

**LİNEER OLMAYAN KISMİ DİFERANSİYEL
DENKLEMLERİN MODİFİYE EDİLMİŞ ÜSTEL
GENİŞLEME VE SİNE-GORDON AÇILIM METODU
İLE ÇÖZÜMÜ**

Tuğba YAZĞAN

**Danışman: Doç. Dr. Sıdika Şule ŞENER KILIÇ
Doktora Tezi
Matematik Ana Bilim Dalı
2024**

(Her hakkı saklıdır.)

T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

**LİNEER OLMAYAN KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN MODİFİYE
EDİLMİŞ ÜSTEL GENİŞLEME VE SİNE-GORDON AÇILIM METODU İLE
ÇÖZÜMÜ**

(Modified Exponential of Nonlinear Partial Differential Equations Solution with Expansion
and Sine-Gordon Expansion Method)

DOKTORA TEZİ

Tuğba YAZĞAN

Danışman: Doç. Dr. Sıdika Şule ŞENER KILIÇ

İkinci Tez Danışmanı: Prof. Dr. Ercan ÇELİK

Erzurum

Kasım, 2024

TEZ KABUL VE ONAY TUTANAĞI

LİNEER OLMAYAN KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN MODİFİYE EDİLMİŞ
ÜSTEL GENİŞLEME VE SİNE-GORDON AÇILIM METODU İLE ÇÖZÜMÜ

Doç. Dr. Sıdıka Şule ŞENER KILIÇ danışmanlığında, Tuğba YAZĞAN tarafından hazırlanan bu çalışma, 08/11/2024 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Ana Bilim Dalı, Uygulamalı Matematik Bilim Dalı'nda doktora tezi olarak **oy birliği** ile kabul edilmiştir.

Jüri Başkanı:	Prof. Dr. Alaattin ESEN <i>İnönü Üniversitesi</i>	Aslı Islak İmzalıdır
Danışman:	Doç. Dr. Sıdıka Şule ŞENER KILIÇ <i>Atatürk Üniversitesi</i>	Aslı Islak İmzalıdır
Jüri Üyesi:	Prof. Dr. Hasan BULUT <i>Fırat Üniversitesi</i>	Aslı Islak İmzalıdır
Jüri Üyesi:	Doç. Dr. Bilal NİŞANCI <i>Atatürk Üniversitesi</i>	Aslı Islak İmzalıdır
Jüri Üyesi:	Doç. Dr. Mesut KARABACAK <i>Atatürk Üniversitesi</i>	Aslı Islak İmzalıdır
Jüri Üyesi:	Dr. Öğr. Üyesi Arzu AYKUT <i>Atatürk Üniversitesi</i>	Aslı Islak İmzalıdır
İkinci Tez Danışmanı:	Prof. Dr. Ercan ÇELİK <i>Kırgızistan-Türkiye Manas Üniversitesi</i>	Aslı Islak İmzalıdır

Enstitü yönetim Kurulunun
.../.../... tarih ve sayılı
kararı

Bu tezin Atatürk Üniversitesi Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği'nin ilgili maddelerinde belirtilen şartları yerine getirdiğini onaylarım.

Prof. Dr. Alper NUHOĞLU

Enstitü Müdürü

Aslı ıslak imzalıdır

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildiriş, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ETİK BİLDİRİM VE İNTİHAL BEYAN FORMU

Doktora tezi olarak *Doç. Dr. Sıdıka Şule ŞENER KILIÇ* danışmanlığında sunulan “Lineer Olmayan Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Modifiye Edilmiş Üstel Genişleme ve Sine-Gordon Açılım Metodu ile Çözümü” başlıklı çalışmanın tarafımızdan bilimsel etik ilkelere uyularak yazıldığını, yararlanılan eserlerin kaynakçada gösterildiğini, Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından belirlenmiş olan Turnitin Programı benzerlik oranlarının aşılmadığını ve aşağıdaki oranlarda olduğunu beyan ederiz.

Tez Bölümleri	Tezin Benzerlik Oranı (%)	Maksimum Oran (%)
Giriş	11	30
Kuramsal Temeller	20	30
Materyal ve Yöntem	10	35
Bulgular	12	20
Tartışma	6	20
Tezin Geneli	14	25

Not: Yedi kelimeye kadar benzerlikler ile Başlık, Kaynakça, İçindekiler, Teşekkür, Dizin ve Ekler kısımları tarama dışı bırakılabilir. Yukarıdaki azami benzerlik oranları yanında tek bir kaynaktan olan benzerlik oranlarının %5'den büyük olmaması gerekir.

Beyan edilen bilgilerin doğru olduğunu aksi halde doğacak hukuki sorumlulukları kabul ve beyan ederiz.

Tez Yazarı (Öğrenci)	Tez Danışmanı
Tuğba YAZĞAN	Doç. Dr. Sıdıka Şule ŞENER KILIÇ
8.11.2024	8.11.2024
İmza: Aslı ıslak imzalıdır	İmza: Aslı ıslak imzalıdır

- * Tez ile ilgili YÖKTEZ’de yayımlanmasına ilişkin bir engelleme var ise aşağıdaki alanı doldurunuz.
- Tezle ilgili patent başvurusu yapılması / patent alma sürecinin devam etmesi sebebiyle Enstitü Yönetim Kurulunun .../.../... tarih ve sayılı kararı ile teze erişim 2 (iki) yıl süreyle engellenmiştir.
- Enstitü Yönetim Kurulunun .../.../... tarih ve sayılı kararı ile teze erişim 6 (altı) ay süreyle engellenmiştir.

TEŞEKKÜR

Doktora tezi olarak sunduğum bu alışma Atatürk Üniversitesi Fen Fakóltesi Matematik Bölümü'nde hazırlanmıştır.

Bu çalışmaya başladığımdan itibaren değerli zamanını, araştırmalarını, bilgi ve birikimlerini, her daim desteğini benden esirgemeyen tüm çalışmalarımı özen ve titizlikle inceleyen sadece akademik olarak değil her alanda bana yardımcı olan saygıdeğer hocam Doç. Dr. Sıdıka şule şENER KILIÇ'a teşekkürlerimi bir borç bilir ve saygılarımı sunarım.

Lisans ve lisansüstü eğitim hayatım boyunca arkamda duran, bana inanan, zorlukları aşmamda yardımcı olan, bu yolda beni destekleyen Fırat Üniversitesi Matematik Bölümü'ndeki Prof. Dr. Hasan BULUT'a teşekkürü bir borç bilir ve saygılarımı sunarım.

Akademik hayata başladığımdan itibaren tezimin yürütölmesi aşamasında beni ileriye taşıyan, manevi olarak büyük destek olan, kıymetli zamanını ayıran, çalışmalarımı ve değerli fikirlerini benden esirgemeyen hocam Prof. Dr. Ercan ÇELİK'e teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Tez çalışmam süresince değerli bilgi ve tecrübeleri ile bana yol gösteren kıymetli arkadaşım Dr. Öğr. Üyesi Olgun DURMAZ'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Son olarak doğduğum ilk günden bu yana, varlığını daima yanımda hissettiğim, durumlardan, koşullardan ve şartlardan bağımsız olarak her zaman sevgi dolu, destekleyici ve eğlenceli olmayı bir şekilde başaran kıymetli annem, babam ve kardeşlerime sonsuza dek minnettar kalacağım teşekkürlerimle.

Tuğba YAZĐAN

ÖZET

DOKTORA TEZİ

LİNEER OLMAYAN KİSİMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN MODİFİYE EDİLMİŞ ÜSTEL GENİŞLEME VE SİNE-GORDON AÇILIM METODU İLE ÇÖZÜMÜ

Tuğba YAZĞAN

Danışman: Doç. Dr. Sıdıka Şule ŞENER KILIÇ

İkinci Tez Danışmanı: Prof. Dr. Ercan ÇELİK

Amaç: Bu tezin amacı, lineer olmayan diferansiyel denklemlerin sınıflandırılmasını çözmek için sine-Gordon açılım metodu ve modifiye edilmiş üstel $(-\Omega(\zeta))$ açılım fonksiyon metodunu uygulamaktır. Bu tez çalışması tezde kullanılan metotlar aracılığıyla lineer olmayan evrim denklemlerini adi diferansiyel denklemlere indirgeyerek bu denklemlerin analitik ve yaklaşık çözümlerini bulmak amacını taşımaktadır. Sine-Gordon açılım metodu ve modifiye edilmiş üstel $(-\Omega(\zeta))$ açılım fonksiyon metodunun daha kapsamlı bir şekilde araştırılması ile kullanılan metotların lineer olmayan diferansiyel denklemleri optimize ettiği görülmektedir.

Yöntem: Lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemler disiplinler arası çeşitli olayları tanımlamakta oldukça kullanışlıdır. Bu tezde lineer olmayan diferansiyel denklemlerin nümeriksel çözümlerini sunmak için sine-Gordon açılım metodu ve modifiye edilmiş üstel $(-\Omega(\zeta))$ açılım fonksiyon metodunun kullanılması esas alınmıştır. Tezde kullanılan metotlar lineer olmayan Schrödinger denklemi ve Wu-Zhang denklemine uygulanarak lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin analitiksel olarak çözümleri açıklanmıştır. Adi diferansiyel denklemlere dönüştürülen lineer olmayan Schrödinger denklemi ve Wu-Zhang denkleminin sonuçları literatüre kazandırılmıştır.

Bulgular: Tez ile ilgili ilk olarak lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin çözülmesinde önemli rol oynayan sine-Gordon açılım metodu ve modifiye edilmiş üstel $(-\Omega(\zeta))$ açılım fonksiyon metodu tanıtılmıştır. Tanıtılan bu metotlar lineer olmayan Schrödinger ve Wu-Zhang denklemlerine uygulanarak bazı yeni hiperbolik fonksiyon çözümleri elde edilmiştir. Wolfram Mathematica programı yardımı ile çözümlerin iki ve üç boyutlu grafikleri çizilmiştir. Böylelikle lineer olmayan bazı olguların açıklanmasına fayda sağlanmıştır.

Sonuç: Bu tezde sine-Gordon açılım metodu ve modifiye edilmiş üstel $(-\Omega(\zeta))$ açılım fonksiyon metodu ilk defa lineer olmayan Schrödinger ve Wu-Zhang denklemlerine uygulanmıştır. Ayrıca tezde lineer olmayan Schrödinger denkleminin ayrıntılı bir şekilde açıklanmasına yer verilmiştir. Literatüre sunulan bu denklemden yararlanılması hedeflenmiştir. Sine-Gordon açılım metodu ve modifiye edilmiş üstel $(-\Omega(\zeta))$ açılım fonksiyon metodunun bazı klasik metotlara göre daha avantajlı olduğu kanısına varılmıştır. Bilinen analitiksel çözümler ile nümeriksel çözümlerin kıyaslanması yapıp bu metotların nümeriksel çözümlerinin lineer olmayan denklemlere daha kolay uygulanabildiği ve daha elverişli olduğu gözlenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Sine-Gordon açılım metodu (SGEM), Modifiye edilmiş üstel $(-\Omega(\zeta))$ açılım fonksiyon metodu (MEFM), lineer olmayan Schrödinger denklemi (NLSE), Wu-Zhang denklemi ve lineer olmayan kısmi diferansiyel denklem

Kasım 2024, 79 sayfa

ABSTRACT

PhD THESIS

MODIFIED EXPONENTIAL OF NONLINEAR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS SOLUTION WITH EXPANSION AND SINE-GORDON EXPANSION METHOD

Tuğba YAZĞAN

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Sıdıka Şule ŞENER KILIÇ

Co-Supervisor: Prof. Dr. Ercan ÇELİK

Purpose: The aim of this thesis is to apply the sine-Gordon expansion method and the modified exponential $(-\Omega(\zeta))$ expansion function method to solve the classification of nonlinear differential equations. This thesis seeks to derive analytical and approximate solutions for nonlinear evolution equations by transforming them into ordinary differential equations through the methodologies employed within the thesis. A more comprehensive investigation of the sine-Gordon expansion method and the modified exponential $(-\Omega(\zeta))$ expansion function method reveals that these approaches optimize nonlinear differential equations.

Method: Nonlinear partial differential equations are highly valuable in elucidating a range of interdisciplinary phenomena. This thesis examines the application of the sine-Gordon expansion method and the modified exponential $(-\Omega(\zeta))$ expansion function method to provide numerical solutions for nonlinear differential equations. The methods employed in this thesis are applied to the nonlinear Schrödinger equation and the Wu-Zhang equation, and the analytical solutions of nonlinear partial differential equations are elucidated. The results of the nonlinear Schrödinger equation and the Wu-Zang equation, which were transformed into ordinary differential equations, were introduced into the literature.

Findings: This thesis introduces, firstly, the sine-Gordon expansion method and the modified exponential $(-\Omega(\zeta))$ expansion function method, both of which play a significant role in solving nonlinear partial differential equations. By applying these methods to the nonlinear Schrödinger and Wu-Zang equations, novel hyperbolic function solutions have been derived. Utilizing the Wolfram Mathematica program, two-dimensional and three-dimensional graphs of the solutions were generated, thereby facilitating the elucidation of certain nonlinear phenomena.

Results: In this thesis, the sine-Gordon expansion method and the modified exponential $(-\Omega(\zeta))$ function method are applied to the nonlinear Schrödinger and Wu-Zang equations for the inaugural time. Furthermore, the thesis provides a comprehensive explanation of the nonlinear Schrödinger equation. This equation presented in the literature is intended to yield beneficial outcomes. It has been concluded that the sine-Gordon expansion method and the modified exponential $(-\Omega(\zeta))$ expansion function method exhibit greater advantages compared to certain classical methods. A comparison of established analytical solutions with numerical solutions reveals that the numerical approaches are more readily applicable to nonlinear equations and exhibit greater convenience.

Keywords: The Sine-Gordon expansion technique (SGEM), the modified exp $(-\Omega(\zeta))$ expansion function technique (MEFM), Nonlinear Schrödinger equation (NLSE), the Wu-Zhang equation and, Nonlinear partial differential equation.

November 2024, 79 pages

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY TUTANAĞI.....	i
ETİK BİLDİRİM VE İNTİHAL BEYAN FORMU	ii
TEŞEKKÜR	iii
ÖZET	iv
ABSTRACT	vi
İÇİNDEKİLER.....	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ	viii
KISALTMALAR ve SİMGELER DİZİNİ	xi
GİRİŞ.....	1
KURAMSAL TEMELLER.....	12
MATERYAL VE METOT.....	19
Lineer Olmayan Schrödinger Denklemi	19
Lineer Olmayan Schrödinger Denklemi için Sine-Gordon Denklemi.....	23
Lineer Olmayan Schrödinger Denklemi için Modifiye Edilmiş Üstel ($-\Omega(\zeta)$) Açılım Fonksiyon Metodu	25
Wu-Zhang Sistemi	26
Wu-Zhang Sistemi için Sine-Gordon Açılım Metodu	27
Wu-Zhang Sistemi için Modifiye Edilmiş Üstel ($-\Omega(\zeta)$) Açılım Fonksiyon Metodu	29
ARAŞTIRMA BULGULARI	31
Sine-Gordon Açılım Metodunun ve Modifiye Edilmiş Üstel ($-\Omega(\zeta)$) Açılım Fonksiyon Metodunun Lineer Olmayan Schrödinger Denklemine Uygulanışı.....	31
Sine-Gordon Açılım Metodunun Lineer Olmayan Schrödinger Denklemine Uygulanması	31
Modifiye Edilmiş Üstel ($-\Omega(\zeta)$) Açılım Fonksiyon Metodunun Lineer Olmayan Schrödinger Denklemine Uygulanışı	37
Sine-Gordon Açılım Metodunun ve Modifiye Edilmiş Üstel ($-\Omega(\zeta)$) Açılım Fonksiyon Metodunun Wu-Zhang Sistemine Uygulanması	47
Sine-Gordon Açılım Metodunun Wu-Zhang Sistemine Uygulanması	48
Modifiye Edilmiş Üstel ($-\Omega(\zeta)$) Açılım Fonksiyon Metodunun Wu-Zhang Sistemine Uygulanması	51

TARTIŞMA VE SONUÇ.....	59
KAYNAKLAR.....	61
ÖZGEÇMİŞ.....	67



ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1. Denklem (93) 'ün $\alpha = 0.9, k_0 = 0.2, p = 0.1, a = 1.45, B_1 = 0.12, \omega_0 = 0.632456$ ve $t = 10$ üç ve iki boyutlu grafikleri.	32
Şekil 2. Denklem (94)'ün $\alpha = 0.9, k_0 = 0.2, p = 0.1, a = 1.45, \omega_0 = 0.632456$ ve $t = 10$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafikleri.	33
Şekil 3. Denklem (95) 'in $\alpha = 0.9, k_0 = 0.2, p = 0.2, a = 1.45, \omega_0 = 0.632456$ ve $t = 10$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafikleri.	34
Şekil 4. Denklem (96)'nın $\alpha = 0.9, k_0 = 0.2, p = 0.2, q = 0.11, a = 1.45, \omega_0 = 0.632456, A_1 = 1$, ve $t = 10$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafikleri.	34
Şekil 5. Denklem (97) 'nin $\alpha = 0.9, k_0 = 0.2, p = 0.2, q = 0.11, a = 1.45, \omega_0 = 0.632456, c_g = 1.58114, A_1 = 1$ ve $t = 10$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafikleri.	35
Şekil 6. Denklem (98)'in $\alpha = 0.9, k_0 = 1.2, p = 0.1, q = 0.2, a = 1.45, \omega_0 = 1.54919, c_g = 0.645497, A_1 = 1$, ve $t = 10$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafikleri.	36
Şekil 7. Denklem (99)'un $\alpha = 0.9, k_0 = 0.2, p = 0.1, q = 0.2, a = 1.45, \omega_0 = 0.632456, c_g = 1.58114$, ve $t = 10$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafikleri.	37
Şekil 8. Denklem (104)'ün $\alpha = 0.9, k_0 = 0.2, p = 0.5, q = 1.2, a = 1.45, \omega_0 = 0.632456, c_g = 1.58114, A_0 = -0.12, A_2 = 2, EE = 10$ ve $t = 10$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafikleri.	39
Şekil 9. Denklem (105)'in $\alpha = 0.9, k_0 = 0.2, p = 0.5, q = 1.2, a = 1.45, \omega_0 = 0.894427, c_g = 2.23607, A_0 = -0.12, A_2 = 2, EE = 10$ ve $t = 10$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafikleri.	40
Şekil 10. Denklem (106)'nın $\alpha = 0.9, k_0 = 0.2, p = 0.5, q = 1.2, a = 1.45, \omega_0 = 0.894427, c_g = 2.23607, EE = 10$ ve $t = 10$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafikleri.	41
Şekil 11. Denklem (107)'nin $\alpha = 0.9, k_0 = 0.2, p = 0.5, q = 1.2, a = 0.45, \omega_0 = 0.894427, \lambda = 2.5, \mu = 1, E = 10$ ve $t = 10$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafikleri.	42

Şekil 12. Denklem (110)'un $\alpha = 0.9, k_0 = 0.2, p = 0.5, q = 1.2, a = 0.45, \omega_0 = 0.894427, \lambda = 2.5, \mu = 1, E = 10$ ve $t = 10$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafikleri.	43
Şekil 13. Denklem (111)'in $\alpha = 0.9, k_0 = 0.2, p = 0.5, q = 1.2, a = 0.45, \omega_0 = 0.894427, E = 10$ ve $t = 10$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafikleri	44
Şekil 14. Denklem (112)'nin $\alpha = 0.9, k_0 = 0.2, p = 0.5, q = 1.2, a = 0.45, \omega_0 = 0.894427, c_g = 2.23607, \lambda = 0.5, \mu = 1, EE = 10$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafikleri.	45
Şekil 15. Denklem (115)'in $\alpha = 0.9, k_0 = 0.1, p = 0.5, q = 0.2, a = 0.45, \omega_0 = 0.774597, c_g = 3.87298, \mu = 1, EE = 10$ ve $t = 10$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafikleri.	47
Şekil 16. Denklem (125)'in sanal ve gerçel kısımlarının sırasıyla $k = 1$ ve $t = 1$ de ki üç boyutlu, yoğunluk ve iki boyutlu grafik yüzeyleri.	49
Şekil 17. Denklem (126)'nın $k = 1$ ve $t = 1$ de ki üç boyutlu, yoğunluk ve iki boyutlu grafikleri.	50
Şekil 18. Denklem (127)'nin $k = 1$ ve $t = 1$ de ki üç boyutlu, yoğunluk ve iki boyutlu grafikleri	51
Şekil 19. Denklem (129)'un $k = 1, \lambda = 3, E = 0.75, c = 1, B_0 = 0.35$ ve $t = 1$ de ki üç boyutlu, yoğunluk ve iki boyutlu grafikleri.....	52
Şekil 20. Denklem (130)'un $k = 1, \lambda = 3, c = 1, B_0 = 0.35, E = 0.75$ ve $t = 1$ de ki üç boyutlu, yoğunluk ve iki boyutlu grafikleri.....	53
Şekil 21. Denklem (131)'in $k = 1, \lambda = 3, c = 1, E = 0.75, B_0 = 0.35$ ve $t = 1$ de ki üç boyutlu, yoğunluk ve iki boyutlu grafikleri.....	54
Şekil 22. Denklem (132)'nin $k = 1, c = 1, \lambda = 3, E = 0.75, s = 1$ ve $B_0 = 0.35, t = 1$ de ki üç boyutlu, yoğunluk ve iki boyutlu grafikleri.....	55
Şekil 23. Denklem (133)'ün $k = 1, c = 1, \lambda = 3, s = 1, B_0 = 0.35, E = 0.75$ ve $t = 1$ de ki üç boyutlu, yoğunluk ve iki boyutlu grafikleri.....	56
Şekil 24. Denklem (134)'ün $k = 1, c = 1, \lambda = 3, s = 1, B_0 = 0.35, E = 0.75$ ve $t = 1$ de ki üç boyutlu, yoğunluk ve iki boyutlu grafikleri.....	58

KISALTMALAR ve SİMGELER DİZİNİ

Simgeler

Ω	Omega
ζ	Zeta
Φ	Fi
ε	Epsilon
α	Alpha
λ	Lambda
δ	Delta
η	Eta
θ	Teta
μ	Mü
ψ	Psi
φ	Phi

Kısaltmalar

NLEE veya NEEs: Lineer Olmayan Evrim Denklemleri

SGEM : Sine-Gordon Açılım Metodu

MEFM : Modifiye Edilmiş Üstel ($-\Omega(\zeta)$) Açılım Fonksiyon Metodu

SC : Schrödinger Denklemi

NLSE : Lineer Olmayan Schrödinger Denklemi

KDV : Korteweg- De Vries Denklemi

GİRİŞ

Dalgalar, matematiksel olarak bir grafik ya da biçimsel fonksiyon olarak ifade edilir ve dalgalar bir dalga fonksiyonu ile temsil edilir. Dalga uzayda yayılırken bazı zamanlarda bozulmaya uğrar. Dalga fonksiyonu ise bu bozulmayı tanımlamakta yardımcı olur. Dalga fonksiyonu hem konuma hem de zamana bağlı olduğundan, dalganın grafiğini çizerken genellikle bir değişkeni sabit tutarız. Seçenek olarak, belirli bir x noktasında dalganın zamansal değişimini de inceleyebiliriz. Dalgalar ilerlerken bir parça dalgakıranı göz önüne alırsak, periyodik bir hareket gerçekleştirerek yukarı aşağı salınım yapacaktır. Dalga fonksiyonunun tam anlamıyla matematiksel formu, $\zeta = f(x, t)$ gözönünde tutulursa dalga türüne tabidir. Dalga fonksiyonunun belirli bir formu, $\zeta = f(x - vt)$, en geniş dalga türü olan "gezgin dalgaya" tekabül eder. Gezgin dalga, dalga ve içinden geçtiği ortamın özgün hızıyla uzayda gezen veya "yayılan" belirli bir miktarda ki salınımların periyodik serilerinden meydana gelir. $\zeta = f(x - vt)$ ifadesi, pozitif x yönündeki v hızıyla ilerleyen tek boyutlu bir gezgin dalgayı temsil eder. Ortamdaki salınımlar basit harmonik salınımlarsa, dalga fonksiyonunun işlevsel biçimi harmoniktir. $f(x)$, bir eğriyi temsil eden bir fonksiyon olduğunda, aynı f fonksiyonunun, ancak (x) yerine pozitif $(x - a)$ konulduğunda, aynı şekilde sahip ancak pozitif x ekseninde boyunca bir miktar " a " kaydırılmış bir eğriyi temsil eder. Benzer şekilde $f(x + a)$, eğrinin negatif yönünde " a " kadar kaydırılmış halini temsil eder. Bunu anlamak, dalga hareketinin matematiksel tanımını anlamak için temeldir. " a "'yı zaman içinde doğrusal bir şekilde, $a = vt$ ile değiştirdiğimizde, v nin durumuna bağlı olarak sağa ya da sola doğru yayılan bir eğri elde eder. Doğrusal olmayan dalga olayları; akışkanlar mekaniği, plazma fiziği, optik fiberler, biyofizik, jeokimya, biyoloji, katı hal fiziği, kimyasal kinematik, kimyasal fizik gibi çeşitli bilim ve mühendislik alanlarında ortaya çıkmaktadır. Bu husus mühendislik, kimyasal ve biyolojik uygulamalarda da gözlemlenmektedir. Lineer olmayan devinimli dalgaların kullanılması, uygulamalı bilim alanına rahatlık getirmiştir. Doğrusal olmayan fenomenleri daha iyi anlamak ve pratik hayatta daha fazla uygulamak için bunların gezgin dalga çözümlerini aramak önemlidir. Aslında, fiziksel bilimlerdeki tüm ana denklemler lineer değildir ve genel olarak, bu çeşitli lineer olmayan evrim denklemlerinin (NLEE) net bir biçimde halletmek genellikle çok komplekstir. NLEE'lerin mutlak çözümleri, lineer olmayan fiziksel olayların incelenmesinde önemli rol oynar. Bu nedenle doğrusal olmayan denklemlerin kesin çözümlerini bulmak için güçlü ve verimli yöntemler, çeşitli bilim insanları tarafından hala büyük ilgi görmektedir. Son otuz yılda, NLEE'lerin kesin çözümlerini elde etmek için etkili

yöntemler bulma konusunda önemli ilerlemeler kaydedilmiştir. Bu yöntemler homojen denge yöntemi (Fan 2000a), tanh-fonksiyon yöntemi (Wazwaz 2005), genişletilmiş tanh-fonksiyon yöntemi (Fan 2000b; El-Wakil and Abdou 2007), üstel fonksiyon yöntemi (He and Wu 2006; Akbar and Ali 2012), sinüs-kosinüs yöntemi (Wazwaz 2004), değiştirilmiş üstel-fonksiyon yöntemi (Usman *et al.* 2013), genelleştirilmiş Riccati denklemi (Yan and Zhang 2001), Jacobi eliptik fonksiyon genişleme yöntemi (Lü 2005; Chen and Wang 2005), Hirota'nın bi-lineer yöntemi (Wazwaz 2012), Miura dönüşümü (Bock and Kruskal 1979), (G'/G) -genişleme yöntemi (Wang *et al.* 2008; Bekir 2008; Zayed 2009; Zhang *et al.* 2008; Akbar *et al.* 2012), yeni (G'/G) -genişletme yöntemi (Alam *et al.* 2014; Alam and Akbar 2014), değiştirilmiş basit denklem yöntemi (Jawad *et al.* 2010; Khan *et al.* 2013), geliştirilmiş (G'/G) -genişleme yöntemi (Zhang *et al.* 2010), ters saçılma dönüşümü (Ablowitz and Clarkson 1991), yeni genelleştirilmiş (G'/G) -genişleme yöntemi (Naher and Abdullah 2013; Alam *et al.* 2013; Alam and Akbar 2013a; Alam and Akbar 2013b; Alam *et al.* 2013), exp (üstel) $(-\Phi(\eta))$ genişleme yöntemidir (Khan and Akbar 2013; Zhao and Li 2008).

Matematiksel bir sistemle fiziksel bir sistem arasındaki ilişkiyi sezgisel olarak kavramak oldukça zordur. Bu nedenle, fiziksel olayları açıklamak için lineer olmayan diferansiyel denklemlerin özelliklerinden yararlanılmıştır. Araştırmacılar, lineer olmayan olayları açıklamak için genellikle kısmi türevli diferansiyel denklemler ve solitonlar gibi araçlara başvurmuşlardır. Solitonlar, kendilerini koruyan ve sabit hızda yayılan, kendini güçlendiren tekil dalgalardır. Ayrıca nabız dalgası veya dalga paketi olarak da bilinirler. Solitonlar, boşluktaki dağıtıcı ve doğrusal olmayan etkilerin birbirini yok etmesiyle oluşurlar. "Dağıtıcı etkiler" terimi, dalgaların hızının frekansa bağlı olarak değiştiği belirli sistemleri ifade eder. Solitonlar, fiziksel sistemleri tanımlamak için kullanılan doğrusal olmayan dağıtıcı kısmi diferansiyel denklemlerin yayılma sınıfının çözümleri olarak keşfedilmiştir. Soliton ifadesi ilk olarak İskoçya'da Union kanalında ikamet eden John Scott Russell vasıtasıyla tanımlanmıştır. Bu dalgaya "çevrimli dalga" adını vermiştir. 1834 yılında, John Scott Russell kendi dönüşüm dalgalarını kanalda bir botun hareketini gözlemlerken bir çift atın botun hızlıca sürüklediğini görmüş ve bot durduğunda ise kanaldaki suyun kütesinin tekrar hareket ettiğini fark etmiştir. Şiddetli çalkalanma sonucunda su botun burun kısmında birikmiş ve daha sonra su öbeği düzgünce geride kalmıştır. Bu da hızın küçülmesine ya da kanalda belirli belirsiz bir değişikliğe sebep olmuştur. Scott Russell kendi sözleriyle keşfini şu şekilde ifade etmiştir: 'At sırtından onu takip ettim ve hala dönerken saatte sekiz ya da dokuz mil oranında bir hızla onu salladım, asıl şekil otuz fit uzunluğunda ve bir fite bir fit yarı uzunluğundaydı. Dalganın uzunluğu giderek sönümlenmiş ve bir ya da iki milden sonra, kanalın kıvrımlarında sona ermiştir.' Böylece 1834

yılının ağustos ayında, Dönüşüm dalgası adını verdiği tekil olay hakkında ilk görüşünü gerçekleştirmiş olmuştur. Soliton ile ilgili tek bir tanım yapmak oldukça zordur.

Scot Russell yaptığı araştırmalar sonucunda evinde dalga depoları inşa etmiş ve bu dalgaların bazı özelliklerini keşfetmiştir. Bunlar;

- Normal dalgalar düzleşme ya da dikleşme, yuvarlanma eğiliminde iken keşfettiği dalgalar kararlı ve çok uzak mesafeleri kat edebilirler.
- Hız, dalganın boyuna, genişlik ise dalganın yoğunluğuna bağlıdır.
- İki dalganın birleşmesi durumu yerine, çok küçük dalgalar daha büyük olan dalga tarafından geçilir.
- Su derinliği için çok büyük olan bir dalga varsa bu dalga iki büyük ve küçük parçaya ayrılır.

Solitonun başka tanımlarında ise Drozin ve Johnson, solitonları şu üç özellik ile tanımlamıştır:

- Solitonlar kalıcı biçimdedir.
- Bölgeler dahilinde sınırlandırılmıştır.
- Solitonlar başka solitonlar ile etkileşime girebilir ve patlamadan, faz kayması uğramaları haricinde dönüşmeden kurtulabilirler.

Daha birçok tanımlar vardır. Bazı bilim insanları soliton ifadesini bu üç özelliğe sahip olmayan olay olarak tanımlarlar. Örneğin: doğrusal olmayan optikteki "ışık atmaları", etkileşim anında enerji kaybettiklerinde soliton olarak adlandırılırlar. Saçılım ve doğrusal olmama sürekli ve yeri belirlenmiş dalga çeşitlerini üretebilmek için birbirlerini baskırlar. Cam içinde hareket eden ışığın eğilimini göz önüne alalım. Bu eğilimin, farklı frekanslardaki ışığı içerdiği düşünülebilir. Cam dağılım gösterdiğinden farklı frekanslar farklı hızlarda hareket edecek ve bu yüzden zamanla eğilim değişime uğrayacaktır. Ancak, Kerr etkisi de doğrusal olmayan bir etkidir. Kerr doğrusal olmayan optik etkisi ile ilgilidir. Kerr etkisi, ikinci dereceden elektro optik etkisi olarak da bilinir ve uygulanan bir elektrik alanına cevap olarak bir malzemenin kırılma indisinde meydana çıkan alterasyondur. Tezde kullanılacak olan metotlar bu solitonların incelenmesinde ve yorumlanmasında önemli rol oynamaktadır. Ancak metotları incelemeden önce solitonları daha detaylı bir şekilde analiz etmek gerekir.

Doğrusal denklemler yıllardır farklı olguları açıklamak için kullanılmaktadır. Örneğin, Newton, Maxwell ve Schrödingers denklemleri doğrusaldır ve bir sistemin harici bir bozulmaya yalnızca doğrusal tepkisini dikkate alırlar. Fakat, gerçek sistemlerin büyük bir bölümü doğrusal değildir. Göreceli modellerin birçoğu hala doğrusal bir açıklamaya dayanmakta ve küçük

pertürbasyonlar olarak açıklanan doğrusal olmayan olaylar için mümkün oldukça düzeltilmektedir. Böyle bir bakış açısının mutlak olarak kusur olabileceği iyi bilinmektedir. Doğrusal bir yaklaşım bazen düzenin bazı ana hareketlerini gözden kaçırabilir. Doğrusal olmama eşiklerle, çoklu kararlılıkla, histerezisle, uyarımlar değiştikçe niteliksel olarak değişen olgularla ilgilidir. İki farklı nedenin birlikte tesirinin nihai etkisi doğrusal bir sistemde, her bir nedenin ayrı ayrı değerlendirilmesi etkilerinin üst üste binmesinden ibarettir. Ancak doğrusal olmayan bir sistemde iki temel eylemin bir tanesine eklenmesi bir diğeri, kurucu unsurlar arasındaki iş birliğinin başlangıcını yansıtan dramatik yeni etkilere neden olabilir. Doğrusal olmayan olguları kavramak için öncelikle doğrusallığın ne anlama geldiğini iyi bilmek gerekir. Doğrusal dalgaları göz önünde bulundurursak, genel olarak bir dalga, bir hareket durumunun madde boyunca yayılması olarak ifade edilebilir. Rastgele ele alınan bir doğrusal dalganın özgün bazı özellikleri şunlardır:

- i) Doğrusal bir dalganın hızı genliğinden bağımsızdır,
- ii) Doğrusal olan iki dalganın toplamı da yine doğrusal bir dalgadır,
- iii) Genliği küçük olan dalgalar doğrusaldır.

Büyük genlikli dalgaların her zaman doğrusal olduğu söylenemez. Bulunduğu yerde ilerleyen bir dalganın kaderi ortamın nitelikleri tarafından belirlenir. Örnek vermek gerekirse, türbülansla büyük genlikli dalgaların şeklinin bozulmasına doğrusal olmama olayı neden olur. Aynı zamanda, bozulmaya neden olan başka kaynakta vardır: dalganın dağılması. Yüzyıldan daha uzun bir süre önce soliton dalgaları tanımlayan matematiksel denklemler çözülmüş ve bu noktada soliton dalganın varlığı kabul edilmiştir. Soliton dalga doğrusal olmama ve dağılma etkileri arasındaki hassas denge nedeniyle var olabilir. Doğrusal olmama tepeyi dikleştirme eğilimindeyken, dağılma tepeyi düzleştirir. Yalnız dalga bu iki tehlikeli ve tahrip edici kuvvet arasında yaşanır. Dolayısıyla doğrusal olmama ve dağılma arasındaki denge soliton dalgaların varlığından sorumludur. Netice olarak, soliton dalgalar oldukça dayanıklıdır. Solitonlar doğrusal denklemlerden yaralanarak ifade edilemez. Matematiksel fiziğin doğrusal olmayan denklemleri ile solitonların transformasyonu ve hareketi tanımlanır. Solitonların tarihi eşsizdir. 1895 yılında soliton dalgaları tanımlayan ilk matematiksel denklemlerden biri olan yöntem tanıtılmıştır ve yalnız dalgalar tam olarak 1965 yılında anlaşılabilmiştir. Dahası, 1965'ten önce iyi bilinen birçok fenomenin soliton olduğu ortaya çıktı. Su yüzeyindeki dalgaların, sinir nabızlarının, girdapların, kasırgaların ve diğerlerinin soliton olduğu ancak 1965'ten sonra anlaşıldı. Solitonların en etkileyici niteliği parçacık gibi hareket etmeleridir. Solitonların en önemli özellikleri şunlardır: uzayın bir bölgesine bağlı, şekil değiştirmez ve diğer solitonlarla karşılaştıktan sonra şeklini korumaya devam ederler. Solitonların matematiksel olarak önemli

bir ayrımı vardır. Solitonlar integrellenebilir denklemlerin yerel çözümüdür. Solitonların bir diğer çarpıcı özelliği de diğer solitonlarla çarpışmalar bile bozulma olmayan dalgalar olmalarıdır. Solitonları sınıflandırmanın bazı yolları vardır. Örneğin topolojik ve nontopolojik soliton sınıfları vardır. Solitonların profillerini dikkate aldığımızda topolojik doğasından bağımsız olarak iki gruba ayrılabilir: kalıcı ve zamana bağlı. Örnek verecek olursak, kink solitonlar kalıcı bir biçime sahipken bazı solitonlar statik olsalar bile bir iç dinamiği vardır. Yani formları zamanla salınım hareketi yaparlar. Solitonları sınıflandırmanın üçüncü yolu ise tekamüllerini ifade eden lineer olmayan denklemlere uygun olarak yapılır. Solitonların sınıflandırılması aşağıdaki gibidir.

Klasik ve Kuantum Solitonlar: Klasik bir solitonun kaba bir tanımı, diğer soliton dalgalarla çarpışmada büyük kararlılık gösteren bir solit dalgadır. Gördüğümüz gibi bir soliton dalga şeklini değiştirmez, x eksenini boyunca c hızıyla ötelenen bir $u(x - ct)$ bozulmasıdır (Mourachkine 2002). Soliton bazı denklemler için bir çözümdür. Buna KDV denklemi ya da doğrusal dağılım daha az denklemler için örnek verilebilir. Kuantum doğrusal olmayan Schrödinger modeli ve kuantum sine-Gordon modeli fiziksel sistemler için kuantum solitonları yönetirler.

Topolojik ve Nontopolojik Solitonlar: Bütün soliton dalgaları renormalize relativistik lokal alan teorilerinde ya topolojik ya da nontopolojiktir (Nakahara 2018). KDV denklemi topolojik olmayan solitona örnektir ve KDV denkleminin su kanalı soliton çözümü, vakum için topolojik olarak aynı olduğu gibi sonsuzdaki sınır koşullarının solitonları içinde aynı anlama geldiği görülür. Vakum dejenere olmayabilir fakat eklemeli bir koruma yasasına ihtiyacı vardır. Ancak topolojik olarak soliton için dejenere bir vakum gereklidir. Fiziksel vakum hali sonsuzluktaki sınır koşulları soliton dalga halinden topolojik olarak farklılık gösterir. Fizik ve matematikte topolojik soliton veya topolojik kusur, kısmi diferansiyel denklemler sisteminin veya kuantum alan teorisinin vakum çözümünden homotopik olarak farklı bir çözümdür: var olduğu kanıtlanabilir çünkü sınır koşulları homotopik olarak farklı çözümlerdir. Bu topolojik eksiklikler yalnızca küçük pertürbasyonlara karşı stabilize değildir. Ancak onları sıradan veya “önemsiz” bir çözüme karşılık getirecek daimî bir dönüşüm bulunmadığı için dejenere olamaz, geri alınamaz veya çözülmesinin imkânı olamaz. Birçok farklı topolojik kusur biçimleri vardır. Maddenin simetri özellikleri ve faz geçişinin doğası oluşan kusurun türünü saptar.

Solitonların sadece sınıflandırılması değil aynı zamanda şekil bazında sınıflandırılmasını göz önüne almak gerekir. Bunlar;

Bell Soliton: KDV denkleminin soliton çözümü, bir çan şeklindedir ve düşük frekanslı solitonlardır. Bu tür solitonlar topolojik olmayan solitonlar olarak isimlendirilir. NLS denkleminin soliton çözümü, harmonik (kosinüs) bir dalgayı modüle eden çan biçiminde bir

hiperbolik sekant zarfına sahiptir. Genliğe ve yüksek frekanslı solitona sahip olmayan bir çözümdür.

Kink Soliton: Schrödinger denkleminin (SC) çözümleri kink veya anti-kink solitonlar olarak anılırlar ve hız dalga genliğine tabi olamaz. Kink veya anti-kink olarak adlandırılan bu soliton çözümleri topolojik solitonlar olarak nitelendirilirler. Bir kink çözümüne faydalı bir örnek verecek olursak bir ferro miknatısın içinde yer alan iki manyetik alan arasındaki Bloch duvarını örnek olarak verebiliriz. Manyetik spinler bir alandaki spin aşağıdan bitişik alandaki spin yukarıya doğru döner. Aşağı ve yukarı arasındaki bu geçiş bölgesi Bloch duvarı olarak adlandırılır. Sine-Gordon denklemine göre etki altında uygulanan bir manyetik alanın Bloch duvarı genişleyebilir.

Breather Soliton: DB (discrete breathers: ayrıık breathers) içsel yerleştirilmiş modlar veya doğrusal olmayan yerleştirilmiş uyarımlar olarak bilinir, fizikte oldukça önemli, yeni bir olaydır ve bütünleştirilebilir (Akhmediev and Ankiewicz 1997). DB solitonu, kısmi diferansiyel denklemlerin solitonu ile rekabet edebilecek ve hatta onu aşacak kadar güçlü potansiyeli vardır.

Şimdiye kadar soliton çözümlerini tanımlamak için doğrusal olmayan denklemleri KDV denklemleri ve sine-Gordon denklemlerini ele aldık. Lineer olmayan Schrödinger denklemleri (NLS) gerçek solitonları sergileyen üçüncü bir denklemdir. Şimdi soliton özelliklerini bu üç denklemlerle açıklayalım.

Korteweg-de Vries denklemleri;

$$u_t = 6uu_x - u_{xxx}$$

Sine-Gordon denklemleri;

$$u_{tt} = u_{xx} - \sin u$$

ve lineer olmayan Schrödinger denklemleri;

$$iu_t = -u_{xx} \pm |u|^2 u$$

dir. Soliton dalgaları değerlendirmek ve incelemek amacıyla kullanabilecek bilinen denklemlere benzemeyen birçok doğrusal olmayan denklemler (örneğin Boussinesq denklemleri) vardır, ancak bu üç denklemler fiziksel pratik uygulamalar için bilhassa önemlidir.

Doğrusal olmayan denklemler bazında solitonların sınıflandırılmasını aşağıdaki şekilde verebiliriz:

KDV Solitonları: KDV solitonları aşağıdaki gibi özetlenebilir:

- i) Genliği hızıyla birlikte artar (ve bunun tersi de geçerlidir). Bu nedenle, durağan halde var olmazlar.

Genişliği, hızının karekoku ile ters orantılıdır.

- ii) Bu tek yönlü bir dalga darbesidir, yani KDV denkleminin ozmleri için hızı negatif olamaz.
- iii) Soliton ozmnn işareti, KDV denklemindeki doğrusal olmayan katsayının işaretine bağlıdır.

KDV solitonları, zayıf doğrusal olmayan ve zayıf dağıtıcı dalgalara sahip fiziksel sistemlerde bulunan topolojik olmayan solitonlardır (Remoissenet 2013).

Topolojik Solitonlar: Topolojik (kink) solitonların özellikleri aşağıda gibi özetlenebilir:

- i) Genliği hızından bağımsızdır, sabittir ve sıfır hız için aynı kalır, bu nedenle bükülme statik olabilir.
- ii) Lorentz daralması nedeniyle hızı arttıkça genişliği daralır.
- iii) Rölativistik bir parçacığın özelliklerine sahiptir.
- iv) Farklı bir vida hissine sahip olan topolojik bükülmeye antik bükülme denir.

Topolojik solitonlar oldukça kararlı solitonlardır. Bu solitonlar sürtünmenin etkisi altında yalnızca yavaşlar ve en sonunda dururlar, hareketsizken sınırsız bir şekilde yaşayabilirler (Remoissenet 2013).

Zarf (Envelope) Solitonlar: şekil olarak kuantum mekaniğinin Schrödinger denkleminde benzeyen NLS denklemi lineer olmayan Schrödinger denklemi olarak adlandırılır. NLS denklemi fizikte oldukça önemli olayları açıklar. Bunlardan bazıları; doğrusal olmayan optikteki kendi kendine odaklanma olaylarını, tek renkli dalgaların tek boyutlu kendi kendine modülasyonunu, doğrusal olmayan plazmayı vb. dir. Zarfın altında normalde 14 ila 20 olan kk bir tepeye sahip gruplar kararlı gruplardır ve bunlardan merkezi olanı en yüksek olanıdır. Eğer bu gruplar daha fazla tümseğe sahip ise kararsızdırlar ve bundan dolayı daha kk gruplara ayrılırlar. Zarf solitonları KDV solitonlarıyla nitelik olarak birbirleriyle aynıdır, dolayısıyla sonludurlar ve parçacık olarak kabul görülür. Doğrusal olmayan optik için NLS denklemi ayrılmaz bir parçadır. Zarf solitonları genellikle iki şekilde sınıflandırılır: karanlık (dark) ve parlak (bright) solitonlar. Solitonlar hakkında yapılan araştırmalar sunulduğuna göre bunların ozmlerini bulabilecek olan metotları verebiliriz.

Bu denklemlerden biri Sine-Gordon açılım metodu (SGEM) ve bir diğeri ise modifiye edilmiş stel ($-\Omega(\zeta)$) açılım fonksiyon metodudur. Metotları biraz açıklamak gerekirse;

kuantum mekaniği, manyetizma kuramı, süper iletkenlik, optik ve türevsel geometri alanında karşılaşılan sine-Gordon denkleminin tekil dalga çözümünün bulunmasıyla birçok araştırmacının dikkatini çekmiştir. Daha sonra, araştırmacıların bilgisayar yazımıyla Korteweg-de Vries denklemi üzerine gerçekleştirdikleri deneyler sayesinde iki tekil dalganın çarpışmasının iki atom parçacığının çarpışmasına eş değer olduğunu yani çarpışma sonucunda iki dalganın da çarpışma öncesi özelliklerini, şekillerini ve yüksekliklerini koruduğu gözlemlenir.

Sine-Gordon denklemi, d'Alembert operatörünü ve bilinmeyen fonksiyonun sinüsünü içeren doğrusal olmayan hiperbolik kısmi diferansiyel denklemdir. Denklemin yanı sıra çeşitli çözüm teknikleri de on dokuzuncu yüzyılda diferansiyel geometrinin çeşitli problemlerin incelenmesi sırasında biliniyordu. Denklem 1970'lerde, solitonlara ("kink" ve "antikink" olarak adlandırılan) yol açtığı görüldüğünde büyük ölçüde dikkat çekmiştir. Sine-Gordon denklemi $\Phi_{xy} = \sin\Phi$, diferansiyel geometriden (Bobenko and Pinkall 1996; Bour 1862; Melko and Sterling 1991; Popov and Maevskii 2007) rölativistik alan teorisi (Rajaraman 1982), Josephon bağlantıları (Remoissenet 2013; Scott 1970), DNA çift sarmalı boyunca deformasyonların yayılması (Yakushevich 2006), kristallerdeki dağılmalar (Frenkel and Kontorova 1993), ferroelektrik ve ferromanyetik malzemelerdeki alan duvarları (Kosevič *et al.* 1990), mekanik iletim hatları (Remoissenet 2013; Scott 1969) olmak üzere, uygulamalı fiziğe kadar birçok alanda sayısız uygulaması olan klasik soliton denklemlerinden biridir (Barone 1971; Davydov 2013; Lamb 1980). Uzun geçmişine rağmen, Sine-Gordon denklemi ve onun sayısız uzantıları ve genellemeleri hala araştırmacıların ilgisini çekmektedir (Dai *et al.* 2009; Ferreira and Zakrzewski 2013; Lenells and Fokas 2010; Sakhnovich 2012; Willox *et al.* 2014).

2006 yılında He ve Wu (2006), lineer olmayan evrim denklemleri (NEEs) için üstel fonksiyon olarak adlandırılan bir yöntemi tanıttılar. Bu yöntem, üstel fonksiyonların rasyonel kombinasyonlarının bir ansatz çözümü olarak denenmesine dayanmaktadır. Tamamen algoritmiktir ve sadece bir bilgisayar sistemi kullanılarak gerçekleştirilebilen cebirsel manipülasyonlardan oluşur. Titiz bir şekilde ele alındığında, genellikle tek ve periyodik dalgaların oluşturabileceği daha genel parametrelerle kesin çözümler sağlar. Bu yöntem, değişken katsayılı NEEs'ler (Zhang 2007), çok boyutlu denklemler (Öziş and Aslan 2008), diferansiyel fark denklemleri (Zhu 2007), stokastik denklemler (Dai and Zhang 2009), üç bağlı NEEs'ler (Yomba 2009) gibi çeşitli doğrusal olmayan problemler için genişletilmiş, geliştirilmiş ve uyarlanmıştır. Ayrıca, n-soliton çözümleri (Marikanis 2008; Zhang and Zhang 2009), rasyonel çözümler (Zhang 2010), çift dalga çözümleri (Fu and Dai 2009) oluşturmak için geliştirilmiştir. Dalga çözümlerinin lineer olmayan evrim denklemleri için

araştırılması, lineer olmayan fiziksel olguların araştırılmasında son derece önemlidir. Modifiye edilmiş üstel $(-\Omega(\zeta))$ açılım fonksiyon metodu ise lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemler ve kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerin farklı tipte analitik çözümlerini bulmada kullanılan oldukça elverişli, kullanışlı ve lineer olmayan oluşum denklemlerinin farklı tipteki çözümlerini elde etmede kullanılan yeni bir metottur. Bu metodun bazı metotlara göre üstünlüğü, keyfi ek parametreler kullanarak yeni gezgin dalga çözümleri vermesidir (Kumar et al. 2018; Biswas and Kara 2010).

20. yy. başlarında deneysel kanıtlar atom moleküllerinin doğada dalga gibi davrandığını öne sürmüşlerdir. Örneğin, elektronlar çift yarıktan geçerken ışık dalgaları gibi kırılarak yayılmaktadırlar. Atom moleküllerinin doğadaki davranışları gözlemlendiğinde bir dalga denklemini açıklayacağını fikri ortaya atılmıştır. Schrödinger bu konu ile ilgili ilk dalga denklemini yazan kişi olmuştur. Tabi daha sonraları dalga fonksiyonları ne olduğu hakkında yapılan tartışmalarla daha açık hale gelmiştir. Schrödinger denklemi; kimya alanının modern atom kuramlarında, ortalama bağ uzaklıkları, dipol ve momentumların hesaplanmasında, fizikte ise elektrik alan ve transistörlerin mekanizmasında, kuantum mekaniğinde serbest enerji seviyelerini ve parçacıkların herhangi bir andaki konumunu bulmak için kullanılır. Bu denklemin zamana bağlı versiyonu serbest parçacıkların devinimine uygulanabilen ilerleyen dalga hareketi için kullanılır. Zamana bağlı olmayan versiyonu ise durgun dalgaları tanımlamak için kullanılır. Lineer olmayan Schrödinger denklemi (NLSE) bir kuantum sisteminin analizinde sonuca varmamızı sağlayan bir ara dalga fonksiyonudur. Kuantum mekaniği belirli bir yerde bir parçacığın olasılığını veya belirli bir momentuma sahip olma olasılığını hesaplar. Bir dalga fonksiyonu yardımıyla olasılığı gerçekleştirir. Bu fonksiyonun amacı konumu bulmak değil, konumun olasılığını hesaplamaktır ve NLSE bunlardan biridir. Fiziksel bir sistemin potansiyeli küresel olarak simetrik bir dağılıma sahipse, NLSE denklemini küresel koordinatlarda çalışmak çok pratiktir. NLSE, uzay ve zamandaki değişimi gösteren bir denklemdir. NLSE, genellikle fizik biliminde kullanılan bir denklemdir. Özellikle fiberlerde optik darbelerin yayılmasını açıklamada katkıda bulunmuştur. NLSE; telekomünikasyon, hidrodinamik, doğrusal olmayan akustik, doğrusal olmayan dağılan dalgalar, plazmalar, optikler, su dalgaları ve parçacıkların dinamiklerini modellemek için kullanılır. Son yıllarda matematikteki önemli gelişmelerden biri, NLSE'nin sayısal simülasyonu ve analitik türleri, optik iletim sistemlerinin tasarım optimizasyonunda önemli bir rol oynar. Birçok araştırmacı, NLSE'nin analitik ve sayısal çözümlerini farklı yöntemler kullanarak diğer denklemleri araştırdı. Bu yöntemlerden bazıları, ters saçılma dönüşüm metodu (Ablowitz and Musslimani 2016), genişletilmiş sinh-Gordon açılım metodu (Kumar *et al.* 2018), geliştirilmiş Bernoulli alt denklem fonksiyon metodu (Dusunceli *et al.* 2020; Yel 2019), homotopi analiz metodu (Kocak

et al. 2014), varyasyonel ilkesi (Biswas and Kara 2010), genelleştirilmiş Kudryashov metodu (Demiray *et al.* 2018), genişletilmiş tanh fonksiyon metodu (Biswas *et al.* 2014), bölünmüş adım metodu (Bosco *et al.* 2000), sonlu fark metodu (Chang *et al.* 1999), değişkenlerine ayrılmış adi diferansiyel denklemler metodu (Al-Ghafri and Rezazadeh 2019), Fourier psödospektral metodu (Jiang *et al.* 2018) gibi metotlardır.

Son yıllarda, birçok araştırmacı doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemler ile ilgili çalışmalar yapmıştır. Bunun üzerine Wu ve Zhang (1996), aşağıdaki formda bir denklem önermişlerdir:

$$\varepsilon_t + \varepsilon\varepsilon_x + u\varepsilon_y + v_x = 0,$$

$$u_t + \varepsilon u_x + uu_y + v_y = 0,$$

$$v_t + (\varepsilon v)_x + (uv)_y + \frac{1}{3}(\varepsilon_{xxx} + \varepsilon_{xyy} + u_{xxy} + u_{yyy}) = 0. \quad (1)$$

Burada ε ve u sırasıyla x yönü ve y yönü boyunca suyun yüzey hızını, v ise suyun yüksekliğini ifade etmektedir. Bazı dönüşümler yoluyla denklem (1), (1+1) boyutlu dispersif (dağıtıcı) uzun dalga denklemine (Wu-Zhang sistemi) aşağıdaki gibi indirgenir:

$$u_t = -uu_x - v_x,$$

$$v_t = -vu_x - uv_x - \frac{1}{3}u_{xxx}. \quad (2)$$

Wu-Zhang sistemi sadece doğrusal olmayan su dalgası mevcudiyetini tanımlamaz aynı zamanda birçok liman ve kıyı tasarımında kullanılır. Matematiksel fiziğin en önemli konularından biri, kesin çözümleri bulmaktır. Birçok bilim insanı, Wu-Zhang sisteminin sayısal olarak çözümünü bulmak için çeşitli yöntemler geliştirmişlerdir. Bunları şu şekilde özetleyebiliriz: Birinci integral yöntemi (Eslami and Rezazadeh 2015), genişletilmiş tanh fonksiyon yöntemi (Fan 2000b), karakteristik fonksiyon yöntemi (Helal *et al.* 2012), modifiye edilmiş Conte'nin değişmez Painlevé'e genişleme yöntemi ve WTC yaklaşımının kesilmesi (Weiss *et al.* 1983), eliptik fonksiyon rasyonel genişleme yöntemi (Wang *et al.* 2005), genelleştirilmiş genişletilmiş tanh fonksiyonu yöntemi (Zheng *et al.* 2003), genelleştirilmiş genişletilmiş rasyonel genişleme yöntemi (Zeng and Wang 2009) dir.

Bu çalışmada yukarıda bahsedilen trigonometrik fonksiyon içeren SGEM ve MEFM metotlarının genel yapısı verilerek lineer olmayan Schrödinger ve Wu-Zhang denklemlerine uygulanması sunulmuştur. Uygulanan metotlar lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin gezgin dalga çözümlerini elde etmek için tanımlanmıştır. Daha sonra tanımlanan metotları üstel ve trigonometrik fonksiyonların yer aldığı NLSE ve Wu-Zhang lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerine uygulayarak trigonometrik ve hiperbolik fonksiyon içeren

diferansiyel denklemlerin çözümlerine ilişkin bazı yeni yaklaşımlar sağlanmıştır. Ayrıca bu uygulamalar sonucunda elde edilen çözüm denklemlerinin yoğunluk, iki ve üç boyutlu grafikleri irdelenmiştir. Dolayısıyla bu hareketli dalga çözümlerinin bilimsel olarak öncelikle fizik ve matematik alanlarında aynı zamanda mühendislik gibi birçok disiplinlerarası alana fayda sağladığı görüldü.



KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde, daha sonraki bölümlerde sıkça kullanacağımız temel tanımlara ve teoremlere yer verilmiştir (Çağlıyan vd. 2016; Halilov 2003; Pişkin 2018a; Pişkin 2018b; Atangana *et al.* 2015; Khalila *et al.* 2014; Drazin and Johnson 1989; Scott 2005; Uğurlu 2010)

Tanım 1 (Modelleme)

Genel olarak fizik kökenli bir mühendislik problemini çözmek istersek problemi değişkenler, fonksiyonlar ve denklemler açısından bir matematiksel ifade olarak biçimlendirmeniz gerekir. Böyle bir ifade verilen problemin bir matematiksel modeli olarak bilinir. Bir model kurma sürecine, onu matematiksel olarak çözmeye ve sonucu fiziksel ya da diğer ifadelerle yorumlamaya matematiksel modelleme ya da kısaca modelleme denir.

Tanım 2 (Diferansiyel Denklem)

Hız ve ivme gibi birçok fizik kavramları türevdir. Bu yüzden bir model çoğu zaman bilinmeyen bir fonksiyonun türevlerini içeren bir denklemdir. Böyle bir modele bir diferansiyel denklem denir.

Tanım 3 (Bağımlı Değişken ve Bağımsız Değişken)

Diferansiyel denklemleri incelemek için ortak bir terminolojiye ihtiyaç vardır. Eğer bir diferansiyel denklem, bir değişkenin bir veya daha çok değişkene göre türevlerini ihtiva ediyorsa, türevi alınan değişkene bağımlı değişken, türevin alındığı değişkene veya değişkenlere bağımsız değişken denir.

Tanım 4 (Adi Diferansiyel Denklem)

Bir adi diferansiyel denklem (ADD), genel olarak $y(x)$ (ya da bazen bağımsız değişken zaman t ise $y(t)$) dediğimiz bir bilinmeyen fonksiyonun bir ya da birkaç türevini içeren bir denklemdir. Denklem ayrıca y nin kendisini, x (ya da t) nin bilinen fonksiyonlarını ve sabitleri içerebilir. Örneğin,

$$y' = \cos x$$

$$y'' + 9y = e^{-2x}$$

adi diferansiyel denklemlerdir.

Tanım 5 (Çözüm Eğrisi)

Bir

$$y = h(x)$$

fonksiyonuna, $h(x)$ tanımlı ve bir $a < x < b$ açık aralığı boyunca türevlenebilir ve y, y' yerine sırasıyla h, h' yerleştirildiğinde denklem bir eşitliğe dönüşüyorsa, bu aralık üzerinde verilen bir

$$F(x, y, y') = 0 \quad (3)$$

ADD'in bir çözümüdür denir. h 'nin eğrisine (grafiğine) bir çözüm eğrisi adı verilir. Burada, $a < x < b$ açık aralığı a ve b uç noktalarının aralığına ait noktalar kabul edilmediğini ifade eder. Ayrıca $a < x < b$ özel durumlar olarak, $-\infty < x < b, a < x < \infty, -\infty < x < \infty$ (gerçek sayı doğrusu) sonsuz aralıkları içerir.

Tanım 6 (Genel Çözüm)

Her bir adi diferansiyel denklemin keyfi bir c sabiti içeren bir çözümünün olduğunu biliyoruz. Keyfi bir c sabiti içeren bir çözüme adi diferansiyel denklemin bir genel çözümü denir. Örnek olarak;

$$y' = \frac{dy}{dx} = \cos x$$

adi diferansiyel denklemleri her iki tarafın integrali alınarak, doğrudan çözülebilir. Gerçekten c keyfi bir sabit olmak üzere, $y = \int \cos x dx = \sin x + c$ elde ederiz. Bu bir çözüm ailesidir. c nin her bir değeri, örneğin, 2.75 veya 0 ya da -8 bu eğrilerden birini verir.

Tanım 7 (Özel Çözüm)

Geometrik olarak, bir adi diferansiyel denklemin genel çözümü, c sabitinin her bir değeri için bir eğri olmak üzere, sonsuz çoklukta çözüm eğrilerinin bir ailesidir. Eğer belirli bir c (örneğin, $c = 6.45$ veya 0 ya da -2.01) seçersek ADD'in bir çözümünü elde ederiz. Bir özel çözüm hiçbir keyfi sabit içermez.

Tanım 8 (Başlangıç Değer Problemi)

Birçok durumda verilen bir problemin tek çözümü, dolayısıyla bir özel çözümü, bir genel çözümden, belirli bir x_0 ve y_0 değerleriyle c keyfi sabitinin bir değerini belirlemek için kullanılan bir $y(x_0) = y_0$ başlangıç koşuluyla elde edilir. Geometrik açıdan bu koşul, eğrinin xy düzleminde (x_0, y_0) noktasından geçmesi gerektiği anlamına gelir. Bir başlangıç koşuluyla

birlikte bir ADD'e bir başlangıç değeri problemi denir. Böylece ADD açık, $y' = f(x, y)$, ise başlangıç değeri problemi

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

biçimlidir.

Tanım 9 (n. Mertebeden Diferansiyel Denklem)

Diferansiyel denklemin içerdiği türevlerin en yüksek mertebesine diferansiyel denklemin mertebesi denir. Yukarıda söylenenleri göz önünde bulundurursak, bağımsız değişken x , aranan fonksiyon $y = y(x)$ olarak kabul edildiğinde, n . mertebeden diferansiyel denklemi

$$F(x, y, y', y'' \dots, y^{(n)}) = 0$$

şeklinde yazabiliriz. Bu yazılışa n . mertebeden diferansiyel denklemin genel şekli denir.

Tanım 10 (Diferansiyel Denklem Çözümü)

Herhangi (a, b) aralığında n . mertebeden sürekli türevelere sahip olup, n . mertebeden diferansiyel denklemi sağlayan her $y(x)$ fonksiyonuna, sözü edilen aralıkta diferansiyel denklemin çözümü denir. Örneğin, $y = x^2$ fonksiyonu, dolayısıyla $y = x^2 + C$ şeklindeki bütün fonksiyonlar, $(-\infty, \infty)$ aralığında

$$y' - 2x = 0$$

denkleminin çözümü, $y = \cos kx$ ve $y = \sin kx$ fonksiyonları, dolayısıyla $y = C_1 \cos kx + C_2 \sin kx$ şeklindeki bütün fonksiyonlar ise, $(-\infty, \infty)$ aralığında

$$y'' + k^2 y = 0$$

denkleminin çözümüdürler.

Tanım 11 (İntegrallenme)

Diferansiyel denklemin çözümü, içerdiği bilinmeyen fonksiyonun integrallenmesiyle bulunduğundan, çözülme işlemine diferansiyel denklemin integrallenmesi, çözüme ise diferansiyel denklemin integrali de denir .

Tanım 12 (Doğrusal Olmayan Diferansiyel Denklem)

$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)})$ fonksiyonu, $x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}$ ' lerin her birine göre doğrusal olduğunda, $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ denklemi

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x) \quad (4)$$

şeklinde yazılabilir. Bu şekilde yazılan denkleme n. mertebeden doğrusal diferansiyel denklem denir. Ancak (4) şeklinde yazılamayan diferansiyel denkleme doğrusal olmayan diferansiyel denklem denir.

Tanım 13 (Hemen Hemen Doğrusal Diferansiyel Denklem)

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (5)$$

şeklindeki denkleme, hemen hemen doğrusal diferansiyel denklem denir.

Tanım 14 (Kısmi Türevli Denklem)

Bir bağımlı değişkenin iki veya daha fazla bağımsız değişkene göre türevlerini içeren denklemlere kısmi türevli denklem denir. u bağımlı, x ve y bağımsız değişkenleri için en genel kısmi türevli denklem

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, \dots) = 0$$

veya

$$F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}, \dots\right) = 0$$

dır.

Tanım 15 (Açık Cümle)

Başlangıç değer problemleri için varlık ve teklik teoremlerini ifade etmeden önce sık sık kullanılacak olan bölge kavramını açıklayalım. Burada düzlemsel bölgeyi tanımlayacağız. Daha yüksek boyutlu uzaylarda bölge kavramı benzer şekilde tanımlanabilir. Bilindiği gibi iki boyutlu Euclidean uzayda bir nokta, sıralı bir (x, y) reel sayı çiftidir. (x_0, y_0) noktasının bir komşuluğu

$$[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]^{\frac{1}{2}} < \varepsilon$$

koşulunu sağlayan bütün (x, y) noktalarının cümlesidir. Bu komşuluk, geometrik olarak, (x_0, y_0) merkezli, $\varepsilon > 0$ yarıçaplı bir dairedir. Dairenin çevresi üzerindeki noktaların ε komşuluğuna dahil olmadığına dikkat etmek gerekir. S , düzlemde bir nokta cümlesi olsun. (x_0, y_0) in tamamen S de bulunan bir komşuluğu varsa, (x_0, y_0) noktasına S nin bir iç noktası, yalnız iç noktalardan meydana gelen cümleye de açık cümle adı verilir.

Tanım 16 (Bölge)

Düzlemde verilen bir B cümlesi açık ve cümlenin her $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ nokta çifti tamamen B de bulunan bir kırık çizgisel yol ile birleştirilebiliyorsa, B ye bir bölgedir denir.

Teorem 1

Eğer F ve $\frac{\partial F}{\partial y}$ fonksiyonları xy düzleminin bir B bölgesinde sürekli ve (x_0, y_0) B nin bir noktası ise bu durumda,

$y' = F(x, y), y(x_0) = y_0$ başlangıç değer probleminin x_0 ı ihtiva eden bir aralıkta tanımlı bir ve yalnız bir çözümü vardır.

Tanım 17 (Süreklilik)

$f: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon ve $x_0 \in X$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için $d_X(x, x_0) < \delta$ iken $d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta = \delta(\varepsilon)$ pozitif sayısı mevcutsa f fonksiyonu x_0 noktasında süreklidir denir.

Eğer f fonksiyonu X kümesinin her noktasında sürekli ise bu fonksiyona X kümesinde sürekli fonksiyon denir.

Tanım 18 (Conformable Türev)

$f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Bütün $t > 0$ ve $\alpha \in (0, 1]$ için f fonksiyonunun conformable türevi,

$$T_\alpha(f)(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}$$

olarak tanımlanır. Eğer f fonksiyonu $\alpha > 0$ olmak üzere, bazı $(0, \alpha)$ aralığında α diferansiyellenebilir ve $\lim_{t \rightarrow 0^+} f^{(\alpha)}(t)$ limiti varsa o zaman,

$$f^{(\alpha)}(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f^{(\alpha)}(t)$$

olur. f 'nin α mertebeden conformable türevini göstermek için bazen $T_\alpha(f)(t)$ yerine $f^{(\alpha)}(t)$ yazılacaktır. Ayrıca, α mertebeden conformable türev mevcutsa bu durum için f, α

diferansiyellenebilirdir denilecektir. Bu tanımın bir sonucu olarak aşağıdaki teorem yazılabilir.

Teorem 2

$\alpha \in (0,1]$ için f ve g , $t > 0$ noktasında α diferansiyellenebilir olsun. O halde,

1. $\forall a, b \in \mathbb{R}$ için $T_\alpha(af + bg) = aT_\alpha(f) + bT_\alpha(g)$ dir.
2. $\forall p \in \mathbb{R}$ için $T_\alpha(t^p) = pt^{p-\alpha}$ dir.
3. Tüm $f(t) = \lambda$ biçimindeki sabit fonksiyonlar için $T_\alpha(\lambda) = 0$ dir.
4. $T_\alpha(fg) = fT_\alpha(g) + gT_\alpha(f)$.
5. $T_\alpha(f/g) = \frac{gT_\alpha(f) - fT_\alpha(g)}{g^2}, (g(t) \neq 0)$.
6. Ek olarak, eğer f diferansiyellenebilirse, $T_\alpha(f) = t^{1-\alpha} \frac{df}{dt}(t)$ dir.

Önerme 1. L_α , α mertebeli türev operatörü ve $\alpha \in (0,1]$ olsun. O zaman

1. $L_\alpha(1) = 0$.
2. $L_\alpha(e^{cx}) = cx^{1-\alpha}e^{cx}, c \in \mathbb{R}$.
3. $L_\alpha(\sin(bx)) = bx^{1-\alpha}\cos(bx), b \in \mathbb{R}$.
4. $L_\alpha(\cos(bx)) = -bx^{1-\alpha}\sin(bx), b \in \mathbb{R}$.
5. $L_\alpha\left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right) = 1$.

Tanım 19 (Dalga)

Dalga, enerjiyi uzayda bir yerden başka bir yere taşıyan, belirli bir alanda yaşayan ve ortamda etrafa doğru yayılan, enerjiyi komşu moleküllere ileterek onların benzer hareket etmesini sağlayan birbirinden bağımsız titreşim hareketleridir.

Tanım 20 (Soliton)

Ele alınan kısmı diferansiyel denklemlerin çözülmesiyle elde edilen dalga denklemlerinin çözümlerinin soliton olabilmesi için, sabit hızda hareket ederken şeklini koruyan ve diğer solitonlarla yoğun bir şekilde iletişim kurabilen ve değişmeyen kimliği koruyan (faz kayması hariç) lokalize doğrusal olmayan bir dalgadır.

Tanım 21 (Dark Soliton)

Ele alınan kısmi diferansiyel denklemlerin çözülmesiyle elde edilen dalga denklemlerinin çözümlerinin Dark soliton olabilmesi için, arka plandan daha düşük yoğunluklu dalgaları tanımlayan bir dalga çözümdür.

Tanım 22 (Bright Soliton)

Ele alınan kısmi diferansiyel denklemlerin çözülmesiyle elde edilen dalga denklemlerinin çözümlerinin Bright soliton olabilmesi için, maksimum şiddeti arka plandan daha büyük olan dalgaları tanımlayan bir dalga çözümdür.

Tanım 23 (Dengeleme Tekniği)

Dengeleme tekniği, toplam şeklinde verilen çözüm fonksiyonu üst sınırı temsil etmektedir. Doğrusal olmayan herhangi bir adi diferansiyel denklemde en yüksek mertebeden lineer olan terim ile en yüksek mertebeden lineer olmayan terim arasında elde edilen sabit bir sayıdır. Doğrusal olmayan herhangi bir adi diferansiyel denklemde en yüksek mertebeden lineer olan terim $\frac{d^q u}{d\zeta^q}$ ve en yüksek mertebeden lineer olmayan terim $u^p \left(\frac{d^r u}{d\zeta^r}\right)^s$ ile verilsin. Burada p, q, r ve s birer sabit sayı ve m dengeleme terimi olmak üzere $m + q = mp + s(m + r)$ eşitliği yazılabilir. Örneğin;

$$(1 + a - c^2)U'' + \alpha U + \beta U^3 = 0,$$

$$m + 2 = 3m \rightarrow 2m = 2 \rightarrow m = 1.$$

MATERYAL VE METOT

Bu bölümde daha sonraki bölümlerde kullanacağımız lineer olmayan Schrödinger denklemi ve Wu-Zhang sistemi için sine-Gordon açılım metodu ve modifiye edilmiş üstel $(-\Omega(\zeta))$ açılım fonksiyon metodu detaylı bir şekilde tanımlanmıştır.

Lineer Olmayan Schrödinger Denklemi

Bu bölümde, lineer olmayan Schrödinger denkleminin nasıl elde edileceği özet halinde verilecek. Bu konu hakkında daha fazla bilgi için referans Yuen and Lake (1982)'ye bakınız.

Serbest bir yüzeye sahip sıkıştırılmaz, viskoz olmayan bir akışkanın dönmeyen akışını yöneten denklemler Euler denklemleri olarak bilinir:

$$\Delta\phi = 0 \quad -\infty < z < \eta(x, y, t), \quad (6)$$

$$\left. \begin{array}{l} \phi_t + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + gz = p \\ \eta_t + \nabla\phi \cdot \nabla\eta - \phi_z = 0 \end{array} \right\} \quad z = \eta(x, y, t), \quad (7)$$

$$\phi_z \rightarrow 0 \quad z \rightarrow -\infty. \quad (8)$$

Burada ϕ hız potansiyeli, η serbest yüzey, g yer çekim ivmesi, p akışkan yüzeyine uygulanan dış basınç, yatay koordinatlar $(x, y) = \mathbf{x}$ ve dikey koordinat z dir ve yukarı gösterir. Ayrıca, Laplacian operatörü $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ ve yatay gradient vektörü $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)$ biçimindedir. Aksi söylenmedikçe, p dış basıncı sabit olarak alınacak ve genellikle kaybı olmaksızın sıfıra eşitlenecektir.

Şimdi, durgun su üzerindeki küçük bozulmaları göz önüne alırsak, ortalama η üzerindeki serbest yüzey yüksekliği ve ϕ hız potansiyelinin her ikisi de dalga boyu ve dalga periyodu ölçeklerinden küçüktür. Serbest yüzey koşulları lineerleştirilebilir. Dahası, koşullar yaklaşım tutarı olarak $z = \eta(x, y, t)$ yerine $z = 0$ üzerinde uygulanabilir. Böylece, aşağıdaki sınır şartlarını yazabiliriz:

$$\left. \begin{array}{l} \phi_t + g\eta = 0 \\ \eta_t - \phi_z = 0 \end{array} \right\} \quad z = 0. \quad (9)$$

Denklem (9)'un ilk denklemi t zamanına göre türevlendikten sonra denklemler arasında η yok edilirse aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\phi_{tt} + g\phi_z = 0; \quad z = 0. \quad (10)$$

Bu işlem doğrusal olmayan serbest sınır problemini, ϕ için doğrusal sabit sınır problemine indirger:

$$\Delta\phi = 0 \quad -\infty < z < 0, \quad (11)$$

$$\phi_{tt} + g\phi_z = 0 \quad z = 0, \quad (12)$$

$$\phi_z \rightarrow 0 \quad z \rightarrow -\infty. \quad (13)$$

Doğrusal denklemler (11)-(13) için temel çözüm kümesi aşağıdaki gibidir:

$$\eta = (x, t) = a\cos(kx - \omega t), \quad (14)$$

$$\phi(x, z, t) = B\exp(-|k|z)\sin(kx - \omega t). \quad (15)$$

Burada k dalga vektörü, ω dalga frekansı ve α ise dalga genliğidir. Ayrıca,

$$c = \left(\frac{\omega}{|k|^2}\right)k \quad (16)$$

denklemini, faz hızında ilerleyen dalga tepelerine sahip periyodik dalga dizisini temsil eder. ϕ 'nin z üzerindeki üstel azalan bağımlılığı Laplace denkleminde yerine konularak belirlenir. (9)'daki sınır koşullarından ilki B 'yi belirler:

$$B = \frac{\omega\alpha}{|k|}. \quad (17)$$

Diğer sınır şartının yerine konulmasıyla ω dalga frekansı ile k dalga vektörü arasındaki ilişkiyi verir. Yani;

$$\omega^2 = g|k| \quad (18)$$

dir. Denklem (18), doğrusal dağılım bağlantısıdır ve dalga sisteminin en önemli karakterizasyonudur.

Sabit, tek yönlü, periyodik bir dalga dizisinin profili ve frekansı üzerindeki doğrusal olmayanlığa bağlı ilk düzeltme Stokes (1849) tarafından elde edilmiştir. Tek yönlü Stokes dalga çözümü için yüzey yüksekliği

$$\eta(x, y, t) = \eta(x, t) = a\cos(kx - \omega t) + \frac{1}{2}k\alpha^2\cos 2(kx - \omega t) \quad (19)$$

ile verilir ve karşılık gelen hız potansiyeli

$$\phi(x, y, z, t) = \phi(x, z, t) = \left(\frac{\omega\alpha}{k}\right)\exp(kz)\sin(kx - \omega t) \quad (20)$$

biçimindedir. Burada, k dalga vektörünün x bileşenidir, yani, $k = (k, 0)$ dır. Buradan elde edilen en önemli sonuç, dalga frekansının artık dalga vektörünün yanı sıra dalga genliği olan α 'ya da bağlı olmasıdır:

$$\omega = \sqrt{gk} \left(1 + \frac{1}{2} k^2 \alpha^2\right). \quad (21)$$

Luke, (1967)

$$L = \int_{-\infty}^{\eta} \left\{ \phi_t + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + gz \right\} dz \quad (22)$$

Lagrangian'ına sahip

$$\delta \iiint L dx dy dt = 0 \quad (23)$$

varyasyonel prensibinin Euler denklemlerini verdiğini göstermiştir. Dalga dizisi kavramı artık ϕ ve η 'nin her ikisine de periyodik olarak bağımlı olduğu bir θ faz fonksiyonunun eklenmesiyle kesinleştirilebilir. θ 'nın ω dalga frekansı ve k dalga vektörü ile ilişkisi

$$\theta_t = -\omega, \quad \nabla \theta = k \quad (24)$$

biçimindedir. Burada, α dalga genliği, ω dalga frekansı ve k dalga vektörünün x ve t 'nin yavaş değişen fonksiyonları olduğu varsayılmaktadır. Whitham (1965); α, ω ve k 'nin evrimini yöneten denklemlerin aşağıdaki gibi tanımlanan faz-ortalama Lagrangian \mathcal{L} 'ye varyasyonel prensibinin uygulanmasıyla elde edileceğini göstermiştir:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} L d\theta. \quad (25)$$

Örneğin; zayıf lineer olmayan, tek yönlü modüle edilmiş bir dalga dizisi için yöneten denklemlerini elde etmek için

$$\eta = \alpha \cos \theta + \frac{1}{2} k \alpha^2 \cos 2\theta + \dots \quad (26)$$

ve

$$\phi = \frac{\omega \alpha}{k} \sin \theta \exp(kz) + \left[\frac{\alpha_t}{k} \cos \theta + \frac{\omega \alpha_x}{k^2} (1 - kz) \cos \theta \right] \exp(kz) + \dots \quad (27)$$

biçiminde alalım. Burada; ϕ için form lineer sınır koşulundan gelir ancak α 'nın x ve t ile yavaşça değişmesine izin verir; $(1 - kz)$ içeren terim ϕ 'nin Laplace denkleminde dikkate alınan mertebeye kadar karşılanmasını sağlamak için gereklidir. Denklemler (26) ve (27) lineer dalga dizisinin genelleştirilmesi olduğuna dikkat edelim: yüksek dereceli terimler ve α, ω ve k 'nin x ve t 'den bağımsız olduğu varsayıldığında, lineer dalga dizisinin çözümleri olan (14) ve (15)'e indirgenir.

Şimdi, denklemler (26) ve (27)'yi ortalama Lagrangian \mathcal{L} için denklem (25)'de yerine koyarak ve $O(k^2, \alpha^2, \epsilon^2)$ mertebesindeki terimleri koruyarak

$$\mathcal{L} = -\frac{\omega^2 \alpha^2}{4k} + \frac{g \alpha^2}{4} + \frac{\alpha_t^2}{4k} + \frac{\omega \alpha_x \alpha_t}{4k^2} + \frac{\omega^2 \alpha_x^2}{8k^3} + \frac{\alpha \alpha_{tt}}{2k} + \frac{3}{4} \frac{\omega \alpha \alpha_{xt}}{k^2} + \frac{3}{8} \frac{\omega^2 \alpha \alpha_{xx}}{k^3} + \frac{gk^2 \alpha^4}{8} \quad (28)$$

eşitliğini elde ederiz. Burada ϵ , varyasyonunun yavaşlığını karakterize eder. θ 'ya göre değişim aşağıdaki enerji denklemini verir:

$$(\alpha^2)_t + (C_g \alpha^2)_x = 0. \quad (29)$$

Burada, C_g lineer grup hızıdır ve

$$C_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k}} \quad (30)$$

biçiminde tanımlanır. α 'ya göre değişim ise aşağıdaki gibi lineer olmayan dağılım ilişkisini verir:

$$\omega = \sqrt{gk} \left(1 + \frac{1}{2} k^2 \alpha^2 + \frac{\alpha_{xx}}{8k^2 \alpha} \right). \quad (31)$$

Denklemler (29) ve (31), θ_{xt} 'nin θ_{tx} 'e eşitlenmesiyle elde edilen dalga korunum denklemi ile tamamlanmaktadır:

$$k_t + \omega_x = 0. \quad (32)$$

Böylece, denklemler (29), (31) ve (32); α genliği, ω dalga frekansı ve k dalga sayısı için tam bir denklem sistemi oluşturur.

Son olarak, ω dalga frekansı ve k dalga sayısını aşağıdaki gibi yazalım:

$$\omega = \omega_0 + \tilde{\omega}, \quad (33)$$

$$k = k_0 + \tilde{k}. \quad (34)$$

Burada, ω_0 ve k_0 başlangıç koşulları tarafından belirlenen sabitlerdir ve $\tilde{\omega} < \omega_0$, $\tilde{k} < k_0$ dir. Buna uygun olarak, θ faz fonksiyonunda aşağıdaki biçimi alır:

$$\theta = \theta_0 + \tilde{\theta}. \quad (35)$$

Burada;

$$\theta_0 = k_0 x - \omega_0 t, \quad (36)$$

$$\tilde{\theta}_t = -\tilde{\omega}, \quad \tilde{\theta}_x = \tilde{k}. \quad (37)$$

Bu varsayımlar, taşıyıcı frekansı ω_0 ve taşıyıcı dalga sayısı k_0 olan bir taşıyıcı dalga kavramını ortaya koyar, ayrıca α ve $\tilde{\theta}$ için ortaya çıkan denklemler, taşıyıcı dalga sisteminin genlik ve frekans (veya dalga sayısı) modülasyonlarını tanımlayacaktır. Denklemler (33), (34) ve (35)'i denklemler (29)-(32)'de yerine koyarak \tilde{k} ve $\tilde{\omega}$ 'yı $\tilde{\theta}$ lehine yok etmek için bir kez integral alınırsa,

$$\alpha_t + \frac{1}{2} \frac{\omega_0}{k_0} \alpha_x - \frac{\omega_0}{8k_0^2} (\tilde{\theta}_{xx} + 2\tilde{\theta}_x \alpha_x) = 0, \quad (38)$$

ve

$$\tilde{\theta}_t + \frac{1}{2} \frac{\omega_0}{k_0} \tilde{\theta}_x - \frac{\omega_0}{8k_0^2} \left[\tilde{\theta}_x^2 - \frac{\alpha_{xx}}{\alpha} \right] + \frac{1}{2} \omega_0 k_0^2 \alpha^2 = 0 \quad (39)$$

denklemlerini elde ederiz. Şimdi de kompleks dalga zarfını tanıtalım:

$$U = \alpha \exp(i\tilde{\theta}). \quad (40)$$

Böylece denklemler (38) ve (39), U için tek bir karmaşık denklemde birleştirilebilir:

$$i \left[U_t + \frac{\omega_0}{2k_0} U_x \right] - \frac{\omega_0}{8k_0^2} U_{xx} - \frac{1}{2} \omega_0 k_0^2 |U|^2 U = 0. \quad (41)$$

Elde edilen son denklem Lineer Olmayan Schrödinger denklemi olarak adlandırılır.

Lineer Olmayan Schrödinger Denklemi için Sine-Gordon Açılım Metodu

Sine-Gordon açılım metodu (SGEM) aşağıda tanımlanmıştır ve bu denkleminin ortak özelliklerini vermeden önce iki önemli denkleme ihtiyaç vardır (Kumar *et al.* 2021; Yel 2020). Öncelikle sine-Gordon denklemi aşağıda şekildeki gibidir (Yan and Zhang 1999; Chong 2016; Yan 1996):

$$u_{xx} - u_{tt} = m^2 \sin(u). \quad (42)$$

Burada $u = u(x, t)$ iki değişkene bağlı bir fonksiyon ve m ise reel sabittir. Denklem (42)'yi $u = u(x, t) = U(\xi)$, $\xi = \mu(x - ct)$ şeklindeki dalga dönüşümü uygulanırsa aşağıdaki denklem (43) sağlanır.

$$\begin{cases} u_x = \frac{dU}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{dx} = \mu U', \\ u_t = \frac{dU}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{dt} = -\mu c U', \\ u_{xx} = \frac{d(u_x)}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{dx} = \mu^2 U'', \\ u_{tt} = \frac{d(u_t)}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{dt} = c^2 \mu^2 U''. \end{cases} \quad (43)$$

Denklem (43), denklem (42)'de yerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa, aşağıda verilen lineer olmayan adi diferansiyel denklem elde edilir:

$$U'' = \frac{m^2}{\mu^2(1-c^2)} \sin(U). \quad (44)$$

Burada, $U = U(\xi)$, ξ gezgin dalga'nın genliği ve c ise bu dalga'nın hızıdır. Denklem (44)'ün integrali alınır aşağıdaki gibi yazılır.

$$\left[\left(\frac{U}{2} \right) \right]^2 = \frac{m^2}{\mu^2(1-c^2)} \sin^2 \left(\frac{U}{2} \right) + K. \quad (45)$$

Burada verilen K integral sabitidir. Diğer yandan, $K = 0$, $w(\xi) = \frac{U}{2}$ ve $a^2 = \frac{m^2}{\mu^2(1-c^2)}$ alınıp yukarıdaki denklemde yerine konulursa (46) denklemini aşağıda gösterildiği gibidir.

$$w' = a \sin(w). \quad (46)$$

Şimdi de $a = 1$ ifadesi denklem (46)'da yerine yazıldığında

$$w' = \sin(w) \quad (47)$$

denklemini elde ederiz. Denklem (47)'nin integrali alınıp gerekli trigonometrik ifadelerin açılımları yerine yazıldıktan sonra aşağıdaki iki önemli denklem sağlanır:

$$\sin(w) = \sin(w(\xi)) = \frac{2pe^\xi}{p^2e^{2\xi}+1} \Big|_{p=1} = \operatorname{sech}(\xi), \quad (48)$$

$$\cos(w) = \cos(w(\xi)) = \frac{p^2e^{2\xi}-1}{p^2e^{2\xi}+1} \Big|_{p=1} = \operatorname{tanh}(\xi). \quad (49)$$

Burada p integral sabitidir ve sıfırdan farklıdır. Bu iki ana önemli denklemden sonra, SGEM'in tanımına gelince, lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemin çözümünü elde etmek için aşağıdaki ifade göz önüne alınır:

$$P(u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{tt}, u_{xt}, u_{xxx}, u_{xxt}, \dots) = 0. \quad (50)$$

Ayrıca, U ifadesi aşağıda verildiği gibi kabul edilirse

$$U(\xi) = \sum_{i=1}^n \operatorname{tanh}^{i-1}(\xi) [B_i \operatorname{sech}(\xi) + A_i \operatorname{tanh}(\xi)] + A_0, \quad (51)$$

denklem (48) ve denklem (49)'da bulunan eşitlikler denklem (51)'de yerine yazarsak aşağıdaki denklemi elde ederiz:

$$U(w) = \sum_{i=1}^n \cos^{i-1}(w) [B_i \sin(w) + A_i \cos(w)] + A_0. \quad (52)$$

Daha sonra n 'in değerini tanımlamak için lineer olmayan adi diferansiyel denklemdeki en yüksek mertebeden lineer olan terim ile en yüksek mertebeden lineer olmayan terim arasında denge ilkesi uygulanır. n 'in değeri denklem (52)'de yerine yazılır ve bu denklemin türevleri alınıp lineer olmayan adi diferansiyel denklemde yerine konulursa trigonometrik ifadelerle sahip cebirsel bir denklem sistemi elde edilir. Bu cebirsel sistemde $\sin^l(w) \cos^j(w)$ şeklindeki trigonometrik ifadelerin katsayılarını 0'a eşitleyerek A_i, B_i, μ and c şeklindeki sabitlerin Wolfram Mathematica programı yardımıyla sayısal değerleri bulunur. Ayrıca tüm bulunan değerleri çalışmada kullanılacak olan, lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemde uygulayarak bu program aracılığıyla yeni gezgin dalga çözümlerini elde edilerek iki ve üç boyutlu grafikleri çizilir.

Lineer Olmayan Schrödinger Denklemi için Modifiye Edilmiş Üstel $(-\Omega(\zeta))$ Açılım Fonksiyon Metodu

Bu bölümde ise modifiye edilmiş üstel $(-\Omega(\zeta))$ açılım fonksiyon metodu (MEFM) incelenecektir (Atangana 2015; Yan 1996). Bu metodu uygulamak için lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemler aşağıdaki gibi düşünülürse;

$$P(u, u_x, u_t^\alpha, u_{xx}, u_{tt}^{2\alpha}, u_{tx}^\alpha, \dots) = 0, \quad (53)$$

$u = u(x, t)$ bilinmeyen bir fonksiyon iken P , $u(x, t)$ fonksiyonuna ve bunun x ve t 'ye göre kısmi türevlerine sahip bir polinomdur ve ayrıca $\alpha \in (0, 1]$ uyumlu türevin mertebesidir.

Adım 1: Aşağıdaki dalga dönüşümü göz önüne alalım:

$$u(x, t) = U(\zeta), \quad \zeta = x - \frac{lt^\alpha}{\alpha}. \quad (54)$$

Burada l , daha sonra tanımlanabilecek sıfırdan farklı bir sabittir. Denklem (54)'den elde edilen kısmi türevler denklem (53)'e uygulanarak, denklem (53) aşağıdaki gibi tanımlanan lineer olmayan bir adi diferansiyel denkleme dönüşür:

$$N(U, U', U'', U''', \dots) = 0. \quad (55)$$

Burada N , U 'ya bağlı bir polinomdur.

Adım2: Denklem (55)'in gezgin dalga çözümü aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$U(\zeta) = \frac{\sum_{i=0}^N A_i [\exp(-\Omega(\zeta))]^i}{\sum_{j=0}^M B_j [\exp(-\Omega(\zeta))]^j} = \frac{A_0 + A_1 \exp(-\Omega) + \dots + A_N \exp(N(-\Omega))}{B_0 + B_1 \exp(-\Omega) + \dots + B_M \exp(M(-\Omega))}. \quad (56)$$

Burada, A_i, B_j , $(0 \leq i \leq N, 0 \leq j \leq M)$ ifadeleri sonradan tanımlanacak olan sabitlerdir. $A_N \neq 0, B_M \neq 0$, ve $\Omega = \Omega(\zeta)$ aşağıdaki adi diferansiyel denklemi çözmeye yardımcı olur.

$$\Omega'(\zeta) = \exp(-\Omega(\zeta)) + \mu \exp(\Omega(\zeta)) + \lambda. \quad (57)$$

Denklem (57) çözüldüğünde beş tane çözüm ailesi aşağıda şekildeki gibidir:

Çözüm Ailesi 1: $\mu \neq 0, \lambda^2 - 4\mu > 0$ olduğunda

$$\Omega(\zeta) = \ln \left(\frac{-\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2\mu} \tanh \left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} (\zeta + E) \right) - \frac{\lambda}{2\mu} \right), \quad (58)$$

Çözüm Ailesi 2: $\mu \neq 0, \lambda^2 - 4\mu < 0$ olduğunda

$$\Omega(\zeta) = \ln \left(\frac{\sqrt{-\lambda^2 + 4\mu}}{2\mu} \tan \left(\frac{\sqrt{-\lambda^2 + 4\mu}}{2} (\zeta + E) \right) - \frac{\lambda}{2\mu} \right), \quad (59)$$

Çözüm Ailesi 3: $\mu = 0, \lambda \neq 0$ ve $\lambda^2 - 4\mu > 0$ olduğunda

$$\Omega(\zeta) = -\ln \left(\frac{\lambda}{\exp(\lambda(\zeta + E)) - 1} \right), \quad (60)$$

Çözüm Ailesi 4: $\mu \neq 0, \lambda \neq 0$ ve $\lambda^2 - 4\mu = 0$ olduğunda

$$\Omega(\zeta) = \ln \left(-\frac{2\lambda(\zeta + E) + 4}{\lambda^2(\zeta + E)} \right), \quad (61)$$

Çözüm Ailesi 5: $\mu = 0, \lambda = 0$ ve $\lambda^2 - 4\mu = 0$ olduğunda

$$\Omega(\zeta) = \ln(\zeta + E) \quad (62)$$

elde edilir. Burada $A_0, A_1, \dots, A_N, B_0, B_1, \dots, B_M, E, \lambda, \mu$ daha sonra belirlenecek olan sabitlerdir. N ve M arasındaki ilişkiyi kurmak için denklem (56) da ki U 'nun türevleri alınarak adi diferansiyel denklemde yerine yazılıp, oluşan yeni denklemde en yüksek mertebeden lineer olan terim ile en yüksek mertebeden lineer olmayan terim arasında denge ilkesi uygulanır. Denklem (57) ile çözüm ailelerini, denklem (56)'da yerine konulursa üstel $(\Omega(\zeta))$ ifadeye sahip bir polinom elde edilir. Üstel $(\Omega(\zeta))$ ifadeye sahip benzer kuvvetteki tüm katsayılar sıfıra eşitlendikten sonra, $A_0, A_1, \dots, A_N, B_0, B_1, \dots, B_M, E, \lambda$ terimleri cebirsel bir sisteme dönüşür. Bu işlem sonucunda elde edilen katsayı değerleri denklem (56)'da yerine yazılarak, denklem (53)'ün gezgin dalga çözümleri Wolfram Mathematica programı yardımıyla sağlanır.

Wu-Zhang Sistemi

Bu bölümde Wu-Zhang sisteminden kısaca bahsedeceğiz. Bu konuda daha fazla bilgi için (Wu and Zhang 1996) ve (Chen *et al.* 2002) referanslarına bakabilirsiniz.

Wu-Zhang, tek düz derinlikteki sığ sularda iki yatay yönde hareket eden doğrusal olmayan ve dağıtıcı uzun yer çekim dalgalarının modellenmesi için üç model denklem seti

türetmiştir. Bu modeller üzerinde yaptıkları karşılaştırılmalı çalışma, bu modellerin fiziksel ve matematiksel açıdan sahip olduğu içsel özellikleri keşfetmeye yöneliktir. Yüksek dereceli terimler çıkarıldığında, bu denklemlerden biri olan Wu-Zhang denklemi aşağıdaki biçimde yazılabilir:

$$u_t + uu_x + vu_y + w_x = 0, \quad (63)$$

$$v_t + uv_x + vv_y + w_y = 0, \quad (64)$$

$$w_t + (uw)_x + (vw)_y + \frac{1}{3}(u_{xxx} + u_{xyy} + v_{xxy} + v_{yyy}) = 0. \quad (65)$$

Burada; w , suyun yüksekliği, u ise x –yönü boyunca suyun yüzey hızı ve v ise de y -yönü boyunca suyun yüzey hızıdır. Ölçekleme dönüşümü ile simetri indirgeme ile denklemler (63)-(65), (1 + 1) boyutlu dispertif uzun dalga denklemine indirgenebilir:

$$v_t + vv_x + w_x = 0, \quad (66)$$

$$w_t + (wv)_x + \frac{1}{3}v_{xxx} = 0. \quad (67)$$

Wu-Zhang Sistemi için Sine-Gordon Açılım Metodu

Aşağıdaki şekilde verilen sine-Gordon denklemini ele alalım:

$$u_{xx} - u_{tt} = v^2 \sin(u). \quad (68)$$

Burada $u = u(x, t)$, x ve t değişkene bağlı bir fonksiyon, $v \in \mathbb{R} - \{0\}$ ise reel sabittir. Dalga çözümlerini elde etmek için dalga dönüşümlerine ihtiyaç vardır. Dalga dönüşümü aşağıdaki gibidir:

$$u = u(x, t) = U(\eta), \eta = r(x - ct).$$

Yukarıdaki denklemin kısmi türevleri alınıp denklem (68)'de yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa, aşağıda verilen lineer olmayan adi diferansiyel denklem elde edilir.

$$U'' = \frac{v^2}{r^2(1-c^2)} \sin(U). \quad (69)$$

$U = U(\eta)$, η gezgin dalganın genliği ve c ise gezgin dalganın hızıdır. Denklem (69)'un integrali alınır aşağıdaki gibi sadeleştirilir;

$$\left[\left(\frac{U}{2} \right)' \right]^2 = \frac{v^2}{r^2(1-c^2)} \sin^2 \left(\frac{U}{2} \right) + q. \quad (70)$$

Burada, q integral sabitidir. Denklem (70)'in daha rahat çözülmesi için $q = 0, w(\eta) = \frac{U}{2}$ ve $a^2 = \frac{v^2}{r^2(1-c^2)}$ alınıp yerine yazılırsa denklem (71) sağlanır.

$$(w')^2 = a^2 \sin^2(w(\eta)). \quad (71)$$

$a = 1$ ifadesi denklem (71)'de yerine yazılırsa

$$(w')^2 = \sin^2(w(\eta)) \quad (72)$$

elde edilir. Denklem (72)'nin integrali alınıp gerekli trigonometrik ifadelerin açılımı yerine yazıldıktan sonra aşağıdaki iki önemli denklemi elde edilir.

$$\sin(w(\eta)) = \operatorname{sech}(\eta) \text{ veya } \cos(w(\eta)) = -\tanh(\eta), \quad (73)$$

$$\sin(w(\eta)) = -i \operatorname{csch}(\eta) \text{ veya } \cos(w(\eta)) = -\coth(\eta). \quad (74)$$

Elde edilen iki önemli denklemden sonra, SGEM'in tam olarak tanımına gelecek olursak, lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemin çözümünü elde etmek için genel form olarak aşağıdaki ifade göz önüne alınır. Sine-Gordon açılım denklemi gereğince U ifadesini aşağıdaki gibi düşünmek gerekir:

$$U(\eta) = \sum_{i=1}^n \tanh^{i-1}(\eta) [B_i \operatorname{sech}(\eta) + A_i \tanh(\eta)] + A_0, \quad (75a)$$

$$U(\eta) = \sum_{i=1}^n \coth^{i-1}(\eta) [B_i \coth(\eta) + A_i \operatorname{csch}(\eta)] + A_0. \quad (75b)$$

Denklem (75a), denklem (73) ve denklem (74)'e göre düzenlenirse aşağıdaki denklem elde edilir.

$$U(w) = \sum_{i=1}^n \cos^{i-1}(w) [B_i \sin(w) + A_i \cos(w)] + A_0. \quad (76)$$

Daha sonra Sine-Gordon açılım denkleminin yeni gezgin dalga çözümlerini bulmak amacıyla n 'in değerini tanımlamak için lineer olmayan adi diferansiyel denklemde en yüksek mertebeden lineer olan terim ile en yüksek mertebeden lineer olmayan terime denge ilkesi uygulanır. Burada denge ilkesi uygularken dikkat edilmesi gereken şey adi diferansiyel denklemi göz önüne alarak uygulanması gerekmektedir. Denklem (76)'da n 'in değerini yerine yazıp ve bu denklemin türevlerini alıp lineer olmayan adi diferansiyel denklemde yerine konulursa trigonometrik ifadelerle sahip bir cebirsel bir denklem elde edilir. Cebirsel denklemdeki $\sin^i(w) \cos^j(w)$ şeklindeki trigonometrik ifadelerin katsayılarını 0'a eşitleyerek A_i, B_i, μ and c şeklindeki sabitlerin Wolfram Mathematica programı yardımıyla sayısal değerleri bulunur. Ayrıca daha sonra bulunan değerleri, verilen lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemde ki (NPDE) çözümlerini elde etmek için (75a) ve (75b) denklemlerine dahil edilir ve Wolfram

Mathematica programı aracılığıyla yeni gezgin dalga çözümlerini elde ederek iki ve üç boyutlu grafikleri çizilir.

Wu-Zhang Sistemi için Modifiye Edilmiş Üstel $(-\Omega(\zeta))$ Açılım Fonksiyon Metodu

Bu bölümde ise modifiye edilmiş üstel $(-\Omega(\zeta))$ açılım fonksiyon metodu (MEFM) sunulacaktır. Lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemin genel formu aşağıdaki gibidir:

$$P(u, u_x, u_t, u_{xxx}, v_x, v_t, uv_x, vu_x, \dots) = 0. \quad (77)$$

Burada $u = u(x, t)$ bilinmeyen bir fonksiyondur. Lineer olmayan kısmi diferansiyel denkleme uygulanacak olan dalga dönüşümü aşağıda şekildeki gibidir:

$$u(x, t) = U(\eta), \eta = r(x - ct). \quad (78)$$

Denklem (78)'in kısmi türevlerini elde edip denklem (77)'ye uyguladığımızda, denklem (77) aşağıdaki gibi tanımlanan lineer olmayan bir adi diferansiyel denkleme dönüşür.

$$N(u, u^2, v, u'', \dots) = 0. \quad (79)$$

Denklem (80)'nin salınımlı dalga çözümünün yani u 'nun şu şekilde olduğu varsayalım.

$$u(\eta) = \frac{\sum_{j=0}^n A_j [e^{-\vartheta(\eta)}]^j}{\sum_{i=0}^m B_i [e^{-\vartheta(\eta)}]^i} = \frac{A_0 + A_1 e^{-\vartheta} + \dots + A_n e^{-n\vartheta}}{B_0 + B_1 e^{-\vartheta} + \dots + B_m e^{-m\vartheta}}. \quad (80)$$

Burada, $A_i, B_j, (0 \leq i \leq N, 0 \leq j \leq M)$ 'ler sonradan tanımlanacak olan sabitlerdir.

$$\vartheta'(\eta) = e^{-\vartheta(\eta)} + k e^{\vartheta(\eta)} + \lambda. \quad (81)$$

Denklem (81)'in integrali alınıp çözümlürse beş tane çözüm ailesi elde edilir (Naher and Abdullah 2014):

Çözüm Ailesi 1: $k \neq 0, \lambda^2 - 4k > 0$ olduğunda

$$\vartheta(\eta) = \ln \left(\frac{-\sqrt{\lambda^2 - 4k}}{2k} \tanh \left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4k}}{2} (\eta + E) \right) - \frac{\lambda}{2k} \right), \quad (82)$$

Çözüm Ailesi 2: $k \neq 0, \lambda^2 - 4k < 0$ olduğunda

$$\vartheta(\eta) = \ln \left(\frac{\sqrt{-\lambda^2 + 4k}}{2k} \tan \left(\frac{\sqrt{-\lambda^2 + 4k}}{2} (\eta + E) \right) - \frac{\lambda}{2k} \right), \quad (83)$$

Çözüm Ailesi 3: $k = 0, \lambda \neq 0$ ve $\lambda^2 - 4k > 0$ olduğunda

$$\vartheta(\eta) = -\ln \left(\frac{\lambda}{e^{\lambda(\eta+E)} - 1} \right), \quad (84)$$

Çözüm Ailesi 4: $k \neq 0, \lambda \neq 0$ ve $\lambda^2 - 4k = 0$ olduğunda

$$\vartheta(\eta) = \ln\left(-\frac{2\lambda(\eta+E)+4}{\lambda^2(\eta+E)}\right), \quad (85)$$

Çözüm Ailesi 5: $k = 0, \lambda = 0$ ve $\lambda^2 - 4k = 0$ olduğunda

$$\vartheta(\eta) = \ln(\eta + E) \quad (86)$$

elde edilir.

$A_0, A_1, \dots, A_N, B_0, B_1, \dots, B_M, E, \lambda, \mu$ sabitlerdir. n ve m arasındaki ilişkiyi kurmak için denklem (80) de ki U 'nun türevleri alınarak oluşan lineer olmayan adi diferansiyel denklemdeki en yüksek mertebeden lineer olan terim ile en yüksek mertebeden lineer olmayan terime denge ilkesi uygulanır. Denklem (81) ile çözüm ailelerini, denklem (80)'de yerine konulursa üstel $(\Omega(\zeta))$ ifadeye sahip bir polinom elde edilir. Üstel $(\Omega(\zeta))$ ifadeye sahip benzer kuvvetteki tüm katsayılar sıfıra eşitlendikten sonra, $A_0, A_1, \dots, A_N, B_0, B_1, \dots, B_M, E, \lambda$ terimleri cebirsel bir sisteme dönüşür. Bu işlem sonucunda elde edilen katsayı değerleri denklem (80)'de yazılarak, denklem (77)'nin gezgin dalga çözümleri Wolfram Mathematica yardımıyla elde edilir.

ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde, Sine-Gordon açılım metodunu (SGEM) ve modifiye edilmiş üstel $(-\Omega(\zeta))$ açılım fonksiyon metodunun (MEFM) sırasıyla lineer olmayan Schrödinger denkleminin (NLSE) ve Wu-Zang sistemine uygulanışı detaylı bir şekilde verilecek ve elde edilen durumlar tek tek incelenip grafikleri çizilecektir.

Sine-Gordon Açılım Metodunun ve Modifiye Edilmiş Üstel $(-\Omega(\zeta))$ Açılım Fonksiyon Metodunun Lineer Olmayan Schrödinger Denkleminin Uygulanışı

İlk olarak, lineer olmayan Schrödinger denkleminin, sırasıyla SGEM ve MEFM metodlarının uygulanışını vereceğiz. Lineer olmayan Schrödinger denkleminin derin sulardaki yer çekim dalgaları için aşağıdaki gibi tanımlandığını biliyoruz:

$$i \left(\frac{\partial U}{\partial t} + c_g \frac{\partial U}{\partial x} \right) - \frac{\omega_0}{8k_0^2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\omega_0 k_0^2}{2} |U|^2 U = 0. \quad (87)$$

Burada t ve x zaman ve boylamsal kordinatlar olup, k_0 ve $\omega_0 = \omega(k_0)$ sırasıyla dalga sayısı ve dalga frekansını ifade etmektedir. $\omega_0 = \sqrt{gk_0}$ ve g yer çekimi ivmesi iken $c_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{\omega_0}{2k_0}$ grup hızıdır. Burada denklem (87)'nin uygun anlamda soliton dalga çözümlerini bulmaya odaklanılacaktır.

Sine-Gordon Açılım Metodunun Lineer Olmayan Schrödinger Denkleminin Uygulanması

Bu bölümde, SGEM'in lineer olmayan Schrödinger denkleminin uygulanması sunulacaktır. Denklem (87)'yi aşağıdaki şekilde yazmak mümkündür:

$$i \left(\frac{\partial^\alpha U}{\partial t^\alpha} + c_g \frac{\partial U}{\partial x} \right) - \frac{\omega_0}{8k_0^2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\omega_0 k_0^2}{2} |U|^2 U = 0. \quad (88)$$

Burada α , $0 < \alpha \leq 1$ 'de uyumlu türev mertebesidir.

İlk olarak, lineer olmayan kısmi diferansiyel denklem (88)'i lineer olmayan bir adi diferansiyel denkleme dönüştürmek için gezgin dalga dönüşümü aşağıdaki gibi ele alınır.

$$U(x, t) = \Psi(\zeta) e^{i\varphi}, \quad \zeta = ax - \frac{bt^\alpha}{\alpha}, \quad \varphi = px - \frac{qt^\alpha}{\alpha}. \quad (89)$$

Yukarıdaki denklemde a, b, p, q sıfırdan farklı sabitlerdir. Denklem (89)'u denklem (88) için gerekli olan kısmi türevler aşağıdaki şekildedir:

$$\left(\begin{aligned} U_x &= a\Psi' e^{i\varphi} + ip\Psi e^{i\varphi}, & U_{xx} &= a^2\Psi'' e^{i\varphi} + 2ipa\Psi' e^{i\varphi} - p^2\Psi e^{i\varphi} \\ U_t &= -b\Psi' e^{i\varphi} - iq\Psi e^{i\varphi}, \end{aligned} \right).$$

Bu kısmi türevler alınıp denklem (88)'de yerine yazılıp düzenlenirse sırasıyla reel ve imajiner kısımları verir.

$$\Psi \left(q - c_g p + \frac{p^2 \omega_0}{8k_0^2} \right) - \frac{a^2 \omega_0}{8k_0^2} \Psi'' - \frac{k_0^2 \omega_0}{2} \Psi^3 = 0, \quad (90)$$

$$b = a \left(c_g - \frac{p \omega_0}{4k_0^2} \right). \quad (91)$$

Ψ'' ve Ψ^3 arasındaki homojen denge ilkesi kullanılırsa $n = 1$ elde edilir. $n = 1$ 'i denklem (52)'de yerine konulduğunda aşağıdaki denklem sağlanır.

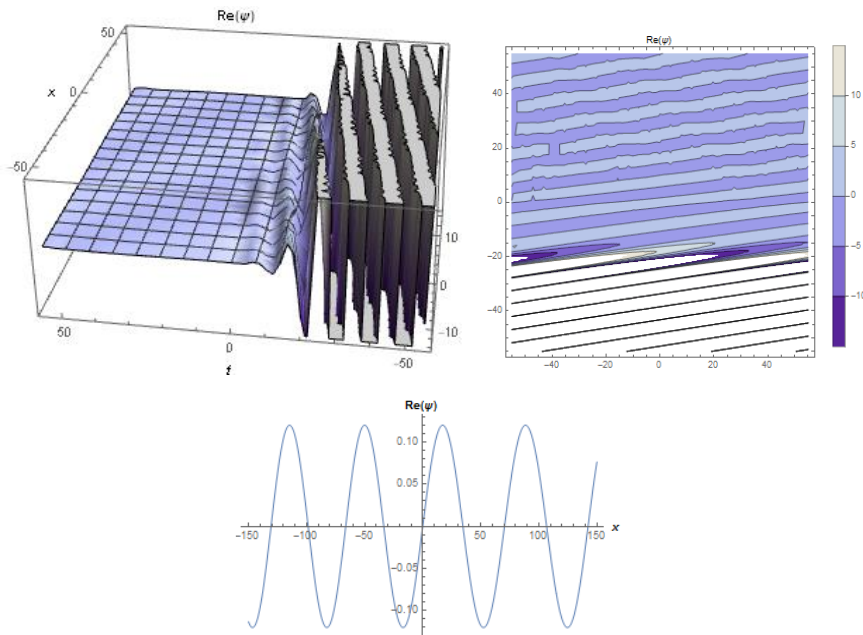
$$\Psi(\zeta) = B_1 \sin(w) + A_1 \cos(w) + A_0. \quad (92)$$

Denklem (92) ve bunun ikinci mertebeden türevi alınıp denklem (90)'da yerine yazıldığında farklı derecelerde trigonometrik fonksiyon elde edilir. Trigonometrik fonksiyonların aynı kuvvete sahip tüm katsayıların toplamı sıfıra eşitlenirse cebirsel bir denklem sistemi sağlanır. Bu cebirsel denklem sisteminin çözümü denklem (51)'in B_1, A_1, A_0 ve a, b, p, q gibi katsayılarını verir. Bundan sonra çalışmada yer alan tüm katsayılar, dalga çözümleri, iki ve üç boyutlu grafikler Wolfram Mathematica programı yardımı ile çözülecektir ve her dalga çözümü aşağıda şekildeki gibi sunulacaktır (Yazgan *et al.* 2023):

Durum 1: $A_0 = 0, A_1 = -iB_1, a = 2\sqrt{2}k_0^2 B_1, c_g = \frac{8qk_0^2 + \omega_0 p^2 k_0^2 + 4k_0^2 \omega_0 B_1^2}{8pk_0^2}$ olduğunda

$$\Psi_1(x, t) = e^{i\varphi} B_1 \left(\text{Sech} \left[2\sqrt{2}B_1 k_0^2 x - \frac{2\sqrt{2}k_0^2 B_1}{\alpha} \left(-\frac{p\omega_0}{4k_0^2} + \frac{8qk_0^2 + \omega_0 p^2 k_0^2 + 4k_0^2 \omega_0 B_1^2}{8pk_0^2} \right) \right] - i \text{Tanh} \left[2\sqrt{2}B_1 k_0^2 x - \frac{2\sqrt{2}k_0^2 B_1 t^\alpha}{\alpha} \left(-\frac{p\omega_0}{4k_0^2} + \frac{8qk_0^2 + \omega_0 p^2 k_0^2 + 4k_0^2 \omega_0 B_1^2}{8pk_0^2} \right) \right] \right) \quad (93)$$

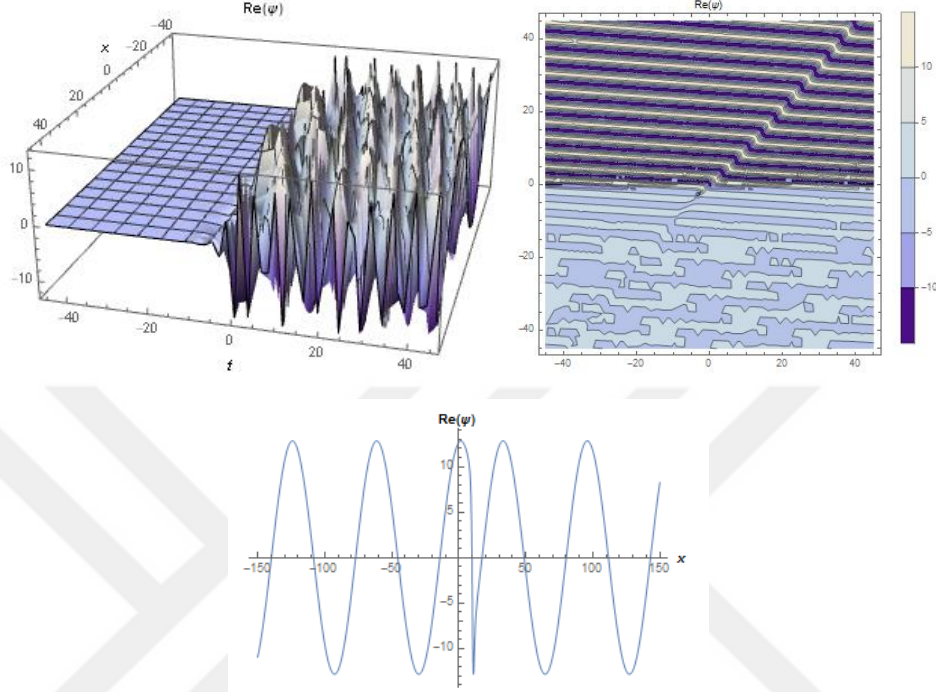
denklemini elde edilir.



Şekil 1. Denklem (93)'ün $\alpha = 0.9, k_0 = 0.2, p = 0.1, a = 1.45, B_1 = 0.12, \omega_0 = 0.632456$ ve $t = 10$ üç ve iki boyutlu grafikleri.

$$\text{Durum 2: } A_0 = 0, A_1 = -\frac{ia}{2\sqrt{2}k_0^2}, B_1 = -\frac{a}{2\sqrt{2}k_0^2}, q = c_g p - \frac{(a^2 + 2p^2)\omega_0}{16k_0^2},$$

$$\Psi_2(x, t) = \frac{-a e^{i\varphi} \left(\text{Sech} \left[ax - \frac{a(4k_0^2 c_g - p\omega_0)t^\alpha}{4k_0^2 \alpha} \right] + i \text{Tanh} \left[ax - \frac{a(4k_0^2 c_g - p\omega_0)t^\alpha}{4k_0^2 \alpha} \right] \right)}{2\sqrt{2}k_0^2} \quad (94)$$

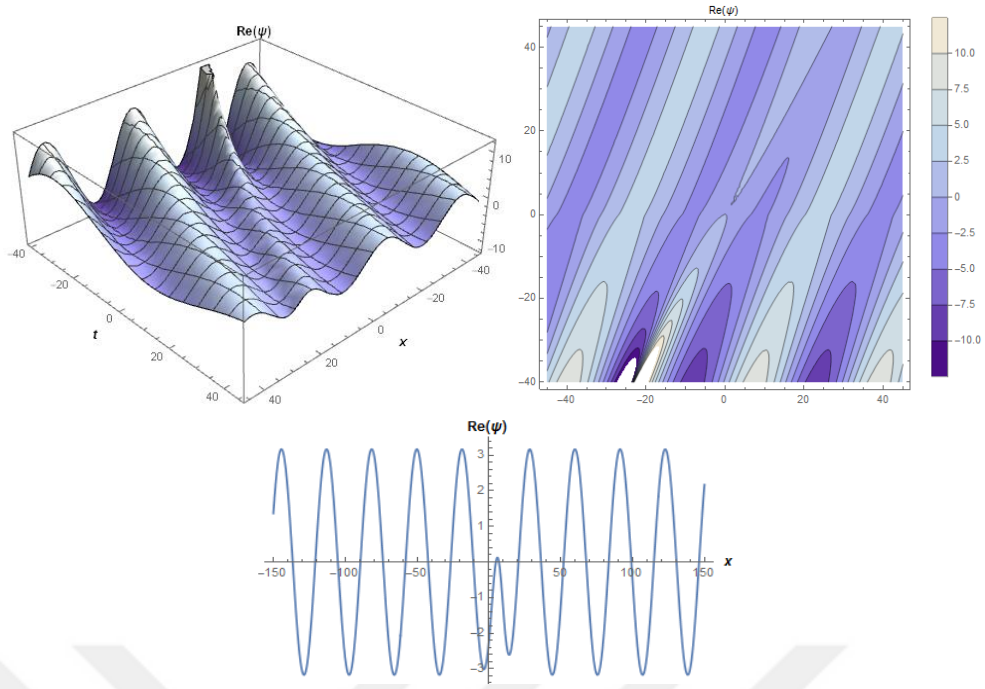


Şekil 2. Denklem (94)'ün $\alpha = 0.9, k_0 = 0.2, p = 0.1, a = 1.45, \omega_0 = 0.632456$ ve $t = 10$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafikleri.

$$\text{Durum 3: } A_0 = 0, B_1 = 0, A_1 = -\frac{\sqrt{-8c_g k_0^2 p + 8k_0^2 q + \omega_0 p^2}}{2k_0^2 \sqrt{\omega_0}}, a = \frac{i \sqrt{-8c_g k_0^2 p + 8k_0^2 q + \omega_0 p^2}}{\sqrt{2\omega_0}},$$

$$\Psi_3(x, t) = -i e^{i\varphi} \frac{\sqrt{-8c_g k_0^2 p + 8k_0^2 q + \omega_0 p^2}}{2k_0^2 \sqrt{\omega_0}}.$$

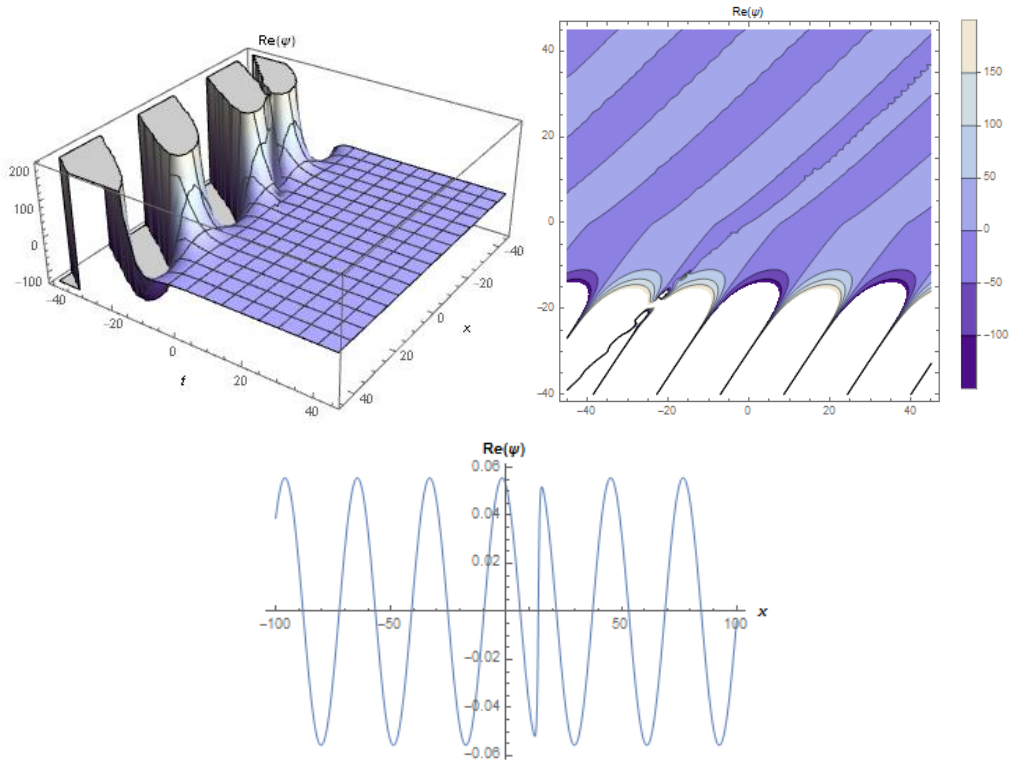
$$\text{Tanh} \left[\frac{x \sqrt{-8c_g k_0^2 p + 8k_0^2 q + \omega_0 p^2}}{\sqrt{2\omega_0}} - \frac{t^\alpha (4k_0^2 c_g - p\omega_0) \sqrt{-8c_g k_0^2 p + 8k_0^2 q + \omega_0 p^2}}{4\alpha k_0^2 \sqrt{2\omega_0}} \right]. \quad (95)$$



Şekil 3. Denklem (95)'in $\alpha = 0.9, k_0 = 0.2, p = 0.2, a = 1.45, \omega_0 = 0.632456$ ve $t = 10$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafikleri.

Durum 4: $A_0 = 0, B_1 = 0, k_0^2 = \frac{(1-i)\sqrt{a}}{\frac{3}{2^4}\sqrt{A_1}}, q = c_g p - \frac{i(2a^2+p^2)\omega_0 A_1}{4\sqrt{2}a},$

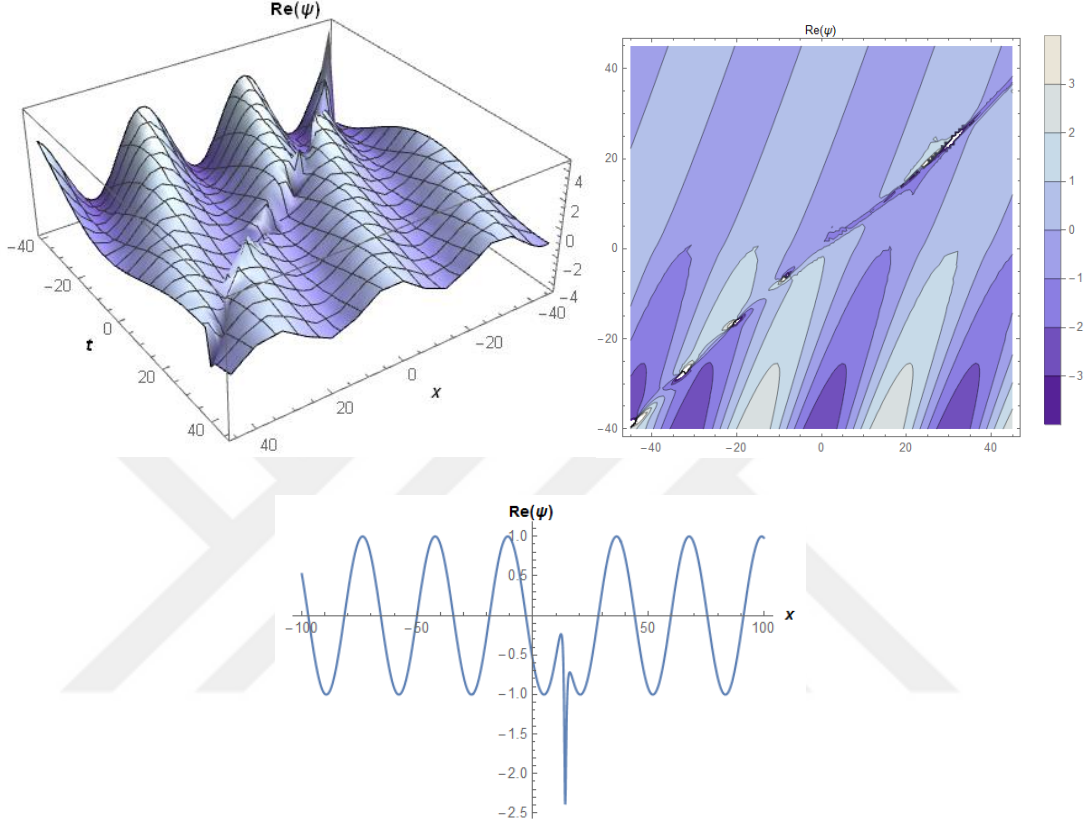
$$\Psi_4(x, t) = e^{i\left(px - \frac{t^\alpha(4\sqrt{2}ac_gp - i(2a^2+p^2)\omega_0 A_1)}{4\sqrt{2}a\alpha}\right)} A_1 \operatorname{Tanh}\left[ax - \frac{at^\alpha(2\sqrt{2}ac_gp - ip\omega_0 A_1)}{2\sqrt{2}a\alpha}\right], \quad (96)$$



Şekil 4. Denklem (96)'nın $\alpha = 0.9, k_0 = 0.2, p = 0.2, q = 0.11, a = 1.45, \omega_0 = 0.632456, A_1 = 1,$ ve $t = 10$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafikleri.

Durum 5: $A_0 = 0, B_1 = iA_1, k_0^2 = -\frac{(-1)^{\frac{3}{4}}\sqrt{a}}{2^{\frac{3}{4}}\sqrt{A_1}}, q = c_g p - \frac{i(a^2+2p^2)\omega_0 A_1}{4\sqrt{2}a},$

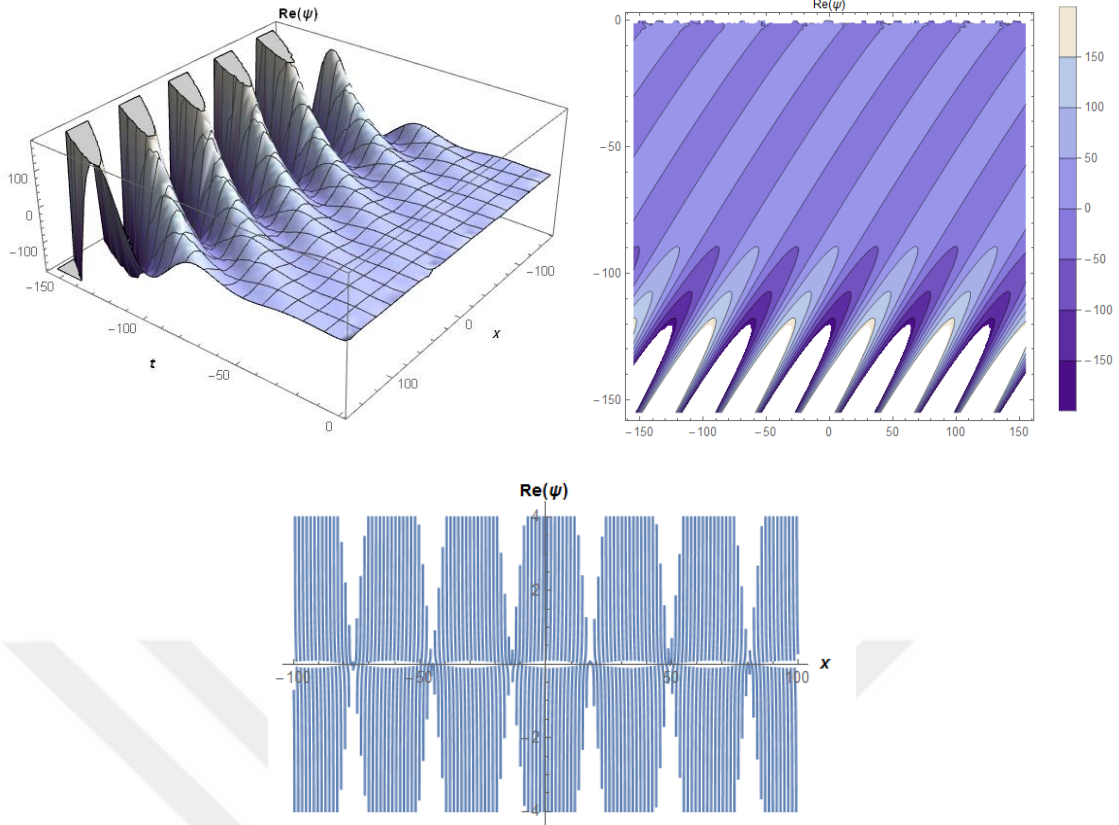
$$\Psi_5(x, t) = e^{i\left(px - \frac{qt^\alpha}{\alpha}\right)} A_1 \left(i \operatorname{Sech} \left[ax - \frac{at^\alpha(\sqrt{2}ac_g - ip\omega_0 A_1)}{\sqrt{2}a\alpha} \right] + \operatorname{Tanh} \left[ax - \frac{at^\alpha(\sqrt{2}ac_g - ip\omega_0 A_1)}{\sqrt{2}a\alpha} \right] \right). \quad (97)$$



Şekil 5. Denklem (97)'nin $\alpha = 0.9, k_0 = 0.2, p = 0.2, q = 0.11, a = 1.45, \omega_0 = 0.632456, c_g = 1.58114, A_1 = 1$ ve $t = 10$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafikleri.

Durum 6: $A_0 = 0, B_1 = -iA_1, a = 2i\sqrt{2}k_0^2 A_1, \omega_0 = \frac{8k_0^2(-c_g p + q)}{-p^2 + 4k_0^4 A_1^2},$

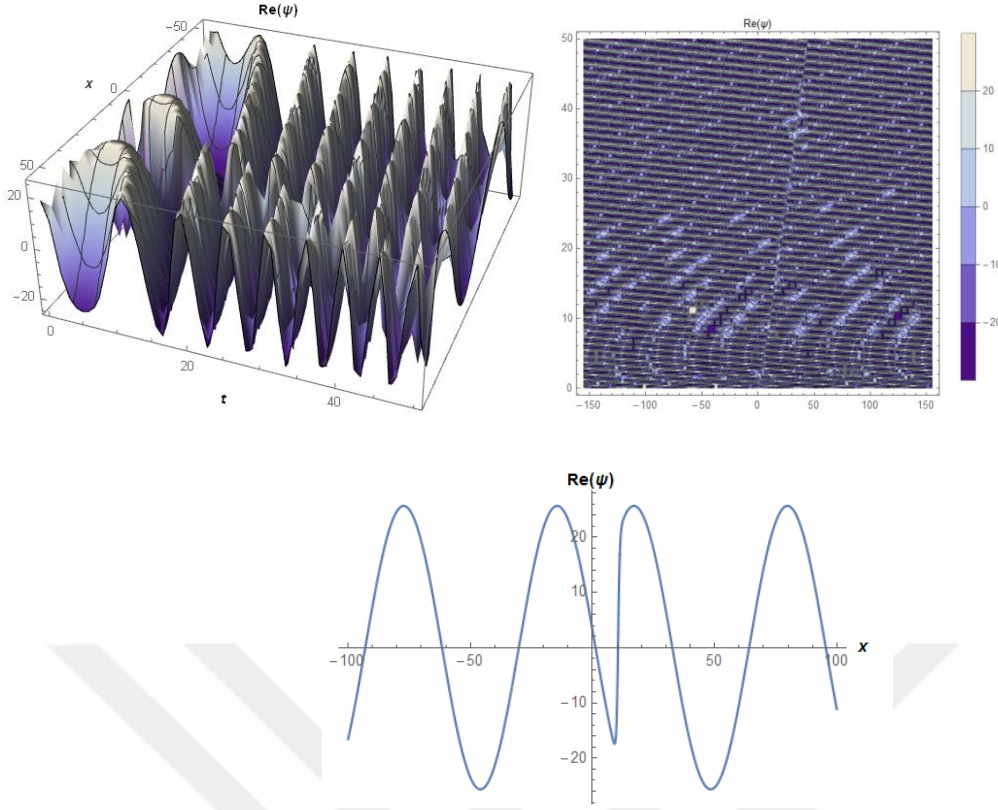
$$\Psi_6(x, t) = e^{i\left(px - \frac{qt^\alpha}{\alpha}\right)} A_1 \left(-i \operatorname{Sec} \left[2\sqrt{2}k_0^2 A_1 x - \frac{2\sqrt{2}k_0^2 A_1 t^\alpha \left(c_g - \frac{2p(-c_g p + q)}{-p^2 + 4k_0^4 A_1^2} \right)}{\alpha} \right] + i \operatorname{Tan} \left[2\sqrt{2}k_0^2 A_1 x - \frac{2\sqrt{2}k_0^2 A_1 t^\alpha \left(c_g - \frac{2p(-c_g p + q)}{-p^2 + 4k_0^4 A_1^2} \right)}{\alpha} \right] \right). \quad (98)$$



Şekil 6. Denklem (98)'in $\alpha = 0.9, k_0 = 1.2, p = 0.1, q = 0.2, a = 1.45, \omega_0 = 1.54919, c_g = 0.645497, A_1 = 1$, ve $t = 10$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafikleri.

Durum 7: $A_0 = 0, B_1 = 0, A_1 = \frac{ia}{\sqrt{2}k_0^2}, q = c_g p - \frac{(2a^2 + p^2)\omega_0}{8k_0^2}$,

$$\Psi_7(x, t) = \frac{ia}{\sqrt{2}k_0^2} e^{i \left(px - \frac{t^\alpha \left(c_g p - \frac{(2a^2 + p^2)\omega_0}{8k_0^2} \right)}{\alpha} \right)} \text{Tanh} \left[ax - \frac{at^\alpha (4c_g k_0^2 - p\omega_0)}{4k_0^2 \alpha} \right]. \quad (99)$$



Şekil 7. Denklem (99)'un $\alpha = 0.9, k_0 = 0.2, p = 0.1, q = 0.2, a = 1.45, \omega_0 = 0.632456, c_g = 1.58114$, ve $t = 10$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafikleri.

Modifiye Edilmiş Üstel $(-\Omega(\zeta))$ Açılım Fonksiyon Metodunun Lineer Olmayan Schrödinger Denkleminin Uygulanışı

Bu bölümde, modifiye edilmiş üstel $(-\Omega(\zeta))$ açılım fonksiyonu metodu kullanılarak denklem (87)'nin soliton çözümlerine odaklanılacaktır.

Denklem (88)'e aşağıda verilen gezgin dalga dönüşümünü uygulanır.

$$U(x, t) = \Psi(\zeta)e^{i\varphi}, \quad \zeta = ax - \frac{bt^\alpha}{\alpha}, \quad \varphi = px - \frac{qt^\alpha}{\alpha}. \quad (100)$$

Denklem (100)'ün denklem (88) için gerekli olan kısmi türevleri aşağıda verilmiştir.

$$\begin{pmatrix} U_x = a\Psi'e^{i\varphi} + ip\Psi e^{i\varphi}, U_{xx} = a^2\Psi''e^{i\varphi} + 2ipa\Psi'e^{i\varphi} - p^2\Psi e^{i\varphi} \\ U_t = -b\Psi'e^{i\varphi} - iq\Psi e^{i\varphi}, \end{pmatrix}$$

Bu türevler (88)'de yerine yazılıp düzenlenirse sırasıyla reel ve imajiner kısımları verir.

$$\Psi \left(q - c_g p + \frac{p^2 \omega_0}{8k_0^2} \right) - \frac{a^2 \omega_0}{8k_0^2} \Psi'' - \frac{k_0^2 \omega_0}{2} \Psi^3 = 0, \quad (101)$$

$$b = a \left(c_g - \frac{p \omega_0}{4k_0^2} \right). \quad (102)$$

Denklem (101)'de yer alan Ψ'' ve Ψ^3 homojen denge ilkesi kullanılarak M ve N arasındaki ilişki elde edilir, $M + 1 = N$ şeklindedir. M ve N 'nin uygun tamsayı değerleri için farklı durumlar elde edilebilir. $M = 1$ ve $N = 2$ değerleri seçilirse çözüm şekli aşağıdaki gibi çıkar.

$$\Psi(\zeta) = \frac{A_0 + A_1 e^{-\Omega(\zeta)} + A_2 e^{-2\Omega(\zeta)}}{B_0 + B_1 e^{-\Omega(\zeta)}}. \quad (103)$$

Denklem (103) ve ikinci mertebeden türevi denklem (101)'de ikame edildiğinde, aşağıda sunulduğu gibi bazı soliton çözümleri ortaya çıkar (Yazgan *et al.* 2023):

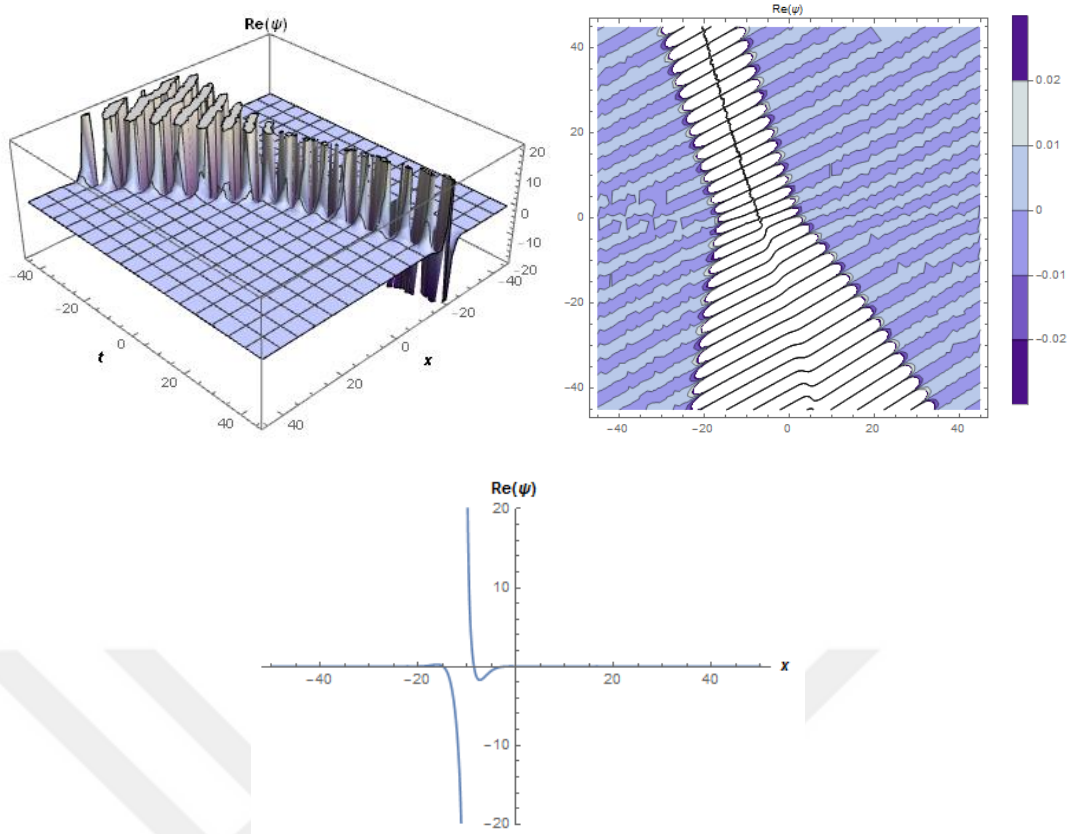
$$\mathbf{Durum 1:} A_1 = 0, B_0 = 0, \lambda = 0, B_1 = \frac{i\sqrt{2}k_0^2 A_2}{a}, \mu = \frac{A_0}{A_2}, q = c_g p - \frac{p^2 \omega_0}{8k_0^2} - \frac{a^2 \omega_0 A_0}{2A_2 k_0^2},$$

üst kısımdaki katsayılar kullanılarak aşağıdaki çözüm aileleri elde edilir.

Çözüm Ailesi 1: $\lambda^2 - 4\mu > 0$ olduğunda,

$$U_{1,1}(x, t) = \Psi_{1,1}(x, t) e^{i\varphi(x,t)} = -i \sqrt{\frac{2A_0}{k_0^4 A_2}} a e^{i \left(px - \frac{(c_g p - \frac{p^2 \omega_0}{8k_0^2} - \frac{a^2 \omega_0 A_0}{2A_2 k_0^2}) t^\alpha}{a} \right)} \times \text{Cos e c} \left[\frac{2\sqrt{A_0} \left(E + ax - \frac{at^\alpha (4c_g k_0^2 - p\omega_0)}{4\alpha k_0^2} \right)}{\sqrt{A_2}} \right] \quad (104)$$

elde edilir.

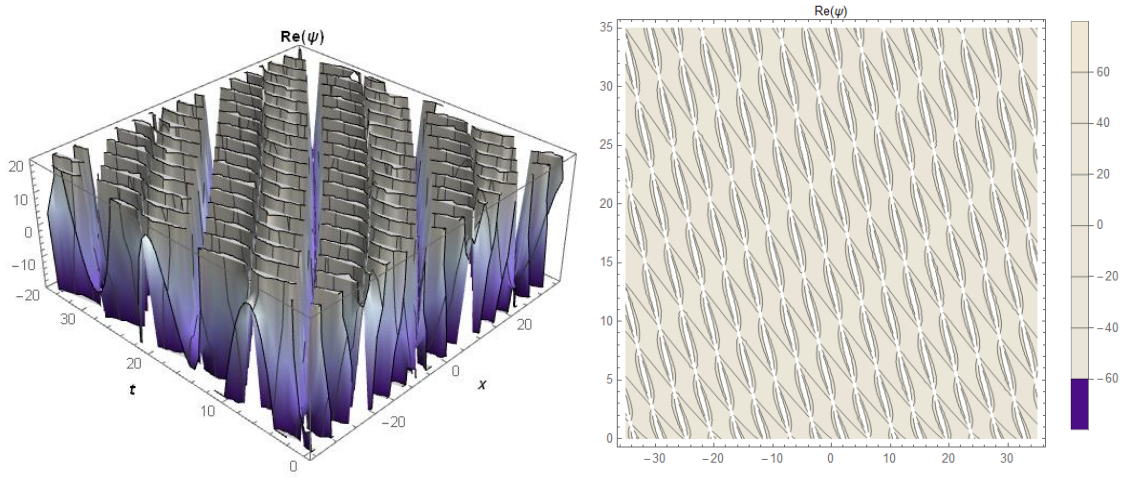


Şekil 8. Denklem (104)'ün $\alpha = 0.9, k_0 = 0.2, p = 0.5, q = 1.2, a = 1.45, \omega_0 = 0.632456, c_g = 1.58114, A_0 = -0.12, A_2 = 2, EE = 10$ ve $t = 10$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafikleri.

Çözüm Ailesi 2: $\lambda^2 - 4\mu < 0$ olduğunda

$$U_{1,2}(x, t) = \Psi_{1,2}(x, t) e^{i\varphi(x,t)} = -i \sqrt{\frac{2A_0}{k_0^4 A_2}} a e^{i \left(px - \frac{(c_g p - \frac{p^2 \omega_0}{8k_0^2} - \frac{a^2 \omega_0 A_0}{2A_2 k_0^2}) t^\alpha}{\alpha} \right)} \times \text{Cos e c} \left[\frac{2\sqrt{A_0} \left(E + ax - \frac{at^\alpha (4c_g k_0^2 - p\omega_0)}{4\alpha k_0^2} \right)}{\sqrt{A_2}} \right] \quad (105)$$

elde edilir.

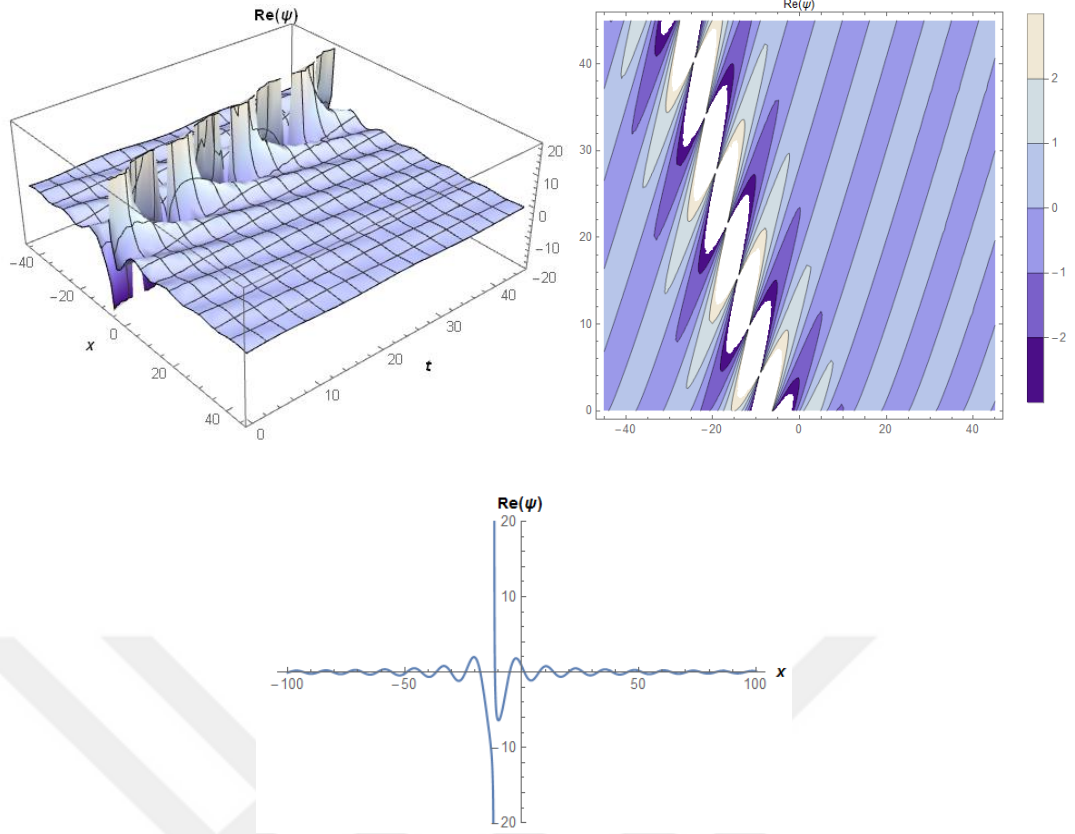


Şekil 9. Denklem (105)'in $\alpha = 0.9, k_0 = 0.2, p = 0.5, q = 1.2, a = 1.45, \omega_0 = 0.894427, c_g = 2.23607, A_0 = -0.12, A_2 = 2, EE = 10$ ve $t = 10$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafikleri.

Çözüm Ailesi 5: $\mu = 0, \lambda = 0$, ve $\lambda^2 - 4\mu = 0$ olduğunda

$$U_{1,5}(x, t) = \Psi_{1,5}(x, t)e^{i\varphi(x,t)} = -\frac{i2\sqrt{2} a \alpha e^{i\left(px - \frac{(8k_0^2 c_g p - p^2 \omega_0)t^\alpha}{8k_0^2 \alpha}\right)}}{4k_0^4(E + ax)\alpha + at^\alpha(-4c_g k_0^2 + p\omega_0)} \quad (106)$$

elde edilir.



Şekil 10. Denklem (106)'nın $\alpha = 0.9, k_0 = 0.2, p = 0.5, q = 1.2, a = 1.45, \omega_0 = 0.894427, c_g = 2.23607, EE = 10$ ve $t = 10$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafikleri.

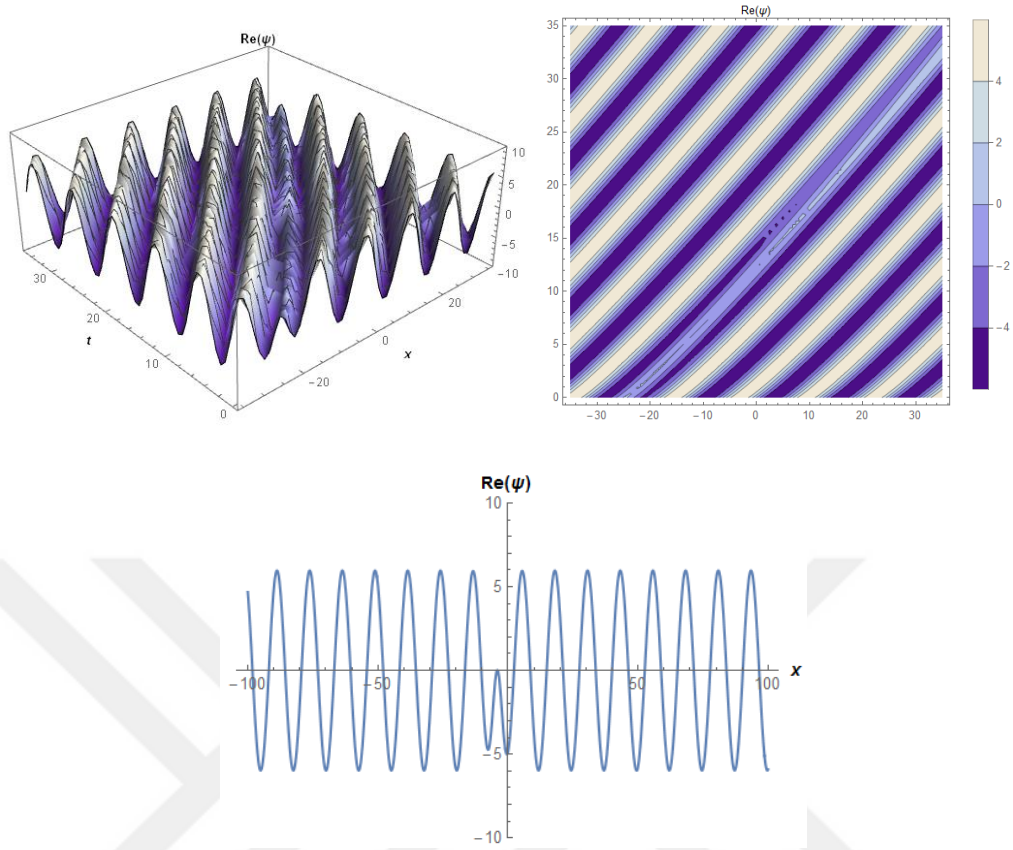
Durum 2: $A_0 = -\frac{1}{4}\lambda^2 A_2, A_1 = 0, B_1 = -\frac{i\sqrt{2}k_0^2 A_2}{a}, B_0 = \frac{ik_0^2 \lambda A_2}{a\sqrt{2}}, c_g = \frac{16k_0^2 q + 2p^2 \omega_0 + a^2 \omega_0 (\lambda^2 - 4\mu)}{16k_0^2 p},$

üst kısımdaki katsayılar kullanılarak aşağıdaki çözüm aileleri elde edilir.

Çözüm Ailesi 1: $\lambda^2 - 4\mu > 0$ olduğunda

$$U_{2,1}(x, t) = \Psi_{2,1}(x, t) e^{i\varphi(x,t)} = iae^{i\left(px - \frac{qt^\alpha}{\alpha}\right)} \times \left(\lambda^2 - 4\mu + \lambda\sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \operatorname{Tanh} \left[\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \left(E + ax - \frac{at^\alpha (16k_0^2 q - 2p^2 \omega_0 + a^2 \omega_0 (\lambda^2 - 4\mu))}{16k_0^2 p \alpha} \right) \right] \right), \quad (107)$$

elde edilir.



Şekil 11. Denklem (107)'nin $\alpha = 0.9, k_0 = 0.2, p = 0.5, q = 1.2, a = 0.45, \omega_0 = 0.894427, \lambda = 2.5, \mu = 1, E = 10$ ve $t = 10$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafikleri.

Çözüm Ailesi 2: $\lambda^2 - 4\mu < 0$ olduğunda

$$\Psi_{2,2}(x, t) = iae^{i\left(px - \frac{qt^\alpha}{\alpha}\right)} \times$$

$$\left(\lambda^2 - 4\mu - \lambda \sqrt{-\lambda^2 + 4\mu} \operatorname{Tanh} \left[\frac{\sqrt{-\lambda^2 + 4\mu}}{2} \left(EE + ax - \frac{at^\alpha (16k_0^2 q - 2p^2 \omega_0 + a^2 \omega_0 (\lambda^2 - 4\mu))}{16k_0^2 p} \right) \right] \right) /$$

$$2\sqrt{2}k_0^2 \left(\lambda - \sqrt{-\lambda^2 + 4\mu} \operatorname{Tanh} \left[\frac{\sqrt{-\lambda^2 + 4\mu}}{2} \left(EE + ax - \frac{at^\alpha (16k_0^2 q - 2p^2 \omega_0 + a^2 \omega_0 (\lambda^2 - 4\mu))}{16k_0^2 p} \right) \right] \right),$$

(108)

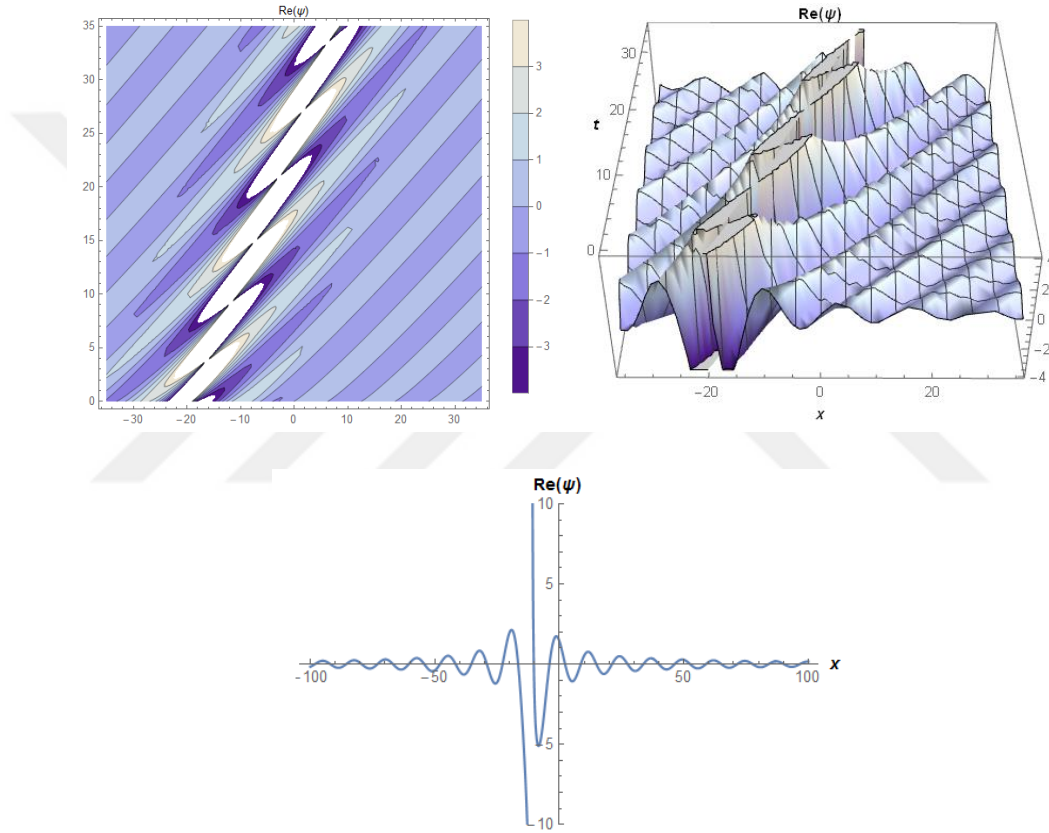
Çözüm Ailesi 3: $\mu = 0, \lambda \neq 0$, ve $\lambda^2 - 4\mu > 0$ olduğunda,

$$\Psi_{2,3}(x, t) = \frac{ia\lambda e^{i\left(px - \frac{qt^\alpha}{\alpha}\right)}}{2\sqrt{2}k_0^2} \left(1 + 2 \left(-1 + e^{\lambda \left(EE + ax - \frac{at^\alpha (16k_0^2 q - 2p^2 \omega_0 + a^2 \lambda^2 \omega_0)}{16\alpha k_0^2 p} \right)} \right)^{-1} \right). \quad (109)$$

Çözüm Ailesi 4: $\mu \neq 0, \lambda \neq 0$, ve $\lambda^2 - 4\mu = 0$ olduğunda,

$$U_{2,4}(x, t) = \Psi_{2,4}(x, t) e^{i\varphi(x,t)} = -\frac{4i\sqrt{2}\mu p a \alpha e^{i\left(px - \frac{qt^\alpha}{\alpha}\right)}}{8k_0^2 p \alpha (-1 + \sqrt{\mu}(E+ax)) - at^\alpha \sqrt{\mu}(8k_0^2 q - p^2 \omega_0)} \quad (110)$$

denklemi elde edilir.

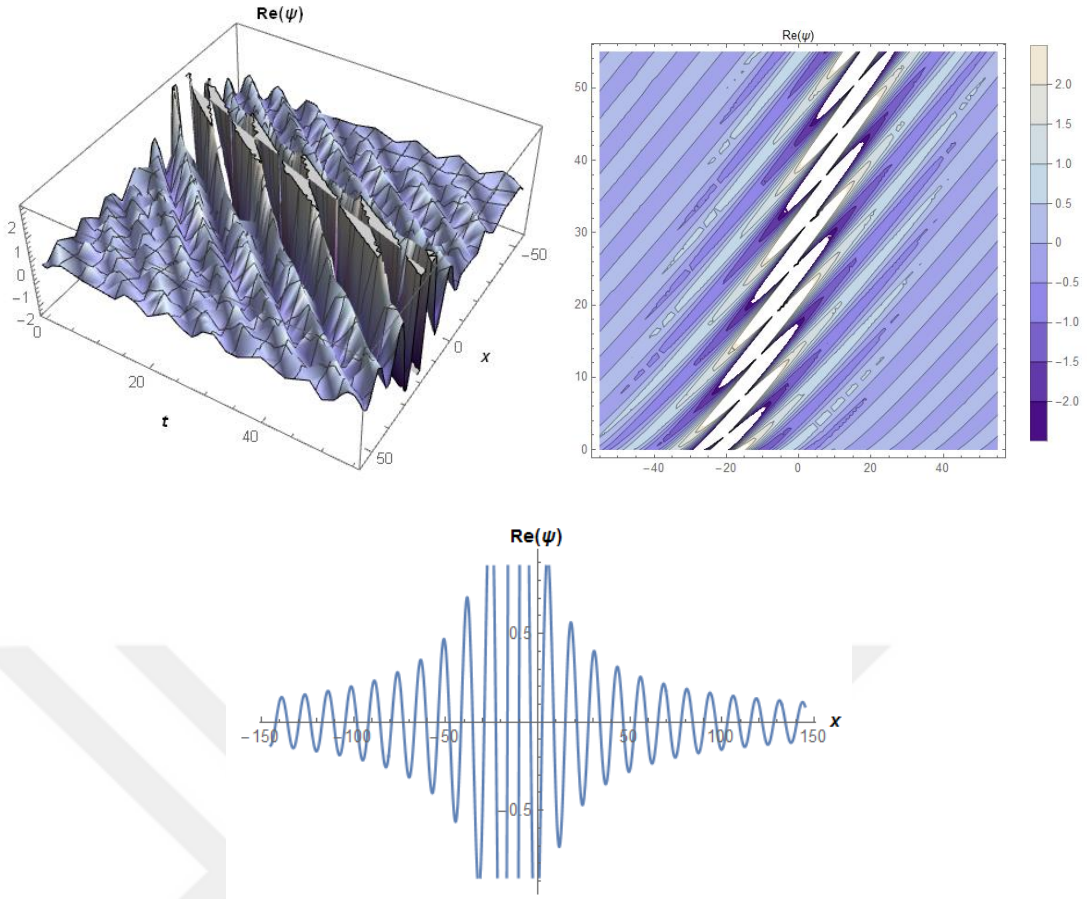


Şekil 12. Denklem (110)'un $\alpha = 0.9, k_0 = 0.2, p = 0.5, q = 1.2, a = 0.45, \omega_0 = 0.894427, \lambda = 2.5, \mu = 1, E = 10$ ve $t = 10$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafikleri.

Çözüm Ailesi 5: $\mu = 0, \lambda = 0$, ve $\lambda^2 - 4\mu = 0$ olduğunda

$$U_{2,5}(x, t) = \Psi_{2,5}(x, t) e^{i\varphi(x,t)} = \frac{4i\sqrt{2}p a \alpha e^{i\left(px - \frac{qt^\alpha}{\alpha}\right)}}{8k_0^2 p \alpha (E+ax) + at^\alpha (-8k_0^2 q + p^2 \omega_0)} \quad (111)$$

denklemi elde edilir.



Şekil 13. Denklem (111)'in $\alpha = 0.9, k_0 = 0.2, p = 0.5, q = 1.2, a = 0.45, \omega_0 = 0.894427, E = 10$ ve $t = 10$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafikleri.

Durum 3:

$$A_0 = \frac{\lambda A_1}{4}, A_2 = \frac{A_1}{\lambda}, B_0 = \frac{ik_0^2 A_1}{a\sqrt{2}}, B_1 = \frac{i\sqrt{2}k_0^2 A_1}{a\lambda}, p$$

$$= \frac{8c_g k_0^2 + \sqrt{64c_g^2 k_0^4 - 2\omega_0(16qk_0^2 + a^2\omega_0(\lambda^2 - 4\mu))}}{2\omega_0},$$

üst kısımdaki katsayılar kullanılarak aşağıdaki çözüm aileleri elde edildi.

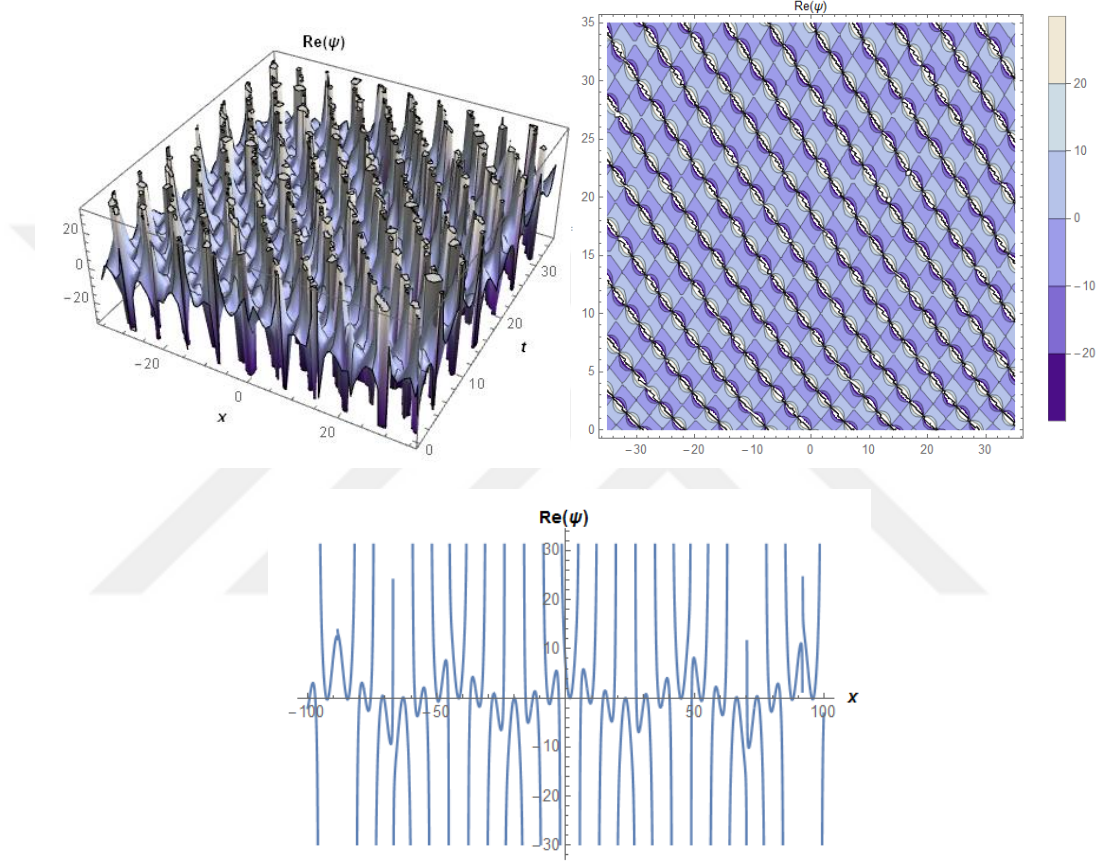
Çözüm Ailesi 1: $\lambda^2 - 4\mu > 0$ olduğunda,

$$\Psi_{3,1}(x, t) = -iae^{i\left(px - \frac{qt^\alpha}{\alpha}\right)} \times$$

$$\left(\lambda^2 - 4\mu + \lambda\sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \operatorname{Tanh} \left[\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{16k_0^2\alpha} \left(8k_0^2\alpha EE + 8a\alpha k_0^2 x \right. \right. \right.$$

$$\left. \left. \left. + at^\alpha \sqrt{64c_g^2 k_0^4 - 2\omega_0(16qk_0^2 + a^2\omega_0(\lambda^2 - 4\mu))} \right) \right] \right) /$$

$$2\sqrt{2}k_0^2 \left(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \operatorname{Tanh} \left[\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{16k_0^2\alpha} \left(8k_0^2\alpha EE + 8a\alpha k_0^2 x + at^\alpha \sqrt{64c_g^2 k_0^4 - 2\omega_0(16qk_0^2 + a^2\omega_0(\lambda^2 - 4\mu))} \right) \right] \right) \quad (112)$$



Şekil 14. Denklem (112)'nin $\alpha = 0.9, k_0 = 0.2, p = 0.5, q = 1.2, a = 0.45, \omega_0 = 0.894427, c_g = 2.23607, \lambda = 0.5, \mu = 1, EE = 10$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafikleri.

Çözüm Ailesi 2: $\lambda^2 - 4\mu < 0$ olduğunda

$$\Psi_{3,2}(x, t) = -iae^{i\left(px - \frac{qt^\alpha}{\alpha}\right)} \times \left(\lambda^2 - 4\mu - \lambda\sqrt{-\lambda^2 + 4\mu} \operatorname{Tanh} \left[\frac{\sqrt{-\lambda^2 + 4\mu}}{16k_0^2\alpha} \left(8k_0^2\alpha EE + 8a\alpha k_0^2 x + at^\alpha \sqrt{64c_g^2 k_0^4 - 2\omega_0(16qk_0^2 + a^2\omega_0(\lambda^2 - 4\mu))} \right) \right] \right) /$$

$$2\sqrt{2}k_0^2 \left(\lambda - \sqrt{-\lambda^2 + 4\mu} \operatorname{Tanh} \left[\frac{\sqrt{-\lambda^2 + 4\mu}}{16k_0^2\alpha} \left(8k_0^2\alpha EE + 8a\alpha k_0^2 x + at^\alpha \sqrt{64c_g^2 k_0^4 - 2\omega_0(16qk_0^2 + a^2\omega_0(\lambda^2 - 4\mu))} \right) \right] \right), \quad (113)$$

elde edilir

Çözüm Ailesi 3: $\mu = 0, \lambda \neq 0$ ve $\lambda^2 - 4\mu > 0$ olduğunda

$\Psi_{3,3}(x, t)$

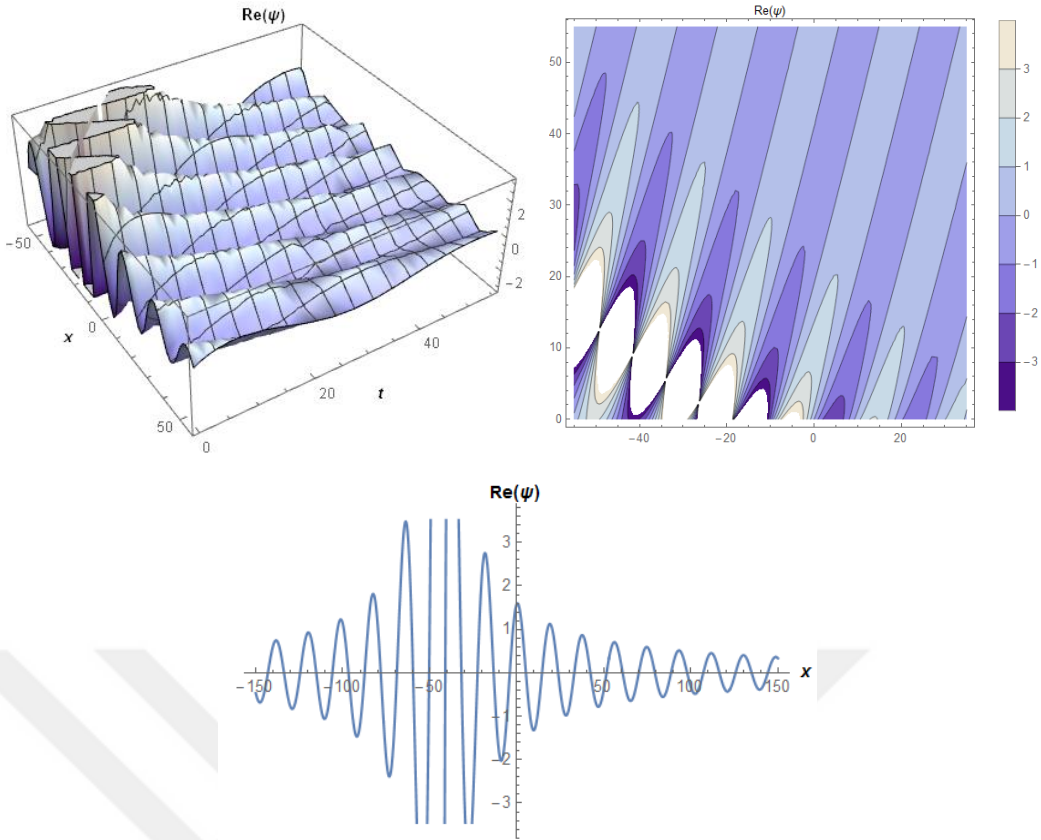
$$= -\frac{ia\lambda}{2\sqrt{2}k_0^2} e^{i\left(px - \frac{qt^\alpha}{\alpha}\right)} \operatorname{Coth} \left[\frac{\lambda \left(8k_0^2\alpha EE + 8a\alpha k_0^2 x + at^\alpha \sqrt{64c_g^2 k_0^4 - 2\omega_0(16qk_0^2 + a^2\lambda^2\omega_0)} \right)}{16k_0^2\alpha} \right], \quad (114)$$

elde edilir.

Çözüm Ailesi 4: $\mu \neq 0, \lambda \neq 0$ ve $\lambda^2 - 4\mu = 0$ olduğunda

$$\Psi_{3,4}(x, t) = \frac{i\sqrt{2\mu}a\alpha e^{i\left(\frac{x(8c_g k_0^2 + \sqrt{64c_g^2 k_0^4 - 32qk_0^2\omega_0}}{2\omega_0} - \frac{qt^\alpha}{\alpha})\right)}}{2k_0^2\alpha(-1 + \sqrt{\mu}(EE + ax)) + at^\alpha \sqrt{2\mu}(2c_g^2 k_0^4 - k_0^2 q\omega_0)}, \quad (115)$$

elde edilir.



Şekil 15. Denklem (115)'in $\alpha = 0.9, k_0 = 0.1, p = 0.5, q = 0.2, a = 0.45, \omega_0 = 0.774597, c_g = 3.87298, \mu = 1, EE = 10$ ve $t = 10$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafikleri.

Sine-Gordon Açılım Metodunun ve Modifiye Edilmiş Üstel $(-\Omega(\zeta))$ Açılım Fonksiyon Metodunun Wu-Zhang Sistemine Uygulanması

Bu bölümde, Wu-Zhang sisteminin yeni hiperbolik dalga çözümlerini analiz etmek amacıyla sine-Gordon açılım metodu ve modifiye edilmiş üstel $(-\Omega(\zeta))$ açılım fonksiyon metodu uygulanmıştır. Bu analiz sonucunda hiperbolik ve trigonometrik fonksiyon yapılarından oluşan bu lineer olmayan matematiksel modelin soliton dalga çözümleri elde edilmiştir. Bu kısımda SGEM ve MEFM metotlarının Wu-Zhang sistemine uygulanarak Wolfram Mathematica programı ile çözdüğümüzde bize verdiği dalga durumlarının iki ve üç boyutlu grafikleri sunulmaktadır.

Wu-Zhang sistemi aşağıdaki gibi verilmiştir:

$$u_t + uu_x + v_x = 0, \quad (116)$$

$$v_t + (uv)_x + \frac{1}{3}u_{xxx} = 0. \quad (117)$$

Denklem sisteminde v suyun yüksekliği, u ise suyun yüzey hızıdır.

Şimdi, aşağıdaki dalga dönüşümünü göz önüne alırsak

$$u = u(\eta), v = v(\eta), \eta = r(x - ct) \quad (118)$$

dalga dönüşümü denklem (118) şeklindedir. Denklemler (116) ve (117)'de gerekli olan türev terimleri dalga dönüşümünden elde edilir ve sırasıyla yerine konursa aşağıdaki denklemler elde edilir:

$$-cru' + ruu' + rv' = 0 \quad (119)$$

ve

$$-crv' + rvu' + ruv' + \frac{1}{3}r^3u''' = 0. \quad (120)$$

Denklem (119)'un integrali alınır

$$-cu + \frac{1}{2}u^2 + v = 0 \quad (121)$$

elde edilir. Bu taktirde denklem (121) sadeleştirilirse denklem (122) bulunur.

$$v' = cu' - uu'. \quad (122)$$

Denklem (122), denklem (120)'de yerine konulursa aşağıdaki denklem bulunur.

$$2r^2u'' + 9cu^2 - 3u^3 - 6c^2u = 0. \quad (123)$$

Sine-Gordon Açılım Metodunun Wu-Zhang Sistemine Uygulanması

Bu bölümde Wu-Zhang sistemine SGEM uygulanarak soliton dalga çözümleri elde edilmiştir.

Denklem (123) de ki en yüksek derecede lineer olmayan terime ve en yüksek mertebedeki türeve denge ilkesi uygulanırsa bunun sonucunda $n = 1$ elde edilir.

$n = 1$ ifadesi denklem (76)'da yerine yazılırsa

$$u(w) = B_1 \sin(w) + A_1 \cos(w) + A_0 \quad (124)$$

şeklindedir. Denklem (124) ve onun ikinci türevinin denklem (72) ile birlikte denklem (123)'de yazılması trigonometrik fonksiyonların kuvvetinde bir denklem verir. Aynı güce sahip trigonometrik fonksiyonların katsayılarının toplamlarını sıfıra eşitleyerek bir dizi cebirsel denklem sistemi elde edilir. Cebirsel denklem kümesi, dahil edilen parametrelerin değerlerini elde etmek için basitleştirilir. Parametrelerin değerleri daha sonra denklem (87)'nin çözümlerini elde etmek için m 'nin sabit değeri ile denklem (75a) ve (75b)'de yerine konur (Yazgan *et al.* 2022).

Durum 1: $A_0 = -\frac{k}{\sqrt{3}}, A_1 = -\frac{k}{\sqrt{3}}, B_1 = \frac{ik}{\sqrt{3}}, c = -\frac{k}{\sqrt{3}}$, olduğunda aşağıdaki bileşik topolojik olmayan ve topolojik kink tipi solitona sahiptir.

$$u_7(x, t) = \frac{k(-1+i\text{Sech}[k(x+\frac{tu}{\sqrt{3}})]+\text{Tanh}[k(x+\frac{tu}{\sqrt{3}})])}{\sqrt{3}},$$

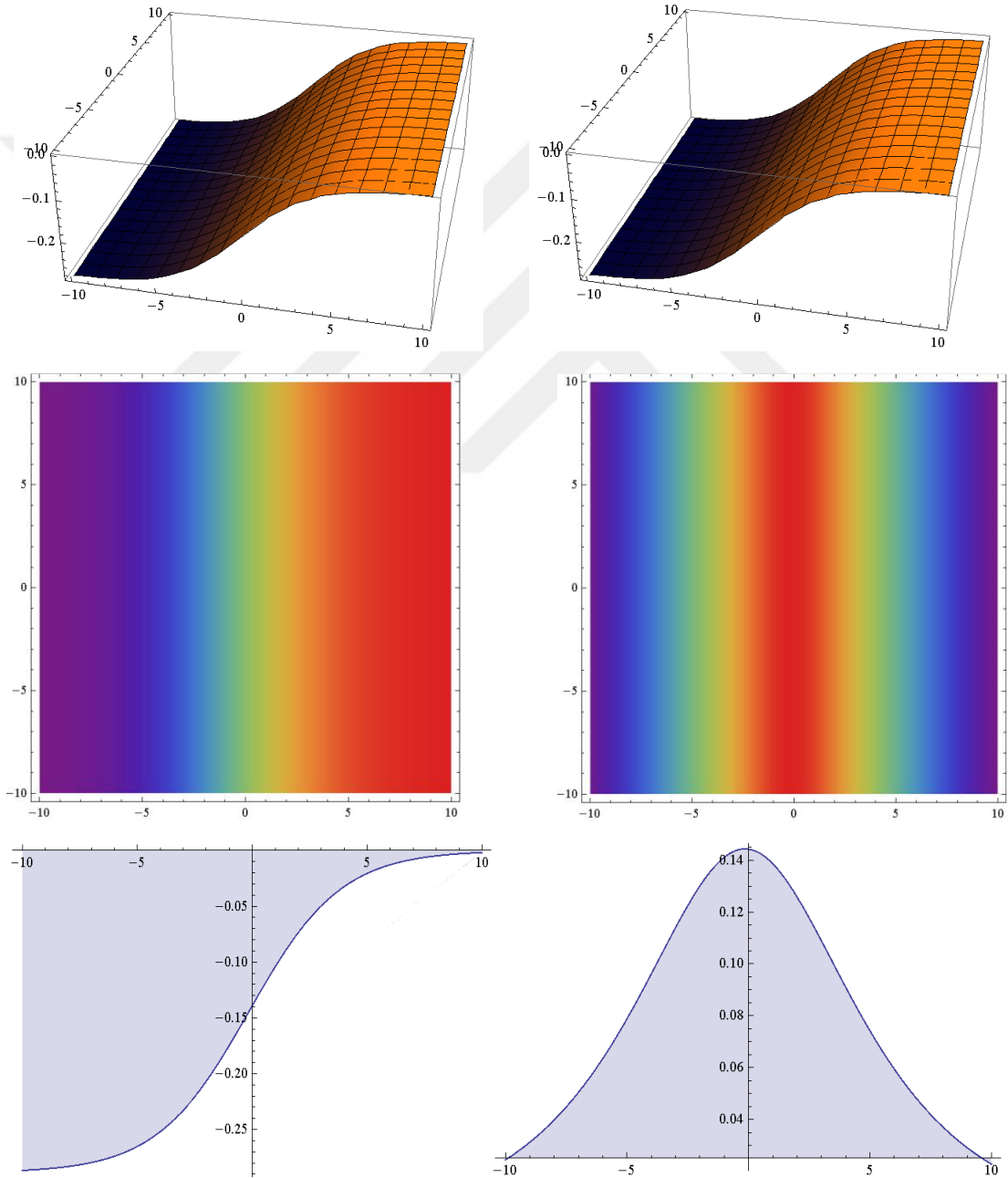
$$u_7(x, t) = \frac{k(-1+i\text{Sech}[k(x+\frac{tu}{\sqrt{3}})]+\text{Tanh}[k(x+\frac{tu}{\sqrt{3}})])}{\sqrt{3}},$$
(125)

ve

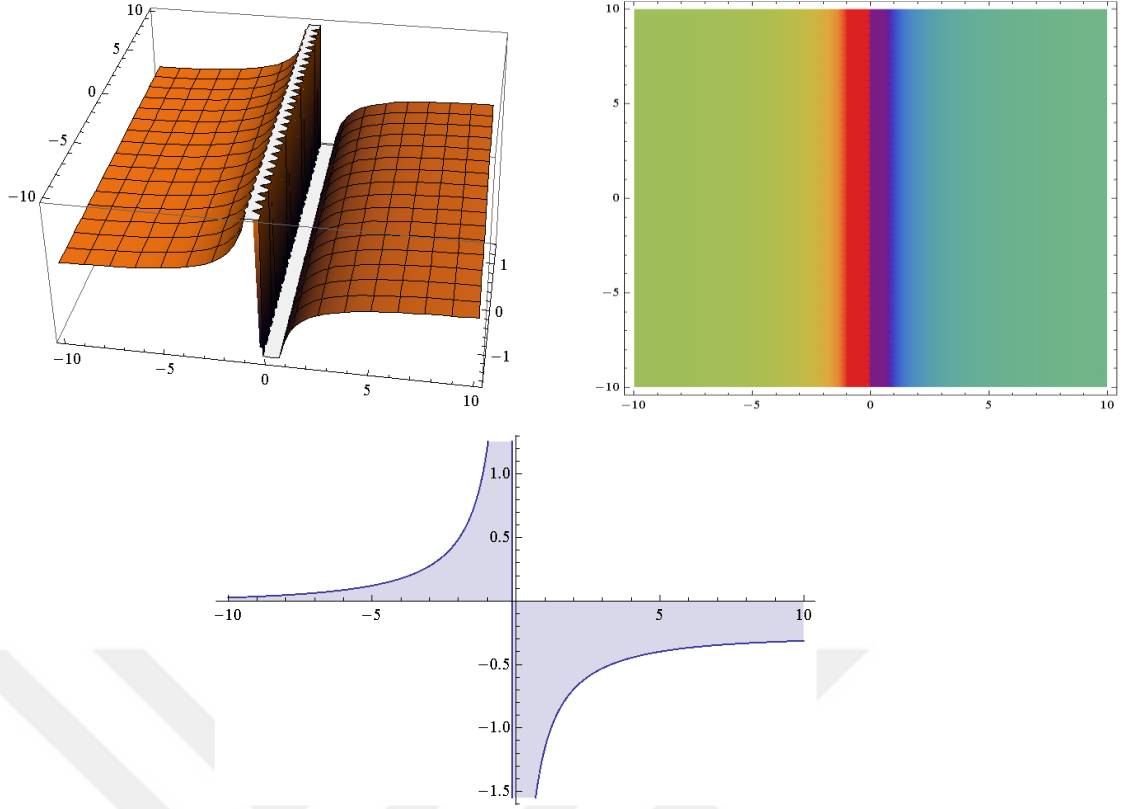
$$u_8(x, t) = -\frac{k(-1+\text{Coth}[k(x+\frac{tu}{\sqrt{3}})]+\text{Csch}[k(x+\frac{tu}{\sqrt{3}})])}{\sqrt{3}},$$

$$v_8(x, t) = -\frac{1}{6}k^2\text{Csch}\left[\frac{1}{2}k\left(x+\frac{tk}{\sqrt{3}}\right)\right]^2$$
(126)

yukarıdaki tekil çözümleri elde edilir.



Şekil 16. Denklem (125)'in sanal ve gerçel kısımlarının sırasıyla $k = 1$ ve $t = 1$ de ki üç boyutlu, yoğunluk ve iki boyutlu grafik yüzeyleri.

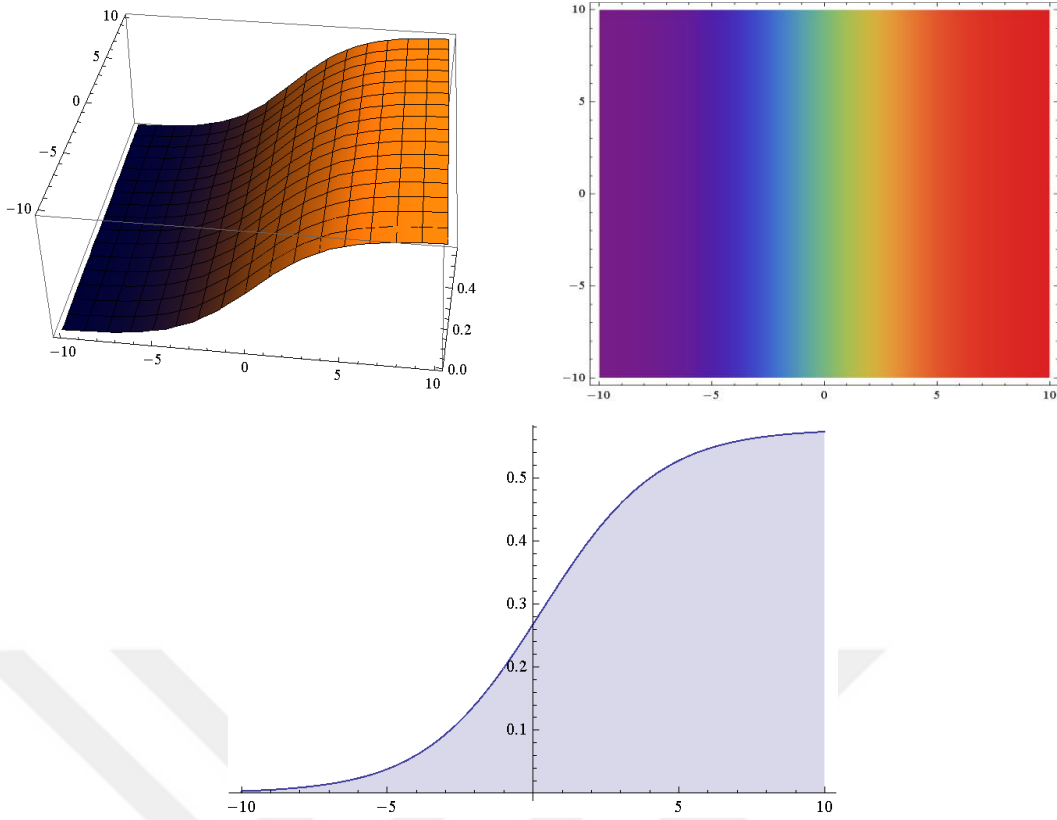


Şekil 17. Denklem (126)'nın $k = 1$ ve $t = 1$ de ki üç boyutlu, yoğunluk ve iki boyutlu grafikleri.

Durum 2: $A_0 = \frac{2k}{\sqrt{3}}, A_1 = -\frac{2k}{\sqrt{3}}, B_1 = 0, c = \frac{2k}{\sqrt{3}}$, olduğunda aşağıdaki topolojik kink-type çözümü

$$\begin{aligned}
 u_9(x, t) &= \frac{2k}{\sqrt{3}} \left(1 + \text{Tanh} \left[k \left(x - \frac{2tu}{\sqrt{3}} \right) \right] \right), \\
 v_9(x, t) &= \frac{2}{3} k^2 \text{Sech} \left[k \left(x - \frac{2tk}{\sqrt{3}} \right) \right]^2
 \end{aligned} \tag{127}$$

elde edilir.



Şekil 18. Denklem (127)'nin $k = 1$ ve $t = 1$ de ki üç boyutlu, yoğunluk ve iki boyutlu grafikleri.

Modifiye Edilmiş Üstel $(-\Omega(\zeta))$ Açılım Fonksiyon Metodunun Wu-Zhang Sistemine Uygulanması

Bu bölümde, Wu-Zhang sisteminin soliton dalga çözümlerini elde etmek için MEFM kullanılmıştır.

Denklem (123) de ki en yüksek güçteki doğrusal olmayan terimi ve en yüksek mertebedeki türevi dengelemek, $n = m + 1$ ilişkisini verir. $m = 1$ ve $n = 2$ olduğunu varsayalım. m ve n parametreleri için denklem (80) aşağıdaki gibidir:

$$u(\zeta) = \frac{A_0 + A_1 e^{-\vartheta} + A_2 e^{-2\vartheta}}{B_0 + B_1 e^{-\vartheta}}. \quad (128)$$

Denklem (123) için gerekli olan türev terimi denklem (128)'den elde edildiğinde, $e^{-\vartheta}$ 'nin polinom denklemi elde edilir. $e^{-\vartheta}$ 'nin katsayılarından oluşan cebirsel denklem sistemi, aşağıdaki koşulları elde etmek için Wolfram Mathematica programı kullanarak çözülür (Yazgan *et al.* 2022).

Durum 1:

$$A_0 = cB_0 - \frac{\sqrt{c^2 \lambda^2 (\lambda^2 - 4k) B_0^2}}{\lambda^2 - 4k},$$

$$A_1 = \frac{-\lambda\sqrt{c^2\lambda^2(\lambda^2 - 4k)B_0^2}B_1 + B_0\left(-2\sqrt{c^2\lambda^2(\lambda^2 - 4k)B_0^2} + c\lambda(\lambda^2 - 4k)B_1\right)}{\lambda(\lambda^2 - 4k)B_0},$$

$$A_2 = -\frac{2c^2\lambda B_0 B_1}{\sqrt{c^2\lambda^2(\lambda^2 - 4k)B_0^2}}, s = \frac{\sqrt{3}c}{\sqrt{\lambda^2 - 4k}}$$

Katsayılar, denklem (128)'de yerine konulursa aşağıdaki çözümler elde edilir.

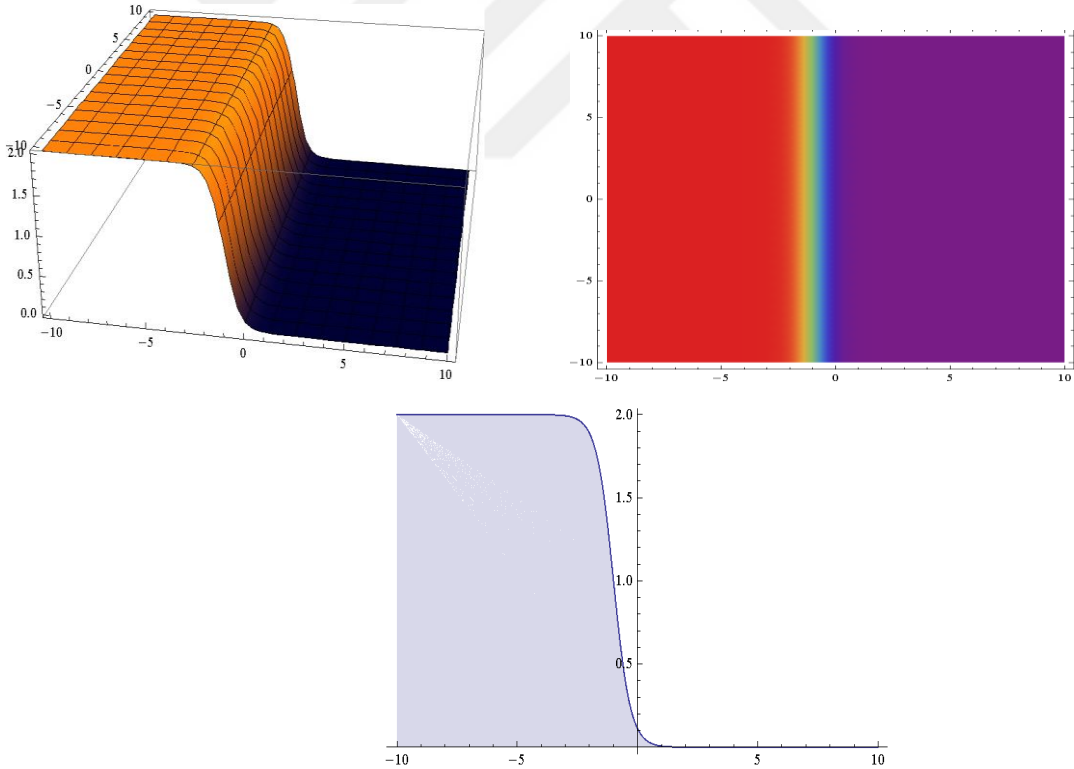
Çözüm ailesi 1: $k \neq 0$, $\lambda^2 - 4k > 0$ olduğunda

$$u_1(x, t) = \frac{c\left(\sqrt{c^2\lambda^2(\lambda^2 - 4k)B_0^2}(\lambda + \tau) - c\lambda B_0(\lambda^2 - 4k + \lambda\tau)\right)}{\sqrt{c^2\lambda^2(\lambda^2 - 4k)B_0^2}(\lambda + \tau)},$$

(129)

$$v_1(x, t) = \frac{(4c^2k)}{\left((1 + \text{Cosh}[\sqrt{3}c\eta + E\sqrt{\lambda^2 - 4k}])(\lambda + \tau)^2\right)}.$$

Burada, $\tau = \left(\sqrt{\lambda^2 - 4k} \text{Tanh}\left[\frac{1}{2}\sqrt{3}c\eta(E + \sqrt{\lambda^2 - 4k})\right]\right)$.



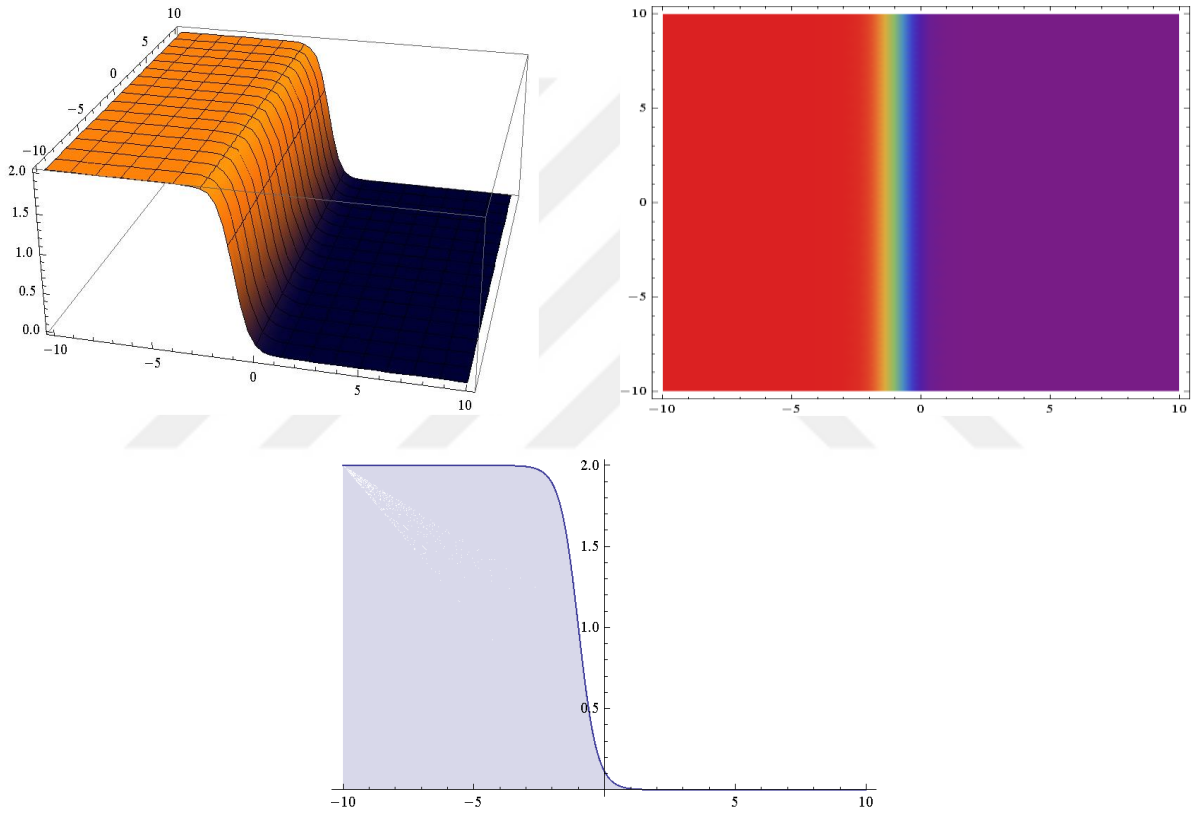
Şekil 19. Denklem (129)'un $k = 1$, $\lambda = 3$, $E = 0.75$, $c = 1$, $B_0 = 0.35$ ve $t = 1$ de ki üç boyutlu, yoğunluk ve iki boyutlu grafikleri.

Çözüm ailesi 2: $k \neq 0$, $\lambda^2 - 4k < 0$ olduğunda

$$u_2(x, t) = \frac{c}{c\lambda B_0 \kappa} (\lambda + \kappa \gamma)^{-1} (c\lambda B_0 \kappa (\lambda + \kappa \gamma) - c\lambda B_0 (\lambda^2 - 4k + \lambda \kappa \gamma)), \quad (130)$$

$$v_2(x, t) = 4kc^2 \left((1 + \text{Cosh}[\sqrt{3}c\eta + E\kappa]) \left(\lambda + \kappa \text{Tanh} \left[\frac{1}{2} (\sqrt{3}c\eta + E\kappa) \right] \right) \right)^{-2}.$$

Burada, $\left(\kappa = \sqrt{\lambda^2 - 4k}, \gamma = \text{Tanh} \left[\frac{\kappa}{2} (E + \eta) \right] \right)$.

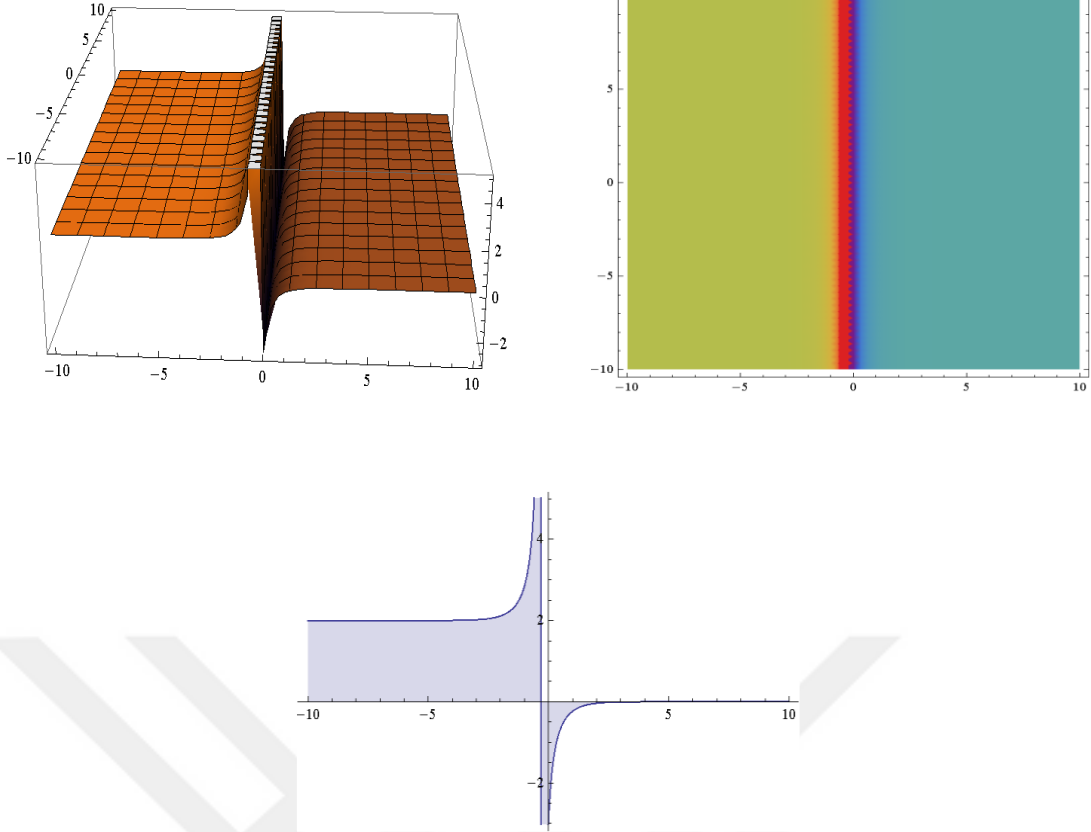


Şekil 20. Denklem (130)'un $k = 1$, $\lambda = 3$, $c = 1$, $B_0 = 0.35$, $E = 0.75$ ve $t = 1$ de ki üç boyutlu, yoğunluk ve iki boyutlu grafikleri.

Çözüm ailesi 3: $k = 0$, $\lambda \neq 0$ ve $\lambda^2 - 4k > 0$ olduğunda

$$u_3(x, t) = c - \frac{\text{Coth} \left[\frac{1}{2} \lambda \left(E + \frac{\sqrt{3}c\eta}{\sqrt{\lambda^2}} \right) \right] \sqrt{c^2 \lambda^4 B_0^2}}{\lambda^2 B_0}, \quad (131)$$

$$v_3(x, t) = -\frac{c^2}{-1 + \text{Cosh} \left[\lambda \left(E + \frac{\sqrt{3}c\eta}{\sqrt{\lambda^2}} \right) \right]}.$$



Şekil 21. Denklem (131)'in $k = 1, \lambda = 3, c = 1, E = 0.75, B_0 = 0.35$ ve $t = 1$ de ki üç boyutlu, yoğunluk ve iki boyutlu grafikleri.

Çözüm fonksiyonu u , $\lambda^2 - 4k = 0$ teriminden dolayı tanımsız olarak hesaplanıldığı için çözüm ailesi 4 ve 5'in durumlarına göre çözümleri elde edilemedi.

Durum 2:

$$A_0 = -\sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{s^2(\lambda^2 - 2k)B_0^2 + \sqrt{s^4\lambda^2(\lambda^2 - 4k)B_0^4}},$$

$$A_1 = \frac{\sqrt{s^2(\lambda^2 - 2k)B_0^2 + \sqrt{s^4\lambda^2(\lambda^2 - 4k)B_0^4}} \left(\sqrt{s^4\lambda^2(\lambda^2 - 4k)B_0^4} - s^2\lambda B_0(\lambda B_0 + 2kB_1) \right)}{\sqrt{6}s^2\lambda kB_0^2},$$

$$A_2 = \frac{\left(-s^2\lambda^2 B_0^2 + \sqrt{s^4\lambda^2(\lambda^2 - 4k)B_0^4} \right) \sqrt{s^2(\lambda^2 - 2k)B_0^2 + \sqrt{s^4\lambda^2(\lambda^2 - 4k)B_0^4}} B_1}{\sqrt{6}s^2\lambda kB_0^3},$$

$$c = \frac{\left(s^2(\lambda^2 - 4k)B_0^2 - \sqrt{s^4\lambda^2(\lambda^2 - 4k)B_0^4} \right) \sqrt{s^2(\lambda^2 - 2k)B_0^2 + \sqrt{s^4\lambda^2(\lambda^2 - 4k)B_0^4}}}{2\sqrt{6}s^2\lambda kB_0^3}.$$

Bu kat sayılar denklem (128)'de yerine konulduktan sonra aşağıdaki çözümler bulunur.

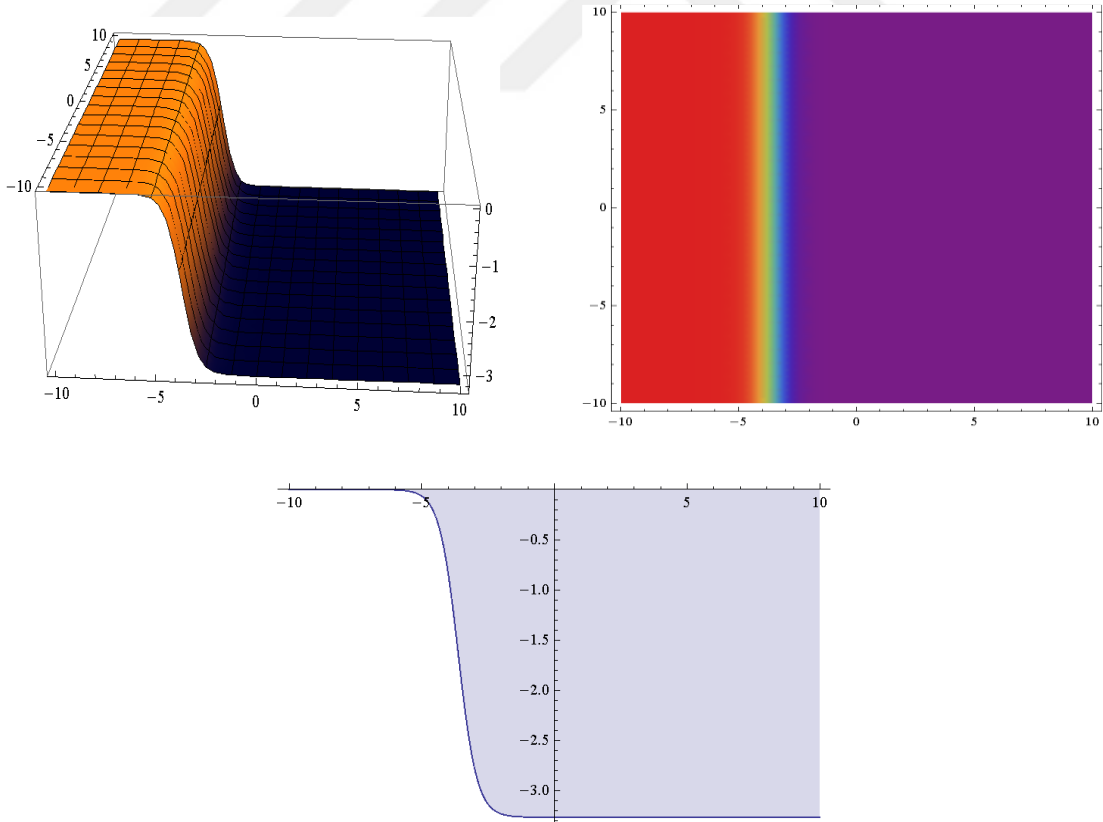
Çözüm ailesi 1: $k \neq 0, \lambda^2 - 4k > 0$ olduğunda

$$u_4(x, t) = - \frac{\sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{s^2(\lambda^2 - 2k)B_0^2 + \sqrt{s^4\lambda^2(\lambda^2 - 4k)B_0^4}} \left(\sqrt{s^4\lambda^2(\lambda^2 - 4k)B_0^4} + s^2\lambda\sqrt{\lambda^2 - 4k}B_0^2\omega \right)}{s^2\lambda B_0^3(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4k}\omega)}. \quad (132)$$

Burada,
$$\left(\omega = \left(\operatorname{Tanh} \left[\frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4k} \left(E + sx + \frac{t(-s^2(\lambda^2 - 4k)B_0^2 + \kappa s)}{\sqrt{s^2(\lambda^2 - 2k)B_0^2 + \kappa s}} \right) \right] \right) \right)$$

$$v_4(x, t) = \frac{\left(2s^2(\lambda^2 - 4k)k \operatorname{Sech} \left[\frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4k} \left(E + sx + \frac{\tau}{2\sqrt{6}skB_0^3} \right) \right]^2 \right)}{\left(3 \left(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4k} \operatorname{Tanh} \left[\frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4k} \left(E + sx + \frac{1}{(2\sqrt{6}skB_0^3)\tau} \right) \right] \right) \right)^2}.$$

Burada, $\tau = \left(t(-s^2(\lambda^2 - 4k)B_0^2 + \kappa) \sqrt{s^2(\lambda^2 - 2k)B_0^2 + \kappa}, \kappa = s\lambda B_0^2 \sqrt{\lambda^2 - 4k} \right).$



Şekil 22. Denklem (132)'nin $k = 1, c = 1, \lambda = 3, E = 0.75, s = 1$ ve $B_0 = 0.35, t = 1$ de ki üç boyutlu, yoğunluk ve iki boyutlu grafikleri.

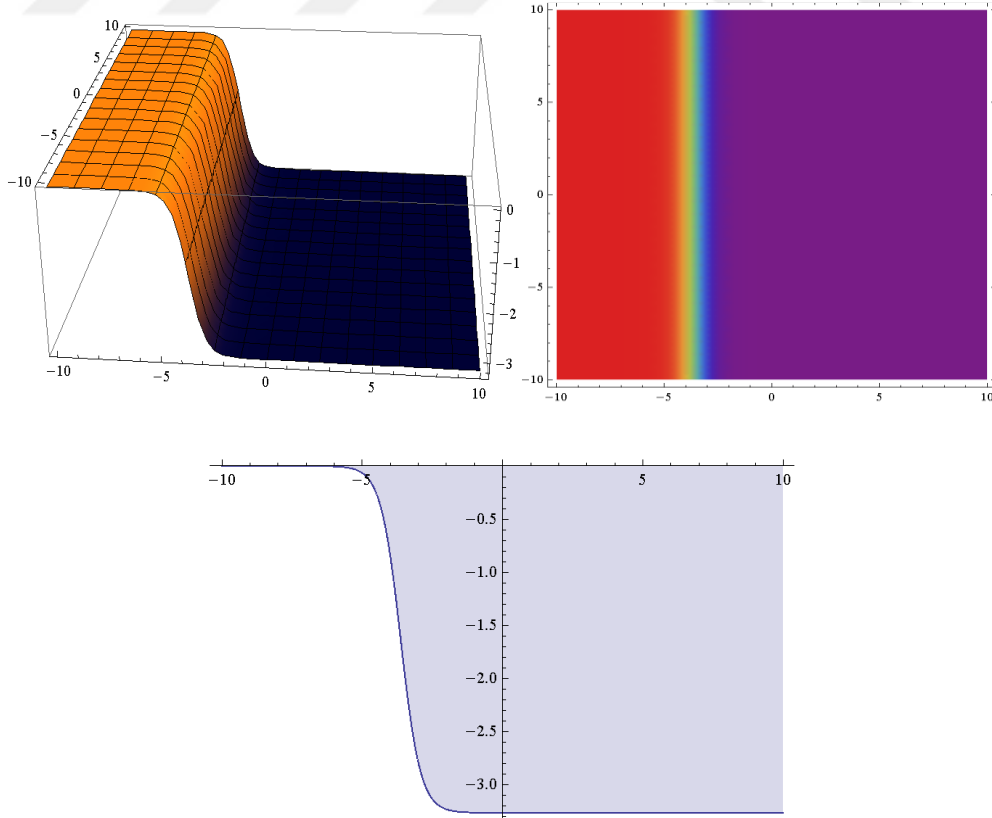
Çözüm ailesi 2: $k \neq 0$, $\lambda^2 - 4k < 0$ olduğunda

$$u_5(x, t) = - \frac{\sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{s^2(\lambda^2 - 2k)B_0^2 + \sqrt{s^4\lambda^2(\lambda^2 - 4k)B_0^4}} \left(\sqrt{s^4\lambda^2(\lambda^2 - 4k)B_0^4} + s^2\lambda\sqrt{\lambda^2 - 4k}B_0^2\omega \right)}{s^2\lambda B_0^3(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4k}\omega)}. \quad (133)$$

Burada, $\omega = \left(\text{Tanh} \left[\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2 - 4k} \left(E + sx + \frac{1}{(2\sqrt{6}skB_0^3)t \left(-s^2(\lambda^2 - 4k)B_0^2 + \sqrt{s^4\lambda^2(\lambda^2 - 4k)B_0^4} \right)} \right) \right] \right)$.

$$v_5(x, t) = \frac{\left(2s^2(\lambda^2 - 4k)k \text{Sech} \left[\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2 - 4k} \left(E + sx + \frac{\tau}{2\sqrt{6}skB_0^3} \right) \right] \right)^2}{\left(3 \left(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4k} \text{Tanh} \left[\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2 - 4k} \left(E + sx + \frac{1}{(2\sqrt{6}skB_0^3)\tau} \right) \right] \right) \right)^2}.$$

Burada, $\tau = \left(t \left(-s^2(\lambda^2 - 4k)B_0^2 + \sqrt{s^4\lambda^2(\lambda^2 - 4k)B_0^4} \right) \sqrt{s^2(\lambda^2 - 2k)B_0^2 + \sqrt{s^4\lambda^2(\lambda^2 - 4k)B_0^4}} \right)$.



Şekil 23. Denklem (133)'ün $k = 1$, $c = 1$, $\lambda = 3$, $s = 1$, $B_0 = 0.35$, $E = 0.75$ ve $t = 1$ de ki üç boyutlu, yoğunluk ve iki boyutlu grafikleri.

Çözüm ailesi 3: $k = 0$, $\lambda \neq 0$ ve $\lambda^2 - 4k > 0$ olduğunda

$$u_6(x, t) = - \frac{\sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{s^2(\lambda^2 - 2k)B_0^2 + \sqrt{s^4\lambda^2(\lambda^2 - 4k)B_0^4}} \left(\frac{\sqrt{s^4\lambda^2(\lambda^2 - 4k)B_0^4 + s^2\lambda\sqrt{\lambda^2 - 4k}B_0^2\omega}}{s^2\lambda B_0^3(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4k}\omega)} \right)}{s^2\lambda B_0^3(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4k}\omega)}. \quad (134)$$

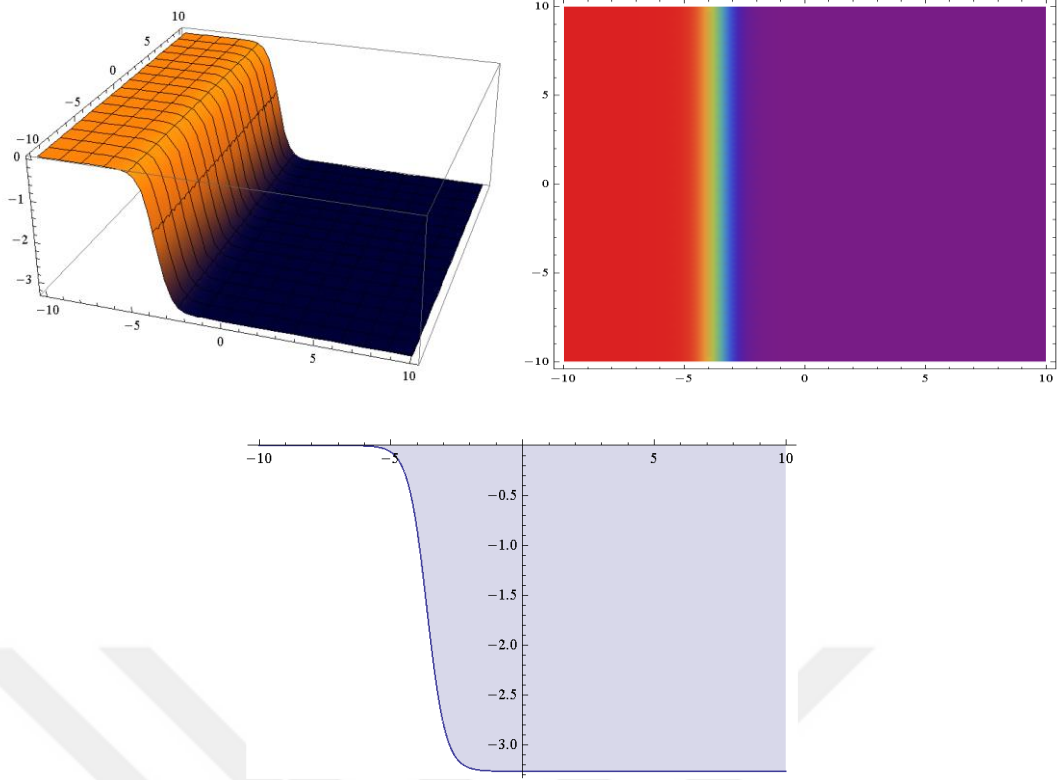
Burada,

$$\omega = \left(\operatorname{Tanh} \left[\frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4k} \left(E + sx + \frac{1}{(2\sqrt{6}skB_0^3)t \left(-s^2(\lambda^2 - 4k)B_0^2 + \sqrt{s^4\lambda^2(\lambda^2 - 4k)B_0^4} \right)} \sqrt{s^2(\lambda^2 - 2k)B_0^2 + \sqrt{s^4\lambda^2(\lambda^2 - 4k)B_0^4}} \right) \right] \right)$$

$$v_6(x, t) = \frac{\left(2s^2(\lambda^2 - 4k)\mu \operatorname{Sech} \left[\frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4k} \left(E + sx + \frac{\tau}{2\sqrt{6}skB_0^3} \right) \right]^2 \right)}{\left(3 \left(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4k} \operatorname{Tanh} \left[\frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4k} \left(E + sx + \frac{1}{(2\sqrt{6}skB_0^3)\tau} \right) \right] \right) \right)^2}$$

Burada, $\tau = \left(t \left(-s^2(\lambda^2 - 4k)B_0^2 + \right. \right.$

$$\left. \left. + \sqrt{s^4\lambda^2(\lambda^2 - 4k)B_0^4} \right) \sqrt{s^2(\lambda^2 - 2k)B_0^2 + \sqrt{s^4\lambda^2(\lambda^2 - 4k)B_0^4}} \right).$$



Şekil 24. Denklem (134)'ün $k = 1, c = 1, \lambda = 3, s = 1, B_0 = 0.35, E = 0.75$ ve $t = 1$ de ki üç boyutlu, yoğunluk ve iki boyutlu grafikleri.

TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışma, lineer olmayan diferansiyel denklemlerin matematiksel model türleri için farklı soliton dalga çözümleri oluşturmaya, adi diferansiyel denklemlere indirgenmiş formlarıyla yaklaşık doğru sayısal çözümleri hesaplamaya odaklanmaktadır. Diğer taraftan birden fazla tipte dalga çözümü elde etmek için SGEM ve MEFM metotları uygulanarak bu araştırmada kullanılan yöntemler basitleştirilmiştir. SGEM ve MEFM kullanılarak lineer olmayan Schrödinger ve Wu-Zhang denklemleri için bulunan çözümler hiperbolik, trigonometrik, karmaşık ve rasyonel fonksiyon biçimindedir. Hiperbolik fonksiyonlar çeşitli fiziksel anlamları temsil eder. Örneğin, bir silindirin yer çekimi potansiyelinden hiperbolik sinüs meydana gelir ve hiperbolik kosinüs fonksiyonu asılı bir kablonun tasarımıdır. Hiperbolik tanjant özel göreliliğin hesaplanmasında ve hızında önemli rol oynamaktadır. Hiperbolik sekant, laminar bir jetin profilinden gelir ayrıca hiperbolik kotanjant ise manyetik polarizasyon için Langevin fonksiyonlarında ortaya çıkar. Bu çalışmada elde edilen bulgular yani çözümler göz önüne alındığında bu çözümlerin hiperbolik fonksiyonların fiziksel özellikleriyle ilişkili olduğu tahmin edilmektedir. Kısacası çözümlenen bu hiperbolik fonksiyonlar her daim hayatın içinde olan, bilimin ilerlemesine katkı sağlayan fonksiyonlardır. Çalışmanın bu kısmına kadar lineer olmayan evrim denklemlerinin adi diferansiyel denklemlere indirgenerek elde edilen hiperbolik fonksiyonların fiziksel anlamları yorumlandı. Farklı türdeki lineer olmayan evrim denklemlerinin kesin çözümlerine ulaşmak için iyi bilinen yaklaşımlardan bazıları SGEM ve MEFM'dir. Bu metotlar sayesinde NLSE ve Wu-Zhang denklemlerinin analizi ile bazı soliton, tekil soliton ve tekil periyodik dalga çözümlerinin trigonometrik ve hiperbolik fonksiyon yapıları rapor edildi.

Sine-Gordon açılım yöntemi ve modifiye edilmiş üstel açılım $(-\Omega(\zeta))$ fonksiyon metodu yeni soliton denklemleri kullanılarak geliştirilen çeşitli analitik teknikler ve yeni sunulan basitleştirilmiş yaklaşım ile farklılıkları anlatıldı. Metotların yapısı ve çözüm adımlarındaki detaylar ifade edildi. Kullanılan metotlar lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin adi diferansiyel denklemlere dönüştürülerek lineer olmayan sembolik cebirsel denklem sistemi haline geldiği gözlemlendi. Bu cebirsel denklem sistemlerinden katsayılar elde edildi ve daha önce literatürde yer almayan yeni trigonometrik, hiperbolik ve rasyonel çözüm fonksiyonlarına ulaşıldı. Parametrelerin uygun değerlerinin seçimi altında, bu çalışmada rapor edilen çözüm fonksiyonlarının fiziksel davranışları çizilen iki ve üç boyutlu grafikleride sunulmuştur.

Grafikler elde edilen çözüm fonksiyonlarının periyodik özelliklere sahip olduğunu göstermektedir. Bu tür özelliklere sahip fonksiyonların elde edilmesinde fayda vardır. Çünkü fiziksel olarak periyodik fonksiyon özelliklerine sahip denklemleri yorumlar. Ayrıca hareket modelinin istenilen aralıkta olmasını sağlayarak kolayca yorumlanmasına yol açar. Raporlanan sonuçlar, her iki yöntemin de lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin çözümü için oldukça verimli ve uygun matematiksel araçlar olduğunu göstermektedir. Bu nedenle, sunulan soliton çözümlerinin sayısal olarak daha fazla hesaplama kolaylığı sağlamanın özellikle iletişim modelleri, hidrodinamik, lineer olmayan akustik olaylarda, lineer olmayan dispersif dalgalarda, plazmalarda, optiklerde, su dalgalarında, plazma fiziği, teorik fizik ve mühendislik gibi birçok alanda faydalı olabileceğini düşünüyoruz. Bu tez çalışmasında, sine-Gordon açılım metodu ve modifiye edilmiş üstel açılım fonksiyon metodunun lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin literatürde bulunan çözümlerinin bazı yeni yürüyen dalga çözümlerini elde etmek için kullanılan etkili bir yaklaşım olduğu gösterilmiştir.

Bu çözümlerin adi diferansiyel denklemlere indirgenmiş formlarıyla çözümlere gidiş şekli detaylı bir şekilde yorumlanmıştır. Ayrıca metotlarda kullanılan dengeleme terimi sayesinde oldukça basit bir forma indirgenerek çözmek kolaylık sağlamıştır. Bu gezgin dalga çözümleri, çeşitli fiziksel ve matematiksel sistemlerin varlığına, mühendislik alanına, sayısal simülasyonlara ve diğer bilimsel disiplinlerin pratik uygulamasına rehberlik etmiştir. Kullanılan yöntemler göz önüne alındığında diğer birçok lineer olmayan denkleme veya denklem sistemlerine uygulamanın mümkün olduğu görüldü. Ayrıca lineer olmayan bu denklemlerin günümüzde daha önemli rol oynadığı ve birçok problemin açıklığa kavuşturduğu göz önüne alındığında bu denklemleri çözen yöntemlerin ve bilgisayar programlarının değeri daha fazla anlam kazanmıştır.

KAYNAKLAR

- Ablowitz, M. J. and Clarkson, P.A., 1991. Soliton nonlinear evolution equations and inverse scattering. Cambridge University Press, 149, New York.
- Ablowitz, M. J. and Musslimani, Z. H., 2016. Inverse scattering transform for the integrable nonlocal nonlinear Schrödinger equation. *Nonlinearity*, 29(3), 915-946.
- Akhmediev, N. N. And Ankiewicz, A., 1997. Solitons, non-linear pulses and beams. *Optical and Quantum Electronics*.
- Akbar, M.A. and Ali, N.H.M., 2012. New Solitary and Periodic Solutions of Nonlinear Evolution Equation by Exp-function Method. *World Appl. Sci. J.*, 17(12), 1603-1610.
- Akbar, M.A., Ali, N.H.M. and Zayed, E.M.E., 2012. A generalized and improved (G'/G) – expansion method for nonlinear evolution equations. *Mathematical Problems in Engineering*, 2012 (1), 459879.
- Alam, M.N., Akbar, M.A. and Khan, K., 2013. Some new exact traveling wave solutions to the (2+1)-dimensional breaking soliton equation. *World Applied Sciences Journal*, 25(3), 500-523.
- Alam, M.N., Akbar, M.A. and Roshid, H.O., 2013. Study of nonlinear evolution equations to construct traveling wave solutions via the new approach of generalized (G'/G) – expansion method. *Mathematics and Statistics*, 1(3), 102-112.
- Alam, M.N. and Akbar, M.A., 2013a. Exact traveling wave solutions of the KP-BBM equation by using the new generalized (G'/G) –expansion method. *SpringerPlus*, 2(1), 617. DOI: 10.1186/2193-1801-2-617.
- Alam, M.N. and Akbar, M.A., 2013b. Traveling wave solutions of nonlinear evolution equations via the new generalized (G'/G) –expansion method. *Universal Journal of Computational Mathematics*, 1(4), 129-136.
- Alam, M.N., Akbar, M.A. and Mohyud-Din, S.T., 2014. A novel (G'/G) –expansion method and its application to the Boussinesq equation. *Chinese Physics B*, 23(2), 020203-020210. DOI: 10.1088/1674-1056/23/2/020203.
- Alam, M.N. and Akbar, M.A., 2014. Traveling wave solutions of the nonlinear (1+1)-dimensional modified Benjamin-Bona-Mahony equation by using novel (G'/G) – expansion. *Physical Review & Research International*, 4(1), 147-165.
- Al-Ghafri, KS. and Rezaadeh, H., 2019. Solitons and other solutions of (3+1)-dimensional space-time fractional modified KdV-Zakharov–Kuznetsov equation. *Applied Mathematics and Nonlinear Sciences*, 4(2), 289–304.
- Atangana, A., Baleanu, D. and Alsaedi, A., 2015. New properties of conformable derivative. *Open Mathematics*, 13(1), 889-898.
- Barone, A., Esposito, F., Magee, C.J. and Scott, A.C., 1971. Theory and applications of the sine-Gordon equation. *Rev. Nuovo Cim.*, 1 (2) ,227-267.
- Bekir, A., 2008. Application of the (G'/G) –expansion method for nonlinear evolution equations. *Physics Letter A*, 372 (19), 3400-3406.
- Biswas, A. and Kara, A. H., 2010. 1-soliton solution and conservation laws of the generalized Dullin-Gottwald-Holm equation. *Applied Mathematics and Computation*, 217(2), 929-932.

- Biswas, A., Moosaei, H., Eslami, M., Mirzazadeh, M., Zhou, Q. and Bhrawy, A.H., 2014. Optical soliton perturbation with extended tanh function method. *Optoelectronics and Advanced Materials Rapid Communications*, 8(11), 1029-1034.
- Bour, E., 1862. *Theorie de la deformation des surfaces*. J. Ecole Imperiale Poly technique, 19, 148.
- Bock, T.L. and Kruskal, M.D., 1979. A two-parameter Miura transformation of the Benjamin-Ono equation. *Physics Letter A*, 74(3-4), 173-176.
- Bobenko, A. and Pinkall U., 1996. Discrete surfaces with constant negative Gaussian curvature and the Hirota equation. *J. Differential Geom.*, 43 (3), 527-611.
- Bosco, G., Carena, A., Curri, V., Gaudino, R., Poggiolini, P. and Bendedetto, S., 2000. Suppression of spurious tones induced by the split-step method in fiber systems simulation. *IEEE Photonics Technology Letters*, 12(5), 489-491.
- Chang, Q., Jia, E. and Suny, W., 1999. Difference schemes for solving the generalized nonlinear Schrodinger equation. *Journal of Computational Physics*, 148, 397-415.
- Chen, C., Tang, X. and Lou, S., 2002. Solutions of a $(2 + 1)$ -dimensional dispersive long wave equation. *Physical Review E Stat Nonlin Soft Matter Phys*, 66(3), DOI: 10.1103/PhysRevE.66.036605.
- Chen, Y. and Wang, Q., 2005. Extended Jacobi elliptic function rational expansion method and abundant families of Jacobi elliptic functions solutions to $(1+1)$ -dimensional dispersive long wave equation. *Chaos, Solitons & Fractals*, 24(3), 745-57.
- Chong, Y. D., 2016. MH2801: Complex Methods for the Sciences. Nanyang Technological University, Available from: <http://www1.spms.ntu.edu.sg/~ydchong/teaching.html>.
- Çağlıyan, M., Çelik, N. ve Doğan, S., 2016. *Adi Diferansiyel Denklemler*. Dora Yayınları, Bursa.
- Dai, C.Q., Cen, X. and Wu, S.S., 2009. Exact travelling wave solutions of the discrete sine-Gordon equation obtained via the exp-function method. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 70 (1), 58-63.
- Dai, C.Q. and Zhang, J.F., 2009. Application of He's Exp-function method to the stochastic mKdV equation. *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 10(5), 675-680.
- Davydov, A. S., 2013. *Solitons in Molecular Systems*. Hollanda: Springer Netherlands.
- Demiray S. T, Bulut, H. and Celik, E., 2018. Soliton solutions of Wu-Zhang system by generalized Kudryashov method. *AIP Conference Proceedings*, 2037(1),
- Drazin, P.G. and Johnson, R.S., 1989. *Solitons: An Introduction*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Dusunceli, F., Celik, E., Askin, M. and H. Bulut., 2020. New exact solutions for the doubly dispersive equation using the improved Bernoulli sub-equation function method. *Indian Journal of Physics*, 95(3), 309-314.
- El-Wakil, S.A. and Abdou, M.A., 2007. New exact travelling wave solutions using modified extended tanh-function method. *Chaos, Solitons & Fractals*, 31(4), 840-852.
- Eslami, M. and Rezazadeh, H., 2015. The first integral method for Wu-Zhang system with conformable time-fractional derivative. *Calcolo*, 53 (3), 475-485.
- Fan, E.G., 2000a. Two new applications of the homogeneous balance method. *Physics Letter A*, 265353-357.

- Fan, E., 2000b. Extended tanh-function method and its applications to nonlinear equations. *Physics Letter A*, 277(4-5), 212-218.
- Ferreira, L.A. and Zakrzewski, W.J., 2013. Numerical and analytical tests of quasi-integrability in modified sine-Gordon models. *J. High Energy Physics*, 1, 058.
- Frenkel, J. and Kontorova T., 1993. On the theory of plastic deformation and twinning. *Izv. Akad. Nauk Ser. Fiz.* 1, 137-149.
- Fu, H.M. and Dai, Z.D., 2009. Double Exp-function method and application. *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, <https://doi.org/10.1515/IJNSNS.2009.10.7.927>.
- Halilov, H., 2003. *Diferansiyel Denklemler ve Lineer Cebrin Elemanları*. Literatür Yayınları: 96, İstanbul.
- He, J.H. and Wu, X.H., 2006. Exp-function method for nonlinear wave equations. *Chaos, Solitons & Fractals*, 30(3), 700-708.
- Helal, M. M., Mekky, M. L. and Mohamed, E. A., 2012. The characteristic function method and its application to (1+1)-dimensional dispersive long wave equation. *Applied Mathematics*, 03(01) 12–18.
- Jawad, A.J.M., Petkovic M.D. and Biswas, A., 2010. Modified simple equation method for nonlinear evolution equations. *Applied Mathematics and Computation*, 217 (2), 869-877.
- Jiang, C., Cai, W. and Wang, Y., 2018. Optimal error estimate of a conformal Fourier pseudo-spectral method for the damped nonlinear Schrödinger equation. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 34(4), 1422-1454.
- Khan, K. and Akbar, M.A., 2013. Application of $\exp(-\Phi(\eta))$ -expansion method to find the exact solutions of modified Benjamin-Bona-Mahony equation. *World Applied Sciences Journal*, 24(10), 1373-1377.
- Khan, K., Akbar M.A. and Alam, M.N., 2013. Traveling wave solutions of the nonlinear Drinfel'd-Sokolov-Wilson equation and modified Benjamin-Bona-Mahony equations. *Journal of the Egyptian Mathematical Society*, 21(3), 233-240.
- Khalila, R., Horania, M. A., Yousefa, A. and Sababheh, M., 2014. A New Definition of Fractional Derivative. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 264, 65-70.
- Kosevič, A. M., Ivanov, B. A. and Kovalev, A. S., 1990. Magnetic solutions. *Phys. Reports*, 194 (3-4), 117-238, Hollanda: North-Holland.
- Kocak, Z. F., Bulut, H. and Yel, G., 2014. The solution of fractional wave equation by using modified trial equation method and homotopy analysis method. *AIP Conference Proceedings*, 1637, 504–512.
- Kumar, D., Manafian, J., Hawlader, F. and Ranjbaran, A., 2018. New closed form soliton and other solutions of the Kundu–Eckhaus equation via the extended sinh-Gordon equation expansion method. *Optik*, 160, 159-167.
- Kumar, A., Ilhan, E., Ciancio, A., Yel, G. and Baskonus, H.M., 2021. Extractions of some new travelling wave solutions to the conformable Date-Jimbo-Kashiwara-Miwa equation. *AIMS Mathematics*, 6(5), 4238-4264.
- Lamb G. L., 1980. *Jr. Elements of Soliton Theory*. Wiley, New York.
- Lenells, J. and Fokas, A.S., 2010. On a novel integrable generalization of the sine-Gordon equation. *J. Math. Phys.*, 51 (2), 055912JMP.

- Luke, J. C., 1967. A variational principle for a fluid with a free surface. *Jornal of Fluid Mechanics*, 27, 395-397.
- Lü, D., 2005. Jacobi elliptic function solutions for two variant Boussinesq equations. *Chaos, Solitons & Fractals*, 24(5), 1373-1385.
- Marinakos, V., 2008. The Exp-function method and n-soliton solutions. *Zeitschrift für Naturforschung A*, <https://doi.org/10.1515/zna-2008-10-1108>.
- Melko, M. and Sterling, I., 1991. Application of Soliton Theory to the Construction of Pseudospherical Surfaces in R^3 . *Ann. Glob. Anal. Geom.*, 65-107, Almanya.
- Mourachkine, A., 2002. Nonlinear Excitations: Solitons. High-Temperature Super conductivity in Cuprates: The Nonlinear Mechanism and Tunneling Measurements, 101-142.
- Naher H. and Abdullah, F.A., 2013. New approach of (G'/G) –expansion method and new approach of generalized (G'/G) –expansion method for nonlinear evolution equation. *AIP Advances* 3, 032116, DOI: 10. 1063/1.4794947.
- Naher, H. and Abdullah, F.A., 2014. New generalized and improved (G'/G) -expansion method for non-linear evolution equations in mathematical physics. *J. Egypt. Math. Soc.*, 22, 390-395.
- Nakahara, M., 2018. *Geometry, Topology and Physics*. Birleşik Krallık: CRC Press.
- Öziş, T. and Aslan, İ., 2008. Exact and explicit solutions to the (3+1)-dimensional Jimbo-Miwa equation via the Exp-function method. *Physics Letters A*, 372(47), 7011-7015.
- Pişkin, E., 2018a. *Teori ve Çözümlü Problemlerle Diferansiyel Denklemler*. Seçkin Akademik ve Mesleki Yayınlar, Ankara.
- Pişkin, E., 2018b. *Teori ve Çözümlü Problemlerle Kısmi Türevli Denklemler*. Seçkin Akademik ve Mesleki Yayınlar, Ankara.
- Popov, A.G. and Maevskii E.V., 2007. Analytical approaches to the study of the sine-Gordon equation and pseudospherical surfaces. *J. Math. Sci.*, 142 ,2377-2418.
- Rajaraman, R., 1982. *Solitons and Instantons: An Introduction to Solitons and Instantons in Quantum Field Theory*, North-Holland.
- Remoissenet, M., 2013. *Waves Called Solitons: Concepts and Experiments*. Springer, Berlin.
- Sakhnovich, A., 2012. Sine-Gordon theory in a semi-strip. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 75 (2), 964-974.
- Scott, A. C., 1969. A nonlinear Klein-Gordon equation. *Am. J. Phys.*, 37, 5261.
- Scott, A.C., 1970. Propagation of magnetic flux on a long Josephson tunnel junction. *Nuovo Cim. B*, 241-261.
- Scott, A., 2005. *Encyclopedia of Nonlinear Science*. Routledge, Taylor and Francis Group, New York.
- Stokes, G. G., 1849. On the theory of oscillatory waves. *Trans. Cambridge Philos. Soc.*, DOI:10.1017/CBO9780511702242.013.
- Uğurlu, Y., 2010. *Bazı Lineer Olmayan Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Periyodik Dalga Çözümleri*. Doktora Tezi, Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Elazığ.
- Usman, M., Nazir, A., Zubair, T., Rashid, I., Naheed Z. and Mohyud-Din S.T., 2013. Solitary wave solutions of (3+1)-dimensional Jimbo Miwa and Pochhammer-Chree equations by modified Exp-function method. *Int. J. Modern Math. Sci*, 5(1), 27-36.

- Wang, Q., Chen, Y. and Hongqing, Z., 2005. A new Jacobi elliptic function rational expansion method and its application to $(1 + 1)$ -dimensional dispersive long wave equation. *Chaos, Solitons & Fractals*, 23(2), 477–483.
- Wang, M., Li, X. and Zhang, J., 2008. The (G' / G) –expansion method and traveling wave solutions of nonlinear evolution equations in mathematical physics. *Physics Letter A*, 372 (4), 417-423.
- Wazwaz, A.M., 2004. A sine-cosine method for handle nonlinear wave equations. *Applied Mathematics and Computer Modeling*, 40(5-6), 499-508.
- Wazwaz, A.M., 2005. The tanh method for generalized forms of nonlinear heat conduction and Burgers–Fisher equations. *Applied Mathematics and Computation*, 169(1), 321–338.
- Wazwaz, A.M., 2012. Multiple-soliton solutions for a $(3+1)$ -dimensional generalized KP equation. *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat*, 17, 491–495.
- Weiss, J., Tabor, M. and Carnevale, G., 1983. The Painlevé property for partial differential equations. *Journal of Mathematical Physics*, 24(3), 522–526.
- Whitham. G. B., 1965. A general approach to linear and nonlinear dispersive waves using a Lagrangian. *Journal of Fluid Mechanics*, 22, 273-283.
- Willox, R., Ramani, A. and Grammaticos, B., 2014. Solutions of the lattice sine-Gordon equation and the solitons of its cellular automaton. *Journal of Physics. A: Mathematical and Theoretical*, 47(12); 125202.
- Wu, T. and Zhang, J., 1996. On modeling nonlinear long wave, in *Mathematics Is for Solving Problems*. L. P. Cook, V. Roytburd, and M. Tulin, Eds., p. 233, SIAM, Philadelphia, PA, USA.
- Yakushevich, L. V., 2006. *Nonlinear Physics of DNA*. Almany: Wiley.
- Yan, C., 1996. A simple transformation for nonlinear waves. *Physics Letters A*, 224 ,77–84.
- Yan, Z. and Zhang, H., 1999. New explicit and exact travelling wave solutions for a system of variant Boussinesq equations in mathematical physics. *Physics Letters A*, 252, 291–296.
- Yan, Z. and Zhang H., 2001. New explicit solitary wave solutions and periodic wave solutions for Whitham Broer-Kaup equation in shallow water. *Physics Letters A*, 285 (5-6), 355-362.
- Yazgan, T., İlhan, E., Çelik, E. and Bulut, H., 2022. On the new hyperbolic wave solutions to Wu-Zhang system. *Optical and Quantum Electronics*, 54, 298.
- Yazgan. T., Çelik, E., Yel, G. and Bulut, H., 2023. On Survey of the Some Wave Solutions of the Non-Linear Schrödinger Equation (NLSE) in Infinite Water Depth. *Gazi University Journal of Science*, 36(2), 819-843.
- Yel, G., 2019. On the new travelling wave solution of a neural communication model. *Journal of Balıkesir University Institute of Science and Technology*, 21(2), 666-678.
- Yel, G., 2020. New wave patterns to the doubly dispersive equation in nonlinear dynamic elasticity. *Pramana – J. Physics*, 94(1):79, DOI: 10.1007/s12043-020-1941-x.
- Yomba, E., 2009. Application of Exp-function method for a system of three component-Schrödinger equations. *Physics Letters A*, 373(44), 4001-4011.

- Yuen, H. C. and Lake, B. M., 1982. Nonlinear Dynamics of Deep-Water Gravity Waves. *Advances in Applied Mechanics*, 22: 67, DOI: 10.1016/S0065-2156(08)70066-8.
- Zayed, E.M.E., 2009. The (G'/G) –expansion method and its applications to some nonlinear evolution equations in the mathematical physics. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 30(1), 89-103.
- Zeng, X. and Wang, D.S., 2009. A generaliz edextended rational expansion method and its application to $(1 + 1)$ - dimensional dispersive long wave equation. *Applied Mathematics and Computation*, 212(2), 296–304.
- Zhang, S., 2007. Application of Exp-function method to a KdV equation with variable coefficients. *Physics Letter A*, 365 (5-6), 448-453.
- Zhang, S., Tong, J.L. and Wang, W., 2008. A generalized (G'/G) –expansion method for them KdV equation with variable coefficients. *Physics Letter A*, 372 (13), 2254-2257.
- Zhang, S. and Zhang, H.Q., 2009. Exp-function method for N-soliton solutions of nonlinear evolution equations in mathematical physics. *Physics Letters A*, 373 (30), 2501-2505.
- Zhang, J., Jiang, J. and Zhao, X., 2010. An improved (G'/G) –expansion method for solving nonlinear evolution equations. *International Journal of Computer Mathematics*, 87(8), 1716-1725.
- Zhang, S., 2010. Exp-function method: Solitary, periodic and rational wave solutions of nonlinear evolution equations. *Nonl. Sci. Lett. A*, 1(2), 143-146.
- Zhao, M.M. and Li, C., 2008. The $\exp(-\Phi(\eta))$ –expansion method applied to nonlinear evolution equations. Available: [http://www. Paper. Edu. Cn](http://www.Paper. Edu. Cn).
- Zheng, X., Chen, Y. and Zhang, H., 2003. Generalized extended tanh-function method and its application to $(1 + 1)$ -dimensional dispersive long wave equation. *Physics Letters A*, 311(2-3), 145–157.
- Zhu, S.D., 2007. Exp-function method for the hybrid-lattice system. *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 8(3), 461-464.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı:	Tuğba YAZĞAN
Doğum tarihi:	
Doğum Yeri:	
Uyruğu:	
Adres:	
Tel:	
E-mail:	
Eğitim	
Lisans:	
Yüksek lisans:	
Doktora:	
Yabancı Dil Bilgisi	
Üye Olunan Mesleki Kuruluşlar	
	-
Tezden Üretilmiş Yayınlar	
1.	
2.	