4 b_3 h_0 + 3\alpha^3\beta\alpha_0 b_1 h_6 + 12\alpha^3\beta\alpha_0 b_3 h_4 - 3\alpha^3\beta\alpha_1 b_0 h_6 + 4\alpha^3\beta\alpha_1 b_2 h_4 + 15\alpha^3\beta\alpha_1 b_4 h_2 - 4\alpha^3\beta\alpha_2 b_1 h_4 + 5\alpha^3\beta\alpha_2 b_3 h_2 - 12\alpha^3\beta\alpha_3 b_0 h_4 - 5\alpha^3\beta\alpha_3 b_2 h_2 + 4\,\alpha\varepsilon\alpha_1 b_4 + 4\,\alpha\varepsilon\alpha_2 b_3 + 4\,\alpha\varepsilon\alpha_3 b_2 + 4\,\alpha\varepsilon\alpha_4 b_1 + 6\alpha^3\beta\alpha_3 b_4 h_0 - 15\alpha^3\beta\alpha_4 b_1 h_2 - 6\alpha^3\beta\alpha_4 b_3 h_0 - 6\gamma\delta\alpha_1 b_4 - 6\gamma\delta\alpha_2 b_3 - 6\gamma\delta\alpha_3 b_2 - 6\gamma\delta\alpha_4 b_1 + 12\,\alpha\beta\alpha_1\alpha_4 + 12\,\alpha\beta\alpha_2\alpha_3$;

θ^6: $- 8\,\alpha\beta^3\alpha_0 b_2 h_6 - 20\,\alpha\beta^3\alpha_0 b_4 h_4 - 10\,\alpha\beta^3\alpha_1 b_3 h_4 + 8\,\alpha\beta^3\alpha_2 b_0 h_6 - 12\,\alpha\beta^3\alpha_2 b_4 h_2 + 10\,\alpha\beta^3\alpha_3 b_1 h_4 + 20\,\alpha\beta^3\alpha_4 b_0 h_4 + 12\,\alpha\beta^3\alpha_4 b_2 h_2 + 8\alpha^3\beta\alpha_0 b_2 h_6 + 20\alpha^3\beta\alpha_0 b_4 h_4 + 10\alpha^3\beta\alpha_1 b_3 h_4 - 8\alpha^3\beta\alpha_2 b_0 h_6 + 12\alpha^3\beta\alpha_2 b_4 h_2 - 10\alpha^3\beta\alpha_3 b_1 h_4 - 20\alpha^3\beta\alpha_4 b_0 h_4 - 12\alpha^3\beta\alpha_4 b_2 h_2 - 6\gamma\delta\alpha_2 b_4 - 6\gamma\delta\alpha_3 b_3 - 6\gamma\delta\alpha_4 b_2 + 4\,\alpha\varepsilon\alpha_2 b_4 + 4\alpha\varepsilon\alpha_3 b_3 + 4\,\alpha\varepsilon\alpha_4 b_2 + 12\,\alpha\beta\alpha_2\alpha_4 + 6\,\alpha\beta a_3^2$;

θ^7: $- 15\,\alpha\beta^3\alpha_0 b_3 h_6 - 5\,\alpha\beta^3\alpha_1 b_2 h_6 - 18\,\alpha\beta^3\alpha_1 b_4 h_4 + 5\,\alpha\beta^3\alpha_2 h_6 - 6\alpha\beta^3\alpha_2 b_3 h_4 + 15\,\alpha\beta^3\alpha_3 b_0 h_6 + 6\,\alpha\beta^3\alpha_3 b_2 h_4 - 7\,\alpha\beta^3\alpha_3 b_4 h_2 + 18\,\alpha\beta^3\alpha_4 b_1 h_4 + 7\alpha\beta^3\alpha_4 b_3 h_2 + 15\alpha^3\beta\alpha_0 b_3 h_6 + 5\alpha^3\beta\alpha_1 b_2 h_6 + 18\alpha^3\beta\alpha_1 b_4 h_4 - 5\alpha^3\beta\alpha_2 b_1 h_6 + 6\alpha^3\beta\alpha_2 b_3 h_4 - 15\alpha^3\beta\alpha_3 b_0 h_6 - 6\alpha^3\beta\alpha_3 b_2 h_4 + 7\alpha^3\beta\alpha_3 b_4 h_2 - 18\alpha^3\beta\alpha_4 b_1 h_4 - 7\alpha^3\beta\alpha_4 b_3 h_2 - 6\gamma\delta\alpha_3 b_4 - 6\gamma\lambda\alpha_4 b_3 + 4\,\alpha\varepsilon\alpha_3 b_4 + 4\,\alpha\varepsilon\alpha_4 b_3 + 12\,\alpha\beta\alpha_3\alpha_4$;

θ^8: $- 24\,\alpha\beta^3\alpha_0 b_4 h_6 - 12\,\alpha\beta^3\alpha_1 b_3 h_6 - 14\,\alpha\beta^3\alpha_2 b_4 h_4 + 12\,\alpha\beta^3\alpha_3 b_1 h_6 + 24\,\alpha\beta^3\alpha_4 b_0 h_6 + 14\,\alpha\beta^3\alpha_4 b_2 h_4 + 24\alpha^3\beta\,\alpha_0 b_4 h_6 + 12\alpha^3\beta\alpha_1 b_3 h_6 + 14\alpha^3\beta\,\alpha_2 b_4 h_4 - 12\alpha^3\beta\alpha_3 b_1 h_6 - 24\alpha^3\beta\alpha_4 b_0 h_6 - 14\alpha^3\beta\alpha_4 b_2 h_4 - 6\gamma\,\delta\,\alpha_4 b_4 + 4\,\alpha\varepsilon\alpha_4 b_4 + 6\,\alpha\beta\,a_4^2$;

θ^9: $- 21\,\alpha\beta^3\alpha_1 b_4 h_6 - 7\,\alpha\beta^3\alpha_2 b_3 h_6 + 7\,\alpha\beta^3\alpha_3 b_2 h_6 - 8\,\alpha\beta^3\alpha_3 b_4 h_4 + 21\,\alpha\beta^3\alpha_4 b_1 h_6 + 8\,\alpha\beta^3\alpha_4 b_3 h_4 + 21\alpha^3\beta\alpha_1 b_4 h_6 + 7\alpha^3\beta\alpha_2 b_3 h_6 - 7\alpha^3\beta\alpha_3 b_2 h_6 + 8\alpha^3\beta\alpha_3 b_4 h_4 - 21\alpha^3\beta\alpha_4 b_1 h_6 - 8\alpha^3\beta\alpha_4 b_3 h_4$;

θ^{10}: $- 16\,\alpha\beta^3\alpha_2 b_4 h_6 + 16\,\alpha\beta^3\alpha_4 b_2 h_6 + 16\alpha^3\beta\alpha_2 b_4 h_6 - 16\alpha^3\beta\alpha_4 b_2 h_6$;

θ^{11}: $- 9\alpha\beta^3\alpha_3 b_4 h_6 + 9\alpha\beta^3\alpha_4 b_3 h_6 + 9\alpha^3\beta\,\alpha_3 b_4 h_6 - 9\alpha^3\beta\alpha_4 b_3 h_6$;

Aile 1:

$$\alpha_0 = \frac{(\alpha_2(b_2\sqrt{6\alpha^4\beta^4h_4^4 - 3\alpha^2\beta^6h_4^4 - 3\alpha^6\beta^2h_4^4} + 3\alpha\beta^3 b_2 h_4^2 - 3\alpha^3\beta b_2 h_4^2 - 24\alpha\beta\alpha_2 h_6)}{\left(48b_2(\alpha\beta^3 h_4 h_6 - \alpha^3\beta h_4 h_6)\right) - \frac{\alpha_2^2}{\left(2b_2h_4(\alpha^2-\beta^2)\right)}} ,$$

$$\alpha_1 = \alpha_3 = 0\,,\quad \alpha_2 = \alpha_2\,,\qquad \alpha_4 = \frac{2\alpha_2 h_6}{h_4}\,, \tag{3.13}$$

$$h_0 = -\frac{\sqrt{\alpha\beta^3 h_4^3 - \alpha^3\beta h_4^3 + \sqrt{3}h_4\left(-\alpha^2\beta^2 h_4^4(\alpha^2-\beta^2)^2\right)}}{\left(64\alpha\beta h_6^2(\alpha^2-\beta^2)\right)} \ , \ h_4 = h_4 \, ,$$

$$h_2 = \frac{-\sqrt{3}\sqrt{\left(-\alpha^2\beta^2 h_4^4(\alpha^2-\beta^2)^2\right)} + 9\alpha\beta^3 h_4^2 - 9\alpha^3\beta h_4^2}{\left(32\alpha\beta h_6(\alpha^2-\beta^2)\right)} \quad , \qquad h_6 = h_6 \, ,$$

$$b_0 = \frac{-\sqrt{3}b_2\sqrt{\left(-\alpha^2\beta^2 h_4^4(\alpha^2-\beta^2)^2\right)} + 3\alpha\beta {b_2}^3 h_4^2 - 3\alpha^3\beta b_2 h_4^2 - 24\alpha\beta\alpha_2 h_6}{\left(48\alpha\beta h_4 h_6(\alpha^2-\beta^2)\right)} \, ,$$

$$b_1 = b_3 = 0 \ , \qquad\qquad b_4 = \frac{2b_2h_6}{h_4} \ , \quad \gamma = \varepsilon = 0 \ ,$$

$$\alpha = \alpha \, , \quad \beta = \beta \ , \ \delta = \delta \, .$$

Aile 2 :

$$a_0 = \frac{\alpha_2\left(12\alpha_2 h_6 + \sqrt{3}\right)\sqrt{48\alpha_2^2 h_6 - \alpha^4 b_2^2 h_4^4 - \beta^4 b_2^2 h_4^4 + 2\alpha^2\beta^2 b_2^2 h_4^4} + 3\alpha^2 b_2 h_4^2 - 3\beta^2 b_2 h_4^2}{48 b_2(\alpha^2 h_4 h_6 - \beta^2 h_4 h_6)}$$

$$\alpha_1 = \alpha_3 = 0 \, , \quad \alpha_2 = \alpha_2 \, , \quad \alpha_4 = \frac{2\alpha_2 h_6}{h_4} \, , \qquad\qquad h_0 = 0 \, , \qquad h_6 = h_6 \, ,$$

$$h_2 = \frac{\sqrt{3\left(48\alpha_2^2 h_6^2 - \alpha^4 b_2^2 h_4^4 - \beta^4 b_2^2 h_4^4 + 2\alpha^2\beta^2 b_2^2 h_4^4\right)} + 9\alpha^2 b_2 h_4^2 - 9\beta^2 b_2 h_4^2}{32 b_2 h_6(\alpha^2-\beta^2)} \ , \quad h_4 = h_4 \, , \qquad (3.14)$$

$$b_0 = \frac{\left(12\alpha_2 h_6 + \sqrt{3}\right)\sqrt{48\alpha_2^2 h_6 - \alpha^4 b_2^2 h_4^4 - \beta^4 b_2^2 h_4^4 + 2\alpha^2\beta^2 b_2^2 h_4^4} + 3\alpha^2 b_2 h_4^2 - 3\beta^2 b_2 h_4^2}{48 h_2 h_6(\alpha^2-\beta^2)} \, ,$$

$$b_1 = b_3 = 0 \, , \ b_4 = \frac{2b_2h_6}{h_4} \ , \quad \gamma = \frac{\alpha\beta\alpha_2}{\delta b_2} \ , \ \ \varepsilon = 0 \, , \ \alpha = \alpha \, , \quad \beta = \beta \, , \quad \delta = \delta \, .$$

Aile 3 :

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_3 = 0 \ , \quad \alpha_2 = \alpha_2 \ , \quad \alpha_4 = \frac{2\alpha_2 h_6}{h_4} \quad , \quad h_0 = h_2 = 0 \, , \ \ h_4 = h_4 \ ,$$

$$h_6 = h_6 \, , \ \ b_0 = b_1 = b_3 = 0 \ , \qquad b_4 = \frac{2b_2h_6}{h_4} \ , \quad \gamma = \frac{\alpha\beta\alpha_2}{\delta b_2} \, , \ \ \varepsilon = 0 \, , \qquad (3.15)$$

$$\alpha = \alpha \ , \quad \beta = \beta \ , \ \delta = \delta \, .$$

Aile 4 :

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0 \, , \quad \alpha_2 = \alpha_2 \, , \qquad h_0 = h_2 = 0$$

$$b_0 = b_1 = b_3 = b_4 = 0 \ , \quad b_2 = b_2 \ , \quad h_4 = h_4 \ , \quad h_6 = h_6 \ , \tag{3.16}$$

$$\gamma = \frac{\alpha\beta\alpha_2}{\delta b_2} \ , \quad \varepsilon = 0 \ , \quad \alpha = \alpha \ , \quad \beta = \beta \ , \quad \delta = \delta \ .$$

Çözüm aileleri, Tablo 3.1'i kullanılarak ve denklem (3.5), (3.7), (3.8) ve (3.12)'de yerine yazılarak Fokas denkleminin birçok sayıda kesin çözümleri elde edilir. Örneğin;

Tablo 3.1'in 1. satırını alırsak;

$l_0 = 1, \ l_2 = -(1+m^2)$ ve $l_4 = m^2$ ise,

$\theta(\xi) = sn(\xi)$ veya $\theta(\xi) = cd(\xi)$

dir.

Aile 1 için:

Denklem (3.5)'den

$$\theta(\xi) = \frac{sn(\xi)}{\sqrt{f sn^2(\xi) + g}}$$

veya

$$\theta(\xi) = \frac{cd(\xi)}{\sqrt{f cd^2(\xi) + g}}$$

olup burada f ve g

$$h_2^4(-(1+m^2) - h_2)[9m^4 - (-(1+m^2) - h_2)(-2(1+m^2) + h_2) +$$
$$3h_6[3m^2 - ((1+m^2)^2 - h_2^2)]^2 = 0 \tag{3.17}$$

kısıtlama koşulu altında

$$f = \frac{h_4(-(1+m^2) - h_2)}{(-(1+m^2)-h_2)^2 + 3m^4 + 2(1+m^2)(-(1+m^2)-h_2)} \ ,$$

$$g = \frac{3h_4}{(-(1+m^2)-h_2)^2 + 3m^4 + 2(1+m^2)(-(1+m^2)-h_2)} \tag{3.18}$$

dir. Böylece Fokas denkleminin kesin çözümü

$$U(\xi) = \frac{\alpha_0 + \alpha_1\theta(\xi) + \alpha_2\theta^2(\xi) + \alpha_3\theta^3(\xi) + \alpha_4\theta^4(\xi)}{\beta_0 + \beta_1\theta(\xi) + \beta_2\theta^2(\xi) + \beta_3\theta^3(\xi) + \beta_4\theta^4(\xi)} \tag{3.19}$$

Jacobi eliptik fonksiyon şeklinde elde edilir. Burada h_2 , h_4 ve h_6 denklem (3.13)'te verilmiştir ve $\xi = \alpha x + \beta y + \delta\omega$ dir.

Tablo 3.2'den $m \to 0$ için $sn(\xi, m) = sin(\xi)$ olduğundan

$$\theta(\xi) = \frac{sin(\xi)}{\sqrt{fsin^2(\xi) + g}}$$

olup

$$U(\xi) = \frac{\alpha_0 + \alpha_2 \frac{sin^2(\xi)}{fsin^2(\xi) + g} + \frac{2\alpha_2 h_6}{h_4} \frac{sin^4(\xi)}{(fsin^2(\xi) + g)^2}}{b_0 + b_2 \frac{sin^2(\xi)}{fsin^2(\xi) + g} + \frac{2b_2 h_6}{h_4} \frac{sin^4(\xi)}{(fsin^2(\xi) + g)^2}}$$

trigonometrik fonksiyon çözümleri bulunmuş olur. Burada

$$h_2^4(-1 - h_2)[-(-1 - h_2)(-2 + h_2) + 3h_6[-((1)^2 - h_2^2)]^2 = 0 \qquad (3.20)$$

kısıtlama koşulu altında

$$f = \frac{h_4(-1-h_2)}{(-1-h_2)^2+2(-1-h_2)} \ ,$$

$$g = \frac{3h_4}{(-1-h_2)^2+2(-1-h_2)} \qquad (3.21)$$

dir.

Tablo 3.2'den $m \to 1$ için $sn(\xi, m) = tanh(\xi)$ olduğundan

$$\theta(\xi) = \frac{tanh(\xi)}{\sqrt{ftanh^2(\xi) + g}}$$

olup

$$U(\xi) = \frac{\alpha_0 + \alpha_2 \frac{tanh^2(\xi)}{ftanh^2(\xi) + g} + \frac{2\alpha_2 h_6}{h_4} \frac{tanh^4(\xi)}{(f\phi^2(\xi) + g)^2}}{b_0 + b_2 \frac{tanh^2(\xi)}{ftanh^2(\xi) + g} + \frac{2b_2 h_6}{h_4} \frac{tanh^4(\xi)}{(ftanh^2(\xi) + g)^2}}$$

hiberbolik fonksiyon çözümleri bulunmuş olur. Burada

$$h_2^4(-2 - h_2)[9 - (-2 - h_2)(-4 + h_2) + 3h_6[3 - ((2)^2 - h_2^2)]^2 = 0 \qquad (3.22)$$

kısıtlama koşulu altında

$$f = \frac{h_4(-2-h_2)}{(-2-h_2)^2+3+4(-2-h_2)} \ ,$$

$g = \frac{3h_4}{(-2-h_2)^2+3+4(-2-h_2)}$ (3.23)

dir.

Veya

Tablo 3.2'den $m \to 0$ için $cd(\xi, m) = cos(\xi)$ olduğundan

$\theta(\xi) = \frac{cos(\xi)}{\sqrt{fcos^2(\xi)+g}}$

olup

$$U(\xi) = \frac{\alpha_0 + \alpha_2 \frac{cos^2(\xi)}{fcos^2(\xi)+g} + \frac{2\alpha_2 h_6}{h_4} \frac{cos^4(\xi)}{(fcos^2(\xi)+g)^2}}{b_0 + b_2 \frac{cos^2(\xi)}{fcos^2(\xi)+g} + \frac{2b_2 h_6}{h_4} \frac{cos^4(\xi)}{(fcos^2(\xi)+g)^2}}$$

trigonometrik fonksiyon çözümleri bulunmuş olur. Burada

$h_2^4(-1-h_2)[-(-1-h_2)(-2+h_2) + 3h_6[-(1^2-h_2^2)]^2 = 0$ (3.24)

kısıtlama koşulu altında

$f = \frac{h_4(-1-h_2)}{(-1-h_2)^2+2(-1-h_2)}$,

$g = \frac{3h_4}{(-1-h_2)^2+2(-1-h_2)}$ (3.25)

dir.

Tablo 3.2'den $m \to 1$ için $cd(\xi, m) = 1$ olduğundan

$\theta(\xi) = \frac{1}{\sqrt{f+g}}$

olup

$$U(\xi) = \frac{\alpha_0 + \alpha_2 \frac{1}{f+g} + \frac{2\alpha_2 h_6}{h_4} \frac{1}{(f+g)^2}}{b_0 + b_2 \frac{1}{f+g} + \frac{2b_2 h_6}{h_4} \frac{1}{(f+g)^2}}$$

hiperbolik fonksiyon çözümleri bulunmuş olur. Burada

$h_2^4(-2-h_2)[9-(-2-h_2)(-4+h_2) + 3h_6[3-(2^2-h_2^2)]^2 = 0$ (3.26)

kısıtlama koşulu altında

$f = \frac{h_4(-2-h_2)}{(-2-h_2)^2+3+4(-2-h_2)}$,

$$g = \frac{3h_4}{(-2-h_2)^2+3+4(-2-h_2)} \tag{3.27}$$

dir.

Aile 2 için:

Denklem (3.5)'ten

$$\theta(\xi) = \frac{sn(\xi)}{\sqrt{f sn^2(\xi)+g}}$$

veya

$$\theta(\xi) = \frac{cd(\xi)}{\sqrt{f cd^2(\xi)+g}}$$

olup burada f ve g

$$h_2^4(-(1+m^2)-h_2)[9m^4-(-(1+m^2)-h_2)(-2(1+m^2)+h_2)+$$
$$3h_6[3m^2-((1+m^2)^2-h_2^2)]^2 = 0 \tag{3.28}$$

kısıtlama koşulu altında

$$f = \frac{h_4\left(-(1+m^2)-h_2\right)}{(-(1+m^2)-h_2)^2+3m^4+2(1+m^2)(-(1+m^2)-h_2)} \quad ,$$

$$g = \frac{3h_4}{(-(1+m^2)-h_2)^2+3m^4+2(1+m^2)(-(1+m^2)-h_2)} \tag{3.29}$$

dir. Böylece Fokas denkleminin kesin çözümü

$$U(\xi) = \frac{\alpha_0 + \alpha_2 \dfrac{\phi^2(\xi)}{f\phi^2(\xi)+g} + \dfrac{2\alpha_2 h_6}{h_4} \dfrac{\phi^4(\xi)}{(f\phi^2(\xi)+g)^2}}{b_0 + b_2 \dfrac{\phi^2(\xi)}{f\phi^2(\xi)+g} + \dfrac{2b_2 h_6}{h_4} \dfrac{\phi^4(\xi)}{(f\phi^2(\xi)+g)^2}}$$

Jacobi eliptik fonksiyon şeklinde elde edilir. Burada h_2 , h_4 ve h_6 denklem (3.14)'te verilmiştir ve $\xi = \alpha x + \beta y + \left(\frac{\alpha\beta\alpha_2}{\delta b_2}\right) z + \delta\omega$ dir.

Tablo 3.2'den $m \to 0$ için $sn(\xi, m) = sin(\xi)$ olduğundan

$$\theta(\xi) = \frac{sn(\xi)}{\sqrt{f sn^2(\xi)+g}}$$

olup

$$U(\xi) = \frac{\alpha_0 + \alpha_2 \dfrac{\sin^2(\xi)}{f\sin^2(\xi)+g} + \dfrac{2\alpha_2 h_6 \sin^4(\xi)}{h_4(f\sin^2(\xi)+g)^2}}{b_0 + b_2 \dfrac{\sin^2(\xi)}{f\sin^2(\xi)+g} + \dfrac{2b_2 h_6 \sin^4(\xi)}{h_4(f\sin^2(\xi)+g)^2}}$$

trigonometrik fonksiyon çözümleri bulunmuş olur. Burada

$$h_2^4(-1-h_2)[-(-1-h_2)(-2+h_2)+3h_6(-(1^2-h_2^2)]^2=0 \tag{3.30}$$

kısıtlama koşulu altında

$$f=\frac{h_4(-1-h_2)}{(-1-h_2)^2+2(-1-h_2)}\ ,$$

$$g=\frac{3h_4}{(-1-h_2)^2+2(-1-h_2)} \tag{3.31}$$

dir.

Tablo 3.2'den m → 1 için $sn(\xi,m)=tanh(\xi)$ olduğundan

$$\theta(\xi)=\frac{tanh(\xi)}{\sqrt{f tanh^2(\xi)+g}}$$

olup

$$U(\xi)=\frac{\alpha_0+\alpha_2\dfrac{tanh^2(\xi)}{f\,tanh^2(\xi)+g}+\dfrac{2\alpha_2h_6\,tanh^4(\xi)}{h_4(f\,tanh^2(\xi)+g)^2}}{b_0+b_2\dfrac{tanh^2(\xi)}{f\,tanh^2(\xi)+g}+\dfrac{2b_2h_6\,tanh^4(\xi)}{h_4(f\,tanh^2(\xi)+g)^2}}$$

hiperbolik fonksiyon çözümleri bulunmuş olur. Burada

$$h_2^4(-2-h_2)[9-(-2-h_2)(-4+h_2)+3h_6[3-(2^2-h_2^2)]^2=0 \tag{3.32}$$

kısıtlama koşulu altında

$$\mathrm{f}=\frac{\mathrm{h}_4(-2-\mathrm{h}_2)}{(-2-\mathrm{h}_2)^2+3+4(-2-\mathrm{h}_2)}\ ,$$

$$g=\frac{3h_4}{(-2-h_2)^2+3+4(-2-h_2)} \tag{3.33}$$

dir.

Tablo 3.2'den m → 0 için $cd(\xi,m)=cos(\xi)$ olduğundan

$$\theta(\xi)=\frac{cos(\xi)}{\sqrt{f cos^2(\xi)+g}}$$

olup

$$U(\xi)=\frac{\alpha_0+\alpha_2\dfrac{\cos^2(\xi)}{f\cos^2(\xi)+g}+\dfrac{2\alpha_2h_6\cos^4(\xi)}{h_4(f\cos^2(\xi)+g)^2}}{b_0+b_2\dfrac{\cos^2(\xi)}{f\cos^2(\xi)+g}+\dfrac{2b_2h_6\cos^4(\xi)}{h_4(f\cos^2(\xi)+g)^2}}$$

trigonometrik fonksiyon çözümleri bulunmuş olur. Burada

$$h_2^4(-1-h_2)[-(-1-h_2)(-2+h_2)+3h_6[-(1^2-h_2^2)]^2=0 \quad (3.34)$$

kısıtlama koşulu altında

$$f=\frac{h_4(-1-h_2)}{(-1-h_2)^2+2(-1-h_2)},$$

$$g=\frac{3h_4}{(-1-h_2)^2+2(-1-h_2)} \quad (3.35)$$

dir.

Tablo 3.2'den $m \to 1$ için $cd(\xi,m)=1$ olduğundan

$$\theta(\xi)=\frac{1}{\sqrt{f+g}}$$

olup

$$U(\xi)=\frac{\alpha_2\frac{1}{f+g}+\frac{2\alpha_2 h_6}{h_4(f+g)^2}}{b_2\frac{1}{f+g}+\frac{2b_2 h_6}{h_4(f+g)^2}}$$

hiperbolik fonksiyon çözümleri bulunmuş olur. Burada

$$h_2^4(-2-h_2)[9-(-2-h_2)(-4+h_2)+3h_6[3-(2^2-h_2^2)]^2=0 \quad (3.36)$$

kısıtlama koşulu altında

$$f=\frac{h_4(-2-h_2)}{(-2-h_2)^2+3+4(-2-h_2)},$$

$$g=\frac{3h_4}{(-2-h_2)^2+3+4(-2-h_2)}. \quad (3.37)$$

Benzer şekilde Aile 3 ve Aile 4 için çözümler elde edilebilir.

Şimdi ***Tablo 3.1'in 2.satırını kullanarak*** Fokas denklemi için çözümler elde edelim:

$l_0=1-m^2$, $l_2=2m^2-1$ ve $l_4=-m^2$ ise, $\theta(\xi)=cn(\xi)$ olup

<u>Aile 1 için:</u>

Denklem (3.5)'ten

$$\theta(\xi) = \frac{cn(\xi)}{\sqrt{f cn^2(\xi) + g}}$$

olup burada f ve g

$$h_2^4\big((2m^2-1)-h_2\big)[-9(1-m^2)m^2 - \big((2m^2-1)-h_2\big)(2(2m^2-1) + h_2) + 3h_6[-3(1-m^2)m^2 - ((2m^2-1)^2 - h_2^2)]^2 = 0 \quad (3.38)$$

kısıtlama koşulu altında

$$f = \frac{h_4\big((2m^2-1)-h_2\big)}{\big((2m^2-1)-h_2\big)^2 - 3(1-m^2)m^2 - 2(2m^2-1)\big((2m^2-1)-h_2\big)} \ ,$$

$$g = \frac{3h_4(1-m^2)}{\big((2m^2-1)-h_2\big)^2 - 3(1-m^2)m^2 - 2(2m^2-1)\big((2m^2-1)-h_2\big)} \quad (3.39)$$

dir. Böylece Fokas denkleminin kesin çözümü

$$U(\xi) = \frac{\alpha_0 + \alpha_2 \dfrac{\phi^2(\xi)}{f\phi^2(\xi)+g} + \dfrac{2\alpha_2 h_6}{h_4}\dfrac{\phi^4(\xi)}{(f\phi^2(\xi)+g)^2}}{b_0 + b_2 \dfrac{\phi^2(\xi)}{f\phi^2(\xi)+g} + \dfrac{2b_2 h_6}{h_4}\dfrac{\phi^4(\xi)}{(f\phi^2(\xi)+g)^2}}$$

Jacobi eliptik fonksiyon şeklinde elde edilir. Burada h_2 , h_4 ve h_6 denklem (3.13)'te verilmiştir ve $\xi = \alpha x + \beta y + \delta\omega$ dir.

Tablo 3.2'den $m \to 0$ için $cn(\xi, m) = cos(\xi)$ olduğundan

$$\theta(\xi) = \frac{cos(\xi)}{\sqrt{f cos^2(\xi) + g}}$$

olup

$$U(\xi) = \frac{\alpha_0 + \alpha_2 \dfrac{cos^2(\xi)}{f cos^2(\xi)+g} + \dfrac{2\alpha_2 h_6}{h_4}\dfrac{cos^4(\xi)}{(f cos^2(\xi)+g)^2}}{b_0 + b_2 \dfrac{cos^2(\xi)}{f cos^2(\xi)+g} + \dfrac{2b_2 h_6}{h_4}\dfrac{cos^4(\xi)}{(f cos^2(\xi)+g)^2}}$$

trigonometrik fonksiyon çözümleri bulunmuş olur. Burada

$$h_2^4\big((-1)-h_2\big)[-\big((-1)-h_2\big)(2(-1)+h_2) + 3h_6[-((-1)^2 - h_2^2)]^2 = 0$$

kısıtlama koşulu altında

$$f = \frac{h_4(-1-h_2)}{\big((-1)-h_2\big)^2 - 2(-1)\big((-1)-h_2\big)} \ ,$$

$$g = \frac{3h_4}{((-1)-h_2)^2 - 2(-1)((-1)-h_2)} \tag{3.40}$$

şeklindedir.

Tablo 3.2'den $m \to 1$ için $cn(\xi, m) = sech(\xi)$ olduğundan

$$\theta(\xi) = \frac{sech(\xi)}{\sqrt{f sech^2(\xi) + g}}$$

olup

$$U(\xi) = \frac{\alpha_0 + \alpha_2 \dfrac{sech^2(\xi)}{f sech^2(\xi) + g} + \dfrac{2\alpha_2 h_6}{h_4} \dfrac{sech^4(\xi)}{(f sech^2(\xi) + g)^2}}{b_0 + b_2 \dfrac{sech^2(\xi)}{f sech^2(\xi) + g} + \dfrac{2b_2 h_6}{h_4} \dfrac{sech^4(\xi)}{(f sech^2(\xi) + g)^2}}$$

hiperbolik fonksiyon çözümleri bulunmuş olur. Burada

$$h_2^4(1-h_2)[-(1-h_2)(2+h_2) + 3h_6[-(1^2 - h_2^2)]^2 = 0 \tag{3.41}$$

kısıtlama koşulu altında

$$f = \frac{h_4(1-h_2)}{(1-h_2)^2 - 2(1-h_2)} \;,$$

$$g = \frac{0}{(1-h_2)^2 - 2(1-h_2)} \tag{3.42}$$

şeklindedir.

<u>Aile 2 için:</u>

Denklem (3.5)'ten

$$\theta(\xi) = \frac{cn(\xi)}{\sqrt{f cn^2(\xi) + g}}$$

olup burada f ve g

$$h_2^4\big((2m^2-1) - h_2\big)[-9(1-m^2)m^2 - \big((2m^2-1) - h_2\big)(2(2m^2-1) +$$
$$h_2) + 3h_6[-3(1-m^2)m^2 - ((2m^2-1)^2 - h_2^2)]^2 = 0 \tag{3.43}$$

kısıtlama koşulu altında

$$f = \frac{h_4\big((2m^2-1)-h_2\big)}{\big((2m^2-1)-h_2\big)^2 - 3(1-m^2)m^2 - 2(2m^2-1)\big((2m^2-1)-h_2\big)} \;,$$

$$g = \frac{3h_4(1-m^2)}{\big((2m^2-1)-h_2\big)^2 - 3(1-m^2)m^2 - 2(2m^2-1)\big((2m^2-1)-h_2\big)} \tag{3.44}$$

dir. Böylece Fokas denkleminin kesin çözümü

$$U(\xi)=\frac{\alpha_0+\alpha_2\dfrac{\phi^2(\xi)}{f\phi^2(\xi)+g}+\dfrac{2\alpha_2h_6}{h_4}\dfrac{\phi^4(\xi)}{(f\phi^2(\xi)+g)^2}}{b_0+b_2\dfrac{\phi^2(\xi)}{f\phi^2(\xi)+g}+\dfrac{2b_2h_6}{h_4}\dfrac{\phi^4(\xi)}{(f\phi^2(\xi)+g)^2}}$$

Jacobi eliptik fonksiyon şeklinde elde edilir. Burada h_2 , h_4 ve h_6 denklem (3.14)'te verilmiştir ve $\xi=\alpha x+\beta y+\left(\frac{\alpha\beta\alpha_2}{\delta b_2}\right)z+\delta\omega$ dir.

Tablo 3.2'den $m\to 0$ için $cn(\xi,m)=cos(\xi)$ olduğundan

$$\theta(\xi)=\frac{cos(\xi)}{\sqrt{fcos^2(\xi)+g}}$$

olup

$$U(\xi)=\frac{\alpha_0+\alpha_2\dfrac{cos^2(\xi)}{fcos^2(\xi)+g}+\dfrac{2\alpha_2h_6}{h_4}\dfrac{cos^4(\xi)}{(fcos^2(\xi)+g)^2}}{b_0+b_2\dfrac{cos^2(\xi)}{fcos^2(\xi)+g}+\dfrac{2b_2h_6}{h_4}\dfrac{cos^4(\xi)}{(fcos^2(\xi)+g)^2}}$$

trigonometrik fonksiyon çözümleri bulunmuş olur. Burada

$$h_2^4\big((-1)-h_2\big)[-\big((-1)-h_2\big)(2(-1)+h_2)+3h_6[-((-1)^2-h_2^2)]^2=0$$

kısıtlama koşulu altında

$$f=\frac{h_4\big((2-1)-h_2\big)}{\big((-1)-h_2\big)^2-2(-1)\big((-1)-h_2\big)}\quad,$$

$$g=\frac{3h_4}{\big((-1)-h_2\big)^2-2(-1)\big((-1)-h_2\big)}\tag{3.45}$$

dir.

Tablo 3.2'den $m\to 1$ için $cn(\xi,m)=sech(\xi)$ olduğundan

$$\theta(\xi)=\frac{sech(\xi)}{\sqrt{fsech^2(\xi)+g}}$$

olup

$$U(\xi)=\frac{\alpha_0+\alpha_2\dfrac{sech^2(\xi)}{fsech^2(\xi)+g}+\dfrac{2\alpha_2h_6}{h_4}\dfrac{sech^4(\xi)}{(fsech^2(\xi)+g)^2}}{b_0+b_2\dfrac{sech^2(\xi)}{fsech^2(\xi)+g}+\dfrac{2b_2h_6}{h_4}\dfrac{sech^4(\xi)}{(fsech^2(\xi)+g)^2}}$$

hiperbolik fonksiyon çözümleri bulunmuş olur. Burada

$$h_2^4(1-h_2)[-(1-h_2)(2+h_2)+3h_6[-(1^2-h_2^2)]^2=0 \tag{3.46}$$

kısıtlama koşulu altında

$$f=\frac{h_4(1-h_2)}{(1-h_2)^2-2(1-h_2)} \quad ,$$

$$g=\frac{0}{(1-h_2)^2-2(1-h_2)} \tag{3.47}$$

dir.

Aile 3 için:

Denklem (3.5)'ten

$$\theta(\xi)=\frac{cn(\xi)}{\sqrt{fcn^2(\xi)+g}}$$

olup burada f ve g

$$3h_6[-3(1-m^2)m^2-((2m^2-1)^2)]^2=0 \tag{3.48}$$

kısıtlama koşulu altında

$$f=\frac{h_4\big((2m^2-1)\big)}{\big((2m^2-1)\big)^2-3(1-m^2)m^2-2(2m^2-1)\big((2m^2-1)\big)} \quad ,$$

$$g=\frac{3h_4(1-m^2)}{\big((2m^2-1)\big)^2-3(1-m^2)m^2-2(2m^2-1)\big((2m^2-1)\big)} \tag{3.49}$$

şeklindedir. Böylece Fokas denkleminin kesin çözümü

$$U(\xi)=\frac{\alpha_2\dfrac{\phi^2(\xi)}{f\phi^2(\xi)+g}+\dfrac{2\alpha_2h_6}{h_4}\dfrac{\phi^4(\xi)}{(f\phi^2(\xi)+g)^2}}{b_2\dfrac{\phi^2(\xi)}{f\phi^2(\xi)+g}+\dfrac{2b_2h_6}{h_4}\dfrac{\phi^4(\xi)}{(f\phi^2(\xi)+g)^2}}$$

Jacobi eliptik fonksiyon şeklinde elde edilir. Buradah_2, h_4 ve h_6 denklem (3.15)'te verilmiştir ve

$\xi=\alpha x+\beta y+\left(\frac{\alpha\beta\alpha_2}{\delta b_2}\right)z+\delta\omega$ dir.

Tablo 3.2'den $m\to 0$ için $cn(\xi,m)=cos(\xi)$ olduğundan

$$\theta(\xi)=\frac{cos(\xi)}{\sqrt{fcos^2(\xi)+g}}$$

şeklinde olup

$$U(\xi)=\frac{\alpha_2\frac{\cos^2(\xi)}{f\cos^2(\xi)+g}+\frac{2\alpha_2 h_6\cos^4(\xi)}{h_4(f\cos^2(\xi)+g)^2}}{b_2\frac{\cos^2(\xi)}{f\cos^2(\xi)+g}+\frac{2b_2 h_6\cos^4(\xi)}{h_4(f\cos^2(\xi)+g)^2}}$$

trigonometrik fonksiyon çözümleri bulunmuş olur. Burada

$$3h_6[-((-1)^2)]^2=0 \tag{3.50}$$

kısıtlama koşulu altında

$$f=\frac{h_4(-1)}{((-1))^2-2(-1)((-1))} \quad ,$$

$$g=\frac{3h_4}{((-1))^2-2(-1)((-1))} \tag{3.51}$$

şeklindedir.

Tablo 3.2'den $m\to 1$ için $cn(\xi,m)=sech(\xi)$ olduğundan

$$\theta(\xi)=\frac{sech(\xi)}{\sqrt{f sech^2(\xi)+g}}$$

olup

$$U(\xi)=\frac{\alpha_2\frac{\operatorname{sech}^2(\xi)}{f\operatorname{sech}^2(\xi)+g}+\frac{2\alpha_2 h_6\operatorname{sech}^4(\xi)}{h_4(f\operatorname{sech}^2(\xi)+g)^2}}{b_2\frac{\operatorname{sech}^2(\xi)}{f\operatorname{sech}^2(\xi)+g}+\frac{2b_2 h_6\operatorname{sech}^4(\xi)}{h_4(f\operatorname{sech}^2(\xi)+g)^2}}$$

trigonometrik fonksiyon çözümleri bulunmuş olur. Burada

$$3h_6[-(1^2)]^2=0 \tag{3.52}$$

kısıtlama koşulu altında

$$f=\frac{h_4}{1^2-2} \quad ,$$

$$g=\frac{0}{1^2-2} \tag{3.53}$$

dir.

<u>Aile 4 için:</u>

Denklem (3.5)'ten

$$\theta(\xi)=\frac{cn(\xi)}{\sqrt{f cn^2(\xi)+g}}$$

şeklinde olup burada f ve g

$$3h_6[-3(1-m^2)m^2-((2m^2-1)^2)]^2=0 \tag{3.54}$$

kısıtlama koşulu altında

$$f=\frac{h_4\big((2m^2-1)\big)}{(2m^2-1)^2-3(1-m^2)m^2-2(2m^2-1)\big((2m^2-1)\big)} \quad ,$$

$$g=\frac{3h_4(1-m^2)}{\big((2m^2-1)\big)^2-3(1-m^2)m^2-2(2m^2-1)\big((2m^2-1)\big)} \tag{3.55}$$

şeklindedir. Böylece Fokas denkleminin kesin çözümü

$$U(\xi)=\frac{\alpha_2\dfrac{\phi^2(\xi)}{f\phi^2(\xi)+g}}{b_2\dfrac{\phi^2(\xi)}{f\phi^2(\xi)+g}}$$

Jacobi eliptik fonksiyon şeklinde elde edilir. Burada h_2, h_4 ve h_6 denklem (3.16)'da verilmiştir ve $\xi=\alpha x+\beta y+\left(\frac{\alpha\beta\alpha_2}{\delta b_2}\right)z+\delta\omega$ dir.

Tablo 3.2'den $m\rightarrow 0$ için $cn(\xi,m)=cos(\xi)$ olduğundan

$$\theta(\xi)=\frac{cos(\xi)}{\sqrt{f cos^2(\xi)+g}}$$

şeklinde olup

$$U(\xi)=\frac{\alpha_2\dfrac{cos^2(\xi)}{f cos^2(\xi)+g}}{b_2\dfrac{cos^2(\xi)}{f cos^2(\xi)+g}}$$

trigonometrik fonksiyon çözümleri bulunmuş olur.

$$3h_6[-((-1)^2)]^2=0 \tag{3.56}$$

kısıtlama koşulu altında

$$f=\frac{h_4(-1)}{(-1)^2-2(-1)(-1)} \quad ,$$

$$g=\frac{3h_4}{(-1)^2-2(-1)(-1)} \tag{3.57}$$

dir.

Tablo 3.2'den $m \to 1$ için $cn(\xi, m) = sech(\xi)$ olduğundan

$$\theta(\xi) = \frac{sech(\xi)}{\sqrt{f sech^2(\xi) + g}}$$

şeklinde olup

$$U(\xi) = \frac{\alpha_2 \dfrac{\mathrm{sech}^2(\xi)}{f\,\mathrm{sech}^2(\xi) + g}}{b_2 \dfrac{\mathrm{sech}^2(\xi)}{f\,\mathrm{sech}^2(\xi) + g}}$$

hiperbolik fonksiyon çözümleri bulunmuş olur. Burada

$$3h_6[-(1^2)]^2 = 0 \tag{3.58}$$

kısıtlama koşulu altında

$$f = \frac{h_4}{1^2 - 2}\ ,$$

$$g = \frac{0}{1^2 - 2} \tag{3.59}$$

dir.

Benzer şekilde Tablo 3.1'in diğer satırları kullanılarak Fokas denkleminin birçok çözümleri bulunabilir.

4
YENİ ϕ^6-MODEL AÇILIM YÖNTEMİ

4.1 Yeni ϕ^6-Model Açılım Yönteminin Teorik Adımları

Bir kısmi diferansiyel denklem

$$F(u, u_t, u_x, u_y, u_z, u_{xx}, u_{yy}, u_{zz}, \cdots) = 0 \tag{4.1}$$

şeklinde olsun. Burada $u = u(x, y, z, t)$ bilinmeyen bir fonksiyondur ve F, lineer olmayan terimlerin, $u = u(x, y, z, t)$ ve onun kısmi türevlerinin dahil edildiği bir polinomdur.

Yöntemin ana adımları aşağıdaki gibidir [22, 23, 24]:

Adım 1: $u(x, y, z, t) = U(\xi)$ ve uygulanacak denklem için uygun ξ dalga dönüşümü kullanılarak kısmi diferansiyel denklem aşağıdaki formda adi diferansiyel denkleme dönüştürülür.

$$X(U, U', U'', \ldots) = 0 \ . \tag{4.2}$$

Adım 2: Denklem (4.2)'nin çözümünün aşağıdaki gibi olduğu varsayılır:

$$U(\xi) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{2N} \alpha_k \theta(\xi)^k \tag{4.3}$$

şeklinde olduğu varsayılır. Burada α_k *(k=0,1,2,...,2N)* daha sonra belirlenecek sabit parametrelerdir.

Denklem (4.3)'deki *N* değeri dengelenme ilkesi kullanılarak elde edilmektedir.

Adım 3: Yöntemin yardımcı denklemleri aşağıdaki gibidir:

$$\theta'^2(\xi) = h_0 + h_2\theta^2(\xi) + h_4\theta^4(\xi) + h_6\theta^6(\xi) \ , \tag{4.4}$$

$$\theta''(\xi) = h_2\theta(\xi) + 2h_4\theta^3(\xi) + 3h_6\theta^5(\xi)$$

dir. Burada h_i $(i = 0, 2, 4, 6)$, $h_6 \neq 0$ olacak şekilde gerçel sabitlerdir. Denklem (4.4) ve (4.3) birlikte denklem (4.2)'de yerine yazılırsa $\theta(\xi)$ nin kuvvetlerine göre sonlu bir seri elde edilir. Aynı kuvvetli $\theta(\xi)$ nin katsayılarını sıfıra eşitlenerek cebirsel denklemler elde edilir. Elde edilen bu cebirsel denklem sistemini Matlab yardımıyla çözülür.

<u>Adım 4:</u> Denklem (4.4)'ün aşağıdaki çözüme sahip olduğu iyi bilinmektedir.

$$\theta(\xi) = \frac{\phi(\xi)}{\sqrt{f\phi^2(\xi)+g}} \quad . \tag{4.5}$$

Burada $f\phi^2(\xi) + g > 0$ ve $\phi(\xi)$

$$\phi'^2(\xi) = l_0 + l_2\phi^2(\xi) + l_4\phi^4(\xi) \tag{4.6}$$

eliptik denklemin çözümüdür. Burada l_j $(j = 0, 2, 4)$ gerçel sabitlerdir ve f ve g

$$h_4^2(l_2 - h_2)[9l_0l_4 - (l_2 - h_2)(2l_2 + h_2)] + 3h_6[3l_0l_4 - (l_2^2 - h_2^2)]^2 = 0 \tag{4.7}$$

kısıtlama koşulu altında

$$f = \frac{h_4(l_2-h_2)}{(l_2-h_2)^2+3l_0l_4-2l_2(l_2-h_2)} \quad ,$$

$$g = \frac{3h_4l_0}{(l_2-h_2)^2+3l_0l_4-2l_2(l_2-h_2)} \tag{4.8}$$

şeklindedir.

<u>Adım 5:</u> Denklem (4.6)'nın çözümlerinin denklem (4.5)'te yerine yazılması ve ardından denklem (4.5)'in denklem (4.3)'te yerine yazılmasıyla denklem (4.1)'in kesin çözümleri elde edilmiş olur.

4.2 Yeni ϕ^6-Model Açılım Yönteminin Fokas Denklemine Uygulanması

(4+1)-boyutlu lineer olmayan Fokas denklemi

$$4u_{tx} - u_{xxxy} + u_{xyyy} + 12u_xu_y + 12uu_{xy} - 6u_{zw} = 0 \tag{4.9}$$

şeklindedir.

Fokas denkleminde

$u(x, y, z, t, w) = U(\xi)$, $\xi = \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta w + \varepsilon t$

dalga dönüşümü kullanılarak

$$(\alpha\beta^3-\alpha^3\beta)U^{(4)}+(4\varepsilon\alpha-6\gamma\delta)U''+12\alpha\beta(U')^2+12\alpha\beta UU''=0$$

şeklinde adi diferansiyel denklemi elde edilir.

Bu adi diferansiyel denklemde iki kez integralleme yapılırsa

$$(\alpha\beta^3-\alpha^3\beta)U''+(4\varepsilon\alpha-6\gamma\delta)U+6\alpha\beta U^2=0 \tag{4.10}$$

denklemi elde edilir. Denklem (4.10)'dan dengelenme sayısı, homojen dengelenme ilkesinden yararlanarak, $U''\sim U^2$ terimleri kullanılarak

$N+2=2N$

$N=2$

olarak bulunur.

Bu dengelenme sayısı (4.3) denkleminde yerine yazılırsa

$$U(\xi)=a_0+\sum_{k=0}^{4}\alpha_k\theta^k(\xi) \tag{4.11}$$

şeklinde olup

$$U(\xi)=\alpha_0+\alpha_1\theta(\xi)+\alpha_2\theta^2(\xi)+\alpha_3\theta^3(\xi)+\alpha_4\theta^4(\xi) \tag{4.12}$$

halini alır ve denklem (4.4) ile birlikte denklem (4.10)'da yerine yazılır. Böylece $\theta(\xi)$ nin kuvvetlerine göre sonlu bir seri elde edilmiş olur. Bu ifadede $\theta(\xi)$ nin aynı kuvvetlerinin katsayıları sıfıra eşitlenerek aşağıdaki denklemler oluşturulur:

θ^0: $4\alpha\varepsilon\alpha_0 - 6\gamma\delta\alpha_0 + 6\alpha\beta\alpha_0^2 + 2\alpha\beta^3\alpha_2h_0 - 2\alpha^3\beta\alpha_2h_0$;

θ^1: $4\alpha\varepsilon\alpha_1 - 6\gamma\delta\alpha_1 + \alpha\beta^3\alpha_1h_2 + 6\alpha\beta^3\alpha_3h_0 - \alpha^3\beta\alpha_1h_2 - 6\alpha^3\beta\alpha_3h_0 + 12\alpha\beta\alpha_0\alpha_1$;

θ^2: $4\alpha\varepsilon\alpha_2 - 6\gamma\delta\alpha_2 + 6\alpha\beta\alpha_1^2 + 4\alpha\beta^3\alpha_2h_2 + 12\alpha\beta^3\alpha_4h_0 - 4\alpha^3\beta\alpha_2h_2 - 12\alpha^3\beta\alpha_4h_0 + 12\alpha\beta\alpha_0\alpha_2$;

θ^3: $4\alpha\varepsilon\alpha_3 - 6\gamma\delta\alpha_3 + 2\alpha\beta^3\alpha_1h_4 + 9\alpha\beta^3\alpha_3h_2 - 2\alpha^3\beta\alpha_1h_4 - 9\alpha^3\beta\alpha_3h_2 + 12\alpha\beta\alpha_0\alpha_3 + 12\alpha\beta\alpha_1\alpha_2$;

θ^4: $4\alpha\varepsilon\alpha_4 - 6\gamma\delta\alpha_4 + 6\alpha\beta\alpha_2^2 + 6\alpha\beta^3\alpha_2h_4 + 16\alpha\beta^3\alpha_4h_2 - 6\alpha^3\beta\alpha_2h_4 - 16\alpha^3\beta\alpha_4h_2 + 12\alpha\beta\alpha_0\alpha_4 + 12\alpha\beta\alpha_1\alpha_3$;

θ^5: $3\alpha\beta^3\alpha_1h_6 + 12\alpha\beta^3\alpha_3h_4 - 3\alpha^3\beta\alpha_1h_6 - 12\alpha^3\beta\alpha_3h_4 + 12\alpha\beta\alpha_1\alpha_4 + 12\alpha\beta\alpha_2\alpha_3$;

θ^6: $6\alpha\beta\alpha_3^2 + 8\alpha\beta^3\alpha_2h_6 + 20\alpha\beta^3\alpha_4h_4 - 8\alpha^3\beta\alpha_2h_6 - 20\alpha^3\beta\alpha_4h_4 + 12\alpha\beta\alpha_2\alpha_4$;

θ^7: $- 15\alpha_3h_6\alpha^3\beta + 15\alpha_3h_6\alpha\beta^3 + 12\alpha_3\alpha_4\alpha\beta$;

θ^8: $-\,24h_6\alpha^3\beta\alpha_4 + 24h_6\alpha\beta^3\alpha_4 + 6\alpha\beta\alpha_4^2$;

Yukarıda verilen cebirsel denklem sistemi Matlab uygulaması kullanılarak çözülür ve aşağıdaki çözüm aileleri elde edilir:

Aile 1:

$$\alpha_0 = \frac{(\frac{4\beta^3}{3}-\frac{4}{3})16\sqrt{\frac{3\beta^4 h_4^4}{128}-\frac{3\beta^2 h_4^4}{25b}-\frac{3\beta^6 h_4^4}{256}+\frac{\varepsilon^2 h_6^2}{4}-\frac{9\gamma^2\lambda^2 h_6^2}{16}-\frac{3\varepsilon\gamma\delta h_6^2}{4}}-9\beta h_4^2+9\beta^3 h_4^2}{32(\beta h_6-\beta^3 h_6)-\frac{4\varepsilon h_6+3\beta h_4^2-3\beta^3 h_4^2-6\gamma\delta h_6}{12\beta h_6}},$$

$$\alpha_1 = \alpha_3 = 0\ ,\ \alpha_2 = -2h_4(\beta^2-1)\ ,\ \alpha_4 = -4h_6(\beta^2-1)\ ,$$

$$h_0 = \frac{h_4\sqrt{6\beta^4 h_4^4-3\beta^2 h_4^4-3\beta^6 h_4^4+64\varepsilon h_6^2+144\gamma^2\lambda^2 h_6^2-192\varepsilon\delta\gamma h_6^2}-\beta h_4^2+\beta^3 h_4^2}{64\beta h_6^2(\beta^2-1)}\ , \qquad (4.13)$$

$$h_4 = h_4\ ,\quad h_6 = h_6\ ,$$

$$h_2 = \frac{\sqrt{6\beta^4 h_4^4-3\beta^2 h_4^4-3\beta^6 h_4^4+64\varepsilon^2 h_6^2+144\gamma^2\delta^2 h_6^2-192\varepsilon\gamma\delta h_6^2}-9\beta h_4^2+9\beta^3 h_4^2}{64\beta h_6^2(\beta^2-1)}\ ,$$

$$\alpha = 1\ ,\ \beta = \beta\ ,\ \varepsilon = \varepsilon\ ,\ \gamma = \gamma\ ,\ \delta = \delta\ .$$

Aile 2 :

$$\alpha_0 = -\frac{(2\alpha\varepsilon-3\gamma\delta+2\alpha\beta^3 h_2-2\alpha^3\beta h_2)}{6\alpha\beta}\ ,\ \alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0\ ,\ \alpha_2 = h_4(\alpha^2-\beta^2)\ ,$$

$$h_0 = \frac{-(2\alpha\varepsilon-3\gamma\delta-2\alpha\beta^3 h_2+2\alpha^3\beta h_2)(2\alpha\varepsilon-3\lambda\delta+2\alpha\beta^3 h_2-2\alpha^3\beta h_2)}{12\alpha^2\beta^2 h_4(\alpha^2-\beta^2)^2}\ , \qquad (4.14)$$

$$h_6 = 0\ ,\ h_2 = h_2\ ,\ h_4 = h_4\ ,$$

$$\alpha = \alpha\ ,\ \beta = \beta\ ,\ \varepsilon = \varepsilon\ ,\ \gamma = \gamma\ ,\ \delta = \delta\ .$$

Çözüm aileleri, Tablo 3.1 kullanılarak ve denklem (4.5), (4.7), (4.8) ve (4.12)'de yerine yazılarak Fokas denkleminin birçok sayıda kesin çözümleri elde edilir. Örneğin;

Tablo 3.1'in 1.satırı alınarak;

$l_0 = 1, l_2 = -(1+m^2)$ ve $l_4 = m^2$ ise

$\theta(\xi) = sn(\xi)$ veya $\theta(\xi) = cd(\xi)$

dir.

Aile 1 için:

Denklem (4.5)’ten

$$\theta(\xi) = \frac{sn(\xi)}{\sqrt{f sn^2(\xi) + g}}$$

veya

$$\theta(\xi) = \frac{cd(\xi)}{\sqrt{f cd^2(\xi) + g}}$$

olup burada f ve g

$$h_4^2(-(1+m^2) - h_2)[9m^2 - (-(1+m^2) - h_2)(-2(1+m^2) + h_2)] + 3h_6[3m^2 - ((1+m^2)^2 - h_2^2)]^2 = 0 \quad (4.15)$$

kısıtlama koşulu altında

$$f = \frac{h_4(-(1+m^2) - h_2)}{(-(1+m^2)-h_2)^2 + 3m^4 + 2(1+m^2)(-(1+m^2)-h_2)} \; ,$$

$$g = \frac{3h_4}{(-(1+m^2)-h_2)^2 + 3m^4 + 2(1+m^2)(-(1+m^2)-h_2)} \quad (4.16)$$

dir. Böylece Fokas denkleminin kesin çözümü

$$U(\xi) = \alpha_0 - 2h_4(\beta^2 - 1)\frac{\phi^2(\xi)}{f\phi^2(\xi)+g} - 4h_6(\beta^2 - 1)\frac{\phi^4(\xi)}{(f\phi^2(\xi)+g)^2} \quad (4.17)$$

Jacobi eliptik fonksiyon şeklinde elde edilir. Burada h_2 , h_4 ve h_6 denklem (4.13)’te verilmiştir ve $\xi = x + \beta y + \delta\omega + \gamma z + \varepsilon t$ dir.

Tablo 3.2’den $m \to 0$ için $sn(\xi, m) = sin(\xi)$ olduğundan

$$\theta(\xi) = \frac{sin(\xi)}{\sqrt{f sin^2(\xi) + g}}$$

olup

$$U(\xi) = \alpha_0 - 2h_4(\beta^2 - 1)\frac{sin^2(\xi)}{f sin^2(\xi)+g} - 4h_6(\beta^2 - 1)\frac{sin^4(\xi)}{(f sin^2(\xi)+g)^2} \quad (4.18)$$

trigonometrik fonksiyon çözümleri bulunmuş olur. Burada f ve g

$$h_4^2(-1 - h_2)[(-1 - h_2)(-2 + h_2)] + 3h_6[(1^2 - h_2^2)]^2 = 0 \quad (4.19)$$

kısıtlama koşulu altında

$f = \frac{h_4(-1-h_2)}{(-1-h_2)^2+2(-1-h_2)}$,

$$g = \frac{3h_4}{(-1-h_2)^2+2(-1-h_2)} \tag{4.20}$$

dir.

Tablo 3.2'den $m \to 1$ için $sn(\xi, m) = tanh(\xi)$ olduğundan

$$\theta(\xi) = \frac{tanh(\xi)}{\sqrt{ftanh^2(\xi) + g}}$$

olup

$$U(\xi) = \alpha_0 - 2h_4(\beta^2 - 1)\frac{tanh^2(\xi)}{ftanh^2(\xi) + g} - 4h_6(\beta^2 - 1)\frac{tanh^4(\xi)}{(ftanh^2(\xi) + g)^2}$$

hiperbolik fonksiyon çözümleri bulunmuş olur. Burada f ve g

$$h_4^2(-2 - h_2)[9 - (-2 - h_2)(-4 + h_2)] + 3h_6[3 - ((2)^2 - h_2^2)]^2 = 0 \tag{4.21}$$

kısıtlama koşulu altında

$f = \frac{h_4(-2-h_2)}{(-2-h_2)^2+3+4(-2-h_2)}$,

$$g = \frac{3h_4}{(-2-h_2)^2+3+4(-2-h_2)} \tag{4.22}$$

dir.

Tablo 3.2'den $m \to 0$ için $cd(\xi, m) = cos(\xi)$ olduğundan

$$\theta(\xi) = \frac{cos(\xi)}{\sqrt{fcos^2(\xi) + g}}$$

olup

$$U(\xi) = \alpha_0 - 2h_4(\beta^2 - 1)\frac{cos^2(\xi)}{fcos^2(\xi) + g} - 4h_6(\beta^2 - 1)\frac{cos^4(\xi)}{(fcos^2(\xi) + g)^2}$$

trigonometrik fonksiyon çözümleri bulunmuş olur. Burada f ve g

$$h_4^2(-1 - h_2)[(-1 - h_2)(-2 + h_2)] + 3h_6[(1^2 - h_2^2)]^2 = 0 \tag{4.23}$$

kısıtlama koşulu altında

$f = \frac{h_4(-1-h_2)}{(-1-h_2)^2+2(-1-h_2)}$,

$$g = \frac{3h_4}{(-1-h_2)^2+2(-1-h_2)} \tag{4.24}$$

dir.

Tablo 3.2'den $m \to 1$ için $cd(\xi, m) = 1$ olduğundan

$$\theta(\xi) = \frac{1}{\sqrt{f+g}}$$

olup

$$U(\xi) = \alpha_0 - 2h_4(\beta^2 - 1)\frac{1}{f+g} - 4h_6(\beta^2 - 1)\frac{1}{(f+g)^2}$$

Rasyonel fonksiyon çözümleri bulunmuş olur. Burada f ve g

$$h_4^2(-2 - h_2)[9 - (-2 - h_2)(-4 + h_2)] + 3h_6[3 - ((2)^2 - h_2^2)]^2 = 0 \tag{4.25}$$

kısıtlama koşulu altında

$$f = \frac{h_4(-2-h_2)}{(-2-h_2)^2+3+4(-2-h_2)} \ ,$$

$$g = \frac{3h_4}{(-2-h_2)^2+3+4(-2-h_2)} \tag{4.26}$$

dir.

Aile 2 için:

Denklem (4.5)'ten

$$\theta(\xi) = \frac{sn(\xi)}{\sqrt{f sn^2(\xi) + g}}$$

veya

$$\theta(\xi) = \frac{cd(\xi)}{\sqrt{f cd^2(\xi) + g}}$$

olup burada f ve g

$$h_4^2(-(1 + m^2) - h_2)[9m^2 - (-(1 + m^2) - h_2)(-2(1 + m^2) + h_2)] = 0$$

kısıtlama koşulu altında

$$f = \frac{h_4(-(1+m^2)-h_2)}{(-(1+m^2)-h_2)^2+3m^4+2(1+m^2)(-(1+m^2)-h_2)} \ ,$$

$$g = \frac{3h_4}{(-(1+m^2)-h_2)^2+3m^4+2(1+m^2)(-(1+m^2)-h_2)} \tag{4.27}$$

dir. Böylece Fokas denkleminin kesin çözümü

$$U(\xi) = \alpha_0 + h_4(\alpha^2 - \beta^2)\frac{\phi^2(\xi)}{f\phi^2(\xi)+g} \tag{4.28}$$

Jacobi eliptik fonksiyon şeklinde elde edilir. Burada h_2 , h_4 ve h_6 denklem (4.14)'te verilmiştir ve $\xi = \alpha x + \beta y + \delta\omega + \gamma z + \varepsilon t$ dir.

Tablo 3.2'den $m \to 0$ için $sn(\xi, m) = sin(\xi)$ olduğundan

$$\theta(\xi) = \frac{sin(\xi)}{\sqrt{f sin^2(\xi) + g}}$$

olup

$$U(\xi) = \alpha_0 + h_4(\alpha^2 - \beta^2)\frac{sin^2(\xi)}{f sin^2(\xi) + g}$$

trigonometrik fonksiyon çözümleri bulunmuş olur. Burada f ve g

$$h_4^2(-1 - h_2)[-(-1 - h_2)(-2 + h_2)] = 0 \tag{4.29}$$

kısıtlama koşulu altında

$$f = \frac{h_4(-1-h_2)}{(-1-h_2)^2+2(-1-h_2)} \ ,$$

$$g = \frac{3h_4}{(-1-h_2)^2+2(-1-h_2)} \tag{4.30}$$

dir.

Tablo 3.2'den $m \to 1$ için $sn(\xi, m) = tanh(\xi)$ olduğundan

$$\theta(\xi) = \frac{tanh(\xi)}{\sqrt{f tanh^2(\xi) + g}}$$

olup

$$U(\xi) = \alpha_0 + h_4(\alpha^2 - \beta^2)\frac{tanh^2(\xi)}{f tanh^2(\xi) + g}$$

hiperbolik fonksiyon çözümleri bulunmuş olur. Burada f ve g

$$h_4^2(-2 - h_2)[9 - (-2 - h_2)(-4 + h_2)] = 0 \tag{4.31}$$

kısıtlama koşulu altında

$$f = \frac{h_4(-2-h_2)}{(-2-h_2)^2+3+4(-2-h_2)} \ ,$$

$$g = \frac{3h_4}{(-2-h_2)^2+3+4(-2-h_2)} \tag{4.32}$$

dir.

Tablo 3.2'den $m \to 0$ için $cd(\xi, m) = cos(\xi)$ olduğundan

$$\theta(\xi) = \frac{cos(\xi)}{\sqrt{fcos^2(\xi) + g}}$$

olup

$$U(\xi) = \alpha_0 + h_4(\alpha^2 - \beta^2)\frac{cos^2(\xi)}{fcos^2(\xi) + g}$$

trigonometrik fonksiyon çözümleri bulunmuş olur. Burada f ve g

$$h_4^2(-1-h_2)[-(-1-h_2)(-2+h_2)] = 0 \tag{4.33}$$

kısıtlama koşulu altında

$$f = \frac{h_4(-1-h_2)}{(-1-h_2)^2+2(-1-h_2)} \ ,$$

$$g = \frac{3h_4}{(-1-h_2)^2+2(-1-h_2)} \tag{4.34}$$

dir.

Tablo 3.2'den $m \to 1$ için $cd(\xi, m) = 1$ olduğundan

$$\theta(\xi) = \frac{1}{\sqrt{f + g}}$$

olup

$$U(\xi) = \alpha_0 + h_4(\alpha^2 - \beta^2)\frac{1}{f + g}$$

rasyonel fonksiyon çözümleri bulunmuş olur. Burada f ve g

$$h_4^2(-2-h_2)[9-(-2-h_2)(-4+h_2)] = 0 \tag{4.35}$$

kısıtlama koşulu altında

$$f = \frac{h_4(-2-h_2)}{(-2-h_2)^2+3+4(-2-h_2)} \ ,$$

$$g = \frac{3h_4}{(-2-h_2)^2+3+4(-2-h_2)} \tag{4.36}$$

dir.

Tablo 3.1'in 2.satırını alırsak;

$l_0 = 1 - m^2$, $l_2 = (2m^2 - 1)$ ve $l_4 = -m^2$ ise

$U(\xi) = cn(\xi)$

dir. Denklem (4.5)'ten

$$\theta(\xi) = \frac{cn(\xi)}{\sqrt{f cn^2(\xi) + g}}$$

olup

$$U(\xi) = \alpha_0 - 2h_4(\beta^2 - 1)\frac{\phi^2(\xi)}{f\phi^2(\xi) + g} - 4h_6(\beta^2 - 1)\frac{\phi^4(\xi)}{(f\phi^2(\xi) + g)^2}$$

Jacobi eliptik fonksiyon şeklinde çözümleri bulunmuş olur. Burada h_2 , h_4 ve h_6 denklem (4.13)'te verilmiştir ve $\xi = x + \beta y + \delta\omega + \gamma z + \varepsilon t$ dir.

Ayrıca f ve g

$$h_4^2\big((2m^2 - 1) - h_2\big)\big[-9m^2(1 - m^2) - \big((2m^2 - 1) - h_2\big)(2(2m^2 - 1) + h_2)\big] + 3h_6[-3m^2(1 - m^2) - ((2m^2 - 1)^2 - h_2^2)]^2 = 0 \quad (4.37)$$

kısıtlama koşulu altında

$$f = \frac{h_4\big((2m^2-1)-h_2\big)}{\big((2m^2-1)-h_2\big)^2-3m^2(1-m^2)-2(2m^2-1)\big((2m^2-1)-h_2\big)} \quad ,$$

$$g = \frac{3h_4(1-m^2)}{\big((2m^2-1)-h_2\big)^2-3m^2(1-m^2)-2(2m^2-1)\big((2m^2-1)-h_2\big)} \quad (4.38)$$

şeklindedir.

Tablo 3.2'den $m \to 0$ için $cn(\xi, m) = \cos(\xi)$ olduğundan

$$\theta(\xi) = \frac{cos(\xi)}{\sqrt{f cos^2(\xi) + g}}$$

olup

$$U(\xi) = \alpha_0 - 2h_4(\beta^2 - 1)\frac{cos^2(\xi)}{f cos^2(\xi) + g} - 4h_6(\beta^2 - 1)\frac{cos^4(\xi)}{(f cos^2(\xi) + g)^2}$$

trigonometrik fonksiyon çözümleri bulunmuş olur. Burada f ve g

$$h_4^2\big((-1) - h_2\big)\big[-\big((-1) - h_2\big)(2(-1) + h_2)\big] + 3h_6[-((-1)^2 - h_2^2)]^2 = 0$$

kısıtlama koşulu altında

$$f = \frac{h_4\big((-1)-h_2\big)}{\big((-1)-h_2\big)^2-2(-1)\big((-1)-h_2\big)} \ ,$$

$$g = \frac{3h_4}{\big((-1)-h_2\big)^2-2(-1)\big((-1)-h_2\big)} \qquad (4.39)$$

dir.

Tablo 3.2'den $m \to 1$ için $cn(\xi, m) = \text{sech}(\xi)$ olduğundan

$$\theta(\xi) = \frac{sech(\xi)}{\sqrt{f sech^2(\xi) + g}}$$

olup

$$U(\xi) = \alpha_0 - 2h_4(\beta^2 - 1)\frac{sech^2(\xi)}{f sech^2(\xi) + g} - 4h_6(\beta^2 - 1)\frac{sech^4(\xi)}{(f sech^2(\xi) + g)^2}$$

hiperbolik fonksiyon çözümleri bulunmuş olur. Burada f ve g

$$h_4^2(1 - h_2)[-(1 - h_2)(2 + h_2)] + 3h_6[-(1^2 - h_2^2)]^2 = 0 \qquad (4.40)$$

kısıtlama koşulu altında

$$f = \frac{h_4(1-h_2)}{(1-h_2)^2-2(1-h_2)} \ ,$$

$$g = \frac{0}{(1-h_2)^2-2(1-h_2)} \qquad (4.41)$$

dir.

Aile 2 için:

Denklem (4.5)'ten

$$\theta(\xi) = \frac{cn(\xi)}{\sqrt{f cn^2(\xi) + g}}$$

olup burada f ve g

$$h_4^2\big((2m^2 - 1) - h_2\big)\big[9m^4 - 9m^2 - \big((2m^2 - 1) - h_2\big)(2(2m^2 - 1) + h_2)\big] = 0$$

kısıtlama koşulu altında

$$f = \frac{h_4\big((2m^2-1)-h_2\big)}{\big((2m^2-1)-h_2\big)^2-3m^2(1-m^2)-2(2m^2-1)\big((2m^2-1)-h_2\big)} \ ,$$

$$g = \frac{3h_4(1-m^2)}{\left((2m^2-1)-h_2\right)^2 - 3m^2(1-m^2) - 2(2m^2-1)\left((2m^2-1)-h_2\right)} \tag{4.42}$$

dir. Böylece Fokas denkleminin kesin çözümü

$$U(\xi) = \alpha_0 + h_4(\alpha^2 - \beta^2)\frac{\phi^2(\xi)}{f\phi^2(\xi) + g}$$

Jacobi eliptik fonksiyon şeklinde elde edilir. Burada h_2 , h_4 ve h_6 denklem (4.14)'te verilmiştir ve $\xi = \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta\omega + \varepsilon t$ dir.

Tablo 3.2'den $m \to 0$ için $cn(\xi, m) = \cos(\xi)$ olduğundan

$$\theta(\xi) = \frac{cos(\xi)}{\sqrt{f cos^2(\xi) + g}}$$

olup

$$U(\xi) = \alpha_0 + h_4(\alpha^2 - \beta^2)\frac{cos^2(\xi)}{f cos^2(\xi) + g}$$

trigonometrik fonksiyon çözümleri bulunmuş olur. Burada f ve g

$$h_4^2\left((-1) - h_2\right)\left[-\left((-1) - h_2\right)(2(-1) + h_2)\right] = 0 \tag{4.43}$$

kısıtlama koşulu altında

$$f = \frac{h_4\left((-1)-h_2\right)}{\left((-1)-h_2\right)^2 - 2(-1)\left((-1)-h_2\right)} \ ,$$

$$g = \frac{3h_4}{\left((-1)-h_2\right)^2 - 2(-1)\left((-1)-h_2\right)} \tag{4.44}$$

dir.

Tablo 3.2'den $m \to 1$ için $cn(\xi, m) = sech(\xi)$ olduğundan

$$\theta(\xi) = \frac{\mathrm{sech}(\xi)}{\sqrt{f\,\mathrm{sech}^2(\xi) + g}}$$

olup

$$U(\xi) = \alpha_0 + h_4(\alpha^2 - \beta^2)\frac{sech^2(\xi)}{f sech^2(\xi) + g}$$

hiperbolik fonksiyon çözümleri bulunmuş olur. Burada f ve g

$$h_4^2(1 - h_2)[-(1 - h_2)(2 + h_2)] = 0 \tag{4.45}$$

kısıtlama koşulu altında

$$f = \frac{h_4(1-h_2)}{(1-h_2)^2-2(1-h_2)} \ ,$$

$$g = \frac{0}{(1-h_2)^2-2(1-h_2)} \qquad (4.46)$$

dir.

5
SONUÇ

Bu çalışmada, (4+1)-boyutlu lineer olmayan Fokas denkleminin kesin çözümlerini bulmak için ϕ^6- model açılım yöntemi ile yeni ϕ^6- model açılım yöntemi birlikte ele alındı.

Fokas denklemi integrallenebilen hiperbolik denklemlerin genel bir formunu temsil eder ve Fokas denkleminin integrallenebilme özelliği bu denklemin kesin çözümlerinin araştırılabileceği anlamına gelir. Birçok bilim insanı integrallenebilen bir denklem olan (4+1)-boyutlu Fokas denkleminin kesin çözümlerini araştırmak için çeşitli yöntemler geliştirmiş ve bu yöntemleri Fokas denklemine uygulamışlardır. Bu tez çalışmasında kullanılmış olan yöntem bildiğimiz kadarıyla ilk defa (4+1)-boyutlu Fokas denkleminin kesin çözümlerinin araştırılmasında kullanılmıştır.

Literatürde daha önce çeşitli yöntemlerle bulunmuş çözümler ile karşılaştırıldığında bu çalışmadan elde edilen çözümlerin yeni olduğu sonucuna varılmıştır.

Sonuç olarak, önerilen yöntemler sayesinde (4+1)-boyutlu Fokas denkleminin çözümleri etkin bir şekilde elde edilmiş ve bu çözümlerin, denklemin dinamik yapısını anlamada önemli bir rol oynadığı görülmüştür.

KAYNAKÇA

[1] A.S. Fokas, "Integrable nonlinear evolution partial differential equations in 4+2 and 3+1 dimensions," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 96, no. 19, 2006, Art. no. 190201.

[2] A. H. Arnous, M.Mirzazadeh Q. Zhou, S. P Moshokoa, A. Biswas, M. Belic, "Soliton solutions to resonant nonlinear schrödinger's equation with time-dependent cofficients by modified simple equation method," *Optik*, vol. 127, pp. 11450-11459, 2016.

[3] A. Biswas, Y. Yıldırım, E. Yasar, Q. Zhou, S. P. Moshokoa, M. Belic, "Optical soliton perturbation with resonant nonlinear schrödinger's equaiton having full nonlinearity by modified simple equation method," *Optik*, vol. 160, pp. 33-43, 2018.

[4] A. Biswas, M. O. Al-Amr, H. Rezazadeh, M. Mirzazedeh, M. Eslami, Q. Zhou, S. P. Moshokoa, M. Belic, "Resonant optical solitons with dual-power law nonlinearity and fractional temporal evolution," *Optik,* vol. 165, pp. 233-239, 2018.

[5] A. Biswas, A. J. M. Q. Jawad Zhou, "Resonant optical solitons with anti-cubiic nonlinearity," *Optik*, vol. 157, pp. 525-531, 2018.

[6] M. Mirzazadeh, M. Eslami, D. Milovic, A. Biswas, "Topological solitons of resonant nonlinear schrödinger's equation with dual-power law nonlinearity by G'/G expansion technique," *Optik*, vol. 125, pp. 5480-5489, 2014.

[7] A. H. Arnous, M. Mirzazadeh, Q. Zhou, M. F. Mahmood, A. Biswas, M. Belic, "Optical solitons with resonant nonlinear schrödinger's equation using G'/G expansion scheme," *Optoelectron, Adv. Mater-Rapid Commun*, vol. 9, pp. 1214-1220, 2015.

[8] M. Mirzazadeh, M. Ekici, Q. Zhou, A. Biswas, "Exact solitons to generalized resonant dispersive nonlinear schrödinger's equation with power law nonlinearity," *Optik* , vol. 130, pp. 178-183, 2017.

[9] Q. Zhou, X. Xiong, Q. Zhu, Y. Liu, H. Yu, P. Yao, A. Biswas, M. Belic, "Optical solitons with nonlinear dispersion in polynominal lax medium," *J. Optoelectron Adv. Math*, vol. 17, pp. 82-86, 2015.

[10] E. M. E. Zayed, A-Ghani Al-Nowehy, "Many new exact solutions to the higher order nonlinear Schrödinger equation with derivative non-kerr nonlinear terms using three different techniques," *Optik,* vol. 143, pp. 84-103, 2017.

[11] E. M. E. Zayed, A-Ghani Al-Nowehy, "Jacobi elliptic solutions, solitons and other solutions for the nonlinear Schrödinger equation with fourth-order dispersion and cubic-quintic nonlinearity," *Euro, Phys J. Plus*, vol. 132, 2017, Art. no. 475, 2017.

[12] E. M. E Zayed, A-Ghani Al Nowehy, "The ϕ^6-model expansion method for solving the nonlinear conformable time-fractional Schrödinger equation with fourth-order dispersion and parabolic law nonlinearity," *Opt. Quant. Electron*, vol. 50, 2018, Art. no. 164.

[13] E. M. E. Zayed, A-Ghani Al Nowehy, M. E. M. Elshater, "New ϕ^6-model expansion method and its applications to the resonant nonlinear Schrödinger equation with parabolic law nonlinearity," *Eur. Phys. J. Plus*, vol. 133, 2018, Art. no. 417.

[14] S. Tuluce Demiray, H. Bulut, "A new method for (4+1)-dimensional fokas equation," *Entropy*, vol. 17, pp. 6025-6043, 2015.

[15] L. Dednath, *Nonlinear partial differential equations for scientists and engineers*, Birkhauser, Second Edition 1997.

[16] K. Koca, *Kısmi Türevli Denklemler*, Gündüz Eğitim ve Yayıncılık, 2001

[17] G. Akram, M. Sadaf, M. Atta Ullah Khan, "Dynamics investigation of the (4+1)-dimensional fokas equation using two effective techniques," *Result in Physics*, vol. 42, 2022, Art. no. 105994.

[18] M.O.Al-Amr, S. El-Ganaini "New exact travelling wave solutions of the (4+1)-dimensional fokas equation," *Computers and applied mathematics*, vol. 74, pp. 1274-1287, 2017.

[19] S. Sarwar, "New soliton wave structures of nonlinear (4+1)-dimensional fokas dynamical model by using different methods," *Alexandria Engineering Journal*, vol. 60, pp. 795-803, 2021.

[20] Y. He, "Exact solutions for (4+1)-dimensional nonlinear fokas equation using extended F-expansion method and its variant," *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2014, 2014, Art. no. 972519.

[21] B. Ghanbari, D. Baleanu, "A novel technique to construct exact solutions for nonlinear partial differential equations," *Eur. Phys. J. Plus*, vol. 134, 2019, Art. no. 506, 2019.

[22] H. U. Rehman, A. U Awan, S. A. Allahyani, E. M. Tag-Eldin, M. A. Binyamin, S. Yasin, "Exact solution of paraxial wave dynamical model with Kerr Media by using ϕ^6- model expansion technique," *Results in Physics*, vol. 42, 2002, Art. no. 105975.

[23] E. M. E. Zayed, A. G. Al-Nowehy, "New generalized ϕ^6-model expansion method and its applications to the (3+1) dimensional resonant nonlinear Schrödinger equation with parabolic law nonlinearity," *Optik*, vol. 214, 2020, Art. no. 164702.

[24] K. Bibi, "The ϕ^6-model expansion method for solving the Radhakrishnan-Kundu-Lakshmanan equation with Kerr law nonlinearity," *Optik*, vol. 234, 2021, Art. no. 166614.

TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR

Konferans Bildirileri

1. T. Yaşa, S. Selim, “ϕ^6-model genişletme yöntemi kullanılarak Fokas denklemi için kesin çözümler”, *4. Ulusal Bilimsel Araştırmalar Kongresi*, Ankara, TÜRKİYE, 16-17 Temmuz 2024, ss. 99.

Projeler

1. T. Yaşa (Araştırmacı), S. Selim (Yürütücü), Proje ID: FYL-2024-6326, Proje Başlığı: Fokas Denkleminin Kesin Çözümleri, Yıldız Teknik Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeler Birimi, Yüksek Lisans Tezi Projesi.