

T.C.
GİRESUN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÇOK NİTELİKLİ KARAR VERME PROBLEMİNE
BULANIK İNTEGRAL TABANLI YAKLAŞIM



YÜKSEK LİSANS TEZİ

Öğrencinin Adı SOYADI : Şeyma KANTAROĞLU

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih

Enstitü Anabilim Dalı : Matematik

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Hande GÜNAY AKDEMİR

Ocak 2025
GİRESUN

T.C.
GİRESUN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÇOK NİTELİKLİ KARAR VERME PROBLEMİNE
BULANIK İNTEGRAL TABANLI YAKLAŞIM

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Şeyma KANTAROĞLU

Enstitü Anabilim Dalı

:

Matematik

Bu tez .././20.. tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oyçokluğu/ oybirliği ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr.
Selahattin MADEN

Jüri Başkanı

Doç. Dr.
Hande GÜNAY
AKDEMİR

Üye

Dr. Öğr. Üyesi
Mehmet Akif KARA

Üye

Prof. Dr.
Bahadır KOZ
Enstitü Müdürü

BEYAN

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

Şeyma KANTAROĞLU

TEŞEKKÜR

Tez çalışmalarım boyunca bana yön veren, zaman ayıran ve her türlü desteği sağlayan; sürekli öğrencisi ve danışanı olmaktan mutlu olduğum danışmanım, değerli hocam Doç. Dr. Hande GÜNAY AKDEMİR’e en içten teşekkürlerimi sunarım. Çalışmalarım sırasında değerli bilgi ve görüşlerini benimle paylaşan, desteklerini esirgemeyen bölüm hocalarıma ayırdıkları zaman ve ilgileri için minnettarım. Bu süreç boyunca manevi destekleri için anneme, değerli eşim ve kızlarıma teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR.....	I
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ.....	IV
ŞEKİLLER LİSTESİ	VI
TABLolar LİSTESİ	VII
ÖZET.....	IX
SUMMARY	X
BÖLÜM 1. GİRİŞ	1
BÖLÜM 2. KAYNAK ARAŞTIRMASI.....	4
BÖLÜM 3. MATERYAL VE YÖNTEM.....	10
3.1. Standart Bulanık Küme	10
3.2. Genelleştirilmiş Bulanık Sayı	10
3.3. Kesen Aralığı.....	10
3.4. Sezgisel Bulanık Küme	11
3.5. Resim Bulanık Küme	11
3.6. Genelleştirilmiş Yamuksal Resim Bulanık Sayı (Akram ve ark., 2022)....	12
3.7. Ortalama Değer	14
3.8. Maksimum-Minimum Dönüşümü.....	14
3.9. Kapasite (Bulanık Ölçüm).....	15
3.10. Sugeno Ölçümü.....	15

3.11.	Resim Bulanık Choquet İntegrali.....	16
BÖLÜM 4.	ARAŞTIRMA BULGULARI	17
4.1.	İki Boyutlu Büyüklük Fonksiyonu.....	18
4.2.	İki Risk Parametrelili İndirgeme İşlemleri	19
4.3.	Resim Bulanık Aritmetik İşlemler	20
4.4.	Çok Nitelikli Karar Verme Uygulaması	24
4.4.1.	Algoritma	25
4.4.2.	Sayısal Sonuçlar	25
BÖLÜM 5.	TARTIŞMA VE SONUÇ	37
KAYNAKLAR.....		39
ÖZGEÇMİŞ		45

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\tilde{A}$	: Bulanık küme veya uzantısı
$\mu_{\tilde{A}}$	: $\tilde{A}$ (sezgisel) bulanık kümesinin (veya resim bulanık kümesinin pozitif) üyelik fonksiyonu
$\eta_{\tilde{A}}$	: $\tilde{A}$ resim bulanık kümesinin nötr üyelik fonksiyonu
$\nu_{\tilde{A}}$	: $\tilde{A}$ sezgisel bulanık kümesinin üye olmama fonksiyonu (veya resim bulanık kümesinin negatif üyelik fonksiyonu)
$\pi_{\tilde{A}}$	: $\tilde{A}$ sezgisel bulanık kümesinin tereddüt derecesi (veya resim bulanık kümesinin reddetme derecesi)
$m(\cdot)$	: Ortalama değer (veya sadece ortalama veya sadece değer)
$Mag(\cdot)$	: Büyüklük fonksiyonu
RBC_g	: g Sugeno bulanık ölçümüne göre resim bulanık Choquet integrali
SBK	: Sezgisel Bulanık Küme

RBK	: Resim Bulanık Küme
(G)BS	: (Genelleştirilmiş) Bulanık Sayı
(G)SBS	: (Genelleştirilmiş) Sezgisel Bulanık Sayı
(G)RBS	: (Genelleştirilmiş) Resim Bulanık Sayı
GYBS	: Genelleştirilmiş Yamuk Bulanık Sayı
GYSBS	: Genelleştirilmiş Yamuksal Sezgisel Bulanık Sayı
GYRBS	: Genelleştirilmiş Yamuksal Resim Bulanık Sayı

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 3.1. Örnek 3.1 için üyelik fonksiyonları.	13
--	----



TABLolar LİSTESİ

Tablo 4.1. Risk parametresine göre Örnek 4.4 için elde edilen sonuçlar.	23
Tablo 4.2. Risk parametresine göre Örnek 4.4 için elde edilen diğer sonuçlar.	24
Tablo 4.3. Kriterlerin önem ağırlıkları için kullanılan dilsel 1-11 ölçeği.	27
Tablo 4.4. Choquet ağırlıkları.	27
Tablo 4.5. Kriterlere göre 1. alternatifin puanları.	28
Tablo 4.6. Kriterlere göre 2. alternatifin puanları.	28
Tablo 4.7. Kriterlere göre 3. alternatifin puanları.	28
Tablo 4.8. Alternatif 1 için normalize edilmiş puanlar.	29
Tablo 4.9. Alternatif 2 için normalize edilmiş puanlar.	29
Tablo 4.10. Alternatif 3 için normalize edilmiş puanlar.	29
Tablo 4.11. Dejenere edilen iyimser durum puanları.	30
Tablo 4.12. Dejenere edilen riske nötr durum puanları.	30
Tablo 4.13. Dejenere edilen kötümser durum puanları.	30
Tablo 4.14. Alternatif 1 için kriterlerin iyimser sıralamaları.	31
Tablo 4.15. Alternatif 2 için kriterlerin iyimser sıralamaları.	31
Tablo 4.16. Alternatif 3 için kriterlerin iyimser sıralamaları.	31
Tablo 4.17. Alternatifler için elde edilen iyimser kriter ağırlıkları.	32
Tablo 4.18. İndirgenmiş resim bulanık genel skorlarının büyüklük değerleri.	33
Tablo 4.19. Alternatif 1 için kriterlerin riske nötr sıralamaları.	33
Tablo 4.20. Alternatif 2 için kriterlerin riske nötr sıralamaları.	33
Tablo 4.21. Alternatif 3 için kriterlerin riske nötr sıralamaları.	34
Tablo 4.22. Alternatif 1 için kriterlerin kötümser sıralamaları.	34
Tablo 4.23. Alternatif 2 için kriterlerin kötümser sıralamaları.	34
Tablo 4.24. Alternatif 3 için kriterlerin kötümser sıralamaları.	34
Tablo 4.25. Alternatifler için elde edilen riske nötr kriter ağırlıkları.	35

Tablo 4.26. Alternatifler için elde edilen kötümser kriter ağırlıkları.	35
Tablo 4.27. İndirgenmiş resim bulanık genel skorların riske nötr büyüklük değerleri.	35
Tablo 4.28. İndirgenmiş resim bulanık genel skorların kötümser büyüklük değerleri.	36



ÇOK NİTELİKLİ KARAR VERME PROBLEMİNE BULANIK İNTEGRAL TABANLI YAKLAŞIM

ÖZET

Uzmanların öznel görüşlerinden tam olarak emin olunamadığı durumlarda, yüksekliği 1 olan geleneksel Bulanık Sayı (BS) yerine yüksekliği 0 ile 1 arasında olan Genelleştirilmiş BS (GBS) kullanılabilir. Bu altnormallik, genişleme ilkesine dayalı aritmetik işlemleri karmaşıktırır. Üstelik bu karmaşıklık standart olmayan BS'lerde de miras alınır. Değerlendirmelere olan güven eksikliği, uzmanların tereddütleri, çekimserlikleri veya değerlendirme yapmama tercihlerinin olduğu karar verme durumlarında klasik bulanık küme teorisi yetersiz kalmaktadır. Bu tez genelleştirilmiş ve yamuksal formdaki BS'leri, Sezgisel BS'leri (SBS'leri) ve Resim BS'leri (RBS'leri) karşılaştırmak için yeni bir ortak yaklaşım sunmayı amaçlamaktadır. Ele alınan BS sınıfları arasında en genel sınıf olarak kabul edilen Genelleştirilmiş Yamuksal RBS'ler (GYRBS'ler) için bulanık aritmetik kurulmuş, ağırlıklı aritmetik ortalamaları kullanan ve iki risk parametresine bağlı indirgeme süreci tanımlanmıştır. Bir üstkümeden bir altkümeje dejenerasyonu temel alan bu indirgeme, herhangi bir GYRBS'yi veya Genelleştirilmiş Yamuksal SBS'yi (GYSBS'yi) temsilci bir Genelleştirilmiş Yamuksal BS'ye (GYBS'ye) dönüştürür. Ayrıca, GYBS'lerin karşılaştırılması için normalize edilmiş ortalama değer ve yüksekliğin toplamı olarak tanımlanan bir sıralama fonksiyonu önerilmiştir. Son olarak, etkileşimli veya bağımlı kriterlerin varlığında etkin bir şekilde kullanılan Choquet integrali, resim bulanık çerçevedeki Çok Nitelikli Karar Verme (ÇNKV) problemine uygulanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Bulanık integral, çok nitelikli karar verme, genelleştirilmiş bulanık sayılar, genelleştirilmiş sezgisel bulanık sayılar, genelleştirilmiş resim bulanık sayılar, sıralama prosedürü.

FUZZY INTEGRAL-BASED APPROACH TO THE MULTIPLE ATTRIBUTE DECISION MAKING PROBLEM

SUMMARY

In situations where experts' subjective opinions cannot be fully relied upon, a Generalized Fuzzy Number (GFN) with a height between 0 and 1 can be used instead of the traditional Fuzzy Number (FN) with a height of 1. This subnormality makes arithmetic operations based on the extension principle more difficult. Furthermore, non-standard FNs also inherit this complexity. The classical fuzzy set theory is insufficient in decision-making scenarios where there is a lack of confidence in assessments and experts exhibit hesitancy, neutrality, or refuse to provide evaluations. The objective of this thesis is to introduce a novel unified method to compare generalized and trapezoidal forms of FNs, Intuitionistic FNs (IFNs), and Picture FNs (PFNs). We adapt fuzzy arithmetic for Generalized Trapezoidal PFNs (GTPFNs), considered the most comprehensive class within these FN sets, and define a two-parameter reduction process using weighted arithmetic means. This reduction, which is based on degeneration from a superset to a subset, transforms any GTPFN or Generalized Trapezoidal IFN (GTIFN) into a representative Generalized Trapezoidal FN (GTFN). Additionally, we propose a ranking function for comparing GTFNs that is defined as the sum of the normalized mean value and height. Finally, we apply the Choquet integral, which works effectively in the presence of interactive or dependent criteria, to the Multi-Attribute Decision-Making (MADM) problem in the picture fuzzy framework.

Keywords: Fuzzy integral, multiple attribute decision-making, generalized fuzzy numbers, generalized intuitionistic fuzzy numbers, generalized picture fuzzy numbers, ranking procedure.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Sayısal verilerin yetersiz toplandığı veya belirsiz olduğu durumlarda uzman tahminlerine dayanan bulanık verilere güvenilir. Bulanık küme, evrensel kümenin her bir elemanına üyelik derecesi atayan bir üyelik fonksiyonu ile karakterize edilir. Bir elemanın bir bulanık kümeye üyeliği, o elemanın o kümenin karakteristik özelliği ile ne kadar iyi eşleştiğini gösterir. Üyelik fonksiyonları için genellikle üçgensel, yamuksal veya Gauss formlar tercih edilir. Uzmanlar problem parametreleri için çoğunlukla kötümser, en olası ve iyimser değerleri temin eder. Tek bir mod değeri sunmak yerine bir mod aralığı da sunulabilir. Bulanık kümenin genellikle normal olduğu kabul edilir, yani yüksekliği 1'dir, bu da uzman görüşlerine tam olarak güvenilebileceğini belirtir. Normallik varsayımı, toplama ve skaler çarpım işlemleri sonrasında BS'nin üçgensel, yamuksal veya Gauss şeklini korur.

Bulanık kümelerle kesin olmayan parametreler modellenirken, genelde yalnızca üyelik derecesi dikkate alınır; tereddüt derecesi görmezden gelinir ve üye olmama derecesinin ise üyelik derecesinin tümleyeni olduğu varsayılır. Gerçekte uzmanlar dalgalanmalar, hatalı ölçümler veya diğer faktörler nedeniyle verilerin tamamını veya bir kısmını hem belirsizlik hem de tereddütte sağlar. Sezgisel Bulanık Küme (SBK), ilk olarak Atanassov (1986) tarafından önerilmiş olup, üyelik fonksiyonunun yanı sıra bir üye olmama fonksiyonuyla da karakterize edilen ve bulanık kümenin daha kapsamlı bir versiyonudur. SBK'lerde herhangi bir eleman için yalnızca üyelik derecesinin alt ve üst sınırları bilinir; gerçek üyelik derecesi bilinmez. Gerçek üyelik, verilen üyelik derecesi ile 1 eksi üye olmama derecesi arasında yer alır. Başka bir deyişle, üyelik derecesi tek bir değer yerine bir aralık olarak ifade edilir.

SBK'lerden daha genel formlar olan Resim Bulanık Kümeler (RBK'ler) (Cuong ve Kreinovich, 2013) üyelik ve üye olmama derecelerinin yanı sıra tarafsız olma

(neutrality) ve reddetme (refusal) dereceleri sunar. Karar vericiler, “kabul etme”, “çekimser kalma”, “kabul etmeme” ve “reddetme” gibi daha geniş bir yanıt yelpazesi gerektiren, oy verme benzeri kararlarla karşı karşıya kaldıklarında RBK’lerin kullanımı faydalar sağlayabilir. Yaklaşık akıl yürütme ve belirsiz karar verme problemleri için eksik, güvenilirmez, kesin olmayan veya dilsel bilgileri ifade etmek için standart BS’lerden daha genel formlarda genelleştirilmiş ve standart olmayan BS’ler kullanılabilir. Her genelleştirme, serbestlik derecesini (esnekliği) ve belirsizliği artırır. Tereddüt, çekimserlik ve reddetmenin bir şekilde çözümlendiği varsayılırsa, standart olmayan bir BS hem standart hale getirilirken hem de belirsizlik azaltılır. Bu tezde ele alınan BS sınıflarının kısaltmaları Simgeler ve Kısaltmalar listesinde verilmiştir.

ÇNKV, bir uzman tarafından karar alternatiflerinin bir dizi kritere veya niteliğine göre değerlendirilebildiği, mümkün olan tüm alternatifler arasından en iyi alternatifi seçme sürecidir. Pratikteki karar problemlerinde, öznel ve nesnel faktörlerin etkisiyle karar vericilerin girift konularda doğru değerlendirmeler yapması kolay değildir. Ayrıca, insan yargıları ve tercihleri çoğu zaman belirsizlik içerir ve kesin sayısal değerlerle ifade edilemez; bu nedenle, kesin (net, crisp) değerler gerçek dünya durumlarını modellemek için yeterli olmayabilir. Bu tezde ele alınan ÇNKV probleminde uzmanın kriterlere göre alternatifleri değerlendirmesinde yamuksal resim bulanık performans skorları kullandığı kabul edilmiştir. Kriter ağırlıkları ise kesin sayılardır, ancak kriterlerin birbirinden bağımsız olmadığı düşünülmektedir. Alternatifleri karşılaştırmada göz önüne alınacak genel bir puan değeri, birleştirme (aggregation) operatörleri kullanılarak hesaplanabilir; ancak burada tutarlı bir bulanık aritmetik kullanılmalıdır. Esnek hesaplamalarda, belirsizlik çerçevesinde yaklaşık akıl yürütmede, bulanık genel skorların karşılaştırılmasında sıralama fonksiyonları ve durulaştırma (defuzzification) süreçleri önemli rol oynamaktadır.

Birleştirme operatörü, bir sayı kümesini tek bir temsilciye veya anlamlı bir sayıya indirgeyen bir fonksiyondur. Gerçek hayat problemlerinde en yaygın olarak kullanılan birleştirme operatörleri, ortalama alma operatörleridir. Örneğin, ağırlıklı aritmetik ortalama operatörü, bir vektör ile verilen değerlerin lineer kombinasyonunu hesaplar. Bu şekilde genel bir skor değeri hesaplanırken, eğer öncelikli bileşenler varsa, yani

bazı kriterler diğerlerine göre daha az veya daha çok öneme sahipse, kriterlerin önemini temsil eden bir ağırlık vektörü kullanılır. Bu toplamsal operatör, kriterler birbirinden bağımsız olduğunda, yani kriterler arasında etkileşim olmadığında iyi sonuçlar verir. Ancak, böyle bir etkileşimin veya korelasyonun varlığında, yani karar vericiler kriterleri birbirinden bağımsız şekilde yapılandıramadıklarında, birleştirme işleminde bulanık integralleri kullanmak daha uygundur. Choquet (Choquet, 1954) ve Sugeno integralleri (Sugeno, 1974), birçok birleştirme operatörünü genelleyen bulanık integrallerin iki temel sınıfıdır. Bu sınıflarda ağırlıklar, kriterler arasındaki etkileşimi biçimlendirmeye olanak sağlayan bulanık ölçüm (kapasiteler) yardımıyla hesaplanır. Bu durumda, gereksizlik (negatif etkileşim) ve sinerji (pozitif etkileşim) arasında derecelenen bir etkileşimden bahsedilebilir. Örneğin, iki kriter neredeyse aynı ise, bu kriterlerden biri gereksizdir, yani kriterler birbiri yerine geçebilir. Böyle kriterlere negatif ilişkili kriterler denir. Tersine, kriterler tek başlarına az öneme sahipken bir arada ele alındıklarında kriterlerin önemi artıyorsa, böyle kriterlere pozitif ilişkili kriterler denir. Aralarında böyle bir etkileşim olmayan kriterlere bağımsız kriterler denir. Üstelik, karar vericinin karar verme sürecinde dikkate aldığı bazı tercihleri varsa, bu tercihler, toplamsal operatörlerin aksine bulanık integraller yardımıyla modele yansıtılabilir. Karar verici karakterleri, tolerans ve veto davranışları da bu yolla ele alınabilir (Marichal, 2004).

Bir sonraki bölümde tezin ilgi alanı dahilinde olan ve genelleştirilmiş, sezgisel veya resim bulanık sıralama fonksiyonlarının ÇNKV problemlerine uygulamaları konularını ele alan önde gelen çalışmaların literatür taramasına yer verilmiştir. Bu literatür taramasında, sezgisel ve resim bulanıklık dışında başka bir standart olmayan bulanık sınıf incelenmemiştir. Bu alandaki literatür genellikle operasyonel kurallar, birleştirme operatörleri ve sıralama yöntemlerinin yanı sıra klasik karar verme yöntemlerinin genelleştirilmesi ve yeni karar verme metotlarının geliştirilmesi üzerine odaklanmaktadır.

BÖLÜM 2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Cheng (1998), hem normal hem de altnormal BS'ler için merkez (centroid) noktasının orijine olan Öklid mesafesine dayalı bir sıralama yöntemi önermiştir. Daha sonrasında, bu çalışmada yer alan yaklaşım revize edilmiş (Wang ve ark., 2006) veya farklı mesafe temelli merkezi yaklaşımlar geliştirilmiştir. Bu yaklaşımlara örnek olarak basit ağırlık merkezi (Chen ve Chen, 2003), dönme yarıçapı (Deng ve ark., 2006), merkezlerin çevre merkezi (Rao ve Shankar, 2013), merkezlerin merkezi (Rezvani, 2013), iç merkez (Rouhparvar ve Panahi, 2015), merkez ve çevre merkezinin konveks kombinasyonu (Gong ve Xiang, 2018) verilebilir. Salas-Molina ve ark. (2023), GYBS'leri sıralamak için çok boyutlu büyüklük yaklaşımında parametrelili mesafeyi kullanmıştır. Bu tezin geniş kapsamı nedeniyle, bu bölümde GYBS'lerle ilgili çalışmalara daha fazla yer verilmemiştir. İlgilenen okuyucular, GYBS'lerin sıralanmasına yönelik yöntemler hakkında oldukça kapsamlı bir literatür taraması sunan (Sotoudeh-Anvari ve Sotoudeh-Anvari, 2023) çalışmasına başvurabilir.

Jianqiang ve Zhong (2009), GYSBS'ler için işlem kurallarının yanı sıra, sezgisel yamuksal bulanık ağırlıklı aritmetik ve geometrik ortalama gibi bazı birleştirme operatörlerini önermiştir. Ayrıca yazarlar, skor, kesinlik (accuracy) ve beklenen değere dayalı bir ÇNKV yöntemi de tanımlamıştır. Li (2010), üçgensel GSBS'ler için değer (value) ve muğlaklık (ambiguity) kavramlarını ortaya koymuştur. Ek olarak, yazar, değer endeksinin muğlaklık endeksine oranına dayalı bir sıralama tekniği önermiştir. Wan ve ark. (2013), üçgensel GSBS'lerin ağırlıklı olasılıksal ortalamasını ve Hamming mesafesini tanımlamış, birden fazla karar vericinin yer aldığı ÇNKV problemlerinin çözümü için VIKOR yöntemini uyarlamıştır. Dong ve Wan (2016a), çok nitelikli grup karar verme problemleri için uzman değerlendirmelerinin üçgensel GSBS'ler olarak ele alındığı yeni bir sıralama yöntemi geliştirmiştir. Bu sıralama süreci, ağırlıklı olasılıksal ortalama, standart sapma ve ağırlıklı Minkowski uzaklık

fonksiyonuna dayanmaktadır. Yöntemin geçerliliği, uygulanabilirliği ve diğer yöntemlerle karşılaştırılması, hisse senedi seçimi problemine uygulanarak analiz edilmiştir. Ek olarak, Dong ve Wan (2016b), benzer ön kabullerle önceliklendirilmiş çok kriterli grup karar verme konusunu araştırmıştır. Zhao ve ark. (2017), Einstein aritmetiğine dayalı yamuksal sezgisel bulanık birleştirme operatörlerini ve bunların grup ÇNKV uygulamalarındaki kullanımlarını incelemiştir. Sezgisel çerçevedeki diğer grup karar verme uygulamaları için (Wan, 2013; Wan ve Dong, 2015; Wan ve ark., 2015; Wan ve Yi, 2015; Gupta ve ark., 2016; Robinson, 2016; Wan ve ark., 2016; Das ve Guha, 2017; Liang ve ark., 2017; Liu ve ark., 2017; Qin ve ark., 2017; Su Mail ve ark. 2017; Mehlawat ve Grover, 2018; Darehmiraki, 2019; Zhou ve ark., 2019; Ashraf ve ark., 2021; Yuan ve ark., 2021; Dutta ve Borah, 2023; Wu, 2024) çalışmalarına başvurulabilir. Xu ve ark. (2019), öznitelik değerlerinin üçgensel GSBS'ler olarak ifade edildiği ÇNKV problemleri için, sıfır toplamli oyunların çözüm yaklaşımına dayalı yeni bir karar yöntemi geliştirmiştir. Diğer ÇNKV uygulamaları için (Wei ve Wang, 2009; Li ve ark., 2010; Dutta ve Guha, 2013; Verma ve ark., 2013; Wang ve ark., 2013a; Zhang ve ark., 2013; Zhang ve Nan, 2013; Liu, 2014; Luo ve ark., 2015; Singh ve ark., 2015; Das ve Guha, 2016; Chutia ve Saikia, 2018; Nayagam ve ark., 2018; Biswas ve Kumar, 2019; Nie ve ark., 2019; Xu, 2019; Razavi Hajiagha ve ark., 2020; Wu ve ark., 2020; Mohanta ve Sharanappa, 2023; Wang, 2023) çalışmalarına başvurulabilir. Tezin geniş kapsamı nedeniyle, bu bölümde genelleştirilmiş, üçgensel veya yamuksal yapıda olmayan ve aralık tipi SBS'leri içeren kaynaklara yer verilmemiştir.

Akram ve ark. (2022), GYRBS'nin üyeliklerin toplamının 1'den küçük veya eşit olma aksiomuna uygun tanımını, bazı ilişkili aritmetik işlemler ve bir sıralama fonksiyonu ile sunmuştur. Mehmood ve Bashir (2022), bu tanım ve ilgili operasyonel kuralları uygulayarak resim bulanık taşıma problemine bir çözüm önerisi geliştirmiştir. Hasan ve ark. (2023), GYRBS'lerin aritmetik işlemlerinde klasik aralık aritmetiği ile kesenleri birlikte kullanmıştır. Shit ve ark. (2022), resim bulanık çerçevede grup karar verme problemlerinin çözümünde birleştirme süreçlerinde harmonik ortalamaları kullanmıştır. Akdemir ve Aydın (2024), tereddüt, tarafsızlık ve reddi çözümlemek amacıyla ağırlıklı ortalamalı üyelik fonksiyonu kullanarak GYSBS'leri ve

GYRBS'leri standardize eden ve ardından elde edilen GYBS'leri merkez noktasının orijine olan uzaklığına göre karşılaştıran ortak bir yaklaşım önermiştir. Ağırlıklı ortalamalı üyelik fonksiyonu kavramı (Akdemir ve Kocken, 2023; Akdemir ve ark., 2023) çalışmalarında da ele alınmıştır. Popa (2024), üçgensel GRBS'ler için bir ağırlık merkezi hesaplama yöntemi önermiştir. Ayrıca, yazar belirsiz ortamlarda karar verme problemlerini çözmek için bir algoritma geliştirmiş ve bu algoritmayı ardışık iki değerlendirmede standartların performansını karşılaştırmak için kullanmıştır.

Skorların GYBS olduğu kabulüyle, kriterler arası etkileşim probleminin Choquet integrali ile birleştirilerek ele alındığı çalışmalar, Wang ve ark. (2019) ile Lu ve ark. (2023) tarafından gerçekleştirilmiştir. Beg ve Rashid (2014), Choquet integral tabanlı bir mesafe fonksiyonu kullanarak, TOPSIS yöntemi ile çok kriterli sezgisel bulanık grup karar verme problemini çözmüştür. Li ve Chen (2016), bir alternatif için tercih (preference) değerlerinin GYSBS'ler olarak ifade edildiği ÇNKV problemlerinin çözümü için karar verme kriterleri arasındaki etkileşimi ele alma yeteneğine sahip Choquet birleştirme operatörünü önermiştir. Dong ve ark. (2016), üçgensel GSBS'ler için bazı genelleştirilmiş Choquet integral operatörleri geliştirmiş ve bunların grup ÇNKV'de uygulanmasını tartışmıştır. Lourenzutti ve ark. (2017), sezgisel çerçevede ÇNKV problemlerinde kriterlerin etkileşimini Choquet integrali kullanarak ele almayı amaçlamış ve TODIM yöntemini grup karar vermeye genişleterek iki genelleştirilmiş ÇNKV yaklaşımı geliştirmiştir. Yuan ve Li (2017) sezgisel çerçevedeki Choquet integral operatörlerini beklenti (prospect) teorisiyle bütünleştirmiştir. Beklenti teorisine dayalı diğer ilgili çalışmalar Li ve ark. (2014) ile Liu ve ark. (2019) tarafından gerçekleştirilmiştir. İkinci çalışmada, genelleştirilmiş sezgisel bir çerçevede acil durum yanıtlama alternatifi seçimi için termodinamik, entropi ve risk tabanlı bir öncelik belirleme yöntemi tanıtılmıştır. Keikha ve ark. (2021), Choquet integralini TOPSIS yöntemiyle birleştirerek, grup karar verme süreçlerinde GYSBS'ler ile parametrelendirilmiş ÇNKV'ye uygulamıştır. Bunlara ek olarak, bulanık ve sezgisel bulanık dilsel sayılardan daha kapsamlı sayılar olan resim bulanık dilsel sayılar, ilişkili birleştirme operatörleri, özellikle resim bulanık Choquet integrali ve grup ÇNKV uygulamaları Qiyas ve çalışma arkadaşları (Qiyas ve ark., 2019a; Qiyas ve ark., 2019b) tarafından verilmiştir.

İlgili literatürdeki çalışmaların çoğu, genelleştirilmiş ve/veya sezgisel bulanık çerçevede karar vermeyi ele almıştır. Ancak, karar belirtme seçeneğinin belirli bir ölçüde reddedilebildiği, yani bulanıklık, çekimserlik ve reddetmenin aynı anda ifade edildiği resim bulanık çerçevede ÇNKV daha az incelenmiştir. Bilgimiz dahilinde, standart olmayan bulanık sayıların Choquet integrali ile birleştirildiği karar verme çalışmaları oldukça sınırlıdır. Choquet integrali ile birleştirme yapmadaki motivasyon, çoğu gerçek hayat probleminde karar kriterlerinin birbirinden bağımsız olarak yapılandırılmamasıdır. Literatürdeki birçok çalışma, ÇNKV uygulamalarında kriterlerin bağımsız olduğunu varsayarak birleştirme süreçlerinde toplamsal operatörleri kullanmıştır.

GYRBS'lerin tanımlanmasında bazı çalışmalar, orijinal tanıma aykırı olarak üyeliklerin toplamının 1'i geçebildiği tanımları benimsemiştir. Diğer bazı çalışmalarda kullanılan bulanık aritmetiğin ise tutarsız sonuçlara yol açtığı gözlemlenmiştir. ÇNKV uygulamalarında optimal kararın en doğru şekilde belirlenebilmesi için bu dezavantajların ortadan kaldırılması, tezin temel motivasyonunu oluşturur.

Bu tezde mevcut aritmetik işlemler bahsi geçen bu normal olmayan RBS sınıfına uyarlanmıştır. Aritmetik işlemlerde genel maksimum üyelik değerinin belirlenmesinde minimum operatörünün kullanılmasından kaynaklanan tutarsız sonuçlar sorunu ele alınmıştır. Hesaplama karmaşıklığı nedeniyle şekil korumadan vazgeçip doğrusal olmayan genişletilmiş bulanık aritmetik kullanılması tercih edilmemiştir. Hataların azaltılması ile bilgi kaybının sınırlandırılması arasında bir denge sağlayan bu çalışmada önerilen operasyonel kurallar, (Wang ve ark., 2013b) çalışmasındaki fikirleri temel almıştır. Benzer bakış açısı, Keikha ve Nehi (2016), Yuan ve Li (2017), Biswas ve Kumar (2019), Liu ve ark. (2019), Nie ve ark. (2019), Dutta (2021), Yuan ve ark. (2021) ve Akdemir ve Aydın (2024) tarafından da benimsenmiştir.

GYBS'ler için Manhattan mesafesine dayalı iki boyutlu bir büyüklük fonksiyonu kullanılarak bir sıralama yöntemi önerilmiştir. Bu fonksiyonun üstkümelerde de kullanabilmesi için hem GYSBS'ler hem de GYRBS'ler için iki risk parametresine

bağlı indirgeme süreçlerinde ağırlıklı aritmetik ortalamalar kullanılmıştır. Önerilen yaklaşım sayesinde, tartışılan en geniş sayı kümesinin elemanları olan GYBS'ler temsilci birer GYBS'ye dönüştürülmüştür. Dejenerasyon olarak adlandırılan, üstkümeden altkümelere yapılan indirgemeler yoluyla kapsanma açısından minimal bir altküme için tanımlanan herhangi bir hesaplama onun herhangi bir üstkümesine genişletilebilir. Bu parametrik hesaplama, bir yandan standartlaştırma yoluyla belirsizliği azaltırken, bir yandan da riskten kaçınmayı ayarlamamıza olanak tanımaktadır. Bu yaklaşım, yalnızca karar vericinin riske nötr olduğu durumları ele almakla kalmaz, farklı risk davranışlarını da göz önünde bulundurmaktadır. Ayrıca, indirgeme işlemi sayesinde, farklı sınıflardan olsalar bile, karma tipteki bu sayılar kolayca sıralanabilir. Dejenerasyon ile standart olmayan BS'lerin karakteristikleri sayesinde sağlanan esneklikten vazgeçerken, bilgi kaybı en aza indirgenmelidir. Durulaştırma sürecinde, karar vericinin öznel değerlendirmeleri ve risk algısı birlikte göz önüne alınır. Tüm bunlara ek olarak, parametrelerdeki değişimlerin en iyi alternatifin seçimini nasıl etkilediği incelenerek duyarlılık analizleri yapılabilir.

Etkileşimli veya bağımlı kriterlerin varlığında kullanılan Choquet integralininin resim bulanık versiyonu tartışılmıştır. Bildiğimiz kadarıyla, resim bulanık Choquet operatörü, geliştirilmiş ve yamuksal yapıdaki sayıları birleştirmekte günümüze kadar kullanılmamıştır. Grup karar verme süreçleri ve çeşitli ÇNKV yöntemlerine de kolayca uyarlanabilecek bir yaklaşım benimsenmiştir.

Tezin geri kalanı şu şekilde organize edilmiştir: Sonraki bölüm, Bölüm 3, tartışmamızla ilgili giriş bilgileri ve iyi bilinen kavramları sunmaktadır. Araştırma Bulguları isimli bölüm olan 4. bölümde tezimizin orijinal kısımları bulunmaktadır. Bu bölümde, öncelikle GYBS'lerin sıralanması için kullanılan iki boyutlu büyüklük fonksiyonu tanımlanmıştır. Ayrıca, tanımlanan bu fonksiyonu sezgisel ve resim bulanık çerçevede de kullanabilmek için önerilen, risk davranışlarına dayalı indirgeme süreci açıklanmıştır. Bunlara ek olarak, yine aynı bölümde operasyonel kuralların açıklandığı resim bulanık aritmetik verilmiştir. Sonrasında basit açıklayıcı örneklere de yer verilmiştir. 4. bölümde karar vericinin sezgisel bulanık skorlarla değerlendirme yaptığı ve karar kriterlerinin bağımlı olduğu, dolayısıyla birleştirme sürecinde

Choquet integralinin kullanıldığı bir ÇNKV uygulamasına yer verilmiştir. Tez, Tartışma ve Sonuç bölümü olan Bölüm 5 ile bitirilmiştir.



BÖLÜM 3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde, tez için gerekli olan terminoloji ve temel kavramlar tanıtılmıştır.

3.1. Standart Bulanık Küme

X evrensel küme, $\mu_{\tilde{A}} : X \rightarrow [0,1]$ üyelik fonksiyonu ve $\mu_{\tilde{A}}(x)$, $x \in X$ elemanının $\tilde{A}$ bulanık kümesine üyelik (aitlik) derecesi olmak üzere,

$$\tilde{A} = \{\langle x, \mu_{\tilde{A}}(x) \rangle \mid x \in X\} \quad (3.1)$$

şeklinde karakterize ediliyorsa X kümesi üzerinde $\tilde{A}$ standart bulanık kümesi adını alır.

3.2. Genelleştirilmiş Bulanık Sayı

$p, m, n, q \in \mathbb{R}$, $p < m \leq n < q$ ve $\alpha \in [0,1]$ olsun. $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesinin bir bulanık altkümesi olan $\tilde{A}$ kümesinin üyelik fonksiyonu $\mu_{\tilde{A}}$ aşağıdaki şartları sağlıyorsa GBS adını alır:

- $\mu_{\tilde{A}} : \mathbb{R} \rightarrow [0, \alpha]$ süreklidir,
- $x < p$ veya $x > q$ için $\mu_{\tilde{A}}(x) = 0$,
- $\mu_{\tilde{A}}(x)$, $[p, m]$ aralığında monoton artan ve $[n, q]$ aralığında ise monoton azalandır,
- $\forall x \in [m, n]$ için $\mu_{\tilde{A}}(x) = \alpha$ (Chen, 1985).

Burada $\alpha \in [0,1]$ parametresi, $\tilde{A}$ bulanık sayısının yüksekliği olarak adlandırılır ve uzman görüşlerine olan güven düzeyini temsil eder.

3.3. Kesen Aralığı

$\tilde{A}_L(r)$ ve $\tilde{A}_R(r)$ sırasıyla üyelik fonksiyonunun sol ve sağ tarafı için ters fonksiyonlar olmak üzere, $\tilde{A}$ bulanık sayısının r – seviye kümesi aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\begin{aligned} \tilde{A}_r &= \{x \in \mathbb{R} \mid \mu_{\tilde{A}}(x) \geq r, r \in [0, \alpha]\} \\ &= [\tilde{A}_L(r), \tilde{A}_R(r)]. \end{aligned} \quad (3.2)$$

3.4. Sezgisel Bulanık Küme

$\forall x \in X$ için $\mu_{\tilde{A}}(x) + \nu_{\tilde{A}}(x) \leq 1$ olacak şekilde $\mu_{\tilde{A}} : X \rightarrow [0,1]$, $\tilde{A}$ kümesinin üyelik fonksiyonu ve $\nu_{\tilde{A}} : X \rightarrow [0,1]$ ise üye olmama fonksiyonu olmak üzere,

$$\tilde{A} = \{\langle x, \mu_{\tilde{A}}(x), \nu_{\tilde{A}}(x) \rangle \mid x \in X\} \quad (3.3)$$

kümesi X evrensel kümesi üzerinde bir SBK adını alır. $\pi_{\tilde{A}}(x) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(x) - \nu_{\tilde{A}}(x)$ şeklinde tanımlanan $\pi_{\tilde{A}}$ fonksiyonu ise tereddüt derecesi olarak isimlendirilir.

Alt Tanımlar:

1. Eğer $\mu_{\tilde{A}}(x) = 1$ olacak şekilde $\exists x \in X$ mevcut ise $\tilde{A}$ kümesi normaldir.
2. Eğer $\forall x_1, x_2 \in X$ ve $\forall \lambda \in [0,1]$ için $\mu_{\tilde{A}}(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \min(\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_2))$ eşitsizliği sağlanıyorsa üyelik fonksiyonu $\mu_{\tilde{A}}$ konvektir.
3. Eğer $\forall x_1, x_2 \in X$ ve $\forall \lambda \in [0,1]$ için $\nu_{\tilde{A}}(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \max(\nu_{\tilde{A}}(x_1), \nu_{\tilde{A}}(x_2))$ eşitsizliği sağlanıyorsa üye olmama fonksiyonu $\nu_{\tilde{A}}$ konkavdır.
4. Eğer $\mu_{\tilde{A}}$ konveks ve $\nu_{\tilde{A}}$ konkav ise $\tilde{A}$ kümesi SB-konvektir.
5. Reel eksenin bulanık alt kümesi, yani $X = \mathbb{R}$ olan bir SBK, normal ve SB-konveks ise SBS adını alır. Dolayısıyla, SBS, SBK'nin özel bir halidir.
6. Normallik aksiyomunun sağlanmasının gerekli olmadığı her $\tilde{A}$ GSBS'sinin üyelik fonksiyonları $\mu_{\tilde{A}}(x)$ ve $(1 - \nu)_{\tilde{A}}(x) = 1 - \nu_{\tilde{A}}(x)$ olan iki GBS'den oluştuğu düşünülür.
7. Eğer $\forall x \in X$ için $\mu_{\tilde{A}}(x) = 1 - \nu_{\tilde{A}}(x)$ veya $\pi_{\tilde{A}}(x) = 0$ ise GSBS $\tilde{A}$, bir GBS'ye indirgenir.

3.5. Resim Bulanık Küme

$\forall x \in X$ için $\mu_{\tilde{A}}(x) + \eta_{\tilde{A}}(x) + \nu_{\tilde{A}}(x) \leq 1$ olacak şekilde $\mu_{\tilde{A}} : X \rightarrow [0,1]$, $\tilde{A}$ kümesinin pozitif üyelik fonksiyonu, $\eta_{\tilde{A}} : X \rightarrow [0,1]$, nötr üyelik fonksiyonu ve $\nu_{\tilde{A}} : X \rightarrow [0,1]$ ise negatif üyelik fonksiyonu olmak üzere,

$$\tilde{A} = \{ \langle x, \mu_{\tilde{A}}(x), \eta_{\tilde{A}}(x), \nu_{\tilde{A}}(x) \rangle \mid x \in X \} \quad (3.4)$$

kümesi X evrensel kümesi üzerinde bir RBK adını alır. $\pi_{\tilde{A}}(x) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(x) - \eta_{\tilde{A}}(x) - \nu_{\tilde{A}}(x)$ şeklinde tanımlanan $\pi_{\tilde{A}}$ fonksiyonu ise reddetme derecesi olarak isimlendirilir.

Alt Tanımlar:

1. Eğer $\mu_{\tilde{A}}(x_1) = 1$ ve $\eta_{\tilde{A}}(x_2) = 1$ olacak şekilde $\exists x_1, x_2 \in X$ mevcut ise $\tilde{A}$ kümesi normaldir.
2. Eğer $\mu_{\tilde{A}}, \eta_{\tilde{A}}$ konveks ve $\nu_{\tilde{A}}$ konkav ise $\tilde{A}$ kümesi RB-konvektir. Reel eksenin bulanık altkümesi olan bir RBK, normal ve RB-konveks ise RBS adını alır. Dolayısıyla, RBS, RBK'nın özel bir halidir.
3. Normallik aksiyomunun sağlanmasının gerekli olmadığı her $\tilde{A}$ GRBS'sinin, üyelik fonksiyonları $\mu_{\tilde{A}}(x)$, $\eta_{\tilde{A}}(x)$ ve $(1 - \nu)_{\tilde{A}}(x) = 1 - \nu_{\tilde{A}}(x)$ olan üç GBS'den oluştuğu düşünülür.
4. Eğer $\forall x \in X$ için $\eta_{\tilde{A}}(x) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(x) - \nu_{\tilde{A}}(x)$ ($\pi_{\tilde{A}}(x) = 0$) veya $\eta_{\tilde{A}}(x) = 0$ ise GRBS $\tilde{A}$, bir GSBS'ye indirgenir. Kısaca, reddetme veya nötr olma (çekimserlik, tarafsızlık) derecesi 0 ise GRBS bir GSBS haline gelir.

3.6. Genelleştirilmiş Yamuksal Resim Bulanık Sayı (Akram ve ark., 2022)

$p_3 \leq p_2 \leq p_1 < m \leq n < q_1 \leq q_2 \leq q_3$ ve $0 < \alpha + \gamma + \beta \leq 1$ olmak üzere, reel ekseninde bir GYRBS $\tilde{A}$, aşağıda verilen parçalı lineer pozitif, nötr ve negatif üyelik fonksiyonları ile karakterize edilir:

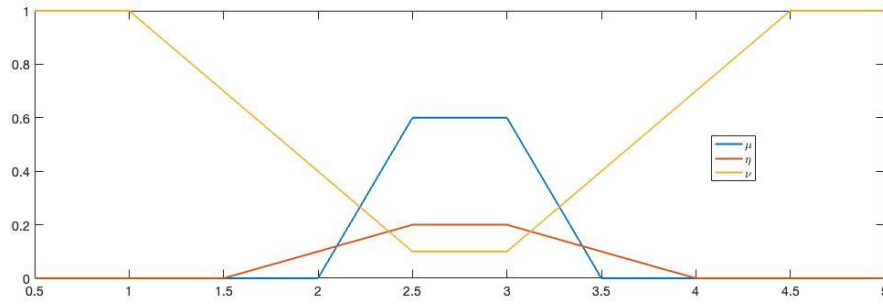
$$\begin{aligned} \mu_{\tilde{A}}(x) &= \max \left\{ \min \left\{ \frac{\alpha(x-p_1)}{m-p_1}, \alpha, \frac{\alpha(q_1-x)}{q_1-n} \right\}, 0 \right\}, \\ \eta_{\tilde{A}}(x) &= \max \left\{ \min \left\{ \frac{\gamma(x-p_2)}{m-p_2}, \gamma, \frac{\gamma(q_2-x)}{q_2-n} \right\}, 0 \right\}, \\ \nu_{\tilde{A}}(x) &= \min \left\{ \max \left\{ 1 - \frac{(1-\beta)(x-p_3)}{m-p_3}, \beta, 1 - \frac{(1-\beta)(q_3-x)}{q_3-n} \right\}, 1 \right\}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

α maksimum pozitif üyelik, γ maksimum nötr üyelik ve β minimum negatif üyelik olarak adlandırılır. Nötr üyelik yok ise, yani eğer $\gamma = 0$, ise keyfi $p_2 \in [p_3, p_1]$ ve $q_2 \in [q_1, q_3]$ değerleri için bir GYSBS elde edilir. Yukarıdaki şartlara ek olarak, tereddüt derecesi yok ise, yani eğer $\alpha + \beta = 1$ ise, ayrıca $p_3 = p_2 = p_1$ ve $q_1 = q_2 =$

q_3 ise, o halde bir GYBS elde edilir. Eğer $m = n$ ise üçgensel formlar elde edilir. Dolayısıyla, GYRBS sınıfı, GYSBS ve GYBS kümelerini içerdiğinden, tezin ilgi alanındaki en genel sayı kümesi olarak kabul edilmektedir.

Bir GYRBS için $\tilde{A} = \langle (p_3, p_2, p_1, m, n, q_1, q_2, q_3); \alpha, \gamma, \beta \rangle$; bir GYSBS için $\tilde{A} = \langle (p_3, p_1, m, n, q_1, q_3); \alpha, \beta \rangle$ ve bir GYBS için $\tilde{A} = \langle (p_1, m, n, q_1); \alpha \rangle$ notasyonu kullanılacaktır.

Dikkat edilirse, GYRBS tanımındaki nötr üyelik fonksiyonu, pozitif üyelik fonksiyonu gibi konvektir. Buna karşılık, bazı özel koşulları sağlamadığı halde konkav olan nötr üyelik fonksiyonunun göz önüne alındığı ve bu nedenle üyelik değerlerinin toplamının 1'i aşabildiği çalışmalar, bu tezin kapsamı dışındadır. Daha ayrıntılı bilgi için (Akram ve ark., 2022, s. 3) çalışmasına başvurulabilir.



Şekil 3.1. Örnek 3.1 için üyelik fonksiyonları.

Örnek 3.1. $\tilde{A} = \langle (1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4, 4.5); 0.6, 0.2, 0.1 \rangle$ GYRBS'sini göz önüne alalım. Üyelik fonksiyonlarının görsel temsilleri için Şekil 3.1.'e başvurunuz.

Yorumlayacak olursak, bu sayı bir performans skoru olarak görülürse, adayın puanı en az 1 ile 2 arasında, en çok 3.5 ile 4.5 arasındadır. Puanın en muhtemel (mod) değeri 2.5 ile 3 arasındadır. Adayın ilgili kriteri sağlaması hakkında duyulan maksimum tatmin %60, maksimum çekimserlik (“evet, tatmin oldum” ile “hayır, tatmin olmadım” arasında kalma düzeyi) %20 ve minimum tatminsizlik ise %10'dur. Tatminin ve çekimserliğin maksimum, tatminsizliğin ise minimum olduğu durumda, puanlamayı reddetme derecesi ise yine %10'dur. Karar vericiden her bir puan için toplamda 11

parametre değerini sunması istenmektedir. Sezgisel çerçevede parametre sayısı 8'e düşerken, genelleştirilmiş çerçevede ise bu sayı 5'tir.

3.7. Ortalama Değer

$\tilde{A} = \langle (p, m, n, q) ; \alpha \rangle$ bir GYBS olsun. Ortalama değer (kısaca ortalama veya değer):

$$\begin{aligned} m(\tilde{A}) &= \frac{1}{\alpha^2} \int_0^\alpha r [\tilde{A}_L(r) + \tilde{A}_R(r)] dr \\ &= \frac{1}{\alpha^2} \int_0^\alpha r \left[p + (m - p) \frac{r}{\alpha} + q - (q - n) \frac{r}{\alpha} \right] dr \\ &= \frac{p + 2m + 2n + q}{6} \end{aligned} \quad (3.6)$$

şeklinde hesaplanır (Gu ve Xuan, 2017; Stoklasa ve ark., 2022). Dikkat edilirse, ortalama değer, sayının yüksekliğinden bağımsızdır; dolayısıyla, normal sayılar için de aynı şekilde hesaplanır. Bu tezde, yükseklik bileşeni ayrıca ele alındığı için (3.6) denklemindeki ortalama değer tanımı benimsenmiştir. Literatürde, yüksekliği de içeren farklı değer tanımları bulunmaktadır.

3.8. Maksimum-Minimum Dönüşümü

x orijinal tanım bölgesindeki değer ve x_N normalize edilmiş değer olmak üzere, eğer normalize edilen bulanık sayı fayda tipli ise

$$x_N = \begin{cases} \frac{x - x_{min}}{x_{max} - x_{min}}, & x_{max} \neq x_{min} \\ 0, & \text{aksi halde,} \end{cases} \quad (3.7)$$

maliyet tipli ise

$$x_N = \begin{cases} \frac{x_{max} - x}{x_{max} - x_{min}}, & x_{max} \neq x_{min} \\ 0, & \text{aksi halde,} \end{cases} \quad (3.8)$$

formülleri ile $[0,1]$ aralığına normalize edilir. Ayrıca, orijinal tanım bölgesi olan reel alt aralıkta K farklı değer mevcut ise, $k \in \{1,2, \dots, K\}$ olmak üzere burada, $x_{min} = \min_k \{x_k\}$ ve $x_{max} = \max_k \{x_k\}$ şeklindedir.

3.9. Kapasite (Bulanık Ölçüm)

Sonlu C kümesinin kuvvet kümesi $P(C)$ olmak üzere, $g : P(C) \rightarrow [0,1]$ küme fonksiyonu

- a. $g(\emptyset) = 0$,
- b. $g(C) = 1$,
- c. $E, F \subseteq C$ olmak üzere, $E \subseteq F$ ise $g(E) \leq g(F)$

aksiyomlarını sağlıyorsa C kümesi üzerinde bulanık ölçüm adını alır.

E kümesi kriterlerin bir kombinasyonu olmak üzere $g(E)$ bu kriter kümesinin önem ağırlığı olarak yorumlanabilir.

Ayrıca, $E, F \subseteq C$ ve $E \cap F = \emptyset$ olmak üzere,

- a. g toplamsal ölçüm, yani $g(E \cup F) = g(E) + g(F)$ ise E, F kriter kümeleri etkileşimsizdir,
- b. g üsttoplamsal ölçüm, yani $g(E \cup F) > g(E) + g(F)$ ise E, F kriter kümeleri birbirini tamamlayan veya pozitif sinerjik kriterlerdir,
- c. g alttoplamsal ölçüm, yani $g(E \cup F) < g(E) + g(F)$ ise E, F kriter kümeleri birbiri yerine geçebilen veya negatif sinerjik kriterlerdir denir.

3.10. Sugeno Ölçümü

$E, F \subseteq C$, $E \cap F = \emptyset$ ve $\lambda > -1$ olmak üzere, alttoplamsal g bulanık ölçümü

$$g(E \cup F) = g(E) + g(F) + \lambda g(E)g(F) \quad (3.9)$$

eşitliği sağlanıyorsa Sugeno (λ -) ölçümü adını alır.

$C = \{c_1, c_2, \dots, c_J\}$ olmak üzere, $\lambda > -1$ parametresi

$$1 + \lambda = \prod_{j=1}^J (1 + \lambda g(\{c_j\})) \quad (3.10)$$

denklemleri ile hesaplanır.

Sezgisel bulanık Choquet integralinin tanımı genişletilerek, Bölüm 3.11 ile verilen Choquet birleştirme operatörünün resim bulanık versiyonu elde edilmiştir. Daha fazla ayrıntı için (Keikha ve ark., 2021) çalışmasına başvurulabilir.

3.11. Resim Bulanık Choquet İntegrali

Resim bulanık sayılardan oluşan $\{\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_J\}$ kümesinin $\tilde{a}_{(1)} \leq \tilde{a}_{(2)} \leq \dots \leq \tilde{a}_{(J)}$ eşitsizliğini sağlayan permütasyonu $\{\tilde{a}_{(1)}, \tilde{a}_{(2)}, \dots, \tilde{a}_{(J)}\}$, g bir bulanık ölçüm ve $g(\{(J+1)\}) = 0$ olmak üzere,

$$RBC_g(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_J) = \sum_{j=1}^J \tilde{a}_{(j)} [g(\{(j), \dots, (J)\}) - g(\{(j+1), \dots, (J)\})] \quad (3.11)$$

şeklinde tanımlanan $RBC_g: \widetilde{[0,1]}^J \rightarrow [0,1]$ birleştirme operatörüne Resim Bulanık Choquet integrali denir.

BÖLÜM 4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Birçok sıralama yöntemi durulaştırma aracılığıyla BS'leri reel sayılara karşılık getirir ve daha sonra iki BS'nin sıralanması, bu eşleşmeden elde edilen değerlerin karşılaştırılmasına indirgenir. Bu tezde önerilen, uzaklığa dayalı iki boyutlu büyüklük yaklaşımı, Reig-Mullor ve ark. (2022) ve Salas-Molina ve ark. (2023) çalışmalarından ilham almaktadır. Yazarlar, ikinci çalışmada GBS'leri sıralamak için çok boyutlu bir büyüklük fonksiyonu kullanan ve literatürdeki çoğu yaklaşımı genelleyen bir yöntem önermiştir. Her bir boyut GBS'nin bir bileşenine karşılık gelmektedir. Bu bileşenler GBS'nin ortalama değeri, standart sapması, yüksekliği, kötümser, en çok olası, iyimser değerleri, bu değerlerin çarpımı ve benzer karakteristikleri olabilir. Ancak, ölçek uyumu oluşturmak için ve uzaklık fonksiyonu ile negatif değerlerin sıralanması çelişkiler yaratabileceğinden başlangıçta (3.7) veya (3.8) denklemi ile normalizasyon yaparak veriyi hazırlamak doğru olur. Örneğin, yatay ekseninde BS'nin normalleştirilmiş ortalaması ve düşey ekseninde ise normalleştirilmiş standart sapması işaretlenirse iki boyutlu normalize edilmiş düzlemde (birim karede) bu BS temsil edilmiş olur. Böylelikle, sadece ortalama değer değil değişkenlik de göz önüne alınmış olur. Büyüklük olarak tanımlanan değer ise çok boyutlu normalize edilmiş uzaydaki noktanın orijine olan uzaklığıdır.

Kardinalitesi u olan, $\tilde{A}$ GYBS'sini temsil eden normalize edilmiş bileşen değerleri kümesi $\{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_u\}$, bu bileşenlere karşılık gelen önem ağırlıkları $\{w_1, w_2, \dots, w_u\}$ ve $v \in [0, \infty]$ önceden belirlenen parametre değeri olmak üzere, burada uzaklık fonksiyonu olarak parametrik Minkowski uzaklık fonksiyonu:

$$d(\tilde{A}, v) = (\sum_{i=1}^u w_i^v \theta_i^v)^{\frac{1}{v}} \quad (4.1)$$

kullanılmaktadır. $v = 1$ için koordinatların ağırlıklı toplamı alınır ve Manhattan mesafesi elde edilmiş olur. Önem ağırlıklarının eşit olarak alındığı varsayılırsa, yani $w_1 = w_2 = \dots = w_u = 1$ ise $v = 2$ için Öklid mesafesi, $v = 0$ için koordinatların çarpımı ve $v = \infty$ için ise koordinatların maksimumu alınarak Chebyshev mesafesi hesaplanmış olur (Salas-Molina ve ark., 2023).

Yöntemi uyarlarken yaptığımız kabuller aşağıdaki gibidir:

- GYBS'leri temsil etmek için iki bileşen, değer ve yükseklik, dikkate alınmıştır. İki boyutlu büyüklük yaklaşımında yatay eksen değere, düşey eksen ise yüksekliğe karşılık gelir.
- Sürecin başında, karşılaştırmalar için ortak bir ölçek sağlamak amacıyla normalizasyon tekniği olarak maksimum-minimum dönüşümü uygulanmıştır.
- Her iki bileşen için de eşit önem ağırlıkları kullanılmıştır, yani $w_1 = w_2 = 1$.
- Mesafe için özel olarak orijine olan Manhattan uzaklığı alınmış, yani normalleştirilmiş birim bölgedeki koordinatların toplamına dayalı iki boyutlu bir büyüklük yaklaşımı kullanarak GYBS'ler sıralanmıştır.

4.1. İki Boyutlu Büyüklük Fonksiyonu

$\tilde{A}$, bir GYBS, $h(\tilde{A})$ onun yüksekliği ve değer normalizasyon işlemi sonrasında hesaplanmış olsun, yani $m(\tilde{A}) \in [0,1]$ ise $Mag(\tilde{A}) = m(\tilde{A}) + h(\tilde{A})$ şeklinde tanımlanan büyüklük fonksiyonu bir sıralama fonksiyonudur, yani $\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ iki GYBS olmak üzere, büyüklüğe dayalı sıralama prosedürü aşağıdaki şekilde verilebilir:

- Eğer $Mag(\tilde{A}) < Mag(\tilde{B})$ ise $\tilde{A} < \tilde{B}$,
- Aksi halde, eğer $Mag(\tilde{A}) > Mag(\tilde{B})$ ise $\tilde{A} > \tilde{B}$,
- Aksi halde $\tilde{A} \sim \tilde{B}$.

Burada yapılan sıralama tercih belirtmektedir, yani $\tilde{A} > \tilde{B}$ sıralaması “ $\tilde{A}$ karar alternatifi $\tilde{B}$ alternatifine tercih edilir” şeklinde değerlendirilir. Yükseklik arttıkça bilginin güvenilirliği artacaktır. Ayrıca fayda tipli bir BS için ortalama değer daha yüksek olması, tercih edilirliliği arttırır; dolayısıyla, alternatifin büyüklük değerinin artması, o alternatifi daha tercih edilir kılar.

Şimdi, sıralama yaklaşımının kullanımını standart olmayan BS'lere genişletmek amacıyla ağırlıklı aritmetik ortalamalara dayalı ve riske duyarlı dejenerasyon süreci açıklanmıştır. Literatürde “kesin ağırlıklı olasılıksal (davranışsal) ortalama” olarak bilinen bu süreçte kullanılan ortalama tipi, ilk kez Yager (2004) tarafından tanımlanmıştır. Daha ayrıntılı bilgi için ise (Wan ve ark., 2013; Gupta ve ark., 2016) çalışmalarına başvurulabilir.

4.2. İki Risk Parametrelili İndirgeme İşlemleri

$\tilde{A} = \langle (p_3, p_2, p_1, m, n, q_1, q_2, q_3); \alpha, \gamma, \beta \rangle$ fayda tipli bir GYRBS olsun. $s, t \geq 0$ risk parametreleri olmak üzere, bu sayı aşağıdaki yaklaşımlar aracılığı ile temsilci bir $T(\tilde{A}) = \langle (p, m, n, q); h(\tilde{A}) \rangle$ GYBS'sine indirgenebilir:

$$\begin{aligned} p &= \frac{sp_3 + p_1}{s+1}, \\ q &= \frac{sq_1 + q_3}{s+1}, \\ h(\tilde{A}) &= \frac{1}{t+1} [t\alpha + 1 - \beta]. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Bu indirgemelerdeki parametre değerleri ile karar verici karakterleri ilişkilendirilmek istenirse, $s, t < 1$ olduğunda, genel yükseklik $h(\tilde{A})$ (veya bilginin güvenilirliği) maksimum $(1 - \beta)$ değerine yaklaşırken, fayda tipli genel ortalama $m(\tilde{A})$ da en büyük $(p_1 + 2m + 2n + q_3)/6$ değerine yaklaşır, bu da karar vericinin iyimser (risk sever) olduğunu gösterir. Benzer şekilde, $s, t > 1$ için $h(\tilde{A})$ minimum α değerine yaklaşırken $m(\tilde{A})$ karamsar (kötümser, riskten kaçınan) bir şekilde en küçük $(p_3 + 2m + 2n + q_1)/6$ değerine yaklaşır. $(s, t) = (1, 1)$ ise riske nötr adı verilen ne iyimser ne de kötümser karar davranışını temsil eder.

Maliyet tipli bir GYRBS için $s > 1, t < 1$ durumu iyimser karar davranışını ve $s < 1, t > 1$ durumu ise kötümser karar davranışını ifade eder. $(s, t) = (1, 1)$ durumu yine nötr davranıştır.

Karar vericinin iyimserlik derecesine, yani risk toleransına uygun olarak parametrelerin kalibre edilmesiyle etkileşimli bir karar alma süreci gerçekleştirilebilir. Bu tezde basitlikten uzaklaşmamak amacıyla her bir indirgeme denkleminde yalnızca tek bir risk parametresi kullanılmıştır. Ancak, nötr üyelikle ilişkili olan p_2 , q_2 ve γ değerlerinin de (4.2) indirgemelerinde dikkate alınması istenirse parametre sayısı artırılarak bu değerler de hesaba katılabilir. Bu durumda, karmaşıklaştıran karar davranışları ile parametre değerlerinin ilişkilendirilmesi büyük bir hassasiyet gerektirir.

4.3. Resim Bulanık Aritmetik İşlemler

Ortalamaları aynı anda sıfır olmayan

$$\tilde{A} = \langle (p_3, p_2, p_1, m, n, q_1, q_2, q_3); \alpha_1, \gamma_1, \beta_1 \rangle \quad (4.3)$$

ve

$$\tilde{B} = \langle (p'_3, p'_2, p'_1, m', n', q'_1, q'_2, q'_3); \alpha_2, \gamma_2, \beta_2 \rangle \quad (4.4)$$

GYRBS'lerini göz önüne alalım, ayrıca $c \in \mathbb{R}$ olsun. $\tilde{A} + \tilde{B}$ sayısı da yine bir GYRBS'dir ve aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$\begin{aligned} \tilde{A} + \tilde{B} = \langle (p_3 + p'_3, p_2 + p'_2, p_1 + p'_1, m + m', n + n', \\ q_1 + q'_1, q_2 + q'_2, q_3 + q'_3); \alpha, \gamma, \beta \rangle. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Burada

$$\begin{aligned} m(\tilde{A}_\mu) &= \frac{|p_1 + 2m + 2n + q_1|}{6}, \quad m(\tilde{B}_\mu) = \frac{|p'_1 + 2m' + 2n' + q'_1|}{6}, \\ m(\tilde{A}_\eta) &= \frac{|p_2 + 2m + 2n + q_2|}{6}, \quad m(\tilde{B}_\eta) = \frac{|p'_2 + 2m' + 2n' + q'_2|}{6}, \\ m(\tilde{A}_\nu) &= \frac{|p_3 + 2m + 2n + q_3|}{6}, \quad m(\tilde{B}_\nu) = \frac{|p'_3 + 2m' + 2n' + q'_3|}{6} \end{aligned} \quad (4.6)$$

olmak üzere,

$$\alpha = \frac{m(\tilde{A}_\mu)\alpha_1 + m(\tilde{B}_\mu)\alpha_2}{m(\tilde{A}_\mu) + m(\tilde{B}_\mu)},$$

$$\gamma = \frac{m(\tilde{A}_\eta)\gamma_1 + m(\tilde{B}_\eta)\gamma_2}{m(\tilde{A}_\eta) + m(\tilde{B}_\eta)}, \quad (4.7)$$

$$\beta = \frac{m(\tilde{A}_\nu)\beta_1 + m(\tilde{B}_\nu)\beta_2}{m(\tilde{A}_\nu) + m(\tilde{B}_\nu)}$$

şeklindedir. (4.7) eşitliklerinde, her bir satırın paydasındaki ortalamalar aynı anda 0 olduğunda, α, γ ve β değerleri ağırlıklı aritmetik ortalama yerine aritmetik ortalama ile hesaplanabilir. Başka bir deyişle,

$$m(\tilde{A}_\mu) = m(\tilde{B}_\mu) = 0 \Rightarrow \alpha = (\alpha_1 + \alpha_2)/2,$$

$$m(\tilde{A}_\eta) = m(\tilde{B}_\eta) = 0 \Rightarrow \gamma = (\gamma_1 + \gamma_2)/2, \quad (4.8)$$

$$m(\tilde{A}_\nu) = m(\tilde{B}_\nu) = 0 \Rightarrow \beta = (\beta_1 + \beta_2)/2.$$

Skaler çarpımda da şekil korunur:

$$c\tilde{A} = \begin{cases} \langle (cp_3, cp_2, cp_1, cm, cn, cq_1, cq_2, cq_3); \alpha_1, \gamma_1, \beta_1 \rangle, & c \geq 0 \\ \langle (cq_3, cq_2, cq_1, cn, cm, cp_1, cp_2, cp_3); \alpha_1, \gamma_1, \beta_1 \rangle, & c < 0. \end{cases} \quad (4.9)$$

Örnek 4.1. $\tilde{A} = \langle (1,2,4,5); 0.3 \rangle$ ve $\tilde{B} = \langle (1,2,4,5); 0.9 \rangle$ GYBS'leri için sezgisel olarak $\tilde{A} < \tilde{B}$. Eğer $\tilde{A} < \tilde{B}$ ise her iki tarafa da $\tilde{A}$ eklenirse $2\tilde{A} < \tilde{A} + \tilde{B}$ olmalıdır. (4.5)-(4.9) ile verilen toplama ve skaler çarpım işlemleri:

$$\begin{aligned} \tilde{A} + \tilde{B} &= \langle (2,4,8,10); 0.6 \rangle, \\ 2\tilde{A} &= \langle (2,4,8,10); 0.3 \rangle \end{aligned} \quad (4.10)$$

şeklinde tutarlı bir sıralama verir.

Örnek 4.2. Aşağıda verilen GYSBS'ler için sezgisel olarak $\tilde{B} \sim \tilde{C}$ olduğundan dolayı $\tilde{A} + \tilde{B} \sim \tilde{A} + \tilde{C}$ olmalıdır.

$$\tilde{A} = \langle (10,12,15,15,18,20); 0.6,0.4 \rangle,$$

$$\tilde{B} = \langle (2,4,5,5,6,8); 0.7,0.3 \rangle, \quad (4.11)$$

$$\tilde{C} = \langle (2,4,5,5,6,8); 0.9,0.1 \rangle.$$

Bölüm 4.3 ile verilen resim bulanık aritmetik işlemler uygulanırsa

$$\tilde{A} + \tilde{B} = \langle (12,16,20,20,24,28); 0.625,0.375 \rangle,$$

$$\tilde{A} + \tilde{C} = \langle (12,16,20,20,24,28); 0.675,0.325 \rangle \quad (4.12)$$

şeklinde farklı sayılar elde edilir. Literatürde çoğunlukla yapıldığı gibi, toplama işleminde maksimal üyeliğin hesaplanmasında minimum operatörünün kullanılması çelişkilere yol açar.

Örnek 4.3. (Kumar ve ark., 2011; Rouhparvar ve Panahi, 2015; Akdemir ve Aydın, 2024) Fayda tipli $\tilde{A} = \langle (0.2,0.4,0.6,0.8); 0.35 \rangle$ ve $\tilde{B} = \langle (0.1,0.2,0.3,0.4); 0.70 \rangle$ GYBS'leri (3.7) denklemi kullanılarak normalize edilirse:

$$\tilde{A} \sim \langle (1/7, 3/7, 5/7, 1); 0.35 \rangle,$$

$$\tilde{B} \sim \langle (0, 1/7, 2/7, 3/7); 0.70 \rangle. \quad (4.13)$$

Buradan

$$\begin{aligned} Mag(\tilde{A}) &= m(\tilde{A}) + h(\tilde{A}) \\ &= 4/7 + 0.35 = 0.9214, \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$Mag(\tilde{B}) = 3/14 + 0.70 = 0.9143 \Rightarrow \tilde{A} > \tilde{B}.$$

Ayrıca,

$$\begin{aligned} Mag(-\tilde{A}) &= m(-\tilde{A}) + h(-\tilde{A}) \\ &= 3/7 + 0.35 = 0.7786, \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$Mag(-\tilde{B}) = 11/14 + 0.70 = 1.4857 \Rightarrow -\tilde{A} < -\tilde{B}.$$

Bulunan sonuçlar, literatürde verilenlerle uyumludur.

Tablo 4.1. Risk parametresine göre Örnek 4.4 için elde edilen sonuçlar.

Parametre değeri		$\tilde{A}$	$\tilde{B}$
	h	0.8000	0.7940
$t = 0.25$	Mag	1.2792	1.2523
Risk sever davranış	Sonuç	$\tilde{A} > \tilde{B}$	
	h	0.6500	0.6650
$t = 1$	Mag	1.1292	1.1233
Riske nötr davranış	Sonuç	$\tilde{A} > \tilde{B}$	
	h	0.5250	0.5575
$t = 3$	Mag	1.0042	1.0158
Riskten kaçınan davranış	Sonuç	$\tilde{A} < \tilde{B}$	

Örnek 4.4. Üçgensel formdaki ve örtüştüğü (overlapping) için sıralanması zor olan $\tilde{A} = \langle (1, 1, 5, 5, 8, 8); 0.40, 0.10 \rangle$ ve $\tilde{B} = \langle (3, 3, 4, 4, 9, 9); 0.45, 0.12 \rangle$ fayda tipli GSBS'leri normalizasyon işlemi sonrasında, sırasıyla

$$\begin{aligned} &\langle (0, 0, 0.5, 0.5, 0.875, 0.875); 0.40, 0.10 \rangle \\ &\text{ve} \\ &\langle (0.25, 0.25, 0.375, 0.375, 1, 1); 0.45, 0.12 \rangle \end{aligned} \quad (4.16)$$

şeklini alır. Bu sayıların ortalama değerleri, virgülden sonra 4 basamak hassaslıkta, sırasıyla $m(\tilde{A}_\mu) = m(\tilde{A}_\nu) = 0.4792$ ve $m(\tilde{B}_\mu) = m(\tilde{B}_\nu) = 0.4583$ olarak hesaplanır. t parametresinin değişimine göre elde edilen sıralama sonuçları Tablo 4.1.'de verilmiştir.

Ayrıca, belirli bir parametre değeri için eğer $\tilde{A} > \tilde{B}$ ise $\tilde{A} - \tilde{B} > \tilde{B} - \tilde{B}$ olmalıdır. Benzer şekilde, eğer $\tilde{A} < \tilde{B}$ ise $\tilde{A} - \tilde{B} < \tilde{B} - \tilde{B}$ sıralaması geçerli olmalıdır. $-\tilde{B} \sim \langle (-9, -9, -4, -4, -3, -3); 0.45, 0.12 \rangle$ olduğundan, virgülden sonra 4 basamak hassaslıkta

$$\begin{aligned} &\tilde{A} - \tilde{B} \sim \langle (-8, -8, 1, 1, 5, 5); 0.4246, 0.1098 \rangle \\ &\tilde{B} - \tilde{B} \sim \langle (-6, -6, 0, 0, 6, 6); 0.4500, 0.1200 \rangle \end{aligned} \quad (4.17)$$

hesaplanır. Normalizasyon sonrasında elde edilen sonuçlar Tablo 4.2.’de verilmiştir.

Tablo 4.2. Risk parametresine göre Örnek 4.4 için elde edilen diğer sonuçlar.

Parametre değeri		$\tilde{A} - \tilde{B}$	$\tilde{B} - \tilde{B}$
	h	0.7971	0.7940
$t = 0.25$ risk sever davranış	Mag	1.3804	1.3654
	Sonuç	$\tilde{A} - \tilde{B} > \tilde{B} - \tilde{B}$	
	h	0.6574	0.6650
$t = 1$ riske nötr davranış	Mag	1.1204	1.2364
	Sonuç	$\tilde{A} - \tilde{B} > \tilde{B} - \tilde{B}$	
	h	0.5410	0.5575
$t = 3$ riskten kaçınan davranış	Mag	1.1243	1.1289
	Sonuç	$\tilde{A} - \tilde{B} < \tilde{B} - \tilde{B}$	

Tablo 4.2.’de verilen sıralamalar Tablo 4.1.’deki sıralamalarla tutarlıdır. Parametre için dönüm noktası $t = 1.4$ noktasıdır. Bu değer için $\tilde{A} \sim \tilde{B}$ sıralaması elde edilmektedir. Ne yazık ki, yine bu parametre değeri için $\tilde{A} - \tilde{B} \sim \tilde{B} - \tilde{B}$ sıralaması elde edilememiştir. Yine de, büyüklük değerleri $m(\tilde{A} - \tilde{B}) = 1.2019$ ve $m(\tilde{B} - \tilde{B}) = 1.2006$ olarak oldukça yakın çıkmaktadır. Daha fazla örnek için (Darehmiraki, 2019; Dutta, 2021) çalışmalarına başvurulabilir.

4.4. Çok Nitelikli Karar Verme Uygulaması

Bu bölümde, normalize edilmiş ortalama değer ile genel yükseklik değerinin toplamı olarak tanımlanan ve riske duyarlı sıralama yapan büyüklük fonksiyonunun kullanıldığı, performans skorlarının GYRBS’ler olduğu, yeni tanımlanan resim bulanık aritmetik işlemlerin kullanıldığı ve bağımlı karar kriterleri sorunuyla Choquet integrali aracılığıyla başa çıkıldığı bir karar verme yöntemi geliştirilmiştir. Yöntem, genelleştirilmiş ve/veya sezgisel çerçevedeki problemlere de uygulanabilir.

I adet seçim alternatifinin mevcut olduğu bir ÇNKV probleminde kriterler kümesi $C = \{c_1, c_2, \dots, c_J\}$ olsun. $i = 1, 2, \dots, I$ ve $j = 1, 2, \dots, J$ olmak üzere, i alternatifinin c_j kriterine göre performans değerlendirilmesinde

$$\tilde{a}_{ij} = \langle (p_{3ij}, p_{2ij}, p_{1ij}, m_{ij}, n_{ij}, q_{1ij}, q_{2ij}, q_{3ij}); \alpha_{ij}, \gamma_{ij}, \beta_{ij} \rangle \quad (4.18)$$

GYRBS'lerinin kullanıldığını varsayalım. Karar alternatiflerinin karşılaştırılması için kullanılacak algoritma Bölüm 4.4.1' de verilmiştir.

4.4.1. Algoritma

Bu tezde kullanılan yöntem aşağıdaki yedi adımdan oluşmaktadır:

Adım 1. Karar vericiden toplamaları 1 olmak zorunda olmayan kriterlerin önem ağırlıklarını al.

Adım 2. (3.10) denklemi ile önem ağırlıklarına karşılık gelen λ parametresini ve C kriter kümesi için tanımlanan g bulanık ölçümünü belirle.

Adım 3. Maksimum-minimum dönüşümü (3.7) veya (3.8) ile resim bulanık skorları normalize et.

Adım 4. Karar verici karakterini temsil edecek s ve t risk parametrelerini belirle.

Adım 5. $j \in \{1, 2, \dots, J\}$ kriter indisi olmak üzere, her bir $i \in \{1, 2, \dots, I\}$ alternatifi için dejenere edilmiş $\tilde{a}_{ij}$ değerlerini iki boyutlu büyüklük fonksiyonunu kullanarak sırala.

Adım 6. Adım 5'deki sıralamayı kullanarak, her bir i alternatifi için Choquet integrali ile resim bulanık genel skorları hesapla.

Adım 7. Dejenere edilmiş genel skorları iki boyutlu büyüklük fonksiyonu ile büyükten küçüğe doğru sıralayarak en çok tercih edilen alternatifi belirle.

4.4.2. Sayısal Sonuçlar

Bu bölümde, (Garai, 2023) çalışmasından uyarlanan sayısal bir örnek üzerinde sıralama prosedürünün ÇNKV problemine uygulanışı gösterilmiştir. Çok uluslu bir

yazılım şirketinin bir sistem analistiyle çalışmayı planladığı varsayılmıştır. Başlangıç aşamasının ardından, üç başvuru sahibi (yani alternatifler)

A_1, A_2 ve A_3

ikinci aşamaya geçebilmiştir.

Karar verici, bu üç adayın sıralanmasında, tamamı fayda tipli olan beş kriteri dikkate almaktadır. Bu kriterler adaylarda aranan bazı özellikler:

C_1 duygusal kararlılık,

C_2 kişilik,

C_3 sözlü iletişim becerisi,

C_4 kendine güven ve

C_5 geçmiş deneyim

olarak alınmıştır. Dikkat edilirse, bu nitelikler birbirinden bağımsız değildir. Örneğin, kendine güvenen bir analist aynı zamanda güçlü sözlü iletişim kurma becerisine sahip olacaktır. Benzer şekilde, kötü bir kişilik puanı almış bir çalışan aynı zamanda duygusal kararlılık açısından da zayıf görülecektir. Dolayısıyla, ağırlıklandırma yapılırken bu kriterlerin etkileşimli oldukları göz önünde bulundurulmalıdır.

Bu aşamada karar vericiden kriterlerin önemini 1 ile 11 arasında bir tamsayı ile puanlamaları istenmiştir. Kullanılan dilsel 1-11 ölçeği Tablo 4.3.'te verilmiştir. Belirlenen bu önem puanları ve (3.7) denklemi ile normalize edilmiş kriter ağırlıkları sırasıyla

$(4 \ 6 \ 5 \ 6 \ 4)^T$,

$(0.3 \ 0.5 \ 0.4 \ 0.5 \ 0.3)^T$ (4.19)

şeklindedir. Örneğin, karar verici tarafından, seçilecek alternatifin değerlendirmesinde “duygusal kararlılık” kriterinin “düşük düzeyde önemli” olduğu, ancak “kendine güven” kriterinin ise “ortalama düzeyde önemli” olduğu düşünülmektedir.

O halde (3.10) denklemi:

$$1 + \lambda = (1 + 0.3\lambda)^2(1 + 0.4\lambda)(1 + 0.5\lambda)^2 \quad (4.20)$$

şeklini alır. Buradan virgülden sonra 7 basamak hassaslıkta $\lambda = -0.8952057$ olarak elde edilir. (3.9) denklemi ile elde edilen ve kriter altkümelerine karşılık gelen ağırlıklar virgülden sonra 4 basamak hassaslıkta Tablo 4.4. ile verilmiştir. Bu hesaplamalar algoritmamızın Adım 1 ve Adım 2'sine karşılık gelmektedir.

Tablo 4.3. Kriterlerin önem ağırlıkları için kullanılan dilsel 1-11 ölçeği.

Puan	Dilsel Karşılık
1	Kesinlikle Düşük Düzeyde Önemli
2	Oldukça Düşük Düzeyde Önemli
3	Çok Düşük Düzeyde Önemli
4	Düşük Düzeyde Önemli
5	Ortalamanın Altında Düzeyde Önemli
6	Ortalama Düzeyde Önemli
7	Ortalamanın Üstünde Düzeyde Önemli
8	Yüksek Düzeyde Önemli
9	Çok Yüksek Düzeyde Önemli
10	Oldukça Yüksek Düzeyde Önemli
11	Kesinlikle Yüksek Düzeyde Önemli

Tablo 4.4. Choquet ağırlıkları.

Altküme	Ağırlık	Altküme	Ağırlık	Altküme	Ağırlık
$\{C_1, C_2\}$	0.6657	$\{C_4, C_5\}$	0.6657	$\{C_2, C_4, C_5\}$	0.8677
$\{C_1, C_3\}$	0.5926	$\{C_1, C_2, C_3\}$	0.8273	$\{C_3, C_4, C_5\}$	0.8273
$\{C_1, C_4\}$	0.6657	$\{C_1, C_2, C_4\}$	0.8677	$\{C_1, C_2, C_3, C_4\}$	0.9570
$\{C_1, C_5\}$	0.5194	$\{C_1, C_2, C_5\}$	0.7869	$\{C_1, C_2, C_3, C_5\}$	0.9051
$\{C_2, C_3\}$	0.7210	$\{C_1, C_3, C_4\}$	0.8273	$\{C_1, C_2, C_4, C_5\}$	0.9347
$\{C_2, C_4\}$	0.7762	$\{C_1, C_3, C_5\}$	0.7334	$\{C_1, C_3, C_4, C_5\}$	0.9051
$\{C_2, C_5\}$	0.6657	$\{C_1, C_4, C_5\}$	0.7869	$\{C_2, C_3, C_4, C_5\}$	0.9570
$\{C_3, C_4\}$	0.7210	$\{C_2, C_3, C_4\}$	0.8983	$\{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5\}$	1.0000
$\{C_3, C_5\}$	0.5926	$\{C_2, C_3, C_5\}$	0.8273		

A_1 , A_2 ve A_3 alternatiflerinin tamamı fayda tipli olan $C = \{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5\}$ kriterlerine göre derecelendirme değerleri GYSBS'ler olarak uzman tarafından ifade edilmiş ve aşağıdaki şekilde Tablo 4.5.-7. ile temsil edilmiştir:

Tablo 4.5. Kriterlere göre 1. alternatifin puanları.

A_1	
C_1	$\langle (3.5, 4.2, 5.4, 5.4, 6.5, 8.9); .7, .2 \rangle$
C_2	$\langle (4.2, 5.5, 6.8, 6.8, 7.8, 9.5); .5, .2 \rangle$
C_3	$\langle (4.8, 5.2, 6.9, 6.9, 8.1, 9.8); .6, .3 \rangle$
C_4	$\langle (4.2, 4.8, 6.0, 6.0, 7.8, 9.5); .8, .1 \rangle$
C_5	$\langle (5.5, 6.2, 7.0, 7.0, 8.6, 10.0); .6, .2 \rangle$

Tablo 4.6. Kriterlere göre 2. alternatifin puanları.

A_2	
C_1	$\langle (5.4, 5.5, 7.5, 7.5, 8.5, 10.5); .8, .1 \rangle$
C_2	$\langle (5.2, 6.7, 7.8, 7.8, 8.9, 10.8); .7, .2 \rangle$
C_3	$\langle (6.0, 6.5, 8.2, 8.2, 9.5, 10.5); .7, .3 \rangle$
C_4	$\langle (5.5, 6.2, 7.5, 7.5, 8.6, 10.8); .8, .2 \rangle$
C_5	$\langle (6.5, 7.0, 8.0, 8.0, 9.0, 10.5); .5, .3 \rangle$

Tablo 4.7. Kriterlere göre 3. alternatifin puanları.

A_3	
C_1	$\langle (4.5, 5.2, 6.8, 6.8, 7.5, 9.9); .6, .3 \rangle$
C_2	$\langle (4.1, 4.4, 6.5, 6.5, 8.2, 10.0); .8, .1 \rangle$
C_3	$\langle (6.5, 7.2, 8.9, 8.9, 10.5, 10.8); .6, .2 \rangle$
C_4	$\langle (5.5, 6.1, 8.5, 8.5, 9.2, 12.0); .5, .4 \rangle$
C_5	$\langle (5.0, 5.6, 8.0, 8.0, 10.0, 11.0); .8, .1 \rangle$

Algoritmamızın Adım 3'ü gereği, tanım aralığı 8.5 birim uzunluklu $[3.5, 12.0]$ aralığında değişen değerler içerdiğinden normalizasyon formülü (3.7) ile bu değerler $[0, 1]$ aralığına indirgenir. Normalize edilmiş karar verme değerleri virgülden sonra 3

basamak hassaslıkta Tablo 4.8.-10. ile verilmiştir. Ayrıca, üçgensel yapı nedeniyle aşağıdaki tablolarda m, n değerlerinden sadece biri verilmiştir.

Tablo 4.8. Alternatif 1 için normalize edilmiş puanlar.

A_1
$C_1 \langle (.000, .082, .224, .353, .635); .7, .2 \rangle$
$C_2 \langle (.082, .235, .388, .506, .706); .5, .2 \rangle$
$C_3 \langle (.153, .200, .400, .541, .741); .6, .3 \rangle$
$C_4 \langle (.082, .153, .294, .506, .706); .8, .1 \rangle$
$C_5 \langle (.235, .318, .412, .600, .765); .6, .2 \rangle$

Tablo 4.9. Alternatif 2 için normalize edilmiş puanlar.

A_2
$C_1 \langle (.224, .235, .471, .588, .824); .8, .1 \rangle$
$C_2 \langle (.200, .376, .506, .635, .859); .7, .2 \rangle$
$C_3 \langle (.294, .353, .553, .706, .824); .7, .3 \rangle$
$C_4 \langle (.235, .318, .471, .600, .859); .8, .2 \rangle$
$C_5 \langle (.353, .412, .529, .647, .824); .5, .3 \rangle$

Tablo 4.10. Alternatif 3 için normalize edilmiş puanlar.

A_3
$C_1 \langle (.118, .200, .388, .471, .753); .6, .3 \rangle$
$C_2 \langle (.071, .106, .353, .553, .765); .8, .1 \rangle$
$C_3 \langle (.353, .435, .635, .824, .859); .6, .2 \rangle$
$C_4 \langle (.235, .306, .588, .671, 1.000); .5, .4 \rangle$
$C_5 \langle (.176, .247, .529, .765, .882); .8, .1 \rangle$

Algoritmamızın Adım 4'ü gereği, ÇNKV problemi üç risk davranışı durumu için çözülmüştür: birincisi $s = t = 0.5$ olan iyimser durum, ikincisi $s = t = 1$ olan riske nötr durum ve son olarak üçüncüsü $s = t = 2$ olan kötümser durumdur. Bu üç ayrı durum için Tablo 4.8.-10. ile verilen dejenere edilen GYSBS'lerin indirgendiği GYBS'ler yine virgülden sonra 3 basamak hassaslıkta sırasıyla Tablo 4.11.-13. ile verilmiştir.

Tablo 4.11. Dejenere edilen iyimser durum puanları.

A_1	A_2	A_3
$C_1 \langle (.055, .224, .541); .767 \rangle$	$\langle (.231, .471, .745); .867 \rangle$	$\langle (.173, .388, .659); .667 \rangle$
$C_2 \langle (.184, .388, .639); .700 \rangle$	$\langle (.318, .506, .784); .767 \rangle$	$\langle (.094, .353, .694); .867 \rangle$
$C_3 \langle (.184, .400, .675); .667 \rangle$	$\langle (.333, .553, .784); .700 \rangle$	$\langle (.408, .635, .847); .733 \rangle$
$C_4 \langle (.129, .294, .639); .867 \rangle$	$\langle (.290, .471, .773); .800 \rangle$	$\langle (.282, .588, .890); .567 \rangle$
$C_5 \langle (.290, .412, .710); .733 \rangle$	$\langle (.392, .529, .765); .633 \rangle$	$\langle (.224, .529, .843); .867 \rangle$

Tablo 4.12. Dejenere edilen riske nötr durum puanları.

A_1	A_2	A_3
$C_1 \langle (.041, .224, .494); .750 \rangle$	$\langle (.229, .471, .706); .850 \rangle$	$\langle (.159, .388, .612); .650 \rangle$
$C_2 \langle (.159, .388, .606); .650 \rangle$	$\langle (.288, .506, .747); .750 \rangle$	$\langle (.088, .353, .659); .850 \rangle$
$C_3 \langle (.176, .400, .641); .650 \rangle$	$\langle (.324, .553, .765); .700 \rangle$	$\langle (.394, .635, .841); .700 \rangle$
$C_4 \langle (.118, .294, .606); .850 \rangle$	$\langle (.276, .471, .729); .800 \rangle$	$\langle (.271, .588, .835); .550 \rangle$
$C_5 \langle (.276, .412, .682); .700 \rangle$	$\langle (.382, .529, .735); .600 \rangle$	$\langle (.212, .529, .824); .850 \rangle$

Tablo 4.13. Dejenere edilen kötümser durum puanları.

A_1	A_2	A_3
$C_1 \langle (.027, .224, .447); .733 \rangle$	$\langle (.227, .471, .667); .833 \rangle$	$\langle (.145, .388, .565); .633 \rangle$
$C_2 \langle (.133, .388, .573); .600 \rangle$	$\langle (.259, .506, .710); .733 \rangle$	$\langle (.082, .353, .624); .833 \rangle$
$C_3 \langle (.169, .400, .608); .633 \rangle$	$\langle (.314, .553, .745); .700 \rangle$	$\langle (.380, .635, .835); .667 \rangle$
$C_4 \langle (.106, .294, .573); .833 \rangle$	$\langle (.263, .471, .686); .800 \rangle$	$\langle (.259, .588, .780); .533 \rangle$
$C_5 \langle (.263, .412, .655); .667 \rangle$	$\langle (.373, .529, .706); .567 \rangle$	$\langle (.200, .529, .804); .833 \rangle$

Choquet integralinde ağırlıklar pozisyonlara atandığından, alternatifler için Choquet integrali ile genel bir skor hesaplamak üzere kriterlere yönelik verilen puanlar sıralanmalıdır. İncelenen ilk iyimser durum için, algoritmamızın Adım 5'i gereği hesaplanan büyüklük değerleri ve karşılık gelen sıralamalar Tablo 4.14.-16. ile verilmiştir.

Tablo 4.14. Alternatif 1 için kriterlerin iyimser sıralamaları.

	A_1
C_1	1.015
C_2	1.096
C_3	1.076
C_4	1.191
C_5	1.175
Sıralama	$\tilde{a}_{11} < \tilde{a}_{31} < \tilde{a}_{21} < \tilde{a}_{51} < \tilde{a}_{41}$

Tablo 4.15. Alternatif 2 için kriterlerin iyimser sıralamaları.

	A_2
C_1	1.343
C_2	1.288
C_3	1.255
C_4	1.291
C_5	1.179
Sıralama	$\tilde{a}_{52} < \tilde{a}_{32} < \tilde{a}_{22} < \tilde{a}_{42} < \tilde{a}_{12}$

Tablo 4.16. Alternatif 3 için kriterlerin iyimser sıralamaları.

	A_3
C_1	1.064
C_2	1.233
C_3	1.366
C_4	1.154
C_5	1.397
Sıralama	$\tilde{a}_{13} < \tilde{a}_{43} < \tilde{a}_{23} < \tilde{a}_{33} < \tilde{a}_{53}$

Tablo 4.17. ile bu adımda elde edilen ağırlıklar ve A_1 alternatifi için yapılmış bir örnek hesaplama ise (4.21) ile verilmiştir.

Tablo 4.17. Alternatifler için elde edilen iyimser kriter ağırlıkları.

	A_1	A_2	A_3
C_1	0.0430	0.3000	0.0430
C_2	0.2020	0.2020	0.2348
C_3	0.0893	0.0893	0.2926
C_4	0.5000	0.3657	0.1297
C_5	0.1657	0.0430	0.3000

$$\begin{aligned}
 RBC_g(\tilde{a}_{11}, \tilde{a}_{21}, \tilde{a}_{31}, \tilde{a}_{41}, \tilde{a}_{51}) &= \tilde{a}_{11}[g(\{(1), \dots, (5)\}) - g(\{(2), \dots, (5)\})] \\
 &+ \tilde{a}_{31}[g(\{(2), \dots, (5)\}) - g(\{(3), (4), (5)\})] + \tilde{a}_{21}[g(\{(3), (4), (5)\}) - g(\{(4), (5)\})] \\
 &+ \tilde{a}_{51}[g(\{(4), (5)\}) - g(\{(5)\})] + \tilde{a}_{41}[g(\{(5)\}) - g(\{(6)\})] = \tilde{a}_{11}[g(C) - g(\{2,3,4,5\})] \quad (4.21) \\
 &+ \tilde{a}_{31}[g(\{2,3,4,5\}) - g(\{2,4,5\})] + \tilde{a}_{21}[g(\{2,4,5\}) - g(\{4,5\})] + \tilde{a}_{51}[g(\{4,5\}) - g(\{4\})] \\
 &+ \tilde{a}_{41}[g(\{4\}) - g(\{\})] = \tilde{a}_{11}[1 - 0.9570] + \tilde{a}_{31}[0.9570 - 0.8677] + \tilde{a}_{21}[0.8677 - 0.6657] \\
 &\tilde{a}_{51}[0.6657 - 0.5000] + \tilde{a}_{41}[0.5000 - 0] \\
 &= 0.0430\tilde{a}_{11} + 0.2020\tilde{a}_{21} + 0.0893\tilde{a}_{31} + 0.5000\tilde{a}_{41} + 0.1657\tilde{a}_{51}
 \end{aligned}$$

Algoritmamızın 6. adımı gereği elde edilecek alternatifin resim bulanık genel skor değeri resim bulanık aritmetik işlemleri ile verilen toplama ve skaler çarpım kullanılarak hesaplanmış ve sonuçlar (4.22) matrisi ile verilmiştir.

$$\begin{pmatrix} A_1 \langle (.110, .198, .339, .518, .716); .669, .165 \rangle \\ A_2 \langle (.235, .312, .488, .615, .844); .754, .185 \rangle \\ A_3 \langle (.208, .275, .521, .707, .858); .679, .186 \rangle \end{pmatrix} \quad (4.22)$$

Daha sonra, bu sayılar algoritmamızın son adımı olan Adım 7 gereği $s = t = 0.5$ alınarak indirgenir ve büyüklük değerleri hesaplanır. Sonuçlar Tablo 4.18. ile verilmiştir. Buna göre, en iyi alternatif A_2 olarak belirlenir.

Tablo 4.18. İndirgenmiş resim bulanık genel skorlarının büyüklük değerleri.

	$\langle(p, m, q); h\rangle$	$m(\langle(p, m, q); h\rangle)$	$Mag(\langle(p, m, q); h\rangle)$
A_1	$\langle(.169, .339, .650); .780\rangle$	.362	1.142
A_2	$\langle(.286, .488, .767); .794\rangle$	.501	1.295
A_3	$\langle(.253, .521, .807); .769\rangle$	.524	1.293
	Sıralama		$A_1 < A_3 < A_2$

Benzer işlemler riske nötr ve kötümser durum için de yapılırsa Tablo 4.14.-18. ve (4.22) matrisi ile eşdeğer sonuçlar sırasıyla Tablo 4.19.-28., (4.23) ve (4.24) matrisi ile verilmiştir. Tüm karar davranışları için aynı sıralama elde edilmiştir. Bu sonuç (Garai, 2023) çalışmasında verilen sonuç ile aynıdır. Tüm hesaplamalarda MS Excel'in hazır fonksiyonları kullanılmıştır.

Tablo 4.19. Alternatif 1 için kriterlerin riske nötr sıralamaları.

	A_1
C_1	0.988
C_2	1.036
C_3	1.053
C_4	1.167
C_5	1.134
Sıralama	$\tilde{a}_{11} < \tilde{a}_{21} < \tilde{a}_{31} < \tilde{a}_{51} < \tilde{a}_{41}$

Tablo 4.20. Alternatif 2 için kriterlerin riske nötr sıralamaları.

	A_2
C_1	1.320
C_2	1.260
C_3	1.250
C_4	1.281
C_5	1.139
Sıralama	$\tilde{a}_{52} < \tilde{a}_{32} < \tilde{a}_{22} < \tilde{a}_{42} < \tilde{a}_{12}$

Tablo 4.21. Alternatif 3 için kriterlerin riske nötr sıralamaları.

	A_3
C_1	1.037
C_2	1.210
C_3	1.329
C_4	1.126
C_5	1.375
Sıralama	$\tilde{a}_{13} < \tilde{a}_{43} < \tilde{a}_{23} < \tilde{a}_{33} < \tilde{a}_{53}$

Tablo 4.22. Alternatif 1 için kriterlerin kötümser sıralamaları.

	A_1
C_1	0.961
C_2	0.976
C_3	1.029
C_4	1.142
C_5	1.094
Sıralama	$\tilde{a}_{11} < \tilde{a}_{21} < \tilde{a}_{31} < \tilde{a}_{51} < \tilde{a}_{41}$

Tablo 4.23. Alternatif 2 için kriterlerin kötümser sıralamaları.

	A_2
C_1	1.296
C_2	1.232
C_3	1.245
C_4	1.272
C_5	1.099
Sıralama	$\tilde{a}_{52} < \tilde{a}_{22} < \tilde{a}_{32} < \tilde{a}_{42} < \tilde{a}_{12}$

Tablo 4.24. Alternatif 3 için kriterlerin kötümser sıralamaları.

	A_3
C_1	1.010
C_2	1.186
C_3	1.293
C_4	1.099
C_5	1.354
Sıralama	$\tilde{a}_{13} < \tilde{a}_{43} < \tilde{a}_{23} < \tilde{a}_{33} < \tilde{a}_{53}$

Tablo 4.25. Alternatifler için elde edilen riske nötr kriter ağırlıkları.

	A_1	A_2	A_3
C_1	0.0430	0.3000	0.0430
C_2	0.1297	0.2020	0.2348
C_3	0.1616	0.0893	0.2926
C_4	0.5000	0.3657	0.1297
C_5	0.1657	0.0430	0.3000

Tablo 4.26. Alternatifler için elde edilen kötümser kriter ağırlıkları.

	A_1	A_2	A_3
C_1	0.0430	0.3000	0.0430
C_2	0.1297	0.1297	0.2348
C_3	0.1616	0.1616	0.2926
C_4	0.5000	0.3657	0.1297
C_5	0.1657	0.0430	0.3000

$$\begin{pmatrix} A_1 & \langle (.116, .195, .340, .521, .718); .677, .174 \rangle \\ A_2 & \langle (.235, .312, .488, .615, .844); .754, .185 \rangle \\ A_3 & \langle (.208, .275, .521, .707, .858); .679, .186 \rangle \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

$$\begin{pmatrix} A_1 & \langle (.116, .195, .340, .521, .718); .677, .174 \rangle \\ A_2 & \langle (.242, .310, .491, .620, .841); .754, .193 \rangle \\ A_3 & \langle (.208, .275, .521, .707, .858); .679, .186 \rangle \end{pmatrix} \quad (4.24)$$

Tablo 4.27. İndirgenmiş resim bulanık genel skorların riske nötr büyüklük değerleri.

	$\langle (p, m, q); h \rangle$	$m(\langle (p, m, q); h \rangle)$	$Mag(\langle (p, m, q); h \rangle)$
A_1	$\langle (.156, .340, .619); .752 \rangle$	.356	1.107
A_2	$\langle (.273, .488, .729); .784 \rangle$	.492	1.277
A_3	$\langle (.241, .521, .782); .747 \rangle$	.518	1.264
	Sıralama	$A_1 < A_3 < A_2$	

Tablo 4.28. İndirgenmiş resim bulanık genel skorların kötümser büyüklük değerleri.

	$\langle(p, m, q); h\rangle$	$m(\langle(p, m, q); h\rangle)$	$Mag(\langle(p, m, q); h\rangle)$
A_1	$\langle(.142, .340, .587); .727\rangle$	.348	1.075
A_2	$\langle(.265, .491, .694); .772\rangle$	.487	1.259
A_3	$\langle(.230, .521, .757); .724\rangle$	.512	1.236
	Sıralama		$A_1 < A_3 < A_2$

BÖLÜM 5. TARTIŞMA VE SONUÇ

GBS'lerin uzantıları olan GSBS'ler ve GRBS'ler, standart BS'lere kıyasla kesin olmayan bilginin daha doğru ve esnek bir şekilde temsil edilmesine olanak tanır. Bu tezin ilgi alanındaki en kapsayıcı sayı kümesi olan genelleştirilmiş ve yamuksal RBS'ler için tutarlı sonuçlar üretecek ve lineerliği koruyan aritmetik işlemler tanımlanmıştır. Bu işlemler, şeklin korunduğu BS altkümeleri olarak kabul edilen genelleştirilmiş ve/veya sezgisel BS'lerde de uygulanabilir. Toplama işlemi sonucunda elde edilen genel yükseklik değeri, ağırlıkların sayıların ortalama değerlerine bağlı hesaplandığı, ağırlıklı aritmetik ortalama ile belirlenir ve bu değer minimum yükseklik ile maksimum yükseklik arasında kalır. Başka bir deyişle, bilginin güvenilirliği açısından dengeleyici bir yaklaşım benimsenir. Genel yükseklik, ne maksimum yükseklik ya da 1 olarak alınıp bilgi kaybına yol açılmıştır, ne de minimum olarak alınıp mevcut kesenlerden daha dar bazı BS temsilleri yok sayılmıştır. Küçük örneklerle, operasyonların mantıklı sonuçlar verdiği gösterilmiştir. Bu aşamada, farklı dengeleyici operatörlerin kullanımıyla yapılacak karşılaştırmalar gelecek çalışmalara bırakılmıştır.

Bu tezde, sıralamaların tutarlılığıyla ilgili literatürde sunulan eleştiriler de göz önünde bulundurularak, GYRBS'leri sıralamak için basit ve doğru bir karşılaştırma yöntemi önerilmiştir. Durulaştırma fonksiyonu, hem sayının ortalama değerini hem de yüksekliğini dikkate alır. Tutarsız sonuçların önüne geçmek için maksimum-minimum normalizasyon yöntemi kullanılmıştır. Bu tezde önerilen indirgeme işlemleri sayesinde, bu durulaştırma işlemi standart olmayan BS'lerde de uygulanabilir. Ayrıca, bu indirgemelerde karar vericinin risk iştahına göre farklı senaryolar dikkate alınabilir; iyimser, kötümser ve nötr bakış açıları karşılaştırılarak düzeltici önlemler devreye sokulabilir.

Son olarak, önerilen tüm bu yaklaşımlar, öz niteliklerin korelasyonlu olduğu ve resim bulanıklığı altında ÇNKV probleminin çözümünde uygulanmıştır. Korelasyon sorunu, toplamsal olmak zorunda olmayan bir ölçüm kullanan Choquet integrali yardımıyla ele alınmıştır. Algoritmanın esnek ve kolay yapısı, farklı bulanıklık uzantılarında ve grup karar verme yöntemlerinde de uyarlamaları kolaylaştırır. Etkileşim problemini ele alan farklı birleştirme operatörlerinin uygulanışı da yakın gelecekteki çalışmaların konusudur.

Sonuç olarak, önerilen yöntemler, karar verme süreçlerinde belirsizlik ve bulanıklığın etkilerini azaltmada önemli bir katkı sağlamaktadır. Bu yaklaşımlar hem teorik hem de pratik açıdan önemli yenilikler sunmakta ve ileriye dönük birçok araştırma için sağlam bir temel oluşturmaktadır.

KAYNAKLAR

- Akdemir, H.G., Aydın, S. 2024. A new standardization-based ranking method for generalized trapezoidal picture fuzzy numbers. *Yugosl. J. Oper. Res.*, Basımda.
- Akdemir, H.G., Kocken, H.G. 2023. New unified score functions and similarity measures for non-standard fuzzy numbers: an extended TOPSIS method addressing risk attitudes. *Neural Comput. Appl.*, 35(19): 14029-14046.
- Akdemir, H.G., Kocken, H.G., Kara, N. 2023. On value-at-risk and conditional value-at-risk measures for intuitionistic and picture fuzzy losses. *J. Mult-Valued Log. S.*, 41(6): 583-617.
- Akram, M., Ullah, I., Allahviranloo, T. 2022. A new method to solve linear programming problems in the environment of picture fuzzy sets. *Iran. J. Fuzzy Syst.*, 19(6): 29-49.
- Ashraf, Z., Khan, M. S., Tiwari, A., Danish Lohani, Q.M. 2021. Difference sequence-based distance measure for intuitionistic fuzzy sets and its application in decision making process. *Soft Comput.*, 25(14): 9139-9161.
- Atanassov, K.T. 1986. Intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy Sets Syst.*, 20: 87-96.
- Beg, I., Rashid, T. 2014. Multi-criteria trapezoidal valued intuitionistic fuzzy decision making with Choquet integral based TOPSIS. *Opsearch*, 51: 98-129.
- Biswas, A., Kumar, S. 2019. Generalization of extent analysis method for solving multicriteria decision making problems involving intuitionistic fuzzy numbers. *Opsearch*, 56(4): 1142-1166.
- Chen, S.H. 1985. Ranking fuzzy numbers with maximizing set and minimizing set. *Fuzzy Sets Syst.*, 17(2): 113-129.
- Chen, S.J., Chen, S. M. 2003. Fuzzy risk analysis based on similarity measures of generalized fuzzy numbers. *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, 11(1): 45-56.
- Cheng, C.H. 1998. A new approach for ranking fuzzy numbers by distance method. *Fuzzy Sets Syst.*, 95(3): 307-317.
- Choquet, G. 1954. Theory of capacities. *Ann. Inst. Fourier*, 5: 131-295.
- Chutia, R., Saikia, S. 2018. Ranking intuitionistic fuzzy numbers at levels of decision-making and its application. *Expert Syst.*, 35(5): e12292.
- Cuong, B.C., Kreinovich, V. 2013. Picture fuzzy sets-a new concept for computational intelligence problems. 2013 Third World Congress on Information and Communication Technologies, WICT 2013, IEEE, 1-6.

- Darehmiraki, M. 2019. A novel parametric ranking method for intuitionistic fuzzy numbers. *Iran. J. Fuzzy Syst.*, 16(1): 129-143.
- Das, S., Guha, D. 2016. A centroid-based ranking method of trapezoidal intuitionistic fuzzy numbers and its application to MCDM problems. *Fuzzy Inf. Eng.*, 8(1): 41-74.
- Das, S., Guha, D. 2017. Family of harmonic aggregation operators under intuitionistic fuzzy environment. *Sci. Iran.*, 24(6): 3308-3323.
- Deng, Y., Zhenfu, Z., Qi, L. 2006. Ranking fuzzy numbers with an area method using radius of gyration. *Comput. Math. Appl.*, 51(6-7): 1127-1136.
- Dong, J.Y., Lin, L.L., Wang, F., Wan, S.P. 2016. Generalized Choquet integral operator of triangular Atanassov's intuitionistic fuzzy numbers and application to multi-attribute group decision making. *Int. J. Uncertainty Fuzziness Knowledge Based Syst.*, 24(05): 647-683.
- Dong, J., Wan, S. 2016a. A new method for multi-attribute group decision making with triangular intuitionistic fuzzy numbers. *Kybernetes*, 45(1): 158-180.
- Dong, J.Y., Wan, S.P. 2016b. A new method for prioritized multi-criteria group decision making with triangular intuitionistic fuzzy numbers. *J. Intell. Fuzzy Syst.*, 30(3): 1719-1733.
- Dutta, P. (2021). Multi-criteria decision making under uncertainty via the operations of generalized intuitionistic fuzzy numbers. *Granular Comput.*, 6(2): 321-337.
- Dutta, P., Borah, G. 2023. Multicriteria group decision making via generalized trapezoidal intuitionistic fuzzy number-based novel similarity measure and its application to diverse COVID-19 scenarios. *Artif. Intell. Rev.*, 56(4): 3543-3617.
- Dutta, B., Guha, D. 2013. Trapezoidal intuitionistic fuzzy Bonferroni means and its application in multi-attribute decision making. *IEEE Int. Conf. Fuzzy Syst.*, Hyderabad, India, 1-8.
- Garai, T. 2023. Ranking method of the generalized intuitionistic fuzzy numbers founded on possibility measures and its application to MADM problem. *Adv. Comput. Intell.*, 3(4): 14.
- Gong, Y., Xiang, L. 2018. Ranking generalized fuzzy number with geometric coordinate points approach. *J. Intell. Fuzzy Syst.*, 35(1): 937-944.
- Gu, Q., Xuan, Z. 2017. A new approach for ranking fuzzy numbers based on possibility theory. *J. Comput. Appl. Math.*, 309: 674-682.
- Gupta, P., Mehlawat, M.K., Grover, N. 2016. Intuitionistic fuzzy multi-attribute group decision-making with an application to plant location selection based on a new extended VIKOR method. *Inf. Sci.*, 370: 184-203.
- Hasan, M.K., Sultana, A., Mitra, N.K. 2023. Arithmetic operations of generalized trapezoidal picture fuzzy numbers by vertex method. *Am. J. Comput. Math.*, 13(1): 99-121.
- Jianqiang, W., Zhong, Z. 2009. Aggregation operators on intuitionistic trapezoidal fuzzy number and its application to multi-criteria decision making problems. *J. Syst. Eng. Electron.*, 20(2): 321-326.

- Keikha, A., Garg, H., Mishmast Nehi, H. 2021. An approach based on combining Choquet integral and TOPSIS methods to uncertain MAGDM problems. *Soft Comput.*, 25(10): 7181-7195.
- Keikha, A., Nehi, H. M. 2016. Operations and ranking methods for intuitionistic fuzzy numbers, a review and new methods. *Int. J. Intell. Syst. Technol. Appl.*, 8(1): 35-48.
- Kumar, A., Singh, P., Kaur, P., Kaur, A. 2011. A new approach for ranking of L–R type generalized fuzzy numbers. *Expert Syst. Appl.*, 38(9): 10906-10910.
- Li, D. F. 2010. A ratio ranking method of triangular intuitionistic fuzzy numbers and its application to MADM problems. *Comput. Math. Appl.*, 60(6): 1557-1570.
- Li, X.H., Chen, X.H. 2016. Trapezoidal intuitionistic fuzzy aggregation operator based on Choquet integral and its application to multi-criteria decision-making problems. *Front. Eng. Manage.*, 2(3): 266-276.
- Li, D.F., Nan, J.X., Zhang, M.J. 2010. A ranking method of triangular intuitionistic fuzzy numbers and application to decision making. *Int. J. Comput. Intell. Syst.*, 3(5): 522-530.
- Li, X., Wang, F., Chen, X. 2014. Trapezoidal intuitionistic fuzzy multiattribute decision making method based on cumulative prospect theory and Dempster-Shafer theory. *J. Appl. Math.*, 2014(1): 279138.
- Liang, C., Zhao, S., Zhang, J. 2017. Multi-criteria group decision making method based on generalized intuitionistic trapezoidal fuzzy prioritized aggregation operators. *Int. J. Mach. Learn. Cybern.*, 8: 597-610.
- Liu, A.F. 2014. TOPSIS method for multiple attribute decision making under trapezoidal intuitionistic fuzzy environment. *J. Intell. Fuzzy Syst.*, 26(5): 2403-2409.
- Liu, Y., Wang, Y., Xu, M., Xu, G. 2019. Emergency alternative evaluation using extended trapezoidal intuitionistic fuzzy thermodynamic approach with prospect theory. *Int. J. Fuzzy Syst.*, 21: 1801-1817.
- Liu, Y., Wu, J., Liang, C. 2017. Some Einstein aggregating operators for trapezoidal intuitionistic fuzzy MAGDM and application in investment evolution. *J. Intell. Fuzzy Syst.*, 32(1): 63-74.
- Lourenzutti, R., Krohling, R.A., & Reformat, M.Z. 2017. Choquet based TOPSIS and TODIM for dynamic and heterogeneous decision making with criteria interaction. *Inf. Sci.*, 408: 41-69.
- Lu, J., Lin, J., Zhao, Y., Huang, Y. 2023. Fuzzy correlation evaluation of forest ecological carrying capacity considering the interaction between attributes. *Pol. J. Environ. Stud.*, 32(3): 2733-2747.
- Luo, C., Tian, X., Wan, S. 2015. Heavy OWA operator of trapezoidal intuitionistic fuzzy numbers and its application to multi-attribute decision making. *J. Syst. Sci. Inf.*, 3(1): 86-96.
- Marichal, J.L. 2004. Tolerant or intolerant character of interacting criteria in aggregation by the Choquet integral. *Eur. J. Oper. Res.*, 155(3): 771-791.
- Mehlawat, M.K., Grover, N. 2018. Intuitionistic fuzzy multi-criteria group decision making with an application to critical path selection. *Ann. Oper. Res.*, 269: 505-520.

- Mehmood, M.A., Bashir, S. 2022. Extended transportation models based on picture fuzzy sets. *Math. Probl. Eng.*, 2022(1): 6518976.
- Mohanta, K.K., Sharanappa, D.S. 2023. A novel technique for solving intuitionistic fuzzy DEA model: an application in indian agriculture sector. *Manage. Syst. Eng.*, 2(1): 12.
- Nayagam, V.L.G., Jeevaraj, S., Dhanasekaran, P. 2018. An improved ranking method for comparing trapezoidal intuitionistic fuzzy numbers and its applications to multicriteria decision making. *Neural Comput. Appl.*, 30: 671-682.
- Nie, R.X., Wang, J.Q., Wang, T.L. 2019. A three-cycle decision-making selection mechanism with intuitionistic trapezoidal fuzzy preference relations. *J. Intell. Fuzzy Syst.*, 36(6): 5409-5422.
- Popa, L. 2024. Centroid-induced ranking of triangular picture fuzzy numbers and applications in decision-making. *Symmetry*, 16(11): 1492.
- Qin, Q., Liang, F., Li, L., Chen, Y.W., Yu, G.F. 2017. A TODIM-based multi-criteria group decision making with triangular intuitionistic fuzzy numbers. *Appl. Soft Comput.*, 55: 93-107.
- Qiyas, M., Abdullah, S., Ashraf, S. 2019a. Solution of multi-criteria group decision making problem based on picture linguistic informations. *Int. J. Algebra Stat.*, 8: 1-11.
- Qiyas, M., Nacem, M., Ashraf, S., Khan, S., Ghani, F. 2019b. An approach for multi-criteria decision making problems with unknown weight information using GRA method under the picture linguistic fuzzy environment. *J. New Theory*, (28): 5-19.
- Rao, P.P. B., Shankar, N.R. 2013. Ranking fuzzy numbers with an area method using circumcenter of centroids. *Fuzzy Inf. Eng.*, 5(1): 3-18.
- Razavi Hajiagha, S.H., Babalhavaeji, H., Zavadskas, E.K., Liao, H. 2020. An analysis of trapezoidal intuitionistic fuzzy preference relations based on (α, β) -cuts. *Int. J. Fuzzy Syst.*, 22: 2735-2746.
- Reig-Mullor, J., Salas-Molina, F., Vercher-Ferrandiz, M. 2022. Sustainability performance assessment with intuitionistic fuzzy composite metrics and its application to the motor industry. *Iran. J. Fuzzy Syst.*, 19(4): 57-72.
- Rezvani, S. 2013. Ranking generalized trapezoidal fuzzy numbers with Euclidean distance by the incentre of centroids. *Math. Aeterna*, 3(2): 103-114.
- Robinson, J. 2016. Multiple attribute group decision analysis for intuitionistic triangular and trapezoidal fuzzy numbers. *Int. J. Fuzzy Syst. Appl.*, 5(3): 42-76.
- Rouhparvar, H., Panahi, A. 2015. A new definition for defuzzification of generalized fuzzy numbers and its application. *Appl. Soft Comput.*, 30: 577-584.
- Salas-Molina, F., Reig-Mullor, J., Pla-Santamaria, D., Garcia-Bernabeu, A. 2023. A multidimensional approach to rank fuzzy numbers based on the concept of magnitude. *Iran. J. Fuzzy Syst.*, 20(6): 137-153.
- Shit, C., Ghorai, G., Xin, Q., Gulzar, M. 2022. Harmonic aggregation operator with trapezoidal picture fuzzy numbers and its application in a multiple-attribute decision-making problem. *Symmetry*, 14(1): 135.

- Singh, P., Verma, M., Kumar, A. 2015. A novel method for ranking of vague sets for handling the risk analysis of compressor system. *Appl. Soft Comput.*, 26: 202-212.
- Sotoudeh-Anvari, M., Sotoudeh-Anvari, A. 2023. Setback in ranking fuzzy numbers: a study in fuzzy risk analysis in diabetes prediction. *Artif. Intell. Rev.*, 56(5): 4591-4639.
- Stoklasa, J., Luukka, P., Collan, M. 2022. On the relationship between possibilistic and standard moments of fuzzy numbers. *J. Comput. Appl. Math.*, 411: 114276.
- Su Mail, W., Zhou, J., Zeng, S., Zhang, C., Yu, K. 2017. A novel method for intuitionistic fuzzy MAGDM with Bonferroni weighted harmonic means. *Recent Patents Comput. Sci.*, 10(2): 178-189.
- Sugeno, M. 1974. Theory of fuzzy integrals and its applications. Tokyo Teknoloji Enstitüsü, Doktora Tezi.
- Verma, M., Kumar, A., Singh, P., Singh, Y. 2013. Risk analysis of combustion system using vague ranking method. *J. Intell. Fuzzy Syst.*, 24(4): 765-773.
- Wan, S.P. 2013. Power average operators of trapezoidal intuitionistic fuzzy numbers and application to multi-attribute group decision making. *Appl. Math. Modell.*, 37(6): 4112-4126.
- Wan, S.P., Dong, J.Y. 2015. Power geometric operators of trapezoidal intuitionistic fuzzy numbers and application to multi-attribute group decision making. *Appl. Soft Comput.*, 29: 153-168.
- Wan, S., Dong, J., Yang, D. 2015. Trapezoidal intuitionistic fuzzy prioritized aggregation operators and application to multi-attribute decision making. *Iran. J. Fuzzy Syst.*, 12(4): 1-32.
- Wan, S.P., Wang, Q.Y., Dong, J.Y. 2013. The extended VIKOR method for multi-attribute group decision making with triangular intuitionistic fuzzy numbers. *Knowledge-Based Syst.*, 52: 65-77.
- Wan, S.P., Wang, F., Lin, L.L., Dong, J.Y. 2016. Some new generalized aggregation operators for triangular intuitionistic fuzzy numbers and application to multi-attribute group decision making. *Comput. Ind. Eng.*, 93: 286-301.
- Wan, S. P., Yi, Z. H. (2015). Power average of trapezoidal intuitionistic fuzzy numbers using strict t-norms and t-conorms. *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, 24(5): 1035-1047.
- Wang, Y.J. 2023. Ranking intuitionistic fuzzy numbers by relative preference relation. *Iran. J. Fuzzy Syst.*, 20(5): 121-133.
- Wang, W., Liu, X., Chen, X., Qin, Y. 2019. Risk assessment based on hybrid FMEA framework by considering decision maker's psychological behavior character. *Comput. Ind. Eng.*, 136: 516-527.
- Wang, J.Q., Nie, R.R., Zhang, H.Y., Chen, X.H. 2013a. Intuitionistic fuzzy multi-criteria decision-making method based on evidential reasoning. *Appl. Soft Comput.*, 13(4): 1823-1831.
- Wang, J.Q., Nie, R.R., Zhang, H.Y., Chen, X.H. 2013b. New operators on triangular intuitionistic fuzzy numbers and their applications in system fault analysis. *Inf. Sci.*, 251: 79-95.

- Wang, Y.M., Yang, J.B., Xu, D.L., & Chin, K.S. 2006. On the centroids of fuzzy numbers. *Fuzzy Sets Syst.*, 157(7): 919-926.
- Wei, G., Wang, H. 2009. ITFWG operator and its application to decision making. 2009 Chinese Control and Decision Conference. IEEE, 5904-5909.
- Wu, T. 2024. Heterogeneous opinion dynamics considering consensus evolution in social network group decision-making. *Group Decis. Negot.*, 33(1): 159-194.
- Wu, Y., Tao, Y., Zhang, B., Wang, S., Xu, C., Zhou, J. 2020. A decision framework of offshore wind power station site selection using a PROMETHEE method under intuitionistic fuzzy environment: a case in China. *Ocean Coastal Manage.*, 184: 105016.
- Xu, J. 2019. Model for evaluating the teaching effect of the college English public speaking course under the flipped classroom hybrid teaching mode with intuitionistic trapezoidal fuzzy numbers. *J. Intell. Fuzzy Syst.*, 37(2): 2051-2058.
- Xu, J., Dong, J.Y., Wan, S.P., Gao, J. 2019. Multiple attribute decision making with triangular intuitionistic fuzzy numbers based on zero-sum game approach. *Iran. J. Fuzzy Syst.*, 16(3): 97-112.
- Yager, R.R. 2004. OWA aggregation over a continuous interval argument with applications to decision making. *IEEE Trans. Syst. Man Cybern. Part B Cybern.*, 34(5): 1952-1963.
- Yuan, J., Li, C. 2017. Intuitionistic trapezoidal fuzzy group decision-making based on prospect choquet integral operator and grey projection pursuit dynamic cluster. *Math. Probl. Eng.*, 2017(1): 2902506.
- Yuan, J., Li, Y., Luo, X., Li, L., Zhang, Z., Li, C. 2021. Regional integrated energy system schemes selection based on risk expectation and Mahalanobis-Taguchi system. *J. Intell. Fuzzy Syst.*, 40(6): 10333-10350.
- Zhang, X., Jin, F., Liu, P. 2013. A grey relational projection method for multi-attribute decision making based on intuitionistic trapezoidal fuzzy number. *Appl. Math. Modell.*, 37(5): 3467-3477.
- Zhang, M., Nan, J. 2013. A compromise ratio ranking method of triangular intuitionistic fuzzy numbers and its application to MADM problems. *Iran. J. Fuzzy Syst.*, 10(6): 21-37.
- Zhao, S., Liang, C., Zhang, J. 2017. Some intuitionistic trapezoidal fuzzy aggregation operators based on Einstein operations and their application in multiple attribute group decision making. *Int. J. Mach. Learn. Cybern.*, 8: 547-569.
- Zhou, J., Baležentis, T., Streimikiene, D. 2019. Normalized weighted Bonferroni harmonic mean-based intuitionistic fuzzy operators and their application to the sustainable selection of search and rescue robots. *Symmetry*, 11(2): 218.

ÖZGEÇMİŞ

İlköğretim, ortaöğretim ve lise öğrenimini Tekirdağ'da tamamladı. 2015 yılında Giresun Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü'nde lisans öğrenimini tamamladı. Aynı sene başladığı Giresun Üniversitesi, Eğitim Fakültesi'nde Pedagojik Formasyon eğitimini bitirdi. 2021 yılında Gaziantep'in Karkamış ilçesine Matematik Öğretmeni olarak atandı ve 2022 yılında Giresun Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Ana Bilim Dalı'nda Yüksek Lisans öğrenimine başladı.

