

T.C.
İSTANBUL KÜLTÜR ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

TÜBERKÜLOZUN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİNİN
KARŞILAŞTIRILMASI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ZEKİ İRİS

2100007911

Anabilim Dalı: Matematik ve Bilgisayar Bilimleri

Program: Matematik ve Bilgisayar Bilimleri

Tez Danışmanı: Dr. Öğr Üyesi Canan AKKOYUNLU

OCAK 2025

T.C.
İSTANBUL KÜLTÜR ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

TÜBERKÜLOZUN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİNİN
KARŞILAŞTIRILMASI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ZEKİ İRİS

2100007911

Anabilim Dalı: Matematik ve Bilgisayar Bilimleri

Program: Matematik ve Bilgisayar Bilimleri

Tez Danışmanı: Dr. Öğr Üyesi Canan AKKOYUNLU

Tez Juri Üyeleri: Dr. Öğr Üyesi Günay ASLAN

Dr. Öğr Üyesi Yasin UCAKAN

OCAK 2025

ÖNSÖZ

Çalışma boyunca desteklerini esirgemeyen, her zaman ulaşabildiğim çok sevgili danışman hocam Dr.Öğretim Üyesi Canan AKKOYUNLU' ya sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İstanbul Kültür Üniversitesi Matematik-Bilgisayar bölümü hocalarına bana kattıkları için çok teşekkür ediyorum.

Tez sürecinin her aşamasında yanımda olan sevgili eşim Melisa'ya, anneme, babama ve çalışmalar sırasında ilgilenemediğim oğlum Adrian'a çokça teşekkür ediyorum. Bilime katkı sunacağımı umuyorum.

İstanbul, 2025

ZEKİ İRİS

ÖZET

TÜBERKÜLOZUN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİNİN KARŞILAŞTIRILMASI

Zeki İRİS

Yüksek Lisans Tezi, Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim
Dalı

Danışman: Dr. Öğr Üyesi CANAN AKKOYUNLU

2025, 70 sayfa

Bu tezde tüberküloz hastalığının SIR, SEIR, BSEIR matematiksel modellerinin Euler yöntemi, iki adımlı şema sonrası(two step schema) Newton yöntemi ve Runge-Kutta nümerik çözümleri ele alınmıştır. Bu çözümler Türkiye özelinde bulunup modellerin nümerik çözümleri karşılaştırılmalı olarak tablo ve grafiklerle ifade edilmiştir. Kullanılan matematiksel modellerin kararlılık analizleri yapılmıştır. Bunun yanında Covid-19 döneminin modellerin vaka değişimindeki belirgin etkileri üzerinde durulup Covid-19 sonrası gerçek vaka sayılarının hangi modele daha yakın olarak devam ettiği tablolarla gösterilmiştir.

Anahtar kelimeler: Tüberkülozun nümerik çözümleri, Covid-19'un tüberküloza etkisi, SIR-SEIR-BSEIR model

ABSTRACT

THE COMPARISON OF NUMERICAL SOLUTIONS OF TUBERCULOSIS

Zeki İRİS

MSc. Thesis in Department of Mathematics and Computer Science

Supervisor: Dr. Öğr Üyesi CANAN AKKOYUNLU

2025, 70 pages

In this thesis, the numerical solutions of the SIR, SEIR, and BSEIR mathematical models for tuberculosis were analyzed using Euler method, two-step scheme after, Newton method, and Runge-Kutta methods. These solutions were tailored to Turkey and expressed comparatively through tables and graphs. Stability analyses of the mathematical models used were conducted. Additionally, the effects of the Covid-19 pandemic on the change in case numbers were discussed, and the post-Covid-19 real case numbers were analyzed to determine which model best matched the observed data.

Keywords: Numerical solutions of tuberculosis, effect of Covid-19 on tuberculosis, SIR-SEIR-BSEIR model

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ	i
ÖZET	ii
ABSTRACT	iii
AKADEMİK BEYAN	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ	vii
1 GİRİŞ	1
2 SALGIN HASTALIKLAR VE TÜBERKÜLOZ	1
2.1 Salgın Hastalık	1
2.2 Tüberküloz, Tüberküloz Tarihi ve Gelişimi	2
2.3 COVID-19 (Koronavirüs Hastalığı)	3
3 TÜBERKÜLOZ HASTALIĞININ MATEMATİKSEL MODELENMESİ	4
3.1 SIR Modeli	4
3.2 SEIR Modeli	7
3.3 BSEIR Modeli	8
4 MODELLERİN KARARLILIK ANALİZİ	9
4.1 SIR Model İçin Kararlılık Analizi	15
4.2 SEIR Model İçin Kararlılık Analizi	17
4.3 BSEIR Modeli İçin Kararlılık Analizi	20
5 NÜMERİK YÖNTEMLER VE ÇÖZÜMLERİ	23
5.1 Euler Yöntemi	23
5.2 İki Adımlı Şema (Implicit Two-Step Schema) Sonrası Newton Yöntemi	24
5.3 Runge-Kutta Yöntemi	28
6 SIR, SEIR, BSEIR MODELLERİNİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ	29
6.1 SIR Modelinin Nümerik Çözümleri	30
6.1.1 SIR Modelinin Euler Yöntemi ile Çözümü	31
6.1.2 SIR Modelin İki Adımlı Şema (Implicit Two-Step Schema) Sonrasında Newton Yöntemi ile Çözümü	32
6.1.3 SIR Modelin Runge-Kutta ile Çözümü	35
6.1.4 SIR Modelinin Nümerik Çözümlerinin Sonuçları	37
6.2 SEIR Modelin Nümerik Çözümleri	39
6.2.1 SEIR Modelin Euler Çözümü	40

6.2.2	SEIR Modelin İki Adımlı Şema (Implicit Two-Step Schema) ve Newton Yöntemi ile Çözümü	41
6.2.3	SEIR Modelin Runge-Kutta ile Çözümü	44
6.2.4	SEIR Modelin Nümerik Çözümlerinin Sonuçları	47
6.3	BSEIR Modelin Nümerik Çözümleri	49
6.3.1	BSEIR Modelin Euler ile Çözümü	50
6.3.2	BSEIR Modelin İki Adımlı Şema(Implicit Two-Step Schema) ve Newton Yöntemi ile Çözümü	52
6.3.3	BSEIR Modelin Runge-Kutta ile Çözümü	56
6.3.4	BSEIR Modelin Nümerik Çözümlerin Sonuçları	58
7	SIR, SEIR VE BSEIR MODELLERİNİN KARŞILAŞTIRILMASI	60
7.1	Nümerik Çözümlerinin Karşılaştırılması	60
7.2	MATLAB R2024a Çözüm Sürelerinin Karşılaştırılması	65
8	SONUÇ	65
9	KAYNAKLAR	67

AKADEMİK BEYAN

Yüksek Lisans Tezi olarak üniversiteye sunduğum "TÜBERKÜLOZUN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİNİN KARŞILAŞTIRILMASI" adlı bu çalışmanın, akademik kurallar ve etik değerlere uygun olarak bulunduğunu belirtir, bu tez çalışmasında bana ait olmayan tüm bilgilerin kaynağını gösterdiğimi beyan ederim.

.../.../ 2025

ZEKİ İRİS

İmza

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3.1	SIR Model Şema	5
Şekil 3.2	SEIR model Şema	7
Şekil 3.3	BSEIR Model Şema	9
Şekil 5.1	Tek Adımlı Yöntemin Gösterimi.....	23
Şekil 5.2	4. Dereceden Runge-Kutta Eğim Tahminleri	29
Şekil 6.1, 6.2, 6.3	SIR Model Euler Çözümleri	32
Şekil 6.4, 6.5, 6.6	SIR Model Newton Yöntemi Çözümleri.....	35
Şekil 6.7, 6.8, 6.9	SIR Model Runge-Kutta Çözümleri	37
Şekil 6.10	Sır Modeli Çözümleri	39
Şekil 6.11, 6.12, 6.13, 6.14	SEIR Model Euler Çözümleri.....	41
Şekil 6.15, 6.16, 6.17, 6.18	SEIR Model Newton Yöntemi Çözümü.....	44
Şekil 6.19, 6.20, 6.21, 6.22	SEIR Model Runge-Kutta Çözümü.....	46
Şekil 6.23	SEIR Modelin Nümerik Çözümleri.....	49
Şekil 6.24, 6.25, 6.26, 6.27, 6.28	BSEIR Model Euler Çözümleri.....	51
Şekil 6.29, 6.30, 6.31, 6.32, 6.33	BSEIR Model Newton Yöntemi Çözümü.....	55
Şekil 6.34, 6.35, 6.36, 6.37, 6.38	BSEIR Model Runge-Kutta Çözümü.....	57
Şekil 6.39	BSEIR Modeli Çözümleri.....	60
Şekil 7.1	SIR, SEIR, BSEIR Modeli Euler Çözümü.....	60
Şekil 7.2	SIR, SEIR, BSEIR Modeli Newton Yöntemi Çözümü.....	60
Şekil 7.3	SIR, SEIR, BSEIR Modeli Runge-Kutta Çözümü.....	60
Şekil 7.4	Türkiye'deki Tüberküloz İnsidansı.....	64
Şekil 8.1	Gerçek Vakalar ve Farklı Modellerin Karşılaştırılması.....	66

1 GİRİŞ

Tüberküloz (TB) dünya genelinde önemli sağlık sorunlarına yol açan bulaşıcı bir hastalıktır. Özellikle düşük ve orta gelirli ülkelerde ciddi bir halk sağlığı sorunu olan tüberküloz, Dünya Sağlık Örgütü (DSÖ)'nün yıllık yayımlanan raporlarına göre günümüzde bile milyonlarca insanın hayatını tehdit etmektedir [44]. Bu tez Dünya Sağlık Örgütü'nün tüberkülozu bitirebiliriz anlamına gelen 'Yes! We can end TB!' cümlesinden esinlenerek hazırlanmıştır. DSÖ'nün 2024 Küresel Tüberküloz Raporunda tekrarladığı 2030 yılında yeni vakalarda yüzde 80 azalma, 2035 yılında ise yüzde 90 azalma hedeflenmektedir [12]. Bu azalmanın Türkiye özelinde ne kadar olabileceği farklı matematiksel modellerle nümerik olarak çözülüp tablo şeklinde gösterilecektir.

Tüberküloz gibi bulaşıcı hastalıkların yayılımını anlamak ve bu yayılımı kontrol altına almak için matematiksel modelleme oldukça etkilidir. Bu nedenle, tüberkülozun yayılması ve hastalığın kontrolüne yönelik stratejilerin güçlendirilmesi büyük önem taşımaktadır. Tüberkülozun yayılma dinamiklerini incelemek amacıyla SIR, SEIR ve BSEIR modelleri kullanılarak Türkiye'deki tüberküloz vakaları üzerinden veriler bulunup grafiklerle ifade edilecektir.

COVID-19 pandemisi, öncelikli tüberküloz hizmetlerinin sağlanması ve tüberküloz hastalık yükünün azaltılmasında yıllarca katedilen ilerlemeyi tersine çevirdi [44]. Bu da ülkemizde ne düzeyde olduğu o dönemle önceki ve sonraki dönemin gerçek değer ve model değerleri arasındaki ilişki incelenecektir.

Diferansiyel denklemlerle tanımlanan bu salgın modellerinin sayısal çözümleri, Runge-Kutta yöntemi, Newton yöntemi ve Euler nümerik yöntemleri kullanılarak elde edilecektir. Denklemler çözülmeye başlandıktan sonra MATLAB R2024a üzerinden grafikler elde edilip tüm sayısal çözümler grafik üzerinde gösterilecektir. Her bir sayısal çözüm yöntemi, doğruluk ve hız açısından farklı sonuçlar sunmakta olup, hastalık dinamiklerine göre hangi modele daha yakın olduğu grafiklerle gösterilecektir.

Tezin ikinci bölümünde salgın hastalıklara dair genel bilgiler verilerek, tüberküloz ve COVID-19 hastalıklarının benzer ve farklı yönleri karşılaştırmalı olarak incelenecektir. Üçüncü bölümde, tüberküloz hastalığının matematiksel modelleri ele alınacaktır. Dördüncü bölümde, bu modellerin kararlılık analizleri değerlendirilecektir. Beşinci bölümde, nümerik çözüm yöntemlerinin teorik temelleri açıklanacak, ardından beşinci bölümde bu yöntemler tüberkülozun matematiksel modellerine, Türkiye verileri kullanılarak uygulanacaktır. Yedinci bölümde tüm bulgular, çözüm süreleri ve çözüm verileri açısından kıyaslanarak tartışılacaktır. Sonuç kısmında ise tüm sonuçlar değerlendirilip bilgiler verilecektir.

2 SALGIN HASTALIKLAR VE TÜBERKÜLOZ

2.1 Salgın Hastalık

Salgın, bulaşıcı hastalıkların duyarlı organizmalara doğrudan veya dolaylı bulaşması sonucu yayılması ve bunun sonucunda çok sayıda organizmada

hastalığa neden olması olarak tanımlanmaktadır. İnsanlar gibi mikroorganizmalar da modern ulaşımdan yararlandığı için hastalıklar eskisinden çok daha hızlı ve kolay bir tehlikeye dönüşüyor [37]. Savaş, göç ve ticaret gibi olaylar insan etkileşimini artırdığından bakterinin mutasyona uğraması sonucu hastalığa neden olur. Öte yandan insan yaşamının kalitesi giderek azalması yeterli beslenmenin olmayışı, temiz su kaynaklarının ve iklimin bozulması gibi nedenler de hastalıkların ortaya çıkması için koşullar yaratır [36].

Çiftçilik öncesinde avcılık ve toplayıcılıkla yaşamlarını sürdüren topluluklar, salgın hastalıklara yakalanma açısından daha düşük risk altındaydı. Sürekli göç eden ve küçük gruplar halinde yaşayan bu topluluklarda hastalıkların kalıcı hale gelmesi oldukça zordu. Tarihte salgın hastalıkların en ürkütücü yönlerinden biri ise hastalıkların kaynağının ve tedavisinin uzun süre bilinmemesi olmuştur [26]. Bu durum halen de devam etmektedir. Yakın zamanda yaşadığımız COVID-19 salgınında da hastalığının kaynağı konusunda halen tartışmalar devam etmektedir.

2.2 Tüberküloz, Tüberküloz Tarihi ve Gelişimi

Tüberküloz (TB), Mycobacterium tuberculosis bakterisinin sebep olduğu bilinen bulaşıcı bir hastalıktır. Bu bakteriler, aktif TB hastalığı olan bireylerin öksürme, hapsirme, konuşma veya şarkı söyleme gibi eylemleri sırasında havaya yayılan küçük damlacıklar aracılığıyla yayılır. Bu damlacıklar, sağlıklı bireyler tarafından solunduğunda enfeksiyona yol açabilir. TB'nin bulaşması genellikle uzun süreli ve yakın temas gerektirir. Bu nedenle aynı evde yaşayan aile üyeleri, iş arkadaşları veya yakın arkadaşlar arasında daha yaygındır. TB, yüzeylere dokunma, yiyecek veya içecek paylaşımı yoluyla bulaşmaz [7].

Tüberküloz, insanlık tarihinin en eski hastalıklarından biri olarak bilinmektedir. Beş bin yıl öncesine ait Mısır mumyalarında bazı kişilerin tüberkülozdan öldüğü dair kanıtlar bulunmuştur. Antik Yunan dönemine ait belgelerde Hipokrat, bu hastalığın o dönemde çok sayıda görüldüğü ve ölüme neden olduğunu sonucuna varmıştır. Ayrıca gençlerde daha sık görüldüğünü belirtmiştir. Avrupa'da 1600'lü yıllarda başlayan ve yaklaşık iki yüzyıl süren büyük salgında çok sayıda kişi hayatını kaybetmiştir. Bu dönemlerde hastalık "Büyük Beyaz Veba" olarak anılmıştır. Bulaşma yolunun anlaşılması, aşıların uygulanması ve dirençli tedaviler sayesinde hasta sayıları önemli ölçüde azalır günümüzde önlenebilir ölüm nedenleri arasında yerini almıştır [30].

Tüberküloz kontrol stratejileri ülkemizde yüz yıldan uzun süredir "verem savaşı" ismiyle anılmaktadır. Bu süreçte, bilimsel gelişmeleri takip ederek tüberküloz kontrol programları sürekli olarak güncellenmiştir. Tanı ve tedavi standartları ile kayıtlama ve raporlama sistemleri için kapsamlı rehberler hazırlanarak, ülke genelinde uyumlu bir yaklaşım sağlanmıştır. Türkiye'de verem savaşı için ilk rapor 1932 senesinde yayımlanmış, ardından 1953, 1963, 1971, 1974, 1985 ve 1990 yıllarında yenileri çıkartılmıştır. Son olarak, 2021 yılında yayımlanan rehber, uluslararası ve ulusal deneyimlerden faydalanılarak hazırlanmış ve bilimsel kanıtlarla desteklenmiştir [37].

Tüberküloz (TB), önlenebilir ve çoğunlukla tedavi edilebilir bir hastalık olmasına rağmen, 2023 yılında yeniden dünya genelinde önemli bir ölüm nedeni haline gelmiştir. COVID-19 pandemisinin etkisiyle geçici bir düşüş yaşanmış olsa da, TB tekrar tek bir bulaşıcı etkenden kaynaklanan en yüksek ölüm nedeni olarak öne çıkmıştır. DSÖ verilerine göre, TB her yıl 10 milyondan fazla insanı etkilemekte ve AIDS'ten yaklaşık iki kat fazla ölüme yol açmaktadır. Bu durum, küresel TB salgınının sona erdirilmesi için 2030 yılına kadar acil eylem gerektiren bir kriz olarak görülmektedir [12].

Tüberkülozun tedavisi mümkündür. Tedavi olmayan, tedavisini reddeden veya düzenli olarak devam etmeyen hastalarda öldürücü olabilir. Her yıl 10 milyon insan tüberküloza (TB) yakalanıyor. Sağlık Bakanlığı tarafından yayımlanan 2020 Verem Savaş Raporu'na göre, tüberküloz, dünyada hastalık ve ölümlerin ilk 10 nedeni arasında yer almaya devam etmektedir. Son 13 yıl içinde tüberküloz vakalarında sürekli bir azalma gözlenmiştir. Ancak, DSÖ'nün 2022 Küresel Tüberküloz Raporu'na göre, COVID-19 pandemisi tüberküloz teşhisi ve tedavisine erişimi olumsuz etkilemiştir. Bu etkinin en belirgin örneği, yeni tüberküloz tanısı konulan hasta sayısında yaşanan düşüştür. 2019'da 7,1 milyon olan vaka sayısı 2020'de ise gerileyerek 5.8 milyon olarak belirlenmiştir [18].

Dünya Sağlık Örgütü (DSÖ), 2023 yılı tüberküloz günü temasını 'Evet! Tüberkülozu bitirebiliriz' anlamına gelen 'Yes! We can end TB!' olarak tanımlamıştır. Yapılan çalışmalar ve yayımlanan raporlara göre 2000 yılından beri 74 milyon insanın tüberküloz sebebi ile hayatını kaybetmesi önlenmiştir. 2021 yılında 10.6 milyon insanın tüberküloza yakalandığı ve yine 2021 yılında 1.6 milyon insanın tüberküloz sebebi ile hayatını kaybettiği kayıtlara geçmiştir. Dünya Sağlık Örgütü tüberküloz hastalığının tüm dünyada yayılmasını önlemek adına 2015 yılında başladıkları Tüberkülozu sona erdirme stratejileri 'The end TB strategy' ile yeni vaka sayılarında 2035 yılına kadar %90 azalmayı amaçlamaktadır [11].

2.3 COVID-19 (Koronavirüs Hastalığı)

Hastalık ilk olarak Aralık 2019'da Çin'in Wuhan kentinde görülüp tüm dünyayı derinden etkileyen küresel bir salgına dönüşmüştür. COVID-19, SARS-CoV-2 isimli koronavirüsün yol açtığı bir solunum yolu enfeksiyonu olarak bilinmektedir [43]. Hastalık, öksürme, hapsirme, yakın temas gibi yollarla yayılan damlacıklı sebebiyle bulaşmaktadır [29]. Bu şekilde hızla yayılan virüsün yayılmasını engellemek amacıyla dünya genelinde sosyal mesafe ve maske gibi tedbirler alınmaya başlanmıştır [19]. Yüksek ateş, nefes darlığı ve öksürük gibi belirtilerle ortaya çıkan COVID-19, özellikle kronik hastalığı bulunan ve yaşlı kişilerde çok ağır seyredebilmektedir [28]. Pandemi boyunca geliştirilen COVID-19 aşıları, salgına karşı en etkili çözüm olarak bulunmuş ve bu kapsamda geniş çapta uygulanmaya alınmıştır [32]. COVID-19 pandemisinin etkileri sadece sağlık alanıyla sınırlı kalmamış; eğitim ve ekonomi alanında ciddi değişimlere yol açmıştır. Hastalığın bulaşıcılığı ve etkileri üzerine yapılan araştırmalar, toplum sağlığını koruma amacıyla alınan önlemlerle birlikte önem kazanmıştır [21].

COVID-19 ve TB hastalıklarının ikisi de hava yoluyla bulaşmasıyla bilinir.

Öksürük, nefes darlığı, ateş gibi ana belirtiler görülmektedir. TB'nin yayılması genellikle hasta biriyle daha uzun süreli temas gerekir. COVID-19' da ise kısa sürede ve daha kolay bulaşabilmektedir. Veriler, COVID-19'un daha çok enfekte olan kişilerin konuştuğu, öksürdüğü veya hapsirdiği ortaya çıkan damlacıklar yoluyla bulaştığını ileri sürmektedir. Aynı şekilde TB enfekte kişilerin de öksürme veya hapsirme yoluyla bakterileri içeren damlacıkların solunması sonucu hava yoluyla kolayca yayılabilmektedir. Semptomların ortalama çıkma sürelerine bakıldığında; COVID-19 salgınının semptomları ortalama olarak beş gün içerisinde ortaya çıkar iken TB semptomları genellikle daha uzun bir sürede ortaya çıkmaktadır. Birçok hastalığın tedavisinde olduğu gibi TB'nin erken teşhisi önemlidir [4].

COVID-19 pandemisi, tüberküloz (TB) tanı ve tedavisine erişimde ciddi aksamalara neden olmuş ve hastalık yükünü artırmıştır. 2019 yılına kıyasla 2020'de TB tanısı konan kişi sayısı yüzde 18 azalmıştır. Ekonomik ve finansal zorluklar, TB teşhisi için sağlık hizmetlerine erişimi zorlaştırmakta ve TB hastalarının tedaviye erişimini sınırlamaktadır [44].

3 TÜBERKÜLOZ HASTALIĞININ MATEMATİKSEL MODELLENMESİ

Bu modelleri oluştururken kullandığımız parametreleri aşağıdaki tabloda ifade edelim.

Parametre	Anlamı
a	İyileşme oranı
b	Doğum oranı
β	Temas oranı
d	Hastalıktan ölümlerin oranı
$1/e$	Hastalığın kuluçka periyodu
p	Başarılı aşılama oranı
k	Aşının etkisini yitirme oranı
n	Yeni doğan birey sayısı ($b \times N$)
u	Ölüm oranı(Doğal)
N	Toplam popülasyon

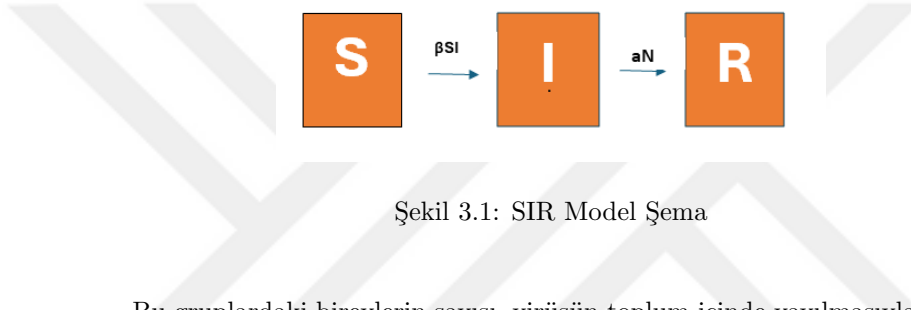
Tablo 3.1: Matematiksel modellerin parametreleri

Modelleri oluştururken yaşanan göçler kapsam dışında bırakılmıştır. Bununla birlikte her bireyin hastalığa verdiği tepki aynı olarak düşünülüp modeller oluşturulmuştur.

3.1 SIR Modeli

Bulaşıcı hastalıkların bulaşma dinamiklerinin duyarlı-bulaşıcı-iyileşen modeli yani SIR Modeli bulaşıcı hastalık modellemesi alanının temelini oluşturur [2].

- S (Susceptable, duyarlı): Sağlıklı ancak hastalığa korunmasız olanlar yani virüs bulaşma riski olanlar. Pandeminin başlangıcında, S virüse bağışıklık olmadığı için tüm toplumdur.
- I (Infected, virüs taşıyan): Dolayısıyla, başka insanlara da bulaştırma riski olan bireyler.
- R (Recovered, iyileşen): Virüs bulaşmış, sonrasında iyileşmiş ya da ölmüş kişiler. Bu bireyler artık bulaştırıcı değildir.



Şekil 3.1: SIR Model Şema

Bu gruplardaki bireylerin sayısı, virüsün toplum içinde yayılmasıyla birlikte zaman içinde değişir; virüs duyarlı bireylere bulaştıkça S azalır ve I artar. İnsanlar hastalıktan iyileştiğinde ya da yaşamını kaybettiğinde, enfekte gruptan ayrılarak artık bulaşıcı olmayan R grubuna geçerler. İyileşen bireylerin bağışıklık kazanarak yeniden enfekte olmayacağı kabul edilmektedir. Ayrıca, bu modelde toplam nüfusun sabit ve homojen olduğu varsayılmıştır. Diğer hastalıklardan kaynaklanan ölümler ise modelde dikkate alınmamıştır. Şekil 3.1’de görüldüğü gibi, bu modelde geçişler yalnızca tek yönlüdür. Bu çerçevede, gruplar arasındaki değişimler adi diferansiyel denklemler (ODE) kullanılarak ifade edilir. Salgının başlangıç koşulları ve ilerleyişi şu şekilde sıralanabilir:

1. Salgının başında, toplumun tüm bireyleri duyarlı gruptadır. I ve R gruplarında herhangi bir birey bulunmadığı için bu gruplar başlangıçta 0 olarak kabul edilir.
2. İlk enfeksiyon bir bireyde başlar; bu birey enfekte olur olmaz S grubu azalır, I grubu ise artmaya başlar.
3. Bu enfekte birey, hastalığı diğer duyarlı bireylere bulaştırarak salgını yayar.
4. Enfekte bireyler virüsü diğer korunmasız bireylere bulaştırır ve salgın böylece devam eder.
5. Hastalık iyileşme ya da ölümlerle sonuçlandığında, R grubundaki bireylerin sayısı zamanla artar.

$$\frac{dS}{dt} = -\frac{\beta S(t)I(t)}{N} \quad (1)$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\beta S(t)I(t)}{N} - aI(t) \quad (2)$$

$$\frac{dR}{dt} = aI(t) \quad (3)$$

$S(t)$, hastalığa karşı korumasız bireylerin zaman içerisindeki değişimini ifade ederken; $I(t)$, enfekte olmuş bireylerin; $R(t)$ ise artık bulaşıcı olmayan bireylerin zamanla nasıl değiştiğini ifade etmektedir. Bunun yanında S ve I grupları arasındaki geçişi kontrol eden enfeksiyon oranı a olarak tanımlanmıştır. Benzer şekilde, I ve R grupları arasındaki geçişi, iyileşme veya ölüm oranı kontrol etmektedir. N , tüm bu grupları kapsayan toplam nüfusu temsil etmektedir [17,23].

Yukarıda (1), (2), (3) numaralı denklemlerde verilen SIR modele doğum(b) ve ölüm(u) parametreleri eklendiğinde aşağıdaki denklemler elde edilir.

Hassas popülasyonun zamana göre değişimini ifade eden $\frac{dS}{dt}$ türevinin eşitinin nasıl bulunduğunu gösterelim. $\frac{\beta S(t)I(t)}{N}$ ifadesi hasta bireyler ile hassas bireylerin etkileşimi sonucu birim zamanda hasta sayısını verir. Hasta olan bireyler hassasların sınıfından ayrılacağı için önüne negatif işaret alır. Aynı durum $uS(t)$ ifadesi içinde geçerli olacak, $uS(t)$ terimi hassas popülasyonda birim zamanda ölüm sayısını ifade ettiği için önüne negatif işaret alır. Bunun yanında bN ifadesi birim zamanda yenidoğan popülasyonu olduğundan hassas popülasyonu pozitif yönde etkiler önüne pozitif işaret alır ve aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\frac{dS}{dt} = bN - \frac{\beta S(t)I(t)}{N} - uS(t) \quad (4)$$

Şimdi de hasta popülasyonun zamana göre değişimini ifade eden $\frac{dI}{dt}$ türevinin eşitinin nasıl bulunduğunu gösterelim. $\frac{\beta S(t)I(t)}{N}$ ifadesi hasta bireyler ile hassas bireylerin etkileşimi sonucu birim zamanda hasta sayısını ifade ettiği için önüne pozitif işaret alır. $aI(t)$ terimi birim zamanda iyileşen sayısını ifade etmesinden dolayı hasta sayısını azaltmış olur bu sebeple önüne negatif işaret alır. Aynı şekilde $uI(t)$ ifadesi birim zamanda ölüm popülasyonu olduğundan hasta popülasyonu negatif yönde etkiler önüne negatif işaret alır ve aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\beta S(t)I(t)}{N} - aI(t) - uI(t) \quad (5)$$

Şimdi ise iyileşen popülasyonun zamana göre değişimini ifade eden $\frac{dR}{dt}$ türevinin eşitinin nasıl bulunduğunu gösterelim. $aI(t)$ ifadesi birim zamanda iyileşen bireyleri ifade ettiğinden önüne pozitif işaret alır. $uR(t)$ ifadesi iyileşen popülasyondaki birim zamanda ölüm sayısını (hastalık dışında ölüm) gösterdiği için iyileşen sayısını azaltmış olur ve önüne negatif işaret alır.

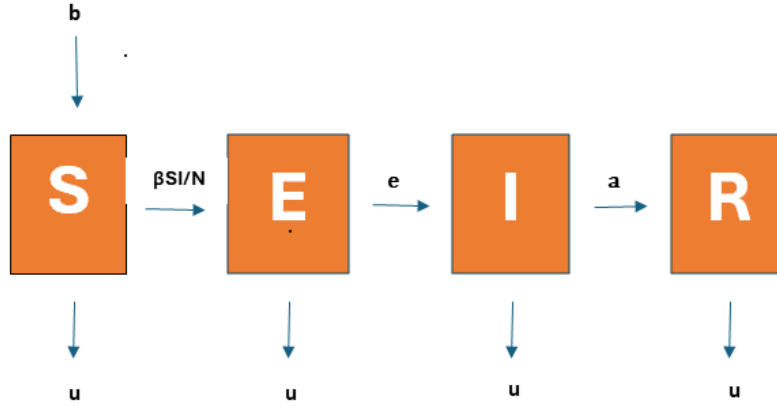
$$\frac{dR}{dt} = aI(t) - uR(t) \quad (6)$$

denklemler sistemi elde edilir [24,40].

Bütün t değerleri için, $S(t) + I(t) + R(t) = N$ eşitliği sağlanır. N toplam kişi sayısı (popülasyon) ifade eder. Toplam popülasyonun sabit olması sebebiyle, $S'(t) + I'(t) + R'(t) = 0$ eşitliği elde edilir. Yani toplam popülasyonun zamana göre değişimi sıfırdır.

3.2 SEIR Modeli

SEIR modeli, Kermack ve McKendrick tarafından 1927'de sunulan klasik SIR modelinin bir uzantısıdır [8]. Nüfus, hastalıkla ilgili mevcut durumlarına bağlı olarak dört sınıfa ayrılmıştır. Duyarlı bireyler S (Susceptible) hastalığa yakalanabilirler. Enfekte olmuş ancak henüz bulaşıcı olmayan ve semptomları olmayan kişiler E (Exposed). Enfektif bireyler yani virus bulaşmış bireyler I (Infected) hastalığı bulaştırabilirler. İyileşen birey yani bağışıklık kazananlar R (Recovered). Model, hastalığı azaltmanın bir yolu olarak karantina veya tedaviyi içermektedir.



Şekil 3.2: SEIR Model Şema

Modelimizde aşağıdaki varsayımlar dikkate alınmıştır.

1. Bir kişiye, karşı konulamaz insanlarla temasa geçilerek enfeksiyon kapılabilir.
2. Yaş, ırk, toplumsal konum, cinsiyet, iklim koşulları bir kişinin bulaşıcılığını etkilemez.
3. Geçiş oranının tüm organizmalar için benzer bir u sabiti olduğu düşünülür. Bundan dolayı tüm geçişler tam kayıtlı alınıp tutarlılık sağlanacaktır.
4. Bireyler birbiri ile aynı düzeyde aynı etkileşime sahiptir.

5. Hastalık yakın bölgeden bulaşıyor. Göç ya da göçün olmaması, doğum ve ölümün olmaması sonucu toplam popülasyon N sabit kalır.

$$N=S(t)+E(t)+I(t)+R(t)$$

$$\frac{dS}{dt} = bN - \frac{\beta S(t)I(t)}{N} - uS(t) \quad (7)$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\beta S(t)I(t)}{N} - eE(t) - uE(t) \quad (8)$$

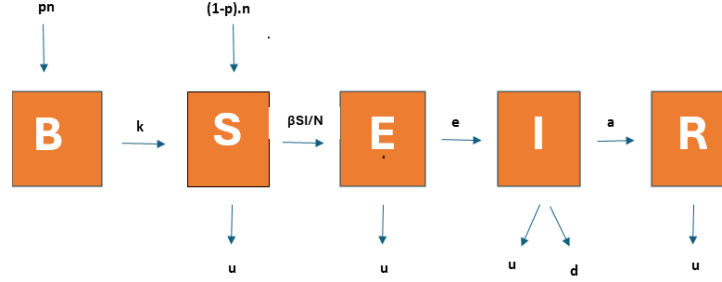
$$\frac{dI}{dt} = eE(t) - uI(t) - aI(t) \quad (9)$$

$$\frac{dR}{dt} = aI(t) - uR(t) \quad (10)$$

Toplam popülasyonun sabit olması sebebiyle, $S'(t) + I'(t) + E'(t) + R'(t) = 0$ eşitliği elde edilir. Yani toplam popülasyonun zamana göre değişimi sıfırdır [9].

3.3 BSEIR Modeli

S. Liu ve arkadaşları, sürekli aşılama ve dönemsel aşılamanın kombinasyonu olan karma bir aşılama stratejisini içeren bir model geliştirmiştir. Modelde kullanılan BCG(Bacillus-Calmette-Guerin) aşısı bebeklerde tüberküloza karşı kullanılan bir aşıdır. BSEIR modeli (BCG Vaccinated - Susceptible - Exposed - Infected - Recovery), düzenli aşılama ve periyodik bağışıklama yöntemlerini bir araya getiren karma bir strateji üzerine geliştirilmiştir. Bu model, SEIR modeline yeni bir bileşen olarak B sınıfını ekleyerek aşılama parametresini dikkate alır. Modelde yer alan B sınıfı, doğumdan itibaren başarıyla aşılanmış bireyleri temsil ederken; aşılanmamış veya aşısı tutmamış bireyler S sınıfında yer alır. Aşılanma zamanlamaları ve yöntemleri açısından esneklik sağlayan bu model, yalnızca BCG aşısıyla değil, diğer salgın hastalıklara karşı da uygulanabilir bir yapıya sahiptir. Bu yaklaşım, özellikle aşı başarısızlığının etkilerini ve yeniden bulaş riskini minimize etmek için tasarlanmıştır.



Şekil 3.3: BSEIR Model Şema

BSEIR modeli, bir popülasyonu beş kategoriye ayırarak tanımlar: aşılama ile korunan bireyler (B), hastalığa karşı savunmasız olan bireyler (S), enfeksiyonun kuluçka dönemindeki bireyler (E), aktif enfeksiyonu olan bireyler (I) ve bağışıklık kazanmış bireyler (R). Bu model, aşağıdaki diferansiyel denklem sistemi ile ifade edilir. Tüm t zaman anları için $B(t) + S(t) + E(t) + I(t) + R(t) = N$ eşitliği sağlanır.

$$\frac{dB}{dt} = np - kB(t) \quad (11)$$

$$\frac{dS}{dt} = kB(t) + n(1-p) - \frac{\beta S(t)I(t)}{N} - uS(t) \quad (12)$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\beta S(t)I(t)}{N} - (e + u)E(t) \quad (13)$$

$$\frac{dI}{dt} = eE(t) - (a + u + d)I(t) \quad (14)$$

$$\frac{dR}{dt} = aI(t) - uR(t) \quad (15)$$

Toplam popülasyonun N yani sabit olması sebebiyle $B'(t) + S'(t) + I'(t) + E'(t) + R'(t) = 0$ eşitliği elde edilir. Yani toplam popülasyonun zamana göre değişimi sıfırdır [27,40].

4 MODELLERİN KARARLILIK ANALİZİ

Tanım 1

$\frac{dy}{dx} = F(x)$ olmak üzere $F(V^*) = 0$ eşitliğini sağlayan V^* çözümüne, denge noktası denir [5]. Doğrusal sistemlerde bir tane denge noktası olurken doğrusal olmayan sistemlerde birden daha fazla denge noktası olabilir [13].

Kararlılık

Eğer, otonom sistemin (x_0, y_0) noktası (x^*, y^*) kritik noktasına gerektiğince yakinken, her $t > 0$ için, $x(t), y(t)$ de $(x, y)^*$ a yakın kalıyorsa (x, y) kritik noktasında kararlıdır denir. $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t))$ vektör gösterimi olarak ifade edildiğinde;

$x_0 = (x_0, y_0)$ ve $x^* = (x^*, y^*)$ arasındaki uzaklık

$$|x_0 - x^*| = \sqrt{(x_0 - x^*)^2 + (y_0 - y^*)^2}$$

olarak tanımlanır. Böylece, her $\epsilon > 0$ ve her $t > 0$ için,

$$|x_0 - x^*| < \delta \quad \text{olduğunda} \quad |x(t) - x^*| < \epsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ var ise \mathbf{x} **kararlıdır** [13].

Lineer Sistemlerin Kritik Noktaları

A sabit katsayı matrisi olmak üzere bir

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

lineer sistemin $(0, 0)$ kritik noktasını incelemek için verilen özdeğer, özvektör yöntemini kullanabiliriz. A 'nın λ_1 ve λ_2 özdeğerleri aşağıdaki eşitlikten elde edilir:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = (a - \lambda)(d - \lambda) - bc = 0$$

Karakteristik denklemin çözümü olarak, sistemin $(0, 0)$ noktası izole bir kritik nokta olduğunu kabul edelim. Bu durumda, $ax - by = 0$ ve $cx + dy = 0$ şeklinde verilen sistemde, katsayılar matrisinin determinanı $ad - bc$ 'nin sıfır olmadığı gözlemlenir. Buradan, $\lambda = 0$ 'ın karakteristik denklem için bir çözüm olmadığı sonucuna varılır. Böylece, A matrisinin özdeğerlerinin her ikisinin de sıfırdan farklı olduğu görülür.

O zaman $(0, 0)$ kritik noktasının yapısı aşağıdaki durumların olup olmasına bağlıdır: A 'nın sıfır olmayan iki özdeğeri λ_1 ve λ_2 için aşağıdaki tabloyu dikkate alalım [13].

A'nın Özdeğerleri	Kritik Noktanın Tipi
Reel, farklı, aynı işaretli	Düzensiz düğüm
Reel, farklı, ters işaretli	Eyer noktası
Reel ve eşit	Düzenli ya da düzensiz düğüm
Kompleks eşlenik	Spiral nokta
Tamamen sanal	Merkez

Tablo 4.1: İki Boyutlu $x' = Ax$ Sisteminde $(0, 0)$ Kritik Noktasının Sınıflandırılması [13]

Linear Sistemlerin Kararlılığı

İki boyutlu aşağıda yer alan lineer sistem dikkate alınsın:

$$\frac{dx}{dt} = ax + by$$

$$\frac{dy}{dt} = cx + dy$$

Burada A katsayılar matrisinin determinantının sıfır olmadığı ($ad - bc \neq 0$) varsayımı altında, özdeğerler λ_1 ve λ_2 olarak adlandırılır. Bu durumda, $(0, 0)$ kritik noktası şu şekilde değerlendirilir:

- Eğer λ_1 ve λ_2 'nin reel kısımları negatifse, sistem asimptotik olarak kararlıdır.
- Eğer λ_1 ve λ_2 'nin reel kısımları sıfırsa (örneğin, $\lambda_1 = \lambda_2 = \pm qi$ ($q \in C$)), sistem kararlıdır ancak asimptotik kararlılık göstermez.
- Eğer λ_1 ve λ_2 'den herhangi biri pozitif reel kısma sahipse, sistem kararsız hale gelir [25].

Hemen Hemen Linear Sistemler

Hemen hemen lineer sistemler,

$$\frac{dx}{dt} = ax + by + r(x, y)$$

$$\frac{dy}{dt} = cx + dy + s(x, y)$$

$(0, 0)$ kritik noktasının kararlılığını ve tipini analiz etmede önemlidir. Bu sistemlerde, $r(x, y)$ ve $s(x, y)$ gibi lineer olmayan terimlerin etkisi, lineer sistemin katsayılarındaki küçük bir değişime eşdeğer kabul edilir.

Teorem: Eğer bir sistemin katsayılar matrisinin özdeğerleri λ_1 ve λ_2 ise, bu durumda:

- Eğer $\lambda_1 = \lambda_2$ ve bu özdeğerler reel ise, $(0, 0)$ kritik noktası bir düğüm ya da bir spiral nokta olabilir. Eğer $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ ise sistem kararsızdır.
- Aksi durumda, yani λ_1 ve λ_2 reel eşit değilse ya da tamamen sanal değilse, hemen hemen lineer sistemin $(0, 0)$ kritik noktası, lineer sistemin $(0, 0)$ kritik noktası ile aynı kararlılık özelliklerini taşır.
- Eğer $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ve $Re(\lambda_1) \neq 0$ ise, hemen hemen lineer sistemin kritik noktasının kararlılığı ve tipi, lineer sistem analizine dayalı olarak belirlenebilir. Ancak, tamamen sanal özdeğerler durumunda, kritik noktanın kararlılığı ve tipi yalnızca lineer analiz ile belirlenemez [13].

λ_1, λ_2 Özdeğerleri	Sistemin Kritik Noktasının Türü
$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$	Kararlı düzensiz düğüm
$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$	Kararlı düğüm veya spiral nokta
$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$	Kararsız eyer noktası
$\lambda_1 > \lambda_2 > 0$	Kararsız düzensiz düğüm
$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$	Kararsız düğüm veya spiral nokta
$\lambda_{1,2} = \pm bi, b > 0$	Kararsız spiral nokta
$\lambda_{1,2} = \pm bi, b < 0$	Kararlı spiral nokta
$\lambda_{1,2} = \pm bi, b = 0$	Kararlı veya kararsız, merkez

Tablo 4.2: Hemen Hemen Lineer Sistemin Kritik Noktalarının Sınıflandırılması

Temel Üreme Oranı (R_0)

Bulaşıcı hastalıklarda R_0 değeri matematiksel problemleri dizayn eden en yararlı eşik parametrelerden biridir [45]. Salgın hastalık modellerinde önemli olan temel üreme oranı (Basic Reproductive Ratio), R_0 , bir hastalığın yayılım potansiyelini belirlemek için kullanılan bir parametredir. Enfekte bir bireyin, tamamen duyarlı bir topluluğa bulaşıcılık süresi boyunca üreteceği yeni enfekte bireylerin sayısını ifade eder [20].

Temel üreme oranı R_0 , popülasyondaki tüm bireylerin duyarlı olduğu bir durumda ve enfekte olma periyodu boyunca, enfekte olmuş bir bireyin enfeksiyonu bulaştırdığı duyarlı birey sayısını ifade eder.

$R_0 > 1$ ise enfeksiyon salgına dönüşür.

$R_0 < 1$ ise enfeksiyon sönümlenir.

$R_0 = 1$ ise enfeksiyon ne salgına dönüşür ne de sönümlenir [10].

Routh-Hurwitz Kriteri

a_i 'ler sabit ve karakteristik polinomun katsayıları olmak üzere karakteristik polinom

$$y^n + a_1y^{n-1} + a_2y^{n-2} + \dots + a_{n-1}y + a_n = 0$$

şeklinde olsun. $k > n$, $a_k = 0$ olmak üzere bu polinomun tüm özdeğerlerinin negatif reel kısmının olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}$$

determinantının tüm esas minörlerinin pozitif olmasıdır. Yani, üst sol köşedeki 1, 2, 3, ..., n boyutlu alt determinantların sırasıyla,

$$|a_1|, \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \dots$$

pozitif olmasıdır. Buna göre, Routh-Hurwitz kriterinin $n = 2$ derecelerine sahip $P(\lambda)$ polinomları aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$P(\lambda) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_2$$

Polinomun tüm köklerinin negatif reel kısma sahip olabilmesi için aşağıdaki koşulların sağlanması gerekir.[22]

$$a_1 > 0 \quad \text{ve} \quad a_2 > 0.$$

$n=3$ alındığında ise

$$a_1 > 0 \quad \text{ve} \quad a_3 > 0, \quad a_1 \cdot a_3 > a_2$$

olmalıdır.

SIR Model Denge Noktaları ve Kararlılık Analizi

Hastaliksız Denge Noktası

Tanım 3: Bir sistemin denge noktası bulunurken, modeldeki diferansiyel denklemler sıfıra eşitlenir ve çözülür. Matematiksel olarak bu zaman türevlerinin sıfır olduğunu yani sistemin durağan olduğu durumu gösterir. SIR modeli denklemlerini aşağıdaki gibi ifade edersek;

$$\frac{dS}{dt} = bN - \frac{\beta S(t)I(t)}{N} - uS(t) \quad (16)$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\beta S(t)I(t)}{N} - aI(t) - uI(t) \quad (17)$$

$$\frac{dR}{dt} = aI(t) - uR(t) \quad (18)$$

(16), (17), (18)' deki denklemlerde popülasyon sınıfları her bir popülasyonun bir oranı olarak ele alınacaktır. Bu yaklaşım sistemdeki her bir sınıfın nüfusun toplamına göre ne kadarını oluşturduğunu kolaylaştıracaktır. Ayrıca göç gibi durumlar göz ardı edilip doğum ve ölüm eşit alındığından $b = u$ ' dur. $S = \frac{S(t)}{N}$, $I = \frac{I(t)}{N}$ ve $R = \frac{R(t)}{N}$ olarak yazdığımızda.

$$\frac{dS}{dt} = u - \beta SI - uS = 0 \quad (19)$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - aI - uI = 0 \quad (20)$$

$$\frac{dR}{dt} = aI - uR = 0 \quad (21)$$

elde edilir. (19), (20), (21) deki denklemlerin çözümünden $I = 0$ alınarak $S = 1$ ve $R = 0$ bulunur. Yani denge noktamız D_1 olarak ifade edilirse şu şekilde bulunur:

$$D_1 = (1, 0, 0)$$

Hastalıklı Denge Noktası

Hastalıklı denge noktası bulunurken SIR denklemleri sıfıra eşitlenir:

$$\frac{dS}{dt} = u - \beta SI - uS = 0$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - aI - uI = 0$$

$$\frac{dR}{dt} = aI - uR = 0$$

Buradan hastalıklı denge noktası D_2 olarak ifade edilirse $D_2(S, I, R)$ bulunur.

Bulaşıcı etkenin bulaşıcılığını veya iletilebilirliğini tanımlamak için bir ölçüttür. $R_0 > 1$ ise salgının devam ettiği, $R_0 < 1$ ise salgının bitmesi beklenir. R_0 değeri ne kadar büyükse salgını kontrol etmekte o kadar zordur [10]. R_0 değerini yukarıdaki denklemlerden kullanarak bulabiliriz. $S = \frac{u+a}{\beta}$ 'dir. $S = \frac{1}{R_0}$ olur. $R_0 = \frac{\beta}{u+a}$ olarak bulunmuş olur.

Tüm popülasyonun duyarlı olarak sayacağımızdan $S = 1$ alınır. Bu denklemleri ve R_0 eşitliğini kullanarak, hastalıklı denge noktasında D_2 olarak adlandırdığımız hastalıklı denge noktası

$$D_2 = \left(\frac{1}{R_0}, \frac{u}{\beta}(R_0 - 1), \frac{a}{\beta}(R_0 - 1) \right)$$

bulunur. Buradaki hasta birey sayısı $I = \frac{u}{\beta}(R_0 - 1)$ 'dir. Bu denklemde $R_0 > 1$ olduğunda salgının yayılacağı görülüyor.

4.1 SIR Model İçin Kararlılık Analizi

Denkleminiz lineer bir denklem olmadığından bu modelin kararlılık analizini yaparken Jacobian matrisinden faydalanacağız. Önce Jacobian matrisinin denge noktalarında özdeğerleri bulunur daha sonra bu özdeğerlere bakarak sistemin kararlılığı için öngörülerde bulunulur.

SIR modeli için Jacobian matrisi aşağıdaki gibidir:

$$J(S, I, R) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial S} & \frac{\partial f}{\partial I} & \frac{\partial f}{\partial R} \\ \frac{\partial g}{\partial S} & \frac{\partial g}{\partial I} & \frac{\partial g}{\partial R} \\ \frac{\partial h}{\partial S} & \frac{\partial h}{\partial I} & \frac{\partial h}{\partial R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\beta I - u & -\beta S & 0 \\ \beta I & \beta S - u - a & 0 \\ 0 & a & -u \end{bmatrix}$$

Hastaliksız denge noktası için Jacobian matrisi şu şekildedir:

$$J = \begin{bmatrix} -u & -\beta & 0 \\ 0 & \beta - u - a & 0 \\ 0 & a & -u \end{bmatrix}$$

(1,0,0) noktası için özdeğerlerin bulunabilmesi için karakteristik denklem $\det(J - \lambda I) = 0$ yazılır:

$$\det(J - \lambda I) = \begin{vmatrix} -u - \lambda & -\beta & 0 \\ 0 & \beta - u - a - \lambda & 0 \\ 0 & a & -u - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Determinantı çözdüğümüzde karakteristik denklemin köklerini bulmuş oluruz. Karakteristik denklemin kökleri yani özdeğerler $\lambda_{1,2} = -u$, $\lambda_3 = \beta - a - u$ olarak bulunur. R_0 'ın tanımında kullanarak hastaliksız denge hakkında yorumlar yapabiliriz:

$$R_0 = \frac{\beta}{u + a}$$

$R_0 < 1$ olduğu bir durumda tüm karakteristik köklerin negatif çıkması yani bu da hastaliksız denge noktasının kararlı olduğu anlamına gelir. $R_0 > 1$ ise $\lambda_3 > 0$ olur ve hastaliksız denge noktası kararlı olmaz.

Hastalıklı denge noktası için Jacobian matrisini yazarsak:

$$J(S, I, R) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial S} & \frac{\partial f}{\partial I} & \frac{\partial f}{\partial R} \\ \frac{\partial g}{\partial S} & \frac{\partial g}{\partial I} & \frac{\partial g}{\partial R} \\ \frac{\partial h}{\partial S} & \frac{\partial h}{\partial I} & \frac{\partial h}{\partial R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\beta I - u & -\beta S & 0 \\ \beta I & \beta S - u - a & 0 \\ 0 & a & -u \end{bmatrix}$$

Yukarıdaki matris, S, I, R değerleri için hastalıklı denge noktasını belirlemede kullanılır. Hastalıklı denge noktası $D_2 = \left(\frac{1}{R_0}, \frac{u}{\beta}(R_0 - 1), \frac{a}{\beta}(R_0 - 1) \right)$ yazıldıktan sonra özdeğerlerin bulunabilmesi için:

$$\det(J(D_2) - \lambda I) = 0$$

eşitliğini çözmemiz gerekmektedir. Özdeğerlerin bulunabilmesi için karakteristik denklem sıfıra eşitlenir:

$$\det(J - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\beta I - u - \lambda & -\beta S & 0 \\ \beta I & \beta S - u - a - \lambda & 0 \\ 0 & a & -u - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Bu determinantın hesaplanmasından gelecek karakteristik denklem:

$$(-u - \lambda)(\lambda^2 + uR_0\lambda + u(R_0 - 1)(a + u)) = 0$$

şeklinde olup bu karakteristik denklemin kökleri şunlardır:

$$\lambda_1 = -u, \quad \lambda_{2,3} = \frac{-uR_0}{2} \pm \frac{\sqrt{(uR_0)^2 - 4u(R_0 - 1)(a + u)}}{2}$$

İkinci ve üçüncü kökleri daha anlaşılır yazmak için aşağıdaki yeni parametreler tanımlansın:

$$X = \frac{1}{u(R_0 - 1)}$$

$$Y = \frac{1}{a + u}$$

İki özdeğer:

$$\lambda_{2,3} = \frac{-uR_0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{uR_0}{2}\right)^2 - \frac{1}{XY}}$$

olarak bulunur. Bu iki kökte de $(uR_0)^2$ ihmal edilecek kadar küçük kabul edilirse özdeğerler hakkında daha rahat yorum yapma olanağımız olur. Özdeğerler, aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$\lambda_{2,3} = \frac{-uR_0}{2} \pm \frac{i}{\sqrt{XY}}$$

Bu köklere bakarak, dengenin sağlanabilmesi için $R_0 < 1$ olması gerektiğini görürüz [22].

4.2 SEIR Model İçin Kararlılık Analizi

SEIR modeli denklemleri aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\begin{aligned}\frac{dS(t)}{dt} &= uN - \frac{\beta}{N}S(t)I(t) - uS(t) \\ \frac{dE(t)}{dt} &= \frac{\beta}{N}S(t)I(t) - eE(t) - uE(t) \\ \frac{dI(t)}{dt} &= eE(t) - aI(t) - uI(t) \\ \frac{dR(t)}{dt} &= aI(t) - uR(t)\end{aligned}\tag{22}$$

(22) numaralı denklemlerde popülasyon sınıfları her bir popülasyonun bir oranı olarak ele alınacaktır. Bu yaklaşım sistemdeki her bir sınıfın nüfusun toplamına göre ne kadarını oluşturduğunu belirleyecektir. $S = \frac{S(t)}{N}$, $E = \frac{E(t)}{N}$, $I = \frac{I(t)}{N}$ ve $R = \frac{R(t)}{N}$ olarak yazıp sistemin durağan olduğu durumu bulmak için türevleri sıfıra eşitlediğimizde;

$$\begin{aligned}\frac{dS(t)}{dt} &= u - \beta SI - uS = 0 \\ \frac{dE(t)}{dt} &= \beta SI - eE - uE = 0 \\ \frac{dI(t)}{dt} &= eE - aI - uI = 0 \\ \frac{dR(t)}{dt} &= aI - uR = 0\end{aligned}\tag{23}$$

(23) numaralı denklemleri elde ederiz. $I^* = 0$ olduğundan buradan $\frac{dI(t)}{dt} = 0$ ve $\frac{dR(t)}{dt} = 0$ eşitliklerinden $E^* = 0$ ve $R^* = 0$ bulunur. S^* denge noktası için ise ilk denklem kullanılırsa $\frac{dS(t)}{dt} = \mu - \mu S = 0$ elde edilir, buradan $S^* = 1$ elde edilir. Hastalısız denge noktası D_1 olarak ifade edilirse $D_1 = (1, 0, 0, 0)$ olarak bulunur.

Hastalıklı denge noktaları ise tüm denklemlerin çözümünden aşağıdaki gibi bulunur:

$$\begin{aligned}R^* &= \frac{a}{u}I^* \\ E^* &= \frac{a+u}{e}I^*\end{aligned}$$

$$S^* = \frac{(e+u)(a+\mu)}{e\beta}$$

$$I^* = \frac{ue\beta - u(e+\mu)(a+u)}{\beta(e+u)(a+u)}$$

bulunur. I^* tekrar düzenlenirse:

$$I^* = \frac{\mu}{\beta} \left(\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\mu)(\gamma+\mu)} - 1 \right)$$

bulunur. Hastalıklı denge noktası D_2 aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$D_2 = (S^*, E^*, I^*, R^*)$$

bulunur. Denge noktalarının kararlılık analizi için Jakobiyen matrisi aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$J(S^*, E^*, I^*, R^*) = \begin{bmatrix} -\beta I^* - u & 0 & -\beta S^* & 0 \\ \beta I^* & -e - u & \beta S^* & 0 \\ 0 & e & -a - u & 0 \\ 0 & 0 & a & -u \end{bmatrix}$$

Hastaliksız denge noktasında bu Jakobiyen matrisi hesaplanır:

$$J(1, 0, 0, 0) = \begin{bmatrix} -u & 0 & -\beta & 0 \\ 0 & -e - u & \beta & 0 \\ 0 & e & -a - u & 0 \\ 0 & 0 & a & -u \end{bmatrix}$$

Özdeğerlerin bulunabilmesi için $D_1(1, 0, 0, 0)$ noktasında $\det(J - \lambda I) = 0$ eşitliği çözümlenmelidir:

$$\det(J - \lambda I) = \begin{vmatrix} -u - \lambda & 0 & -\beta & 0 \\ 0 & -e - u - \lambda & \beta & 0 \\ 0 & e & -a - u - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & a & -u - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Karakteristik denklemi bulmak için aşağıdaki ifadeyi kullanıyoruz:

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

Burada,

$$a = e + a + 2u, \quad b = (a+u)(e+u) - \alpha\beta$$

dır. b tekrar düzenlenirse,

$$b = \alpha\beta \left(\frac{(e+u)(a+u)}{\alpha\beta} - 1 \right)$$

elde edilir. Eğer,

$$\frac{(e+u)(a+u)}{\alpha\beta} > 1 \quad \text{ise} \quad b > 0$$

ve Routh-Hurwitz kriterine göre tüm özdeğerler negatif reel kısma sahiptir. Dolayısıyla, D_1 hastalısız denge noktası lokal olarak asimptotik kararlıdır.

Temel üreme oranı R_0 , bir hastalığın toplumda yayılıp yayılmayacağını veya zamanla azalacağını anlamak için kritik bir ölçüttür. SEIR modeli bağlamında, R_0 eşik bir değer olarak kullanılır. Eğer $R_0 > 1$ ise, hastalık bulaşmaya devam eder ve yayılır; eğer $R_0 \leq 1$ ise, hastalık zamanla yok olur. Bu durum, SEIR modelinde enfekte bireylerin değişim hızının (dE/dt) pozitif olduğu durumda geçerlidir. Denge durumu analiz edilirken, sistemin ilgili denklemindeki terimler

$$(\beta S - \frac{1}{e}(a+u)(e+u))I > 0$$

Hastalısız denge noktasında $S = 1$ olduğundan bu kabul ile birlikte:

$$\frac{\beta e}{(a+u)(e+u)} > 1$$

olup bu da R_0 olarak tanımlanabilir. Hastalıklı Denge Noktası D_2 Kararlılık Analizi:

Hastalıklı denge noktasındaki özdeğerler için $\det(J(D_2) - \lambda I) = 0$ eşitliği hesaplanmalıdır:

$$J(S^*, E^*, I^*, R^*) - \lambda I = \begin{vmatrix} -\beta I^* - u - \lambda & 0 & -\beta S^* & 0 \\ \beta I^* & -e - u - \lambda & \beta S^* & 0 \\ 0 & e & -a - u - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & a & -u - \lambda \end{vmatrix}$$

Buradan ilk özdeğer $\lambda_1 = -u$ olarak bulunur ve kalan özdeğerler için aşağıdaki karakteristik denklemin çözülmesi gerekir:

$$P = \lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

Burada

$$a = \beta I^* + e + a + 3u$$

$$b = (a+u)(\beta I^* + e + 2u) + (\beta I^*)(e+u) - a\beta S$$

$$c = (a+u)(\beta I^*)(e+u) - a\beta S$$

olarak bulunur. Karakteristik denklemin P 'nin negatif reel kısmı özdeğerlere sahip olabilmesi için, Routh-Hurwitz kriterlerinden:

$$a > 0, \quad b > 0, \quad 0 < c < ab$$

koşullarını sağlaması gerekir.

İlgili denklemleri yerine yazdığımızda:

$$a = \frac{\mu\alpha\beta}{(\alpha + \mu)(\gamma + \mu)} + \alpha + \gamma + 2\mu > 0$$

elde edilir. Denklem b aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$b = (a + u) \left(\frac{ue\beta}{(e + u)(a + u)} \right) + \frac{ue\beta}{a + u} > 0$$

$ab - c$ yi elde edelim:

$$ab - c = ue\beta \left(\frac{e + a + 2u}{(e + u)(a + u)} \right) \left(\frac{ue\beta}{(e + u)(a + u)} \right) (e + a + 2u) + ue\beta(1 - R_0)$$

Dolayısıyla, $R_0 < 1$ olduğunda $ab - c > 0$ olacaktır ve endemik denge noktası lokal olarak asimptotik kararlıdır [22,31].

4.3 BSEIR Modeli İçin Kararlılık Analizi

BSEIR modelin denklemleri aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\begin{aligned} \frac{dB(t)}{dt} &= np - kB(t) \\ \frac{dS(t)}{dt} &= kB(t) + n(1 - p) - \frac{\beta S(t)I(t)}{N} - uS(t) \\ \frac{dE(t)}{dt} &= \frac{\beta S(t)I(t)}{N} - (e + u)E(t) \\ \frac{dI(t)}{dt} &= eE(t) - (a + u + d)I(t) \\ \frac{dR(t)}{dt} &= aI(t) - uR(t) \end{aligned} \tag{24}$$

Sistemdeki $n = bN$ parametresi, toplam nüfus içindeki birey sayısını ifade eder. Modelde bulunan B sınıfı ise, başarılı bir şekilde BCG aşısı (Verem aşısı) yapılmış bireyleri temsil eder. Bu aşılama genellikle doğumdan sonraki iki

aylık süreçte uygulanmaktadır. Yenidoğan bireyler, BCG aşısının başarılı bir şekilde uygulanması durumunda bu sınıfa dahil edilir ve bağışıklık kazandıkları varsayılır. Aynı süreçte bireylerin doğal ölüm oranının yeteri kadar düşük olduğu göz önünde bulundurulduğundan $B(t)$ sınıfının zamana göre değişiminde doğal ölüm oranı ihmal edilmektedir.

Next-generation matrix (NGM) yöntemi, adi diferansiyel denklem modellerinde enfekte bireylerin sayısını tanımlamak için kullanılan bir matristir. Bu matris, temel üreme sayısı R_0 'ı hesaplamak için kullanılır. R_0 'ı bulabilmek için NGM yönteminde iki matris ele alınır. Bu matrisleri iki kategoride inceleyeceğiz: enfekte gruplara ait kısımlar ve enfekte olmayan gruplara ait kısımlar. NGM matris bulunurken ayrıntılı anlatım [15] nolu referansta yapılmıştır. R_0 değeri aşağıdaki gibi bulunur.

$$R_0 = \rho(FV^{-1}) = \frac{\beta ek}{(a + u + d)(e + u)(up + k)}$$

burada ρ spektral yarıçap, F ve V matrisleri:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\beta k}{up+k} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad ve \quad V = \begin{bmatrix} e + u & 0 \\ -e & u + d + a \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilir [27].

Yukarıdaki denklemlerde popülasyon sınıfları her bir popülasyonun bir oranı olarak ele alınacaktır. Bu yaklaşım sistemdeki her bir sınıfın nüfusun toplamına göre ne kadarını oluşturduğunu belirleyecektir. $B = \frac{B(t)}{N}$, $S = \frac{S(t)}{N}$, $E = \frac{E(t)}{N}$, $I = \frac{I(t)}{N}$ ve $R = \frac{R(t)}{N}$ olarak yazıp ve denge noktası bulunulacağından denklemler sıfıra eşitlenip aşağıdaki gibi bulunur;

$$\frac{dB}{dt} = bp - kB = 0$$

$$\frac{dS}{dt} = kB + b(1 - p) - \beta SI - uS = 0$$

$$\frac{dE}{dt} = \beta SI - (e + u)E = 0 \quad (25)$$

$$\frac{dI}{dt} = eE - (a + u + d)I = 0$$

$$\frac{dR}{dt} = aI - uR = 0$$

(25) numaralı denklemlerini elde ederiz. $I^*=0$ olduğundan buradan $\frac{dB(t)}{dt} = 0$ eşitliğini çözdüğümüzde $B^* = \frac{bp}{k}$ bulunur. Daha sonra $\frac{dS(t)}{dt} = 0$ denkleminde B^* yerine yazılıp çözüldüğünde $S^* = \frac{b}{u}$, $E^* = 0$ ve $R^* = 0$ bulunmuş olur. Bu değerler D_1 de yazılırsa

$$D_1 = \left(\frac{bp}{k}, \frac{b}{u}, 0, 0, 0 \right)$$

elde edilir. Hastalıklı denge noktaları ise koşul olmadığından tüm denklemlerin çözümünden aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} B^* &= \frac{bp}{k} \\ S^* &= \frac{(u+d+a)(e+u)}{\beta e} \\ E^* &= \frac{(u+d+a)(e+u) \frac{e\beta b - u(e+u)}{e+u}}{e} \\ I^* &= \frac{e\beta b - u(e+u)}{e+u} \\ R^* &= \frac{a \frac{e\beta b - u(e+u)}{e+u}}{u} \end{aligned}$$

$$D_2 = (B^*, S^*, E^*, I^*, R^*)$$

Jakobien matrisi aşağıdaki gibi buluruz.

$$J(B, S, E, I, R) = \begin{bmatrix} -k & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k & -(\beta+u) & 0 & -\beta S & 0 \\ 0 & \beta I & -(e+u) & \beta S & 0 \\ 0 & 0 & e & -(a+u+d) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & -u \end{bmatrix}$$

D_1 denge noktaları yerine yazılırsa:

$$J(D_1) = \begin{bmatrix} -k & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k & -u & 0 & \frac{-\beta b}{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & -(e+u) & \frac{\beta b}{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & e & -(a+u+d) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & -u \end{bmatrix}$$

Hastalıktan bağımsız denge noktası (D_1) için karakteristik denklem:

$$\det(J - \lambda I) = \begin{vmatrix} -k - \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k & -u - \lambda & 0 & \frac{-\beta b}{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & -(e+u+\lambda) & \frac{\beta b}{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & e & -(a+u+d+\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & -u - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

eşitliği yardımıyla:

$$(-k - \lambda)(-u - \lambda)^2(\lambda^2 + a_1\lambda + a_2) = 0$$

bulunur, buradaki katsayılar şu şekildedir:

$$a_1 = a + 2u + d + e,$$

$$a_2 = (e + u)(a + u + d) - \frac{e\beta b}{\mu}.$$

Karakteristik denklemden

$$\lambda_1 = -k, \quad \lambda_2 = -u, \quad \lambda_3 = -u$$

negatif özdeğerler elde edilir. Diğer iki kök ise

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0.$$

Routh-Hurwitz kriterine göre, eğer $a_1 > 0$ ve $a_2 > 0$ koşulları sağlanırsa, sistemin denkleminin kökleri (λ_4 ve λ_5) negatif reel kısma sahip olur. Parametrelerin pozitif olduğu varsayımıyla $a_1 > 0$ şartı otomatik olarak yerine gelir. Ancak $a_2 > 0$ şartının sağlanabilmesi için $R_0 > 1$ olması gereklidir. Bu durumda, D_1 denge noktası yerel asimptotik kararlılığa sahip olur. Ancak $R_0 \leq 1$ olduğunda sistem kararsız hale gelir. Bu analiz, kararlılık için gerekli ve yeterli koşulları özetlemektedir [39].

5 NÜMERİK YÖNTEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

5.1 Euler Yöntemi

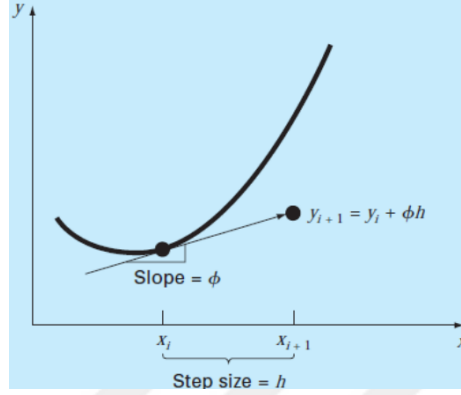
Adi diferansiyel denklem başlangıç koşulu ile dikkate alınsın:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \quad (26)$$

n adım sonra (x_n, y_n) noktasına ulaşılır. (x_n, y_n) noktasından bir sonraki nokta olan (x_{n+1}, y_{n+1}) noktasına olan adım yer almaktadır. (x_n, y_n) üzerinden geçen yön parçasının eğimi, $m = f(x_n, y_n)$ 'dir. Böylece x_n den x_{n+1} 'e doğru h m değerindeki yatay değişim, y_n den y_{n+1} e doğru $mh = hf(x_n, y_n)$ şeklinde dikey bir değişime karşılık gelir. Bu sebeple yeni bulunan (x_{n+1}, y_{n+1}) noktasının kordinatları, eski koordinatlar cinsinden aşağıdaki gibi olur:

$$x_{n+1} = x_n + h, \quad y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

Verilen h adım büyüklüğüne sahip Euler yöntemi (x_0, y_0) , başlangıç noktasından başlanarak, yaklaşık çözüm eğrisini bulmak için gerekli olan ardışık (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) , ... noktalarının hesaplanmasından ibarettir:



Şekil 5.1: Tek Adımlı Bir Yöntemin Gösterimi[1]

$$x_1 = x_0 + h, y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$$

$$x_2 = x_1 + h, y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1)$$

$$x_3 = x_2 + h, y_3 = y_2 + hf(x_2, y_2)$$

...

Euler yöntemi kullanılarak elde edilen sayısal sonuçlar, başlangıç değer probleminin tam çözümü olan $y(x)$ in $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ noktalarındaki, $y(x_1), y(x_2), y(x_3), \dots, y(x_n), \dots$ değerlerine $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n, \dots$ yaklaşımlarının bir dizisidir [13].

5.2 İki Adımlı Şema (Implicit Two-Step Schema) Sonrası Newton Yöntemi

İki adımlı şema

$$\frac{dy}{dt} = f(y)$$

şeklinde adi bir diferansiyel denklem için

$$\frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2\Delta t} = f\left(\frac{y_{n+1} + y_{n-1}}{2}\right)$$

şeklinde tanımlanır. Burada y_{n+1} ile $y(t_{n+1})$ ifade edilir. Ayrıca $\Delta t = t_n - t_{n-1}$ ile tanımlanır. Bu yöntemde nümerik çözüme başlamak için iki başlangıç koşuluna ihtiyaç olduğu görülmektedir. Bu yöntem ikinci mertebededir [14].

Şimdi ise iki adımlı şema (two step implicit schema) sonrasında kullanacağımız Newton yönteminin nasıl uygulandığına göreceğiz.

Lineer olmayan $f(x) = 0$ denkleminin çözümlerini bulmak için basit bir yöntem bulunmuyor. Bu gibi durumlarda kökleri tahmin etmek için köke

yaklaşımlarda bulunan Newton yöntemi kullanılabilir. Newton yöntemi popüler bir nümerik yöntem olarak kullanılmaktadır. Bu yöntem $f(x)$ 'in x_1 noktası etrafında ki Taylor serisi açılımından ortaya çıkmıştır [33].

$f(x) = x_0$ bu fonksiyonda $k = 1, 2, 3, \dots$ $f^k(x_0)$ türevi bulunuyorsa her meriteden türevi vardır. O zaman Taylor serisi açılımına göre;

$$\sum_0^{\infty} \frac{f^k(x_0)}{k!} (x - x_0)^k = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \dots$$

serisine x_0 etrafında Taylor seri açılımı denir [42].

$f(x)$ in x_1 noktasındaki Taylor açılımından;

$$f(x) = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1) + \frac{1}{2!} f''(x_1)(x - x_1)^2 + \dots$$

elde edilir. Taylor serisi açılımının ilk iki terimini dikkate alalım:

$$f(x) \approx f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1)$$

Bu denklemin kökünü bulmak için denklem sıfıra eşitlenir:

$$f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1) = 0$$

denklem düzenlenip sonraki adıma geçildiğinde

$$x = x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

elde edilir. Denklem genelleştirilerek Newton yöntemi elde edilir:

$$x_i = x_{i-1} - \frac{f(x_{i-1})}{f'(x_{i-1})}, \quad x \in N$$

burada $x_i \rightarrow \bar{x} (i \rightarrow \infty)$ dir.

\bar{x} , fonksiyonun köküne bir yaklaşımdır. Sadece tek bir değişken içeren lineer olmayan denklemleri çözmek için kullanılabilir. Bu yöntem birden fazla değişken içeren lineer olmayan denklemleri çözebilmek için de kullanılabilir. Lineer olmayan denklem sistemleri matrislerle ifade edilebilir.

$$F(x) = F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \end{bmatrix}$$

olmak üzere n bilinmeyenli denklem sistemi $F(x) = 0$ olsun. Bu denklem sisteminin bir kökü \bar{x} yani $F(\bar{x}) = 0$ olsun. Bu denklem sistemindeki $x^{(0)}$ noktası komşuluğunda Taylor seri açılımı

$$F(x) = F(x^{(0)}) + \frac{\partial F(x^{(0)})}{\partial X} (x - x^{(0)}) + \dots$$

şeklindedir.

Tanım 2 [Jakobiyen Matris] R^n uzayında birinci dereceden türevlenebilir bir fonksiyon $f : R^n \rightarrow R^m$ olsun. Bu fonksiyon $x \in R^n$ noktası için bir $f(x) \in R^m$ vektörü oluştursun. Bu f fonksiyonunun Jakobiyen matrisi $m \times n$ boyutlu bir matris olarak tanımlanır ve J ile gösterilir [41].

$$J(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x^{(0)})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x^{(0)})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(x^{(0)})}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(x^{(0)})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x^{(0)})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(x^{(0)})}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x^{(0)})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(x^{(0)})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(x^{(0)})}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Buna göre Taylor seri açılımında Jakobien matrisini ifade edersek

$$\frac{\partial F(x^{(0)})}{\partial X} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x^{(0)})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x^{(0)})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(x^{(0)})}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(x^{(0)})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x^{(0)})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(x^{(0)})}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x^{(0)})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(x^{(0)})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(x^{(0)})}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

olmak üzere verilen matris $J(x^{(0)})$ olsun. $x^{(0)}$ noktası komşuluğundaki Taylor açılımı $F(x) \approx F(x^{(0)}) + J(x^{(0)})(x - x^{(0)})$ şeklinde yazılabilir. $F(x) = 0$ denklem sisteminde F yerine $x^{(0)}$ komşuluğundaki birinci dereceden Taylor açılımı alınırsa

$$F(x^{(0)}) + J(x^{(0)})(x - x^{(0)}) = 0$$

olur. Bu denklem sistemi tekrar düzenlenirse

$$J(x^{(0)})(x - x^{(0)}) = -F(x^{(0)})$$

$$(x - x^{(0)}) = -(J(x^{(0)}))^{-1}F(x^{(0)})$$

$$x = x^{(0)} - (J(x^{(0)}))^{-1}F(x^{(0)}) \quad (27)$$

elde edilir. (27) denklemi \bar{x} kökü için yaklaşık bir değer olarak kullanılabilir. \bar{x} köküne daha iyi bir yaklaşım sağlamak için;

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} - \left(J(x^{(k-1)}) \right)^{-1} F(x^{(k-1)}) \quad k = 1, 2, 3, \dots, n \quad (28)$$

denklem sistemi kullanılır.

Burada $x \in R^n$, F vektör fonksiyonu ve $J(x)^{-1}$ Jakobiyen matrisinin tersidir. Bu yöntem Lineer olmayan diferansiyel denklem sisteminin sayısal çözümlerindeki Newton yöntemini temsil etmektedir.

Newton yönteminin bileşenlerinden adım adım devam edersek, önce fonksiyonlar matris şeklinde yazılır.

$F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ olmak üzere

$$F(x) = F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \end{bmatrix}$$

matrisini dikkate alalım. Burada $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ dir.}$$

Burada $x_i \in \mathbb{R}$ ve $i = 1, 2, \dots, n$ 'dir.

$J(x)$ matrisini yukarda tanımlamıştık. Burada ise $J(x)$ matrisini oluşturacağız.

$$J(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Bileşenleri tamamlandıktan sonra aşağıdaki adımları tamamlayabiliriz.

İlk adım başlangıç vektörü oluşturulur. $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$

Sonrasında ise $J(x^{(0)})$ ve $F(x^{(0)})$ hesaplanır.

$$\text{Şimdi } y_0 \text{'ı bulacağız. } y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$y^{(0)}$ 'ı bulabilmek için $J(x^{(0)})y^{(0)} = -F(x^{(0)})$ lineer sistemini Gauss Eliminasyon Yöntemini kullanarak çözmeliyiz.

Sonraki adımda ise $y^{(0)} = -J^{-1}(x^{(0)})F(x^{(0)})$

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} - J(x^{(k-1)})^{-1}F(x^{(k-1)}) = x^{(k-1)} - y^{(k-1)}$$

$y^{(0)}$ bulunduğunda $x^{(1)}$ için çözüm yapılacak

$$x^{(1)} = x^{(0)} + y^{(0)} = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1^{(0)} \\ y_2^{(0)} \\ \vdots \\ y_n^{(0)} \end{bmatrix} \text{ elde edilir. } x^{(1)} \text{ hesaplandıktan sonra}$$

$x^{(k)}$, \bar{x} e yakınsayana kadar işlemler tekrar etmektedir. \bar{x} sistemin çözümü olduğundan $F(x) = 0$ çözümü bulunmuş olur [33].

5.3 Runge-Kutta Yöntemi

Runge-Kutta yöntemleri, adi diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerini bulmak için kullanılan etkili ve yaygın yöntemlerden biridir. Bu yöntemler, hem açık hem de kapalı tekniklerden oluşan bir yöntem ailesi olarak bilinir. İlk kez 1895 yılında Runge tarafından geliştirilmiş, ardından 1900 yılında Heun ve 1901 yılında Kutta'nın çalışmalarıyla daha da geliştirilerek bugünkü haline ulaşmıştır [6].

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), (x_0) = y_0 \quad (29)$$

başlangıç değer probleminin $y = y(x)$ çözümünü bulacak sayısal yöntemlerde fazlaca kullanılan Runge-Kutta yöntemini tartışacağız.

Gösterim şekli olarak kullanılan $y(x_1), y(x_2), y(x_3), \dots, y(x_n)$ gerçek değerlerini $y_1, y_2, y_3, y_4, \dots, y_n$ olarak yaklaşık değerlerini hesapladığımızı düşünelim.

$$y(x_{n+1}) - y(x_n) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} y'(x) dx = \int_{x_n}^{x_n+h} y'(x) dx$$

integrali için Simpson kuralı kullanılırsa

$y(x_{n+1}) - y(x_n)$ yaklaşık olarak $\frac{h}{6}[y'(x_n) + 4y'(x_n + \frac{h}{2}) + y'(x_{n+1})]$ ile ifade edilir. Buradan

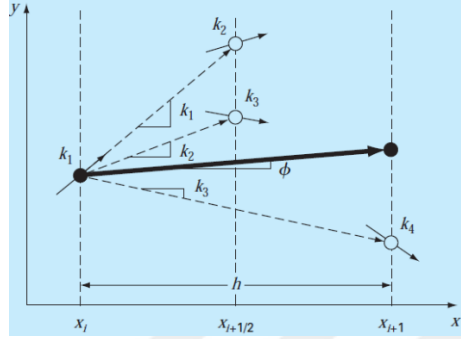
$$y_{n+1} \approx y_n + \frac{h}{6}[y'(x_n) + 2y'(x_n + \frac{h}{2}) + 2y'(x_n + \frac{h}{2}) + y'(x_{n+1})] \quad (30)$$

elde edilir. Burada $4y'(x_n + \frac{h}{2})$ terimi, iki terimin toplamı şeklinde ifade edilmiştir. Bunun nedeni $[(x_n), (x_{n+1})]$ aralığının orta noktası olan $(x_n + \frac{h}{2})$ noktasında, $y'(x_n + \frac{h}{2})$ eğimi iki farklı yoldan ifade edilmesidir. (30)' da eşitliğin sağında doğru eğim değerleri olan $y'(x_n), y'(x_n + \frac{h}{2}), y'(x_n + \frac{h}{2})$ ve $y'(x_{n+1})$ sırasıyla, aşağıdaki yaklaşımlarda değiştirilsin.

$k_1 = f(x_n, y_n)$, x_n deki Euler yöntemi eğimidir.

$k_2 = f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + hk_1)$, Euler yöntemi kullanılarak $[x_n, x_{n+1}]$ aralığının orta noktasındaki eğiminin tahminidir.

$k_3 = f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + hk_2)$, orta nokta eğimi için geliştirilmiş Euler değeridir.



Şekil 5.2: 4. Mertebeden Runge-Kutta Yöntemleriyle Karşılaştırıldığında Eğim Tahminleri [1]

$k_4 = f(x_{n+1}, y_n + hk_3)$ eşitliği de x_{n+1} e geçiş için ortadaki geliştirilmiş eğim k_3 ü kullanan Euler yönteminin eğimidir. Tüm ifadeler yerine koyulursa ardışık tekrar formülü elde edilir. Sırasıyla y_1, y_2, y_3, \dots yaklaşımlarını hesaplamak için kullanılan bu formül Runge-Kutta yöntemini oluşturur. Runge-Kutta 4. mertebeden bir yöntemdir [13].

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

6 SIR, SEIR, BSEIR MODELLERİNİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

SIR, SEIR VE BSEIR modellerinin nümerik çözümü için Türkiye'nin 2005 yılı başlangıç değerleri için 2007 yılında yayımlanan Türkiye Verem Savaş Raporu kullanılmıştır. 2021 Verem hastası sayısı açıklanan insidans oranı yardımıyla bulunmuştur. 2005-2022 arasındaki veriler de yıllık yayınlanan raporlardan alınmıştır. Son yıllarda bu verilerin gecikmeli çıktığı ya da yayınlanmadığı durumlarda göz önüne alındığından 2005-2015 yılı baz alınıp onun üzerinden parametreler ve oranlar belirlenecektir. 2005 yılı toplam nüfus $N(0) = 68.860.540$ olarak ve toplam hasta sayısı ise $I(0) = 20.535$ kullanılacaktır [16].

$E(0)$ başlangıç değeri ise bu konu ile ilgili çalışmalar göz önüne alınarak Türkiye'ye uyarlanmıştır. İyileşen nüfusun başlangıç değeri $R(0)$ ise 1.230.000 olarak alınıp 2005 yılı öncesindeki tedavi başarı değerleri, ortalama yaşam süreleri ve doğal ölüm oranları dikkate alınıp yaklaşık değeri tahmin edilerek bulunmuştur. Üç model içinde kullanılacak olan ölüm parametresi u 2010 yılındaki verilerden yararlanılarak yapılmıştır. 2010 yılında toplam nüfus 73.722.988 olup doğal yollarla ölen sayısı ise 366.471 olarak kayıtlara geçmiştir. Ölüm oranı ise $u = 73.722.988/366.471$ olacağından $u = 0.0049$ olarak alınmıştır. Bunların dışındaki parametreler bu konuda yapılan doktora tezinden alınmıştır. Diğer

değerlerde bulunurken 2005 istatistiksel verilerin tezdeki verilerle paralel olması hata oranlarını karşılaştırma açısından önemli olacaktır [39].

MATLAB R2024a ortamında yapılan tüm nümerik çözümlerde h zaman adımı 0.0001, n ise 2005-2035 yılları bulunduğundan 30 olarak alınmıştır.

6.1 SIR Modelinin Nümerik Çözümleri

SIR modelinin nümerik çözümleri yapılırken Türkiye'nin 2005'ten itibaren her yıl Sağlık Bakanlığı tarafından yayınlanan verem savaş raporu verileri kullanılmıştır. SIR modelinin nümerik çözümleri yapılırken kullanılan $N(0)$ değeri 2005 yılı toplam popülasyon değeridir, $R(0)$ değeri toplam nüfus içindeki toplam iyileşen sayısını ifade ederken $S(0)$ değeri ise hassas popülasyon değeridir. $S(0)=N(0)-I(0)-R(0)$ eşitliğinde tüm popülasyondan iyileşen ve hasta popülasyonun çıkarılması ile bulunur.

SIR modelin çözümünü yaparken kullanacağımız parametrelerin değerleri Tablo 6.1'de verilmiştir.

Parametre	Tanım	Değer
a	İyileşme oranı	0.897
β	Temas oranı	0.872
u	Ölüm oranı(Doğal)	0.0049
$S(0)$	Hassas popülasyon başlangıç değeri	67.610.005
$I(0)$	Hasta popülasyonunun başlangıç değeri	20.535
$R(0)$	İyileşen popülasyonun başlangıç değeri	1.230.000

Tablo 6.1: SIR Modelinde Kullanılan Parametreler

Tablolarda yer alan hata miktarı

$$Hata\ Miktarı = Gerçek\ Değer - Nümerik\ Sonuç$$

Tablolarda yer alan hata yüzdesi

$$Hata\ Yüzdesi = \frac{(Gerçek\ Değer - Nümerik\ Sonuç)}{Gerçek\ Değer} \cdot 100$$

Tablolarda yer alan mutlak hata ise

$$Mutlak\ Hata = |Gerçek\ Değer - Nümerik\ Sonuç|$$

6.1.1 SIR Modelinin Euler Yöntemi ile Çözümü

Doğrusal olmayan denklem sistemlerini çözmek için kullanılan Euler yöntemi aşağıdaki sistem için

$$\frac{dS}{dt} = f(t, S, I, R) \quad (30)$$

$$\frac{dI}{dt} = g(t, S, I, R) \quad (31)$$

$$\frac{dR}{dt} = j(t, S, I, R) \quad (32)$$

şu şekilde ifade edilir:

$$S_{n+1} = S_n + hf(t_n, S_n, I_n, R_n)$$

$$I_{n+1} = I_n + hg(t_n, S_n, I_n, R_n)$$

$$R_{n+1} = R_n + hj(t_n, S_n, I_n, R_n)$$

burada adım uzunluğu $h = t_{n+1} - t_n$ ile ifade edilmiştir. Öncelikle (1),(2),(3) SIR model denklemlerini yazalım;

$$\frac{dS}{dt} = f(t, S, I, R) = bN - \frac{\beta SI}{N} - uS \quad (33)$$

$$\frac{dI}{dt} = g(t, S, I, R) = \frac{\beta SI}{N} - aI - uI \quad (34)$$

$$\frac{dR}{dt} = j(t, S, I, R) = aI - uR \quad (35)$$

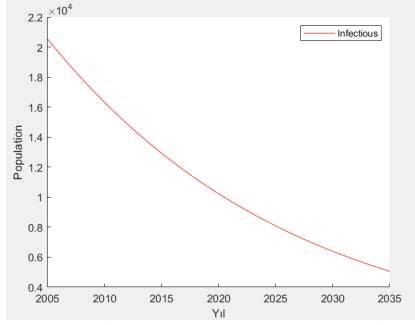
(33), (34), (35) denklemlerine Euler yöntemi şu şekilde uygulanır.

$$S_{n+1} = S_n + h(bN - \frac{\beta S_n I_n}{N} - uS_n)$$

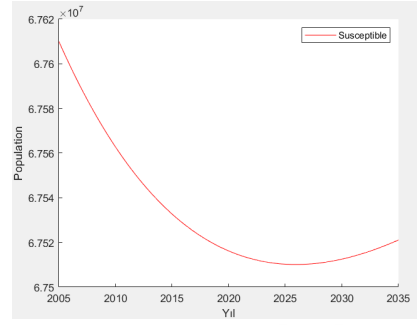
$$I_{n+1} = I_n + h(\frac{\beta S_n I_n}{N} - aI_n - uI_n)$$

$$R_{n+1} = R_n + h(aI_n - uR_n)$$

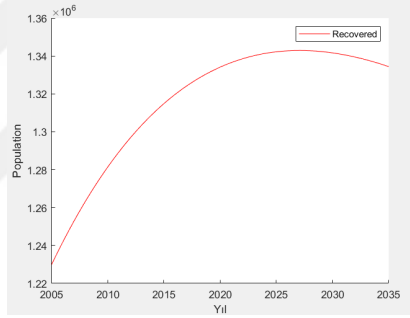
MATLAB R2024a kullanılarak çözümü yapıldığında Şekil 6.1, Şekil 6.2, Şekil 6.3 grafikleri elde edilir:



Şekil 6.1: SIR Model Euler Çözümü
(I)



Şekil 6.2: SIR Model Euler Çözümü
(S)



Şekil 6.3: SIR Model Euler Çözümü
(R)

6.1.2 SIR Modelin İki Adımlı Şema (Implicit Two-Step Schema) Sonrasında Newton Yöntemi ile Çözümü

$$\frac{dS}{dt} = f(S, I, R)$$

şeklindeki genel olarak ifade edilen adi diferansiyel denklem için yöntem;

$$\frac{S_{n+1} - S_{n-1}}{2\Delta t} = f\left(\frac{S_{n+1} + S_{n-1}}{2}, \frac{I_{n+1} + I_{n-1}}{2}, \frac{R_{n+1} + R_{n-1}}{2}\right)$$

şeklinde ifade edilir. Şimdi ise sistemin ilk denklemini

$$\frac{dS}{dt} = bN - \frac{\beta SI}{N} - uS$$

ye yöntemi uygulayalım.

$$\frac{S_{n+1} - S_{n-1}}{2\Delta t} = bN - \frac{\beta(S_{n+1}+S_{n-1})(I_{n+1}+I_{n-1})}{N} - u\left(\frac{S_{n+1} + S_{n-1}}{2}\right)$$

Burada terimler bir tarafa toplansın ve F_1 olarak adlandırılınsın:

$$F_1 = 2bN\Delta t - \frac{\beta\Delta t}{2N}(S_{n+1}I_{n+1} + S_{n+1}I_{n-1} + S_{n-1}I_{n+1} + S_{n-1}I_{n-1}) - u\Delta t(S_{n+1} + S_{n-1}) - S_{n+1} + S_{n-1} = 0$$

Şimdi ikinci denklem göz önüne alınsın:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\beta SI}{N} - aI - uI$$

Bu denkleme yöntem şu şekilde uygulanır:

$$\frac{I_{n+1} - I_{n-1}}{2\Delta t} = \frac{\beta}{N}\left(\frac{S_{n+1} + S_{n-1}}{2}\right)\left(\frac{I_{n+1} + I_{n-1}}{2}\right) - a\left(\frac{I_{n+1} + I_{n-1}}{2}\right) - u\left(\frac{I_{n+1} + I_{n-1}}{2}\right)$$

Burada terimler yine bir tarafa toplansın ve F_2 ile adlandırılınsın:

$$F_2 = \frac{\beta\Delta t}{2N}(S_{n+1}I_{n+1} + S_{n+1}I_{n-1} + S_{n-1}I_{n+1} + S_{n-1}I_{n-1}) - a\Delta t(I_{n+1} - I_{n-1}) - u\Delta t(I_{n+1} - I_{n-1}) - I_{n+1} + I_{n-1} = 0$$

Son olarak üçüncü denklem göz önüne alınsın.

$$\frac{dR}{dt} = aI - uR$$

ve bu denkleme yöntem uygulanınsın:

$$\frac{R_{n+1} - R_{n-1}}{2\Delta t} = a\left(\frac{I_{n+1} + I_{n-1}}{2}\right) - u\left(\frac{R_{n+1} + R_{n-1}}{2}\right)$$

Diğer denklemlerde yapıldığı gibi terimler bir tarafta toplanıp F_3 ile adlandırılınsın:

$$F_3 = a\Delta t(I_{n+1} - I_{n-1}) - u\Delta t(R_{n+1} - R_{n-1}) - R_{n+1} + R_{n-1} = 0$$

F_1, F_2, F_3 denklemleri incelendiğinde lineer olmayan bir sistem elde edildiği görülür, dolayısıyla ilave bir yöntem ihtiyacı vardır. Bu sistemi çözmek için Newton yöntemi kullanılacaktır. Fonksiyonlar matrisini oluşturup Jakobien matrisini bulalım.

$F(S, I, R)$ fonksiyonlar matrisini aşağıdaki gibi oluşturuyoruz.

$$\begin{bmatrix} 2bN\Delta t - \frac{\beta\Delta t}{2N}(S_{n+1}I_{n+1} + S_{n+1}I_{n-1} + S_{n-1}I_{n+1} + S_{n-1}I_{n-1}) - u\Delta t(S_{n+1} + S_{n-1}) - S_{n+1} + S_{n-1} \\ \frac{\beta\Delta t}{2N}(S_{n+1}I_{n+1} + S_{n+1}I_{n-1} + S_{n-1}I_{n+1} + S_{n-1}I_{n-1}) - u\Delta t(I_{n+1} - I_{n-1}) - I_{n+1} + I_{n-1} \\ a\Delta t(I_{n+1} - I_{n-1}) - u\Delta t(R_{n+1} - R_{n-1}) - R_{n+1} + R_{n-1} \end{bmatrix}$$

F_1, F_2, F_3 fonksiyonlarının kısmi türevlerini bulalım. MATLAB R2024a üzerinden çözüm yapılacağından $n + 1$ zamanı 1, $n - 1$ zamanı ise 0 alınarak kısmi türevlere yazılmıştır.

$$\frac{dF_1}{dS} = -\frac{\beta\Delta t}{2N}(I_1 + I_0) - u\Delta t - 1$$

$$\frac{dF_1}{dI} = -\frac{\beta\Delta t}{2N}(S_1 + S_0)$$

$$\frac{dF_1}{dR} = 0$$

$$\frac{dF_2}{dS} = -\frac{\beta\Delta t}{2N}(I_1 + I_0)$$

$$\frac{dF_2}{dI} = \frac{\beta\Delta t}{2N}((S_1 + S_0) - a\Delta t - u\Delta t - 1)$$

$$\frac{dF_2}{dR} = 0$$

$$\frac{dF_3}{dS} = 0$$

$$\frac{dF_3}{dI} = a\Delta t$$

$$\frac{dF_3}{dR} = -u\Delta t - 1$$

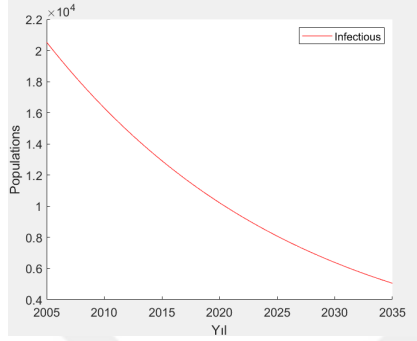
Buradan Jakobiyen matrisi şu şekilde yazılır:

$$J(x) = \begin{bmatrix} -\frac{\beta\Delta t}{2N}(I_1 + I_0) - u\Delta t - 1 & -\frac{\beta\Delta t}{2N}(S_1 + S_0) & 0 \\ -\frac{\beta\Delta t}{2N}(I_1 + I_0) & \frac{\beta\Delta t}{2N}((S_1 + S_0) - a\Delta t - u\Delta t - 1) & 0 \\ 0 & a\Delta t & -u\Delta t - 1 \end{bmatrix}$$

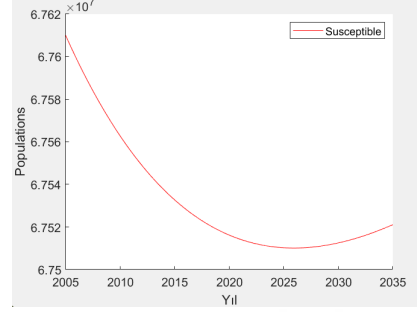
Jakobien matrisi bulunduktan sonra MATLAB R2024a programı üzerinden aşağıdaki formül kullanılarak çözüm yapılacaktır.

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} - J(x)^{(-1)}F(S, I, R)$$

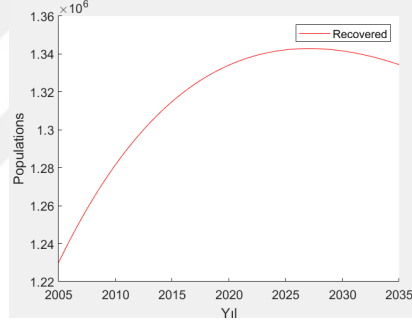
MATLAB R2024a programından çözüm yapıldığında Şekil 6.4, Şekil 6.5, Şekil 6.6 grafikleri elde edilir.



Şekil 6.4: SIR Model Newton Çözümü (I)



Şekil 6.5: SIR Model Newton Çözümü (S)



Şekil 6.6: SIR Model Newton Çözümü (R)

6.1.3 SIR Modelin Runge-Kutta ile Çözümü

Tüberküloz hastalığının yayılmasına modelleyen SIR modelindeki denklemler adi diferansiyel şeklinde aşağıda yazılmıştır.

$$\frac{dS}{dt} = f(t, S, I, R) \quad (36)$$

$$\frac{dE}{dt} = g(t, S, I, R) \quad (37)$$

$$\frac{dI}{dt} = j(t, S, I, R) \quad (38)$$

Bu denklemler dördüncü derecen Runge-Kutta yöntemi kullanılarak çözüldüğünde aşağıdaki denklemler elde edilmiştir.

$$\begin{aligned}
S_{r+1} &= S_r + \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) h \\
I_{r+1} &= I_r + \frac{1}{6} (l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4) h \\
R_{r+1} &= R_r + \frac{1}{6} (m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4) h
\end{aligned}$$

Denklemlerinde h zaman adımı olmak üzere k, l, m değerleri aşağıdaki yolla bulunur.

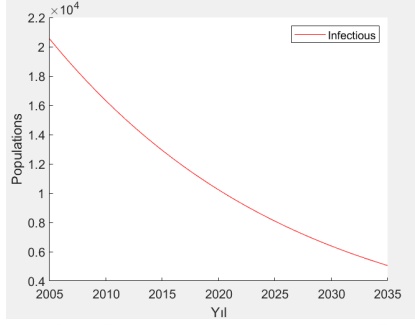
$$\begin{aligned}
k_1 &= bN - \frac{\beta S_r I_r}{N} - uS_r, \\
l_1 &= \frac{\beta S_r I_r}{N} - aI_r - uI_r, \\
m_1 &= aI_r - uR_r,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_2 &= bN - \frac{\beta}{N} (S_r + k_1 \frac{h}{2}) (I_r + l_1 \frac{h}{2}) - u (S_r + k_1 \frac{h}{2}), \\
l_2 &= \frac{\beta}{N} (S_r + k_1 \frac{h}{2}) (I_r + l_1 \frac{h}{2}) - a (I_r + l_1 \frac{h}{2}) - u (I_r + l_1 \frac{h}{2}), \\
m_2 &= a (I_r + l_1 \frac{h}{2}) - u (R_r + m_1 \frac{h}{2}),
\end{aligned}$$

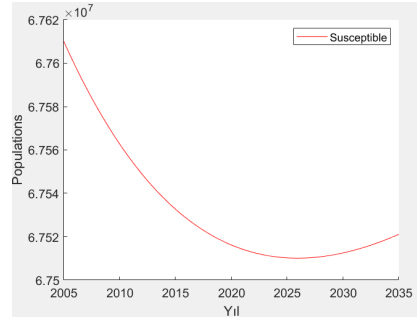
$$\begin{aligned}
k_3 &= bN - \frac{\beta}{N} (S_r + k_2 \frac{h}{2}) (I_r + l_2 \frac{h}{2}) - u (S_r + k_2 \frac{h}{2}), \\
l_3 &= \frac{\beta}{N} (S_r + k_2 \frac{h}{2}) (I_r + l_2 \frac{h}{2}) - a (I_r + l_2 \frac{h}{2}) - u (I_r + l_2 \frac{h}{2}), \\
m_3 &= a (I_r + l_2 \frac{h}{2}) - u (R_r + m_2 \frac{h}{2}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_4 &= bN - \frac{\beta}{N} (S_r + k_3 \frac{h}{2}) (I_r + l_3 \frac{h}{2}) - u (S_r + k_3 \frac{h}{2}), \\
l_4 &= \frac{\beta}{N} (S_r + k_3 \frac{h}{2}) (I_r + l_3 \frac{h}{2}) - a (I_r + l_3 \frac{h}{2}) - u (I_r + l_3 \frac{h}{2}), \\
m_4 &= a (I_r + l_3 \frac{h}{2}) - u (R_r + m_3 \frac{h}{2}),
\end{aligned}$$

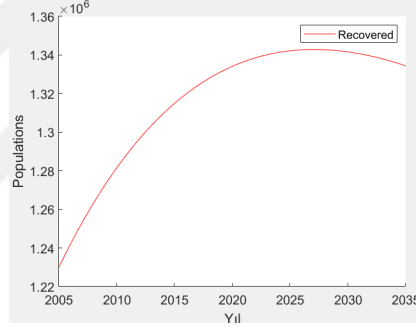
Tüberkülozun yayılmasında kullanılan SIR modelinin çözümüdür [3]. Bu verileri MATLAB R2024a ortamında kod şeklinde yazıp denklemin çözümü sağlandığında Şekil 6.7, Şekil 6.8, Şekil 6.9 grafikleri elde edilir.



Şekil 6.7: SIR Model Runge-Kutta Çözümü (I)



Şekil 6.8: SIR Model Runge-Kutta Çözümü (S)



Şekil 6.9: SIR Model Runge-Kutta Çözümü (R)

6.1.4 SIR Modelinin Nümerik Çözümlerinin Sonuçları

SIR modelinin nümerik çözümlerinin sonuçlarını Tablo 6.2' de incelediğimizde tüm çözümlerin birbirine çok yakın değerler olduğunu görüyoruz. Newton metodu ve Runge-Kutta metodu ile çözümlerini on binde birler basamağına kadar yapıldığında aynı sonuçlar verdiğini görüyoruz. Tablo 6.2' ye baktığımızda ise en fazla hata sayımızın 2020 yılında, yuvarladığımızda 1302 kişi olduğu göze çarpmaktadır. Hata oranı olarak ise Tablo 6.4'e baktığımızda 2020 döneminde yüzde -14,58 olduğunu görüyoruz. Tüm modellerin nümerik çözümlerini yaptıktan sonra COVID-19 etkisinin hata oranlarını nasıl etkilediğini görmüş olacağız.

Parametreleri yerine koyup daha önce bulduğumuz Temel Üreme Oranı R_0 formülünün değerini hesaplayalım.

$$R_0 = \frac{\beta}{u + a} = 0.9668 < 1$$

R_0 değeri 1'den küçük olduğundan hastalığın zamanla yok olacağı söylenebilir.

Yıl	Gerçek Vaka Sayısı	Euler Yöntemi	New. Yöntemi	R-K Yöntemi
2005	20535.0	20535.0	20535.0	20535.0
2010	16551.0	16311.2199	16311.2282	16311.2282
2015	12772.0	12924.8206	12924.8341	12924.8341
2016	12417.0	12334.5829	12334.5971	12334.5971
2017	12046.0	11770.7	11770.7148	11770.7148
2018	11786.0	11232.0944	11232.1099	11232.1099
2019	11401.0	10717.7214	10717.7373	10717.7373
2020	8925.0	10226.5686	10226.5849	10226.5849
2021	8976.0	9757.6568	9757.6735	9757.6735
2022	9723.0	9310.0398	9310.0568	9310.0568
2023	9408.0	8882.8038	8882.8211	8882.8211
2025	-	8085.983	8086.0005	8086.0005
2030	-	6392.7854	6392.8029	6392.8029
2035	-	5055.9214	5055.9382	5055.9382

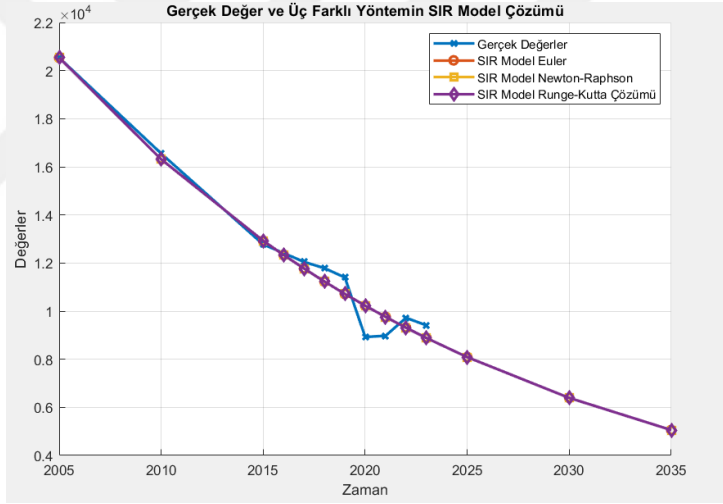
Tablo 6.2: Gerçek Değerler ile SIR Modeli Çözümleri

Yıl	Euler Hata Mik.	New. Hata Mik.	R-K Hata Mik.
2005	0.0	0.0	0.0
2010	239.7801	239.7718	239.7718
2015	-152.8206	-152.8341	-152.8341
2016	82.4171	83.4029	83.4029
2017	275.3	275.2852	275.2852
2018	553.9056	553.8901	553.8901
2019	683.2786	683.2627	683.2627
2020	-1301.5656	-1301.5686	-1301.5686
2021	-781.6568	-781.6568	-781.6568
2022	412.9602	412.9432	412.9432
2023	525.1962	525.1789	525.1789

Tablo 6.3: Gerçek Değerler ile SIR Modeli Hata Miktarı Tablosu(Gerçek Değer-Model Değer)

Yıl	Euler Hata Yüzde	New. Hata Yüzde	R-K Hata Yüzde
2005	0.0000	0.0000	0.0000
2010	1.4487	1.4486	1.4486
2015	-1.1965	-1.1966	-1.1966
2016	0.6637	0.6717	0.6717
2017	2.2854	2.2852	2.2852
2018	4.6996	4.6995	4.6995
2019	5.9931	5.9930	5.9930
2020	-14.5833	-14.5834	-14.5834
2021	-8.7082	-8.7082	-8.7082
2022	4.2472	4.2470	4.2470
2023	5.5824	5.5822	5.5822

Tablo 6.4: SIR Modeli Hata Yüzdesi Tablosu(%)



Şekil 6.10: SIR Modeli Çözümlerinin Grafiği

6.2 SEIR Modelin Nümerik Çözümleri

SEIR modelinin nümerik çözümleri yapılırken Türkiye'nin 2005'ten itibaren her yıl sağlık bakanlığı tarafından yayımlanan verem savaş raporu verileri kullanılmıştır. $N(0)$ değeri toplam popülasyonu, $E(0)$ kuluçka dönemi popülasyonunu, $R(0)$ değeri toplam nüfus içindeki toplam iyileşen sayısını ifade ederken $S(0)$ değeri de tüm popülasyondan hasta, iyileşen ve kuluçka dönemindeki popülasyon çıkarıldığında bulunur, $S(0) = N(0) - I(0) - R(0) - E(0)$.

SEIR modelin çözümünü yaparken kullanacağımız parametrelerin değerleri Tablo 6.5'de verilmiştir.

Parametre	Tanım	Değer
a	İyileşme oranı	0.938
β	Temas oranı	0.872
e	Kuluçkadan hastalığa geçiş oranı	1.428
u	Ölüm oranı(Doğal)	0.0049
$S(0)$	Hassas popülasyon başlangıç değeri	67.591.553
$E(0)$	Kuluçka dönemi popülasyonunun başlangıç değeri	14.852
$I(0)$	Hasta popülasyonunun başlangıç değeri	20.535
$R(0)$	İyileşen popülasyonun başlangıç değeri	1.230.000

Tablo 6.5: SEIR Modelinde Kullanılan Parametreler

6.2.1 SEIR Modelin Euler Çözümü

Kapalı formda yazılan SEIR denklemleri

$$\frac{dS}{dt} = f(t, S, E, I, R) \quad (39)$$

$$\frac{dE}{dt} = g(t, S, E, I, R) \quad (40)$$

$$\frac{dI}{dt} = j(t, S, E, I, R) \quad (41)$$

$$\frac{dR}{dt} = w(t, S, E, I, R) \quad (42)$$

ve başlangıç değerleri $S(0) = S_0$, $E(0) = S_0$, $I(0) = I_0$, $R(0) = R_0$ olmak üzere ele alımsın. Adım uzunluğu $h = t_{n+1} - t_n$ olarak ifade edilir.

SEIR modelin denklemleri;

$$\frac{dS}{dt} = f(t, S, E, I, R) = bN - \frac{\beta SI}{N} - uS \quad (43)$$

$$\frac{dE}{dt} = f(t, S, E, I, R) = \frac{\beta SI}{N} - eE - uE \quad (44)$$

$$\frac{dI}{dt} = g(t, S, E, I, R) = eE - uI - aI \quad (45)$$

$$\frac{dR}{dt} = j(t, S, E, I, R) = aI - uR \quad (46)$$

dikkate alımsın.

Bu denklemlere Euler yöntemi şu şekilde uygulanır:

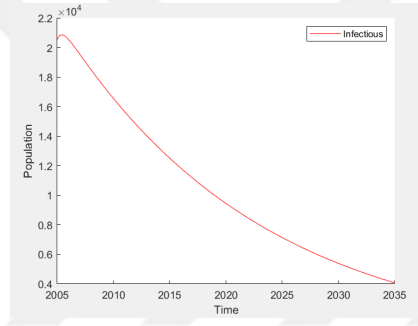
$$S_{n+1} = S_n + h(bN - \frac{\beta S_n I_n}{N} - uS_n)$$

$$E_{n+1} = E_n + h(\frac{\beta S_n I_n}{N} - eE_n - uE_n)$$

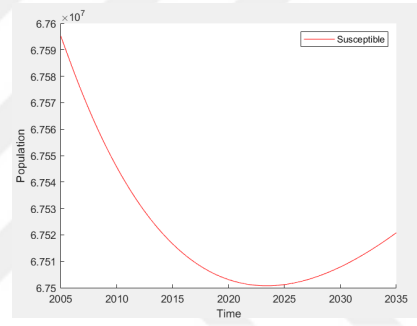
$$I_{n+1} = I_n + h(eE_n - uI_n - aI_n)$$

$$R_{n+1} = R_n + h(aI_n - uR_n)$$

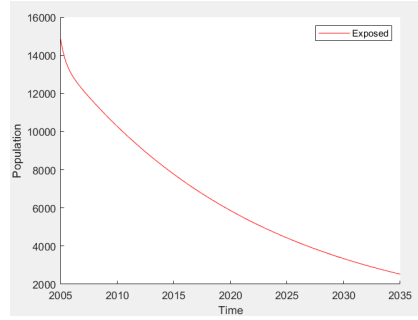
MATLAB R2024a ortamında çözüldüğünde Şekil 6.11, Şekil 6.12, Şekil 6.13, Şekil 6.14 grafikleri elde edilir.



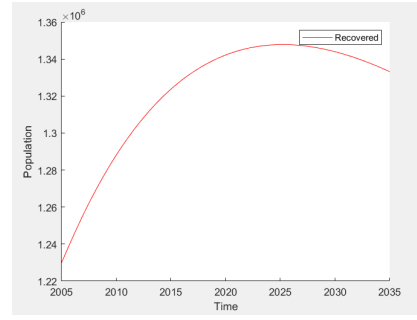
Şekil 6.11: SEIR Model Euler Çözümü (I)



Şekil 6.12: SEIR Model Euler Çözümü (S)



Şekil 6.13: SEIR Model Euler Çözümü (E)



Şekil 6.14: SEIR Model Euler Çözümü (R)

6.2.2 SEIR Modelin İki Adımlı Şema (Implicit Two-Step Schema) ve Newton Yöntemi ile Çözümü

SEIR modelinin ilk denklemini ele alalım:

$$\frac{dS}{dt} = bN - \frac{\beta SI}{N} - uS$$

ve diskrezyasyon uygulansın:

$$\frac{S_{n+1} - S_{n-1}}{2\Delta t} = bN - \frac{\beta}{N} \left(\frac{S_{n+1} + S_{n-1}}{2} \right) \left(\frac{I_{n+1} + I_{n-1}}{2} \right) - u \left(\frac{S_{n+1} + S_{n-1}}{2} \right)$$

Yukarıdaki denklemin terimleri bir tarafta toplanır ve F_1 olarak yazılır:

$$F_1 = 2bN\Delta t - \frac{\beta\Delta t}{2N} (S_{n+1}I_{n+1} + S_{n+1}I_{n-1} + S_{n-1}I_{n+1} + S_{n-1}I_{n-1}) - u\Delta t(S_{n+1} + S_{n-1}) - S_{n+1} + S_{n-1} = 0$$

Şimdi ikinci denklem ele alınsın:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\beta SI}{N} - eE - uE$$

ve diskrezyasyon uygulansın.

$$\frac{E_{n+1} - E_{n-1}}{2\Delta t} = \frac{\beta}{N} \left(\frac{S_{n+1} + S_{n-1}}{2} \right) \left(\frac{I_{n+1} + I_{n-1}}{2} \right) - e \left(\frac{E_{n+1} + E_{n-1}}{2} \right) - u \left(\frac{E_{n+1} + E_{n-1}}{2} \right)$$

Bu denklemdeki terimler de bir tarafta toplanır ve F_2 olarak ifade edilsin:

$$F_2 = \frac{\beta\Delta t}{2N} (S_{n+1}I_{n+1} + S_{n+1}I_{n-1} + S_{n-1}I_{n+1} + S_{n-1}I_{n-1}) - e\Delta t(E_{n+1} + E_{n-1}) - u\Delta t(E_{n+1} + E_{n-1}) - E_{n+1} + E_{n-1} = 0$$

Üçüncü denklem ele alınsın

$$\frac{dI}{dt} = eE - uI - aI$$

ve diskrezyasyon uygulansın:

$$\frac{I_{n+1} - I_{n-1}}{2\Delta t} = e \left(\frac{E_{n+1} + E_{n-1}}{2} \right) - u \left(\frac{I_{n+1} + I_{n-1}}{2} \right) - a \left(\frac{I_{n+1} + I_{n-1}}{2} \right)$$

Yine terimler bir tarafta toplansın ve F_3 olarak isimlendirilsin:

$$F_3 = e\Delta t(E_{n+1} + E_{n-1}) - u\Delta t(I_{n+1} + I_{n-1}) - a\Delta t(I_{n+1} + I_{n-1}) - I_{n+1} + I_{n-1} = 0$$

Son olarak

$$\frac{dR}{dt} = aI - uR$$

denkleminin diskretizasyonu:

$$\frac{R_{n+1} - R_{n-1}}{2\Delta t} = a\left(\frac{I_{n+1} + I_{n-1}}{2}\right) - u\left(\frac{R_{n+1} + R_{n-1}}{2}\right)$$

Bu denklemindeki terimlerde diğerlerinde olduğu gibi bir tarafta toplanır ve F_4 olarak adlandırılır:

$$F_4 = a\Delta t(I_{n+1} + I_{n-1}) - u\Delta t(R_{n+1} + R_{n-1}) - R_{n+1} + R_{n-1} = 0$$

Newton yöntemi çözüm adımlarından devam edelim. Fonksiyonlar matrisini oluşturup Jakobien matrisini bulalım.

$F(S, E, I, R)$ fonksiyonlar matrisi aşağıdaki gibidir.

$$\begin{bmatrix} 2bN\Delta t - \frac{\beta\Delta t}{2N}(S_{n+1}I_{n+1} + S_{n+1}I_{n-1} + S_{n-1}I_{n+1} + S_{n-1}I_{n-1}) - u\Delta t(S_{n+1} + S_{n-1}) - S_{n+1} + S_{n-1} \\ \frac{\beta\Delta t}{2N}(S_{n+1}I_{n+1} + S_{n+1}I_{n-1} + S_{n-1}I_{n+1} + S_{n-1}I_{n-1}) - e\Delta t(E_{n+1} + E_{n-1}) - u\Delta t(E_{n+1} + E_{n-1}) - E_{n+1} + E_{n-1} \\ e\Delta t(E_{n+1} + E_{n-1}) - u\Delta t(I_{n+1} + I_{n-1}) - a\Delta t(I_{n+1} + I_{n-1}) - I_{n+1} + I_{n-1} \\ a\Delta t(I_{n+1} - I_{n-1}) - u\Delta t(R_{n+1} - R_{n-1}) - R_{n+1} + R_{n-1} \end{bmatrix}$$

F_1, F_2, F_3, F_4 fonksiyonlarının kısmi türevlerini bulalım. MATLAB R2024a üzerinden çözüm yapılacağından $n + 1$ zamanı 1, $n - 1$ zamanı ise 0 alınarak kısmi türevlere yazılmıştır.

$$\begin{aligned} \frac{dF_1}{dS} &= -\frac{\beta\Delta t}{2L}(I_1 + I_0) - u\Delta t - 1 & \frac{dF_1}{dE} &= 0 \\ \frac{dF_1}{dI} &= -\frac{\beta\Delta t}{2L}(S_1 + S_0) & \frac{dF_1}{dR} &= 0 \\ \frac{dF_2}{dS} &= -\frac{\beta\Delta t}{2L}(I_1 + I_0) & \frac{dF_2}{dE} &= -e\Delta t - u\Delta t - 1 \\ \frac{dF_2}{dI} &= -\frac{\beta\Delta t}{2L}(S_1 + S_0) & \frac{dF_2}{dR} &= 0 \\ \frac{dF_3}{dS} &= 0 & \frac{dF_3}{dE} &= e\Delta t \\ \frac{dF_3}{dI} &= -u\Delta t - a\Delta t - 1 & \frac{dF_3}{dR} &= 0 \\ \frac{dF_4}{dS} &= 0 & \frac{dF_4}{dE} &= 0 \\ \frac{dF_4}{dI} &= a\Delta t & \frac{dF_4}{dR} &= -u\Delta t - 1 \end{aligned}$$

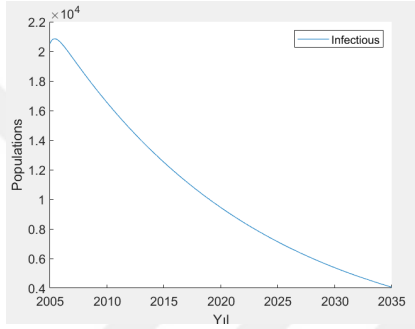
Bu kısmi türevleri Jakobien matrisinde yerine yazalım.

$$J(x) = \begin{bmatrix} -\frac{\beta\Delta t}{2N}(I_1 + I_0) - u\Delta t - 1 & 0 & -\frac{\beta\Delta t}{2N}(S_1 + S_0) & 0 \\ -\frac{\beta\Delta t}{2N}(I_1 + I_0) & -e\Delta t - u\Delta t - 1 & -\frac{\beta\Delta t}{2N}(S_1 + S_0) & 0 \\ 0 & e\Delta t & -u\Delta t - a\Delta t - 1 & 0 \\ 0 & e\Delta t & & -u\Delta t - 1 \end{bmatrix}$$

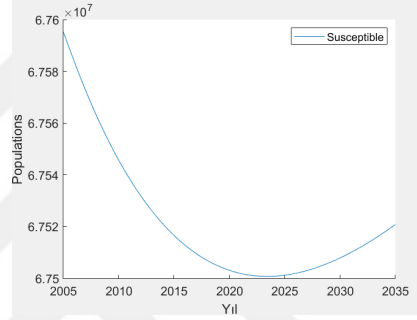
Jakobien matrisi bulunduktan sonra MATLAB R2024a programı üzerinden aşağıdaki formül kullanılarak çözüm yapılacaktır.

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} - J(x)^{(-1)}F(S, E, I, R)$$

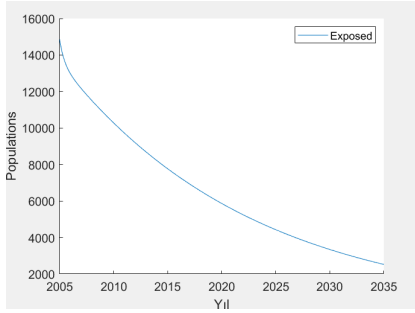
MATLAB R2024a programından çözüm yapıldığında Şekil 6.15, Şekil 6.16, Şekil 6.17, Şekil 6.18 grafikleri elde edilir.



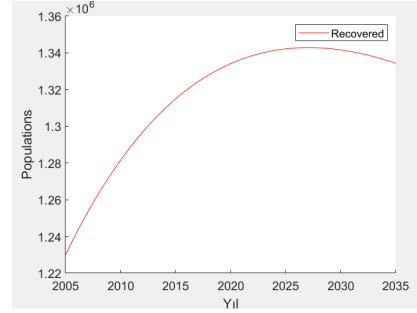
Şekil 6.15: SEIR Model Newton Çözümü (I)



Şekil 6.16: SEIR Model Newton Çözümü (S)



Şekil 6.17: SEIR Model Newton Çözümü (E)



Şekil 6.18: SEIR Model Newton Çözümü (R)

6.2.3 SEIR Modelin Runge-Kutta ile Çözümü

Tüberküloz hastalığının yayılmasını ifade eden SEIR modeli denklemleri kapalı formda şu şekilde yazılır:

$$\frac{dS}{dt} = f(t, S, E, I, R) \quad (47)$$

$$\frac{dE}{dt} = g(t, S, E, I, R) \quad (48)$$

$$\frac{dI}{dt} = j(t, S, E, I, R) \quad (49)$$

$$\frac{dI}{dt} = w(t, S, E, I, R) \quad (50)$$

Bu denklemler dördüncü mertebeden Runge-Kutta yöntemi kullanılarak çözüldüğünde aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$\begin{aligned} S_{r+1} &= S_r + \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) h \\ E_{r+1} &= E_r + \frac{1}{6} (n_1 + 2n_2 + 2n_3 + n_4) h \\ I_{r+1} &= I_r + \frac{1}{6} (l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4) h \\ R_{r+1} &= R_r + \frac{1}{6} (m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4) h \end{aligned}$$

Burada h zaman adımdır. Yukarıda yer alan $i = 1, 2, 3, 4$ için k_i, n_i, l_i, m_i değerleri şu şekilde hesaplanır:

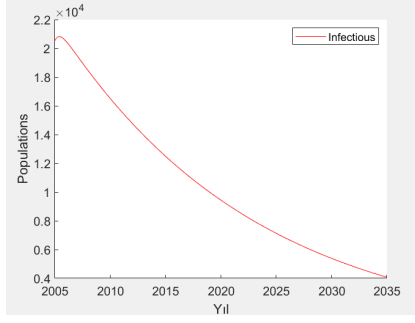
$$\begin{aligned} k_1 &= bN - \frac{\beta S_r I_r}{N} - u S_r, \\ n_1 &= \frac{\beta S_r I_r}{N} - e E_r - u E_r, \\ l_1 &= e E_r - a I_r - u I_r, \\ m_1 &= a I_r - u R_r, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_2 &= bN - \frac{\beta}{N} (S_r + k_1 \frac{h}{2}) (I_r + l_1 \frac{h}{2}) - u (S_r + k_1 \frac{h}{2}), \\ n_2 &= \frac{\beta}{N} (S_r + k_1 \frac{h}{2}) (I_r + l_1 \frac{h}{2}) - e (E_r + n_1 \frac{h}{2}) - u (E_r + n_1 \frac{h}{2}) \\ l_2 &= e (E_r + n_1 \frac{h}{2}) - a (I_r + l_1 \frac{h}{2}) - u (I_r + l_1 \frac{h}{2}) \\ m_2 &= a (I_r + l_1 \frac{h}{2}) - u (I_r + l_1 \frac{h}{2}) \end{aligned}$$

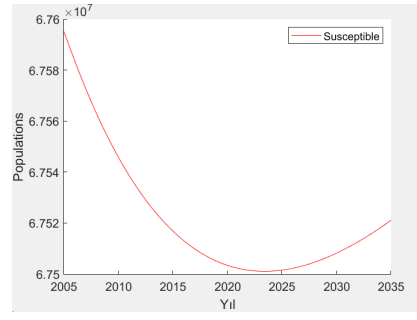
$$\begin{aligned} k_3 &= bN - \frac{\beta}{N} (S_r + k_2 \frac{h}{2}) (I_r + l_2 \frac{h}{2}) - u (S_r + k_2 \frac{h}{2}), \\ n_3 &= \frac{\beta}{N} (S_r + k_2 \frac{h}{2}) (I_r + l_2 \frac{h}{2}) - e (E_r + n_2 \frac{h}{2}) - u (E_r + n_2 \frac{h}{2}) \\ l_3 &= e (E_r + n_2 \frac{h}{2}) - a (I_r + l_2 \frac{h}{2}) - u (I_r + l_2 \frac{h}{2}) \\ m_3 &= a (I_r + l_2 \frac{h}{2}) - u (I_r + l_2 \frac{h}{2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_4 &= bN - \frac{\beta}{N} (S_r + k_3 \frac{h}{2}) (I_r + l_3 \frac{h}{2}) - u (S_r + k_3 \frac{h}{2}), \\ n_4 &= \frac{\beta}{N} (S_r + k_3 \frac{h}{2}) (I_r + l_3 \frac{h}{2}) - e (E_r + n_3 \frac{h}{2}) - u (E_r + n_3 \frac{h}{2}) \\ l_4 &= e (E_r + n_3 \frac{h}{2}) - a (I_r + l_3 \frac{h}{2}) - u (I_r + l_3 \frac{h}{2}) \\ m_4 &= a (I_r + l_3 \frac{h}{2}) - u (I_r + l_3 \frac{h}{2}) \end{aligned}$$

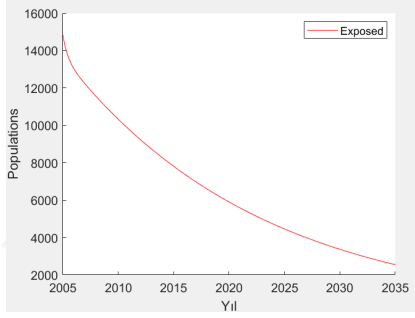
Tüberkülozun yayılmasına dair SEIR modelin çözümüdür. Bu verileri MATLAB R2024a ortamında kod şeklinde yazıp denklemin çözümünü yaptığımızda Şekil 6.19, Şekil 6.20, Şekil 6.21, Şekil 6.22 grafikleri elde edilir.



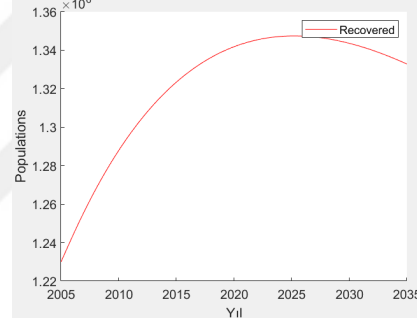
Şekil 6.19: SEIR Model Runge-Kutta Çözümü (I)



Şekil 6.20: SEIR Model Runge-Kutta Çözümü (S)



Şekil 6.21: SEIR Model Runge-Kutta Çözümü (E)



Şekil 6.22: SEIR Model Runge-Kutta Çözümü (R)

6.2.4 SEIR Modelin Nümerik Çözümlerinin Sonuçları

SEIR model için nümerik çözümlerinin sonuçları Tablo 6.6'yı incelediğimizde birbirlerine çok yakın hatta hemen hemen aynı olduğu görülür. Newton metodu ve Runge-Kutta metodu karşılaştırıldığında çözümlerin on binde birler basamağına kadar aynı sonuçlar verdiğini görüyoruz. Tablo 6.7'ye baktığımızda hatanın en çok olduğu 2023 yılında, vaka sayısı yuvarlandığında +1431 kişi iken en çok hata değişiminin 2019-2020 arasında olduğu göze çarpmaktadır./ Sadece 2020 yılındaki değişim negatif olarak bulundu./ Covid etkisi göze çarpmaktadır. Parametreleri yerine koyup daha önce bulduğumuz Temel Üreme Oranı R_0 formülünün değerini hesaplayalım.

$$\frac{\beta e}{(a + u)(e + u)} = 0.9216 < 1$$

R_0 değeri 1'den küçük olduğundan hastalığın zamanla yok olacağı söylenebilir.

Yıl	Gerçek Vaka Sayısı	Euler SEIR	New. SEIR	R-K SEIR
2005	20535.0	20535.0	20535.0	20535.0
2010	16551.0	16543.88	16543.8926	16543.8926
2015	12772.0	12504.2917	12504.311	12504.311
2016	12417.0	11821.9239	11821.944	11821.944
2017	12046.0	11176.4568	11176.4775	11176.4775
2018	11786.0	10565.9624	10565.9838	10565.9838
2019	11401.0	9988.6048	9988.6266	9988.6266
2020	8925.0	9442.6359	9442.658	9442.658
2021	8976.0	8926.3928	8926.4151	8926.4151
2022	9723.0	8438.2945	8438.3169	8438.3169
2023	9408.0	7976.8384	7976.861	7976.861
2025	-	7128.2169	7128.2393	7128.2393
2030	-	5381.465	5381.4862	5381.4862
2035	-	4064.2767	4064.296	4064.296

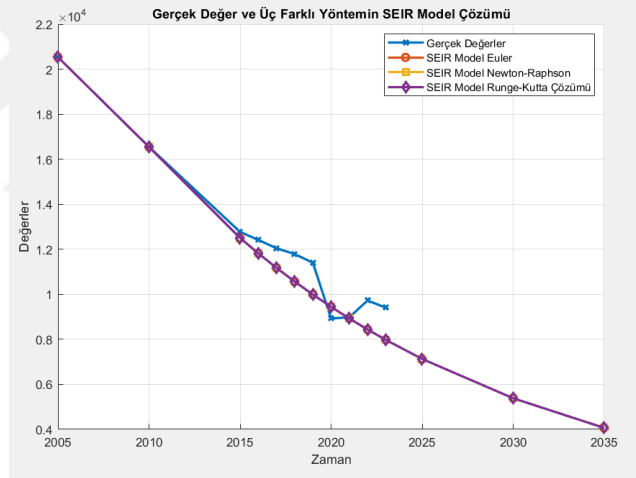
Tablo 6.6: SEIR Model İçin Gerçek Değerler ile Nümerik Sonuçlar

Yıl	Euler Hata Miktarı	New. Hata Miktarı	R-K Hata Miktarı
2005	0	0	0
2010	7.12	7.104	7.104
2015	267.7083	267.689	267.689
2016	595.0761	595.056	595.056
2017	869.5432	869.5225	869.5225
2018	1220.0376	1220.0162	1220.0162
2019	1412.3952	1412.3734	1412.3734
2020	-517.6359	-517.658	-517.658
2021	49.7055	49.5849	49.5849
2022	1284.7055	1284.6831	1284.6831
2023	1431.1616	1431.139	1431.139

Tablo 6.7: SEIR Model İçin Gerçek Değer ile Nümerik Sonuçların Hata Tablosu

Yıl	Euler Hata Yüzde	New. Hata Yüzde	R-K Hata Yüzde
2005	0.000	0.000	0.000
2010	0.0430	0.0429	0.0429
2015	2.0960	2.0959	2.0959
2016	4.7924	4.7922	4.7922
2017	7.2185	7.2183	7.2183
2018	10.3515	10.3514	10.3514
2019	12.3883	12.3881	12.3881
2020	-5.7998	-5.8	-5.8
2021	0.5537	0.5524	0.5524
2022	13.2130	13.2128	13.2128
2023	15.2121	15.2119	15.2119

Tablo 6.8: SEIR Modeli Hata Yüzdesi Tablosu(%)



Şekil 6.23: SEIR Modelin Nümerik Çözümlerinin Grafiği

6.3 BSEIR Modelin Nümerik Çözümleri

SIR ve SEIR modellerinde I , E ve R sınıflarının başlangıç değerleri belirlenmişti. B aşılana nüfusun başlangıç değeri ise TÜİK tarafından yayınlanan yenidoğan nüfusu dikkate alınarak belirlenmiştir. $S(0)$ değeri $S(0) = N(0) - B(0) - I(0) - R(0) - E(0)$ eşitliğinde görüldüğü gibi tüm popülasyondan hasta, iyileşen, aşılana ve kuluçka dönemindeki popülasyon çıkarıldığında 63.095.153 olarak bulunmuştur. Bu modelde doğum ve ölüm oranı eşit olmadığından toplam nüfusun sabit olmadığı görülmektedir. Sağlık istatistiklerindeki verilerden doğum oranı $b=0.01737$ olduğundan bir yılda popülasyona eklenen birey sayısı $n = Nb$ olarak hesaplandığında $n = 1.280.806$

olarak alınmıştır. Bu konuda doktora tezi çalışması verileri dikkate alınmıştır [39].

BSEIR modelin çözümünü yaparken kullanacağımız parametrelerin değerleri Tablo 6.9'da verilmiştir.

Parametre	Tanım	Değer
a	İyileşme oranı	0.935
β	Temas oranı	0.955
d	Hastalığa bağlı ölüm oranı	0.03
e	Kuluçka döneminden hastalığa geçiş oranı	1.435
k	Aşının etkisini yitirme oranı	0.054
p	Başarılı aşılama oranı	0.948
u	Ölüm oranı(Doğal)	0.0049
$B(0)$	Aşılanan popülasyonun başlangıç değeri	4.500.000
$S(0)$	Hassas popülasyon başlangıç değeri	63.095.153
$E(0)$	Kuluçka dönemi popülasyonunun başlangıç değeri	14.852
$I(0)$	Hasta popülasyonunun başlangıç değeri	20.535
$R(0)$	İyileşen popülasyonun başlangıç değeri	1.230.000

Tablo 6.9: BSEIR Modelinde Kullanılan Parametreler

6.3.1 BSEIR Modelin Euler ile Çözümü

BSEIR modelin kapalı formu

$$\frac{dB}{dt} = f(t, B, S, E, I, R) \quad (51)$$

$$\frac{dS}{dt} = g(t, B, S, E, I, R) \quad (52)$$

$$\frac{dE}{dt} = j(t, B, S, E, I, R) \quad (53)$$

$$\frac{dI}{dt} = w(t, B, S, E, I, R) \quad (54)$$

$$\frac{dR}{dt} = q(t, B, S, E, I, R) \quad (55)$$

başlangıç değerleri $B(0) = B_0$, $S(0) = S_0$, $E(0) = S_0$, $I(0) = I_0$, $R(0) = R_0$ ile ele alınsın. Adım uzunluğu $h = t_{n+1} - t_n$ olarak alınsın. Bu kapalı forma Euler yöntemi şu şekilde uygulanır:

$$B_{n+1} = B_n + hf(t_n, B_n, S_n, E_n, I_n, R_n)$$

$$\begin{aligned}
S_{n+1} &= S_n + hg(t_n, B_n, S_n, E_n, I_n, R_n) \\
E_{n+1} &= E_n + hj(t_n, B_n, S_n, E_n, I_n, R_n) \\
I_{n+1} &= I_n + hw(t_n, B_n, S_n, E_n, I_n, R_n) \\
R_{n+1} &= R_n + hq(t_n, B_n, S_n, E_n, I_n, R_n)
\end{aligned}$$

BSEIR modeli denklemlerini hatırlayalım.

$$\frac{dB}{dt} = f(t, B, S, E, I, R) = np - kB \quad (56)$$

$$\frac{dS}{dt} = g(t, B, S, E, I, R) = kB + n(1-p) - \frac{\beta SI}{N} - uS \quad (57)$$

$$\frac{dE}{dt} = j(t, B, S, E, I, R) = \frac{\beta SI}{N} - (e+u)E \quad (58)$$

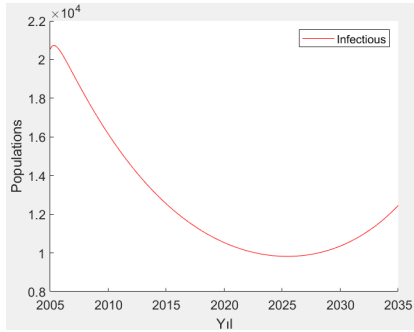
$$\frac{dI}{dt} = w(t, B, S, E, I, R) = eE - (a+u+d)I \quad (59)$$

$$\frac{dR}{dt} = q(t, B, S, E, I, R) = aI - uR \quad (60)$$

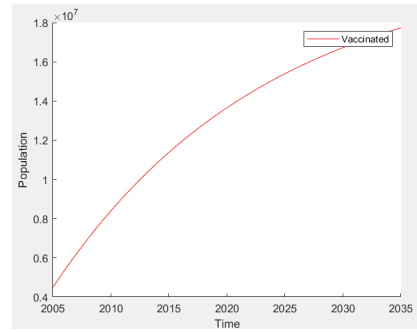
BSEIR modeli denklemlerine Euler yöntemi şu şekilde uygulanır.

$$\begin{aligned}
B_{n+1} &= B_n + h(np - kB_n) \\
S_{n+1} &= S_n + h(kB_n + n(1-p) - \frac{\beta S_n I_n}{N} - uS_n) \\
E_{n+1} &= E_n + h(\frac{\beta S_n I_n}{N} - (e+u)E_n) \\
I_{n+1} &= I_n + h(eE_n - (a+u+d)I_n) \\
R_{n+1} &= R_n + h(aI_n - uR_n)
\end{aligned}$$

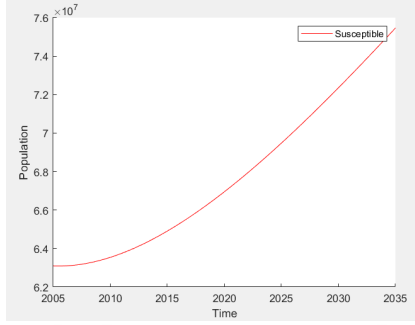
MATLAB R2024a programında denklemler çözüldüğünde Şekil 6.24, Şekil 6.25, Şekil 6.26, Şekil 6.27, Şekil 6.28 grafikleri elde edilir.



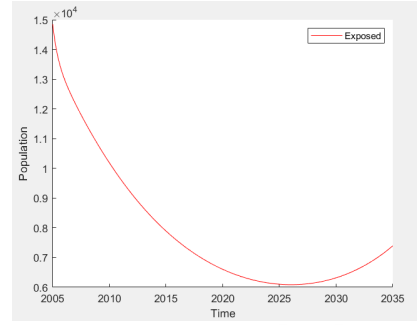
Şekil 6.24: BSEIR Model Euler Çözümü (I)



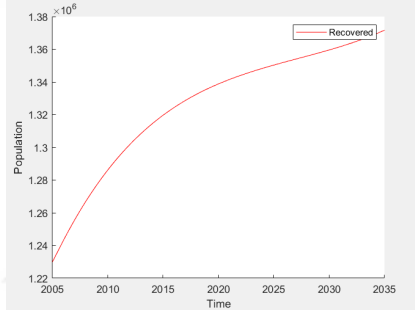
Şekil 6.25: BSEIR Model Euler Çözümü (B)



Şekil 6.26: BSEIR Model Euler Çözümü (S)



Şekil 6.27: BSEIR Model Euler Çözümü (E)



Şekil 6.28: BSEIR Model Euler Çözümü (R)

6.3.2 BSEIR Modelin İki Adımlı Şema (Implicit Two-Step Schema) ve Newton Yöntemi ile Çözümü

BSEIR modelinin ilk denklemine

$$\frac{dB}{dt} = np - kB$$

yöntemi uygulayalım.

$$\frac{B_{n+1} - B_{n-1}}{2\Delta t} = np - k\left(\frac{B_{n+1} + B_{n-1}}{2}\right)$$

Buradan terimler bir tarafa toplanır ve F_1 olarak adlandırılır. $F_1 = 2np\Delta t - k\Delta t(B_{n+1} + B_{n-1}) - B_{n+1} + B_{n-1} = 0$

İkinci denklem göz önüne alınsın:

$$\frac{dS}{dt} = kB + n(1-p) - \frac{\beta SI}{N} - uS$$

denklemine yöntemi uygulayalım.

$$\frac{S_{n+1} - S_{n-1}}{2\Delta t} = k\left(\frac{B_{n+1} + B_{n-1}}{2}\right) + n(1-p) - \frac{\beta}{N}\left(\frac{S_{n+1} + S_{n-1}}{2}\right)\left(\frac{I_{n+1} + I_{n-1}}{2}\right) - u\left(\frac{S_{n+1} + S_{n-1}}{2}\right)$$

Önceki denklemde olduğu gibi terimler bir tarafta toplanılır ve F_2 olarak adlandırılır.

$$F_2 = k\Delta t(B_{n+1} + B_{n-1}) + 2\Delta t n(1-p) - \frac{\beta\Delta t}{2N}(S_{n+1}I_{n+1} + S_{n+1}I_{n-1} + S_{n-1}I_{n+1} + S_{n-1}I_{n-1}) - u\Delta t(S_{n+1} + S_{n-1}) - S_{n+1} + S_{n-1} = 0$$

Şimdi de benzer işlemler üçüncü denkleme uygulansın.

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\beta SI}{N} - (e + u)E$$

$$\frac{E_{n+1} - E_{n-1}}{2\Delta t} = \frac{\beta}{N}\left(\frac{S_{n+1} + S_{n-1}}{2}\right)\left(\frac{I_{n+1} + I_{n-1}}{2}\right) - (e + u)\left(\frac{E_{n+1} + E_{n-1}}{2}\right)$$

Buradan terimler F_3 olarak adlandırılır.

$$F_3 = \frac{\beta\Delta t}{2N}(S_{n+1}I_{n+1} + S_{n+1}I_{n-1} + S_{n-1}I_{n+1} + S_{n-1}I_{n-1}) - (e+u)\Delta t(E_{n+1} + E_{n-1}) - E_{n+1} + E_{n-1} = 0$$

Dördüncü denklem dikkate alınsın

$$\frac{dI}{dt} = eE - (a + u + d)I$$

$$\frac{I_{n+1} - I_{n-1}}{2\Delta t} = e\left(\frac{E_{n+1} + E_{n-1}}{2}\right) - (a + u + d)\left(\frac{I_{n+1} + I_{n-1}}{2}\right)$$

Ve terimleri bir tarafta toplayalım F_4 diyelim.

$$F_4 = e\Delta t(E_{n+1} + E_{n-1}) - (a + u + d)\Delta t(I_{n+1} - I_{n-1}) - I_{n+1} + I_{n-1} = 0$$

Son denklem dikkate alınsın ve yöntem uygulansın.

$$\frac{dR}{dt} = aI - uR$$

$$\frac{R_{n+1} - R_{n-1}}{2\Delta t} = a\left(\frac{I_{n+1} + I_{n-1}}{2}\right) - u\left(\frac{R_{n+1} + R_{n-1}}{2}\right)$$

Burada da F_4 olarak ifade edilsin.

$$F_5 = a\Delta t(I_{n+1} + I_{n-1}) - u\Delta t(R_{n+1} - R_{n-1}) - R_{n+1} + R_{n-1} = 0$$

Newton yöntemi çözüm adımlarına fonksiyonlar matrisini oluşturup Jakobien(J) matrisini bularak devam ediyoruz. $F(B, S, E, I, R)$ fonksiyonlar matrisi aşağıdaki gibidir.

$$\begin{bmatrix} 2np\Delta t - k\Delta t(B_{n+1} + B_{n-1}) - B_{n+1} + B_{n-1} \\ k\Delta t(B_{n+1} + B_{n-1}) + 2\Delta tn(1-p) - \frac{\beta\Delta t}{2N}(S_{n+1}I_{n+1} + S_{n+1}I_{n-1} + S_{n-1}I_{n+1} + S_{n-1}I_{n-1}) - u\Delta t(S_{n+1} + S_{n-1}) - S_{n+1} + S_{n-1} \\ \frac{\beta\Delta t}{2N}(S_{n+1}I_{n+1} + S_{n+1}I_{n-1} + S_{n-1}I_{n+1} + S_{n-1}I_{n-1}) - (e+u)\Delta t(E_{n+1} + E_{n-1}) - E_{n+1} + E_{n-1} \\ e\Delta t(E_{n+1} + E_{n-1}) - (a+u+d)\Delta t(I_{n+1} - I_{n-1}) - I_{n+1} + I_{n-1} \\ a\Delta t(I_{n+1} + I_{n-1}) - u\Delta t(R_{n+1} - R_{n-1}) - R_{n+1} + R_{n-1} \end{bmatrix}$$

F_1, F_2, F_3, F_4, F_5 fonksiyonlarının kısmi türevlerini bulalım. MATLAB R2024a üzerinden çözüm yapılacağından $n+1$ zamanı 1, $n-1$ zamanı ise 0 alınarak kısmi türevlere yazılmıştır.

$$\begin{aligned} \frac{dF_1}{dB} &= -k\Delta t - 1 & \frac{dF_1}{dS} &= 0 \\ \frac{dF_1}{dE} &= 0 & \frac{dF_1}{dI} &= 0 \\ \frac{dF_1}{dR} &= 0 & \frac{dF_2}{dB} &= k\Delta t \\ \frac{dF_2}{dS} &= -\frac{\beta\Delta t}{2N}(I_1 + I_0) - u\Delta t - 1 & \frac{dF_2}{dE} &= 0 \\ \frac{dF_2}{dI} &= -\frac{\beta\Delta t}{2N}(S_1 + S_0) & \frac{dF_2}{dR} &= 0 \\ \frac{dF_3}{dB} &= 0 & \frac{dF_3}{dS} &= \frac{\beta\Delta t}{2N}(I_1 + I_0) \\ \frac{dF_3}{dE} &= -(e+u)\Delta t - 1 & \frac{dF_3}{dI} &= \frac{\beta\Delta t}{2N}(S_1 + S_0) \\ \frac{dF_3}{dR} &= 0 & \frac{dF_4}{dB} &= 0 \\ \frac{dF_4}{dS} &= 0 & \frac{dF_4}{dE} &= e\Delta t \\ \frac{dF_4}{dI} &= -(a+u+d)\Delta t - 1 & \frac{dF_4}{dR} &= 0 \\ \frac{dF_5}{dB} &= 0 & \frac{dF_5}{dS} &= 0 \\ \frac{dF_5}{dE} &= 0 & \frac{dF_5}{dI} &= a\Delta t \\ \frac{dF_5}{dR} &= -u\Delta t - 1 \end{aligned}$$

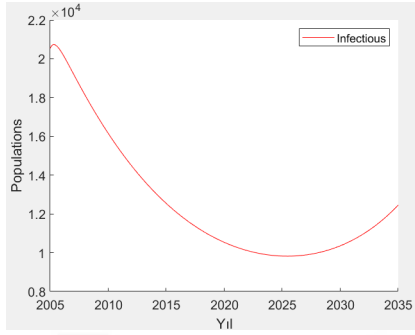
Jakobien matrisi($J(x)$) oluşturalım.

$$\begin{bmatrix} -k\Delta t - 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k\Delta t & -\frac{\beta\Delta t}{2N}(I_1 + I_0) - u\Delta t - 1 & 0 & -\frac{\beta\Delta t}{2N}(S_1 + S_0) & 0 \\ 0 & \frac{\beta\Delta t}{2N}(I_1 + I_0) & -e\Delta t - u\Delta t - 1 & \frac{\beta\Delta t}{2N}(S_1 + S_0) & 0 \\ 0 & 0 & e\Delta t & -(a+u+d)\Delta t - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a\Delta t & -u\Delta t - 1 \end{bmatrix}$$

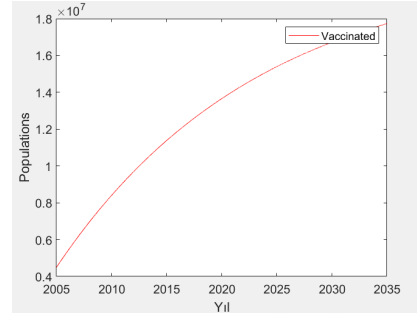
Jakobien matrisi bulunduktan sonra MATLAB R2024a programı üzerinden aşağıdaki formül kullanılarak çözüm yapılacaktır.

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} - J(x)^{(-1)}F(B, S, E, I, R)$$

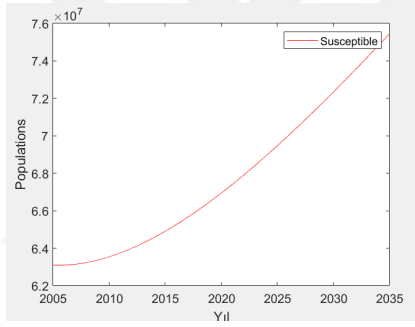
MATLAB R2024a programından çözüm yapıldığında Şekil 6.29, Şekil 6.30, Şekil 6.31, Şekil 6.32, Şekil 6.33 grafikleri elde edilir.



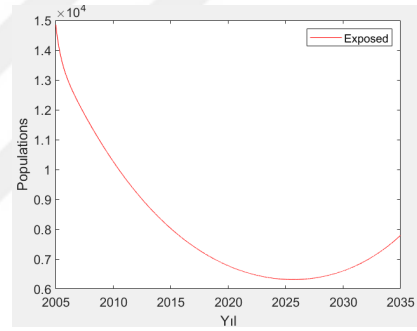
Şekil 6.29: BSEIR Model New. Çözümü (I)



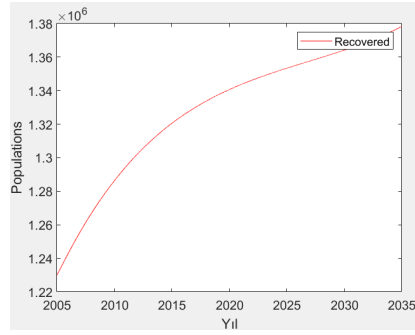
Şekil 6.30: BSEIR Model New. Çözümü (B)



Şekil 6.31: BSEIR Model New. Çözümü (S)



Şekil 6.32: BSEIR Model New. Çözümü (E)



Şekil 6.33: BSEIR Model New. Çözümü (R)

6.3.3 BSEIR Modelin Runge-Kutta ile Çözümü

Tüberküloz hastalığının yayılmasını modelleyen BSEIR modelindeki denklemler kapalı formda aşağıda yazılmıştır.

$$\frac{dB}{dt} = f(t, B, S, E, I, R) \quad (61)$$

$$\frac{dS}{dt} = g(t, B, S, E, I, R) \quad (62)$$

$$\frac{dE}{dt} = j(t, B, S, E, I, R) \quad (63)$$

$$\frac{dI}{dt} = w(t, B, S, E, I, R) \quad (64)$$

$$\frac{dR}{dt} = q(t, B, S, E, I, R) \quad (65)$$

Bu denklemler dördüncü mertebeden Runge-Kutta yöntemi kullanılarak çözüldüğünde aşağıdaki denklemler elde edilmiştir.

$$\begin{aligned} B_{r+1} &= B_r + \frac{1}{6} (c_1 + 2c_2 + 2c_3 + c_4) h \\ S_{r+1} &= S_r + \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) h \\ E_{r+1} &= E_r + \frac{1}{6} (n_1 + 2n_2 + 2n_3 + n_4) h \\ I_{r+1} &= I_r + \frac{1}{6} (l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4) h \\ R_{r+1} &= R_r + \frac{1}{6} (m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4) h \end{aligned}$$

Burada h zaman adımdır. Formülde yer alan sabitler şu şekilde hesaplanır:

$$\begin{aligned} c_1 &= np - kB_r, \\ k_1 &= kB_r + n(1-p) - \frac{\beta S_r I_r}{N} - uS_r, \\ n_1 &= \frac{\beta S_r I_r}{N} - (e+u)E_r, \\ l_1 &= eE_r - (a+u+d)I_r, \\ m_1 &= aI_r - uR_r, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_2 &= np - k(B_r + c_1 \frac{h}{2}), \\ k_2 &= k(B_r + c_1 \frac{h}{2}) + n(1-p) - \frac{\beta}{N} (S_r + k_1 \frac{h}{2}) (I_r + l_1 \frac{h}{2}) - u(S_r + k_1 \frac{h}{2}), \\ n_2 &= \frac{\beta}{N} (S_r + k_1 \frac{h}{2}) (I_r + l_1 \frac{h}{2}) - e(E_r + n_1 \frac{h}{2}) - u(E_r + n_1 \frac{h}{2}) \\ l_2 &= e(E_r + n_1 \frac{h}{2}) - a(I_r + l_1 \frac{h}{2}) - u(I_r + l_1 \frac{h}{2}) \\ m_2 &= a(I_r + l_1 \frac{h}{2}) - u(I_r + l_1 \frac{h}{2}) \end{aligned}$$

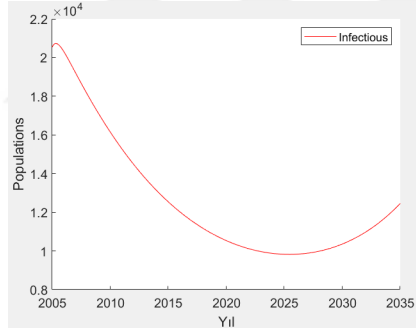
$$\begin{aligned} c_3 &= np - k(B_r + c_2 \frac{h}{2}), \\ k_3 &= k(B_r + c_2 \frac{h}{2}) + n(1-p) - \frac{\beta}{N} (S_r + k_2 \frac{h}{2}) (I_r + l_2 \frac{h}{2}) - u(S_r + k_2 \frac{h}{2}), \\ n_3 &= \frac{\beta}{N} (S_r + k_2 \frac{h}{2}) (I_r + l_2 \frac{h}{2}) - e(E_r + n_2 \frac{h}{2}) - u(E_r + n_2 \frac{h}{2}) \\ l_3 &= e(E_r + n_2 \frac{h}{2}) - a(I_r + l_2 \frac{h}{2}) - u(I_r + l_2 \frac{h}{2}) \\ m_3 &= a(I_r + l_2 \frac{h}{2}) - u(I_r + l_2 \frac{h}{2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_4 &= np - k(B_r + c_3 \frac{h}{2}), \\
k_4 &= k(B_r + c_3 \frac{h}{2}) + n(1 - p) - \frac{\beta}{N} (S_r + k_3 \frac{h}{2}) (I_r + l_3 \frac{h}{2}) - u (S_r + k_3 \frac{h}{2}), \\
n_4 &= \frac{\beta}{N} (S_r + k_3 \frac{h}{2}) (I_r + l_3 \frac{h}{2}) - e(E_r + n_3 \frac{h}{2}) - u(E_r + n_3 \frac{h}{2}) \\
l_4 &= e(E_r + n_3 \frac{h}{2}) - a(I_r + l_3 \frac{h}{2}) - u(I_r + l_3 \frac{h}{2}) \\
m_4 &= a(I_r + l_3 \frac{h}{2}) - u(I_r + l_3 \frac{h}{2})
\end{aligned}$$

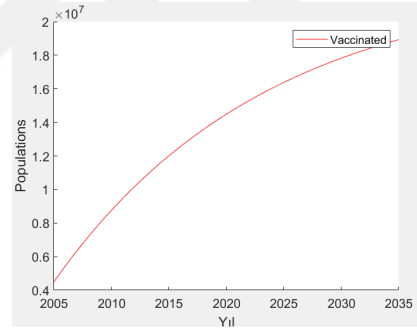
Daha sonra, yeni değerler Őu Şekilde hesaplanır:

$$\begin{aligned}
B_{r+1} &= B_r + \frac{h}{6}(c_1 + 2c_2 + 2c_3 + c_4), \\
S_{r+1} &= S_r + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \\
E_{r+1} &= E_r + \frac{h}{6}(n_1 + 2n_2 + 2n_3 + n_4), \\
I_{r+1} &= I_r + \frac{h}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4), \\
R_{r+1} &= R_r + \frac{h}{6}(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4).
\end{aligned}$$

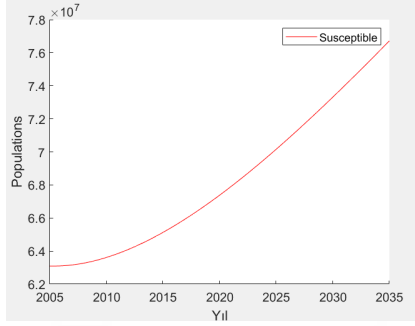
Tüberkülozun yayılmasında dair BSEIR modelinin çözümlüdür. Bu verileri MATLAB R2024a ortamında kod Şeklinde yazıp denklemin çözümlünü elde edeceğiz.



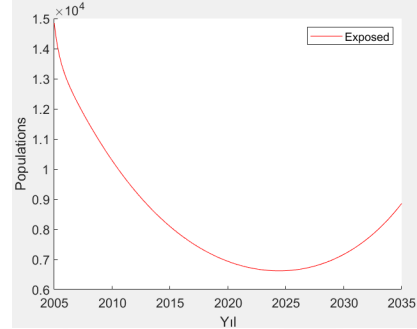
Şekil 6.34: BSEIR Model Runge-Kutta Çözümlü (I)



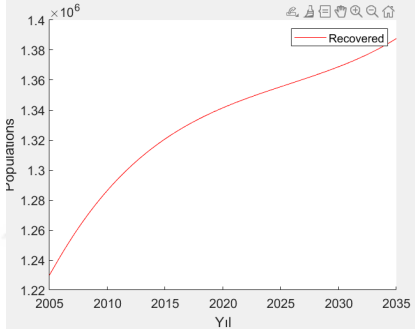
Şekil 6.35: BSEIR Model Runge-Kutta Çözümlü (B)



Şekil 6.36: BSEIR Model Runge-Kutta Çözümü (S)



Şekil 6.37: BSEIR Model Runge-Kutta Çözümü (E)



Şekil 6.38: BSEIR Model Runge-Kutta Çözümü (R)

6.3.4 BSEIR Modelin Nümerik Çözümlerin Sonuçları

BSEIR modelde nümerik çözümlerinin sonuçlarını Tablo 6.10'u incelediğimizde birbirlerine çok yakın olduğunu görüyoruz. Tablo 6.11' e baktığımızda Newton metodu ve Runge-Kutta metodu ile çözümlerini on binde birler basamağına kadar yapıldığında BSEIR modelde de aynı sonuçlar verdiğini görüyoruz. Tablo 6.12' ye baktığımızda ise en fazla değişimin 2019'dan 2020'ye geçişte COVID-19 döneminde olduğu göze çarpmaktadır. Hata oranının en fazla değişimin bu yıllarda olduğu Tablo 6.12'de göze çarpıyor.

Parametreleri yerine koyup daha önce bulduğumuz Temel Üreme Oranı R_0 formülünün değerini hesaplayalım.

$$\frac{\beta ek}{(a + u + d)(e + u)(up + k)} = 0.904 < 1$$

R_0 değeri 1'den küçük olduğundan hastalığın zamanla yok olacağı söylenebilir.

Yıl	Gerçek Vaka Sayısı	Euler	New.	R-K
2005	20535.0	20535.0	20535.0	20535.0
2010	16551.0	16153.4744	16153.4951	16153.4951
2015	12772.0	12541.6945	12541.7331	12541.7331
2016	12417.0	12024.0551	12024.0967	12024.0967
2017	12046.0	11567.3334	11567.3777	11567.3777
2018	11786.0	11168.6229	11168.67	11168.67
2019	11401.0	10825.2877	10825.3374	10825.3374
2020	8925.0	10535.0176	10535.0699	10535.0699
2021	8976.0	10295.8737	10295.9286	10295.9286
2022	9723.0	10106.3257	10106.3834	10106.3834
2023	9408.0	9965.2864	9965.3469	9965.3469
2025	-	9826.8006	9826.8676	9826.8676
2030	-	10355.083	10355.1733	10355.1733
2035	-	12457.5096	12457.64	12457.64

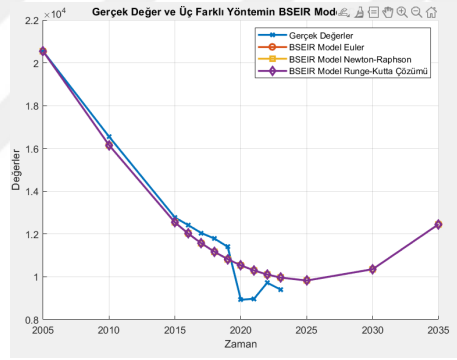
Tablo 6.10: BSEIR Modeli İçin Gerçek Değerler ile Nümerik Çözümler

Yıl	Euler Hata Miktarı	New. Hata Miktarı	R-K Hata Miktarı
2005	0	0	0
2010	397.5256	397.5049	397.5049
2015	230.3055	230.2669	230.2669
2016	392.9449	392.9033	392.9033
2017	478.6666	478.6223	478.6223
2018	617.3771	617.33	617.33
2019	575.7123	575.6626	575.6626
2020	-1610.0176	-1610.0699	-1610.0699
2021	-1319.8737	-1319.9286	-1319.9286
2022	-383.3257	-383.3844	-383.3844
2023	-557.2864	-557.3469	-557.3469

Tablo 6.11: BSEIR Modeli İçin Hata Miktarı Tablosu

Yıl	Euler Hata Yüzde	New. Hata Yüzde	R-K Hata Yüzde
2005	0.0000	0.0000	0.0000
2010	2.4018	2.4016	2.4016
2015	1.8032	1.8029	1.8029
2016	3.1645	3.1642	3.1642
2017	3.9736	3.9732	3.9732
2018	5.2382	5.2378	5.2378
2019	5.0496	5.0492	5.0492
2020	-18.0394	-18.0399	-18.0399
2021	-14.7044	-14.7050	-14.7050
2022	-3.9424	-3.9430	-3.9430
2023	-5.9235	-5.9241	-5.9241

Tablo 6.12: BSEIR Modeli Hata Yüzdesi Tablosu(%)

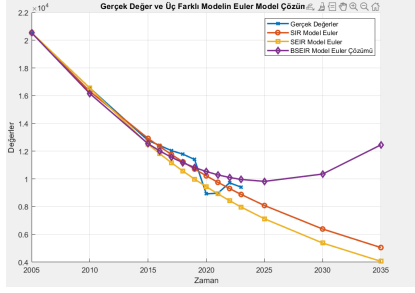


Şekil 6.39: BSEIR Modelin Çözümlerinin Grafiği

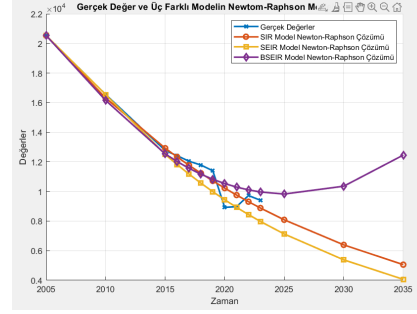
7 SIR, SEIR VE BSEIR MODELLERİNİN KARŞILAŞTIRILMASI

7.1 Nümerik Çözümlerinin Karşılaştırılması

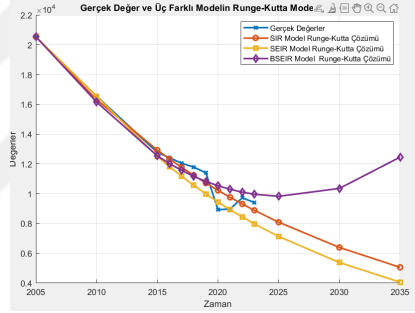
Üç modelin karşılaştırma grafiklerinde Şekil 7.1, Şekil 7.2 ve Şekil 7.3' e gördüğümüz gibi modelin dinamiklerine göre çokça farklılar var. Gerçek değerler ise 2020 yılında bir anda düşüşe geçip sonra tekrardan yükselerek modellere yaklaşmıştır. Her ne kadar COVID-19 döneminde tüberküloz vaka sayısındaki düşüş tüberkülozun geleceği açısından önemliyse de bundan sonraki süreçte çokça önemlidir.



Şekil 7.1: SIR, SEIR ve BSEIR Modeli(Euler)



Şekil 7.2: SIR, SEIR ve BSEIR Modeli(New.)



Şekil 7.3: SIR, SEIR ve BSEIR Modeli(R-K)

Aşağıda Tablo 7.1, Tablo 7.2, Tablo 7.3' de veriler 2021 yılında 'Tüberküloz hastalığının Türkiye'deki seyri için SIR, SEIR ve BSEIR modelleriyle incelenmesi doktora verileri ile bizim bulduğumuz değerlerin mutlak hataları karşılaştırmalı olarak verilmiştir. Karşılaştırılan veriler [39] doktora tezinden alınmıştır. Hata oranlarının çok yakın seyrettiğini Tablo 7.1, Tablo 7.2 ve Tablo 7.3' de görmekteyiz. Tablo 7.3' de BSEIR modelde 2022 yılı için tez verilerine göre farkın sadece 1 olduğu görülmektedir.

Yıl	Gerçek Veriler	[39] Verileri	[39] Mutlak Hata	Euler SIR	Mutlak Hata
2005	20535	20535	0	20535	0
2010	16551	16306	245	16311	240
2015	12772	12894	122	12925	153
2016	12417	12300	117	12335	82
2017	12046	11733	313	11771	275
2018	11786	11192	594	11232	554
2019	11401	10675	726	10718	683
2020	8925	10182	1257	10227	1302
2021	8976	9713	737	9758	782
2022	9723	9264	459	9310	413
2023	9408	8836	572	8883	525

Table 7.1: [39] Tez Verileri, Euler SIR Çözüm Verileri ve Hatalar

Yıl	Gerçek Veriler	[39] Verileri	[39] Mutlak Hata	New. SEIR	Mutlak Hata
2005	20535	20535	0	20535	0
2010	16551	16522	29	16544	7
2015	12772	12463	309	12504	268
2016	12417	11779	638	11822	595
2017	12046	11132	914	11176	870
2018	11786	10520	1266	10566	1220
2019	11401	9942	1459	9989	1412
2020	8925	9396	471	9443	518
2021	8976	8879	97	8926	50
2022	9723	8391	1332	8438	1285
2023	9408	7930	1478	7977	1431

Table 7.2: [39] Tez Verileri, Newton SEIR Çözüm Verileri ve Hatalar

Yıl	Gerçek Veriler	[39] Verileri	[39] Mutlak Hata	BSEIR Verileri	Mutlak Hata
2005	20535	20535	0	20535	0
2010	16551	16404	147	16153	398
2015	12772	12649	123	12542	230
2016	12417	12111	306	12024	393
2017	12046	11635	411	11567	479
2018	11786	11220	566	11168	618
2019	11401	10861	540	10825	576
2020	8925	10558	1633	10535	1610
2021	8976	10306	1330	10296	1320
2022	9723	10105	382	10106	383
2023	9408	9952	544	9965	557

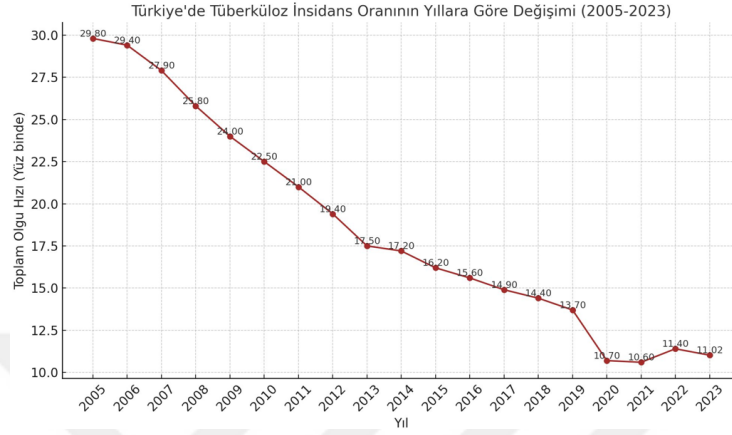
Table 7.3: [39] Tez Verileri, Runge-Kutta BSEIR Çözümü Verileri ve Hatalar

SIR, SEIR, BSEIR modellerinin Türkiye vakaları üzerinden üç yöntemle çözümlerinin sonuçlarını içeren tablolar Tablo 7.1, 7.2, 7.3' de gösterilmiştir. 2019 yılına kadar üç modelinde gerçek vakalara çok yakın değerler aldığını görmekteyiz. 2019 yılında hata oranının arttığını ve vaka oranının ciddi azaldığını görülmektedir.

COVID-19 pandemisi tüberküloz hastalarının tanısında ve tedavi sürecinde önemli aksamalara sebep olmuştur. Bu da dünya genelinde tüberküloz vakalarının tespit edilmesi ve izlenmesi açısından büyük sorunlara yol açmıştır [44]. İlaça dirençli tüberküloz (TB) hastaları başta olmak üzere, TB tanısı alan bireyler için karşılaşılan temel sorunlar arasında ilaç ve malzemelerin üretim ve nakliyesindeki aksaklıklar, yetersiz beslenme, ruh sağlığı desteğinin eksikliği, sağlık tesislerine erişimdeki kısıtlamalar ve bu nedenlerden dolayı tedavinin düzenli olarak sürdürülememesi yer alır. Ayrıca, TB'li yeni hastaların tespitinin zorlaşması da önemli bir problem olarak değerlendirilmektedir. Bu durum önümüzdeki yıllarda tüberküloz vaka sayısı artışı olacağı beklentisini güçlendirmektedir [4].

Tüberküloz İnsidansı ve Modellerin İnsidansı

İnsidans, insidans hızı veya insidans oranı, bir nüfusta belirli bir zaman diliminde hastalığın ya da hastalıkların yeni vakaların sayısını ifade eder. Sosyal tıp biliminde ve Epidemiyoloji de sıklıkla kullanılır [41]. Örnek olarak Türkiye'de tüberküloz insidansı 25 dediğimizde bu Türkiye'de 1 yıl içinde 100.000 kişide 25 kişinin tüberküloz vakasına yakalandığını söyler.



Şekil 7.4: Tüberküloz Türkiye İnsidans(yüz binde)

SIR, SEIR ve BSEIR'in nümerik çözümlerini ayrıntılı olarak inceledik. Şimdi de Dünya Sağlık Örgütü'nün 2035 hedeflerinin neresinde olduğumuza bakalım. DSÖ 2035 yılında tüm ülkelere önerdiği hedef Tablo 7.4'de belirtilmiştir. Hedef 2015'e göre TB insidansını yüzde 90 azaltmaktır. 2015 insidansı yüz binde 16.2, 2035 yılında ise hedef yüz binde 1.62 oluyor [34]. Bizim ise 2035 vaka sayıları tahminine göre insidanslarımız Tablo 7.5' deki gibidir. 2035 Türkiye nüfusu TÜİK'in ana senaryo verisinden 89.938.773 olarak alınmıştır [38].

Göstergeler	2020	2025	2030	2035
TB ölüm sayısındaki azalma	%35	%75	%90	%95
TB insidansındaki azalma	%20	%50	%80	%90

Tablo 7.4: TB'yi Bitirme Stratejisi Hedefleri(End TB)[34]

Model	Model Sonuçları	İnsidans (100.000'de)
SIR Model	5.056	5.62
SEIR Model	4.064	4.52
BSEIR Model	12.457	13.85

Tablo 7.5: 2035 Model İnsidansı

DSÖ hedefleri yüz binde 1.62 iken bizde modellerin en düşük sonucu yüz binde 4.52'dir. Bu modeller 2005 verilerinden yararlanılarak COVID-19 etkisi hesaplanmadan yapıldı. COVID-19'da tüberkülozu olumsuz etkilediğinden hedeflere ulaşılması zor duruyor.

Model	Kişi Sayısı	İnsidans (100.000'de)
SIR Model	6.393	7.24
SEIR Model	5.381	6.101
BSEIR Model	6.393	7.24

Tablo 7.6: 2030 Yılı Modellere Göre İnsidans

DSÖ 2023-2030 Avrupa Bölgesi Tüberküloz Eylem Planında ise 2030' da 2015' e göre tüberküloz görülme sıklığını yüzde 80 azaltmayı hedeflenmektedir. Dünya hedefleri arasında da bu var [35]. TÜİK ana senaryoya göre 2030 yılı nüfusu 88.188.221 alındığında insidans Tablo 7.6'deki gibi olmaktadır. 2005 insidans değeri ise yüzde 80 azaldığında 3.24 olmaktadır.

7.2 MATLAB R2024a Çözüm Sürelerinin Karşılaştırılması

SIR, SEIR ve BSEIR modellerinin çözümlerinin MATLAB R2024a ortamında zaman adımı $h = 0.0001$, $n = 30$ (2005-2035) alındığında 100 farklı çözüm yapıp CPU time ile süreler hesaplanıp ortalamalar alınmıştır. Tablo 7.7'deki sürelerin modele ve çözüm yöntemine göre farklılık gösterdiği görülmektedir. Euler yönteminin en hızlı Newton yöntemi ise en yavaş olduğu göze çarpmaktadır.

Model	Euler Yöntemi (s)	New. Yöntemi (s)	R-K Yöntemi (s)
SIR	0.033	0.924	0.223
SEIR	0.0363	1.087	0.327
BSEIR	0.039	1.196	0.465

Tablo 7.7: SIR, SEIR, BSEIR Modellerinin Çözüm Sürelerinin Karşılaştırılması

8 SONUÇ

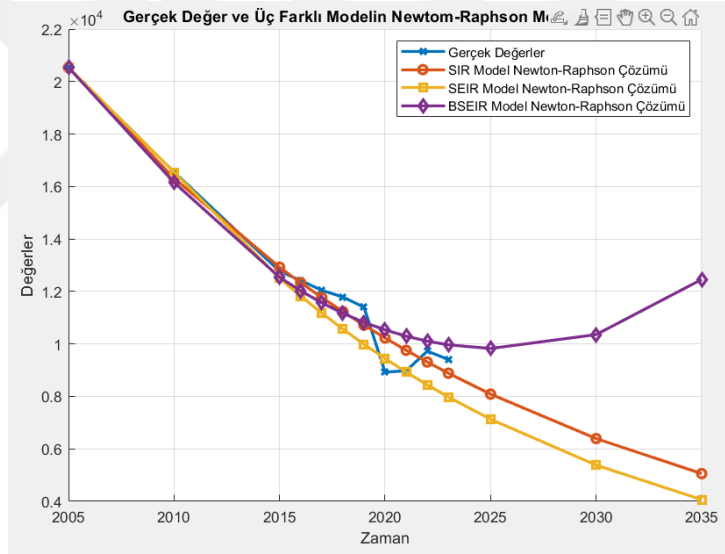
Bu çalışmada, tüberküloz hastalığının SIR, SEIR ve BSEIR modelleri kullanılarak farklı nümerik çözümlerini elde edildi. Modeller arasındaki hata oranlarını incelendiğinde elde edilen sonuçlar, aynı modelin farklı nümerik yöntemlerle çözümlendiğinde çok yakın değerler verdiğini gösterdi. Ancak, farklı modeller kıyaslandığında, her bir modelin dinamiklerinin farklı olmasından dolayı sonuçlar arasında belirgin farklar gözlemlendi.

Çalışmamızda ayrıca COVID-19 pandemisinin tüberküloz hastalığı üzerindeki olumsuz etkilerini değerlendirildi. Pandemi dönemi, uzun yıllardan sonra ilk kez tüberküloz vaka sayılarında ve insidans oranında artışa yol açtı. Özellikle matematiksel modellerin çözümlerinde en büyük hata değişimleri bu dönemde gerçekleşti. Tablo 8.1'i incelediğimizde 2019-2020 yıllarında en fazla değişimin BSEIR modelde olduğunu görmekteyiz.

Model	2019 (%)	2020 (%)	Değişim (%)
SIR	5.99	-14.58	-20.57
SEIR	12.38	-5.79	-18.17
BSEIR	5.04	-18.03	-23.07

Tablo 8.1: Modellerin 2019-2020 Hata Değişim Tablosu

Elde ettiğimiz bulgular, DSÖ'nün 2015'te belirlediği tüberküloz hedefleri doğrultusunda, matematiksel modellerin mevcut durumu daha net bir şekilde görmemizi sağladı. Bundan sonra yaşanacak herhangi bir pandeminin benzer türden hastalıklar için matematiksel modellerin hata oranları üzerinden çıkarım yapılabilir. Bu da yaşanacak pandemilerin diğer hastalıklara etkisini en aza indirmek için bir senaryo niteliğinde olacaktır.



Şekil 8.1: Gerçek Vakalar ve Farklı Modellerin Karşılaştırılması

Şekil 8.1'de görüldüğü gibi, 2020 öncesinde model değerlerine oldukça yakın seyreden gerçek vaka sayıları, 2020 yılından sonra BSEIR ve SIR modelleri arasında bir konumda kalmıştır. Bu durum, hastalığın gelecekte nasıl bir seyir izleyeceği konusunda önemli ipuçları sunmaktadır. Üç modelin 2035 DSÖ hedeflerine ulaşmada zorluk yaşadığını gösterdik. Özellikle, bu matematiksel modellerin sonuçlarının, DSÖ ve Avrupa ülkelerinin 2023-2030 hedeflerine kıyasla hâlâ uzağında kaldığını gözlemledik.

Modellerin kararlılık analizlerinde elde edilen R_0 değerlerinin 1'den küçük olması, hastalığın kontrol altına alınarak giderek azalacağına dair olumlu bir gösterge sunmaktadır. Daha önce yapılan benzer çalışmalarla

karşılaştırıldığında, kullanılan gerçek veriler ile bizim model verilerimiz arasındaki mutlak hatanın kabul edilebilir düzeyde olduğunu da tablo ile gösterdik. Ayrıca modellerin nümerik çözümlerinin MATLAB R2024a üzerinden yapılırken CPU değerleri üzerinden süreleri bulundu. Euler çözüm süresinin çok hızlı olduğu buda işlem adımlarının kısa olduğunu Newton metodunun ise en yavaş olan olarak Jakobien matrisinin tersi alınıp her adımda tekrarlanması süreyi yavaşlattığını söyleyebiliriz.

Bundan sonraki aşamada, hasta sayılarının hangi model veya denklemlerle daha iyi öngörülebileceği araştırılabilir. Ayrıca, hastalığın seyrine dair güncel verilerle bu modellerin doğruluğu artırılabilir ve DSÖ hedeflerine ulaşma yolunda yeni stratejiler belirlenebilir.

9 KAYNAKLAR

- [1] Akademik Sunum. (2020). “Adi Diferansiyel Denklemler ve Çözümleri.” <https://akademiksunun.com/index.jsp?modul=document&folder=515eef693f754fc63d19bf155ac434124fbbf5f8>. Erişim Tarihi 12 Kasım 2024.
- [2] Anderson, R. M. and R. M. May. (1992). *Infectious diseases of humans: dynamics and control*. Oxford: Oxford University Press. Published online, Oct. 31, 2023.
- [3] Ashgi, Rizky, Mochammad Andhika Aji Pratama, and Sri Purwani. (2021). “Comparison of Numerical Simulation of Epidemiological Model between Euler Method with 4th Order Runge Kutta Method.” *International Journal of Global Operations Research*, 2, 37–41.
- [4] Avcı, M. and P. Etiz. (2023). “Tüberküloz ile Mücadelede COVID-19’un Etkisi.” *TOGÜ Sağlık Bilimleri Dergisi*, 3, 246–257.
- [5] Brauer, Fred, Pauline van den Driessche, and Jianhong Wu, eds. (2008). *Mathematical Epidemiology*. Volume 1945 of Lecture Notes in Mathematics. Springer.
- [6] Butcher, J. C. (2008). *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*. 2nd ed. Chichester, England: John Wiley Sons, Ltd. p.93
- [7] Centers for Disease Control and Prevention. (2024). “Tuberculosis: Causes and How It Spreads.” <https://www.cdc.gov/tb/causes/index.html>. Accessed 20 Nov. 2024.

- [8] Chen, Xiaowei, Jing Li, Chen Xiao, and Peilin Yang. (2021). “Numerical solution and parameter estimation for uncertain SIR model with application to COVID-19.” *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 20, 189–208.
- [9] Das, Kalyan, B. S. N. Murthy, Sk. Abdus Samad, and Md. Haider Ali Biswas. (2021). “Mathematical transmission analysis of SEIR tuberculosis disease model.” *Sensors International*.
- [10] Diekmann, O., J. A. P. Heesterbeek, and J. A. J. Metz. (1990). “On the definition and the computation of the basic reproduction ratio R_0 in models for infectious diseases in heterogeneous populations.” *Journal of Mathematical Biology*, 28, 365–382.
- [11] Dünya Sağlık Örgütü(DSÖ). (2015). “Global Tuberculosis Report.” <https://www.who.int/publications/i/item/WHO-HTM-TB-2015.19>. Erişim Tarihi 2 Kasım 2024
- [12] Dünya Sağlık Örgütü(DSÖ). (2024). “Global Tuberculosis Report.” <https://iris.who.int/bitstream/handle/10665/379339/9789240101531-eng.pdf?sequence=1>. Erişim Tarihi 2 Kasım 2024
- [13] Edwards, C. Henry and David E. Penney. (2011). *Bilgisayar Destekli, Matematiksel Modellemede Diferansiyel Denklemler ve Sınır Değer Problemleri*. Ed. Prof. Dr. Ömer Akın. Ankara: Palme Yayıncılık.pp. 300-420
- [14] Ertuğ, Sevim. (2016). “Conservative Schemes for the Three Coupled Non-linear Schrödinger Equation.” Master’s thesis, Atılım University, Graduate School of Natural and Applied Sciences, Ankara, Turkey. p.29
- [15] Esen, Rana. (2021). “Salgın Hastalıkların Matematiksel Modellenmesi, Kararlılık Analizi ve Kontrol Yöntemleri.” Master’s thesis, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, Türkiye, Ağustos 2021.
- [16] Gümüşlü, F., S. Özkara, S. Özkan, F. Baykal, and Ü. Güllü. (2007). *Türkiye’de Verem Savaşı, 2007 Raporu*. Ankara: Verem Savaşı Dairesi Başkanlığı.
- [17] Güzcy, Nurbanu. (2021). “Türkiye’deki COVID-19 yayılımının SIR temelli modellenmesinde RSS yöntemi ile parametre kestirimi.” *Gümüşhane Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi*, 11, 956–963.
- [18] Hacettepe Üniversitesi Tıp Fakültesi Halk Sağlığı Anabilim Dalı. (2023). “Dünya Tüberküloz Günü (24 Mart 2023).” *Toplum İçin Bilgilendirme Dizisi (2022/2023-36)*. <https://halksagligi.hacettepe.edu.tr/duyurular/halkayonelik/tuberkulozunu2023.pdf>. Erişim Tarihi 10 Kasım 2024
- [19] Harvard Health Publishing. (2020). “Preventing the spread of the coronavirus.” <https://www.health.harvard.edu/diseases-and-conditions/preventing-the-spread-of-the-coronavirus>. Accessed 5 Sept. 2024

- [20] Işık, Nurettin, and Abdullah Kaya. (2020). “İnfeksiyöz Hastalıkların Yayılması ve Kontrolünde Matematiksel Modeller ve Sürü Bağışıklama.” *Atatürk Üniversitesi Veteriner Bilimleri Dergisi*, 15, 301–307.
- [21] Johns Hopkins Medicine. (2020). “What Is Coronavirus?” <https://www.hopkinsmedicine.org/health/conditions-and-diseases/coronavirus>. Accessed 1 Sept. 2024
- [22] Kara, Rukiye, and Cihan Taş. (2021). “Türkiye’de Covid-19 Salgını İçin Matematiksel Epidemik Modellerin İncelenmesi.” *Proje No: 2021-17*.
- [23] Keeling, M. J., and K. T. D. Eames. (2005). “Networks and Epidemic Models.” *Interface*, 2, 295–307.
- [24] Kermack, W. O., and A. G. McKendrick. (1927). “A contribution to the mathematical theory of epidemics.” *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, 115, 700–721.
- [25] Köker, Necdet. (2021). “Kararlılık Analizi ve Bir Uygulama.” Yüksek lisans tezi, Sakarya Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Sakarya, Türkiye.
- [26] Kılıç, O. (2020). *Tarihte Salgın Hastalıklar ve Etkileri*. TUBA Yayınları.52.
- [27] Liu, Siyu, Yong Li, Yingjie Bi, and Qingdao Huang. (2017). “Mixed Vaccination Strategy for the Control of Tuberculosis: A Case Study in China.” *Mathematical Biosciences and Engineering*, 14, 695–708.
- [28] Mayo Clinic. (2020). “Coronavirus disease 2019 (COVID-19) symptoms.” <https://www.mayoclinic.org/diseases-conditions/coronavirus/symptoms-causes/syc-20479963>. Accessed 1 Aug. 2024
- [29] National Institutes of Health. (2020). “COVID-19 Treatment Guidelines.” <https://covid19.nih.gov/news-and-stories/nih-covid-19-treatment-guidelines>. Accessed 1 Sept 2024
- [30] Parıldar, Hülya. (2020). “Tarihte Bulaşıcı Hastalık Salgımları.” *Tepecik Eğitim ve Araştırma Hastanesi Dergisi*, 30, 19–26.
- [31] Paul, S., A. Mahata, U. Ghosh, and B. Roy. (2021). “Study of SEIR epidemic model and scenario analysis of COVID-19 pandemic.” *Ecology, Genetics and Genomics*, 19 (May 2021), 100087.
- [32] Pfizer. (2021). “Pfizer and BioNTech Announce Vaccine Candidate Against COVID-19 Achieved Success in First Interim Analysis from Phase 3 Study.” <https://www.pfizer.com/news/press-release>. Accessed 1 Sept. 2024.
- [33] Remani, Courtney. (2013). *Numerical Methods for Solving Systems of Non-linear Equations*. A project submitted to the Department of Mathematical Sciences in conformity with the requirements for Math 4301 (Honour’s Seminar).

- [34] T.C. Sağlık Bakanlığı, Halk Sağlığı Genel Müdürlüğü, Tüberküloz Dairesi Başkanlığı. (2022). *Ulusal Tüberküloz Kontrol Programı*. 17. Ankara: T.C. Sağlık Bakanlığı.
- [35] T.C. Sağlık Bakanlığı, Halk Sağlığı Genel Müdürlüğü, Tüberküloz Dairesi Başkanlığı. (2022). *24 Mart Dünya Tüberküloz Günü*. <https://hsgm.saglik.gov.tr/tr/haberler-tbc/24-mart-duenya-tueberkueloz-guenue.html>. Erişim Tarihi 10 Kasım 2024.
- [36] Tekin, A. (2021). “Tarihten günümüze epidemiler, pandemiler ve ekonomik sonuçları.” *Süleyman Demirel Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi*, 330–355.
- [37] Türk Toraks Derneği. (2019). *Tüberküloz Tanı ve Tedavi Rehberi*, Türk Toraks Derneği Yayınları.3-4.
- [38] Türkiye İstatistik Kurumu. (2024). “2005–2024 Yılları Arası Türkiye verileri.” <https://www.tuik.gov.tr/>. Erişim Tarihi 11 Kasım 2024.
- [39] Ucakan, Yasin. (2021). “Tüberküloz Hastalığının Türkiye’deki Seyrinin SIR, SEIR, BSEIR Matematiksel Modelleri ile İncelenmesi.” Yıldız Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul, Türkiye, Ağustos 2021.
- [40] Ucakan, Yasin, Seda Gulen, and Kevser Koklu. (2021). “Analysing of Tuberculosis in Turkey through SIR, SEIR and BSEIR Mathematical Models.” *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems*, 27, 179–202. <https://doi.org/10.1080/13873954.2021.1881560>.
- [41] Vikipedi. (2015). “İnsidans.” <https://tr.wikipedia.org/wiki/İnsidans>. Accessed 15 Nov. 2024.
- [42] Whittaker, E. T., and G. N. Watson. (1927). *A Course of Modern Analysis*. 4th edition. Cambridge: Cambridge University Press.p.92.
- [43] World Health Organization. (2020). “Coronavirus disease (COVID-19) pandemic.” <https://www.who.int/emergencies/diseases/novel-coronavirus-2019>. Accessed 10 Nov. 2024.
- [44] World Health Organization. (2022). “Top Findings and Messages in the 2022 Report on Tuberculosis.” <https://cdn.who.int/media/docs/default-source/hq-tuberculosis/global-tuberculosis-report-2022/top-findings-and-messages-in-the-2022-report-eng.pdf?sfvrsn=91a184dc4>. Accessed 15 Nov. 2024.
- [45] Zhou, X., and J. Cui. (2011). “Modeling and stability analysis for a cholera model with vaccination.” *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 34, 1711–1724.