**T.C.**
**PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ**
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**
**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

# KESİRLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ İLE ÇÖZÜMÜ

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**MERVE GÜNGÖR**

**DENİZLİ, EYLÜL - 2019**

**T.C.**
**PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ**
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**
**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

# KESİRLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ İLE ÇÖZÜMÜ

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**MERVE GÜNGÖR**

**DENİZLİ, EYLÜL - 2019**

**Bu tezin tasarımı, hazırlanması, yürütülmesi, araştırmalarının yapılması ve bulgularının analizlerinde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini; bu çalışmanın doğrudan birincil ürünü olmayan bulguların, verilerin ve materyallerin bilimsel etiğe uygun olarak kaynak gösterildiğini ve alıntı yapılan çalışmalara atfedildiğine beyan ederim.**

**MERVE GÜNGÖR**

# ÖZET

**KESİRLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN**
**LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ İLE ÇÖZÜMÜ**
**YÜKSEK LİSANS TEZİ**
**MERVE GÜNGÖR**
**PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**
**MATEMATİK ANABİLİM DALI**
**(TEZ DANIŞMANI:PROF. DR. AYŞEGÜL DAŞCIOĞLU)**

**DENİZLİ, EYLÜL - 2019**

Bu tez çalışması beş ana bölümden oluşmaktadır. Giriş kısmında kesirli analiz hakkında genel bilgiler verilmiştir. İkinci bölümde; Gama, Beta Mittag-Leffler gibi bazı özel fonksiyonlardan bahsedilmiş olup ayrıca bazı kesirli türevlerin tanım ve özellikleri verilmiştir. Üçüncü bölümde ise temel Laplace dönüşümü ve kesirli türevlerin Laplace dönüşümleri incelenmiştir. Dördüncü bölümde kesirli diferansiyel denklemler için varlık ve teklik teoremleri verilmiştir. Tezin ana kısmını oluşturan beşinci bölümde ise; kesirli diferansiyel denklemlerin Laplace dönüşümü ile ilgili çözümlü örnekler verilmiştir.

**ANAHTAR KELİMELER:** Kesirli Diferansiyel Denklemler, Laplace Dönüşümü, Kesirli Türevlerin Laplace Dönüşümleri

# ABSTRACT

**SOLUTION OF THE FRACTIONAL DİFFERANTIONAL EQUATIONS WITH THE LAPLACE TRANSFORMS**

**MSC THESIS**
**MERVE GÜNGÖR**
**PAMUKKALE UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE**
**MATHEMATİCS**
**(SUPERVISOR:PROF. DR. AYŞEGÜL DAŞCIOĞLU)**

**DENİZLİ, SEPTEMBER 2019**

This study consists of five main chapters. General information about fractional calculus is given in introduction. Some special functions, such as Gama, Beta and Mittag-Leffler are mentioned, and also definitions and properties of some fractional derivatives are given in chapter 2. Basic Laplace transform and Laplace transforms of fractional derivatives are examined in chapter 3. Existence and uniqueness theorems for fractional differential equations are given in chapter 4. A main part of thesis, in chapter 5, some solved examples of fractional differential equations by Laplace transforms are given.

**KEYWORDS:** Fractional Differantial Equations, Laplace Transform, Laplace Transforms of Fractional Derivatives

# İÇİNDEKİLER

**<u>Sayfa</u>**

**ÖZET** .......... **i**
**ABSTRACT** .......... **ii**
**İÇİNDEKİLER** .......... **iii**
**TABLO LİSTESİ** .......... **iv**
**ÖNSÖZ** .......... **v**
**1. GİRİŞ** .......... **1**
**2. KESİRLİ TÜREVLER** .......... **3**
2.1 Bazı Özel Fonksiyonlar .......... 3
2.1.1 Gama Fonksiyonu .......... 3
2.1.2 Beta Fonksiyonu .......... 4
2.1.3 Mittag-Leffler Fonksiyonu .......... 5
2.1.4 Wright Fonksiyonu .......... 7
2.2 Bazı Kesirli Türevler ve Özellikleri .......... 8
2.2.1 Grünwald-Letnikov Kesirli Türevi .......... 8
2.2.2 Riemann-Liouville Kesirli Türevi .......... 18
2.2.3 Caputo Kesirli Türevi .......... 22
2.2.4 Ardışık Kesirli Türev ve Miller-Ross Ardışık Türevi .......... 24
**3. LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ VE ÖZELLİKLERİ** .......... **26**
3.1 Laplace Dönüşümü ve Temel Özellikleri .......... 26
3.2 Kesirli Türevlerin Laplace Dönüşümleri .......... 28
3.2.1 Riemann-Liouville Kesirli Türevinin Laplace Dönüşümü .......... 29
3.2.2 Caputo Kesirli Türevinin Laplace Dönüşümü .......... 30
3.2.3 Grünwald-Letnikov Kesirli Türevinin Laplace Dönüşümü .......... 31
3.2.4 Miller-Ross Kesirli Türevinin Laplace Dönüşümü .......... 33
**4. VARLIK VE TEKLİK TEOREMLERİ** .......... **35**
4.1 Lineer Kesirli Diferansiyel Denklemler .......... 35
4.2 Genel Formda Kesirli Diferansiyel Denklem .......... 40
**5. LİNEER KESİRLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ İLE ÇÖZÜMÜ** .......... **46**
5.1 Standart Kesirli Diferansiyel Denklemlerin Çözümü .......... 46
5.1.1 Homojen Adi Kesirli Diferansiyel Denklemler .......... 50
5.1.2 Homojen Olmayan Adi Kesirli Diferansiyel Denklemler .......... 62
5.1.3 Kısmi Kesirli Diferansiyel Denklemler .......... 68
5.2 Ardışık Kesirli Diferansiyel Denklemlerin Çözümleri .......... 72
5.2.1 Adi Kesirli Diferansiyel Denklemler .......... 74
5.2.2 Kısmi Kesirli Diferansiyel Denklemler .......... 77
**6. SONUÇ** .......... **79**
**7. KAYNAKLAR** .......... **80**
**8. ÖZGEÇMİŞ** .......... **84**

# TABLO LİSTESİ

**Sayfa**

Tablo 3.1 Bazı Temel Fonksiyonların Laplace Dönüşümleri ........................... 27
Tablo 3.2 Bazı Mittag-Leffler fonksiyonlarını içeren ifadelerin Laplace dönüşümleri ........................................................................ 28

# ÖNSÖZ

“Kesirli Diferansiyel Denklemlerin Laplace Dönüşümü ile Çözümü” konulu bu tez çalışmasının seçiminde, yürütülmesinde ve sonuçlandırılmasında bana gösterdikleri destek ve yardımlarından dolayı değerli danışman hocam Sayın Prof. Dr. Ayşegül DAŞCIOĞLU’na, ayrıca bu zorlu süreçte desteklerini esirgemeyen aileme sonsuz teşekkür eder, şükranlarımı sunarım.

MERVE GÜNGÖR

# 1. GİRİŞ

Kesirli mertebeden türev ve integrallerin tanımlandığı ve uygulandığı kesirli analizin geçmişi, tamsayı mertebeden klasik analiz kadar eskidir. Öte yandan, birçok matematikçinin konuya uzak olmasından dolayı bu konudaki çalışmalar kısıtlı kalmıştır.

Kesirli analiz "Tamsayı mertebeden $d^n y / dx^n$ türev ifadesi, $n$ bir kesir olduğunda bir anlam ifade etmekte midir?" sorusu ile başlamıştır. Daha sonra soru $n$'in irrasyonel ve karmaşık değerlerini kapsayacak şekilde genişletilmiştir. Kapsamı genişleyen bu soru sonrasında; kesirli analiz isminin keyfi mertebeden integrasyon ve türev olarak isimlendirilmesi daha doğru olacağı düşünülmektedir (Miller 1993).

$d^n y / dx^n$ gösterimi ilk kez Leibniz tarafından yapılmıştır. 1695'te L'Hospital'in Leibniz'e "ya $n$=1/2 ise" sormasından sonra, Leibniz bunun bir paradoksa yol açacağını; ancak ileride yararlı sonuçlar sağlayacağı öngörüsünde bulunmuştur. 1730 da Euler'in çalışmalarının yanı sıra, 1812 de Laplace integral yardımıyla bir kesirli türev tanımı vermiştir ve 1819 da Lacroix tarafından yazılan analiz metinlerinde kesirli türev ile ilgili tartışmalar başlamıştır. Lacroix'in sonucu ile bugünkü Riemann-Liouville tanımı aynıdır. Fourier, Henrick Abel, Weyl, Riemann, Lagrange, Liouville, Grünwald ve Letnikov, Peacock, Kelland, Davis, Laurent gibi pek çok matematikçi kesirli diferansiyelin gelişmesinde katkılar sağlamıştır (Miller 1993).

Bugün Kesirli analizde Davis'in ${}_cD_x^{-v} f(x)$ gösterimini kullanmaktayız. Bu gösterim, eğer $v$ pozitif bir reel sayı ise, $f$ fonksiyonunun $x$-ekseni boyunca $v$. mertebeden integralini ifade etmektedir. ${}_cD_x^{v} f(x)$ gösterimi de $v$. mertebeden türev için kullanılmıştır (Miller 1993).

Kesirli diferansiyel denklemler, tıp (beyin analizinde sinir hücrelerinin karmaşık yapılı anormal davranış incelemelerinde), ekonomi (fiyat analizi gibi doğrusal olmayan hareketlerin incelenmesinde), jeolojik olaylarda (depremlerde fay hatlarının davranışlarını modellemede), elektro-kimya, fizik (akışkanlar mekaniğinde, nükleer ve manyetik rezonans üzerine teorik çalışmalarda), ayrıca eczacılık ve ilaç sektöründeki içerik analizlerinde sıkça kullanılan iyi bir araç olmuştur. Kesirli diferansiyel denklemlerin genellikle tam çözümü olmadığından, bu tip denklemleri çözmek için kullanılan yaklaşık çözüm veren yöntemler son yıllarda artmıştır. Teknolojik gelişmeler de kesirli diferansiyel denklemlerin çözümü konusunda önemli bir rol oynamıştır (Blair 1947; Anastasio 1994).

Kesirli mertebeden diferansiyel denklemler mühendislik uygulamaları ve çeşitli araştırma alanlarında gitgide daha sık görülmektedir. Pek çok denklemi çözmek için etkili ve kullanışlı metotlara ihtiyaç duyulmaktadır. Bilinen metotlar bazı dezavantajlara sahiptir. Keyfi reel mertebeden kesirli diferansiyel denklemlerin çözümünü veren iterasyon metodu; sadece basit denklemlerde etkili olarak kullanılmıştır. Pek çok yazar araştırmalarında bir parametreli Mittag-Leffler Fonksiyonunu kullanmıştır (Podnubly 1999).

Bu tezde kullanacağımız Laplace Dönüşüm metodu, dezavantajlardan uzak ve kesirli diferansiyel denklemlerin başlangıç değer problemlerinin daha geniş bir sınıfı için kullanışlıdır. Bu metot iki parametreli Mittag-Leffler fonksiyonunun Laplace Dönüşümünün formülüne bağlıdır (Podnubly 1999).

Laplace Dönüşüm metodu fizik, kimya, elektro-kimya ve mühendislikte karşılaşılan uygulamalı problemlerin farklı çözümlerinin elde edilmesinde kullanışlıdır (Podnubly 1999).

# 2. KESİRLİ TÜREVLER

Bu tez içerisinde sıkça kullanacağımız Gama, Beta, Mittag-Leffler, Wright fonksiyonu gibi bazı özel fonksiyonlar ve özelliklerini bu kısımda inceleyeceğiz. Podnubly (1999) kaynağı esas alınarak düzenlenen kesirli türev ve özellikleri de bu bölüm içerisinde verilecektir.

## 2.1 Bazı Özel Fonksiyonlar

### 2.1.1 Gama Fonksiyonu

Kesirli matematiğin temel fonksiyonlarından biri olan Gamma Fonksiyonu, $\Gamma$ gösterimi ile ifade edilir ve $n!$ olarak genelleştirilmiştir. Burada $n$'nin tamsayı olmayan hatta karmaşık değerler alması mümkündür (Kilbas 2006).

Gamma Fonksiyonunun integral gösterimi ile tanımı şöyledir:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \, . \tag{2.1}$$

Bu ifade $\operatorname{Re}(z) > 0$ olmak üzere karmaşık düzlemin sağ tarafında yakınsaktır. Aslında;

$$\begin{aligned}\Gamma(x+iy) &= \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1+iy} dt = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} e^{iy\log(t)} dt \\ &= \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} [\cos(y\log(t)) + i\sin(y\log(t))] dt\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Yukarıdaki integralde köşeli parantez içerisinde verilen ifade her $t$ değeri için sınırlıdır. Sonsuz değerlerde yakınsama $e^{-t}$ ile sağlanır ve $t = 0$ da yakınsama için $x = \operatorname{Re}(z) > 1$'dir.

Gamma fonksiyonunun temel özelliklerinden biri

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \tag{2.2}$$

fonksiyonel denklemi sağlamasıdır (Bayın 2004). Bu ifade, tanımdan integrasyon alınarak şu şekilde kolaylıkla kanıtlanabilir.

$$\Gamma(z+1)=\int_0^\infty e^{-t}t^z dt=[e^{-t}t^z]_0^\infty+z\int_0^\infty e^{-t}t^z dt=z\Gamma(z)$$

Açıkca görülebilir ki, (2.1)'den $\Gamma(1)=1$'dir ve (2.2) kullanılarak $z=1,2,3...$ için

$$\begin{aligned}\Gamma(2)&=1\Gamma(1)=1=1!,\\ \Gamma(3)&=2\Gamma(2)=2.1!=2!,\\ \Gamma(4)&=3\Gamma(3)=3.2!=3!,\\ &\vdots\\ \Gamma(n+1)&=n\Gamma(n)=n(n-1)!=n!\end{aligned}$$

elde ederiz (Bayın 2004).

### 2.1.2 Beta Fonksiyonu

Çoğu durumda Gama fonksiyonunun değerlerinin belirli kombinasyonları yerine Beta fonksiyonunu kullanmak daha uygundur ve tanımı

$$B(z,w)=\int_0^1 \tau^{z-1}(1-\tau)^{w-1}d\tau,\ \ (\mathrm{Re}(z)>0,\ \mathrm{Re}(w)>0) \tag{2.3}$$

şeklinde verilir. Denklem (2.3)'deki Beta fonksiyonunun tanımı yalnızca $\mathrm{Re}(z)>0$, $\mathrm{Re}(w)>0$ olduğunda geçerlidir (Arfken ve Weber 1995).

Denklem (2.1)'de tanımlanan Gamma fonksiyonu ile (2.3)'de tanımlanan Beta fonksiyonu arasında ilişki kurmak için Laplace dönüşümünü kullanacağız. Şimdi

$$h_{z,w}(t)=\int_0^t \tau^{z-1}(1-\tau)^{w-1}d\tau$$

integralini inceleyelim. Burada $h_{z,w}(t)$ ifadesi $t^{z-1}$ ve $t^{w-1}$ fonksiyonlarının konvolüsyonu ve $h_{z,w}(t)=B(z,w)$ olduğu açıktır

İki fonksiyonunun konvolüsyon çarpımlarının Laplace dönüşümü, onların ayrı ayrı Laplace dönüşümlerinin çarpımına eşit olduğundan $h_{z,w}(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü

$$H_{z,w}(s) = \frac{\Gamma(z)}{s^z} \cdot \frac{\Gamma(w)}{s^w} = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{s^{z+w}} \tag{2.4}$$

şeklinde bulunur.

Öte yandan, $\Gamma(z)\Gamma(w)$ sabit olduğundan, (2.4)'in sağ tarafının ters Laplace dönüşümü ile orijinal $h_{z,w}(t)$ fonksiyonunu düzenlemek mümkündür. Laplace dönüşümünün tekliğinden dolayı

$$h_{z,w}(t) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)} t^{z+w-1}$$

buluruz ve burada $t = 1$ alırsak Beta fonksiyonu için

$$B(z,w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)} \text{ ve } B(z,w) = B(w,z)$$

elde ederiz.

### 2.1.3 Mittag-Leffler Fonksiyonu

Üstel fonksiyon olan $e^z$ tamsayı mertebeli diferansiyel denklemler teorisinde önemli bir rol oynar. Mittag-Leffler fonksiyonunun bir parametrelisinin genelleştirmesi

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}$$

şeklindedir (Mathai ve Haubold 2008).

Mittag-Leffler tipi iki parametreli fonksiyona genelleştirme ise Laplace dönüşüm tekniği kullanılarak yapılır, bu ifade kesirli diferansiyel denklemlerin çözümünde önemli bir yere sahiptir. İki parametreli Mittag-Leffler fonksiyonu

$$E_{\alpha,\beta}\left(z\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{k}}{\Gamma(\alpha k+\beta)},(\alpha>0,\beta>0) \tag{2.5}$$

seri açılımıyla tanımlanmıştır (Mathai ve Haubold 2008).

Bu tanımdan

$$E_{1,1}\left(z\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{k}}{\Gamma(k+1)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{k}}{k!}=e^{z},$$
$$E_{1,2}\left(z\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{k}}{\Gamma(k+2)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{k}}{(k+1)!}=\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{k+1}}{(k+1)}=\frac{e^{z}-1}{z},$$
$$E_{1,3}\left(z\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{k}}{\Gamma(k+3)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{k}}{(k+2)!}=\frac{1}{z^{2}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{k+2}}{(k+2)}=\frac{e^{z}-1-z}{z^{2}}$$

olduğu açıkça görülür. Bunu genelleştirirsek

$$E_{1,m}\left(z\right)=\frac{1}{z^{m-1}}\left\{e^{z}-\sum_{k=0}^{m-2}\frac{z^{k}}{k!}\right\}$$

yazabiliriz.

Rasyonel mertebeli diferansiyel denklemleri çözmek için Mittag-Leffler fonksiyonunun özel bir durumu olan $\varepsilon_{t}\left(\upsilon,a\right)$ fonksiyonu

$$\varepsilon_{t}\left(\upsilon,a\right)=t^{\upsilon}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(at\right)^{k}}{\Gamma\left(\upsilon+k+1\right)}=t^{\upsilon}E_{1,\upsilon+1}\left(at\right)$$

olarak tanımlanmıştır (Miller 1993; Das 2011). Benzer şekilde Mittag-Leffler fonksiyonunun özel bir durumu olan $\ni_{\alpha}\left(\beta,t\right)$ fonksiyonu

$$\ni_{\alpha}\left(\beta,t\right)=t^{\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\beta^{k}t^{k(\alpha+1)}}{\Gamma\left(\left(k+1\right)\left(1+\alpha\right)\right)}=t^{\alpha}E_{\alpha+1,\alpha+1}\left(\beta t^{\alpha+1}\right)$$

olarak gösterilmiştir (Rabotnov 1997; Das 2011).

Denklem (2.5)'te verilen Mittag-Leffler fonksiyonunun tanımını

$$\int_0^\infty e^{-t} t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(zt^\alpha)dt = \frac{1}{1-z}, \quad (|z|<1) \tag{2.6}$$

integralinde yerine koyalım. Denklem (2.5) ve (2.6)'dan $t^{-\alpha k+\beta-1} E_{\alpha,\beta}^{(k)}(\pm zt^\alpha)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümünü elde ederiz. Burada $E_{\alpha,\beta}^{(k)}(\pm zt^\alpha) \equiv d^k E_{\alpha,\beta}(y)\big/dy^k$ dir. Şöyle ki;

$$\int_0^\infty e^{-pt} t^{\alpha k+\beta-1} E_{\alpha,\beta}^{(k)}(\pm at^\alpha)dt = \frac{k!\,p^{\alpha-\beta}}{\left(p^\alpha \mp a\right)^{k+1}}, \quad (\mathrm{Re}(p) > |a|^{1/\alpha})\,. \tag{2.7}$$

Denklem (2.7)'de $\alpha = \beta = 1/2$ için özel durumu ise,

$$\int_0^\infty e^{-pt} t^{\frac{k-1}{2}} E_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}^{(k)}(\pm a\sqrt{t})dt = \frac{k!}{\left(\sqrt{p} \mp a\right)^{k+1}}, \quad (\mathrm{Re}(p) > a^2) \tag{2.8}$$

olarak ifade edilir ve ileri bölümlerde inceleyeceğimiz denklemlerin çözümünde önemli rol oynar.

### 2.1.4 Wright Fonksiyonu

Wright Fonksiyonu kısmi diferansiyel denklemlerin (örneğin, kesirli difüzyon dalga denklemi) çözümünde önemli bir yere sahip diğer fonksiyondur. Mainardi'nin Wright fonksiyonu için gösterimi daha kullanışlıdır. Buna göre tanım

$$W(z;\alpha,\beta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!\,\Gamma(\alpha k+\beta)} \tag{2.9}$$

şeklinde ifade edilir. $\alpha \to 0, \beta \to 0$ alacak olursak (2.9)'dan

$$W(z;0,1) = e^z$$

eşitliği elde edilir. $\beta \to 1-a$ alırsak Mainardi fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilir ve $M(z;\alpha)$ ile gösterilir.

$$M(z;a) = W(-z;-\alpha,1-a) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^k}{k!\Gamma(-\alpha(k+1)+1)} .$$

Bu eşitliğin özel hali olarak $\alpha = 1/2$ alındığında

$$M\left(z;\frac{1}{2}\right) = W\left(-z;-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left(\frac{-z^2}{4}\right)$$

eşitliği bulunur (Podnubly 1999).

### 2.2 Bazı Kesirli Türevler ve Özellikleri

Keyfi mertebeden türev ve integral birçok matematikçi tarafından farklı gösterimler ile ifade edilmiştir. Giriş kısmında bahsettiğimiz üzere Davis'in gösterimi en sık karşılaştığımız ${}_aD_t^{\alpha}$ ve $D_*^{\alpha}$ ifadeleridir.

${}_aD_t^{\alpha}$ , limit değerleri $a$ ve $t$ olan $\alpha$. mertebeden kesirli türev anlamına gelmektedir. Burada $\alpha < 0$ değerleri için ${}_aD_t^{\alpha} f(t)$ kesirli integral anlamına gelir. Kesirli integralin $D_*^{\alpha}$ gösteriminde limit değerlerini yazmak yerine * işareti kullanılmıştır.

Kesirli Analiz tarihçesine bakılınca, kesirli mertebeden türev ve integral ile ilgili birçok tanım mevcuttur. Şimdi en çok kullanılan Riemann-Liouville, Grünwald-Letnikov ve Caputo'nun tanımları Podnubly (1999) kaynağı esas alınarak verilecektir.

#### 2.2.1 Grünwald-Letnikov Kesirli Türevi

$y = f(t)$ sürekli bir fonksiyon olsun. $f(t)$ fonksiyonunun birinci mertebeden türevi aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$f'(t)=\frac{df}{dt}=\lim_{h\to 0}\frac{f(t)-f(t-h)}{h} \tag{2.10}$$

$f(t)$ fonksiyonu için türev iki kez uygulandığında ikinci mertebeden türevi;

$$\begin{aligned} f''(t)=\frac{d^2 f}{dt^2}&=\lim_{h\to 0}\frac{f(t)-f(t-h)}{h} \\ &=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{\frac{f(t)-f(t-h)}{h}-\frac{f(t-h)-f(t-2h)}{h}\right\} \\ &=\lim_{h\to 0}\frac{f(t)-2f(t-h)-f(t-2h)}{h} \end{aligned} \tag{2.11}$$

şeklinde ifade edilir. (2.10) ve (2.11)'i kullanarak üçüncü mertebeden türev,

$$f'''(t)=\frac{d^3 f}{dt^3}=\lim_{h\to 0}\frac{f(t)-3f(t-h)+3f(t-2h)-f(t-3h)}{h^3}$$

olur. Bu şekilde devam edersek $n$. mertebeden türevi;

$$f^{(n)}(t)=\frac{d^n f}{dt^n}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^n}\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{n}{r}f(t-rh) \tag{2.12}$$

olur. Buradaki binom katsayısı

$$\binom{n}{r}=\frac{n(n-1)(n-2)...(n-r+1)}{r!}$$

dir. Bunları kesirlere genelleştirecek olursak, $p$ ve $n$ keyfi bir tamsayı olmak üzere

$$f_h^{(p)}(t)=\frac{1}{h^p}\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{p}{r}f(t-rh) \tag{2.13}$$

elde ederiz. $p\le n$ olması durumunda (2.12)'den görüleceği üzere $r=p$'den sonraki tüm katsayılar 0 olacağı için;

$$\lim_{h\to 0}f_h^{(p)}(t)=f_h^{(p)}(t)=\frac{d^p f}{dt^p}$$

bulunur. $p$ nin negatif değerlerini düşünecek olursak, kolaylık için

$$\begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} = \frac{p(p+1)...(p+r-1)}{r!}$$

olarak gösterelim. Buradan *p* yerine *–p* yazılarak elde edeceğimiz

$$\binom{-p}{r} = \frac{-p(-p-1)...(-p-r+1)}{r!} = (-1)^r \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix}$$

ifadesi (2.13)'de yerine yazılırsa aşağıdaki eşitlik bulunur,

$$f_h^{(-p)}(t) = \frac{1}{h}\sum_{r=0}^{n}\begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} f(t-rh) .$$

Burada *p* pozitif tamsayı değerleri alır.

$n$'in sabit olduğu durumlarda; $h \to 0$ iken $f_h^{(-p)}$'nin limiti 0'dır. 0'dan farklı limite ulaşmak için $h \to 0$ iken $n \to \infty$ olduğu varsayılacaktır. *a* reel bir sabit olmak üzere $h = (t-a)/n$ olarak aldığımızda $f_h^{(-p)}$'nin sonlu veya sonsuz limiti

$$\lim_{\substack{h \to \infty \\ nh = t-a}} f_h^{(-p)}(t) = {}_aD_t^{-p} f(t)$$

olarak tanımlanır. Burada ${}_aD_t^{-p} f(t)$ şöyle ifade edilir; üzerinde belirli bir işlem yapılan $f(t)$ fonksiyonu için, ele alınan işlemin sınır değerleri *a* ve *t* olur.

Burada *p*'nin alacağı değerlere göre birkaç özel durumu düşünelim.

$p = 1$ için;

$$f_h^{(-1)}(t) = h\sum_{r=0}^{n} f(t-rh)$$

$t - nh = a$ alınır ve $f(t)$ sürekli kabul edilirse,

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ nh = t-a}} f_h^{(-1)}(t) = {}_aD_t^{-1} f(t) = \int_0^{t-a} f(t-z)dz = \int_0^{t} f(\tau)d\tau \qquad (2.14)$$

ifadesi elde edilir.

$$p=2 \text{ için; } \begin{bmatrix} 2 \\ r \end{bmatrix} = \frac{2.3....(2+r-1)}{r!} = \frac{2.3....(r-1)r(r+1)}{r!} = r+1$$

olduğundan

$$f_h^{(-2)}(t) = h\sum_{r=0}^{n}(rh)\,f(t-rh)$$

yazılabilir. $t+h=y$ olarak tanımlanırsa yukarıdaki ifade

$$f_h^{(-2)}(t) = h\sum_{r=1}^{n+1}(rh)\,f(t-rh)$$

biçiminde yazıp $h\to 0$ alındığında, $y\to t$ olur ve,

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} f_h^{(-2)}(t) = {}_aD_t^{-2} f(t) = \int_0^{t-a} zf(t-z)dz = \int_a^t \left(t-\tau\right) f(\tau)d\tau \tag{2.15}$$

elde edilir.

Benzer biçimde $p=3$ için

$${}_aD_t^{-3} f(t) = \frac{1}{2!}\int_0^{t-a} z^2 f(t-z)dz = \int_a^t \left(t-\tau\right)^2 f(\tau)d\tau \tag{2.16}$$

yine $h\to 0$ alındığında, $y\to t$ olacağından

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} \frac{h^2}{2}\sum_{r=1}^{n+1} rh\,f(y-rh) = \lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} h\int_a^t (t-\tau)f(\tau)d\tau = 0$$

elde edilir.

(2.14)-(2.16) eşitlikleri kullanılarak genel halde $n$ - katlı integral

$${}_aD_t^{-p} f(t) = \lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} h^p \sum_{r=0}^{n} \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} f(t-rh) = \frac{1}{\left(p-1\right)!}\int_a^t (t-\tau)^{p-1} f(\tau)d\tau \tag{2.17}$$

şeklinde yazılabilir.

(2.17)'nin $p$ katlı integraline bakarsak

$$\frac{d}{dt}\left({}_aD_t^{-p}f(t)\right)=\frac{1}{(p-2)!}\int_a^t(t-\tau)^{p-2}f(\tau)d\tau={}_aD_t^{-p+1}f(t)$$

alınarak,

$${}_aD_t^{-p}f(t)=\int_a^t\left({}_aD_t^{-p}f(t)\right)$$

$${}_aD_t^{-p+1}f(t)=\int_a^t\left({}_aD_t^{-p+2}f(t)\right)$$

ifadeleri bulunabilir. Bu şekilde devam edilirse

$$\begin{aligned}{}_aD_t^{-p}f(t)&=\int_a^t dt\int_a^t\left({}_aD_t^{-p+2}f(t)\right)dt\\&=\int_a^t dt\int_a^t dt\int_a^t\left({}_aD_t^{-p+3}f(t)\right)dt\\&=\underbrace{\int_a^t dt\int_a^t dt...\int_a^t}_{p-kez}f(t)dt\end{aligned}$$

elde edilir. $f(t)$ sürekli fonksiyonunun $n$. mertebeden tamsayı türevi (2.12) ile $p$ katlı integrali (2.17) ifadelerinin aşağıda genel olarak ifade edilen eşitliğin özel halleri olduğu görülür.

$${}_aD_t^{p}f(t)=\lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}}h^{-p}\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{p}{r}f(t-rh) \tag{2.18}$$

$p=m$ için $m$. mertebeden türev, $p=-m$ için $m$ katlı integrali ifade eden genel durumunun özel halleridir. (2.18) da $p$ nin reel ya da kompleks olma durumuna göre diferansiyel ve integral işlemleri uygulanabilir.

(2.18) eşitliğinden yola çıkarak ilk önce keyfi mertebeden integral daha sonra da keyfi mertebeden türev tanımlanacaktır. (2.18) eşitliğinde $p$ yerine $-p$ yazılırsa eşitlik

$${}_aD_t^{-p}f(t)=\lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}}h^{p}\sum_{r=0}^{n}\begin{bmatrix}p\\r\end{bmatrix}f(t-rh) \tag{2.19}$$

ifadesi elde edilir.

**1.2.1 Teorem** (Podnubly 1999) $\beta_k$, $(k=1,2,3,...)$ bir dizi ve her *k*, *n* için

$$\lim_{k\to\infty}\beta_k = 1, \quad \lim_{k\to\infty}\alpha_{n,k} = 0$$
$$\lim_{k\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\alpha_{n,k} = A, \quad \sum_{k=1}^{n}\left|\alpha_{n,k}\right| < K$$

olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\alpha_{n,k}\beta_k = A$$

dır.

Teorem 1.2.1, (2.19) limiti ile uygulandığında,

$$\begin{aligned}
{}_aD_t^{-p}f(t) &= \lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} h^p\sum_{r=0}^{n}\begin{bmatrix} p\\ r\end{bmatrix} f(t-rh)\\
&= \lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}}\sum_{r=0}^{n}\frac{1}{r^{p-1}}\begin{bmatrix} p\\ r\end{bmatrix} h(rh)^{p-1} f(t-rh)\\
&= \frac{1}{\Gamma(p)}\lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}}\sum_{r=0}^{n}\frac{\Gamma(p)}{r^{p-1}}\begin{bmatrix} p\\ r\end{bmatrix} h(rh)^{p-1} f(t-rh)\\
&= \frac{1}{\Gamma(p)}\lim_{n\to\infty}\sum_{r=0}^{n}\frac{\Gamma(p)}{r^{p-1}}\begin{bmatrix} p\\ r\end{bmatrix}\frac{t-a}{n}\left(r\frac{t-a}{n}\right)^{p-1} f(t-r\frac{t-a}{n})
\end{aligned}$$

elde edilir ve

$$\beta_r = \frac{\Gamma(p)}{r^{p-1}}\begin{bmatrix} p\\ r\end{bmatrix}$$
$$\alpha_{n,r} = \frac{t-a}{n}\left(r\frac{t-a}{n}\right)^{p-1} f(t-r\frac{t-a}{n})$$

olarak alınırsa

$$\lim_{r\to\infty}\beta_r = \lim_{r\to\infty}\frac{\Gamma(p)}{r^{p-1}}\begin{bmatrix} p\\ r\end{bmatrix} = 1 \tag{2.20}$$

elde edilir. Belli ki, eğer $f(t)$, $[a,t]$ aralığında sürekli bir fonksiyon ise

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\sum_{r=0}^{n}\alpha_{n,r} &= \lim_{n\to\infty}\sum_{r=0}^{n}\frac{t-a}{n}\left(r\frac{t-a}{n}\right)^{p-1} f(t-r\frac{t-a}{n}) \\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{r=0}^{n}h\left(rh\right)^{p-1} f(t-rh) \qquad (2.21) \\
&= \int_{0}^{t}\left(t-\tau\right)^{p-1} f(\tau)d\tau
\end{aligned}
$$

elde edilir. (2.20), (2.21) ve Teorem 1.2.1'e göre

$$
\begin{aligned}
{}_aD_t^{-p} f(t) &= \lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} h^p \sum_{r=0}^{n}\begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} f(t-rh) \\
&= \frac{1}{\Gamma(p)}\int_{a}^{t}\left(t-\tau\right)^{p-1} f(\tau)d\tau
\end{aligned}
$$

ifadesi elde edilir. $f'(t)$ fonksiyonu $\left[a,b\right]$ aralığında sürekli ve ($m$+1) sürekli türeve sahip ise

$$
{}_aD_t^{-p} f(t) = \sum_{k=0}^{m}\frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{p+k}}{\Gamma(p+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(p+m+1)}\int_{a}^{t}\left(t-\tau\right)^{p+m} f^{(m+1)}(\tau)d\tau
$$

ifadesi yazılabilir.

Sonuç olarak $p<0$ için keyfi mertebeden integral bulunmuş olur.

$p>0$ durumunda, yani keyfi mertebeden türeve ulaşmak için, $p$. mertebeden türev

$$
f^{p}(t) = h^{-p}\sum_{r=0}^{n}\left(-1\right)^r \begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix} f(t-rh)
$$

olmak üzere

$$
{}_aD_t^{p} f(t) = \lim_{\substack{h\to 0\\ nh\to t-a}} h^{-p} = \sum_{r=0}^{n}\left(-1\right)^r \begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix} f(t-rh) = \lim_{\substack{h\to 0\\ nh\to t-a}} f_h^{p}(t) \qquad (2.22)
$$

limitini hesaplayacağız.

Bu limiti hesaplayabilmek için $f_h^{p}(t)$ ifadesi binom katsayıları cinsinden açılmalıdır.

$$\binom{p}{r} = \binom{p-1}{r} + \binom{p-1}{r-1} \tag{2.23}$$

binom katsayılarını kullanarak $f(x)$ fonksiyonunun $\tau = t - rh$ noktasındaki birinci mertebeden geri farkı $\Delta f(t-rh) = f(t-rh) - f(t-(r+1)h)$ olmak üzere $f_h^{(p)}(t)$ fonksiyonu

$$\begin{aligned}
f_h^{p}(t) &= h^{-p}\sum_{r=0}^{n}(-1)^r \binom{p-1}{r} f(t-rh) + h^{-p}\sum_{r=0}^{n}(-1)^r \binom{p-1}{r-1} f(t-rh) \\
&= h^{-p}\sum_{r=0}^{n}(-1)^r \binom{p-1}{r} f(t-rh) + h^{-p}\sum_{r=0}^{n}(-1)^{r+1} \binom{p-1}{r} f(t-(r+1)h) \\
&= (-1)^n \binom{p-1}{r} h^{-p} f(a) + h^{-p}\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r \binom{p-1}{r} \Delta f(t-rh)
\end{aligned}$$

şeklindedir. (2.23) özelliği *m* kez uygulandığında $f_h^{(p)}(t)$ fonksiyonu

$$\begin{aligned}
f_h^{(p)}(t) &= \sum_{k=0}^{m}(-1)^{n-k} \binom{p-k-1}{n-k} h^{-p}\Delta^k f(a+kh) \\
&\quad + h^{-p}\sum_{r=0}^{n-m-1}(-1)^r \binom{p-m-1}{r} \Delta^{m+1} f(t-rh)
\end{aligned} \tag{2.24}$$

biçimini alır. Bu ifadede ilk toplamın limiti

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}(-1)^{n-k}\binom{p-k-1}{n-k} h^{-p}\Delta^k f(a+kh) &= \lim_{h\to 0}(-1)^{n-k}\binom{p-k-1}{n-k}(n-k)^{p-k} \\
&\quad \times \binom{n}{n-k}^{p-k} (nh)^{-p+k} \frac{\Delta^k f(a+kh)}{h^k} \\
&= (t-a)^{-p+k} \lim_{n\to\infty}(-1)^{n-k}\binom{p-k-1}{n-k}(n-k)^{p-k} \\
&\quad \times \binom{n}{n-k}^{p-k} \times \lim_{h\to 0}\frac{\Delta^k f(a+kh)}{h^k} \\
&= \frac{f^k(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)}
\end{aligned} \tag{2.25}$$

şeklinde olup, buradan,

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^{n-k}\binom{p-k-1}{n-k}(n-k)^{p-k}=\lim_{n\to\infty}\frac{(-p+k+1)(-p+k+2)...(-p+n)}{(n-k)^{-p+k}(n-k)!}=\frac{1}{\Gamma(-p+k+1)}$$

ve

$$\lim_{h\to0}\left(\frac{n}{n-k}\right)^{p-k}=1 \quad \text{ve} \quad \lim_{h\to0}\frac{\Delta^k f(a+kh)}{h^k}=f^{(k)}(a)$$

elde edilir. Dolayısıyla (2.25) limiti bilindiğinden (2.24) limiti de kolayca hesaplanabilir.

(2.24) eşitliğinin ikinci toplam kısmının limitini bulmak için

$$\frac{1}{\Gamma(-p+m+1)}\sum_{r=0}^{n-m-1}(-1)^r\Gamma(-p+m+1)\binom{p-m-1}{r}r^{-m+p}\times h(rh)^{m-p}\frac{\Delta^{m+1}f(t-rh)}{h^{m+1}}$$

olarak yazalım. Teorem 1.2.1'i uygulamak için

$$\beta_r=(-1)^r\,\Gamma(-p+m+1)\binom{p-m-1}{r}r^{-m+p}$$

ve

$$\alpha_{n,r}=h(rh)^{m-p}\frac{\Delta^{m+1}f(t-rh)}{h^{m+1}}, \quad h=\frac{t-a}{n}$$

olarak alınsın.

$$\lim_{r\to\infty}\beta_r=\lim_{r\to\infty}(-1)^r\,\Gamma(-p+m+1)\binom{p-m-1}{r}r^{-m+p}=1 \tag{2.26}$$

olduğu gösterilebilir. Ayrıca $m-p>-1$ olduğunda

$$\lim_{r\to\infty}\sum_{r=0}^{n-m-1}\alpha_{n,r}=\lim_{\substack{h\to0\\nh=t-a}}\sum_{r=0}^{n-m-1}h(rh)^{m-p}\frac{\Delta^{m+1}f(t-rh)}{h^{m+1}}=\int_a^t(t-\tau)^{m-p}f^{(m+1)}(\tau)d\tau \tag{2.27}$$

elde edilir. (2.26) ve (2.27) eşitlikleri kullanılıp Teorem 1.2.1 uygulandığında

$$\begin{aligned}
&\lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} h^{-p}\sum_{r=0}^{n-m-1}(-1)^r\,\Delta^{m+1}\binom{p-m-1}{r} f(t-rh)\\
&=\frac{1}{\left(\Gamma(-p+m+1)\right)}\int_a^t (t-\tau)^{m-p} f^{(m+1)}(\tau)d\tau
\end{aligned}\tag{2.28}$$

bulunur. Son olarak (2.25) ve (2.28) eşitlikleri kullanılarak (2.22) limitine ulaşılır.

$${}_aD_t^p f(t)=\lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} f_h^{(p)}(t)$$

$${}_aD_t^p f(t)=\sum_{k=0}^{m}\frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)}+\frac{1}{\Gamma(-p+m+1)}\int_a^t (t-\tau)^{m-p} f^{(m+1)}(\tau)d\tau \tag{2.29}$$

Bu eşitlikler $[a,t]$ sürekli $f^{(k)}(t),\ (k=1,2,...,m+1)$ türevlerinin varsayımı altında hesaplanabilir.

$f(t)=(t-a)^{v}$ kuvvet fonksiyonunun ${}_aD_t^p$ Grünwald-Letnikov kesirli türevi, $v>-1$ ve $p<0$ olmak üzere

$${}_aD_t^p (t-a)^{v}=\frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma(v-p+1)}(t-a)^{v-p}$$

şeklinde ifade edilir.

$f\,(t)$ fonksiyonun kesirli mertebeden türevi ${}_aD_t^p$ ve $f\,(t)$ fonksiyonun tamsayı mertebeden türevleri $d^n f(t)/dt^n$ bu türevlerin bileşkesi aşağıdaki biçimde verilir.

$$\frac{d^n}{dt^n}\left({}_aD_t^p f(t)\right)={}_aD_t^p\left(\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right)={}_aD_t^{p+n}$$

$q$. mertebeden ve $p$. mertebeden kesirli türevlerin bileşkesi $p<0$ ve $q>0$ olmak üzere

$${}_aD_t^p\left({}_aD_t^q f(t)\right)={}_aD_t^q\left({}_aD_t^p f(t)\right)={}_aD_t^{p+q} f(t)$$

şeklindedir.

### 2.2.2 Riemann-Liouville Kesirli Türevi

Geri farkların kesirli mertebeden limiti olarak tanımlanan Grünwald-Letnikov türevi ile çalışmak çok uygun değildir. (2.29)'da verilen ifadenin terimlerinden integrali içeren taraf için çalışmak daha uygun olsa da, integral olmayan terim için (2.29)'un özel bir hali olacak şekilde çalışma yapılmalıdır.

Buna göre Riemann-Liouville kesirli türevinin bilinen tanımının en geniş hali aşağıdaki biçimde verilir.

$$ {}_a\boldsymbol{D}_t^p f(t) = \frac{1}{\Gamma(m+1-p)} \left(\frac{d}{dt}\right)^{m+1} \int_a^t (t-\tau)^{m-p} f(\tau) d\tau, \quad (m \le p < m+1) \qquad (2.30) $$

$f(t)$, ($m$+1) kez sürekli türeve sahip olmak üzere Grünwald-Letnikov kesirli türevinden elde edilen (2.29) eşitliği, aynı varsayımlar altında (2.30) eşitliğinden elde edilebilir. Yani

$$ \begin{aligned} {}_a\boldsymbol{D}_t^p f(t) &= \frac{1}{\Gamma(m+1-p)} \left(\frac{d}{dt}\right)^{m+1} \int_a^t (t-\tau)^{m-p} f(\tau) d\tau \\ &= \sum_{k=0}^{m} \left( \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} \right) + \frac{1}{\Gamma(-p+k+1)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p} f^{m+1}(\tau) d\tau \\ &= {}_aD_t^p f(t) \end{aligned} $$

şeklindedir. $f(t)$ fonksiyonu $t \ge 0$ için ($m$+1). mertebeden sürekli türeve sahip fonksiyonların sınıfından seçilirse (2.22)'deki Grünwald-Letnikov tanımı (2.30) Riemann-Liouville türevine denk olacaktır.

Şimdi Riemann-Liouville tanımının tamsayı mertebeden integral ve diferansiyelinin sonucu olarak elde edildiğini görelim.

$f(\tau)$ sürekli, her sonlu $(a,t)$ aralığında integrallenebilen, $\tau = a$ noktasında $r < 1$ mertebeden integrale sahip bir fonksiyon ise

$$ \lim_{\tau \to a} (\tau - a)^r f(\tau) = \text{sabit} \neq 0 $$

olup, buradan

$$f^{(-1)}(t)=\int_a^t f(\tau)d\tau$$

integrali mevcut ve sonlu bir değere sahiptir. Yani $t\to a$ iken 0'a eşittir. $\tau=a+y(t)$ değişken dönüşümünü yapılır ve $\varepsilon=\tau-a$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned}\lim_{t\to a} f^{(-1)}(t)&=\lim_{t\to a}\int_a^t f(\tau)d\tau\\&=\lim_{t\to a}(t-a)\int_0^1 f(a+y(t-a))dy\\&=\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{1-r}\int_0^1(\varepsilon y)^r f(a+y\varepsilon)y^{-r}dy=0\end{aligned}$$

olur. İki katlı integrali ise

$$f^{(-2)}(t)=\int_a^t d\tau_1\int_a^{\tau_1} f(\tau)d\tau=\int_a^{\tau_1} f(\tau)d\tau\int_\tau^t d\tau_1=\int_a^{\tau_1}(t-\tau)f(\tau)d\tau$$

şeklinde elde edilir. Yukarıdaki eşitliğin tekrar integrali alındığında $f(\tau)$'nun üç katlı integrali

$$\begin{aligned}f^{(-3)}(t)&=\int_a^t d\tau_1\int_a^{\tau_1} d\tau_2\int_a^{\tau_2} f(\tau_3)d\tau_3 f(\tau)\\&=\int_a^t d\tau_1\int_a^{\tau_1}(\tau_1-t)f(\tau)d\tau=\frac{1}{2}\int_a^t(t-\tau)^2 f(\tau)d\tau\end{aligned}$$

bulunur. Tümevarım ile genel durumda Cauchy formülü aşağıdaki biçimde elde edilir.

$$f^{(-n)}(t)=\frac{1}{\Gamma(n)}\int_a^t(t-\tau)^{n-1}f(\tau)d\tau\,. \tag{2.31}$$

Şimdi kabul edelim ki, $n\geq 1$ sabit ve $k\geq 0$ tamsayı olarak alındığında,

$$f^{(k-n)}(t)=\frac{1}{\Gamma(n)}D^{-k}\int_a^t(t-\tau)^{n-1}f(\tau)d\tau$$

olur, burada $D^{-k}$ ifadesi, ( $k\geq 0$ ) $k$- kez iterasyona sahip integrali tanımlamaktadır.

Diğer taraftan $n \geq 1$ olmak üzere ve $k > n$ tamsayı değerleri için $f(t)$ fonksiyonunun $(k-n)$. mertebeden türevi

$$f^{(k-n)}(t) = \frac{1}{\Gamma(n)} D^k \int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau \tag{2.32}$$

olarak tanımlanır. $D^k$, ( $k \geq 0$ ) $k$- kez iterasyona sahip diferansiyeli tanımlamaktadır.

$n$'in tamsayı olmayan değerlerinde, $n$ katlı integrale ulaşabilmek için (2.31)'deki Cauchy formülünde $n$ yerine $p > 0$ yazılarak aşağıdaki eşitlik elde edilebilir.

$$_a\boldsymbol{D}_t^{-p}(t) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^t (t-\tau)^{p-1} f(\tau) d\tau \tag{2.33}$$

Cauchy formülünde $n$ tamsayısı $n \geq 1$ şartını sağlamalıdır, $p$ için ise şartlar daha zayıftır, (2.33) integralinin var olabilmesi için $p > 0$ alınmalıdır.

$f(t)$, $t \geq a$ için sürekli ise (2.33) ile tanımlanan keyfi reel mertebeden integral aşağıdaki önemli özelliğe sahiptir:

$$_a\boldsymbol{D}_t^{-p}\left( {}_a\boldsymbol{D}_t^{-q} f(t) \right) = {}_a\boldsymbol{D}_t^{-p-q} f(t).$$

Bu özellik aşağıdaki gibi ispatlanabilir.

$$\begin{aligned}
_a\boldsymbol{D}_t^{-p}\left( {}_a\boldsymbol{D}_t^{-q} f(t) \right) &= \frac{1}{\Gamma(q)} \int_a^t (t-\tau)^{q-1} {}_a\boldsymbol{D}_t^{-p} f(\tau) d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \int_a^t (t-\tau)^{q-1} d\tau \int_a^\tau (t-\xi)^{p-1} f(\xi) d\xi \\
&= \frac{1}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \int_a^t f(\xi) d\xi \int_\xi^t (t-\tau)^{q-1} (t-\xi)^{p-1} d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(p+q)} \int_\xi^t (t-\xi)^{p+q-1} f(\xi) d\xi \\
&= {}_a\boldsymbol{D}_t^{-p-q} f(t)
\end{aligned}$$

($k$-$n$). mertebeden (2.32) türevi, türev kavramını tam sayı olmayan mertebeden türeve geçiş için imkan tanımaktadır. $k$ tamsayı olarak kalır ve $n$ yerine $k - a > 0$ olacak şekilde $a$ sayısı yazılırsa

$$ {}_a\boldsymbol{D}_t^{k-a} f(t) = \frac{1}{\Gamma(a)} \frac{d^k}{dt^k} \int_a^t (t-\tau)^{a-1} f(\tau) d\tau, \quad (0 < \alpha \le 1) $$

elde edilir. $p = k - a$ seçildiğinde yukarıdaki eşitliği Malinowska ve Odzijewicz (2015) kaynağından

$$ {}_a\boldsymbol{D}_t^{p} f(t) = \frac{1}{\Gamma(k-p)} \frac{d^k}{dt^k} \int_a^t (t-\tau)^{k-p-1} f(\tau) d\tau, \ (k-1 \le p \le k) \tag{2.34} $$

ya da

$$ {}_a\boldsymbol{D}_t^{p} f(t) = \frac{d^k}{dt^k} \left( {}_a\boldsymbol{D}_t^{-(k-p)} f(t) \right), (k-1 \le p \le k) $$

olarak yazarız. Dikkat edilmelidir ki, yukarıdaki ifade bilinen tamsayı mertebeden türev tanımı ile benzerdir.

$f(t) = (t-a)^v$ kuvvet fonksiyonunun ${}_a\boldsymbol{D}_t^{p} f(t)$ Riemann-Liouville kesirli türevi, *v* reel bir sayı olmak üzere

$$ {}_a\boldsymbol{D}_t^{p} \left( (t-a)^v \right) = \frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma(v+1-p)} (t-a)^{v-p} $$

şeklinde verilir.

${}_a\boldsymbol{D}_t^{p} f(t)$ fonksiyonun kesirli mertebeden türevi ve $d^n f(t) / dt^n$ sırasıyla $f(t)$ fonksiyonun tamsayı mertebeden türevleri olmak üzere bu türevlerin bileşkeleri

$$ \frac{d^n}{dt^n} \left( {}_a\boldsymbol{D}_t^{p} f(t) \right) = {}_a\boldsymbol{D}_t^{p} \left( \frac{d^n f(t)}{dt^n} \right) = {}_a\boldsymbol{D}_t^{p+n} f(t) $$

şeklinde ifade edilir.

*q*. mertebeden ve *p*. mertebeden kesirli türevlerin bileşkesi, $p \ne q$ olmak üzere

$$ {}_a\boldsymbol{D}_t^{p} \left( {}_a\boldsymbol{D}_t^{q} f(t) \right) = {}_a\boldsymbol{D}_t^{q} \left( {}_a\boldsymbol{D}_t^{p} f(t) \right) = {}_a\boldsymbol{D}_t^{p+q} f(t) $$

ile tanımlanır.

### 2.2.3 Caputo Kesirli Türevi

(2.34) ile verilen Riemann-Liouville kesirli türevi, kesirli türev ve integrallerin matematiksel uygulamalarının (örneğin tamsayı mertebeden diferansiyel denklemlerin çözümünde, yeni fonksiyon sınıflarının tanımlanmasında vs.) gelişiminde önemli rol oynamıştır. Fakat kesirli türevin kullanılmasıyla, matematiksel özelliklerinin daha iyi tanımlanmasına olanak sağlayan bazı alanlarda bu tanım yetersiz kalmaktadır.

Uygulamalı problemler kesirli türevlerin tanımının kullanılmasını gerektirir. Bu tür uygulama problemlerinde $f(a),\ f'(a)$ gibi yorumlanabilir başlangıç koşullarına gerek duyulmaktadır. Ancak Riemann-Liouville kesirli türevinde limit değerlerini içeren başlangıç koşulları bulunmaktadır. Örneğin $t=a$ alt limit değeri için başlangıç koşulları

$$
\begin{aligned}
&\lim_{t\to a} {}_a\boldsymbol{D}_t^{a-1} f(t) = b_1\,, \\
&\lim_{t\to a} {}_a\boldsymbol{D}_t^{a-2} f(t) = b_2\,, \\
&\ldots \\
&\lim_{t\to a} {}_a\boldsymbol{D}_t^{a-n} f(t) = b_n
\end{aligned}
$$

olarak verilir. Bu tarz başlangıç değer problemlerinin çözümü yapılabilse de, çözümleri pratikte kullanışsızdır. Bu sorunun çözümüne alternatif olarak Caputo tarafından aşağıdaki tanım verilmiştir

$$
{}_a^C D_t^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}},\ \ (n-1 \le a \le n)\,. \qquad (2.35)
$$

$f(t)$ fonksiyonunun $a \to n$ iken Caputo kesirli türevi, $f(t)$ fonksiyonun $n$. mertebeden bilinen türevi halini alır. $0 \le n-1 < a < n$ ve $f(t)$ her $T > a$ için $[a,T]$ aralığında ($n$+1) sürekli türeve sahip olsun. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
&\lim_{a\to n} {}_a^C D_t^{p} f(t) = \lim_{a\to n}\left( \frac{f^{(n)}(a)(t-a)^{n-a}}{\Gamma(n-a+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-a+1)} \int_a^t (t-\tau)^{n-a}\ f^{(n+1)}(\tau)d\tau \right), \\
&\lim_{a\to n} {}_a^C D_t^{p} f(t) = f^{(n)}(a) + \int_a^t f^{(n+1)}(\tau)d\tau\,, \\
&\lim_{a\to n} {}_a^C D_t^{p} f(t) = f^{(n)}(t), \quad n = 1, 2, \ldots
\end{aligned}
$$

olur. Bu da Grünwald-Letnikov ve Riemann-Liouville yaklaşımlarına benzer olarak Caputo yaklaşımının da tamsayı mertebeden türev ile arasında bir ilişki olduğunu göstermektedir.

Caputo türevinin Riemann-Liouville türevinden başka bir farkı da, başlangıç koşulları dışında $C$ gibi bir sabitin türevinin 0 olmasıdır. $a$ alt limit değerinin sonlu olduğu durumlarda $C$ sayısının $\alpha$. mertebeden Riemann-Liouville kesirli türevi ${}_0\boldsymbol{D}_t^{a} C = Ct^{a} / \Gamma(1-a)$ dır.

Riemann-Liouville ve Caputo yaklaşımlarının arasındaki bir diğer fark aşağıdaki şekilde ifade edilebilir. Caputo türevinde

$$ {}_a^C D_t^{\alpha} \left( {}_a^C D_t^{m} f(t) \right) = {}_a^C D_t^{\alpha+m} f(t), \ (m = 0,1,2,...; \quad n-1 < \alpha < n) $$

iken, Riemann-Liouville türevinde

$$ {}_a\boldsymbol{D}_t^{m} \left( {}_a\boldsymbol{D}_t^{\alpha} f(t) \right) = {}_a\boldsymbol{D}_t^{\alpha+m} f(t), \quad (m = 0,1,2,...; \quad n-1 < \alpha < n) $$

olur.

Her iki kesirli türev tanımında da diferansiyel operatörünün değişimi aşağıdaki koşullar altında sağlanır. $f^{(s)}(0) = 0$, $s = n,\ n+1,...,m$ ve $m = 0,1,2,...;\ n-1 < \alpha < n$ olmak üzere

$$ {}_a^C D_t^{\alpha} \left( {}_a^C D_t^{m} f(t) \right) = {}_a^C D_t^{m} \left( {}_a^C D_t^{\alpha} f(t) \right) = {}_a^C D_t^{\alpha+m} f(t) $$

ve $f^{(s)}(0) = 0, \quad s = 0,1,2,...,m; \quad m = 0,1,2,...; \quad n-1 < \alpha < n$ olmak üzere

$$ {}_a\boldsymbol{D}_t^{m} \left( {}_a\boldsymbol{D}_t^{\alpha} f(t) \right) = {}_a\boldsymbol{D}_t^{\alpha} \left( {}_a\boldsymbol{D}_t^{m} f(t) \right) = {}_a\boldsymbol{D}_t^{\alpha+m} f(t) . $$

Görüldüğü gibi Riemann-Liouville yaklaşımının aksine Caputo kesirli türevinde $s = 0,1,...,n-1$ alınırsa $f^{(s)}(0)$ ’nin değerleri için hiçbir kısıt bulunmamaktadır.

### 2.2.4 Ardışık Kesirli Türev ve Miller-Ross Ardışık Türevi

Keyfi mertebeden integrasyonun ve diferansiyelin ana fikri yinelenen diferansiyel ve integrasyonun genelleştirilmesine dayanır. Tüm yaklaşımlarda genel amaç, $d^n/dt^n$ ifadesinde tamsayı olan $n$ parametresinin yerine tamsayı olmayan $p$ parametresinin kullanılmasıdır. $n$ tamsayısı yerine $p$'yi yerleştirirken, $p$'nin tamsayı olmayan değerleri için bazı özellikler ile fonksiyon sınıfları gibi diğer ayrıntılar farklılık gösterse de; $n$ tamsayısı yerine doğrudan değişim yapılması için tüm çabanın gösterildiği açıktır. Öte yandan birçok uygulama için büyük önem taşıyan ve daha az bilinen başka bir yol daha vardır. Bu yaklaşım $n$. mertebeden diferansiyelin

$$\frac{d^n f(t)}{dt^n} = \underbrace{\frac{d}{dt}\frac{d}{dt}\cdots\frac{d}{dt}}_{n} f(t) \tag{2.36}$$

olacak şekilde birinci mertebeden diferansiyelin basit bir serisi olarak yazılabilmesine dayalıdır. $0 \le \alpha \le 1$ için, birinci mertebeden $d/dt$ türevi yerine, tamsayı olmayan $\alpha$ mertebeli $\boldsymbol{D}^{\alpha}$ türevi ile değiştirmek için uygun bir yöntem var ise (2.36)'yı

$$\boldsymbol{D}^{n\alpha} f(t) = \underbrace{\boldsymbol{D}^{\alpha}\boldsymbol{D}^{\alpha}\ldots\boldsymbol{D}^{\alpha}}_{n} f(t) \tag{2.37}$$

ifadesi ile değerlendirmek mümkündür. Miller ve Ross (1993) kaynağında (2.37) ile tanımlanan genelleştirilmiş türevinde, $\boldsymbol{D}^{\alpha}$ Riemann-Liouville kesirli türevidir. Aynı kaynakta (2.37) tipindeki ardışık kesirli türevler ile diferansiyel denklemlere yer verilmiştir.

$D^{\alpha}$ Grünwald-Letnikov türevi, ${}^{C}D^{\alpha}$ Caputo türevi ya da diğer kesirli türevleri yorumlayarak diğer ardışık kesirli türevler de elde edilebilir, ancak burada bahsedilmemiştir.

(2.37) yerine, (2.36)'daki her bir birinci mertebeden türev yerine, o türevlere mutlaka eşit olmayan kesirli türevler yerleştirilirse ve daha genel ifadeyi dikkate alırsak

$$\begin{gathered}\mathcal{D}^{\alpha} f(t) = \boldsymbol{D}^{\alpha_1}\boldsymbol{D}^{\alpha_2}\ldots\boldsymbol{D}^{\alpha_n} f(t), \\ \alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n\end{gathered} \tag{2.38}$$

olacak şekilde ardışık kesirli türev ifadesini elde ederiz. (2.38)'deki $\mathcal{D}^{\alpha}$ sembolü, Riemann-Liouville, Caputo, Grünwald-Letnikov ve diğer türev operatörleri için kullanılabilirdir. Yani, Riemann-Liouville kesirli türevi ve Caputo kesirli türevi (2.38)'deki sıralı türevin sadece özel durumlarıdır.

Buradan, Miller-Ross ardışık türevi

$$\sigma_m = \sum_{j=1}^{m} a_j; \quad 0 < a_j \leq 1; \quad (j = 1, 2, ..., m)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} {}_a\mathcal{D}_t^{\sigma_m} &\equiv {}_a\boldsymbol{D}_t^{a_m}\, {}_a\boldsymbol{D}_t^{a_{m-1}} \cdots {}_a\boldsymbol{D}_t^{a_1} \\ {}_a\mathcal{D}_t^{\sigma_m - 1} &\equiv {}_a\boldsymbol{D}_t^{a_m - 1}\, {}_a\boldsymbol{D}_t^{a_{m-1}} \ldots\ldots {}_a\boldsymbol{D}_t^{a_1} \end{aligned} \tag{2.39}$$

şeklinde tanımlanır. Ardışık türev kesirli diferansiyel denklemlerin çözümünde önemli bir yere sahiptir.

# 3. LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ VE ÖZELLİKLERİ

Tezin bu kısmında öncelikle temel Laplace dönüşümü hakkında hatırlatma yapılacak olup, ardından kesirli türevlerin Laplace tekniği altında dönüşümü Podnubly (1999) kaynağı esas alınarak incelenecektir.

## 3.1 Laplace Dönüşümü ve Temel Özellikleri

Öncelikle, Laplace Dönüşümü ile ilgili bazı temel bilgileri hatırlayalım.

$s$ kompleks değişken ve onun fonksiyonu $F(s)$ ise $f(t)$ 'nin Laplace dönüşümü

$$F(s) = L\{f(t):s\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \tag{3.1}$$

şeklinde tanımlanır (Li ve Zeng 2015). (3.1)'deki integralin var olabilmesi için; $f(t)$ fonksiyonu $a$ üstel mertebeli olmalıdır, bu da pozitif $T$ ve $M$ sabitleri için

$$e^{-at}\left|f(t)\right| \le M, \quad \forall t > T$$

şartını sağlamasıdır. Başka bir deyişle $f(t)$ fonksiyonunun (üstel fonksiyon) $t \to \infty$ 'a giderken daha hızlı büyümemesi gerekir.

Genel olarak, dönüştürülmek istenen fonksiyonu belirtmek için küçük harfler kullanılırken, fonksiyonun Laplace dönüşümünün sonucunu büyük harfle ifade ederiz.

$f(t)$ fonksiyonunun orijinali $F(s)$ 'nin ters Laplace dönüşümü yardımı ile elde edilir. (3.1) deki integralin sağ tarafının mutlak yakınsak olduğu yerde

$$f(t) = L^{-1}\{F(s);t\} = \int_{c-i\infty}^{c-i\infty} e^{st}F(s)ds; \quad c = \mathrm{Re}(s) > c_0$$

dır. Ters Laplace dönüşümünün doğrudan değerlendirmesi yukarıdaki formülü kullanırken daha karmaşıktır. Bununla birlikte, bizim aradığımız bilinmeyen $f(t)$ fonksiyonunun davranışı hakkında kullanışlı bilgiler verir.

Şimdi ters Laplace dönüşümünün ne zaman tek olduğunu ifade eden teoremi verelim.

**Teorem (Lerch Teoremi):** Eğer $f(t)$, her $0 \le t \le N$ sonlu aralığında parçalı sürekli ve $t > N$ için üstel mertebeli ise, bu taktirde $F(s)$'nin ters Laplace dönüşümü tektir.

Biz aksi söylenmedikçe yukarıdaki teoremin şartlarının sağlandığını varsayacağız. Şimdi Laplace dönüşümü verilmiş bazı fonksiyonların, yani bilmemiz gereken bazı fonksiyonların ters Laplace dönüşümlerini verelim (Daşcıoğlu ve Sezer 2017).

**Tablo 3.1** Bazı Temel Fonksiyonların Laplace Dönüşümleri

| $F(s)$ | $f(t)$ | $F(s)$ | $f(t)$ |
|---|---|---|---|
| $1/s$ | $1$ | $1/(s+a)$ | $e^{-at}$ |
| $1/s^2$ | $t$ | $1/(s-a)$ | $e^{at}$ |
| $1/s^{n+1},\ n=0,1,2\ldots$ | $t^n/n!$ | $a/(s^2+a^2)$ | $\sin at$ |
| $1/s^{n+1},\quad n>-1$ | $t^n/\Gamma(n+1)$ | $s/(s^2+a^2)$ | $\cos at$ |
| $1$ | $\delta(t)$ | $a/(s^2-a^2)$ | $\sinh at$ |
| $e^{-as}$ | $\delta(t-a)$ | $s/(s^2-a^2)$ | $\cosh at$ |

$f(t)$ ve $g(t)$ fonksiyonlarının konvolüsyon çarpımı ise

$$f(t)*g(t)=\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)dt$$

şeklinde ifade edilir. (bunlar $t<0$ için sıfıra eşittir). Bunun Laplace dönüşümü ise $f(t)$ ve $g(t)$ fonksiyonlarının Laplace dönüşümlerinin çarpımına eşittir. Yani,

$$L\{f(t)*g(t):s\}=F(s)G(s)\,. \tag{3.2}$$

Bu $F(s)$ ve $G(s)$'nin var olması ile mümkündür. (3.2) özelliğini Riemann-Liouville kesirli integralinin Laplace dönüşümünü değerlendirmek için kullanacağız.

Bizim ihtiyacımız olan başka bir kullanışlı özellik ise, $f(t)$ fonksiyonunun bir $n.$ tamsayı mertebeden türevinin Laplace dönüşümü için olan formülüdür. Bu da uygun integrallerin varlığı altında (3.1)'deki tanımdan aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$L\left\{f^{n}(t):s\right\}=s^{n}F(s)-\sum_{k=0}^{n-1}s^{n-k-1}f^{(k)}(0)=s^{n}F(s)-\sum_{k=0}^{n-1}s^{k}f^{(n-k-1)}(0)\,. \quad (3.3)$$

Mittag Leffler fonksiyonunun (2.7) ve (2.8)'de verilen ifadesini hatırlarsak ve Laplace dönüşümü ile

$$L\left\{t^{\alpha k+\beta-1}E_{\alpha,\beta}^{(k)}(\pm at^{\alpha})\right\}=\frac{k!\,p^{\alpha-\beta}}{\left(p^{\alpha}\mp a\right)^{k+1}}, \quad (\mathrm{Re}(p)>|a|^{1/\alpha})$$

$$L\left\{t^{\frac{k-1}{2}}E_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}^{(k)}(\pm a\sqrt{t})\right\}=\frac{k!}{\left(\sqrt{p}\mp a\right)^{k+1}}, \quad (\mathrm{Re}(p)>a^{2})$$

şeklinde yazabiliriz. Buradan bazı fonksiyonların ters Laplace dönüşümlerine örnekler verelim. Oluşturulan bu tablodaki dönüşümler kesirli diferansiyel denklemlerin çözümünde kolaylık sağlayacaktır.

**Tablo 3.2** Bazı Mittag-Leffler fonksiyonlarını içeren ifadelerin Laplace dönüşümleri

| $F(s)$ | $f(t)$ | $F(s)$ | $f(t)$ |
|---|---|---|---|
| $\dfrac{1}{s^{1/2}+a}$ | $t^{-1/2}E_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}\left(-a\sqrt{t}\right)$ | $\dfrac{1}{s^{\alpha}-\lambda^{2}\beta^{2}}$ | $t^{a-1}E_{a,a}\left(-\lambda^{2}\beta^{2}t^{a}\right)$ |
| $\dfrac{1}{s^{\alpha}-\lambda}$ | $t^{a-1}E_{a,a}\left(\lambda t^{a}\right)$ | $\dfrac{1}{s^{\alpha+\beta}+a}$ | $t^{\alpha+\beta-1}E_{\alpha+\beta,\alpha+\beta}\left(-at^{\alpha+\beta}\right)$ |
| $\dfrac{s^{-q}}{s^{Q-q}+1}$ | $t^{Q-1}E_{Q-q,Q}\left(-t^{Q-q}\right)$ | $\dfrac{s^{\alpha-q}}{s^{\alpha+\beta-q}+1}$ | $t^{\beta-1}E_{\alpha+\beta-q,\beta}\left(-t^{\alpha+\beta-q}\right)$ |
| $\dfrac{s^{k-1}}{s^{\alpha}-\lambda}$ | $t^{a-k}E_{a,a-k+1}\left(\lambda t^{a}\right)$ | $\dfrac{s^{-q}}{s^{\alpha+\beta-q}+1}$ | $t^{\alpha+\beta-1}E_{\alpha+\beta-q,\alpha+\beta}\left(-t^{\alpha+\beta-q}\right)$ |

Diğer bölümlerde alt sınırı $a=0$ durumunu değerlendirirken kesirli türevin Laplace dönüşümünü inceleyeceğiz.

### 3.2 Kesirli Türevlerin Laplace Dönüşümleri

Bu kısımda Riemann-Liouville, Grünwald-Letnikov, Caputo ve Miller-Ross kesirli türevlerinin Laplace dönüşümlerini (Podnubly 1999) kaynağını esas alarak inceleyeceğiz.

### 3.2.1 Riemann-Liouville Kesirli Türevinin Laplace Dönüşümü

$p>0$ mertebeli Grünwald-Letnikov ve Riemann-Liouville kesirli integrallerinin Laplace dönüşümü ile başlayacağız. Kesirli türevi $g(t)=t^{p-1}$ ve $f(t)$ fonksiyonlarının konvolüsyonu şeklinde yazıyoruz.

$$ {}_a\boldsymbol{D}_t^{-p} f(t) = {}_0 D_t^{-p} f(t) = \frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^t (t-\tau)^{p-1} f(\tau)d\tau = \frac{1}{\Gamma(p)} g(t) * f(t) = \frac{1}{\Gamma(p)} t^{p-1} * f(t) $$

$g(t)=t^{p-1}$ fonksiyonunun Laplace dönüşümünü alarak

$$ G(s) = L\left\{t^{p-1};s\right\} = \Gamma(p)s^{-p} \tag{3.4} $$

elde ederiz. Böylece (3.2)'deki konvolüsyon formülünü kullanarak Riemann-Liouville ve Grünwald-Letnikov kesirli integrallerinin Laplace dönüşümü elde edilir.

$$ \begin{aligned} L\left\{{}_0\boldsymbol{D}_t^{-p} f(t):s\right\} &= L\left\{{}_0 D_t^{-p} f(t):s\right\} = \frac{1}{\Gamma(p)} L\left\{t^{p-1}\right\} L\left\{f(t)\right\} \\ &= \frac{1}{\Gamma(p)} \frac{\Gamma(p-1+1)}{s^p} F(s) \\ &= s^{-p} F(s) \end{aligned} \tag{3.5} $$

Şimdi Riemann-Liouville kesirli türevinin Laplace dönüşümünün değerlendirmesine dönelim. Aşağıdaki formda yazalım.

$$ {}_0\boldsymbol{D}_t^{p} f(t) = g^{(n)}(t)\,, $$

$$ g(t) = {}_0\boldsymbol{D}_t^{-(n-p)} f(t) \frac{1}{\Gamma(k-p)}\int_0^t (t-\tau)^{n-p-1} f(\tau)d\tau, \quad (n-1\le p<n)\,. $$

(3.5) da verilen tamsayı mertebeli türevin Laplace dönüşümü için verilen formülü kullanırsak;

$$ L\left\{{}_0\boldsymbol{D}_t^{p} f(t);s\right\} = L\left\{g^{(n)}(t);s\right\} = s^n G(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k g^{(n-k-1)}(0) \tag{3.6} $$

bulunur ve (3.5) deki $g(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümünden

$$G(s) = L\left\{g(t)\right\} = L\left\{ {}_0\boldsymbol{D}_t^{-(n-p)} f(t)\right\} = s^{-(n-p)}F(s) \tag{3.7}$$

elde edilir. Ek olarak; (2.34)'deki Riemann-Liouville kesirli türevin tanımından

$$g^{(n-k-1)}(t) = \frac{d^{n-k-1}}{dt^{n-k-1}}\, {}_0\boldsymbol{D}_t^{-(n-p)} f(t) = {}_0\boldsymbol{D}_t^{p-k-1} f(t) \tag{3.8}$$

olur ve (3.7) ve (3.8)'i (3.6)'da yerine yazarsak; Riemann-Liouville kesirli türevinin $p$. mertebeden Laplace dönüşümü sonuç ifadesini $n-1 \leq p < n$ için

$$\begin{aligned} L\left\{ {}_0\boldsymbol{D}_t^p f(t) : s\right\} &= s^n G(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k g^{(n-k-1)}(0) \\ &= s^n s^{-(n-p)} F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k \left[ {}_0\boldsymbol{D}_t^{p-k-1} f(t)\right]_{t=0} \\ &= s^p F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k \left[ {}_0\boldsymbol{D}_t^{p-k-1} f(t)\right]_{t=0} \end{aligned} \tag{3.9}$$

elde ederiz.

Riemann-Liouville kesirli türevinin Laplace dönüşümü iyi bilinmesine rağmen, bununla birlikte $t=0$ 'da kesirli türevin limit değerinin fiziksel yorumu olmadığı için pratik uygulanabilirliği sınırlıdır.

### 3.2.2 Caputo Kesirli Türevinin Laplace Dönüşümü

Caputo Kesirli türevinin Laplace dönüşümünü kurmak için (2.35)'deki Caputo türevini aşağıdaki formda yazalım,

$$\begin{aligned} {}_0^C D_t^p f(t) &= {}_0\boldsymbol{D}_t^{-(n-p)} g(t) = \frac{1}{\Gamma(p-n)} \int_0^t (t-\tau)^{n-p+1} g(\tau)\, d\tau \\ g(t) &= f^{(n)}(t), \quad (n-1 < p \leq n). \end{aligned}$$

(3.5) deki Riemann-Liouville kesirli integralinin Laplace dönüşüm formülünü kullanarak;

$$L\left\{ {}_0^C D_t^p f(t); s\right\} = L\left\{ \boldsymbol{D}^{-(n-p)} g(t); s\right\} = s^{-(n-p)} G(s) \tag{3.10}$$

elde edilir. (3.3)'e göre

$$G(s)=L\left\{f^{n}(t)\right\}=L\left\{g(t)\right\}$$
$$=s^{n}F(s)-\sum_{k=0}^{n-1}s^{n-k-1}f^{(k)}(0)$$
$$=s^{n}F(s)-\sum_{k=0}^{n-1}s^{k}f^{(n-k-1)}(0)$$

dır. Yukarıdaki ifadeyi (3.10)'da yerine yazarsak Caputo kesirli türevinin Laplace dönüşüm formülüne ulaşırız.

$$L\left\{{}_0^C D_t^p f(t);s\right\}=s^{-(n-p)}G(s)=s^{-(n-p)}\left[s^{n}F(s)-\sum_{k=0}^{n-1}s^{n-k-1}f^{(k)}(0)\right]$$
$$=s^{p}F(s)-\sum_{k=0}^{n-1}s^{p-n+n-k-1}f^{(k)}(0)$$
$$=s^{p}F(s)-\sum_{k=0}^{n-1}s^{p-k-1}f^{(k)}(0);\quad \left(n-1<p\leq n\right)$$

$f(t)$ fonksiyonu ve onun $t=0$ alt sınırında $f(t)$ fonksiyonun türevinin değerini içeren Caputo türevinin Laplace dönüşümü formülünün fiziksel yorum kesinlikle vardır. Örneğin $f(0)$ başlangıç pozisyonu iken $f'(0)$ başlangıç hızı, $f''(0)$ başlangıç ivmesidir. Biz umuyoruz ki bu formül geleneksel formdaki başlangıç koşullarıyla beraber sabit katsayılı lineer kesirli diferansiyel denklemlerin uygulamalı problemlerin çözümünde kullanışlı olur.

### 3.2.3 Grünwald-Letnikov Kesirli Türevinin Laplace Dönüşümü

İlk olarak $0\leq p<1$ olduğu durumu göz önüne alalım. Grünwald-Letnikov kesirli türevinde alt sınır $a=0$ ve $t=0$'da $f(t)$ fonksiyonu sınırlıdır, ve (2.29)'dan

$${}_0D_t^p f(t)=\frac{f(0)t^{-p}}{\Gamma(1-p)}+\frac{1}{\Gamma(1-p)}\int_0^t (t-\tau)^{-p}f'(\tau)d\tau$$

şeklinde yazılabilir.

(3.4)'deki kuvvet fonksiyonunun Laplace dönüşümünü; (3.2)'deki Laplace dönüşümünün konvolüsyonunu ve (3.3)'deki tamsayı mertebeden türevin Laplace dönüşümünü kullanarak;

$$L\left\{ {}_0D_t^p f(t);s \right\} = \frac{f(0)t^{-p}}{\Gamma(1-p)} + \frac{1}{\Gamma(1-p)}\int_0^t (t-\tau)^{-p} f'(\tau)d\tau$$

$$= L\left\{ \frac{f(0)t^{-p}}{\Gamma(1-p)} \right\} + L\left\{ \frac{1}{\Gamma(1-p)}\int_0^t (t-\tau)^{-p} f'(\tau)d\tau \right\}$$

$$= \frac{f(0)s^{p-1}\Gamma(1-p)}{\Gamma(1-p)} + L\left\{ {}_0D_t^{p-1} f'(t) \right\}$$

$$= f(0)s^{p-1} + s^{p-1}\left[ sF(s) - f(0) \right] = f(0)s^{p-1} + s^p F(s) - s^{p-1} f(0)$$

$$= s^p F(s)$$

Grünwald-Letnikov kesirli türevinin Laplace dönüşümünü elde ederiz.

$p > 1$ iken Grünwald-Letnikov kesirli türevinin Laplace dönüşümü klasik anlamda yoktur. Çünkü böyle bir durumda (2.29)'daki formülde entegre edilmeyen toplamlar vardır. Böyle fonksiyonların Laplace dönüşümleri ıraksak integraller ile verilmiştir.

Bununla birlikte, (3.4)'deki kuvvet fonksiyonunun Laplace dönüşümü; $p$ parametresine bağlı, analitik ve sürekli iken müsaade eder. Bu yaklaşım genelleştirilmiş fonksiyonlara eşittir. Iraksak integraller bir bakıma sonlu kısmi integraller olarak adlandırılır.

Farz edelim ki, $m < p < m+1$ ve (3.4)'deki kuvvet fonksiyonunun Laplace Dönüşümü, (3.3)'deki tamsayı mertebeden türevin Laplace dönüşümü, (3.2)'deki Laplace Dönüşümünün konvolüsyonunu kullanarak;

$$ {}_0D_t^p f(t) = \lim_{\substack{h\to\infty \\ nh=t-a}} f_h^{(p)}(t) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(0)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(-p+m+1)}\int_0^t (t-\tau)^{m-p} f^{(m+1)}(\tau)d\tau$$

yazılır ve

$$
\begin{aligned}
L\left\{{}_0D_t^p f(t):s\right\} &= L\left\{\sum_{k=0}^{m}\frac{f^{(k)}(0)\left(t-a\right)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)}\right\}+L\left\{\frac{1}{\Gamma(-p+m+1)}\int_0^t\left(t-\tau\right)^{m-p}f^{(m+1)}(\tau)d\tau\right\}\\
&=\sum_{k=0}^{m}f^{(k)}(0)L\left\{\frac{\left(t-a\right)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)}\right\}+\left\{\frac{\left(t-\tau\right)^{m-p}}{\Gamma(-p+m+1)}*f^{(m+1)}(\tau);s\right\}\\
&=\sum_{k=0}^{m}f^{(k)}(0)\frac{s^{p-k-1}\Gamma\left(k-p+1\right)}{\Gamma(-p+k+1)}+\\
&\quad+\frac{s^{p-m-1}\Gamma\left(-p+m+1\right)}{\Gamma\left(-p+m+1\right)}\left(s^{m+1}F(s)-\sum_{k=0}^{m}f^{(k)}(0)s^{m-k}\right)\\
&=\sum_{k=0}^{m}f^{(k)}(0)s^{p-k-1}+s^pF(s)-\sum_{k=0}^{m}f^{(k)}(0)s^{p-k-1}\\
&=s^pF(s)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Yukarıdaki formülün $0<p<1$ iken geçerli olduğuna dikkat etmek gerekir. $p>1$ için genelleştirilmiş fonksiyonlar söz konusu olur ve bu nedenle, uygulanan bir problemin formülasyonu, genelleştirilmiş fonksiyonların özellikleri ve sonuçları ile yorumlanarak yapılmalıdır.

### 3.2.4 Miller-Ross Kesirli Türevinin Laplace Dönüşümü

Şimdi Miller-Ross Ardışık Türevinin notasyonunu hatırlayalım.

$$
\begin{aligned}
{}_a\mathcal{D}_t^{\sigma_m} &\equiv {}_a\boldsymbol{D}_t^{a_m}\,{}_a\boldsymbol{D}_t^{a_{m-1}}\ldots{}_a\boldsymbol{D}_t^{a_1},\\
{}_a\mathcal{D}_t^{\sigma_m-1} &\equiv {}_a\boldsymbol{D}_t^{a_m-1}\,{}_a\boldsymbol{D}_t^{a_{m-1}}\ldots{}_a\boldsymbol{D}_t^{a_1},
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

$$
\sigma_m=\sum_{j=1}^{m}a_j;\quad 0<a_j\le 1;\quad (j=1,2,\ldots,m).
$$

(3.11)'deki ardışık türevin Laplace dönüşümünü yazalım. $k=0,1,\ldots,m-1$ için,

$$
\begin{aligned}
L\left\{{}_a\mathcal{D}_t^{\sigma_m}f(t);s\right\} &= s^{\sigma_m}F(s)-\sum_{k=0}^{m-1}s^{\sigma_m-\sigma_{m-k}}\left[{}_0\mathcal{D}_t^{\sigma_{m-k}-1}f(t)\right]_{t=0}\\
{}_a\mathcal{D}_t^{\sigma_{m-k}-1} &\equiv {}_a\boldsymbol{D}_t^{a_{m-k}-1}\,{}_a\boldsymbol{D}_t^{a_{m-k-1}}\ldots{}_a\boldsymbol{D}_t^{a_1}
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

*m*-kez diferansiyellenen $f(t)$ fonksiyonu için (3.12)'nin özel durumu $a_m = \mu, a_k = 1,\ (k = 1, 2, ..., m-1)$ çok daha önce Caputo tarafından elde edilmişti. $a_1 = \mu,\ a_k = 1,\ (k = 2, 3, ..., m)$ olarak alırsak elde edilen ifade (3.9)'daki klasik formüle dönüşür.

(3.12)'yi ispatlamak için, öncelikle (3.9)'daki Riemann-Liouville kesirli türevinin Laplace dönüşümünün $0 < a \leq 1$ şartı altında hatırlamak lazımdır.

$$L\left\{ {}_0\boldsymbol{D}_t^a f(t); s \right\} = s^a F(s) - \left[ {}_0\boldsymbol{D}_t^{a-1} f(t) \right]_{t=0}$$

ve bu formülün *m*-kez türevi alınarak;

$$\begin{aligned}
L\left\{ {}_a\mathcal{D}_t^{\sigma_m} f(t); s \right\} &= L\left\{ {}_a\boldsymbol{D}_t^{a_m}\ {}_a\mathcal{D}_t^{\sigma_{m-1}} f(t); s \right\} \\
&= s^{a_m} L\left\{ {}_a\mathcal{D}_t^{\sigma_{m-1}} f(t); s \right\} - \left[ {}_a\boldsymbol{D}_t^{\sigma_m}\ {}_0\mathcal{D}_t^{\sigma_{m-1}} f(t) \right]_{t=0} \\
&= s^{a_m} \left\{ s^{a_{m-1}} L\left\{ {}_0\mathcal{D}_t^{\sigma_{m-2}} f(t); s \right\} - s^{a_m} \left[ {}_0\mathcal{D}_t^{\sigma_{m-1}-1} f(t) \right]_{t=0} - \left[ {}_0\mathcal{D}_t^{\sigma_m - 1} f(t) \right]_{t=0} \right\} \\
&= s^{a_m} s^{a_{m-1}} \left\{ s^{a_{m-2}} L\left\{ {}_0\mathcal{D}_t^{\sigma_{m-3}} f(t) \right\} - \left[ {}_0\mathcal{D}_t^{\sigma_{m-2}-1} f(t) \right]_{t=0} \right\} \\
&\ \vdots \\
&= s^{\sigma_m} F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{\sigma_m - \sigma_{m-k}} \left[ {}_0\mathcal{D}_t^{\sigma_{m-k}-1} f(t) \right]_{t=0}
\end{aligned}$$

elde edilir.

# 4. VARLIK VE TEKLİK TEOREMLERİ

Bu bölümde, kesirli diferansiyel denklemlerin başlangıç-değer problem çözümlerinin varlık ve teklikleri Podnubly (1999) kaynağı baz alınarak ele alınacak ve denklemler için verilen tüm çözümlerde, Miller-Ross ardışık kesirli türevleri göz önünde bulundurulacaktır. Çözümlerin, Miller-Ross ardışık kesirli türevlerinin özel durumları olarak alınması, kesirli diferansiyel denklemlerle verilen Riemann-Liouville, Grünwald-Letnikov ve Caputo kesirli türevlerinin elde edilen sonuçlarının doğrudan uygulanabilmesini sağlamaktadır.

Riemann-Liouville kesirli diferansiyel denklemlerinin varlık teklik teoremlerine Diethelm (2010) ve Kilbas (2006) kaynağından, Caputo kesirli diferansiyel denklemlerinin varlık teklik teoremleri için Kilbas (2006) kaynağından ayrıntılı bilgiye ulaşılabilir.

Önce, sürekli katsayılı lineer diferansiyel denklemler ele alınıp tek terimli kesirli diferansiyel denklem ve *n*-terimli kesirli diferansiyel denklem için varlık ve teklik teoremleri ispatlanacaktır. Ardından, genel formdaki diferansiyel denklem için varlık ve teklik teoremi verilerek örnekler yardımıyla ispat yönteminin bazen kesirli diferansiyel denklemlerin başlangıç-değer problemlerinin bir çözüm yöntemi olarak kullanılabildiği gösterilecektir (Podnubly 1999).

## 4.1 Lineer Kesirli Diferansiyel Denklemler

Bu kısımda, ardışık türevli lineer kesirli diferansiyel denklemler için başlangıç-değer problem çözümlerinin varlık ve teklikleri incelenmiştir. $0 < t < T < \infty$ için,

$$ {}_{0}\mathcal{D}_{t}^{\sigma_n} y(t) + \sum_{j=1}^{n-1} p_j(t)\, {}_{0}\mathcal{D}_{t}^{\sigma_{n-j}} y(t) + p_n(t)\, y(t) = f(t) \tag{4.1} $$

$$ \left[ {}_{0}\mathcal{D}_{t}^{\sigma_k - 1} y(t) \right]_{t=0} = b_k\,, \qquad k = 1, 2, \ldots, n \tag{4.2} $$

başlangıç-değer problemi verilsin. Burada ${}_0\mathcal{D}_t^{\sigma_n}$ ifadesi (2.39)'daki Miller-Ross ardışık türevidir ve $f(t) \in L_1(0,T)$ yani, $\int_0^T |f(t)|dt < \infty$ dur. Gösterimi kolaylaştırmak maksadıyla bundan sonra $f(t) \equiv 0,\ t > T$ kabul edilmiştir.

İlk olarak $p_k(t) \equiv 0,\ (k = 1, 2, \ldots, n)$ alınacaktır

**4.1.1 Teorem** (Podnubly 1999) Eğer $f(t) \in L_1(0,T)$ ise,

$$ {}_0\mathcal{D}_t^{\sigma_n} y(t) = f(t) \tag{4.3} $$

için (4.2)'de verilen başlangıç şartlarını sağlayan $y(t) \in L_1(0,T)$ tek çözümdür.

**İspat:** Verilen problem için bir çözüm bulalım. (4.3) denklemine (3.12)'deki ardışık kesirli türevin Laplace dönüşüm formülü uygulanırsa,

$$ s^{\sigma_n} Y(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\sigma_n - \sigma_{n-k}} \left[ {}_0\mathcal{D}_t^{\sigma_{n-k}-1} y(t) \right]_{t=0} = F(s) $$

elde edilir. $Y(s)$ ve $F(s)$ sırasıyla $y(t)$ ve $f(t)$'nin Laplace dönüşümleridir. (4.2)'de verilen başlangıç koşullarını kullanarak,

$$ Y(s) = s^{-\sigma_n} F(s) + \sum_{k=0}^{n-1} b^{n-k} s^{-\sigma_{n-k}} $$

yazılır. Bu denkleme uygulanan ters Laplace da bize,

$$ y(t) = \frac{1}{\Gamma(\sigma_n)} \int_0^t (t-\tau)^{\sigma_n - 1} f(\tau)\, d\tau + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_{n-k}}{\Gamma(\sigma_{n-k})} t^{\sigma_{n-k}-1} $$

denklemini verir. Ya da $i = n - k$ indis değişikliği yapılarak,

$$ y(t) = \frac{1}{\Gamma(\sigma_n)} \int_0^t (t-\tau)^{\sigma_n - 1} f(\tau)\, d\tau + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{t^{\sigma_i - 1}}{\Gamma(\sigma_i)} \tag{4.4} $$

bulunur. Bölüm 2.2.2'de verilmiş olan kuvvet fonksiyonunun Riemann-Liouville kesirli diferansiyeli kuralı ve

$$\frac{1}{\Gamma(-m)}=0,\ \ m=0,1,2,\ldots$$

göz önünde bulundurularak, $k=1,2,\ldots,n$ ve $i=1,2,\ldots,n$ için

$$ {}_0\mathcal{D}_t^{\sigma_k}\left(\frac{t^{\sigma_i\text{-}1}}{\Gamma(\sigma_i)}\right)=\begin{cases}\dfrac{t^{\sigma_i\text{-}\sigma_k\text{-}1}}{\Gamma(\sigma_i\text{-}\sigma_k)}, & (k<i)\\ 0\ , & (k\geq i)\end{cases} \tag{4.5}$$

$$ {}_0\mathcal{D}_t^{\sigma_k\text{-}1}\left(\frac{t^{\sigma_i\text{-}1}}{\Gamma(\sigma_i)}\right)=\begin{cases}\dfrac{t^{\sigma_i\text{-}\sigma_k}}{\Gamma(1+\sigma_i\text{-}\sigma_k)} & ,(k<i)\\ 1 & ,(k=i)\\ 0 & ,(k>i)\end{cases} \tag{4.6}$$

elde edilir.

(4.4)'den $y(t)\in L_1(0,T)$ bulunur. Gerçekten, (4.5) ve (4.6) denklemleri yardımıyla, (4.4) ile tanımlanmış $y(t)$ 'nin (4.3)'te yerine konması ve başlangıç koşulları çözümü doğrular. Böylece çözümün varlığı ispatlanmış olur.

Tekliğini kesirli diferansiyelin lineerliğinden ve Laplace dönüşümünün özelliklerinden görmek mümkündür. Kabul edelim ki, verilen problemin iki çözümü $y_1(t)$ ve $y_2(t)$ olsun. Bu durumda, $z(t)=y_1(t)-y_2(t)$, ${}_0D_t^{\sigma_n}z(t)=0$ denklemini ve sıfır başlangıç koşullarını sağlar. O zaman, $z(t)$ Laplace dönüşümü $L\{z(t)\}=Z(s)=0$ ve buradan verilen aralıkta hemen her yerde $z(t)=0$ olması $L_1(0,T)$'deki çözümün tek olduğunu gösterir.

**4.1.2 Teorem** (Podnubly 1999; Dzhrbashyan ve Nersesyan 1968) Eğer $f(t)\in L_1(0,T)$ ve $j=1,\ldots,n$ olmak üzere $p_j(t)$ 'ler $[0,T]$ aralığında sürekli fonksiyonlar ise, (4.1)-(4.2) başlangıç-değer problemi bir tek $y(t)\in L_1(0,T)$ çözümüne sahiptir.

**İspat:** (4.1)-(4.2) ile verilen problemin bir çözümü $y(t)$ olsun ve

$$ {}_0\mathcal{D}_t^{\sigma_n} y(t) = \varphi(t) $$

ile gösterelim. Teorem 4.1.1 'den,

$$ y(t) = \frac{1}{\Gamma(\sigma_n)} \int_0^t (t-\tau)^{\sigma_n - 1} \varphi(\tau)\, d\tau + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{t^{\sigma_i - 1}}{\Gamma(\sigma_i)} \tag{4.7} $$

yazabiliriz. (4.7)'yi (4.1)'de yerine koyularak;

$$ {}_0\mathcal{D}_t^{\sigma_n} y(t) + \sum_{k=1}^{n-1} p_{n-k}(t)\, {}_0\mathcal{D}_t^{\sigma_k} y(t) + p_n(t)\, y(t) = \varphi(t) $$

ve (4.5) kullanılarak $\varphi(t)$ fonksiyonu için Volterra İntegral Denklemi,

$$ \varphi(t) + \int_0^t \mathcal{K}(t,\tau)\varphi(\tau)\, d\tau = g(t) \tag{4.8} $$

elde edilir. Burada,

$$ \mathcal{K}(t,\tau) = p_n(t) \frac{(t-\tau)^{\sigma_n - 1}}{\Gamma(\sigma_n)} + \sum_{k=1}^{n-1} p_{n-k}(t) \frac{(t-\tau)^{\sigma_n - \sigma_k - 1}}{\Gamma(\sigma_n - \sigma_k)}, $$

$$ g(t) = \varphi(t) - p_n(t) \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{t^{\sigma_i - 1}}{\Gamma(\sigma_i)} - \sum_{k=1}^{n-1} p_{n-k}(t) \sum_{i=k+1}^{n} b_i \frac{t^{\sigma_i - \sigma_k - 1}}{\Gamma(\sigma_i - \sigma_k)}. $$

$p_j(t)$ $(j = 1,\ldots,n)$ fonksiyonları $[0,T]$ aralığında sürekli olduklarından $\mathcal{K}(t,\tau)$ çekirdek (kernel) fonksiyonu

$$ \mathcal{K}(t,\tau) = \frac{\mathcal{K}^*(t,\tau)}{(t-\tau)^{1-\mu}} $$

zayıf singüler (tekil) çekirdek formunda yazılabilir. Burada $\mu = min\{\sigma_n, \sigma_n - \sigma_{n-1}, \sigma_n - \sigma_{n-2}, \ldots, \sigma_n - \sigma_1\} = min\{\sigma_n, \alpha_n\}$ ve $0 \le t < T$, $0 \le \tau < T$ için $\mathcal{K}^*(t,\tau)$ süreklidir. Benzer olarak $g(t)$ aşağıdaki biçimde yazılabilir:

$$g(t) = \frac{g^*(t)}{(t)^{1-\nu}}.$$

Burada, $[0,T]$ aralığında $g^*(t)$ sürekli ve

$$\begin{aligned}
&\nu = min\{\sigma_1, \ldots, \sigma_n;\ \sigma_2 - \sigma_1, \ldots, \sigma_n - \sigma_1;\ \sigma_3 - \sigma_2, \ldots, \sigma_n - \sigma_2;\ \ldots;\ \sigma_n - \sigma_{n-1}\} \\
&\nu = min\{\sigma_1, \ldots, \sigma_n;\ \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} \\
&\nu = min\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}
\end{aligned}$$

şeklindedir.

$0 < \mu \le 1$, $0 < \nu \le 1$ olduğu açıktır. (4.5)'de zayıf tekil çekirdek denkleminin ve $g(t) \in L_1(0,T)$ 'nin sağ tarafının $\varphi(t) \in L_1(0,T)$ olan bir tek çözümü olduğu bilinmektedir. Teorem 4.1.1'den dolayı ${}_0D_t^{\sigma_n} y(t) = \varphi(t)$ ve (4.2) probleminin bir tek çözümü $y(t) \in L_1(0,T)$ (bu aynı zamanda (4.1)-(4.2) probleminin çözümüdür.) (4.7) ile belirlenebilir. Bu da, Teorem 4.1.2'nin ispatını sonlandırır.

Bu çalışmada ele alınan çoğu problemde $y(t)$'nin sıfır başlangıç koşulları ve tamsayılı mertebeden türevleri alınmıştır. Bunun 3 temel nedeni:

- Sıfır başlangıç koşullarının $y(t)$ ile gösterdiğimiz fonksiyona ait işlemlerin mutlak başlangıcı anlamına gelmesinin kesirli türeve ait fiziksel yoruma karşılık gelmesi;
- (4.2) şeklinde verilen başlangıç koşullarının sayısal yaklaşımlarının zorluk oluşturması;
- $y(t)$ fonksiyonunun ve tamsayı mertebeden türevinin sıfır başlangıç koşullarının uygun bir noktasında Riemann-Liouville, Grünwald-Letnikov, Caputo ve Miller-Ross türevlerinin birbirine denk olmasıdır. Bu denklik, problemin ve çözümünün yanlış yorumlanmasını önler.

Bu sebepten, Teorem 4.2’nin özel durumu ayrı değerlendirilecektir. $m-1 \leq \sigma_n < m$ ve

$$y^{(j)}(0)=0 \quad (j=0,1,\ldots,m-1) \tag{4.9}$$

olduğu kabul edilsin. Bu durumda, Riemann-Liouville türevlerinde birleşme özelliğini kullanarak, aynı $\sigma_k$ mertebeden Riemann-Liouville kesirli türevleri sayesinde tüm ardışık kesirli türevleri (4.1)’de yerine konularak,

$${}_0\boldsymbol{D}_t^{\sigma_n} y(t) + \sum_{j=1}^{n-1} p_j(t)\, {}_0\boldsymbol{D}_t^{\sigma_{n-j}} y(t) + p_n(t)\, y(t) = f(t) \tag{4.10}$$

bulunur. Grünwald-Letnikov yaklaşımında hatırlarsak, (4.9)’teki sıfır başlangıç koşullarından (4.2)’deki tüm koşulların sıfır olduğu (yani, $b_k = 0, k = 1, 2, \ldots, n$ ) bulunur. Hatta $f(t)$ sürekli fonksiyon olarak alınırsa aşağıdaki ifade vardır.

**4.1.3 Teorem** (Podnubly 1999) $f(t)$ ve $p_j(t)$ $(j=1,\ldots,n)$ ’ler [0,*T*] aralığında sürekli fonksiyonlar ise, $m-1 \leq \sigma_n < m,\ \sigma_n > \sigma_{n-1} > \sigma_{n-2} > \ldots > \sigma_2 > \sigma_1 > 0$ için, (4.9) ile birlikte verilen (4.16) başlangıç-değer problemi $[0,T]$ aralığında sürekli olan bir tek *y*(*t*) çözümüne sahiptir.

## 4.2 Genel Formda Kesirli Diferansiyel Denklem

Lineer kesirli diferansiyel denklemlerin yanında, lineer olmayan denklemlerin uygulamaları da mevcuttur. Bu yüzden bu bölümde, Miller-Ross ardışık kesirli türevler bakımından, genel formda kesirli diferansiyel denklemler için verilen başlangıç-değer probleminin çözümünün varlık ve tekliği işlenmiştir. Miller-Ross, Riemann-Liouville, Grünwald-Letnikov ve Caputo kesirli türevleri arasındaki ilişkiden dolayı, aşağıda verilen ifade tüm bu kesirli diferansiyel dönüşümleri için kullanılabilir.

$${}_0\mathcal{D}_t^{\sigma_n} y(t) = f(t, y), \tag{4.11}$$

$$\left[{}_0\mathcal{D}_t^{\sigma_k-1}y(t)\right]_{t=0}=b_k,\quad k=1,2,\ldots,n \tag{4.12}$$

başlangıç-değer problemini Miller-Ross denklemleri ile birlikte düşünelim.

$f(t,y)$ ’nin $G$ tanım kümesindeki $(t,y)$ düzleminde tanımlı olduğunu kabul edelim ve $R(h,k)\subset G$ şeklinde, $(t,y)\subset G$ noktalarının kümesi olan, $0<t<h$ için

$$\left|t^{1-\sigma_1}y(t)-\sum_{i=1}^{n}b_i\frac{t^{\sigma_i-\sigma_1}}{\Gamma(\sigma_i)}\right|\le K$$

eşitsizliğini sağlayan bir bölge tanımlayalım. ($h$, $K$ sabit)

**4.2.1 Teorem** (Podnubly 1999) $f(t,y)$ reel değerli sürekli fonksiyon; $G$ tanım kümesinde tanımlı ve $y$’ye göre Lipschitz şartını sağlayan yani,

$$\left|f(t,y_1)-f(t,y_2)\right|\le A\left|y_1-y_2\right|$$

tüm $(t,y)\in G$ için $\left|f(t,y)\right|\le M<\infty$ sağlayan bir fonksiyon olsun. Ayrıca,

$$K\ge\frac{M\,h^{\sigma_n-\sigma_1+1}}{\Gamma(1+\sigma_n)}$$

olsun. O zaman, $R(h,K)$ bölgesinde (4.11)-(4.12) ile verilmiş problemin bir tek ve sürekli $y(t)$ çözümü vardır.

**İspat:** İlk olarak (4.11)-(4.12) ile verilmiş problemi, buna eş olan kesirli integral denklemine indirgeyelim. (4.4)’deki

$$y(t)=\frac{1}{\Gamma(\sigma_n)}\int_0^t(t-\tau)^{\sigma_n-1}f(\tau)d\tau+\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{\Gamma(\sigma_i)}t^{\sigma_i-1}$$

formülünü kullanarak ya da

$${}_a\boldsymbol{D}_t^{-p}\left({}_a\boldsymbol{D}_t^{p}f(t)\right)=f(t)-\sum_{j=1}^{k}\left[{}_a\boldsymbol{D}_t^{\sigma_{p-j}}\right]_{t=a}\frac{(t-a)^{p-j}}{\Gamma(p-j+1)}$$

deki bileşke özelliği yardımıyla $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_1$ mertebeden ardışık kesirli integral uygulanmasıyla

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{t^{\sigma_i - 1}}{\Gamma(\sigma_i)} + \frac{1}{\Gamma(\sigma_n)} \int_0^t (t-\tau)^{\sigma_n - 1} f\left(\tau, y(\tau)\right) d\tau \tag{4.13}$$

bulunur ve $y(t)$, (4.11)-(4.12)'yi sağlıyorsa (4.13)'ü de sağlıyor demektir.

Diğer taraftan; $y(t)$, (4.13)'ün bir çözümü ise (4.13)'e, ${}_0\mathcal{D}_t^{\sigma_n}$ ardışık kesirli türev operatörü ve (4.5) formülü uygulayarak; $y(t)$ için (4.11) kesirli diferansiyel denklemi elde edilir. (4.6) kullanılırsa, $y(t)$ 'nin (4.13)'ü sağlaması (4.12)'deki şartları sağladığını gösterir. Böylece (4.13) denklemi, (4.11)-(4.12) ile verilmiş başlangıç-değer problemine eşdeğerdir.

Şimdi $y_0(t), y_1(t), y_2(t), \ldots$ fonksiyon dizisini; $m$=1,2,3,…. olmak üzere,

$$y_0(t) = \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{t^{\sigma_i - 1}}{\Gamma(\sigma_i)}, \tag{4.14}$$

$$y_m(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i}{\Gamma(\sigma_i)} t^{\sigma_i - 1} + \frac{1}{\Gamma(\sigma_n)} \int_0^t (t-\tau)^{\sigma_n - 1} f\left(\tau, y_{m-1}(\tau)\right) d\tau \tag{4.15}$$

ile tanımlayalım. $\lim_{m\to\infty} y_m(t)$'nin var olduğunu ve (4.13)'ün istenen $y(t)$ çözümünü verdiğini gösterelim.

Önce tümevarım kullanarak $0 < t \le h$ ve tüm $m$ 'ler için $y_m(t) \in R(h, K)$ olduğu gösterilebilir. Gerçekten; (4.15)'teki ifade $t^{1-\sigma_1}$ ile çarpılıp mutlak değeri alındığında

$$\begin{aligned} \left| t^{1-\sigma_1} y_m(t) - \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{t^{\sigma_i - \sigma_1}}{\Gamma(\sigma_i)} \right| &= \left| \frac{t^{1-\sigma_1}}{\Gamma(\sigma_n)} \int_0^t (t-\tau)^{\sigma_n - 1} f\left(\tau, y_{m-1}(\tau)\right) d\tau \right| \\ &\le \frac{M\, t^{\sigma_n - \sigma_1 + 1}}{\Gamma(1+\sigma_n)} \le \frac{M\, h^{\sigma_n - \sigma_1 + 1}}{\Gamma(1+\sigma_n)} \le K \end{aligned} \tag{4.16}$$

bulunur ve benzer şekilde $y_1(t)$ için de aynı eşitsizlik geçerlidir.

$$\left|t^{1-\sigma_1} y_1(t) - \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{t^{\sigma_i-\sigma_1}}{\Gamma(\sigma_i)}\right| \le \frac{M\, h^{\sigma_n-\sigma_1+1}}{\Gamma(1+\sigma_n)} \le K \,.$$

Ayrıca tümevarım yöntemi ile her $m$ ve $0 < t \le h$ için;

$$\left|y_m(t) - y_{m-1}(t)\right| \le \frac{M\, A^{m-1} t^{m\sigma_n}}{\Gamma(1+m\sigma_n)} \tag{4.17}$$

gösterilebilir. Gerçekten; (4.16) kullanılarak, $m$=1 ve $0 < t \le h$ için;

$$\left|y_1(t) - y_0(t)\right| \le \frac{M\, t^{\sigma_n}}{\Gamma(1+\sigma_n)}$$

dır. Kabul edelim ki,

$$\left|y_{m-1}(t) - y_{m-2}(t)\right| \le \frac{M\, A^{m-2} t^{(m-1)\sigma_n}}{\Gamma(1+(m-1)\sigma_n)}$$

olsun. O zaman; (4.15) ifadesi, yukarıdaki eşitsizlik ve kuvvet fonksiyonunun Riemann-Liouville kesirli türevi kullanılarak;

$$\begin{aligned}
\left|y_m(t) - y_{m-1}(t)\right| &\le \frac{A}{\Gamma(\sigma_n)} \int_0^t (t-\tau)^{\sigma_n-1} \left|y_{m-1}(\tau) - y_{m-2}(\tau)\right| d\tau \\
&\le \frac{M\, A^{m-1}}{\Gamma(1+(m-1)\sigma_n)} \frac{1}{\Gamma(\sigma_n)} \int_0^t (t-\tau)^{\sigma_n-1} \tau^{(m-1)\sigma_n} d\tau \\
&= \frac{M\, A^{m-1}}{\Gamma(1+(m-1)\sigma_n)}\, {}_0D_t^{-\sigma_n} t^{(m-1)\sigma_n} \\
&= \frac{M\, A^{m-1}}{\Gamma(1+(m-1)\sigma_n)} \frac{\Gamma(1+(m-1)\sigma_n)}{\Gamma(1+(m-1)\sigma_n+\sigma_n)}\, t^{(m-1)\sigma_n+\sigma_n} \\
&= \frac{M\, A^{m-1} t^{m\,\sigma_n}}{\Gamma(1+m\sigma_n)}
\end{aligned}$$

bulunur. Yani, her $m$ için (4.17) sağlanır.

Şimdi, aşağıda verilen seriyi ele alalım;

$$y^{*}(t)=\lim_{m\to\infty}(y_m(t)-y_0(t))=\sum_{j=1}^{\infty}(y_j(t)-y_{j-1}(t)) . \qquad (4.18)$$

(4.17)'ye göre; $0\le t\le h$ için, terimlerin mutlak değeri yakınsak seride karşılığı olan terimlerden daha küçüktür.

$$M\sum_{j=1}^{\infty}\frac{M\,A^{j-1}h^{j\sigma_n}}{\Gamma(1+j\sigma_n)}=\frac{M}{A}\left(E_{\sigma_n,1}\left(Ah^{\sigma_n}\right)-1\right) . \qquad (4.19)$$

Burada $E_{\lambda,\mu}(z)$, Bölüm 2.1.3'de verilen Mittag-Leffler fonksiyonudur. Bu (4.18)'deki serinin düzgün yakınsak olduğunu gösterir. Açıktır ki, (4.28)'deki serinin her bir $(y_j(t)-y_{j-1}(t))$ terimi $0\le t\le h$ aralığındaki *t*'ler için sürekli fonksiyondur. Böylece, (4.18)'deki seri toplam $y^{*}(t)$ 'de aynı aralıktaki *t*'ler için sürekli fonksiyondur ve $0\le t\le h$ için

$$y(t)=\lim_{m\to\infty}y_m(t)=y_0(t)+y^{*}(t)$$

sürekli fonksiyondur.

$y_m(t)$ serisinin düzgün yakınsaklığı (4.15)'de $m\to\infty$ alabilmemizi sağlar. Bu da (4.13) ile verilen ve (4.14)-(4.15) ile tanımlı limit fonksiyonu $y(t)$'nin çözüm olduğunu gösterir.

Son olarak, çözümün tek olduğunu gösterelim. (4.13)'ün $0<t\le h$ aralığında sürekli olan başka bir çözümü $\tilde{y}(t)$ olsun. Buradan, (4.13) gereği

$$z(t)=\frac{1}{\Gamma(\sigma_n)}\int_0^t(t-\tau)^{\sigma_n-1}f\left(\tau,z(\tau)\right)d\tau$$

ifadesi $z(t)=y(t)-\tilde{y}(t)$ denklemini sağlar. Burada $z(0)=0$ 'dır. Böylece; $z(t)$ $0\le t\le h$ aralığında süreklidir. $B$'nin sabit olduğu yerde $0\le t\le h$ için $|z(t)|<B$ ve yukarıdaki eşitlikten,

$$|z(t)|\le \frac{AB\,t^{\sigma_n}}{\Gamma(1+\sigma_n)},\quad 0\le t\le h$$

bulunur. Bunu $j$-kez tekrarlarsak,

$$|z(t)|\le \frac{BA^j t^{j\sigma_n}}{\Gamma(\sigma_n)},\quad j=1,2,\dots. \tag{4.20}$$

elde edilir. Eşitsizliğin sağ tarafında $B$ sabit çarpanına kadar olan kısım, $E_{\sigma_n,1}\left(At^{\sigma_n}\right)$ Mittag-Leffler fonksiyonu için serinin genel terimidir ve böylece her $t$ için

$$\lim_{j\to\infty}\frac{A^j t^{j\sigma_n}}{\Gamma(\sigma_n)}=0$$

olur. (4.20)'deki limit $j\to\infty$ alırsak, $z(t)\equiv 0$ ve her $0<t\le h$ için $y(t)\equiv\tilde{y}(t)$ olur. Böylece teoremin ispatı tamamlanır.

# 5. LİNEER KESİRLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ İLE ÇÖZÜMÜ

Bir veya daha fazla değişkenin kesirli türevlerini içeren denklemlere kesirli diferansiyel denklem denir. Yani, kesirli diferansiyel denklemler, tam sayı türevleri yerine, kesirli türevlere sahip olan diferansiyel denklemlerdir (Benghorbal 2004).

Bu bölümde standart ve ardışık kesirli diferansiyel denklemler olmak üzere iki kısımda incelenecek ve örnekler verilecektir.

## 5.1 Standart Kesirli Diferansiyel Denklemlerin Çözümü

Bu bölümde sabit katsayılı kesirli diferansiyel denklemlerin çözümü için (2.7)'deki Mittag-Leffler fonksiyonunu kullanarak örneklere bakacağız ve burada kesirli türevin Laplace dönüşümü için klasik formülü kullanacağız. $n-1<a\le n$ için

$$L\left\{{}_0\boldsymbol{D}_t^{a} f(t)\right\} = s^{a}F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{k}\left[{}_0\boldsymbol{D}_t^{a-k-1} f\left(t\right)\right]_{t=0}$$

şeklindedir (Oldham ve Spainer 1974; Miller 1993).

Tez çalışmasının bu kısmından sonra lineer kesirli diferansiyel denklemlerin çözümü ile ilgili bilgiler Kilbas (2010) kaynağından faydalanılarak oluşturulmuştur ve farklı kaynaklardan alınan örnekler ile pekiştirilmiştir.

$n=\left[\operatorname{Re}(\alpha)\right]+1$ olmak üzere $y^{(k)}(0)=0$ $k=0,1,...,n-1$ ve herhangi bir $b>0$ için uygun $y(x)\in AC^{n}\left[0,b\right]$[1] olarak seçilip Riemann-Liouville kesirli türevinin Laplace dönüşümü için

$$L\left\{{}_0\boldsymbol{D}_t^{\alpha} y(s)\right\} = s^{\alpha}L\left\{y(s)\right\} \tag{5.1}$$

---

[1] $AC\left[a,b\right]$, $\left[a,b\right]$ kapalı aralığı üzerinde mutlak sürekli olan fonksiyonların uzayı olmak üzere $AC^{n}\left[a,b\right]=\left\{f:\left[a,b\right]\to\mathbb{C} \text{ ve } f^{(n-1)}(x)\in AC^{n}\left[a,b\right]\right\}$

bağıntısı geçerli olur. Bu bölümde sabit katsayılı tek değişkenli homojen olmayan kesirli diferansiyel denklem, $m \in \mathbb{N}$, $0 < \mathrm{Re}(\alpha_1) < \ldots < \mathrm{Re}(\alpha_m)$ ve $A_0, A_1, A_2, ..., A_m \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\sum_{k=1}^{m} A_k \, {}_0\boldsymbol{D}_t^{\alpha_k} y(x) + A_0 y(x) = f(x), \qquad x > 0 \tag{5.2}$$

şeklinde ele alınır. (5.2) ifadesine Laplace dönüşümü uygular ve (5.1)'deki dönüşümü dikkate alırsak

$$\left[ A_0 + \sum_{k=1}^{m} A_k s^{\alpha_k} \right] L\{y(s)\} = L\{f(s)\}$$

elde edilir. Ters Laplace dönüşümü kullanılarak (5.1)'deki denklemin özel çözümünü

$$y(x) = L^{-1}\left\{ \frac{L\{f(s)\}}{A_0 + \sum_{k=1}^{m} A_k s^{\alpha_k}} (x) \right\} \tag{5.3}$$

olarak elde ederiz. Not etmek gerekirse, Hille ve Tamarkin (1930)'da, (2.5)'te verilen iki parametreli Mittag-Leffler tanımını kullanarak $a > 0$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$\varphi(x) = \frac{d}{dx} \int_0^x E_\alpha \left[ \lambda (x-t)^\alpha \right] f(t) dt$$

olduğu yerde

$$\varphi(x) - \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{\varphi(t) dt}{(x-t)^{1-\alpha}} = f(x) \qquad (x > 0)$$

denklemini çözmek için Laplace dönüşüm metodu kullanmıştır.

Maravall (1956), Maravall (1959) ve Maravall (1971)'de (5.1)'deki kesirli diferansiyel denkleminin özel durumunun açık bir çözümünün elde edildiği Laplace dönüşümüne dayalı bir yaklaşım öneriyor. Muhtemelen ilk önce anormal salınımlı olaylara ilişkilendirerek kesirli modellere başvurdu. Ayrıca Maravall (1964), Maravall (1963), Maravall (1978) ve Maravall (2004) kaynaklarına bakılabilir.

Oldham ve Spainer (1974)'de Laplace dönüşümü $\alpha = 1/2$, $b = 1$ ve $c = -2$ için $f(x) = 0$ olmak üzere

$$y'(x) + b\,{}_0\boldsymbol{D}_t^{\alpha} y(x) + c\,y(x) = f(x) \qquad (0 < \alpha < 1;\quad b, c \in \mathbb{R}) \tag{5.4}$$

homojen denkleminin özel çözümünde kullanılmıştır. Rasyonel olan $\alpha > 0$ için, Dorta tarafından bazı basit kesirli diferansiyel denklemlerin çözümleri elde edilmiştir ve Seitkazieva (1980)'de (5.4) denkleminin çözümü bulunmuştur.

Miller (1993)'te (5.1)'deki kesirli diferansiyel denklemlerin $\alpha_k = k\alpha\left(\alpha = \frac{1}{n};\, n \in \mathbb{N}\right)$ özel durumunda çözümlerin açık gösterimlerini vermek için

$$\sum_{k=1}^{m} A_k\, {}_0\boldsymbol{D}_t^{k\alpha} y(x) + A_0 y(x) = 0 \qquad \left(1/\alpha \in \mathbb{N}\right) \tag{5.5}$$

homojen denkleminde ve

$$\sum_{k=1}^{m} A_k\, {}_0\boldsymbol{D}_t^{k\alpha} y(x) + A_0 y(x) = f(x) \qquad \left(1/\alpha \in \mathbb{N}\right) \tag{5.6}$$

homojen olmayan (5.6) denkleminde Laplace dönüşüm metodunu ele almıştır. Şunu not etmek gerekir ki Miller Ross (5.6)'deki homojen denklemlerin lineer bağımsız çözümlerini kolaylıkla bulmuştur. Kesirli mertebeden homojen diferansiyel denklemlerin Riemann-Liouville kesirli türevinin sonuçları, (5.1)'de verilen homojen lineer diferansiyel denklem formunda yazılırsa

$$\sum_{k=1}^{m} A_k\, {}_0\boldsymbol{D}_t^{\alpha_k} y(x) + A_0 y(x) = 0 \qquad \left(0 < \mathrm{Re}(\alpha_1) < \ldots < \mathrm{Re}(\alpha_k)\right) \tag{5.7}$$

elde edilir. $\alpha_k = k$ $(k = 1, \ldots, m)$ için (5.7) denkleminden $m$ mertebeli sıradan diferansiyel denklem ile kıyaslama yaparak basit olmayan lineer bağımsız çözümler elde edilir. Leskovskij (1980)'de (5.7)'nin bağımsız çözümleri (2.5)'te verilen iki parametreli Mittag-Leffler fonksiyonu kullanarak, reel olarak seçtiği özel $\alpha_k$ ’lar için elde edilmiştir.

Miller (1993)’de Green fonksiyonunun kesirli bir benzerini $G_\alpha(x)$ olarak tanımlamış ve ters Laplace dönüşümünü alınca

$$G_\alpha(x) = L^{-1}\left\{P^{-1}(s^\alpha)(x)\right\}, \quad P(s) = \sum_{k=1}^{m} A_k s^k + A_0 \tag{5.8}$$

elde etmiştir. (5.6)’daki homojen olmayan denklemin özel bir çözümünü, $G_\alpha(x)$ ve $f(x)$ ’in konvolüsyon çarpımını kullanarak

$$y(x) = \int_0^x G_\alpha(x-t) f(t)dt$$

ile göstermiştir. Bu formül ile

$$y(0) = y'(0) = ... = y^{(m-1)}(0) = 0 \tag{5.9}$$

başlangıç koşulları altında (5.6)’daki denklemin Cauchy problemi için tek bir çözümünün $y(x)$ olduğu kanıtlanır.

Miller (1993)’de belirtilen (5.5)’deki gibi verilen homojen diferansiyel denkleminde $A_k(x)$ polinom katsayıları olmak üzere

$$\sum_{k=1}^{m} A_k(x)\, {}_0\boldsymbol{D}_t^{k\alpha} y(x) + A_0 y(x) = 0 \qquad (1/\alpha = 1, 2, ....) \tag{5.10}$$

çözmek için Laplace dönüşümü ele alınır ve

$${}_0\boldsymbol{D}_t^{1/2} y(x) = y/x \qquad (x > 0) \tag{5.11}$$

denkleminin çözümü için bir yaklaşım bulunur. Miller (1993[b])’te (5.8)’deki Green fonksiyonuna benzeyen terimler ile (5.10)’daki denklemin lineer bağımsız sonuçlarını elde etmiştir.

Şuna dikkat etmek gerekir ki, (5.11)'deki ifade kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin bilinen ilk ifadesidir. O'Shaughnessay (1918), Post (1919), Samko (1993), Kilbas ve Trujillo (2001) kaynaklarında bu durum değerlendirilmiştir.

Miller (1993)'te (5.6) formundaki sözde ardışık diferansiyel denklemleri; karakteristik $P_m(\lambda)=\sum_{k=0}^{m} A_k\lambda^k$ polinomunun $\lambda=\lambda_j$ köklerini kullanarak

$$P_m\,{}_0\boldsymbol{D}_t^{\alpha} y(x) \equiv \sum_{k=1}^{m} A_k \left({}_0\boldsymbol{D}_t^{\alpha}\right)^k y(x) + c_0 y(x) = f(x) \qquad \left(\frac{1}{\alpha}\in\mathbb{N}\right) \tag{5.12}$$

şeklinde ayrıca çözmüştür.

Gorenflo ve Mainardi (1997)'de kesirli diferansiyel denklemler için Cauchy probleminin Caputo türevi ile çözümünde Laplace dönüşümü kullanılmıştır.

$${}_0^C D_t^{\alpha} y(x) + y(x) = f(x), \quad (x>0; \quad m-1<\alpha<m; \quad m\in\mathbb{N})$$

denkleminin çözümü (5.9)'daki başlangıç koşulları altında

$$y'(x) + a\,{}_0^C D_t^{\alpha}\left(y(x)\right) + y(x) = f(x), \quad y(0)=c_0\in\mathbb{R} \quad (x>0; \quad 0<\alpha<1; \quad a>0)$$

$$y''(x) + a\,{}_0^C D_t^{\alpha}\left(y(x)\right) + y(x) = f(x), \quad y(0)=c_0\in\mathbb{R}, \quad y(0)=c_1\in\mathbb{R}, (x>0; \quad 0<\alpha<2)$$

şeklinde yazılır. Daha fazla bilgiye ulaşmak için Gorenflo ve Rutman (1994), Gorenflo ve Mainardi(1996), Gorenflo (1998) ve Debnath (2003) kaynaklarına bakılabilir.

### 5.1.1 Homojen Adi Kesirli Diferansiyel Denklemler

Bu bölümde Riemann-Liouville kesirli türevinin (5.7)'deki gibi homojen denklemlerde özel çözümünü Laplace dönüşümü ile bulacağız.

$$\sum_{k=1}^{m} A_k\,{}_0\boldsymbol{D}_t^{\alpha_k} y(x) + A_0 y(x) = 0 \qquad \left(x>0; \quad m\in\mathbb{N}; \quad 0<\alpha_1<\ldots<\alpha_m\right) \tag{5.13}$$

denkleminde ${}_0\boldsymbol{D}_t^{\alpha_k} y(x)$ Riemann-Liouville kesirli türevi, $A_k \in \mathbb{R}\left(k=0,...,m\right)$ reel sabitler olmak üzere $A_m = 1$ olarak alabiliriz. $n-1<\alpha := \alpha_m \le n \ \left(n \in \mathbb{N}\right)$ olmak üzere (5.13) denkleminin $y_1(x),...,y_n(x)$ lineer bağımsız çözümleridir ve burada

$$\begin{aligned} {}_0\boldsymbol{D}_t^{\alpha-k} y_j(0) &= 0 \quad \left(k, j = 1,...,n;\ k \ne j\right) \\ {}_0\boldsymbol{D}_t^{\alpha-k} y_k(0) &= 1 \quad \left(k = 1,...,n\right) \end{aligned}$$

dır. (3.9)'da Riemann-Liouville kesirli türev tanımına bağlı olarak Laplace dönüşümü

$$L\left\{{}_0\boldsymbol{D}_t^{\alpha} y(s)\right\} = s^{\alpha} L\left\{y(s)\right\} - \sum_{j=1}^{n} d_j s^{j-1} \quad \left(n-1<\alpha \le n;\ n \in \mathbb{N}\right) \tag{5.14}$$

olur, burada

$$d_j = {}_0\boldsymbol{D}_t^{\alpha-j} y(0) \quad (j = 1,...,n) \tag{5.15}$$

olarak alınmıştır. (5.13) denkleminin aşikâr çözümlerini $m=1$ olmak üzere

$${}_0\boldsymbol{D}_t^{\alpha} y(x) - \lambda y(x) = 0 \quad \left(x>0;\quad n-1<\alpha \le n,\quad n \in \mathbb{N},\quad \lambda \in \mathbb{R}\right) \tag{5.16}$$

(2.5)'te verilen iki parametreli Mittag-Leffler fonksiyonu ile yazabiliriz.

**5.1.1 Teorem (**Kilbas 2006) $n-1<\alpha \le n \quad \left(n \in \mathbb{N}\right)$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$y_j(x) = x^{\alpha-j} E_{\alpha,\alpha+1-j}\left(\lambda x^{\alpha}\right) \qquad \left(j = 1,...,n\right)$$

ifadesi (5.16) denkleminin çözümünü verir.

**İspat:** (5.16) denklemine Laplace dönüşümü uygulanarak ve (5.14)'ü dikkate alırsak $d_j \left(j = 1,...,n\right)$ olmak üzere

$$L\left\{y(s)\right\} = \sum_{j=1}^{n} d_j \frac{s^{j-1}}{s^{\alpha} - \lambda} \tag{5.17}$$

çözümü yazılır. (2.7)'den

$$L\left\{t^{\alpha-j}E_{\alpha,\alpha+1-j}\left(\lambda t^{\alpha}\right)(s)\right\}=\frac{s^{j-1}}{s^{\alpha}-\lambda} \qquad \left(\left|s^{\alpha}-\lambda\right|<1\right)$$

olur. Buradan (5.17)'den (5.16) denkleminin çözümü

$$y(x)=\sum_{j=1}^{n}d_j y_j(x) \qquad y_j(x)=x^{\alpha-j}E_{\alpha,\alpha+1-j}\left(\lambda x^{\alpha}\right)$$

şeklinde elde edilir. $y_j(x)$ fonksiyonlarının (5.16) denkleminin çözümleri olduğunu doğrulamak kolaydır, şöyle ki;

$${}_0\boldsymbol{D}_t^{\alpha}\left[t^{\alpha-j}E_{\alpha,\alpha+1-j}\left(\lambda t^{\alpha}\right)\right](x)=\lambda x^{\alpha-j}E_{\alpha,\alpha+1-j}\left(\lambda x^{\alpha}\right) \quad \left(j=1,...n\right)$$

ve

$${}_0\boldsymbol{D}_t^{\alpha-k}y_j(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{\Gamma\left(\alpha n+k+1-j\right)}x^{\alpha n+k-j} \tag{5.18}$$

elde edilir. (5.18)'den

$$\begin{aligned} {}_0\boldsymbol{D}_t^{\alpha-k}y_j(0)&=0 \quad \left(k,j=1,...,n;\ k>j\right)\\ {}_0\boldsymbol{D}_t^{\alpha-k}y_k(0)&=1 \quad \left(k=1,...,n\right) \end{aligned} \tag{5.19}$$

olur. Eğer $k<j$ ise,

$${}_0\boldsymbol{D}_t^{\alpha-k}y_j(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^n}{\Gamma\left(\alpha n+k+1-j\right)}x^{\alpha n+k-j}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{\Gamma\left(\alpha n+\alpha+k+1-j\right)}x^{\alpha n+\alpha+k-j}$$

olur ve herhangi $k,\ j=1,...,n$ için $\alpha+k-j\geq\alpha+1-n$ olduğundan

$${}_0\boldsymbol{D}_t^{\alpha-k}y_j(0)=0 \quad \left(k,j=1,...,n;\ k<j\right) \tag{5.20}$$

sonucuna ulaşılır. (5.19) ve (5.20)'den Wronskian $W_{\alpha}(0)=1$ olur.

**5.1.1 Sonuç (**Kilbas 2006)

$x > 0; \quad 0 < \alpha \le 1, \quad \lambda \in \mathbb{R}$ için ${}_0\boldsymbol{D}_t^{\alpha} y(x) - \lambda y(x) = 0$ denkleminin çözümü

$$y(x) = x^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left(\lambda x^{\alpha}\right)$$

iken, $x > 0; \quad 1 < \alpha \le 2, \quad \lambda \in \mathbb{R}$ için ${}_0\boldsymbol{D}_t^{\alpha} y(x) - \lambda y(x) = 0$ denkleminin çözümü

$$y_1(x) = x^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left(\lambda x^{\alpha}\right), \quad y_2(x) = x^{\alpha-2} E_{\alpha,\alpha-1}\left(\lambda x^{\alpha}\right)$$

olur.

**5.1.1 Örnek** (Kilbas 2006)

$${}_0\boldsymbol{D}_t^{n-1/2} y(x) - \lambda y(x) = 0 \quad \left(x > 0; \quad n \in \mathbb{N}, \quad \lambda \in \mathbb{R}\right)$$

denkleminin özel çözüm sistemleri

$$y_j(x) = x^{n-j-1/2} E_{n-1/2,\,n-j+1/2}\left(\lambda x^{n-1/2}\right) \quad \left(j = 1,..,n\right)$$

olarak yazılır.

**5.1.2 Örnek** (Kilbas 2006) $n \in \mathbb{N}$ mertebeden adi diferansiyel denklemi

$$y^{(n)}(x) - \lambda y(x) = 0 \quad \left(x > 0; \quad n \in \mathbb{N}\right)$$

şeklinde verilsin. Bu denklemin özel çözümleri

$$y_j(x) = x^{n-j} E_{n,n+1-j}\left(\lambda x^{n}\right) \quad \left(j = 1,..,n\right)$$

olarak yazılır. Benzer şekilde ikinci mertebeden denklemleri

$$y''(x) - \lambda y(x) = 0 \quad \left(x > 0; \quad \lambda > 0\right)$$
$$y''(x) + \lambda y(x) = 0 \quad \left(x > 0; \quad \lambda > 0\right)$$

yazarsak bunların çözümleri

$$y_1(x)=\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\sinh\left(\sqrt{\lambda}\,x\right),\qquad y_2(x)=\cosh\left(\sqrt{\lambda}\,x\right)$$
$$y_1(x)=\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\sin\left(\sqrt{\lambda}\,x\right),\qquad y_2(x)=\cos\left(\sqrt{\lambda}\,x\right)$$

şeklindedir.

Açıktır ki, kesirli diferansiyel denklemlerin çözümleri başlangıç ve sınır değer problemlerinin çözümlerini elde etmek için kullanılabilir. Burada $n-1<\alpha\le n;\ n\in\mathbb{N}$ olmak üzere $\alpha$ mertebeli kesirli diferansiyel denklemler için uygun başlangıç koşullarıyla

$$_0\boldsymbol{D}_t^{\alpha-k}y(0)=b_k\in\mathbb{R}\quad\left(k=1,\ldots,n;\quad n-1<\alpha\le n\right)\tag{5.21}$$

Cauchy problemini örneklendireceğiz.

**5.1.1 Önerme (**Kilbas 2006) $n-1<\alpha\le n;\ n\in\mathbb{N}$ ve $\lambda\in\mathbb{R}$ için (5.21)'deki Cauchy problemi (5.16) denklemini çözülebilir kılar, buradan

$$y(x)=\sum_{j=1}^{n}b_jx^{\alpha-j}E_{\alpha,\alpha+1-j}\left(\lambda x^{\alpha}\right)$$

çözümü elde edilir.

**5.1.2 Önerme (**Kilbas 2006) $n-1<\alpha\le n;\ n\in\mathbb{N}$ ve $0<\beta<\alpha$ için $\alpha-n+1\ge\beta$ ve $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ için (5.21)'deki Cauchy problemi için

$$y(x)=\sum_{j=1}^{n}b_jy_j\left(x\right)\quad\left(\alpha-n+1>\beta\right)$$

ya da $y_j\left(x\right)\quad j=1,\ldots,n$ için

$$y(x)=\left(b_1-\lambda b_n\right)y_1\left(x\right)+\sum_{j=2}^{n}b_jy_j\left(x\right)\quad\left(\alpha-n+1=\beta\right)$$

çözümü elde edilir.

(5.13)’deki homojen denklemin açık çözümünü bulmak için Laplace dönüşüm metodunu ele alacağız.

$$\sum_{k=1}^{m} A_k \, {}_0^C D_t^{\alpha_k} y(x) + A_0 y(x) = 0 \qquad \left(x>0; \quad m\in\mathbb{N}; \quad 0<\alpha_1<...<\alpha_m\right) \quad (5.22)$$

denkleminde ${}_0^C D_t^{\alpha_k} y(x)\left(k=1,...,m\right)$ Caputo kesirli türevi, $A_k \in \mathbb{R}\left(k=0,...,m-1\right)$ reel sabitler olmak üzere $A_m = 1$ olarak alabiliriz. $n-1<\alpha := \alpha_m \le n \ \left(n\in\mathbb{N}\right)$ olmak üzere (5.13) denkleminin $y_1(x),..., y_n(x)$ lineer bağımsız çözümleridir ve

$$\begin{aligned} &y_j^{(k)}(0)=0 \quad (k,\, j=0,...,n-1; \quad k\neq j)\\ &y_k^{(k)}(0)=1 \quad (k,\, j=0,...,n-1)\end{aligned} \qquad (5.23)$$

şeklinde gösterilir. Caputo kesirli türevinin Laplace dönüşüm formülünden

$$L\left\{{}_0^C D_t^{\alpha} y(s)\right\} = s^{\alpha} L\left\{y(s)\right\} - \sum_{j=1}^{n-1} d_j s^{\alpha-j-1} \quad \left(n-1<\alpha\le n; \ n\in\mathbb{N}\right) \qquad (5.24)$$

$$d_j y^{(j)}(0) \quad \left(j=0,...,n-1\right)$$

yazılır. (5.22) denkleminin aşikâr çözümlerini $m=1$ olmak üzere

$${}_0^C D_t^{\alpha} y(x) - \lambda y(x) = 0 \quad \left(x>0; \quad n-1<\alpha\le n, \quad n\in\mathbb{N}, \quad \lambda\in\mathbb{R}\right) \qquad (5.25)$$

(2.5)’te verilen iki parametreli Mittag-Leffler fonksiyonu ile yazabiliriz.

**5.1.2 Teorem (**Kilbas 2006) $n-1<\alpha\le n, \quad n\in\mathbb{N}$ ve $\lambda\in\mathbb{R}$ olsun.

$$y_j(x) = x^j E_{\alpha, j+1}\left(\lambda x^{\alpha}\right) \qquad \left(j=0,...,n-1\right)$$

ifadesi (5.25) denkleminin çözümünü verir.

**İspat:** (5.25) denklemine Laplace dönüşümü uygulanarak ve (5.24)’ü dikkate alırsak $d_j \left(j=0,...,n-1\right)$ olmak üzere

$$L\{y(s)\} = \sum_{j=0}^{n-1} d_j \frac{s^{\alpha-j-1}}{s^\alpha - \lambda} \tag{5.26}$$

çözümü yazılır. (2.7)'den

$$L\left\{t^j E_{\alpha,j+1}\left(\lambda t^\alpha\right)(s)\right\} = \frac{s^{\alpha-j-1}}{s^\alpha - \lambda} \qquad \left(\left|s^\alpha - \lambda\right| < 1\right)$$

olur. Buradan (5.26)'den (5.25) denkleminin çözümü

$$y(x) = \sum_{j=0}^{n-1} d_j y_j(x) \qquad y_j(x) = x^j E_{\alpha,j+1}\left(\lambda x^\alpha\right)$$

şeklinde elde edilir. $y_j(x)$ fonksiyonlarının (5.25) denkleminin çözümleri olduğunu doğrulamak kolaydır, şöyle ki;

$${}_0\boldsymbol{D}_t^\alpha\left[t^j E_{\alpha,j+1}\left(\lambda t^\alpha\right)\right](x) = \lambda x^j E_{\alpha,j+1}\left(\lambda x^\alpha\right) \quad \left(j = 0,\ldots,n-1\right)$$

ve

$$y_j^{(k)}(x) = x^{j-k} E_{\alpha,j-k+1}\left(\lambda x^\alpha\right) \tag{5.27}$$

elde edilir. (5.27)'den

$$\begin{aligned} &y_j^{(k)}(0) = 0 \qquad \left(k, j = 0,\ldots,n-1;\ \ j > k\right) \\ &y_k^{(k)}(0) = 1 \qquad \left(k, j = 0,\ldots,n-1\right) \end{aligned} \tag{5.28}$$

olur. Eğer $j < k$ ise, (5.27)'den

$$y_j^{(k)}(x) = \lambda x^{\alpha+j-k} E_{\alpha,\alpha+j-k+1}\left(\lambda x^\alpha\right)$$

olur ve herhangi $k, j = 0,\ldots,n-1$ için $\alpha + j - k \geq 0$ olduğundan

$$y_j^{(k)}(0) = 0 \quad \left(k, j = 0,\ldots,n-1;\ j < k\right) \tag{5.29}$$

sonucuna ulaşılır. (5.28) ve (5.29)'den Wronskian

$$W(x) = \det\left(y_j^{(k)}(x)\right)_{k,j=0}^{n-1}$$

yazılır ve $W(0) = 1$ olur.

**5.1.2 Sonuç (**Kilbas 2006)

$x > 0; \quad 0 < \alpha \le 1, \quad \lambda \in \mathbb{R}$ için ${}_0^C D_t^\alpha y(x) - \lambda y(x) = 0$ denkleminin çözümü

$$y(x) = E_\alpha\left(\lambda x^\alpha\right)$$

iken, $x > 0; \quad 1 < \alpha \le 2, \quad \lambda \in \mathbb{R}$ için ${}_0^C D_t^\alpha y(x) - \lambda y(x) = 0$ denkleminin çözümü

$$y_1(x) = E_\alpha\left(\lambda x^\alpha\right), \quad y_2(x) = xE_{\alpha,2}\left(\lambda x^\alpha\right)$$

olur.

**5.1.3 Örnek** (Kilbas 2006)

$${}_0^C D_t^{n-1/2} y(x) - \lambda y(x) = 0 \quad \left(x > 0; \quad n \in \mathbb{N}, \quad \lambda \in \mathbb{R}\right)$$

denkleminin çözümü

$$y_j(x) = x^j E_{n-1/2,\, j+1}\left(\lambda x^{n-1/2}\right) \quad \left(j = 0, \dots, n-1\right)$$

şeklinde yazılır.

Şimdi uygun başlangıç koşullarıyla $n-1 < \alpha \le n;\ n \in \mathbb{N}$ için $\alpha$ mertebeli kesirli diferansiyel denklemler için

$$y^{(k)}(x) = b_k \in \mathbb{R} \quad k = 0, \dots, n-1, \quad n-1 < \alpha \le n) \tag{5.30}$$

Cauchy problemlerinin çözümlerini göreceğiz.

**5.1.3 Önerme (**Kilbas 2006) $n-1 < \alpha \le n;\ n \in \mathbb{N}$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için (5.30)'daki Cauchy problemi (5.25) denklemini çözülebilir kılar, buradan

$$y(x)=\sum_{j=0}^{n-1} b_j x^j E_{\alpha,j+1}\left(\lambda x^{\alpha}\right)$$

çözümü elde edilir.

**5.1.4 Önerme (**Kilbas 2006) $\alpha>0$ ve $\beta>0$ olsun. $n-1<\alpha\leq n;\ n\in\mathbb{N}$ ve $0<\beta<\alpha$ için $\alpha-n+1\geq\beta$ ve $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ olsun. (5.30)'daki Cauchy problemi

$$y(x)=\sum_{j=1}^{n} b_j y_j\left(x\right) \quad \left(\alpha-n-1>\beta\right)$$

veya $y_j\left(x\right)$ $j=0,...,n-1$ olduğu yerde

$$y(x)=\sum_{j=0}^{n-2} b_j y_j\left(x\right)+\left(b_{n-1}-\lambda b_0\right)y_{n-1}\left(x\right) \quad \left(\alpha-n-1=\beta\right)$$

şeklinde çözülebilirdir.

**5.1.4 Örnek** (Podnubly 1999) Aşağıdaki denklemi inceleyelim.

$${}_0\boldsymbol{D}_t^{1/2} f(t)+a\,f(t)=0,\ (t>0);\quad \left[{}_0\boldsymbol{D}_t^{-1/2} f(t)\right]_{t=0}=C$$

Buna Laplace Dönüşümü uygularsak

$$L\left\{{}_0\boldsymbol{D}_t^{1/2} f(t)+af(t)\right\}=L\left\{0\right\},$$

$$s^{1/2}F(s)-s^0\left[{}_0\boldsymbol{D}_t^{-1/2} f(t)\right]_{t=0}+aF(s)=0,$$

$$s^{1/2}F(s)+aF(s)=C,$$

$$F(s)=\frac{C}{s^{1/2}+a},$$

$$C=\left[{}_0\boldsymbol{D}_t^{-1/2} f(t)\right]_{t=0}$$

elde ederiz.(2.8) de verilen Mittag-Leffler fonksiyonunun integral gösteriminde $k=0$ alıp ve Tablo 3.2'den çözüm

$$f(t)=Ct^{-\frac{1}{2}}E_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(-a\sqrt{t})$$

olarak bulunur. $E_{\alpha,\beta}(t)$ 'nin (2.5)'deki seri açılımını kullanarak, ifadenin çözümü $a=1$ için

$$f(t)=C\left(\frac{1}{\sqrt{\pi t}}-e^{t}\mathrm{erfc}\left(\sqrt{t}\right)\right)$$

olarak yazılabilir.

**5.1.5 Örnek** (Miller 1993) Aşağıdaki eşitliği göz önüne alalım.

$$\left[\boldsymbol{D}^{1}+a\boldsymbol{D}^{1/2}+b\boldsymbol{D}^{0}\right]y(t)=0$$

Verilen denklemin her iki tarafının Laplace dönüşümünü alırsak;

$$\left[sY(s)-y(0)\right]+a\left[L\left\{\boldsymbol{D}^{1/2}y(t)\right\}\right]+bY(s)=0$$

elde edilir. Burada $Y(s)$ fonksiyonu $y(t)$ 'nin Laplace dönüşümüdür. Kesirli türevin Laplace dönüşümünü alacak olursak,

$$L\left\{\boldsymbol{D}^{1/2}y(t)\right\}=s^{1/2}Y(s)-\boldsymbol{D}^{-1/2}y(0)$$

bulunur ve buradan elde ettiğimiz denklemi düzenlersek,

$$\left[s+as^{1/2}+b\right]Y(s)-y(0)-a\boldsymbol{D}^{-1/2}y(0)=0$$

$$Y(s)=\frac{a\boldsymbol{D}^{-1/2}y(0)+y(0)}{s+as^{1/2}+b}$$

ve $P(x)$ polinomu $P(x)=x^{2}+ax+b=(x-\alpha)(x-\beta)$ olmak üzere

$$Y(s)=\frac{C}{P\left(s^{1/2}\right)}$$

olarak yazılır. Bu ifadede iki problem ortaya çıkıyor. Birincisi; $y(0)$ 'ı nasıl bulabiliriz ve $D^{-1/2}y(0)$ sınırlı mıdır? İkincisi $Y(s)$ 'nin ters dönüşümü nasıl bulunur?

Burada ilk soruya bakacak olursak; Eğer $C$ sınırlı değil ise yaklaşım anlamsız olur. Eğer $C=0$ ise Laplace dönüşümünün tekliğinden verilen diferansiyel denklemin tek çözümü $y(t)\equiv 0$ olur. Öte yandan; verilen diferansiyel denklem aynı olmayan sıfır çözümüne sahiptir. Farz edelim ki $C$ sınırlı ve sıfır olmayan bir sabit olsun. İkinci probleme dönersek $P^{-1}(x)$'in kısmi kesirlere genişletilmesi,

$$\frac{1}{P(x)}=\frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{1}{x-\alpha}-\frac{1}{x-\beta}\right), \qquad x=s^{1/2}$$

$$\frac{1}{P(s^{1/2})}=\frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{1}{s^{1/2}-\alpha}-\frac{1}{s^{1/2}-\beta}\right)$$

olur. Bizim problemimiz $\left(s^{1/2}-\alpha\right)^{-1}$'nin ters Laplace dönüşümünü bulmaya dönüşür. $P^{-1}(x)$ ifadesi bize, $P(x)$ polinomunun sıfırları olan $\alpha$ ve $\beta$'nın birbirinden farklı olduğunu gösterir.

$$\frac{1}{s^{1/2}-\alpha}=\frac{1}{s^{-1/2}\left(s-\alpha^2\right)}+\frac{\alpha}{s^{1/2}-\alpha}$$

ifadesinin ters Laplace dönüşümü

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^{1/2}-\alpha}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{s^{-1/2}\left(s-\alpha^2\right)}+\frac{\alpha}{s^{1/2}-\alpha}\right\}=\varepsilon_t\left(-\tfrac{1}{2},\alpha^2\right)+\alpha\,\varepsilon_t\left(0,\alpha^2\right)$$

olur. Ve benzer şekilde

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^{1/2}-\beta}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{s^{-1/2}\left(s-\beta^2\right)}+\frac{\beta}{s^{1/2}-\beta}\right\}=\varepsilon_t\left(-\tfrac{1}{2},\beta^2\right)+\alpha\,\varepsilon_t\left(0,\beta^2\right)$$

ifadesini kullanırsak;

$$y(t)=L^{-1}\{Y(s)\}=\frac{C}{\alpha-\beta}\left[\alpha\,\varepsilon_t\left(0,\alpha^2\right)-\beta\,\varepsilon_t\left(0,\beta^2\right)+\varepsilon_t\left(-\tfrac{1}{2},\alpha^2\right)-\varepsilon_t\left(-\tfrac{1}{2},\beta^2\right)\right]$$

elde edilir. Kökleri $\alpha$ ve $\beta$ olan polinom fonksiyonu $P(x)=0$' a eşit olur. Buradan

$$Y(s)=C\Big/\left(s^{1/2}-\alpha\right)^2$$

olur. Ayrıca

$$\frac{1}{\left(s^{1/2}-\alpha\right)^2}=\left[\frac{1}{s^{-1/2}\left(s-\alpha^2\right)}+\frac{\alpha}{s-\alpha^2}\right]^2$$

olur. Buradan verilen diferansiyel denklemin çözümü

$$y(t)=C\left[\left(1+2\alpha^2t\right)\varepsilon_t\left(0,\alpha^2\right)+\alpha\,\varepsilon_t\left(\frac{1}{2},\alpha^2\right)+2\alpha t\,\varepsilon_t\left(-\frac{1}{2},\alpha^2\right)\right]$$

olarak bulunur.

**5.1.6 Örnek (**Miller 1993) Aşağıda verilen

$$\left[\boldsymbol{D}^{3/2}-2\boldsymbol{D}^1-\boldsymbol{D}^{1/2}+2\boldsymbol{D}^0\right]y(t)=0$$

denklemini Laplace dönüşüm tekniği ile çözelim.

$Y(s)$ fonksiyonu $y(t)$ 'nin Laplace dönüşümü olarak alındığında

$$\left[s^{3/2}Y(s)-s\boldsymbol{D}^{-1/2}y(0)-\boldsymbol{D}^{-1/2}y(0)\right]-2\left[sY(s)-y(0)\right]-\left[s^{1/2}Y(s)-\boldsymbol{D}^{-1/2}y(0)\right]+2Y(s)=0$$

$$\left[s^{3/2}-2s-s^{1/2}+2\right]Y(s)+\left(-s+1\right)\boldsymbol{D}^{-1/2}y(0)-\boldsymbol{D}^{1/2}y(0)+2y(0)=0$$

$$\begin{aligned}Y(s)=&\frac{s}{s^{3/2}-2s-s^{1/2}+2}\boldsymbol{D}^{-1/2}y(0)-\frac{1}{s^{3/2}-2s-s^{1/2}+2}\boldsymbol{D}^{-1/2}y(0)\\&+\frac{1}{s^{3/2}-2s-s^{1/2}+2}\boldsymbol{D}^{1/2}y(0)-\frac{2}{s^{3/2}-2s-s^{1/2}+2}y(0)\end{aligned}$$

eşitliğinde $A=\boldsymbol{D}^{1/2}y(0)-2y(0)-\boldsymbol{D}^{-1/2}y(0)$ ve $B=\boldsymbol{D}^{-1/2}y(0)$ için ve $P(x)$ polinomu $P(x)=x^3-2x^2-x+2$ olmak üzere

$$Y(s)=\frac{A}{P(s^{1/2})}+\frac{B\,s}{P(s^{1/2})}$$

olarak yazılır. Buradan $Y(s)$ 'nin ters Laplace dönüşümünden,

$$y(t) = A\,L^{-1}\left\{\frac{1}{P(s^{1/2})}\right\} + B\,L^{-1}\left\{\frac{s}{P(s^{1/2})}\right\}$$

olur. Burada

$$L^{-1}\left\{P^{-1}(s^{1/2})\right\} = y_1(t)$$
$$L^{-1}\left\{sP^{-1}(s^{1/2})\right\} = y_2(t) - y_1(0)$$

olur. Buradan

$$y_1(t) = -\frac{1}{3}\left[-\varepsilon_t\left(\frac{1}{2},1\right) + 4\,\varepsilon_t\left(\frac{1}{2},4\right) - 2\,\varepsilon_t\left(0,1\right) + 2\varepsilon_t\left(0,4\right)\right]$$
$$y_2(t) = D\,y_1(t) = \frac{1}{3}\left[-\varepsilon_t\left(\frac{1}{2},1\right) + 16\,\varepsilon_t\left(\frac{1}{2},4\right) - 2\,\varepsilon_t\left(0,1\right) + 8\,\varepsilon_t\left(0,4\right) + \frac{t^{-1/2}}{\Gamma(1/2)}\right]$$

için

$$y(t) = A\,y_1(t) + B\,y_2(t)$$

sonucuna ulaşılır.

### 5.1.2 Homojen Olmayan Adi Kesirli Diferansiyel Denklemler

Şimdi homojen olmayan denklemler için uygun olan özel çözümleri bulacağız. $A_k \in \mathbb{R}$ $\quad k = 0,\ldots,m$ reel olmak üzere $f(x)$ fonksiyonları $\mathbb{R}_+$ uzayından alınmak üzere homojen olmayan

$$\sum_{k=1}^{m} A_k\, {}_0\boldsymbol{D}_t^{\alpha_k}\, y(x) + A_0 y(x) = f(x) \quad \left(x > 0;\quad 0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_m;\ m \in \mathbb{N}\right) \qquad (5.31)$$

denklemi verilsin. (5.3) denkleminin özel çözümü olduğunu bulmak için (5.31) den faydalanacağız. Laplace konvolüsyon formülünden

$$L\left\{\left(\int_0^x k(x-t)\,f(t)dt\right)(s)\right\} = L\{k(s)\}\,L\{\,f(p)\}$$

elde edilir. Tıpkı (5.8)'deki gibi Green fonsiyonunun benzeri olan $G_\alpha(x)$ fonksiyonlarının Laplace dönüşümü

$$G_{\alpha_1,\ldots,\alpha_m}(x) = L^{-1}\left\{\left(\frac{1}{P_{\alpha_1,\ldots,\alpha_m}(s)}\right)(x)\right\}, \quad P_{\alpha_1,\ldots,\alpha_m}(s) = A_0 + \sum_{k=1}^{m} A_k s^{\alpha_k} \tag{5.32}$$

olacak şekilde (5.31) denkleminin özel bir çözümünün (5.3) denklemi olduğunu $G_{\alpha_1,\ldots,\alpha_m}$ ve $f(x)$ fonksiyonlarının konvolüsyonu olarak

$$y(x) = \int_0^x G_{\alpha_1,\ldots,\alpha_m}(x-t)\,f(t)dt \tag{5.33}$$

şeklinde yazılır. Genel olarak, (5.31) denkleminde $A_m = 1$ olduğunu ele alacağız. (5.31) denkleminin özel bir çözümünü $m = 1$ için, (2.5)'teki iki parametreli Mittag-Leffler fonksiyonu cinsinden

$$_0\boldsymbol{D}_t^\alpha y(x) - \lambda y(x) = f(x) \quad (x > 0;\ \alpha > 0) \tag{5.34}$$

şeklinde elde ederiz.

**5.1.3 Teorem (**Kilbas 2006) $\alpha > 0, \lambda \in \mathbb{R}$ ve $f(x)$ fonksiyonu $\mathbb{R}_+$ uzayında tanımlansın. (5.34) denklemi özel çözümü

$$y(x) = \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left[\lambda(x-t)^\alpha\right] f(t)dt \tag{5.35}$$

olacak şekilde ve (5.35)'teki denklemin sağ tarafındaki integralin yakınsak olması şartıyla çözülebilir.

(2.7)'de $\beta = \alpha$ alırsak,

$$L\left\{t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left(\lambda t^\alpha\right)\right\} = 1\big/\left(s^\alpha - \lambda\right) \qquad \left(\mathrm{Re}(s) > 0, \quad \left|\lambda s^{-\alpha}\right| < 1\right)$$

elde ederiz. Buradan

$$G_\alpha\left(x\right) = x^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left(\lambda t^\alpha\right)$$

olur. Böylece, $G_{\alpha_1,\ldots,\alpha_m} = G_\alpha\left(x\right)$ için (5.35) denklemi sağlanır ve bu teorem ispatlanmış olur.

**5.1.7 Örnek** (Kilbas 2006)

$${}_0\boldsymbol{D}_t^{n-1/2}y(x) - \lambda y(x) = 0 \quad \left(x > 0; \quad n \in \mathbb{N}, \quad \lambda \in \mathbb{R}\right)$$

denkleminin özel bir çözümü

$$y(x) = \int_0^x \left(x-t\right)^{n-3/2} E_{n-3/2,n-3/2}\left[\lambda\left(x-t\right)^{n-3/2}\right] f(t)dt$$

olarak yazılır.

**5.1.8 Örnek** (Kilbas 2006) $n \in \mathbb{N}$ mertebeden adi diferansiyel denklem

$$y^{(n)}(x) - \lambda y(x) = f(x) \quad \left(x > 0; \quad n \in \mathbb{N}\right)$$

şeklinde verilsin. Bu denkleminin in özel bir çözümü

$$y(x) = \int_0^x \left(x-t\right)^{n-1} E_{n,n}\left[\lambda\left(x-t\right)^n\right] f(t)dt$$

olarak yazılır. Benzer şekilde ikinci mertebeden denklem

$$y''(x) - \lambda y(x) = f(x) \quad \left(x > 0; \quad \lambda \in \mathbb{R}\right)$$

şeklinde verilsin. Bu denklem $\lambda > 0$ ve $\lambda < 0$ için farklı özel çözümlere sahiptir:

$$y(x) = \int_0^x \frac{\sinh\left[\sqrt{\lambda}\left(x-t\right)\right]}{\sqrt{\lambda}} f(t)dt \qquad \left(\lambda > 0\right)$$

$$y(x) = \int_0^x \frac{\sinh\left[\left(-\lambda\right)^{1/2}\left(x-t\right)\right]}{\left(-\lambda\right)^{1/2}} f(t)dt \qquad \left(\lambda < 0\right).$$

**5.1.5 Önerme (**Kilbas 2006) $n-1<\alpha\le n;\ n\in\mathbb{N},\ \lambda\in\mathbb{R}$ ve $f(x)$ fonksiyonu $\mathbb{R}_+$ uzayında tanımlansın. (5.34) denklemi için (5.21)'deki Cauchy tipindeki problem çözülebilir ve çözüm

$$y(x)=\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left[\lambda(x-t)^{\alpha}\right]f(t)dt+\sum_{j=1}^{n} b_j x^{\alpha-j}E_{\alpha,\alpha+1-j}\left(\lambda x^{\alpha}\right)$$

olarak elde edilir.

Şimdi homojen olmayan denklemlerle ilgili genel çözümler bulmak için Riemann-Liouville kesirli türev yaklaşımı kullanacağız.

$$\sum_{k=1}^{m} A_k\,{}_0\boldsymbol{D}_t^{\alpha_k}y(x)+A_0y(x)=f(x)\quad\left(x>0;\quad 0<\alpha_1<...<\alpha_m\right)\tag{5.36}$$

$A_k\in\mathbb{R}\quad k=0,...,m$ ve $f(x)$ fonksiyonu $\mathbb{R}_+$ üzerinde tanımlı olmak üzere (5.36)'nın genel çözümü, kendi özel çözümlerinin ve (5.22) deki homojen denklemlere karşılık gelen genel çözümlerin toplamıdır. Bu, (5.36) denkleminin özel çözümünü bulmak için yeterlidir. Aslında $n_k-1<\alpha_k<n_k$ ve $0=n_0\le n_1\le...\le n_m$ için (5.36) denkleminin Laplace dönüşümünü, (5.24) 'ü ve ters Laplace dönüşümünü ele alırsak, (5.36)'nın genel çözümünü

$$y(x)=\sum_{j=0}^{n_m-1}c_jy_j(x)+\int_0^x G_{\alpha_1,...,\alpha_m}(x-t)f(t)dt$$

olarak buluruz. Burada $y_j(x)\quad\left(j=1,...,n_m\right)$'ler homojen denklemin çözümleri olup $q=0,...,m-1$ ve $n_q-1<j_k<n_{q+1}-1$ şartlarını sağlayan ve (5.32)'de verilen $P_{\alpha_1,...,\alpha_m}(s)$ için $c_j$'ler reel sabitler olmak üzere

$$y_j(x)=\sum_{k=q}^{n_m-1}A_kL^{-1}\left(\frac{s^{\alpha_k-j-1}}{P_{\alpha_1,...,\alpha_m}(s)}\right)(x)$$

şeklinde yazılan ifadelerdir. Bu gösterir ki, (5.36)'daki homojen olmayan denklemin Caputo kesirli türevi kullanılarak bulunan özel çözümü ile (5.31)'deki homojen olmayan denklemin Riemann-Liouville kesirli türevi kullanılarak bulunun özel çözümü çakışır.

**5.1.4 Teorem (**Kilbas 2006) $n-1<\alpha\le n;\ n\in\mathbb{N},\ \lambda\in\mathbb{R}$ ve $f(x)$ fonksiyonu $\mathbb{R}_+$ üzerinde tanımlı olsun.

$$ {}_0^C D_t^\alpha y(x)-\lambda y(x)=f(x) \quad (x>0) \tag{5.37}$$

denklemi, $c_j \ (j=0,...,n-1)$'ler keyfi reel sabitler olmak üzere

$$y(x)=\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left[\lambda(x-t)^\alpha\right]f(t)dt+\sum_{j=0}^{n-1}c_j x^j E_{\alpha,j+1}\left(\lambda x^\alpha\right) \tag{5.38}$$

genel çözümüne sahiptir. Özellikle (5.37)'deki denklemin genel çözümleri, $c_1$ ve $c_2$ keyfi reel sabitler olmak üzere $0<\alpha\le 1$ için

$$y(x)=\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left[\lambda(x-t)^\alpha\right]f(t)dt+c_1E_\alpha\left(\lambda x^\alpha\right)$$

ve $1<\alpha\le 2$ için

$$y(x)=\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left[\lambda(x-t)^\alpha\right]f(t)dt+c_1E_\alpha\left(\lambda x^\alpha\right)+c_2E_{\alpha,2}\left(\lambda x^\alpha\right)$$

olarak yazılır.

**5.1.1 Not (**Kilbas 2006) Gorenflo ve Mainardi (1997)'de, (5.38) denkleminde $\lambda=-1$ alıp geldiği başka bir form için (5.37) denkleminin açık çözümü elde edilmiştir.

**5.1.6 Önerme (**Kilbas 2006) $n-1<\alpha\le n;\ n\in\mathbb{N},\ \lambda\in\mathbb{R}$ ve $f(x)$ fonksiyonu $\mathbb{R}_+$ üzerinde tanımlı olsun. (5.37) denklemi için (5.30)'daki Cauchy problemi çözülürse,

$$y(x)=\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left[\lambda(x-t)^\alpha\right]f(t)dt+\sum_{j=0}^{n-1}b_j x^j E_{\alpha,j+1}\left(\lambda x^\alpha\right)$$

sonucuna ulaşılır.

**5.1.9 Örnek** (Podnubly 1999) Aşağıdaki eşitliği göz önüne alalım;

$$ {}_0\boldsymbol{D}_t^Q f(t) + {}_0\boldsymbol{D}_t^q f(t) = h(t) . $$

Bu denklem $q - Q$ 'nun tamsayı olduğu zamanlar hariç oldukça güçlüklerle karşılaşır. Varsayalım ki $0 < q < Q < 1$ olsun ve verilen denkleme Laplace dönüşümü uygulanırsa

$$ L\left\{ {}_0\boldsymbol{D}_t^Q f(t) + {}_0\boldsymbol{D}_t^q f(t) \right\} = L\left\{ h(t) \right\} , $$

$$ (s^Q + s^q)F(s) = H(s) + C , $$

$$ C = [ {}_0\boldsymbol{D}_t^{q-1} f(t) + {}_0\boldsymbol{D}_t^{Q-1} f(t)]_{t=0} $$

elde edilir ve buradan

$$ F(s) = \frac{H(s)+C}{s^Q + s^q} = \frac{H(s)+C}{s^q\left(s^{Q-q}+1\right)} = (H(s)+C)\frac{s^{-q}}{s^{Q-q}+1} $$

olarak bulunur. (2.7)’deki Mittag-Leffler fonksiyonunun integral gösterimi yardımıyla ve Tablo 3.2’den

$$ L^{-1}\left\{F(s)\right\} = L^{-1}\left\{ \left(H(s)+C\right)\frac{s^{-q}}{s^{Q-q}+1} \right\} , $$

$$ L^{-1}\left\{F(s)\right\} = L^{-1}\left\{ C\frac{s^{-q}}{s^{Q-q}+1} \right\} + L^{-1}\left\{ H(s).\frac{s^{-q}}{s^{Q-q}+1} \right\} , $$

$$ f(t) = C.G(t) + \int_0^t G(t-\tau)h(\tau)d\tau , $$

$$ C = \left[ {}_0\boldsymbol{D}_t^{q-1} f(t) + {}_0\boldsymbol{D}_t^{Q-1} f(t) \right]_{t=0} , G(t) = t^{Q-1}E_{Q-q,Q}(-t^{Q-q}) $$

sonucuna ulaşılır. $0 < q < Q < n$ olduğu durum benzer şekilde çözülebilir.

**5.1.10 Örnek** (Podnubly 1999) Sıfırdan farklı başlangıç koşulları altında; homojen olmayan kesirli diferansiyel eşitlikler ve $n-1 < \alpha < n$ için

$$ {}_0\boldsymbol{D}_t^{\alpha} y(t) - \lambda y(t) = h(t), \quad (t > 0) \tag{5.39} $$

$$ \left[ {}_0\boldsymbol{D}_t^{\alpha-k} y(t) \right]_{t=0} = b_k; \quad (k = 1, 2, 3, ..., n) \tag{5.40} $$

başlangıç değer problemlerini göz önüne alalım. (5.39)’deki problem iterasyon metodu ile çözülebilir ancak Laplace dönüşüm yardımı ile aynı çözüme daha kolay ulaşabiliriz.

Gerçekten, (5.40)’da verilen başlangıç koşulları göz önüne alınacak olursa ve (5.39)’un Laplace dönüşümü alınarak

$$ L\left\{ {}_0\boldsymbol{D}_t^{\alpha} y(t) - \lambda y(t) \right\} = L\left\{ h(t) \right\}, \quad (t > 0) $$

$$ s^{\alpha} Y(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k \left[ {}_0\boldsymbol{D}_t^{\alpha-k} f(t) \right]_{t=0} - \lambda Y(s) = H(s) $$

$$ \left( s^{\alpha} - \lambda \right) Y(s) = H(s) + \sum_{k=1}^{n} s^{k-1} \left[ {}_0\boldsymbol{D}_t^{\alpha-k} f(t) \right]_{t=0} b_k $$

$$ Y(s) = \frac{H(s)}{s^{\alpha} - \lambda} + \sum_{k=1}^{n} b_k \frac{s^{k-1}}{s^{\alpha} - \lambda} $$

elde edilir ve (2.7)’deki Mittag-Leffler fonksiyonunun integral gösteriminden faydalanarak Tablo 3.2’den

$$ L^{-1}\left\{ Y(s) \right\} = \sum_{k=1}^{n} b_k t^{\alpha-k} E_{\alpha,\alpha-k+1}(\lambda t^{\alpha}) + L^{-1}\left\{ H(s).\frac{1}{s^{\alpha} - \lambda} \right\}, $$

$$ y(t) = \sum_{k=1}^{n} b_k t^{\alpha-k} E_{\alpha,\alpha-k+1}(\lambda t^{\alpha}) + \int_0^t \left( t - \tau \right)^{a-1} E_{\alpha,\alpha}\left( \lambda \left( t - \tau \right)^{\alpha} \right) h(\tau) d\tau $$

bulunur.

### 5.1.3 Kısmi Kesirli Diferansiyel Denklemler

Kesirli mertebeden kısmi lineer diferansiyel denklemleri çözmede Laplace dönüşüm yöntemi başarıyla kullanılır.

**5.1.11 Örnek Nigmatullin Kesirli Difüzyon Denklemi** (Podnubly 1999)

Şimdi bir boyutlu uzayda kesirli difüzyon denklemi için sınır değer problemi göz önüne alalım.

$$ {}_0\boldsymbol{D}_t^{\alpha} u(x,t) = \lambda^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad (t>0, \quad -\infty < x < \infty), \tag{5.41} $$

$$ \lim_{x\to\pm\infty} u(x,t) = 0; \quad \left[ {}_0\boldsymbol{D}_t^{\alpha-1} u(x,t) \right]_{t=0} = \varphi(x) \tag{5.42} $$

Farz edelim ki burada $0 < a < 1$ olsun (5.41) tipindeki denklem Nigmatullin (1986), Westerland (1991) ve Mainardi (1994) tarafından ortaya çıkarılmıştır. (5.41)'deki problemin basit bir çözümünü iki değişkenli Mittag-Leffler fonksiyonunun avantajını kullanarak bir kez daha göstereceğiz.

(5.42)'deki sınır koşulları göz önüne alınacak olursa, $x$ değişkenine göre Fourier dönüşümü alınırsa,

$$ F\left\{ {}_0\boldsymbol{D}_t^{\alpha} u(x,t) \right\} = F\left\{ \lambda^2 \frac{\partial u(x,t)}{\partial x^2} \right\} $$
$$ {}_0\boldsymbol{D}_t^{\alpha} \overline{u}(\beta,t) = \lambda^2 \left(-i\beta\right)^2 \overline{u}(\beta,t) $$
$$ {}_0\boldsymbol{D}_t^{\alpha} \overline{u}(\beta,t) = -\lambda^2 \beta^2 \overline{u}(\beta,t) $$

olur ve

$$ {}_0\boldsymbol{D}_t^{\alpha} \overline{u}(\beta,t) + \lambda^2 \beta^2 \overline{u}(\beta,t) = 0 \tag{5.43} $$

$$ \left[ {}_0\boldsymbol{D}_t^{\alpha-1} \overline{u}(x,t) \right]_{t=0} = \overline{\varphi}(\beta) \tag{5.44} $$

bulunur. Burada $\beta$ , Fourier dönüşüm parametresidir. (5.44)'deki başlangıç koşullarıyla (5.43)'te $t$ değişkenine göre Laplace dönüşümü uygulanırsa

$$ L\left\{ {}_0\boldsymbol{D}_t^{\alpha} \overline{u}(\beta,t) + \lambda^2 \beta^2 \overline{u}(\beta,t) \right\} = 0 $$
$$ \left( s^{\alpha} + \lambda^2 \beta^2 \right) \overline{U}(\beta,s) - \varphi(\beta) = 0 $$

elde edilir ve buradan

$$ \overline{U}(\beta,s) = \frac{\varphi(\beta)}{s^{\alpha} + \lambda^2 \beta^2} $$

yazılabilir. (2.7)'deki Mittag-Leffler fonksiyonunun integral gösterimi yardımıyla ve Tablo 3.2'den

$$L^{-1}\left\{\bar{U}(\beta,s)\right\} = L^{-1}\left\{\frac{\varphi(\beta)}{s^{\alpha}+\lambda^2\beta^2}\right\}$$
$$\bar{u}(\beta,t) = \varphi(\beta)\, t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left(-\lambda^2\beta^2 t^{\alpha}\right)$$

olarak bulunur. (5.41) ve (5.42)'deki başlangıç değer probleminin çözümü ters Fourier dönüşümünün ürünleridir.

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x-\xi,t)\varphi\left(\xi\right)d\xi \tag{5.45}$$

$$G(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda^2\beta^2 t^{\alpha})\cos(\beta x)\, d\beta \tag{5.46}$$

(5.46)'da verilen ifadeye Laplace dönüşümü uygulanarak

$$L\left\{G(x,t)\right\} = \int_0^{\infty} e^{-st}G(x,t)dt$$
$$L\left\{G(x,t)\right\} = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-st}\,\frac{1}{\pi}t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda^2\beta^2 t^{\alpha})\cos\beta x d\beta dt$$
$$g(x,s) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos\left(\beta x\right)d\beta}{\lambda^2\beta^2+s^{\alpha}} = \frac{1}{2\lambda}s^{-\alpha/2}e^{-|x|\lambda^{-1}s^{\alpha/2}}$$

bulunur ve bunun ters Laplace dönüşümünden

$$G(x,t) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{1}{2\lambda}s^{-\alpha/2}e^{\left(-|x|\lambda^{-1}s^{\alpha/2}\right)}e^{st}ds$$
$$G(x,t) = \frac{1}{4\pi i}\int e^{st}s^{-\alpha/2}\exp(-|x|\lambda^{-1}s^{\alpha/2})ds$$

elde edilir. Bu denklemde $z = |x|\lambda^{-1}s^{a/2}$, $p = a/2$ yerine koyarsak, Bromwich sınırı Hankel sınırına dönüşür, benzer durum ortaya konulduğundan

$$G(x,t) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{1}{2\lambda}s^{-\alpha/2}e^{\left(-|x|\lambda^{-1}s^{\alpha/2}\right)}e^{st}ds$$
$$G(x,t) = \frac{t^{-(1-p)}}{2\lambda}\frac{1}{2\pi i}\int_{Ha} e^{\sigma - z\sigma^{p}}\frac{d\sigma}{\sigma^{p}} = \frac{1}{2\lambda}t^{p-1}W(-z,-p,p), \quad z = \frac{|x|}{\lambda t^{p}} \tag{5.47}$$

elde edilir. Dikkat edersek burada $u_1(\beta) = t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda^2\beta^2t^\alpha)$ fonksiyonunun Fourier-cosine dönüşümü olur. Bunu $a=1$ için kontrol etmek kolaydır. (5.47) deki kesirli Green fonksiyonu

$$\begin{aligned} G(x,t) &= \frac{t^{1-a/2}}{2\lambda}\frac{1}{2\pi i}\int_{Ha} e^{\sigma - z\sigma^{1/2}}\frac{d\sigma}{\sigma^{1/2}} = \frac{t^{-1/2}}{2\lambda}W(-z,-1/2,1/2) \\ &= \frac{1}{2\lambda\sqrt{t}}M(z;1/2) = \frac{1}{2\lambda\sqrt{xt}}\exp(\frac{-x^2}{4\lambda^2 t}) \end{aligned} \tag{5.48}$$

olarak klasik ifadeye döner.

**5.1.12 Örnek Schneider-Wyss Kesirli Difüzyon Denklemi** (Podnubly 1999)

Takip eden örnekler gösterir ki, önerilen metot kesirli integral eşitlikleri için daha etkili kullanılabilir. Schneider-Wyss formülünü göz önüne alalım. (bir boyutlu uzayda basitliğini görmek için önceki örnekle karşılaştırıyoruz.)

$$u(x,t) = \varphi(x) + \lambda^2 \, {}_0\boldsymbol{D}_t^{-\alpha}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad (-\infty < x < \infty,\ t > 0) \tag{5.49}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} u(x,t) = 0; \quad u(x,0) = \varphi(x)$$

$x$'i göz önünde bulundurarak Fourier dönüşümü ve $t$ zamanını göz önünde bulundurarak Laplace dönüşümü uygularsak;

$$\bar{U}(\beta,s) = \frac{\varphi(\beta)s^{\alpha-1}}{s^\alpha + \lambda^2\beta^2}$$

$u(x,t)$ 'nin Fourier-Laplace dönüşümünün $U(\beta,s)$ olduğu yerde; $\beta$ Fourier parametresi, $s$ de Laplace parametresidir.

Örnek 5.1.11'de önceden gösterdiğimiz örnekte Laplace ve Fourier dönüşümünü ters çevirecek olursak, (5.49)'ün çözümünden

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x-\xi,t)\varphi(\xi)\,d\xi \tag{5.50}$$

$$G(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty E_{\alpha,1}(-\lambda^2\beta^2t^\alpha)\cos(\beta x)\,d\beta \tag{5.51}$$

elde edilir. (5.51)'deki integral değerlendirelim. (5.51)'in Laplace dönüşümünden

$$g(x,s)=\frac{s^{\alpha-1}}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos(\beta x)\,d\beta}{s^{\alpha}+\lambda^2\beta^2}=\frac{1}{2\lambda}s^{\alpha/2-1}\exp(-|x|\lambda^{-1}s^{\alpha/2})$$

bulunur ve bu ifadenin ters Laplace dönüşümünden

$$G(x,t)=\frac{1}{4\lambda\pi i}\int_{Br}e^{st}s^{\alpha/2-1}\exp(-|x|\lambda^{-1}s^{\alpha/2})ds$$

elde edilir.

Bu denklemde $\sigma=st,$ ve $z=|x|\lambda^{-1}t^{-p},$ $\left(p=a/2\right)$ 'yi yerine koyup Mainardi'nin benzer durumda bulduğu gibi Bromwich sınırını Hankel sınırına dönüştürürüz.

$$G(x,t)=\frac{t^{-p}}{2\lambda}\frac{1}{2\pi i}\int_{Ha}e^{\sigma-z\sigma^{p}}\frac{d\sigma}{\sigma^{1-p}}=\frac{1}{2\lambda}t^{-p}M(z,p),\quad z=\frac{|x|}{\lambda t^{p}} \tag{5.52}$$

Burada $M(z;p)=W(-z;-p,1-p)$ Bölüm 2.1.4'te verilen Mainardi fonksiyonudur. Bu son ifade Mainardi'nin başka bir yolla elde ettiği tanımla özdeştir.

Şu noktaya dikkat çekmek istersek, önceki örnekte $u_2\left(\beta\right)=E_{\alpha,1}\left(-\lambda^2\beta^2t^{\alpha}\right)$ fonksiyonunun Fourier-Cos dönüşüm değerini elde etmiştik. $a=1$ için (5.52)'daki kesirli Green fonksiyonu da (5.48)'deki klasik tanıma dönüşür. Uzayın boyutlarının keyfi sayıdaki durumları benzer şekilde çözülebilir.

Difüzyon problemleri $a=1$ için genelleştirirsek, (Nigmatullin denklemi Schneider ve Wyss'in olduğu gibi) standart difüzyon problemlerini verir, ve çözüm klasik çözüme dönüşür. Öte yandan, açıktır ki (5.45) ve (5.50) $t\to\infty$ için asimptotiktir ve $t\to\infty$ için farklıdır.

## 5.2 Ardışık Kesirli Diferansiyel Denklemlerin Çözümleri

Miller (1993)'de verilen (5.12) denklemi Podnubly (1994), Podnubly (1995) ve Podnubly (1999)'da yazar tarafından geliştirilmiştir.

$$\mathcal{D}^{\sigma_k} y(x) = f(x), \quad \left[\mathcal{D}^{\sigma_k} y(x)\right]_{x=0} = 0 \qquad (k = 0,1,...,n-1)$$

şeklinde verilen Cauchy probleminin özel çözümünü $G_\alpha\left(x,t\right)$ Green fonksiyonunun terimleri cinsinden

$$y(x) = \int_0^x G_\alpha\left(x,t\right) f(t)dt$$

şeklinde ifade edilir. Benzer şekilde

$$\mathcal{D}^{\sigma_k} y(x) = f(x), \quad \left[\mathcal{D}^{\sigma_k} y(x)\right]_{x=0} = b_k \qquad (k = 0,1,...,n-1)$$

şeklinde verilen Cauchy probleminin aşikâr çözümü, $a_k(x) = a_k \in \mathbb{C}$ sabit olmak üzere ve $G_\alpha\left(x,t\right) = G_\alpha\left(x-t\right)$ Green fonksiyonunun terimleri cinsinden

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k y_k(x) + \int_0^x G_\alpha\left(x-t\right) f(t)dt, \qquad y_k(x) = {}_0\boldsymbol{D}_t^{\alpha_n}\, {}_0\boldsymbol{D}_t^{\alpha_{n-1}} \ldots {}_0\boldsymbol{D}_t^{\alpha_k} G_\alpha\left(x\right)$$

olarak ifade edilir. (Kilbas 2006)

Ardışık kesirli diferansiyel denklemler için başlangıç değer problemini göz önüne alalım. (Podnubly 1999)

$${}_0L_t y(t) = f(t); \quad {}_0\mathcal{D}_t^{\sigma_k - 1} y(t)\big|_{t=0} = b_k; \quad (k = 1,...,n)$$

$${}_aL_t y(t) \equiv {}_a\mathcal{D}_t^{\sigma_n} y(t) + \sum_{k=1}^{n\text{-}1} p_k(t)\, {}_a\mathcal{D}_t^{\sigma_{n\text{-}k}} y(t) + p_n(t) y(t)$$

Burada Miller Ross ardışık türevinin (2.39)’daki tanımını hatırlarsak; sabit katsayılı pek çok eşitlik için (2.7)’nin avantajlarını kullanıp Laplace dönüşüm metoduna genişleterek sonuç bulunabilir (Podnubly 1999).

### 5.2.1 Adi Kesirli Diferansiyel Denklemler

Bu bölümde sabit katsayılı standart lineer adi kesirli diferansiyel denklemlerin ardışık örneklerinin çözümünü vereceğiz. Elbette ardışık kesirli türev ile ilgili olarak da, uygun başlangıç koşulları almalıyız.

**5.2.1 Örnek** (Podnubly 1999) Örnek 5.1.1'deki örneğin ardışık halini göz önüne alalım. $0<\alpha<1, \quad 0<\beta<1, \quad \alpha+\beta=1/2$ için,

$$ {}_0\boldsymbol{D}_t^{\alpha}\left({}_0\boldsymbol{D}_t^{\beta}y(t)\right)+a\,y(t)=0\,, \tag{5.53}$$

$$ \left[{}_0\boldsymbol{D}_t^{\alpha-1}\left({}_0\boldsymbol{D}_t^{\beta}y(t)\right)\right]_{t=0}=b_1\,, \quad \left[{}_0\boldsymbol{D}_t^{\beta-1}y(t)\right]_{t=0}=b_2 \tag{5.54}$$

ifadelerini inceleyelim. (3.12)'deki ardışık kesirli türevin Laplace dönüşüm formülü (5.54)'deki başlangıç koşullarını uygun hale getirir. (3.12)'yi kullanarak, $\alpha_1=\beta,\ \alpha_2=\alpha,\ m=2$ , $\sigma_1=\beta,\ \sigma_2=\alpha+\beta$ alırsak, (5.53)'deki eşitliğin Laplace dönüşümünden

$$(s^{\alpha+\beta}+a)Y(s)=s^{\alpha}b_2+b_1,$$

$$Y(s)=b_2\frac{s^{\alpha}}{s^{\alpha+\beta}+a}+b_1\frac{1}{s^{\alpha+\beta}+a}$$

elde edilir. Ve (2.7)'deki Mittag-Leffler fonksiyonunun integral gösterimi yardımıyla ve Tablo 3.2'den (5.53) ve (5.54) problemlerinin çözümünü

$$\begin{aligned} L^{-1}\{Y(s)\}&=L^{-1}\left\{b_2\frac{s^{\alpha}}{s^{\alpha+\beta}+a}\right\}+L^{-1}\left\{b_1\frac{1}{s^{\alpha+\beta}+a}\right\}, \\ y(t)&=b_2t^{\beta-1}E_{\alpha+\beta,\beta}(-at^{\alpha+\beta})+b_1t^{\alpha+\beta-1}E_{\alpha+\beta,\alpha+\beta}(-at^{\alpha+\beta}) \end{aligned} \tag{5.55}$$

olarak buluruz. Burada $\beta=0$ , $\alpha=1/2$ ve elbette $b_2=0$ alırsak, Örnek 5.1.1'in çözümünü (5.55)'dan

$$y(t)=b_1t^{1/2-1}E_{1/2,1/2}(-at^{1/2})$$

şeklinde elde edebiliriz.

**5.2.2 Örnek** (Podnubly 1999) Örnek 5.1.2 de dikkate alınan eşitlik için ardışık benzerliği göz önüne alalım. $0<\alpha<1, \quad 0<\beta<1, \quad 0<q<1, \quad \alpha+\beta=Q>q$ için,

$$ {}_0\boldsymbol{D}_t^{\alpha}\left({}_0\boldsymbol{D}_t^{\beta}y(t)\right)+{}_0\boldsymbol{D}_t^{q}y(t)=h(t) $$

ardışık kesirli diferansiyel denklemi inceleyelim. Bu denklemin Laplace dönüşümünü alırsak,

$$ L\left\{{}_0\boldsymbol{D}_t^{\alpha}\left({}_0\boldsymbol{D}_t^{\beta}y(t)\right)+{}_0\boldsymbol{D}_t^{q}y(t)\right\}=L\left\{h(t)\right\}, $$

$$ \left(s^{\alpha+\beta}+s^{q}\right)Y(s)=H(s)+s^{\alpha}b_2+b_1, $$

$$ \begin{aligned} b_1&=\left[{}_0\boldsymbol{D}_t^{\alpha-1}\left({}_0\boldsymbol{D}_t^{\beta}y(t)\right)\right]_{t=0}+\left[{}_0\boldsymbol{D}_t^{q-1}y(t)\right]_{t=0}\\ b_2&=\left[{}_0\boldsymbol{D}_t^{\beta-1}y(t)\right]_{t=0} \end{aligned} $$

elde edilir. Y(s) ifadesini bulunan denklemde düzenlersek

$$ Y(s)=\frac{H(s)}{s^{\alpha+\beta}+s^{q}}+b_2\frac{s^{\alpha}}{s^{\alpha+\beta}+s^{q}}+b_1\frac{1}{s^{\alpha+\beta}+s^{q}}, $$

$$ Y(s)=\frac{s^{-q}H(s)}{s^{\alpha+\beta-q}+1}+b_2\frac{s^{\alpha-q}}{s^{\alpha+\beta-q}+1}+b_1\frac{s^{-q}}{s^{\alpha+\beta-q}+1} $$

elde ederiz (2.7)'deki Mittag-Leffler fonksiyonunun integral gösterimi yardımıyla ve Tablo 3.2'den

$$ \begin{aligned} y(t)=&\,b_2t^{\beta-1}E_{\alpha+\beta-q,\beta}(-t^{\alpha+\beta-q})+b_1t^{\alpha+\beta-q}E_{\alpha+\beta-q,\alpha+\beta}(-t^{\alpha+\beta-q})+\\ &+\left\{t^{\alpha+\beta-1}E_{\alpha+\beta-q,\alpha+\beta}(-t^{\alpha+\beta-q})*h(t)\right\} \end{aligned} $$

$$ \begin{aligned} y(t)=&\,b_2t^{\beta-1}E_{\alpha+\beta-q,\beta}(-t^{\alpha+\beta-q})+b_1t^{\alpha+\beta-q}E_{\alpha+\beta-q,\alpha+\beta}(-t^{\alpha+\beta-q})+\\ &+\int_0^t\left(t-\tau\right)^{\alpha+\beta-1}E_{\alpha+\beta-q,\alpha+\beta}\left(-\left(t-\tau\right)^{\alpha+\beta-q}\right)h(\tau)d\tau \end{aligned} $$

çözümünü elde ederiz. Buradan Örnek (5.1.9)'un çözümünün özel koşullar altındaki sonucu verdiği görülebilir.

**5.2.3 Örnek** (Podnubly 1999)

Başlangıç değer problemlerini ardışık kesirli diferansiyel denklemler için göz önüne alalım. $0<\alpha_1<1,\ 0<\alpha_2<1$ olsun.

$$ {}_0\boldsymbol{D}_t^{\sigma_2}\left({}_0\boldsymbol{D}_t^{\sigma_1}y(t)\right)-\lambda y(t)=h(t)\ , \tag{5.56}$$

$$\left[{}_0\boldsymbol{D}_t^{\sigma_2-1}\left({}_0\boldsymbol{D}_t^{\sigma_1}y(t)\right)\right]_{t=0}=b_1,\quad \left[{}_0\boldsymbol{D}_t^{\sigma_1-1}y(t)\right]_{t=0}=b_2\ .$$

(5.56) ün Laplace dönüşümünden

$$\left(s^{\alpha_1+\alpha_2}-\lambda\right)Y(s)=s^{\alpha_2}b_2+b_1\ ,$$

$$L\left\{{}_0\boldsymbol{D}_t^{\sigma_2}\left({}_0\boldsymbol{D}_t^{\sigma_1}y(t)\right)-\lambda y(t)\right\}=L\left\{h(t)\right\},$$

$$Y(s)=\frac{H(s)}{s^{\alpha_1+\alpha_2}-\lambda}+b_2\frac{s^{\alpha_2}}{s^{\alpha_1+\alpha_2}-\lambda}+\frac{b_1}{s^{\alpha_1+\alpha_2}-\lambda}$$

bulunur. Burada (2.7)'deki Mittag-Leffler fonksiyonunun integral gösterimi yardımıyla ve Tablo 3.2'den $y(t)$ çözümünü elde ederiz.

$$y(t)=b_2t^{\alpha_1-1}E_{\alpha_1,\alpha_1}(\lambda t^{\alpha})+b_1t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^{\alpha})+\int_0^t\left(t-\tau\right)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left(\lambda\left(t-\tau\right)^{\alpha}\right)h(\tau)d\tau \tag{5.57}$$

$$\left(\alpha=\alpha_1+\alpha_2\right)$$

Örnek 5.1.10'da olduğu gibi $\alpha$'yı ele alalım. (2.5)'teki iki parametreli Mittag-Leffler fonksiyonunu ve kesirli türev fonksiyonu kullanılarak, (5.56)'ün çözümünün (5.57) olduğunu doğrulamak kolaydır.

Şunu ayrıca göstermeliyiz ki, eğer $b_1\neq 0,\ b_2\neq 0$ ise, Örnek 5.1.10'dan (5.57) denklemi ${}_0\boldsymbol{D}_t^{\alpha}y(t)-\lambda y(t)=h(t)$'nin çözümü değildir.

Ayrıca Örnek 5.1.10'un çözümü olan $y(t)$, (5.56) eşitliğinin çözümü değildir. Öte yandan, (5.39) ve (5.56) denklemleri bir diğerine çok yakındır. Kesirli Green fonksiyonu her iki durumda da $G(t)=t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^{\alpha})$'dır.

### 5.2.2 Kısmi Kesirli Diferansiyel Denklemler

**5.2.4 Örnek** (Podnubly 1999)

Mainardi'nin başlangıç değer problemlerini kesirli dalga difüzyon denklemleri için göz önüne alalım. $0<\alpha<1$ için

$$_{0}\boldsymbol{D}_t^{\alpha} u(x,t)=\lambda^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad \left(|x|<\infty,\ t>0\right) \ , \tag{5.58}$$

$$u(x,0)=f(x), \quad (|x|<\infty) \ , \tag{5.59}$$

$$\lim_{x\pm\infty} u(x,t)=0, \quad (t>0) \ . \tag{5.60}$$

(5.59)'daki başlangıç koşullarının cinsi, (5.58)'deki eşitliğin kesirli türevinin, $_{0}\mathcal{D}_t^{\alpha}={}_{0}\boldsymbol{D}_t^{\alpha_2}\,{}_{0}\boldsymbol{D}_t^{\alpha_1}$ ardışık kesirli türevinin uygun şekilde seçilerek yorumlanması gerektiğini önerir. (3.12)'deki Laplace dönüşüm formülünde $a_2=a-1,\ a_1=1$ve $k$=2 için ele alırsak (bu da Caputo'nun formülüdür)

$$L\left\{ {}_{0}\boldsymbol{D}_t^{\alpha} y(t);s\right\}=s^{\alpha}Y(s)-s^{\alpha-1}y(0)$$

elde ederiz. Bu denklem (5.58)-(5.60) problemlerine uygulanırsa

$$s^{\alpha}\bar{u}(x,s)-s^{\alpha-1}f(x)=\lambda^2\frac{\partial^2\bar{u}(x,s)}{\partial x^2}, \quad (|x|<\infty) \tag{5.61}$$

$$\lim_{x\pm\infty}\bar{u}(x,s)=0, \quad (t>0) \tag{5.62}$$

sonucu elde edilir. (5.61) eşitliğine Fourier-üstel dönüşümünü uygularsak ve (5.62)'deki sınır koşullarını uygun hale getirirsek

$$s^{\alpha}U(\beta,s)-s^{\alpha-1}F(\beta)=-\lambda^2\beta^2U(\beta,s)\,,$$
$$\left(s^{\alpha}+\lambda^2\beta^2\right)U(\beta,s)=s^{\alpha-1}F(\beta)\,,$$
$$U(\beta,s)=\frac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha}+\lambda^2\beta^2}F(\beta)$$

bulunur. $\bar{u}(x,s)$ ve $f(x)$'in Fourier dönüşümünün $U(\beta,p)$ ve $F(\beta)$ olduğu yerde $s^{\alpha-1}/s^{\alpha}+\lambda^2\beta^2$ kesrinin ters Laplace dönüşümü $E_{\alpha,1}(-\lambda^2\beta^2t^{\alpha})$'dır. (İki değişkenli

Mittag-Leffler fonksiyonunun $E_{\lambda,\mu}(z)$ olduğu verilmişti.) Bu nedenle Fourier ve Laplace dönüşümünden

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}G(x-\xi,t)f(\xi)d\xi\,,$$

$$G(x,t)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}E_{\alpha,1}\left(\lambda^{2}\beta^{2}t^{\alpha}\right)\cos(\beta x)d\beta=\frac{1}{2\lambda}t^{-p}W(-z,-p-1-p)$$

çözümüne ulaşılır. Burada $W\left(z,\lambda,\mu\right)$, (2.9)'deki Wright fonksiyonudur. Bu çözüm (5.50)'deki Scheineder-Wyss kesirli integral diferansiyel denkleminin çözümü ile aynıdır.

# 6. SONUÇ

Fiziksel olayları değişken durumlara göre betimleme ve modelleme de diferansiyel hesaplar büyük rol oynar. Kesirli diferansiyel hesaplamaları da fizik, kimya ve mühendislik alanlarında ortaya çıkan bu modellemelere farklı bir bakış açısı kazandırmıştır. Bunun sebebi, kesirli türevler gerçek sistemleri ve zamana bağlı süreçleri tamsayı mertebeli türevlerden daha tam ve gerçeğe yakın modeller. Kesirli diferansiyeller altında gözlenen fiziksel değişimler yer yer çok daha iyi sonuçlar ortaya koymasına rağmen, yine de tamsayı mertebeden türevlerden daha kesindir denilemez.

Diferansiyel denklem çözümlerinde "Sonlu Sine Dönüşüm Metodu", "Adomian Ayrışım Metodu", "Kesirli Green Fonksiyonu Metodu" ve bunların yanısıra bu tez çalışmasında ele aldığımız "Laplace Dönüşüm Metodu" en yaygın olarak kullanılan başlıca metodlardandır. Çözümü aranan problemin türüne bu metodlardan en uygun olanı seçilerek çözüme ulaşılır. Bu tez çalışmasında Laplace dönüşüm metodu analiz edilmiş ve kesirli analiz ile olan bazı bağlantıları incelenmiştir.

Temeli iki parametreli Mittag-Leffler fonksiyonunun Laplace dönüşümü üzerine kurulan "Laplace Dönüşüm Metodu" kesirli diferansiyel denklemler için oldukça geniş bir başlangıç-değer problemleri sınıfının çözümlerinin araştırmasında kullanılır. Bu çalışmada kesirli diferansiyel denklemler standart kesirli diferansiyel denklemler ve ardışık kesirli diferansiyel denklemler olmak üzere iki kısımda incelenmiştir. İncelenen Laplace dönüşüm metodu altında kesirli diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerine ulaşılmıştır. Metodun güvenirliği için nümerik çözümlerle karşılaştırmak ve sonuçların birbiriyle örtüşmesini görmek gerekir. Bu daha sonraki çalışmalarda ele alınabilir.

# 7. KAYNAKLAR


Anastasio, T.J., *The fractional-order dynamics of brainstem vestibulo-oculomotor neurons*. Bioogical Cybernetics, 72 (1), 69-79, (1994).

Arfken, G.B. and Weber, H.J., *Mathematical methods for physicist*, fourth edition, 959p, Amsterdam: Academic Press, (1995).

Bayın, S., *Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Yeni Yöntemler*, Ankara: Ders Kitapları A.Ş., (2004).

Benghorbal, M.M., *Power series solutions of fractional differential equations and symbolic derivatives and integrals*, PhD thesis, Faculty of Graduate Studies The University of Western Ontario, Canada, (2004).

Blair, G.W.S., "The role of psychophysics in rheology", *Journal of Colloid Sciences*, 2(1), 21-32, (1947).

Das, S., *Functional Fractional Calculus*, Indıa: Springer, (2011)

Daşcıoğlu, A., Sezer. M., *Diferansiyel Denklemler 2 Teori ve Problem Çözümleri*, Bursa: Dora, (2017).

Debnath, L., Recents applications of fractional calculus to Science and Engineering, *Int. J. Math. Appl. Sci.*, 54, 3413-3442, (2003).

Diethelm, K. *The Analysis of Fractional Differential equations*, Germany: Springer, (2010).

Dorta, J. A., Sobre ecuaciones diferenciales de orden no entero, *Depto. Andlisis Matemdtico.* (Universidad de La Laguna)

Dzhrbashyan, M.M., Nersesyan, A.B., Fractional Derivates and the Cauchy Problem for Differential Equations of Fractional Order, *Izv. Akademii Nauk Arm. SSR.*, vol (3), (1968).

Gorenflo, R., Mainardi, F., "Fractional oscillations and Mittag-LefHer functions", in: University Kuwait, (Ed.: D. M. C. S.) , *International Workshop on the Recent Advances in Applied Mathematics (Kuwait, RAAM'96),* Kuwait, 193-208, (1996).

Gorenflo, R., Mainardi, F., Fractional Calculus: Integral and Differential Equations of Fractional Order, CISM courses and lectures, vol (378), 223-276, Verlag, Berlin: Springer, (1997).

Gorenflo, R., Mainardi, F., Srivastava, H.M., Special functions in fractional relaxation-oscillation and fractional diffusion-wave phenomena, in: *The Eighth International Colloquium on Differential Equations (Plovdiv, 1997),* VSP Publising Company, Utrecht, 195-202, (1998).

Gorenflo, R., Rutman, R., On ultraslow and intermediate processes:, in: (Eds: Rusev, I. P., Dimoski, I., and Kiryakova, V.), *International Workshop on Transforms Methods and Special Functions*, Bulgarian Acad. Sci., Sofia, 61-81, (1994).

Hille, E., Tamarkin, J.D., On the theory of integral equations, *Ann. Math*., 31(3), 479-528, (1930).

Kilbas, A.A., Trujillo, J.J., Differential equation of fractional order: methods, results and problems. I, *Appl. Anal*, 78(1-2), 153-192, (2001).

Kilbas, A.A., Srivastava H.M., Trujillo, J.J., *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Amsterdam: Elsevier, (2006).

Leskovskij, I. P., On the solution of the linear homogeneous differential equations with fractional derivatives and constant coefficients, *P.Tul'sk Politech. Inst.,* Tula, 85-88, (1980).

Li, C., Zeng, F., *Numerical Methods for Fractional Calculus*,London, New York: Crc Press, (2015).

Mainardi, F. “On the initial value problem fort he fractional diffussion-wave equation”, (eds. S. Rionerero and T. Ruggeri), Waves and Stability in Continous Media, World Scientific, Singapore, (1994).

Malinowska, A. B., Odzijewicz T., Torres. D., *Advanced Methods in Fractional Calculus of Variations*, Poland: Springer, (2015).

Maravall, D., Nuevos tipos de ecuaciones integrales e integrodiferenciales. Nuevos fenomenos de oscilaciones (Spanish), *Rev. R. Acad. Cienc. Exactas, Fis. Nat.* 1-151, (1956).

Maravall, D., *Ingenieria de las Oscilaciones* (Spanish), Dossat, Madrid, (1959).

Maravall, D., Ecuaciones diferenciales lineales no enteras y oscilaciones fraccionarias (Spanish), *Rev. R. Acad. Cienc. Exactas, Fis. Nat.*, 65(1), 245-258, (1971).

Maravall, D., *Teoria e Aplicacao das Oscilacoes* (Portuguese), Editora Globo Porto Alegre, Brasil, (1964).

Maravall, D., *Mecanica y Cdlculo Tensorial* (Spanish), Dossat, Madrid, (1965).

Maravall, D., Las soluciones exactas de las ecuaciones integrales de la rheologi'a y de la viscoelasticidad y sus consecuencioas fisicas (Spanish), *Rev. R. Acad. Cienc.Exactas, Fis. Nat.*, (1978).

Maravall, D., Ecuaciones diferenciales e integrales fraccionarias. Relaciones entre el calculo simbolico y el fraccionario (Spanish), *Rev. R. Acad. Cienc. Exactas, Fis.Nat*, 98(1), 3-16, (2004).

Mathai, A.M., Haubold, H.J. *Special Functions for Applied Scientists,* Canada: Springer, (2008).

Mıller, S., Ross, B., *An Introductıon To The Fractional Differental Equations*, United States of America: John Wiley&Sons, Inc, (1993).

Miller, K. S., Fractional differential equations, *J. Fract. Calc,* 3, 49-57, (1993).

Nigmatullin, R.R., The realization of the generalized transfer equation in a medium with fractal geometry, *Phys. Sta. Sol.(b)*, vol(133), 425-430, (1986).

Oldham, K.B., Spainer, J., *The Fractional Calculus*, New York: Academic Press, (1974).

O'Shaughnessy, L., Problem (t 433, *Amer. Math. Monthly*, 25, 172-173, (1918).

Podlubny, I. , *Fractional Differential Equations*, United States of America: Academıc Press, (1999).

Podlubny, I. , The Laplace transform method for linear differential equations of the fractional order, *Inst. Exper. Phys. Slovak Acad. Sci.*, 2, 1-35, (1994).

Podlubny, I. , *Numerical solution of ordinary fractional differential equations by the fractional difference method, in: Advances in Differential Equations, Gordon and Breach, Amsterdam,* 507-515, (1995).

Post, E. L., Discussion of the solution of *(d/dx)1/2y = y/x* ((( problem 433), *Amer. Math. Monthly,* 26, 37-39, (1919).

Rabotnov, Y.N., *Elements of Hereditary Solids Mechanics*, Nauka, Moscow, Rusia (1997).

Samko, S. G., Kilbas, A. A., Marichev, O.I., *Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications,* Gordon and Breach Science Publishers, Switzerland, (1993).

Seitkazieva, A., Integro-differential equations with a kernel which has a weak singularity, *Stud. IntegroDiffer. Equat.,* 13, 132-135, (1980).

Westerland, S., “Dead matter has memory!”, *Physcia Scripta*, vol(43), 174-179, (1991).