

**T.C.
UŞAK ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**ÇEŞİTLİ UZAYLARDA ASİMPOTOTİK DÜZENLİ
DÖNÜŞÜMLER VE İLGİLİ SABİT NOKTA TEOREMLERİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İbrahim NAĞAÇ

ARALIK, 2024

UŞAK

**T.C.
UŞAK ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**ÇEŞİTLİ UZAYLARDA ASİMPTOTİK DÜZENLİ
DÖNÜŞÜMLER VE İLGİLİ SABİT NOKTA TEOREMLERİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İbrahim NAĞAÇ

UŞAK, 2024

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

İbrahim NAĞAÇ



ÇEŞİTLİ UZAYLARDA ASİMPTOTİK DÜZENLİ DÖNÜŞÜMLER VE İLGİLİ SABİT NOKTA TEOREMLERİ

Yüksek Lisans Tezi

İbrahim NAĞAÇ

UŞAK ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
Matematik Anabilim Dalı

Aralık 2024

ÖZET

Birinci bölümde çalışmanın diğer kısımlarında kullanılacak temel tanımlar ve kavramlar verilmektedir. İkinci bölümde; metrik uzay, yakınsaklık, süreklilik, asimptotik düzenli dönüşüm, büzülme, b -metrik uzay gibi temel kavram ve örnekler sunulmuştur. Üçüncü bölümde ise Metrik uzay yapısından daha geniş olan b - Metrik uzay yapısı altında bazı önemli sabit nokta teoremlerinin genişlemeleri verilmiştir. Burada, sabit nokta teoremleri; asimptotik düzenlilik ve Kompaktlık kavramları altında incelenmiş ve Asimptotik düzenli dönüşümler ile ilgili farklı uygulamalar b -metrik uzaylarda sunulmuştur.

Anahtar Kelimeler : Asimptotik Düzenli Dönüşümler, Sabit Nokta, b -Metrik Uzay,
Büzülme Dönüşümü.

Sayfa Adedi : 49

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Kenan TAŞ

**ASYMPTOTICALLY REGULAR MAPPINGS IN SEVERAL SPACES AND
RELATED FIXED POINT THEOREMS**

M.Sc. Thesis

İbrahim NAĞAÇ

**UŞAK UNIVERSITY
GRADUATE EDUCATION INSTITUTE
Department of Mathematics**

December 2024

ABSTRACT

In the first chapter, the fundamental definitions and concepts that will be used in the subsequent parts of the study are presented. In the second chapter, basic concepts and examples such as metric space, convergence, continuity, asymptotic regular transformation, contraction, and b -metric space are introduced. In the third chapter, some important extensions of fixed-point theorems are provided under the b -metric space structure, which is broader than the metric space structure. Here, the fixed-point theorems are examined under the concepts of asymptotic regularity and compatibility, and various applications related to asymptotic regular transformations are presented in b -metric spaces.

Keywords : Asymptotically Regular Mappings, Fixed Point, b -Metric Space,
Contraction Map.

Number of pages : 49

Advisor : Prof. Dr. Kenan TAŞ

TEŞEKKÜR

Tez çalışmam için konu belirlenmesi, çalışmalarımın yönlendirilmesi ve tezimin öncesinde ve yazımı aşamasında yapmış olduğu çok değerli katkılarından dolayı danışman hocam Sayın Prof. Dr. Kenan TAŞ'a teşekkürü bir borç bilirim.

Ayrıca, hayatım boyunca her konuda manevi destekleriyle hep yanımda olan eşim Hayriye, çocuklarım Cemil Malik ve Nisanur'a teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
SİMGELER VE KISALTMALAR	v
1.GİRİŞ	1
2. ÖNEMLİ TANIMLAR	4
2.1. SABİT NOKTA TANIMI	14
3. SABİT NOKTA TEOREMLERİ	20
3.1. b-METRİK UZAY	20
3.2. ASİMPTOTİK DÜZENLİLİK	26
3.3. KOMPAKTLIK	34
3.4. GENELLEŞTİRMELER	41
3.5. SONUÇ ve TARTIŞMA	45
KAYNAKLAR	46
ÖZGEÇMİŞ	49

SİMGELER ve KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simge	Açıklama
(X, d)	X Uzayında d Metrik Uzayı
$\mathbb{N}$	Doğal Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi
$F(T)$	T nin Sabit noktalarının Kümesi
$T : X \rightarrow X$	T , X den X e bir dönüşüm
$d(x, y)$	x ile y arası uzaklık

1. GİRİŞ

Uzunluk kavramı insanlık tarihiyle yaşıttır ve ilk kez Euclid tarafından doğru biçimde formüle edilmiştir. Esas olarak Euclidean Metrik; iki nokta arasındaki mesafeyi, bu noktaları birleştiren düz bir çizgi parçasının uzunluğu olarak tanımlamaktadır.

Metrik Uzay kavramı ise aksiyomatik olarak ilk defa 1906 yılında Maurie Frechet tarafından ortaya konulmuştur. Literatürde metriklerin çeşitli versiyonları, uyarlamaları ve genellemeleri mevcuttur. Örneğin 2-metrik, D-metrik, G-metrik, S-metrik, küme değerli metrik, bulanık metrik, simetrik metrik, quasi-metrik, partial metrik, b-metrik, ultrametrik, dislokasyonlu metrik, modüler metrik, Hausdorff metrik, koni metrik, çarpımsal metrik gibi çok sayıda metrik türü bulunmaktadır.

Sabit nokta teorisi, belirli bir f dönüşümü için

$$f(x) = x$$

şeklindeki denklemlerin çözümünün varlığı ve tekliğini inceleyen bir alan olarak tanımlanabilir. Bu teori; Topoloji, Fonksiyonel Analiz, İstatistik, Diferansiyel Denklemler, Biyoloji ve Mühendislik gibi birçok bilim dalında önemli uygulamalara sahiptir.

Birinci bölümde çalışmanın diğer kısımlarında kullanılacak temel tanımlar ve kavramlar verilecektir.

İkinci bölümde; metrik uzay, yakınsaklık, süreklilik, asimptotik düzenli dönüşüm, büzülme, b -metrik uzay gibi temel kavram ve örnekler sunulmuştur.

Üçüncü bölümde ise b - Metrik uzay yapısı altında bazı önemli teoremlerin genişlemeleri ele alınacaktır.

Bir (X, d) metrik uzayından kendisine tanımlı bir T dönüşümü, eğer X deki $\forall x, y$ ve $0 \leq a < 1$ için;

$$d(Tx, Ty) \leq ad(x, y)$$

koşulunu sağlıyorsa bu dönüşüme **daralma** ya da **büzülme** dönüşümü denir.

Bu tanımdan bütün daralma dönüşümlerinin sürekli oldukları sonucu hemence çıkarılabilecektir. Ancak bunun tersi doğru değildir, yani sürekli dönüşümlerin daralma koşulunu sağlamaları gerekmez. Bu noktada, tam metrik uzaylarda tanımlı her daralma dönüşümünün bir sabit noktaya sahip olduğunu ve bu sabit noktanın tek olduğunu belirtmemiz gerekir. Bu sonuç bizi Banach daralma prensibi olarak bilinen meşhur teorem ile tanıştıracaktır.

Non-lineer analizdeki en ünlü teoremlerden birisi olan Banach daralma (contraction) prensibi, 1922’de ortaya çıkmış ve sabit nokta teorisinin gelişimine önemli katkılarda bulunmuştur. Bu tarihten sonra sabit nokta teorisi çeşitli yönlerden genişletilmeye başlanmıştır. Büzülme dönüşümü prensibi; varlık ve teklik problemlerin çözümü için önemli bir araçtır. Sabit nokta teorisiyle ilgili çalışmalara öncülük eden isimlerden bazıları; Kannan(1968), Reich(1971), Ciric (1976), Matthews(1994), Fisher (1998), Berinde(2004), Suzuki(2008) gibi matematikçilerdir.

Bu doğrultuda önemli bir dönüm noktası, 1974’ te Ciric ’ in (Ciric, 2005) tanımladığı yeni daralma kavramıdır ve bununla birlikte Banach daralma prensibinin genelleştirilmesinin bir yönü başlamıştır. Bundan sonra, birçok araştırmacı bu özel yönde çalışarak yeni daralma tanımlamaları altında Banach daralma (contraction) prensibinin daha geniş versiyonlarını elde etmiştir.

V. Berinde tarafından tanımlanan zayıf daralma (weak contraction) (Berinde, 2007), kavramı bunlardan biridir ve zayıf daralma kümesi literatürdeki quasi daralma (quasi contraction) sınıfını kapsamaktadır. Berinde (Berinde, 2008), 2008 de bunu neredeyse daralma (almost contraction) olarak yeniden adlandırmış ve bazı açık problemlere işaret etmiştir. Bu alanda başka birçok genelleme de yapılmıştır. Bu çerçevede, B. Rhoades’in (Rhoades, 1977) makalesi büyük önem taşımaktadır. Bu çalışmada 25 farklı daralma dönüşümü listelenmiş ve bunlar karşılaştırılmıştır.

Çalışmamızda, b -metrik uzaylarda tanımlı Kannan tipi dönüşümlerin çeşitli versiyonları için sabit nokta teoremleri sunulacak ve klasik metrik uzaylardan bilinen bazı sonuçlar b -metrik uzaylar için genelleştirilecektir.

b -metrik uzay kavramı oldukça yenidir. İlk defa Backhitin(1989) tarafından ortaya atılmakla beraber, temel yapıları Czerwik(1993) ifade ve ispat etmiştir. Aydi, Boriceanu, Bata, Chug,

Du, Kir, Olaru, Olantinwa, Pacurar, Rao, Rashan ve Shi gibi matematikçiler b -metrik uzay üzerine çalışmalar yapmışlardır.



2. ÖNEMLİ TANIMLAR

Burada çalışmanın diğer kısımlarında kullanılacak temel tanımlar ve kavramlar verilecektir. (Koçak, 2011)'ın, "Genel Topolojiye Giriş" ve (Rahimov, 2006) a ait "Topolojik Uzaylar" isimli kitaplarından faydalanılmıştır.

Tanım 2.1. X boş olmayan bir küme ve $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun.

$M1) \forall x, y \in X$ için $d(x, y) \geq 0$ ve $d(x, y) = 0 \iff x = y$,

$M2) \forall x, y \in X$ için $d(x, y) = d(y, x)$,

$M3) \forall x, y, z \in X$ için $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$,

şartları sağlanıyorsa d fonksiyonuna X üzerinde bir metrik denir ve (X, d) ikilisine de **Metrik Uzay** denir. Burada (2) ve (3) özelliklerinden ;

$$\forall x, y \in X \text{ için } 0 = d(x, x) \leq d(x, y) + d(y, x) = d(x, y) + d(x, y) = 2.d(x, y),$$

olduğundan, $d(x, y) \geq 0$ olur. Yani, metrik tanımında X uzayındaki her x ve y için

$$d(x, y) \geq 0$$

ifadesi yazılmayabilir.

Not: Aslında metrik kavramı sadece aşağıdaki iki aksiyom kullanılarak da ifade edilebilir.

Diğer koşulların tamamı bu ikisi kullanılarak elde edilebilir.

$$x = y \iff \rho(x, y) = 0 \text{ (kendine uzaklık)}$$

$$\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(y, z), \forall x, y, z \in X \text{ (üçgen eşitsizliği)}$$

Örnek 2.1. $X = \mathbb{R}^n$ olmak üzere $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ve $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in X$ için;

$$\rho_\infty(x, y) = \max |x_i - y_i|$$

$(i = 1, 2, \dots, n)$ şeklinde tanımlanan $\rho_\infty : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü $\mathbb{R}^n$ üzerinde bir metriktir.

Çözüm:

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ ve $z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$ olsun.

$M_1)$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ ve $|x_i - y_i| \geq 0$ olduğundan;

$$\rho_\infty(x, y) = \max |x_i - y_i| \geq 0$$

olur. $\rho_\infty(x, y) = 0$ olması için gerek ve yeter şart $(i = 1, 2, \dots, n)$ için

$$|x_i - y_i| = 0$$

olmasıdır. Diğer taraftan $|x_i - y_i| = 0$ olması için gerek ve yeter koşul ise $x_i = y_i$ olmasıdır.

Böylece; $x = y$ olur. Yani; $\rho_\infty(x, y) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $x = y$ olmasıdır.

$M_2)$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ için $|x_i - y_i| = |y_i - x_i|$ olduğundan $\rho_\infty(x, y) = \rho_\infty(y, x)$ olur.

$M_3)$

$$\rho_\infty(x, y) = \max |x_i - y_i| = |x_{i_0} - y_{i_0}|$$

olsun. Böylece;

$$\begin{aligned} \rho_\infty(x, y) &= |x_{i_0} - y_{i_0}| \leq |x_{i_0} - z_{i_0}| + |z_{i_0} - y_{i_0}| \\ &\leq \max |x_i - z_i| + \max |z_i - y_i| \\ &\leq \rho_\infty(x, z) + \rho_\infty(z, y) \end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece ρ_∞ bir metrik olur.

Örnek 2.2. X kümesinde bir ρ metriği verilmiş olsun. $\forall x, y \in X$ için;

$$p(x, y) = \frac{\rho(x, y)}{1 + \rho(x, y)}$$

biçiminde tanımlanan p fonksiyonu X üzerinde bir metriktir.

Çözüm:

$M_1)$ $\forall x, y \in X$ için $\rho(x, y) \geq 0$ olduğundan; $p(x, y) \geq 0$ olur.

$M_2)$ $\forall x, y \in X$ için $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ olduğundan;

$$p(x, y) = \frac{\rho(x, y)}{1 + \rho(x, y)} = \frac{\rho(y, x)}{1 + \rho(y, x)} = p(y, x)$$

olur.

M_3) $f(x) = \frac{x}{1+x}$ şeklinde tanımlı $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunu göz önüne alalım.

$\forall x \in [0, \infty)$ için

$$f'(x) = \frac{x}{(1+x)^2} \geq 0$$

olduğundan f fonksiyonu artandır. $x, y, z \in X$ olsun. ρ metrik olduğundan ;

$$\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$$

olur. f artan olduğundan ;

$$f(\rho(x, z)) \leq f(\rho(x, y) + \rho(y, z))$$

olur. Buradan;

$$\begin{aligned} \frac{\rho(x, z)}{1 + \rho(x, z)} &\leq \frac{\rho(x, y) + \rho(y, z)}{1 + \rho(x, y) + \rho(y, z)} \\ &= \frac{\rho(x, y)}{1 + \rho(x, y) + \rho(y, z)} + \frac{\rho(y, z)}{1 + \rho(x, y) + \rho(y, z)} \\ &\leq \frac{\rho(x, y)}{1 + \rho(x, y)} + \frac{\rho(y, z)}{1 + \rho(y, z)} \end{aligned}$$

olur. Böylece ,

$$\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$$

elde edilir.

Tanım 2.2. X boş olmayan bir küme ve $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun.

- (1) $\forall x, y \in X$ için $d(x, y) \geq 0$ ve $x = y \implies d(x, y) = 0$
- (2) $\forall x, y \in X$ için $d(x, y) = d(y, x)$,
- (3) $\forall x, y, z \in X$ için $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$,

şartları sağlanıyorsa d fonksiyonuna X üzerinde bir sözde metrik (Pseudo metric) ve (X, d) ikilisine de **Sözde Metrik Uzay** denir.

Örnek 2.3. (X, d) bir metrik uzay olsun. $\forall x, y, z \in X$ için;

$$\rho(x, y) = \min\{1, d(x, y)\}$$

olarak tanımlayalım. Bu durumda $\rho(x, y)$, X uzayında bir sözde metrik olur. Çünkü, tanım (2.2) şartlarından (1) ve (2) kolayca sağlanır. Ayrıca,

$$\begin{aligned}\rho(x, y) = \min\{1, d(x, y)\} &\leq \min\{1, d(x, z) + d(z, y)\} \\ &\leq \min\{1, d(x, z)\} + \min\{1, d(z, y)\} \\ &= \rho(x, z) + \rho(z, y)\end{aligned}$$

olur. Böylece, (3) özelliği de gerçekleşir. Buradaki $\rho(x, y)$ bir metrik olmayıp; Sözde Metrik-tir.

Tanım 2.3. X boş olmayan bir küme olsun. $p : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu her $x, y, z \in X$ için;

- (1) $x = y \iff p(x, x) = p(x, y) = p(y, y)$,
- (2) $p(x, x) \leq p(x, y)$,
- (3) $p(x, y) = p(y, x)$,
- (4) $p(x, y) \leq p(x, z) + p(z, y) - p(z, z)$

koşullarını sağlıyorsa p fonksiyonuna X kümesi üzerinde bir kısmi metrik (partial metric) ve (X, d) ikilisine de bir kısmi metrik uzay denir .

Partial metrik uzay kavramı ilk kez (Matthews, 1992) Matthews, S.G. tarafından ortaya konmuş ve özellikle bilgisayar program döngülerinin sonsuza kadar devam etmemesini sağlamak amacıyla kullanılmıştır. Partial metrik uzaylar klasik metrik uzaylardaki $d(x, x) = 0$ koşulunun kaldırılması ile tanımlanmaktadır. Bu tür uzaylardaki ortak sabit noktanın varlığı ve tekliğini garanti eden koşullar, T. Abdeljawad, E. Karapınar ve Kenan Tas tarafından sunulmuştur (Abdeljawad ve ark., 2011), ve bu yayın partial metrik uzaylar alanında en fazla atıf alan çalışmalardan birisi olmuştur.

Tanım 2.4. (X, d) Metrik uzayında $\{x_n\}$ dizisini alalım. $\forall \epsilon > 0$ ve $n \geq n_0$ için $d(x_n, x) \leq \epsilon$ olacak biçimde bir n_0 doğal sayısı varsa $\{x_n\}$ dizisi $x \in X$ noktasına yakınsar denir.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$$

ya da $x_n \rightarrow x$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.5. X bir küme olsun. $\forall f : \mathbb{N} \rightarrow X$ fonksiyonuna X de bir dizi denir. $\forall n \in \mathbb{N}$ için, $f(n) = x_n$ ise bu dizi genellikle (x_n) veya $\{x_n\}$ şeklinde gösterilir. $\forall n \in \mathbb{N}$ için x_n değerine dizinin n . terimi denir. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x_n = x$ ise $\{x_n\}$ dizisine x değerli sabit dizi denir. $\{x\}$ ile gösterilir.

Tanım 2.6. (X, d) Metrik uzayında $\{x_n\}$ dizisini alalım. $n_k < n_{k+1}$ olacak şekilde $\{x_{n_k}\}$ dizisine $\{x_n\}$ dizisinin alt dizisi denir.

Tanım 2.7. (X, d) Metrik uzay olsun. $\{x_n\}$ dizisi yakınsak ise $\{x_{n_k}\}$ alt dizisi de aynı noktaya yakınsar.

Sonlu boyutlu uzaylarda hangi metrik alınırsa alınsın yakınsaklık değişmez, fakat sonsuz boyutlu uzaylarda bir metriğe göre yakınsak ise diğer metriğe göre yakınsak olmayabilir. Bunu bir örnek ile gösterelim.

Örnek 2.4. $C[0, 1]$ uzayını alalım. $f_n(t) = t^n$ fonksiyonu ile d_1 integral metriği ve d_∞ max. metriği ile yakınsaklığı araştıralım.

$$d_1(f_n, f) = \int_0^1 |f_n(t) - f(t)| dt = \int_0^1 t^n dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

böylece f_n dizisi d_1 metriğine göre yakınsak iken;

$$d_\infty(f_n, f) = \max_{0 \leq t \leq 1} |f_n(t) - f(t)| = \max_{0 \leq t \leq 1} \{t^n\} \neq 0$$

f_n dizisi d_∞ metriğine göre yakınsak olmadı. Yani; Sonsuz boyutlu uzayda metrik değişirse yakınsak olup olmama durumu da değişmektedir.

Tanım 2.8. (X, d) Metrik Uzayında (x_n) dizisini alalım. $\forall \epsilon > 0$ ve $m, n \geq n_0$ için $d(x_m, x_n) \leq \epsilon$ olacak biçimde bir n_0 doğal sayısı varsa (x_n) dizisine Cauchy dizisi denir. Eğer (X, d) Metrik Uzayında her Cauchy dizisi yakınsak ise (X, d) uzayına **Tam Metrik uzay** denir.

Örnek 2.5. $\mathbb{N}$ uzayında $d_1(x, y) = |x - y|$ ve $d_2(x, y) = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right|$ metriklerini alalım. Bu metriklerin Tam olup olmadığını inceleyelim.

$(\mathbb{N}, d_1)$ uzayında her Cauchy dizisi sabittir. Bu nedenle dizi yakınsaktır. Yani $(\mathbb{N}, d_1)$ uzayı

tamdır.

$\{x_n\}$ dizisini $x_n = n$ olarak tanımlayalım. $\forall \epsilon > 0$ için $N = \frac{1}{\epsilon} + 1$ kabul edelim. $\forall m \geq n \geq N$ için;

$$d_2(x_m, x_n) = d_2(m, n) = \left| \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right| < \frac{1}{m} < \epsilon$$

olur. Kısacası $\{x_n\}$ dizisi $(\mathbb{N}, d_2)$ uzayında Cauchy dizisi olur. Şimdi yakınsak olduğunu kabul edelim. Yakınsaklığın tanımından, $\forall \epsilon \in (0, 1)$ ve $n \geq n_0$ için;

$$d_2(x_n, x) = d_2(n, x) = \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{x} \right| < \epsilon$$

olur. Yani $n \rightarrow \infty$ için $\frac{1}{n} \rightarrow \frac{1}{x}$ yazılır. Sabit x sayısı için $\frac{1}{x} = 0$ olur. Bu ise çelişkidir. $\{x_n\}$ dizisi $(\mathbb{N}, d_2)$ uzayında yakınsak olmaz. Kısacası, $(\mathbb{N}, d_2)$ uzayı Tam olmaz.

Örnek 2.6. Her (X, d) ayrık metrik uzayının tam olduğunu gösterelim. $\{x_n\}$ Cauchy dizisi olsun. Bu durumda $\epsilon = \frac{1}{2}$ için bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı $m, n \geq n_0$ özelliğindeki $\forall m, n \in \mathbb{N}$ için;

$$d(x_n, x_m) < \frac{1}{2}$$

olacak şekilde vardır. Bu durumda $n \geq n_0$ özelliğinde $\forall n \in \mathbb{N}$ için;

$$d(x_n, x_{n_0}) < \frac{1}{2}$$

olur. Diğer taraftan $d(x_n, x_{n_0}) = 0$ yada $d(x_n, x_{n_0}) = 1$ olacağından $n \geq n_0$ özelliğindeki $\forall n \in \mathbb{N}$ için $d(x_n, x_{n_0}) = 0$ olur. Bu durumda $n \geq n_0$ özelliğindeki $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x_n = x_{n_0}$ olur. Yani belli bir terimden sonra dizi sabittir. Dizi;

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n_0-1}, x_{n_0}, x_{n_0}, x_{n_0}, \dots$$

şeklinde olur. Bu durumda dizi yakınsak ve limiti x_{n_0} olur. O halde ayrık metrik uzay tamdır.

Tanım 2.9. (X, τ) topolojik uzay, $x \in X$ ve $A \subset X$ olsun. $x \in U$ özelliğindeki her U açık kümesinin A ve $X \setminus A$ kümelerinin her ikisi ile ara kesiti boş değilse x noktasına A nın bir yığılma noktası denir. Yani $x \in U$ özelliğindeki her U açık kümesi için,

$$U \cap A \neq \emptyset \text{ ve } U \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$$

ise x noktasına A nın yığılma noktası denir.

Örnek 2.7. $c = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_k, \dots) : \exists x_0 \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0\}$ uzayının $d(x, y) = \sup_k |x_k - y_k|$ metriğine göre tam olduğunu gösterelim.

$$m = \{x = (x_1, x_2, \dots) : \exists x_0 \in \mathbb{R}, |x_n| \leq c_x, n = 1, 2, 3, \dots\}$$

sınırlı diziler uzayı olmak üzere; $(c, d) \subset (m, d)$ olduğu açıktır. Şimdi c den keyfi bir $x = (x_1, x_2, \dots, x_k, \dots)$ elemanını alalım. Teorem (2.1) den

$\exists (x^n) \subset (c, d) : x^n \rightarrow x$ yazarız. O halde $\forall \epsilon > 0$ için $\exists n_0$ doğal sayısı için;

$$n > n_0 ; d(x^n, x) \leq \frac{\epsilon}{4}$$

olur. $\forall n$ için $\{x_k^n\}$ dizisi yakınsak olduğundan $\exists n_0 \in \mathbb{N} : k, m \geq n_0$ için;

$$|x_k^n - x_m^n| < \frac{\epsilon}{2}$$

olur. O halde $k, n \geq n_0$ ve $n \geq \mathbb{N}$ için;

$$\begin{aligned} |x_k - x_m| &\leq |x_k - x_k^n| + |x_k^n - x_m^n| + |x_m^n - x_m| \\ &\leq 2.d(x^n, x) + |x_k^n - x_m^n| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

yani $\{x_k\}$ dizisi $\mathbb{R}$ uzayında bir Cauchy dizisi olur. $\mathbb{R}$ uzayı tam olduğundan bu dizi yakınsak olur. Buradan $x = (x_1, x_2, \dots, x_k, \dots) \in c$ dir. Yani $c = \bar{c}$ olduğunda; metrik uzayın kapalı alt kümesi de tam olduğundan (c, d) uzayı tam olur.

Teorem 2.1. (X, d) Metrik uzayında $x \in X$ olmak üzere, $\{x_n\}$ dizisini alalım. $\{x_n\}$ dizisinin x noktasına yakınsak olması için gerek ve yeter şart x noktası $\{x_n\}$ dizisinin bir yığılma noktası olmasıdır.

Kanıt. $\Rightarrow$: $\{x_n\}$ dizisinin $\{x_{n_k}\}$ alt dizisi x noktasına yakınsasın. $\epsilon > 0$ ve $N \in \mathbb{N}$ olsun. $\{x_{n_k}\}$ dizisi x noktasına yakınsına yakınsadığından, bir $N_1 \in \mathbb{N}$ sayısı $n_k \geq N_1$ olacak şekilde $\forall n \in \mathbb{N}$ için;

$$d(x_{n_k}, x) < \epsilon$$

olacak şekilde $n_N \geq \max\{N_1, N\}$ olsun. Böylece;

$$d(x_N, x) < \epsilon$$

olur. Tanımdan dolayı x noktası x_n dizisinin yığınma noktası olur.

$\Leftarrow$: x noktası $\{x_n\}$ dizisinin yığınma noktası olsun. Bu durumda; $\forall \epsilon > 0$ ve $N \in \mathbb{N}$ için bir $n \in \mathbb{N}$ sayısı;

$d(x_n, x) \leq \epsilon$ ve $n \geq N$ olacak şekilde vardır. $n_1 \in \mathbb{N}$ sayısı $n_1 \geq N$ ve

$$d(x_{n_1}, x) \leq 1$$

özelliğindeki en küçük doğal sayı olsun. $n_2 \in \mathbb{N}$ sayısı $n_2 > n_1$ ve

$$d(x_{n_2}, x) \leq \frac{1}{2}$$

özelliğindeki en küçük doğal sayı olsun. $n_3 \in \mathbb{N}$ sayısı $n_3 > n_2$ ve;

$$d(x_{n_3}, x) \leq \frac{1}{3}$$

özelliğindeki en küçük doğal sayı olsun. Bu şekilde devam edersek; $\forall k \in \mathbb{N}$ için $\{x_n\}$ dizisinin

$$d(x_{n_k}, x) \leq \frac{1}{k}$$

özelliğine sahip bir $\{x_{n_k}\}$ alt dizisi elde edilir.

$$0 \leq \lim_{k \rightarrow \infty} d(x_{n_k}, x) < \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} = 0$$

olduğundan $\lim_{k \rightarrow \infty} d(x_{n_k}, x) = 0$ olur. Böylece, $\{x_{n_k}\}$ alt dizisi x noktasına yakınsar. $\square$

Tanım 2.10. (X, d_1) ve (Y, d_2) metrik uzaylar, $f : (X, d_1) \rightarrow (Y, d_2)$ olmak üzere, $x_0 \in X$ olsun. $\forall \epsilon > 0$ için $d_1(x, x_0) \leq \delta$ olduğunda

$$d_2(f(x_0), f(x)) \leq \epsilon$$

olacak biçimde bir $\delta > 0$ sayısı varsa f fonksiyonuna x_0 noktasına sürekli denir. Eğer f fonksiyonu X 'in her noktasında sürekli ise f ye **sürekli fonksiyon** denir.

Tanım 2.11. (X, d_1) ve (Y, d_2) metrik uzaylar, $f : (X, d_1) \rightarrow (Y, d_2)$ olmak üzere,

- (1) $\forall \epsilon > 0$ için bir $\delta > 0$ sayısı $d_1(x, y) < \delta$ eşitsizliğini sağlayan $\forall x, y \in X$ için $d_2(f(x), f(y)) < \epsilon$ olacak şekilde f fonksiyonuna düzgün sürekli denir.
- (2) $\forall x, y \in X$ için $d_2(f(x), f(y)) < k \cdot d_1(x, y)$ olacak şekilde bir $k > 0$ sayısı varsa f fonksiyonuna Lipschitz Sürekli denir.

Örnek 2.8. (R, d) metrik uzay olsun. $f(x) = ax + b$ şeklinde tanımlı

$$f : (R, d) \rightarrow (R, d)$$

fonksiyonunun Lipschitz sürekli olduğunu gösterelim.

$\epsilon > 0$ olsun. d standart metrik olmak üzere;

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) &= |f(x) - f(y)| = |ax + b - (ay + b)| = |a(x - y)| \\ &= |a| \cdot |x - y| = |a| \cdot d(x, y) \leq k \cdot d(x, y) \end{aligned}$$

$k = |a|$ alırsak f fonksiyonu Lipschitz sürekli olur.

Tanım 2.12. (X, d) Metrik uzayında $T : X \rightarrow X$ olmak üzere, $x \in X$ için $\{x_n\} \in X$ için ;

$$T^{k-1}(x_n) \rightarrow x \implies T^k(x_n) \rightarrow T(x)$$

sağlanırsa; T ye k -sürekli dönüşüm denir.

Tanım 2.13. (X, d) metrik uzay ve $\emptyset \neq A \subset X$ olsun. $\forall x, y \in A$ için $d(x, y) < r$ olacak şekilde bir $r > 0$ sayısı varsa; A 'ya bu uzayda sınırlıdır denir.

Tanım 2.14. (X, d) metrik uzay ve A, X 'in bir alt kümesi olsun. A nın her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa A ya **kompakt küme** denir. X in her alt kümesinde kompakt ise (X, d) ye **Kompakt Metrik uzay** denir. **Kompakt Metrik uzayda** her dizinin yakınsak bir alt dizisi vardır.

Tanım 2.15. (X, d) metrik uzayından alınan her dizinin yakınsak bir alt dizisi varsa bu uzaya **dizisel kompakt uzay** denir. **Dizisel kompakt uzay** tamdır.

Örnek 2.9. $(\mathbb{R}, \tau)$ standart uzayının $A = (0, \infty)$ alt kümesinin kompaktlığını araştıralım.

$\forall n \in \mathbb{N}$ için $U_n = (0, n)$ olsun. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $(0, n)$ kümesi $\mathbb{R}$ de açık ve $U_n = (0, n) \cap A$

olduğundan $U_n \in \tau_n$ olur. $A = \cup U_n$ olduğundan $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ kümesi A nın açık bir örtüsüdür.

Bu örtünün $\{(0, n_1), (0, n_2), (0, n_3), \dots, (0, n_m)\}$ gibi sonlu alt örtüsünün olduğunu kabul edelim.

$n_0 = \max\{n_i = 1, 2, 3, \dots, m\}$ diyelim. Bu durumda;

$$A = (0, n_1) \cup (0, n_2) \cup \dots \cup (0, n_m) = (0, n_0)$$

olur. Bu ise $(n_0+1) \in A$ ve $(n_0+1) \notin (0, n_0)$ olduğundan bu bir çelişki olur. Yani (A, τ) uzayı kompakt değildir. Böylece A kümesi $\mathbb{R}$ standart uzayının kompakt bir alt kümesi değildir.

Teorem 2.2. Her kompakt metrik uzay tamdır.

Tanım 2.16. X normlu uzayından alınan her Cauchy dizisi yakınsak ise bu uzaya **Banach Uzayı** denir.

2.1 Sabit Nokta Tanımı

Tanım 2.17. X boş olmayan bir küme olmak üzere, $T : X \rightarrow X$ dönüşümü verilsin. Eğer $T(x) = x$ olacak şekilde bir $x \in X$ varsa, bu x değerine T nin **sabit noktası** denir. T nin tüm sabit noktalarının kümesi $F(T)$ ile gösterilir.

Örnek 2.10. $X = \mathbb{R}$ ve $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $Tx = x + 1$ tanımlanırsa; $F(T) = \emptyset$ olur.

Örnek 2.11. $X = \mathbb{R}$ ve $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $Tx = -x^2 - 3x$ tanımlanırsa; $F(T) = \{-4, 0\}$ bulunur.

Örnek 2.12. $T : [1, \infty) \rightarrow [1, \infty)$ ve $Tx = \frac{25}{26} \cdot (x + \frac{1}{x})$ tanımlanırsa; $F(T) = \{5\}$ bulunur.

Tanım 2.18. (X, d) metrik uzay $f : X \rightarrow X$ dönüşümü olsun. $\forall x, y \in X$ için;

$$d(fx, fy) \leq \lambda d(x, y)$$

olacak şekilde $\lambda > 0$ varsa f ye Lipschitz dönüşümü denir. Her Lipschitz koşulunu sağlayan fonksiyon süreklidir, ancak tersi her zaman doğru değildir.

Teorem 2.3. (X, d_1) ve (Y, d_2) iki metrik uzay olsun. $T : X \rightarrow Y$ fonksiyonu Lipschitz sürekli ise düzgün süreklidir.

Kanıt. f fonksiyonu Lipschitz sürekli olduğundan $\forall x, y \in X$ için;

$$d_2(fx, fy) \leq k \cdot d_1(x, y)$$

koşulunu sağlayacak biçimde bir $k > 0$ sayısı bulunur. $\delta = \frac{\epsilon}{k}$ seçelim. $d_1(x, y) < \delta$ özelliğini sağlayan $\forall x, y \in X$ için;

$$d_2(fx, fy) \leq k \cdot d_1(x, y) < k \cdot \delta = \epsilon$$

olur. Bu durumda f düzgün sürekli olur. □

Tanım 2.19. $T : (X, d_1) \rightarrow (X, d_2)$ dönüşümü, $\forall x, y \in X$ ve $\lambda \in (0, 1)$ olmak üzere,

$$d_2(Tx, Ty) \leq \lambda d_1(x, y)$$

λ şartı sağlanırsa T ye **daralma (büzülme) dönüşümü** denir. Eğer $\lambda = 1$ ise T ye genişleme olmayan dönüşüm denir.

Bu tanımdan bütün daralma dönüşümlerinin sürekli oldukları sonucu hemence çıkarılabilecektir. Ancak bunun tersi doğru olmaz. Yani sürekli dönüşümlerin daralma koşulunu sağlamaları gerekmez.

Bu noktada, Bir tam metrik uzayda tanımlı her daralma dönüşümünün bir sabit noktaya sahip olduğunu ve bu sabit noktanın tek olduğunu belirtmemiz gerekir. Bu sonuç bizi Banach daralma prensibi olarak bilinen meşhur teorem ile tanıştıracaktır.

Tanım 2.20. (X, d) metrik uzay olmak üzere $T : X \rightarrow X$ dönüşümü, $\forall x, y \in X$ ve $\lambda \in (0, 1)$ ve $L \geq 0$ olmak üzere,

$$d(Tx, Ty) \leq \lambda d(x, y) + Ld(y, Tx)$$

λ şartı sağlanırsa T ye **zayıf büzülme dönüşümü** denir.

Teorem 2.4. $T : [a, b] \rightarrow [a, b]$ fonksiyonu türevlenebilir olsun. T nin bir büzülme dönüşümü olması için gerek ve yeter şart $\forall x \in [a, b]$ için $|T'(x)| \leq k$ olacak şekilde $0 \leq k < 1$ olacak şekilde bir k sayısının bulunmasıdır.

Kanıt. ($\implies$) T bir daralma (büzülme) dönüşümü olduğundan $\forall x, y \in [a, b]$ için

$$|Tx - Ty| \leq k \cdot |x - y|,$$

olacak şekilde $0 \leq k < 1$ olacak şekilde k sayısı vardır. $x, x + \Delta x \in [a, b]$ alırsak;

$$|T(x + \Delta x) - Tx| \leq k \cdot |(x + \Delta x) - x| = k \cdot |\Delta x|,$$

$\Delta x \neq 0$ için;

$$\left| \frac{T(x + \Delta x) - Tx}{\Delta x} \right| \leq k$$

olur. Buradan da;

$$|T'(x)| = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left| \frac{T(x + \Delta x) - Tx}{\Delta x} \right| \leq k$$

elde edilir. Böylece $\forall x \in [a, b]$ için $|T'(x)| \leq k$ elde edilir.

$\Leftarrow$ $\forall x \in [a, b]$ için $|T'(x)| \leq k$ olacak şekilde $0 \leq k < 1$ olacak şekilde k sayısı var olsun.

$x \neq y$ özelliğindeki $\forall \in [a, b]$ için Ortalama teoremi gereğince;

$$\frac{|T(x) - T(y)|}{|x - y|} = |T'(c)|,$$

olacak şekilde $x < c < y$ olacak şekilde bir c noktası vardır. $|T'(x)| \leq k$ olduğundan,

$$\frac{|T(x) - T(y)|}{|x - y|} = |T'(c)| \leq k$$

olur. Böylece;

$$|Tx - Ty| \leq k \cdot |x - y|,$$

bulunur. Bu da T nin bir büzülme dönüşümü olması demektir. $\square$

Örnek 2.13. $T : [1, \infty) \rightarrow [1, \infty)$ olmak üzere $Tx = \frac{25}{26} \cdot (x + \frac{1}{x})$ tanımlayalım. Bu durumda T bir büzülme dönüşümü olacaktır.

$x > y$ olmak üzere $x, y \in [1, \infty)$ olsun. Bu durumda $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} < 0$ olur.

$$\begin{aligned} d(T(x), T(y)) &= |T(x) - T(y)| \leq \left| \frac{25}{26} \cdot (x + \frac{1}{x}) - \frac{25}{26} \cdot (y + \frac{1}{y}) \right| \\ &= \frac{25}{26} \left| (x - y) + (\frac{1}{x} - \frac{1}{y}) \right| \leq \frac{25}{26} |x - y| \end{aligned}$$

olur. Böylece, T dönüşümü bir büzülme dönüşümü olur.

Örnek 2.14. $T : (X, d) \rightarrow (X, d)$ büzülme dönüşümü olsun. $\forall x \in X$ için $\{T^n(x)\}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu gösterelim.

x_0 keyfi nokta olmak üzere, $x_n = Tx_{n-1} = T^n(x_0)$ tanımlayalım.

$\forall n \in \mathbb{N}$ için $d(x_n, x_{n+1}) = d(Tx_{n-1}, Tx_n) \leq K \cdot d(x_{n-1}, x_n)$ olur. O halde $\forall m, n \in \mathbb{N}$ ve $m > n$ için,

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \dots + d(x_{m-1}, x_m) \\ &\leq K^n d(x_0, x_1) + K^{n+1} d(x_0, x_1) + \dots + K^{m-1} d(x_0, x_1) \\ &= [K^n + K^{n+1} + \dots + K^{m-1}] \cdot d(x_0, x_1) \\ &= \frac{K^n}{1 - K} \cdot d(x_0, x_1) \end{aligned}$$

olur. Bu da $\{x_n\}$ dizisinin Cauchy dizisi olduğunu verir.

Teorem 2.5. (Banach Sabit Nokta Teoremi) (X, d) tam metrik uzay olsun. $T : X \rightarrow X$ daralma dönüşümü tek bir sabit noktaya sahiptir. Yani; $0 < \lambda < 1$ olmak üzere $\forall x, y \in X$ için;

$$d(Tx, Ty) \leq \lambda \cdot d(x, y) \quad (2.1)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa $Tx_0 = x_0$ olacak şekilde bir tek $x_0 \in X$ vardır.

Kanıt. $x_0 \in X$ keyfi bir nokta olmak üzere,

$$x_1 = Tx_0, x_2 = Tx_1 = T^2x_0, \dots, x_n = Tx_{n-1} = T^{n-1}x_0,$$

şeklinde tanımlı $\{x_n\}$ dizisini göz önüne alalım. Bu durumda $M < 1$ olmak üzere $\forall n \in \mathbb{N}$ için;

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(Tx_{n-1}, Tx_n) \leq M \cdot d(x_{n-1}, x_n),$$

olur. Bunu $m > n$ ve $m, n \in \mathbb{N}$ için yazarsak;

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \dots + d(x_{m-1}, x_m) \\ &\leq M^n \cdot d(x_0, x_1) + M^{n+1} \cdot d(x_0, x_1) + \dots + M^{m-1} \cdot d(x_0, x_1) \\ &= (M^n + M^{n+1} + \dots + M^{m-1}) \cdot d(x_0, x_1) \\ &= \frac{M^n}{1 - M} \cdot d(x_0, x_1) \end{aligned}$$

$M < 1$ olduğundan, $d(x_n, x_m) = 0$ olur. Bu bize $\{x_n\}$ dizisinin Cauchy dizisi olduğunu verir. X in tam olması nedeniyle $\lim x_n = z$ olacak biçimde bir $z \in X$ vardır. Yine T nin sürekli olmasından;

$$z = \lim x_{n+1} = \lim Tx_n = T \lim x_n = Tz$$

olur. Bu da T 'nin sabit noktasının olduğunu gösterir. Şimdi de T nin bir başka $w \in X$ sabit noktası olduğunu kabul edelim.

$$0 < d(z, w) = d(Tz, Tw) \leq M \cdot d(z, w) < d(z, w)$$

bulunur. Bu ise $M < 1$ olduğundan çelişkidir. Yani T nin sabit noktası tektir. □

Teorem 2.6. (X, d) tam metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ olmak üzere, $\forall x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq K.[d(x, Tx) + d(y, Ty)] \quad (2.2)$$

eşitsizliği $0 < K \leq 1/2$ olmak üzere, $Tx_0 = x_0$ olacak şekilde bir tek $x_0 \in X$ varsa T dönüşümüne **Kannan dönüşümü** adı verilir. (Gornicki, 2017)

Banach ve Kannan dönüşümünü sağlamadığı halde sabit noktası olan bir örnek verelim.

Örnek 2.15. $X = [0, 1] \cup [\frac{3}{2}, \frac{5}{3}]$ uzayında $d(x, y) = |x - y|$ uzaklık metriğini; $T : X \rightarrow X$

$$Tx = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & \frac{3}{2} \leq x \leq \frac{5}{3} \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. İlk olarak T nin Banach teoremini sağlayıp sağlamadığını inceleyelim;

$x = 1$ ve $y = \frac{3}{2}$ alırsak,

$d(Tx, Ty) = |Tx - Ty| = |T(1) - T(\frac{3}{2})| = 1$ yerine yazarsak;

$$1 = d(Tx, Ty) \leq \lambda. |x - y| = \lambda. |1 - \frac{3}{2}| = \frac{\lambda}{2}$$

olur ki $\lambda \geq 2$ demektir. Yani T , Banach (2.1) teoremini sağlamaz. Şimdi Kannan teoremini sağlayıp sağlamadığını kontrol edelim.

$x = 0$ ve $y = \frac{3}{2}$ alırsak,

$d(Tx, Ty) = |Tx - Ty| = |T(0) - T(\frac{3}{2})| = 1$ olur.

$$1 = d(Tx, Ty) \leq \lambda. |x - y| = K.[d(0, T(0)) + d(\frac{3}{2}, T(\frac{3}{2}))] = K[0 + \frac{1}{2}] = \frac{K}{2}$$

olur ki; $K \geq 2$ olur. $K \notin [0, \frac{1}{2}]$ bulunamadığından T dönüşümü Kannan teoremini (2.2) sağlamaz. Fakat $T(0) = 0$ olduğundan $x = 0$ noktası sabit nokta olur.

Teorem 2.7. (X, d) tam metrik uzay $T : X \rightarrow X$ (2.2) şartını sağlayan bir dönüşüm olsun. $\{T^n x\}$ dizisi v noktasına yakınsar ve T nin bir $v \in X$ sabit noktası vardır.

Kanıt. Rutin işlemler ile kolayca kanıtlanabilir.

□
18

Tanım 2.21. (X, d) bir tam metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir fonksiyon olsun. Herhangi bir $x, y \in X, x \neq y$ için;

$$d(Tx, Ty) < \max\{d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), d(x, Ty), d(y, Tx)\}$$

ise T dönüşümüne bir **Rhoades dönüşümü** denir.

Teorem 2.8. (X, d) bir tam metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir Rhoades dönüşümü olsun. T nin X de bir sabit noktaya sahip olması için gerekli ve yeterli koşul

$$T^m x = T^n x$$

olacak şekilde $m > n \geq 0$, m ve n tamsayıları ile bir $x \in X$ noktasının var olmasıdır.

Metrik Sabit nokta teorisinde daralma dönüşümleri yapısı çerçevesinde 2002 yılına kadar yapılmış olan çalışmaları içerisinde toplayan bir çalışma olarak (Kumar, 2002) doktora tezi verilebilir. Bu çerçevede iki farklı dönüşümün ortak sabit noktalarının hangi koşullar altında var olabileceği problemi çalışılmaya başlanmış ve uyumlu (compatible) dönüşüm kavramı Jungck (Jungck, 1986) tarafından tanıtılmıştır. Konu ile ilgili olarak (Taş, K. ve ark., 1996) çalışmasını önerebiliriz.

Diğer taraftan, birçok araştırmacı Banach daralma prensibini genişletirken aslında metrik uzay olma koşullarının bir kısmının bu tür teoremleri elde etmekte hiç de gerekli olmadığını farketmiş ve uzayın yapısını zayıflatarak, değiştirerek de Banach daralma prensibini genişletmeyi başarmıştır. Bu doğrultuda yapılan genişlemelerin en önemlilerinden bazıları da b-metrik uzaylar, partial metrik uzaylar üzerinedir. Bakhtin, (Bakhtin, 1989) b -metrik uzay kavramını tanıttı, bu da Czerwik tarafından (Czerwik, 1993) genişletilmiştir.

3. SABİT NOKTA TEOREMLERİ

3.1 b-Metrik Uzay

Tanım 3.1. X boş olmayan bir küme, $d_b : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ olmak üzere, $\forall x, y, z \in X$ için;

- (1) $d_b(x, y) = 0 \iff x = y$,
- (2) $d_b(x, y) = d_b(y, x)$,
- (3) $d_b(x, y) \leq s.[d_b(x, z) + d_b(z, y)]$,

$s \geq 1$ şartlarını sağlayan d_b fonksiyonuna X uzayında b -metrik, (X, d_b) ikilisine ise **b -metrik uzay** denir (Czerwik, 1993).

Yukarıdaki tanımda $s = 1$ olduğu takdirde, Metrik uzay olur. Yani b -metrik uzaylar Metrik uzayların genelleştirilmiş halidir.

Örnek 3.1. $\mathbb{M} = [0, \infty)$ ve $\rho : \mathbb{M} \times \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}^+$ alalım. $p > 1$ Reel sayı olmak üzere, $\rho(x, y) = |x - y|^p$ şeklinde tanımlansın. $\forall x, y, z \in \mathbb{M}$ için $u = x - z$ ve $v = z - y$ alalım.

$$\begin{aligned}
 |x - y|^p &= |u + v|^p \\
 &\leq (|u| + |v|)^p \\
 &\leq [2 \cdot \max(|u|, |v|)]^p \\
 &\leq 2^p(|x - z|^p + |z - y|^p),
 \end{aligned}$$

elde ederiz. Bu da $\rho(x, y) \leq 2^p[\rho(x, z) + \rho(z, y)]$ demektir. Böylece; 2^p katsayısı ile $(\mathbb{M}, \rho)$ b -metrik uzay olur. Diğer taraftan $\forall x > y > z$ alırsak;

$$|x - y|^p = |u + v|^p > u^p + v^p = (x - z)^p + (z - y)^p$$

elde edilir. Bu da $\rho(x, y) > \rho(x, z) + \rho(z, y)$ demektir. Böylece, $(\mathbb{M}, \rho)$ metrik uzay olmaz.

Örnek 3.2. $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ olmak üzere $X = \{0, 1, 2\}$ kümesini,

$$d(2, 0) = d(0, 2) = m \geq 2, d(1, 0) = d(0, 1) = d(2, 1) = d(1, 2) = 1 \text{ ve}$$

$d(0, 0) = d(1, 1) = d(2, 2) = 0$ olarak tanımlansın.

d fonksiyonu b -metrik tanımı olan tanım(3.1) şartını sağlar. Fakat;

$d(2, 0) = m$ ve $d(2, 1) + d(1, 0) = 1 + 1 = 2$ değerleri üçgen eşitsizliğinde yerine yazarsak,

Yani;

$$d(2, 0) = m > d(2, 1) + d(1, 0)$$

olduğundan d fonksiyonu $s = m/2$ için X de b -metrik uzay olmasına rağmen, metrik uzay olmaz (Aydi ve ark., 2012)

Örnek 3.3. $0 < p < 1$ olmak üzere,

$$l_p = \{ \{x_n\} \mid \subset \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \}$$

uzayını alalım. $\{x_n\} = x$ ve $\{y_n\} = y$ olacak şekilde $d : l_p \times l_p \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için

$$d(x, y) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

şeklinde tanımlayalım. l_p uzayı bir b -metrik uzaydır.

Örnek 3.4. $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ olsun. $0 < p < 1$ olmak üzere,

$\int_0^1 |x(t)|^p dt < \infty$ şeklinde tanımlı reel değerli $x(t)$ fonksiyonlarının kümesi olsun. $\forall x, y \in L_p$ için

$$d(x, y) = \left(\int_0^1 |x(t) - y(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

olur. Buradan (L_p, d) uzayı $s = 2^{\frac{1}{p}}$ katsayısı ile b -metrik uzay olur (Berinde, 1993)

Örnek 3.5. $d : X = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ olmak üzere $X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ olacak şekilde,

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & m = n; \text{ ise} \\ \left| \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right|, & m \neq n \text{ ve } m, n \text{ çift} \\ 5, & m \text{ ve } n \text{ tek ise} \\ 2, & \text{diğer durumlarda;} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Tanım.3.1 da tanımlanan b -metrik şartlarından i) ve ii) şartlarını sağladığı kolayca görülür. $x, y, z \in X$ ve $s = \frac{5}{2}$ alırsak;

$$d(x, y) \leq \frac{5}{2}[d(x, z) + d(z, y)]$$

(X, d) b -metrik uzay olur. Fakat d fonksiyonu X de sürekli değildir (Kamran ve ark., 2017).

Tanım 3.2. (X, d) b -metrik uzayında (x_n) dizisini alalım. $\forall \epsilon > 0$ ve $n \geq n_0$ için $d(x_n, x) \leq \epsilon$ olacak biçimde bir n_0 doğal sayısı varsa (x_n) dizisi $x \in X$ noktasına yakınsar denir (Boriceanu, 2009)

Tanım 3.3. (X, d_1) ve (Y, d_2) b -metrik uzaylar, $f : (X, d_1) \rightarrow (Y, d_2)$ olmak üzere, $x \in X$ olsun. X kümesinden alınan herhangi bir $\{x_n\}$ dizisi x noktasına yakınsıyorken; Y metrik uzayındaki $\{f(x_n)\}$ dizisi $f(x)$ e yakınsıyor ise f fonksiyonuna dizisel süreklidir denir.

Teorem 3.1. (X, d) tam b -metrik uzay olsun. $T : X \rightarrow X$ olmak üzere, $\varphi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ artan fonksiyonu $\forall t > 0$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^n(t) = 0$ koşuluna uyan X uzayındaki her x, y için

$$d(Tx, Ty) \leq \varphi d(x, y) \quad (3.1)$$

eşitsizliği sağlanırsa; T nin $u \in X$ olacak şekilde, bir tek sabit noktası vardır. Ayrıca; $\forall t \in X$ için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^n(t) = 0$$

olur (Czerwik, 1993).

Kanıt. $x \in X$ ve $\epsilon > 0$ alalım. $n \in \mathbb{N}$ elemanı $\varphi^n(t) < 4^{-1}$ yı sağlayacak şekilde bir doğal sayı olsun. $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere $F = T^n$ ve $x_k = F^k(x)$ alalım. $\forall x, y \in X$ ve $\alpha = \varphi^n$ olsun. (3.1) ifadesini kullanırsak;

$$d(Fx, Fy) \leq \varphi^n[d(x, y)] = \alpha d(x, y) \quad (3.2)$$

olur. $k \in \mathbb{N}$ için;

$$d(x_{k+1}, x_k) = d(F^k(F(x), F^k(x))) \leq \varphi^{kn}(d(F(x), x)) = \alpha^k(d(F(x), x))$$

son eşitsizlikte $k \rightarrow \infty$ limit aldığımızda $d(x_{k+1}, x_k) = 0$ olur.

$d(x_{k+1}, x_k) < \epsilon.4^{-1}$ alalım. $\forall z \in K(x_k, \epsilon) := \{y \in X : d(x_k, y) \leq \epsilon\}$ olsun.

$$d(F(z), F(x_k)) \leq \alpha[d(x_k, z)] \leq \alpha(\epsilon) = \varphi^n(\epsilon) < \epsilon.4^{-1},$$

$$d[F(x_k), x_k] = 2(\epsilon.4^{-1} + \epsilon.4^{-1}) = \epsilon$$

$F(z) \in K(x_k, \epsilon)$ olur. Bu ise $F : K(x_k, \epsilon) \rightarrow K(x_k, \epsilon)$ demektir. Şimdi $m, s > k$ ve $x_m, x_s \in K(x_k, \epsilon)$ alırsak;

$$d(x_m, x_s) \leq 4\epsilon$$

elde edilir. Yani $\{x_n\}$ dizisi Cauchy dizisi olur.

(X, d) tam olduğundan $x_k \rightarrow u$ biçiminde bir $u \in X$ vardır. (3.2) eşitsizliğinden F sürekli olduğundan,

$$u = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{k+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_{k+1}) = F(u)$$

olur. Yani u noktası F nin sabit noktası olur. (3.1) eşitsizliğinen T dönüşümünün sabit noktası tek olur.

Şimdi $\forall x \in X$ ve $\forall r = 0, 1, 2, 3, \dots, (n-1)$ için;

$$T^{nk+r}(x) = F^k[T^r(x)] \rightarrow u(n \rightarrow \infty)$$

Böylece; $\forall x \in X$ için $m \rightarrow \infty$ limiti alınır, $T^m(x) \rightarrow u$ olur. □

Teorem 3.2. (X, d) tam b -metrik uzay olsun. $s \geq 1$ sabit sayısı $x_n = Tx_{n-1} = T^n x_0$, $n = 1, 2, 3, \dots$ olmak üzere, $\{x_n\} \subset X$ şeklinde alalım. $T : X \rightarrow X$ olmak üzere, $\mu \in [0, \frac{1}{2})$ ve her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \mu. [d(x, Tx) + d(y, Ty)] \quad (3.3)$$

olduğunda $x_0 \in X$ olacak şekilde $x_n \rightarrow x_0$ yakınsar ve x_0 noktası T nin tek sabit noktası olur (Kir, 2013).

Kanıt. $x_0 \in X$ olmak üzere $\{x_n\} \subset X$ alt kümesini $x_n = Tx_{n-1} = T^n x_0, n = 1, 2, 3, \dots$ iterasyonu ile tanımlayalım. (3.3) eşitsizliğini kullanırsak;

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(Tx_{n-1}, Tx_n) \leq \mu[d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_{n+1})]$$

yazılır. Gerekli düzenlemeleri yaparsak;

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &\leq \frac{\mu}{1-\mu} d(x_{n-1}, x_n) \\ &\leq \left(\frac{\mu}{1-\mu}\right)^n d(x_0, x_1) \end{aligned}$$

Burada $\mu \in [0, \frac{1}{2})$ olduğundan $\frac{\mu}{1-\mu} \in [0, 1)$ olur. Böylece T büzülme dönüşümü olur. X tam olduğundan $\{x_n\}$ dizisi x_0 noktasına yakınsasın.

$$\begin{aligned} d(x_0, Tx_0) &\leq s[d(x_0, x_n) + d(x_n, Tx_0)] \\ &\leq s d(x_0, x_n) + s \mu[d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, Tx_0)] \\ &\leq \frac{s}{1-s\mu} d(x_0, x_n) + \frac{s\mu}{1-s\mu} d(x_n, x_0) \\ &\leq \frac{s}{1-s\mu} d(x_0, x_n) + \frac{s\mu}{1-s\mu} \left(\frac{\mu}{1-\mu}\right)^n d(x_0, x_1) \end{aligned}$$

$n \rightarrow \infty$ limit alırsak; $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_0, Tx_0) = 0$ olur. Böylece, x_0 noktası T nin bir sabit noktasıdır. Şimdi T nin bir başka sabit noktasının y_0 daha varlığını kabul edelim.

$$0 < d(x_0, y_0) = d(Tx_0, Ty_0) \leq K.[d(x_0, Ty_0) + d(y_0, Tx_0)] = 0$$

olur. Bu ise çelişkidir. Böylece T nin sabit noktası tektir. □

Teorem 3.3. (X, d) tam b -metrik uzay olsun. $x_n = Tx_{n-1} = T^n x_0, n = 1, 2, 3, \dots$ olmak üzere, $\{x_n\} \subset X$ şeklinde alalım. $T : X \rightarrow X$ olmak üzere, $s, \lambda \in [0, \frac{1}{2})$ ve her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \lambda [d(x, Ty) + d(y, Tx)] \quad (3.4)$$

olduğunda $x_0 \in X$ için $x_n \rightarrow x_0$ yakınsar ve x_0 noktası T nin tek sabit noktası olur (Kir, 2013).

Kanıt. $x_0 \in X$ olmak üzere $\{x_n\} \subset X$ alt kümesini $x_n = Tx_{n-1} = T^n x_0$ iterasyonu ile tanımlayalım. (3.4) eşitsizliğini kullanırsak;

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &= d(Tx_{n-1}, Tx_n) \\ &\leq \lambda[d(x_{n-1}, Tx_n) + d(x_n, Tx_{n-1})] \\ &= \lambda[d(x_{n-1}, x_{n+1}) + d(x_n, x_n)] \\ &\leq s\lambda[d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_{n+1})] \end{aligned}$$

yazılır. Gerekli düzenlemeleri yaparsak;

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{s\lambda}{1-s\lambda} d(x_{n-1}, x_n)$$

Burada $s\lambda \in [0, \frac{1}{2})$ olduğundan $\frac{s\lambda}{1-s\lambda} \in [0, 1)$ olur. Böylece T büzülme dönüşümü olur. X tam olduğundan $\{x_n\}$ dizisi x_0 noktasına yakınsasın.

$$\begin{aligned} d(x_0, Tx_0) &\leq s[d(x_0, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, Tx_0)] \\ &\leq sd(x_0, x_{n+1}) + s[d(Tx_n, Tx_0)] \\ &\leq sd(x_0, x_{n+1}) + s\lambda[d(x_0, Tx_n) + d(x_n, Tx_0)] \end{aligned}$$

$n \rightarrow \infty$ limit alırsak; $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_0, Tx_0) \leq s\lambda d(x_0, Tx_0)$ olur. Bu son eşitlik, $d(x_0, Tx_0) = 0$ olması halinde geçerli olur. yani; $Tx_0 = x_0$ olur. Şimdi T nin y_0 gibi başka bir sabit noktasının varlığını kabul edelim.

$$d(x_0, y_0) = d(Tx_0, Ty_0) \leq \lambda[d(x_0, Ty_0) + d(y_0, Tx_0)]$$

olur. Bu ise $d(x_0, y_0) \leq 2.\lambda d(x_0, y_0)$ olur. Bu da $x_0 = y_0$ olduğundan, T nin tek sabit noktası olur. □

Teorem 3.4. (X, d) Tam b -metrik uzay olsun. $s \geq 1, k \in [0, 1)$ ve $k.s < 1$ olacak şekilde $T : X \rightarrow X$ büzülme dönüşümü olsun. T dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır (Kamran, 2017).

Tanım 3.4. $(\mathbb{M}, \rho)$, b – metrik uzay ve $\mathbb{M}$ de (x_n) dizisi tanımlansın. $\{x_n\}$ dizisini Cauchy dizisi olması için gerekli ve yeterli koşul $\forall \epsilon > 0$ ve $m, n \geq n(\epsilon)$ için $\rho(x_m, x_n) \leq \epsilon$ olacak biçimde bir $n(\epsilon)$ doğal sayısının var olmasıdır (Khan, 2017).

Tanım 3.5. $(\mathbb{M}, \rho)$, b – metrik uzay ve $\mathbb{M}$ de $\{x_n\}$ dizisi tanımlansın. $\{x_n\}$ dizisinin yakınsak olması için gerek ve yeter şart $\forall \epsilon > 0$ ve $n \geq n(\epsilon)$ için $\rho(x_n, x) \leq \epsilon$ olacak biçimde bir $x \in X$ ve ϵ doğal sayısının var olmasıdır.

Tanım 3.6. $(\mathbb{M}, \rho)$, b – metrik uzay ve $L \subset \mathbb{M}$ olsun. L nin kompakt olması için gerek ve yeter şart L nin elemanlarından oluşan her dizisinin yakınsak alt dizisinin var olmasıdır.

Tanım 3.7. $(\mathbb{M}, \rho)$, b – metrik uzay ve $L \subset \mathbb{M}$ olsun. L nin kapalı olması için gerek ve yeter şart L deki her $\{x_n\}$ dizisinin $x \in L$ elemanına yakınsamasıdır.

3.2 Asimptotik Düzenlilik

Banach uzaylarında doğrusal olmayan fonsiyonel denklemlerin iterasyon yolu ile çözülebilmeleri için Browder and Petryshyn tarafından (Browder ve Petryshyn, 1967) asimptotik düzenlilik kavramı tanıtılmıştır.

Tanım 3.8. $(\mathbb{M}, \rho)$, b – metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ olmak üzere, her $x, y \in X$ için $\{x_n\}$ dizisini alalım.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, Tx_n) = 0$$

olursa; $\{x_n\}$ dizisine asimptotik T – düzenli dizi denir (Khan, 2017).

Eğer $T : X \rightarrow X$ bir daralma dönüşümü ise veya Kannan daralma koşulunu sağlıyorsa o zaman asimptotik düzenli de olacaktır.

Örnek 3.6. $\mathbb{M} = [0, \infty)$ ve $\rho : \mathbb{M} \times \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}^+$ alalım.

$\rho(x, y) = |x - y|^p$ ve $p \geq 1$ olmak üzere $x \in \mathbb{M}$ olacak şekilde alırsak $(\mathbb{M}, \rho)$ 2^p katsayısıyla b -metrik uzay olur. $Tx = \frac{x}{2}$ alalım ve $\{x_n\}$ dizisini n pozitif tamsayı olacak şekilde

$\mathbb{M}$ metriğinde 0 a yakınsasın. Buradan;

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, Tx_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - Tx_n|^p \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - \frac{x_n}{2}|^p \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} |\frac{x_n}{2}|^p = 0\end{aligned}$$

olduğundan; $\{x_n\}$ dizisi $(\mathbb{M}, \rho)$ uzayında Asimptotik T -düzenli dönüşüm olur.

Tanım 3.9. $(\mathbb{M}, \rho)$ b -metrik uzay, $T : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}$ olmak üzere, her $x \in \mathbb{M}$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(T^{n+1}x, T^n x) = 0 \quad (3.5)$$

olursa T 'ye asimptotik düzenli dönüşüm denir (Ciric, 2005).

Örnek 3.7. $\mathbb{M} = [0, 1]$ olmak üzere alışılmış metriği göz önüne alalım. $T : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}$ dönüşümünü

$T0 = \frac{1}{2}$ ve $0 < x \leq 1$ için $Tx = \frac{x}{2}$ şeklinde tanımlayalım. sonra $0 < x < y \leq 1$ için;

$$|Tx - Ty| = \frac{1}{2}(y - x) < \frac{1}{2}(y + x) = |x - Tx| + |y - Ty|$$

olur. Ayrıca $0 < x \leq 1$ için;

$$|T0 - Tx| = \frac{1}{2} - \frac{x}{2} < \frac{1}{2} + \frac{x}{2} = |0 - T0| + |x - Tx|$$

yazarız. Böylece, her $x, y \in [0, 1]$ ve $x \neq y$ için;

$$|Tx - Ty| \leq |x - Tx| + |y - Ty|$$

doğal olarak T nin sabit noktası olan asimptotik düzenli dönüşüm olur (Gornicki, 2017).

Örnek 3.8. $\mathbb{M} = [0, \infty)$ ve $\rho : \mathbb{M} \times \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}^+$ alalım.

$\rho(x, y) = |x - y|^p$ ve $x \in \mathbb{M}$ olacak şekilde $Tx = \frac{x}{2}$ tanımlansın.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(T^n x, T^{n+1} x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} |T^n x, T^{n+1} x|^p \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x}{2^n} - \frac{x}{2^{n+1}} \right|^p \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x}{2^{n+1}} \right|^p = 0 \end{aligned}$$

olduğundan; T dönüşümü, M nin tüm noktaları için Asimptotik düzenli dizi olur.

Örnek 3.9. $\mathbb{M} = \{0\} \cup [1, 2]$ alışılmış metrik ile $T : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}$ dönüşümünü ;

$$Tx = \begin{cases} 1, & x = 0; \\ 0, & x \neq 0; \end{cases}$$

olacak şekilde tanımlansın. Her $x, y \in \mathbb{M}$ için ,

$$d(Tx, Ty) \leq \frac{1}{2} \cdot [d(x, Tx) + d(y, Ty)]$$

eşitsizliği sağlanmasına rağmen T nin sabit noktası yoktur. Yani burada $\{T_x\}$ dizisi yakınsak değildir. Böylece T asimptotik düzenli dönüşüm olmaz.

(X, d) metrik uzayındaki bir $\{x_n\}$ dizisine $n \rightarrow \infty$ için;

$$d(x_n, x_{n+1}) \rightarrow 0$$

oluyorsa asimptotik düzenli dizi denir.

Gornicki, (Gornicki, 2019) makalesinde bir dizinin asimptotik düzenli olmasının bu dizinin yakınsaklığını gerektirmediğini göstermiştir. J. Gornicki, yine bu makalesinde asimptotik düzenli bir dizinin herhangi bir alt dizisinin de asimptotik düzenli olduğunu söyleyemeyeceğimizi örneklendirmiştir.

Teorem 3.5. $(\mathbb{M}, d)$ tam metrik uzay ve $K < 1$ olmak üzere, $T : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}$ (2.2) şartını sağlayan asimptotik düzenli dönüşüm olsun. T nin bir $v \in \mathbb{M}$ sabit noktası vardır (Gornicki, 2017).

Kanıt. $x \in \mathbb{M}$ ve $x_n = T^n x$ tanımlayalım. $m > n$ için asimptotik düzenlilik tanımını kullanırsak;

$$d(T^{n+1}x, T^{m+1}x) \leq K.[d(T^n x, T^{n+1}x) + d(T^m x, T^{m+1}x)]$$

$n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa $\{T^n x\}$ dizisinin $\mathbb{M}$ de Cauchy dizisi olduğunu verir. $\mathbb{M}$ tam olduğundan $v \in \mathbb{M}$ olacak şekilde; $\lim_{n \rightarrow \infty} T^n x = v$ olur. Burada,

$$\begin{aligned} d(v, Tv) &\leq d(v, T^{n+1}x) + d(T^{n+1}x, Tv) \\ &\leq d(v, T^{n+1}x) + K[d(T^{n+1}x, T^n x) + d(v, Tv)] \end{aligned}$$

elde edilir.

$$d(v, Tv) \leq \frac{K}{1-K} d(T^n x, T^{n+1}x) + \frac{1}{1-K} d(T^{n+1}x, v)$$

burada $n \rightarrow \infty$ limiti alırsak; $Tv = v$ elde ederiz. Böylece sabit nokta tektir. Dolayısıyla $\forall x \in X$ için $\{T^n x\}$ dizisi v ye yakınsar. $\square$

Teorem 3.6. (X, d) tam metrik uzay $T : X \rightarrow X$ asimptotik düzenli dönüşüm olsun. $\forall x, y \in X$ için;

$$d(Tx, Ty) \leq M.[d(x, Tx) + d(y, Ty) + d(x, y)] \quad (3.6)$$

olacak şekilde $M < 1$ varsa, T nin bir tek sabit noktası vardır (Gornicki, 2017).

Kanıt. $x \in X$ ve $x_n = T^n x$ tanımlayalım.

$$\begin{aligned} d(T^{n+1}x, T^{m+1}x) &\leq M.[d(T^n x, T^{n+1}x) + d(T^m x, T^{m+1}x) + d(T^n x, T^m x)] \\ &\leq 2M.[d(T^n x, T^{n+1}x) + d(T^m x, T^{m+1}x)] \\ &\quad + M.d(T^{n+1}x, T^{m+1}x) \end{aligned}$$

buradan;

$$d(T^{n+1}x, T^{m+1}x) \leq \frac{2M}{1-M}.[d(T^n x, T^{n+1}x) + d(T^m x, T^{m+1}x)]$$

$n \rightarrow \infty$ alınırsa $d(T^{n+1}x, T^{m+1}x) \leq 0$ olur ki; $\{T^n x\}$ dizisinin X de Cauchy dizisi olduğunu verir. Şimdi X tam olduğundan, $v \in X$ olacak şekilde; $\lim_{n \rightarrow \infty} T^n x = v$ yazarız.

$$\begin{aligned} d(v, Tv) &\leq d(v, T^{n+1}x)d(T^{n+1}x, Tv) \\ &\leq d(v, T^{n+1}x) + M[d(T^{n+1}x, T^n x) + d(v, Tv) + d(T^n x, v)] \end{aligned}$$

burada gerekli düzenlemeleri yaparsak;

$$d(v, Tv) \leq \frac{M}{1-M}[d(T^n x, T^{n+1}x) + d(T^n x, v)] + \frac{1}{1-M} \cdot d(T^{n+1}x, v)$$

burada $n \rightarrow \infty$ limiti alırsak; $Tv = v$ elde ederiz. Şimdi bu yakınsadığı noktanın birden fazla olduğunu kabul edelim. u ve v gibi iki farklı nokta olsun. Böylece;

$$d(u, v) = d(Tu, Tv) \leq M.[d(u, Tu) + d(v, Tv) + d(u, v)] = M.d(u, v)$$

olur ki; bu $M \geq 1$ ile bir çelişki olur. $v \in X$ noktası T dönüşümü altında X uzayının sabit bir noktası olur. $\square$

Teorem 3.7. (X, d) tam metrik uzay $T : X \rightarrow X$ asimptotik düzenli olsun. Her $x, y \in X$ için $0 \leq M < 1$ ve $0 \leq K < \infty$ olmak üzere;

$$d(Tx, Ty) \leq M.d(x, y) + K[d(y, Ty) + d(x, Tx)] \quad (3.7)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, T nin bir tek $p \in X$ sabit noktası vardır. Ayrıca, her $x \in X$ için $T^n x \rightarrow p$ noktasına yakınsar (Gornicki, 2019).

Kanıt. $x_0 \in X$ ve $x_{n+1} = Tx_n (n = 0, 1, 2, \dots)$ tanımlayalım. Herhangi bir n ve $k > 0$ olmak üzere, (3.7) özelliğinde asimptotik düzenlilik ve üçgen eşitsizliğini kullanırsak;

$$\begin{aligned} d(x_{n+k}, x_n) &\leq d(x_{n+k}, x_{n+k+1}) + d(x_{n+k+1}, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_n) \\ &\leq d(x_{n+k}, x_{n+k+1}) + M.d(x_{n+k}, x_n) \\ &\quad + K.[d(x_{n+k}, x_{n+k+1}) + d(x_n, x_{n+1})] + d(x_{n+1}, x_n) \end{aligned}$$

gerekli düzenlemeleri yaparsak ve $n \rightarrow \infty$ limit alırsak,

$$(1 - M).d(x_{n+k}, x_n) \leq (K + 1).[d(x_{n+k}, x_{n+k+1}) + d(x_n, x_{n+1})] \rightarrow 0$$

elde edilir. $\{x_n\}$ dizisi X tam metrik uzayında, Cauchy dizisi olur. Uzay tam olduğundan $p \in X$ için $x_n \rightarrow p$ olur. T sürekli ve $x_{n+1} = Tx_n$ olduğundan;

$$\lim x_{n+1} = \lim Tx_n = T(\lim x_n) = Tp$$

yazarız. Yani; $Tp = p$ bize p noktasının sabit nokta olduğunu verir. Şimdi tekliği için başka bir sabit nokta q noktası kabul edelim.

$$\begin{aligned} 0 < d(p, q) &= d(Tp, Tq) = M.d(p, q) + K[d(p, Tp) + d(q, Tq)] \\ &= M.d(p, q) < d(p, q) \end{aligned}$$

olur ki; bu bir çelişki olur. Şimdi her $p \in X$ için $T^n x \rightarrow p$ noktasına yakınsadığını gösterelim.

$$\begin{aligned} d(T^n x, p) = d(T^n x, T^n p) &= d(T^n x, T^{n+1} x) + d(T^{n+1} x, T^{n+1} p) \\ &\leq d(T^n x, T^{n+1} x) + M.d(T^n x, T^n p) \\ &\quad + K.[d(T^n x, T^{n+1} x) + d(T^n p, T^{n+1} p)] \end{aligned}$$

yazılır. Gerekli düzenlemeler yapırsa;

$$(1 - M).d(T^n x, p) \leq (K + 1).d(T^n x, T^{n+1} x) \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$$

Böylece, $x \in X$ için $T^n x \rightarrow p$ ye yakınsaklığını göstermiş olduk. □

Teorem 3.8. (X, d) tam metrik uzay ve bazı $x_0 \in X$ noktaları için $T : X \rightarrow X$ asimptotik düzenli olsun. Her $x, y \in X$ için negatif olmayan $\alpha_i = \alpha_i(x, y)$, ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) fonksiyonları keyfi seçilen $K > 0$ ve $0 < \lambda_1 < 1, 0 < \lambda_2 < 1$ sabitleri

$$\alpha_1(x, y), \alpha_2(x, y) \leq K \tag{3.8}$$

$$\alpha_4(x, y) + \alpha_5(x, y) \leq \lambda_1 \tag{3.9}$$

$$\alpha_3(x, y) + 2\alpha_5(x, y) \leq \lambda_2 \quad (3.10)$$

olmak üzere;

$$\begin{aligned} d(Tx, Ty) \leq & \alpha_1 F_1[\min\{d(x, Tx), d(y, Ty)\}] + \alpha_2 F_2[d(x, Tx).d(y, Ty) \\ & + \alpha_3 d(x, y)] + \alpha_4[d(x, Tx) + d(y, Ty)] + \alpha_5[d(x, Ty) + d(y, Tx)] \end{aligned} \quad (3.11)$$

sağlansın. $T, x_0 \in X$ noktasında asimptotik düzenli olduğunda T nin tek sabit noktası vardır (Ciric, 2005).

Kanıt. $x_n = T^n x_0$ olmak üzere $\{x_n\}$ dizisinin Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. $d_n = d(x_n, x_{n+1})$ olarak belirtelim.

$\alpha_i = \alpha_i(x_n, x_m)$ olmak üzere, üçgen eşitsizliğini ve (3.11) özelliğini birlikte kullanırsak;

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) & \leq d_n + d(Tx_n, Tx_m) + d_m \\ & \leq d_n + d_m + \alpha_1 F_1[\min\{d_n, d_m\}] + \alpha_2 F_2 d_n \cdot d_m + \alpha_3 d(x_n, x_m) \\ & + \alpha_4(d_n + d_m) + \alpha_5[d(x_n, Tx_m) + d(x_m, Tx_n)] \\ & \leq (\alpha_3 + 2\alpha_5)d(x_n, x_m) + (1 + \alpha_4 + \alpha_5)(d_n + d_m) \\ & + \alpha_1 F_1[\min(d_n, d_m)] + \alpha_2 F_2(d_n \cdot d_m) \end{aligned}$$

olur. Bu son eşitsizlikte (3.8),(3.9) ve (3.10) yi kullanırsak;

$$(1 - \lambda_2)d(x_n, x_m) \leq (1 + \lambda_1)(d_n + d_m) + K F_1[\min(d_n, d_m)] + K F_2(d_n \cdot d_m)$$

T asimptotik düzenli ve F_1 ve F_2 , 0 noktasında sürekli olduğundan ve

$m \rightarrow \infty$ alırsak;

$$(1 - \lambda_2) \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x_m) \leq 0$$

bulunur ki bu nedenle $\{x_n\}$ dizisi Cauchy dir. X tam olduğundan bazı $u \in X$ için $\lim x_n = u$ yazarız. Şimdi u noktasının tek sabit nokta olduğunu gösterelim. $d(Tu, u) > 0$ olduğunu

kabul edelim. $\alpha_i = \alpha_i(x_n, u)$ olmak üzere, (3.11) kabulünden;

$$\begin{aligned} d(u, Tu) &\leq d(u, Tx_n) + d(Tx_n, Tu) \\ &\leq d(u, x_{n+1}) + \alpha_1 F_1[\min\{d_n, d(u, Tu)\}] + \alpha_2 F_2[d_n \cdot d(u, Tu)] \\ &\quad + \alpha_3 d(x_n, u) + \alpha_4 [d_n + d(u, Tu)] + \alpha_5 [d(x_n, Tu) + d(u, x_{n+1})] \end{aligned}$$

elde ederiz. Üçgen eşitsizliğini yeniden kullanırsak;

$$\begin{aligned} d(u, Tu) &\leq (1 + \alpha_5) d(u, x_{n+1}) + \alpha_1 F_1[\min\{d_n, d(u, Tu)\}] \\ &\quad + \alpha_2 F_2[d_n \cdot d(u, Tu)] + (\alpha_3 + \alpha_5) d(x_n, u) + \alpha_4 d_n \\ &\quad + (\alpha_4 + \alpha_5) d(u, Tu) \end{aligned}$$

(3.8), (3.9) ve (3.10) yi kullanırsak;

$$\begin{aligned} d(u, Tu) &\leq \lambda_1 d(u, Tu) + (1 + \lambda_2) d(u, x_{n+1}) + \lambda_2 d(u, x_n) \\ &\quad + K F_1[\min\{d_n, d(u, Tu)\}] + K F_2[d_n \cdot d(u, Tu)] \end{aligned}$$

eşitsizliğinde limit alırsak;

$$d(u, Tu) \leq \lambda_1 d(u, Tu) < d(u, Tu)$$

olur ki bu bir çelişkidir. Yani $d(u, Tu) = 0$ olmalıdır. Buradan da $Tu = u$ elde edilir.

Şimdi T' nin tekliğini göstermek için u dan farklı başka bir v noktasının olduğunu kabul edelim. $\alpha_i = \alpha_i(u, v)$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} d(u, v) &= d(Tu, Tv) \\ &\leq \alpha_1 F_1(0) + \alpha_2 F_2(0) + \alpha_3 d(u, v) + \alpha_4 \cdot 0 + 2\alpha_5 d(u, v) \\ &= (\alpha_3 + 2\alpha_5) d(u, v) \end{aligned}$$

(3.10) den $(1 - \lambda_2) d(u, v) \leq 0$ olur ki; bu da $u = v$ demektir.

Şimdi T nin u noktasında sürekli olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki, $x_n \rightarrow u = Tu$ olsun. $\alpha_i = \alpha_i(x_n, u)$ olmak üzere, (3.10) den;

$$\begin{aligned} d(Tx_n, u) = d(Tx_n, Tu) &\leq \alpha_1 F_1(0) + \alpha_2 F_2(0) + \alpha_3 d(x_n, u) \\ &+ \alpha_4 d(x_n, Tx_n) + \alpha_5 [d(x_n, u) + d(Tx_n, u)] \\ &\leq (\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5) d(x_n, u) + (\alpha_4 + \alpha_5) d(u, Tx_n) \end{aligned}$$

elde edilir. (3.10) ve (3.8) i kullanırsak;

$$(1 - \lambda_1) d(Tx_n, u) \leq (\lambda_1 + \lambda_2) d(x_n, u)$$

olur. $n \rightarrow \infty$ limit alırsak;

$$(1 - \lambda_1) \lim_{n \rightarrow \infty} d(Tx_n, u) \leq 0$$

olur ki; bu da $\lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n = u$ demektir. □

3.3 Kompaktlık

Kompaktlık ile ilgili (Khan, 2017) ve (Namdeo ve ark., 1998) makalelerinden faydalanılmıştır.

Teorem 3.9. $(\mathbb{M}, \rho)$ kompakt metrik uzay ve $T : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}$ sürekli olsun. Her $x, y \in X$ ve $x \neq y$ için;

$$d(Tx, Ty) < \frac{1}{2} [d(x, Tx) + d(y, Ty)]$$

olduğunda T nin tek bir $v \in \mathbb{M}$ sabit noktası vardır. Ayrıca her bir $x \in \mathbb{M}$ için $\{T^n x\}$ iterasyon dizisi v ye yakınsar (Gornicki, 2017).

Kanıt. Önce alışılmış metrik ile $[0, 1]$ kümesinde $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ olmak üzere $c \in [0, 1]$ ve $Tx = c$ tanımlayalım.

$f : X \rightarrow [0, \infty)$ olmak üzere $f(x) = \rho(x, Tx)$ sürekli fonksiyonunu alalım. Kompaktlıktan

$f(v) = \inf\{f(x) : x \in X\}$ olacak şekilde $v \in X$ noktası vardır. $v \neq Tv$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \rho(Tv, T^2v) &< \frac{1}{2}[\rho(v, Tv) + \rho(Tv, T^2v)] \\ &< \rho(v, Tv) \end{aligned} \quad (3.12)$$

olur. Buradan da;

$$f(Tv) = \rho(Tv, T^2v) < \rho(v, Tv) = f(v)$$

olur ki bu çelişkidir. Yani $v = Tv$ olur. Şimdi v nin tekliğini gösterelim. Bir başka noktası u olsun. Teoremden verilen eşitsizliği kullanırsak;

$$\rho(Tu, Tv) < \frac{1}{2}[\rho(u, Tu) + \rho(v, Tv)]$$

yazabiliriz. $n \rightarrow \infty$ limit alırsak $\rho(Tu, Tv) = 0$ olur. Yani T nin tek noktası olur.

Şimdi $x \in X$ olacak şekilde $\{x_n = T^n x\}$ dizisini alalım. $x = v$ aldığımızda $n = 1, 2, \dots$ için $x_n = v$ olur. $x_n \neq v$ alalım. Çünkü;

$$\rho(T^{n+1}x, T^n x) < \frac{1}{2}[\rho(T^n x, T^{n+1}x) + \rho(T^{n-1}x, T^n x)]$$

olduğundan;

$$\rho(T^{n+1}x, T^n x) < \rho(T^n x, T^{n-1}x) < \dots < \rho(Tx, x)$$

olur. Negatif olmayan $b_n = \rho(T^{n+1}x, T^n x)$ dizisi azalmayandır. Böylece yakınsak olur.

$$b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \geq 0$$

olsun. Bu varsayım $b > 0$ varsayımı ile çelişkiye yol açar. $\mathbb{M}$ kompakt olduğundan $\{T^n x\}$ dizisinin $\{T^{n_i} x\}$ alt dizisi $i \rightarrow \infty$ için $\{T^{n_i} x\} \rightarrow z \in \mathbb{M}$ değerine yakınsar. Çünkü T sürekli olduğundan ;

$$0 < b = \lim_{i \rightarrow \infty} \rho(\{T^{n_i+1}x, T^{n_i}x\}) = \rho(Tz, z)$$

yani $z \neq v$ dir. Üstelik (3.12) eşitsizliğini kullanırsak;

$$0 < b = \lim_{i \rightarrow \infty} \rho(\{T^{n_i+2}x, T^{n_i+1}x\}) = \rho(T^2z, Tz) < \rho(Tz, z) = b$$

olur ki; bu bir çelişki olur. Yani $b = 0$ olur.

$$\begin{aligned}\rho(T^{n+1}x, v) &= \rho(T^{n+1}x, Tv) < \frac{1}{2}[\rho(T^n x, T^{n+1}x) + \rho(v, Tv)] \\ &= \frac{1}{2}\rho(T^n x, T^{n+1}x) \rightarrow b = 0\end{aligned}$$

olduğundan $n \rightarrow \infty$ limit alırsak $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(T^{n+1}x, v) = 0$ olur. Böylece $\{T^n x\}$ dizisi yakınsak olur. $\square$

Teorem 3.10. $(\mathbb{M}, \rho)$ kompakt metrik uzay ve $T : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}$ sürekli olsun. $x \neq y$ olmak üzere her $x, y \in \mathbb{M}$ ve $A + B + C = 1$ olacak şekilde A, B, C pozitif sayıları için;

$$\rho(Tx, Ty) < A\rho(x, Tx) + B\rho(y, Ty) + C\rho(x, y)$$

eşitsizliği sağlandığında T nin bir tek $v \in \mathbb{M}$ sabit noktası vardır. Ayrıca her bir $x \in \mathbb{M}$ için $\{T^n x\}$ iterasyon dizisi v ye yakınsar (Gornicki, 2017).

Kanıt. İspatı yukarıdaki Teorem (3.9) daki gibi yapılabilir. $\square$

Örnek 3.10. (X, d) Tam fakat kompakt olmayan metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ sürekli dönüşüm olsun. $x \neq y$ olmak üzere $\forall x, y \in X$ için;

$$d(Tx, Ty) < \frac{1}{2}[d(x, Tx) + d(y, Ty)]$$

olarak tanımlanırsa, T nin hiçbir sabit noktası yoktur.

Teorem 3.11. (M, ρ) Tam b -metrik uzay olsun. $T : M \rightarrow M$ dönüşümü $s \geq 1$ ve $\forall x, y \in M$ ve $\alpha_i (i = 1, 2, 3, 4, 5)$ negatif olmayan reel sayılar, $\max\{(\alpha_1 s + \alpha_4 s^2), (\alpha_3 s^3 + \alpha_4 s^3 + \alpha_5)\} < 1$ olmak üzere ,

$$\rho(Tx, Ty) \leq \alpha_1 \rho(x, Tx) + \alpha_2 \rho(y, Ty) + \alpha_3 \rho(x, Ty) + \alpha_4 \rho(y, Tx) + \alpha_5 \rho(x, y)$$

eşitsizliği sağlansın. M den alınan dizi asimptotik T -düzenli olduğunda T nin bir tane sabit noktası olur (Khan, 2017).

Kanıt. M den asimptotik T-düzenli $\{x_n\}$ dizisini alalım. $\forall m, n \in \mathbb{N}$ için;

$$\begin{aligned}
\rho(x_m, x_n) &\leq s[\rho(x_n, Tx_n) + \rho(Tx_n, x_m)] \\
&\leq s[\rho(x_n, Tx_n) + s\rho(Tx_n, Tx_m) + s\rho(Tx_m, x_m)] \\
&\leq \rho(x_n, Tx_n) + s^2\rho(Tx_n, Tx_m) + s^2\rho(Tx_m, x_m) \\
&\leq s\rho(x_n, Tx_n) + s^2\rho(Tx_m, x_m) + s^2[\alpha_1\rho(x_n, Tx_n) + \alpha_2\rho(x_m, Tx_m) \\
&\quad + \alpha_3\rho(x_n, Tx_m) + \alpha_4\rho(x_m, Tx_n) + \alpha_5\rho(x_n, x_m)] \\
&\leq (s + \alpha_1s^2 + \alpha_4s^3)\rho(x_n, Tx_n) + (s^2 + \alpha_2s^2 + \alpha_3s^3)\rho(x_m, Tx_m) \\
&\quad + (\alpha_3s^3 + \alpha_4s^3 + \alpha_5)\rho(x_n, x_m)
\end{aligned}$$

gerekli düzenlemeleri yaparsak,

$$\begin{aligned}
\rho(x_n, x_m) &\leq \left\{ \frac{s + \alpha_1s^2 + \alpha_4s^3}{1 - (\alpha_3s^3 + \alpha_4s^3 + \alpha_5)} \right\} \rho(x_n, Tx_n) \\
&\quad + \left\{ \frac{s^2 + \alpha_2s^2 + \alpha_3s^3}{1 - (\alpha_3s^3 + \alpha_4s^3 + \alpha_5)} \right\} \rho(x_m, Tx_m)
\end{aligned}$$

bulunur. $n \rightarrow \infty$ limit alınırsa,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, x_m) = 0$$

bulunur bu da bize $\{x_n\}$ dizisinin Cauchy dizisi olduğunu verir. M tam metrik uzay olduğundan $\{x_n\}$ dizisi yakınsak olur. $z \in M$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = z$ olur. Şimdi z noktasının T de sabit nokta olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
\rho(Tz, z) &\leq s[\rho(Tz, Tx_n) + \rho(Tx_n, z)] \\
&\leq s\rho(Tz, Tx_n) + s^2\rho(Tx_n, x_n) + s^2\rho(x_n, z) \\
&\leq s[\alpha_1\rho(z, Tz) + \alpha_2\rho(x_n, Tx_n) + \alpha_3\rho(z, Tx_n) + \alpha_4\rho(x_n, Tz) \\
&\quad + \alpha_5\rho(z, x_n)] + s^2\rho(Tx_n, x_n) + s^2\rho(x_n, z) \\
&\leq \alpha_1s\rho(z, Tz) + \alpha_2s\rho(x_n, Tx_n) + \alpha_3s^2\rho(z, x_n) \\
&\quad + \alpha_3s^2\rho(x_n, Tx_n) + \alpha_4s^2\rho(x_n, z) + \alpha_4s^2\rho(z, Tz) \\
&\quad + \alpha_5s\rho(z, x_n) + s^2\rho(Tx_n, x_n) + s^2\rho(x_n, z)
\end{aligned}$$

buradan gerekli sadeleştirmeleri yaparsak;

$$\begin{aligned}(1 - \alpha_1 s - \alpha_4 s^2)\rho(Tz, z) &\leq (s^2 + \alpha_2 s + \alpha_3 s^2)\rho(x_n, Tx_n) \\ &+ (s^2 + \alpha_3 s^2 + \alpha_4 s^2 + \alpha_5 s)\rho(x_n, z)\end{aligned}$$

son olarak,

$$\begin{aligned}\rho(z, Tz) &\leq \left\{ \frac{(s^2 + \alpha_2 s + \alpha_3 s^2)\rho(x_n, Tx_n)}{(1 - \alpha_1 s - \alpha_4 s^2)} \rho(x_n, Tx_n) \right. \\ &+ \left. \frac{(s^2 + \alpha_3 s^2 + \alpha_4 s^2 + \alpha_5 s)}{(1 - \alpha_1 s - \alpha_4 s^2)} \right\} \rho(x_n, z)\end{aligned}$$

T asimptotik T -düzenli olduğundan, $n \rightarrow \infty$ limit aldığımızda

$$\rho(Tz, z) = 0$$

olur. Böylece z noktası T nin sabit noktası olur. Şimdi tekliğini gösterelim. $z \neq u$ olacak şekilde farklı bir u değeri olsun.

$$\begin{aligned}\rho(z, u) &= \rho(Tz, Tu) \\ &\leq \alpha_1 \rho(z, Tz) + \alpha_2 \rho(u, Tu) + \alpha_3 \rho(z, Tu) + \alpha_4 \rho(u, Tz) + \alpha_5 \rho(z, u)\end{aligned}$$

Bu son eşitsizlikten, $(1 - \alpha_3 - \alpha_4 - \alpha_5)\rho(z, u) = 0$ elde edilir. $\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 \leq 0$ olduğundan $z = u$ eşitliği elde edilir. $\square$

Teorem 3.12. (M, p) , tam b -metrik uzay olsun. $T : M \rightarrow M$ dönüşümü $s \geq 1$ olmak üzere;

$$p(Tx, Ty) \leq \alpha_1 p(x, Tx) + \alpha_2 p(y, Ty) + \alpha_3 p(x, Ty) + \alpha_4 p(y, Tx) + \alpha_5 p(x, y)$$

eşitsizliği, $\forall x, y \in M$ ve $\alpha_i (i = 1, 2, 3, 4, 5)$ negatif olmayan reel sayılar olmak üzere $\max\{(\alpha_1 s + \alpha_4 s^2), (\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5)\} < 1$ sağlansın. Eğer T dönüşümü M nin bazı $x_0 \in M$ noktalarında asimptotik düzenli olduğunda T nin bir tane sabit noktası olur (Khan, 2017).

Kanıt. $x_0 \in M$ noktası T dönüşümü altında asimptotik düzenli dönüşüm olsun. $\forall m, n \in N$ için $\{T^n x_0\}$ dizisini alırsak;

$$\begin{aligned}
\rho(T^m x_0, T^n x_0) &\leq \alpha_1 p(T^{m-1} x_0, T^m x_0) + \alpha_2 p(T^{n-1} x_0, T^n x_0) \\
&+ \alpha_3 p(T^{m-1} x_0, T^n x_0) + \alpha_4 p(T^{n-1} x_0, T^m x_0) \\
&+ \alpha_5 p(T^{m-1} x_0, T^{n-1} x_0) \\
&\leq \alpha_1 p(T^{m-1} x_0, T^m x_0) + \alpha_2 p(T^{n-1} x_0, T^n x_0) \\
&+ \alpha_3 s p(T^{m-1} x_0, T^m x_0) + \alpha_3 s p(T^m x_0, T^n x_0) \\
&+ \alpha_4 s p(T^{n-1} x_0, T^n x_0) + \alpha_4 s p(T^n x_0, T^m x_0) \\
&+ \alpha_5 s p(T^{m-1} x_0, T^m x_0) + \alpha_5 s^2 p(T^m x_0, T^n x_0) \\
&+ \alpha_5 s^2 p(T^n x_0, T^{n-1} x_0)
\end{aligned}$$

buradan düzenlemeleri yaptığımızda;

$$\begin{aligned}
p(T^m x_0, T^n x_0) &\leq \left\{ \frac{\alpha_1 + \alpha_3 s + \alpha_5 s}{1 - (\alpha_3 s + \alpha_4 s + \alpha_5 s^2)} \right\} p(T^{m-1} x_0, T^m x_0) \\
&+ \left\{ \frac{\alpha_2 + \alpha_4 s + \alpha_5 s^2}{1 - (\alpha_3 s + \alpha_4 s + \alpha_5 s^2)} \right\} p(T^{n-1} x_0, T^n x_0)
\end{aligned}$$

olur. T , Asimptotik düzenli dönüşüm olduğundan $n, m \rightarrow \infty$ için,

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} (T^n x_0, T^m x_0) = 0$$

olur. Böylece $\{T^n x_0\}$ Cauchy dizisi olur. M tam olduğundan $z \in M$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T^n x_0 = 0 = z$$

bulunur.

Şimdi z noktasının T dönüşümünün altında sabit nokta olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
p(Tz, z) &\leq sp(Tz, T^n x_0) + sp(T^n x_0, z) \\
&\leq \alpha_1 sp(z, Tz) + \alpha_2 sp(T^{n-1} x_0, T^n x_0) + \alpha_3 sp(z, T^n x_0) \\
&\quad + \alpha_4 sp(T^{n-1} x_0, Tz) + \alpha_5 sp(z, T^{n-1} x_0) + sp(z, T^n x_0) \\
&\leq \alpha_1 sp(z, Tz) + \alpha_2 sp(T^{n-1} x_0, T^n x_0) + \alpha_3 sp(z, T^n x_0) \\
&\quad + \alpha_4 s^2 p(T^{n-1} x_0, T^n x_0) + \alpha_4 s^2 p(T^n x_0, Tz) \\
&\quad + \alpha_5 s^2 p(T^n x_0, z) + \alpha_5 s^2 p(T^n x_0, T^{n-1} x_0) + sp(T^n x_0, z)
\end{aligned}$$

$n \rightarrow \infty$ için limiti alalım o zaman $\{T^{n-1} x_0\}$ dizisi $\{T^n x_0\}$ dizisinin bir alt dizisi olduğundan,

$$p(Tz, z) \leq \alpha_1 sp(z, Tz) + \alpha_4 s^2 p(z, Tz)$$

buradan $p(Tz, z) = 0$ yani; $Tz = z$ olur. Böylece z noktası T nin sabit noktası olur. Şimdi T nin iki farklı noktasının olduğunu kabul edelim. $u \neq z$ olmak üzere;

$$\begin{aligned}
p(z, u) = p(Tz, Tu) &\leq \alpha_1 p(z, Tz) + \alpha_2 p(u, Tu) + \alpha_3 p(z, Tu) \\
&\quad + \alpha_4 p(u, Tz) + \alpha_5 p(z, u)
\end{aligned}$$

eşitsizliğinden $(1 - \alpha_3 - \alpha_4 - \alpha_5)p(z, u) = 0$ olur. $(\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5) < 1$ olduğundan $z = u$ olur. Böylece T nin bir tek sabit noktası olur. $\square$

3.4 GENELLEŞTİRMELER

Bu bölümde, Pakistan’da Uluslararası yayın yapan Open Journal of Mathematical Sciences (OMS) dergisinde, b-metrik uzaylarda Asimptotik düzenlilik ile ilgili (Nagac ve Taş, 2024) ın yayınlanan makalesindeki teoremler ve sonuçları verilecektir.

Teorem 3.13. $(\mathcal{M}, \rho)$ Tam b-metrik uzayı $T : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ Sürekli Asimptotik düzenli dönüşüm olsun. $\forall x, y \in \mathcal{M}$ için $0 \leq M < 1$ ve $0 \leq K < \infty$ olmak üzere;

$$\rho(Tx, Ty) \leq M \cdot \rho(x, y) + K[\rho(y, Ty) + \rho(x, Tx)] \quad (3.13)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, T nin tek bir $p \in \mathcal{M}$ sabit noktası vardır. Ayrıca, her $x \in \mathcal{M}$ için $T^n x \rightarrow p$ noktasına yakınsar (Nagac ve Taş, 2024).

Kanıt. $p \in \mathcal{M}$ olmak üzere $\{x_n\} \subset \mathcal{M}$ alt kümesini $x_{n+1} = Tx_n = T^{n+1}x_0, n = 0, 1, 2, 3, \dots$ iterasyonu ile tanımlayalım. (3.13) eşitsizliğini kullanırsak;

$$\begin{aligned} \rho(x_{n+k}, x_n) &\leq s[\rho(x_{n+k}, x_{n+k+1}) + \rho(x_{n+k+1}, x_n)] \\ &\leq s[\rho(x_{n+k}, x_{n+k+1}) + s\rho(x_{n+k+1}, x_{n+1}) + s\rho(x_{n+1}, x_n)] \\ &= s\rho(x_{n+k}, x_{n+k+1}) + s^2\rho(x_{n+k+1}, x_{n+1}) + s^2\rho(x_{n+1}, x_n) \\ &\leq s\rho(x_{n+k}, x_{n+k+1}) + s^2\rho(x_{n+1}, x_n) \\ &+ s^2[M\rho(x_{n+k}, x_n) + K[\rho(x_n, Tx_n) + \rho(x_{n+k}, Tx_{n+k})]], \end{aligned}$$

gerekli düzenlemeleri yaptığımızda;

$$(1 - s^2M)\rho(x_{n+k}, x_n) \leq s^2K[\rho(x_n, Tx_n) + \rho(x_{n+k}, Tx_{n+k})] \rightarrow 0$$

yazılır. T Asimptotik düzenli dönüşüm olduğundan $\{x_n\}$ dizisi Cauchy dizisi olur. Uzay Tam olduğundan $x_n \rightarrow p$ olur. T sürekli ve $x_{n+1} = Tx_n$ olduğundan;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n = T(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = Tp$$

yani p noktası sabit nokta olur. Şimdi p den başka bir q sabit noktasının olduğunu kabul edelim.

$$\rho(p, q) = \rho(Tp, Tq) \leq M.d(p, q) + K[\rho(p, Tp) + \rho(q, Tq)]$$

son eşitsizlikte K nın içerisindeki ifadeler 0 a gittiğinden ve $0 \leq M < 1$ aldığımız için;

$$(1 - M)\rho(Tp, Tq) \leq 0$$

olur. Son eşitsizlik $\rho(p, q) = 0$ olduğunda doğru olur. Yani sabit nokta tekdir. $\square$

Sonuç 3.14. (3.13) formülünde $M = 0$ aldığımız taktirde, Kannan Tipi Eşitsizliği elde ederiz. Yani, $\forall x, y \in \mathcal{M}$ için ;

$$\rho(Tx, Ty) \leq K[\rho(y, Ty) + \rho(x, Tx)]$$

olur.

Teorem 3.15. $(\mathcal{M}, \rho)$ Tam b -metrik uzayında , $s \geq 1$ ve $\mathcal{T} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ Asimptotik düzenli dönüşüm olsun. $\varphi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ de $f_i = f_i(x, y)$ Pozitif değerli fonksiyonları her $x, y \in X$ için, $f_1 + 2f_3 < 1$, $sf_1(x, y) < 1$, $sf_3(x, y) < 1$ olacak şekilde;

$$\begin{aligned} \rho(\mathcal{T}x, \mathcal{T}y) &\leq f_1(x, y)\rho(x, y) + f_2(x, y)\varphi(\min\{\rho(x, \mathcal{T}x), \rho(y, \mathcal{T}y)\}) \\ &+ f_3(x, y)[\rho(x, \mathcal{T}y) + \rho(y, \mathcal{T}x)] \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlıyorsa; $\mathcal{M}$ de $\mathcal{T}$ dönüşümünün bir tek noktası vardır (Nagac ve Tas, 2024).

Kanıt. $x_n = \mathcal{T}^n x_0 = \mathcal{T}x_{n-1}$ alalım. $\varrho_n = \rho(x_n, x_{n+1})$ olsun.

$$\begin{aligned} \rho(x_n, x_m) &\leq s[\rho(x_n, x_{n+1}) + \rho(x_{n+1}, x_{m+1}) + \rho(x_{m+1}, x_m)] \\ &= s[\varrho_n + \rho(\mathcal{T}x_n, \mathcal{T}x_m) + \varrho_m] \\ &\leq s(\varrho_n + \varrho_m) + s[f_1\rho(x_n, x_m) + f_2\varphi(\min\{\rho(x_n, \mathcal{T}x_n), \rho(x_m, \mathcal{T}x_m)\}) \\ &+ f_3\{\rho(x_n, \mathcal{T}x_m) + \rho(x_m, \mathcal{T}x_n)\}] \\ &= s\varrho_n + s\varrho_m + sf_1\rho(x_n, x_m) + sf_2\varphi(\min\{\rho(x_n, \mathcal{T}x_n), \rho(x_m, \mathcal{T}x_m)\}) \\ &+ sf_3\{\rho(x_n, \mathcal{T}x_m) + \rho(x_m, \mathcal{T}x_n)\} \\ &\leq s(\varrho_n + \varrho_m) + sf_1\rho(x_n, x_m) + sf_2\varphi(\min\{\varrho_n, \varrho_m\}) + sf_3(\varrho_n + \varrho_m) \end{aligned}$$

gerekli düzenlemeleri yaparsak,

$$(1 - sf_1)\rho(x_n, x_m) \leq s(1 + f_3)(\varrho_n + \varrho_m) + sf_2\varphi(\min\{\varrho_n, \varrho_m\})$$

yazarız. $\mathcal{T}$ asimptotik düzenli dönüşüm ve $n > m$ için $n, m \rightarrow \infty$, $\varrho_n \rightarrow 0$, $\varrho_m \rightarrow 0$ olduğundan, $\min\{\varrho_n + s\varrho_m\} \rightarrow 0$ olur. Böylece

$$(1 - sf_1) \lim \rho(x_n, x_m) \leq 0, (1 - sf_1 > 0)$$

olur ki; bu $\{x_n\}$ dizisinin Cauchy dizisi olduğunu verir. Çünkü $\exists u \in \mathcal{M}$ için $\mathcal{M}$ nin tamlığından,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) = u$$

olur. Şimdi $u \in \mathcal{M}$ nin $\mathcal{T}$ nin sabit noktası olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki $\rho(u, \mathcal{T}u) \neq 0$ olsun.

$$\begin{aligned} \rho(u, \mathcal{T}u) &\leq s[\rho(u, \mathcal{T}x_n) + \rho(\mathcal{T}x_n, \mathcal{T}u)] \\ &\leq s[\rho(u, x_{n+1}) + f_1\rho(x_n, u) + f_2\varphi(\min\{\rho(x_n, \mathcal{T}x_n), \rho(u, \mathcal{T}u)\}) \\ &\quad + f_3(\rho(x_n, \mathcal{T}u) + \rho(u, \mathcal{T}x_n))] \end{aligned}$$

gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$\begin{aligned} \rho(u, \mathcal{T}u) &\leq s[\rho(u, x_{n+1}) + f_1\rho(x_n, u) + f_2\varphi[\min\{\varrho_n, \rho(u, \mathcal{T}u)\}]] \\ &\quad + f_3(\rho(x_n, \mathcal{T}u) + \rho(u, x_{n+1})) \\ &= \rho(u, x_{n+1})(s + sf_3) + sf_2\varphi(\min\{\varrho, \rho(u, \mathcal{T}u)\}) \\ &\quad + sf_1\rho(x_n, u) + sf_3\rho(u, \mathcal{T}u) \end{aligned}$$

yazarız. Buradan da;

$$(1 - sf_3)\rho(u, \mathcal{T}u) \leq 0$$

olur. Bu ise $\rho(u, \mathcal{T}u) = 0$ demektir ve $\mathcal{T}u = u$ olur. Böylece, $u \in \mathcal{M}$, $\mathcal{T}$ dönüşümünün bir sabit noktası olur. Şimdi tekliğini gösterelim. u ve v ; $\mathcal{T}u = u$ ve $\mathcal{T}v = v$ olacak şekilde iki

noktası olsun. Yani;

$$\begin{aligned}
 \rho(u, v) = \rho(\mathcal{T}u, \mathcal{T}v) &\leq f_1\rho(u, v) + f_2\varphi(\min \rho(u, \mathcal{T}u), \rho(v, \mathcal{T}v)) \\
 &+ f_3[\rho(u, \mathcal{T}v) + \rho(v, \mathcal{T}u)] \\
 &= f_1\rho(u, v) + f_2\varphi(0) + f_3[\rho(u, v) + \rho(v, u)] \\
 &= (f_1 + 2f_3)\rho(u, v)
 \end{aligned}$$

eşitsizliği düzenlersek, $(1 - f_1 - 2f_3)\rho(u, v) \leq 0$ yazarız. Yani; $\implies \rho(u, v) = 0 \implies u = v$ olur. İspatı tamamlamış oluruz. $\square$

Şimdi b -metrik uzaylar için bu teoremin bir sonucu olarak aşağıdaki teoremi yazalım.

Sonuç 3.16. $(\mathcal{M}, \rho)$, 3.3 teoreminin şartlarını sağlasın. $s \geq 1$ olmak üzere, $\forall x, y \in \mathcal{M}$ için $p + 2r < 1$, $ps < 1$ and $rs < 1$ ve $\varphi(0) = 0$ olsun.

$\mathcal{T} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ dönüşümü asimptotik düzenli dönüşümü aşağıdaki koşulları ayrı ayrı sağlasın.

$$(1) \rho(\mathcal{T}x, \mathcal{T}y) \leq p\rho(x, y) + r. [\rho(x, \mathcal{T}y) + \phi(y, \mathcal{T}y)]$$

$$(2) \rho(\mathcal{T}x, \mathcal{T}y) \leq p\rho(x, y) + \alpha(\min\{\rho(x, \mathcal{T}x), \rho(y, \mathcal{T}y)\})^2 + r [\rho(x, \mathcal{T}y) + \rho(y, \mathcal{T}x)]$$

(1) ya da (2) den herhangi biri sağlanırsa; $\mathcal{M}$ uzayı $\mathcal{T}$ altında sabit bir noktaya sahiptir.

Kanıt. (1) Teorem (3.15) de $f_1(x, y) = \rho$, $f_2(x, y) = 0$, $f_3(x, y) = r$ yazılırsa elde edilir.

(2) Teorem (3.15) de $f_1(x, y) = p$, $f_2(x, y) = \alpha$, $f_3(x, y) = r$ ve $\varphi(t) = t^2$ yazılırsa elde edilir. $\square$

3.5 SONUÇ ve TARTIŞMA

Birinci bölümde, sabit nokta ile ilgili yapılan çalışmalardan bahsedilmiştir. İkinci bölümde, temel tanım ve kavramlar verilmiştir. Üçüncü bölümde, sabit nokta teoremi ile ilgili teoremler verildi. Banach Büzölme teoremi sabit nokta prensibinin gelişmesinde önemli bir yere sahiptir. Bu noktadan sonra sabit nokta teorisi çeşitli yönlerden gelişmeye başlamıştır. Son bölümde paylaşılan teoremlerde; Banach daralma prensibi birçok bilim adamı tarafından değiştirilerek yeni formüller elde edilmiştir. Sabit nokta teoremi, asimptotik düzenlilik ve Kompaktlık kavramları ile incelenerek teoremler ve genellemeler elde edilmiştir. Tez çalışmamızın genelleştirmeler bölümünde, Metrik uzayların daha zayıf yapısı olan b-metrik uzaylarda çalışılmış ve b-Metrik Uzaylarda Asimptotik düzenli dönüşümler altında Sabit noktası olabilme Şartları değiştirilerek yeni formüller elde edilmiştir. Bu bulgularımız mevcut literatürdeki sonuçları genişletmektedir. b-Metrik Uzaylarda, daha farklı ve ilginç genellemeler elde edilebilir.

KAYNAKLAR

- Abdeljawad, T., Karapınar, E., Taş, K. (2011), Existence and uniqueness of a common fixed point on partial metric spaces, *Applied Mathematics Letters*, 24, 11, 1900-1904
- Aydi, H., Bota, M., Karapınar, E., Mitrović, S.(2012), A fixed point theorem for set-valued quasi-contractions in b-metric spaces, *Fixed Point Theory and Applications*, 1, 1-8
- Bakhtin, I.A. (1989), The Contraction Mapping Principle in Almost Metric Space, *unctional Analysis*, 30, 26-37
- Berinde, V.(1993), Generalized contractions in quasimetric spaces, *Seminar on Fixed Point Theory*, Babes-Bolyai University, Cluj-Napoca, 5,3, 9
- Berinde, M., Berinde, V. (2007), On a general class of multi-valued weakly Picard mappings, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 772–782
- Berinde, V. and Pacurar, M. (2008), Fixed points and continuity of almost contractions, Fixed points and continuity of almost contractions, *Fixed Point Theory*, 23–34
- Boriceanu, M. (2009), Fixed point theory for multivalued generalized contraction on a set with two b metrics, *Studia Universitatis, Babes-Bolyai, Mathematica*, 3
- Browder, F.E., Petryshyn, W.V. (1967), Construction of fixed points of nonlinear mappings in Hilbert space, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 20, (2), 197-228 .
- Ciric, Lj. (2005), Fixed points of asymptotically regular mappings, *Mathematical Communications*, 10, 2, 111-114
- Czerwik, S. (1993), Contraction mappings in b -metric spaces, *Acta mathematica et informatica universitatis ostraviensis*, 5-11.

- Górnicki, J. (2017), *Journal of Fixed Point Theory and Applications*, 19, 2145-2152
- Górnicki, J. (2019), Remarks on asymptotic regularity and fixed points, *Journal of Fixed Point Theory and Applications*, 21
- Jungck, G.(1986), Compatible mappings and common fixed points, *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 9, 4, 771-779.
- Kamran, T., Samreen, M., UL Ain, Q. (2017), A generalization of b-metric space and some fixed point theorems, *Mathematics*, 5,2, 19
- Khan , Jhade, K. (2017), Theorems on Fixed Points for Asymptotically Regular Sequences and Maps in b-Metric Space, *QU Journal of Science*, 22, (1), 48-52
- Kir, M., Kiziltunc H. (2013), On some well known fixed point theorems in b-metric spaces, *Turkish journal of analysis and number theory*, 1,1, 13-16
- KOÇAK,M.(2011), Genel Topolojiye Giriş ve Çözümlü Alıştırmalar, *Kampüs yayıncılık*
- Kumar, S.(2002), Some contributions to metric fixed point theory, *Aligarh Muslim University Aligarh, (INDIA*
- Matthews, S., G. (1992) ,The topology of partial metric spaces, author=Matthews, Stephen G, *University of Warwick. Department of Computer Science*
- Nagac,I. and Tas, K.(2024), Fixed point theorems concerning mappings that exhibit asymptotic regularity in b-metric spaces, *Open Journal of Mathematical Sciences*, 137-140
- Namdeo, R.K., Tiwari, N.K. , Fisher, B. and Tas, K. (1998), Related fixed point theorems on two complete and compact metric spaces , *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 21 (3) , 559-564.

Rahimov, A.(2006), Topolojik Uzaylar, *Seçkin yayıncılık*, Ankaara.

Rhoades, B. (1977), A comparison of various definitions of contractive mappings, *Transactions of the American Mathematical Society*, 226, 257-290

Taş, K., Telci, M., Fisher, B.(1996), Common fixed point theorems for compatible mappings, *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 19, 451-456.



ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı : İbrahim NAĞAÇ

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Lisans	100. Yıl Üniversitesi Matematik Bölümü	2000
Lise	Hatay İmam-Hatip Lisesi	1996

Mesleki Deneyim

Yıl	Yer	Görev
2000-2022	Hatay	Matematik Öğretmenliği
2022-2024	Ankara	Matematik Öğretmenliği

Yabancı Dil

İngilizce

Yayınlar

Nagac, İbrahim ve Taş, Kenan (2024), Fixed point theorems concerning mappings that exhibit asymptotic regularity in b-metric spaces, *Open Journal of Mathematical Sciences dergisi, Pakistan*, Sayfa 137-140.