T.C.
SÜLEYMAN DEMİREL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

NÖTROSOFİK KARE MATRİSLER VE NÖTROSOFİK LİNEER DENKLEM SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİ ÜZERİNE BAZI SONUÇLAR

Ali İhsan SEKMEN

Danışman
Prof. Dr. Yılmaz ÇEVEN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
ISPARTA - 2024

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

NÖTROSOFİK KARE MATRİSLER VE NÖTROSOFİK LİNEER DENKLEM SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİ ÜZERİNE BAZI SONUÇLAR

Ali İhsan SEKMEN

Süleyman Demirel Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Yılmaz ÇEVEN

Bu tez çalışması, nötrosofik kare matrisler ve nötrosofik lineer denklem sistemlerinin çözümleri üzerinedir. Birinci bölümde, nötrosofi kavramı hakkında bilgi verildi. İkinci bölümde, tez ile ilgili kaynakların özetleri verildi. Üçüncü bölümde, norm kavramı, nötrosofik kare matrisler, nötrosofik Diophantine denklemler, nötrosofik denklem sistemleri ve Cramer kuralı verildi.

Tezin asıl kısmını oluşturan son bölümde, kısaltma kuralının nötrosofik reel sayılarda hangi durumlarda doğru olduğunu gösteren bir teoremle başlandı. Devamında iki nötrosofik sayının bölümünün hangi durumlarda yeni bir nötrosofik sayı olacağı detaylı olarak gösterildi. Sonrasında bir bilinmeyenli bir nötrosofik lineer denklemin çözüm durumları incelendi. Sonra bir kare matrisin determinantı hesaplanarak ve bir kare matrisin tersinir olması için gerekli ve yeterli koşullar verilerek, çok bilinmeyenli denklem sistemlerinin çözüm koşulları araştırıldı.

Anahtar Kelimeler: Nötrosofik matrisler, Nötrosofik lineer denklem sistemleri, Nötrosofik kare matrisin determinantı, Nötrosofik kare matrisin tersi

2024, 39 sayfa

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

ON NEUTROSOPHIC SQUARE MATRICES AND SOLUTIONS OF SYSTEMS OF LINEAR EQUATIONS

Ali İhsan SEKMEN

Süleyman Demirel University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Yılmaz ÇEVEN

This thesis is on neutrosophic square matrices and solutions of systems of linear equations. In the first section, information was given about the concept of neutrosophy. In the second section, summaries of the sources related to the thesis were given. In the third section, the concept of norm, neutrosophic square matrices, neutrosophic Diophantine equations, neutrosophic equation systems and Cramer's rule were given.

In the last section, which constitutes the main part of the thesis, we started with a theorem that shows in which case the abbreviation rule for neutrosophic real numbers is true. We then detail in which cases the division of two neutrosophic real numbers yields a new neutrosophic number. Then, the solution cases of a neutrsphic linear equation with one unknown were examined. After calculating the determinant of a square matrix and giving the necessary and sufficient conditions for a square matrix to be invertible, the solution conditions of the systems of equations with the number of unknowns equal to the number of equations were examined.

Keywords: Netrosophic matrices, Neutrosophic systems of linear equations, Determinant of a neutrosophic square matrix, Invers of neutrosophic square matrix

2024, 39 pages

TEŞEKKÜR

Danışman Hocam Prof. Dr. Yılmaz ÇEVEN'e hem ders döneminde bana öğrettikleri için hem tez çalışmalarında bana yapmış olduğu rehberlik için hem de kişiliğiyle ve olaylara yaklaşımıyla ilham verdiği için sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ders döneminde, derslerime giren Prof. Dr. Suna SALTAN, Prof. Dr. Ramazan TÜRKMEN, Dr. Zekiye ÇİLOĞLU ŞAHİN öğretmenlerime de teşekkür ederim.

Bana desteklerini her zaman hissettiren aileme sevgilerimi ve teşekkürlerimi sunarım.

Ali İhsan SEKMEN
ISPARTA, 2024

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$a \in A$	a , A kümesinin elemanıdır
$a \notin A$	a , A kümesinin elemanı değildir
$a \mid b$	a sayısı b sayısını böler
$a \nmid b$	a sayısı b sayısını bölmez
$\overline{a}$	a sayısının eşleniği
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{C}[I]$	Nötrosofik kompleks sayılar halkası
$\det M$	M matrisinin determimantı
I	Nötrosofik bilinmeyen
M^{-1}	M matrisinin tersi
$N(\alpha)$	α sayısının normu
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}[I]$	Nötrosofik reel sayılar halkası
$\mathbb{Q}$	Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{Q}[I]$	Nötrosofik rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi
$\mathbb{Z}[I]$	Nötrosofik tam sayılar halkası

1. GİRİŞ

Klasik mantık olarak da isimlendirebileceğimiz iki değerli mantık sisteminin yetersiz kalması, içinde herhangi bir nedene ve ya nedenlere bağlı olarak belirsizliklerin bulunduğu durumlara cevap vermekte zorlanması sonucu yeni arayışlar olmuştur. Smarandache belirsizlik kavramını da işin içine katarak nötrosofik mantık kavramı ile bu arayışa cevap sunmuştur. Latince neuter ve Grekçe sophia kelimelerinin birleşimi olan nötrosofi nötral düşünce anlamına gelmektedir. Nötrosofide bir olgu, birbirinden bağımsız olarak doğru olma derecesi, yanlış olma derecesi ve belirsiz olma derecelerine sahiptir. Mutlak doğrunun az olduğu, belirsizliklerin ve şüphenin hep var olduğu bir ortamda nötrosofi doğru ile yanlış arasındaki nötral bölgeyi doldurdu. Bu açıdan bakarsak nötrosofi, kararsız değişkenler arasındaki kararlılığı ya da kararlı değişkenler arasındaki kararsızlığı ölçmeyi de sağladı.

Zadeh tarafından ortaya atılan bulanık kavramı ile birlikte bulanık küme ve bulanık mantık kavramları Smarandache tarafından sunulan nötrosofi kavramıyla birlikte daha da genelleşti. Bulanık küme genelleştirilerek nötrosofik küme, bulanık mantık genelleştirilerek nötrosofik mantık kavramları gelişti. Sanayi, mühendislik, yapay zeka, siyaset, sosyoloji gibi birçok alanda nötrosofi kulanılarak belirsizliklerin olduğu durumlar daha iyi yönetilmiş ve daha doğru kararlar alınmıştır.

Nötrosofi teorisinin kullanılması ile nötrosofik grup, nötrosofik sayılar teorisi, nötrosofik halka, nötrosofik cisim ve nötrosofik vektör uzayı gibi cebirsel yapılar da geliştirilmiştir. $I^2 = I$ eşitliğini sağlayan belirsiz bir I elemanı cebirsel bir kümeye ekleyip I yı bir ikili işlemle yapının her bir elemanı ile birleştirerek nötrosofik cebirsel yapılar üretilmiştir. Örneğin, $(R,+,\times)$ bir halka ve $\langle R \cup I \rangle = \{x + yI : \mathrm{x}, y \in R\}$ olsun. $(\langle R \cup I \rangle,+,\times)$ cebirsel yapısına R ve I ile üretilen bir nötrosofik halka denilir ve kısaca $R[I]$ ile gösterilir. Geliştirilen yapılardan biri de nötrosofik lineer cebir teorisidir. Nötrosofik lineer cebir teorisinin temelleri 2010 yılından sonra atılmıştır. Şimdiye kadar nötrosofik matrisler, nötrosofik kare matrislerin determinantları, nötrosofik lineer denklemler ve denklem sistemleri, nötrosofik lineer Diophantine denklemleri, nötrosofik vektör uzayları ve nötrosofik kongrüanslar gibi bazı temel konular incelenmiştir.

Bu tezde önce norm kavramı, nötrosofik kare matrisler, nötrosofik Diophantine denklemler, nötrosofik denklem sistemleri ve Cramer kuralı verildi. Daha sonra, tezin asıl kısmını oluşturan son bölümde, kısaltma kuralının nötrosofik reel sayılarda hangi durumlarda doğru olduğunu gösteren bir teoremle başlandı. Devamında iki nötrosofik sayının bölümünün hangi durumlarda yeni bir nötrosofik sayı olacağı detaylı olarak gösterildi. Sonrasında bir bilinmeyenli bir nötrosofik lineer denklemin çözüm durumları incelendi. Sonra bir kare matrisin determinantı hesaplanarak ve bir kare matrisin tersinir olması için gerekli ve yeterli koşullar verilerek, çok bilinmeyenli denklem sistemlerinin çözüm koşulları araştırıldı.

2. KAYNAK ÖZETLERİ

Zadeh (1965), bulanık küme (fuzzy set) kavramını ve Atanassov (1986), sezgisel bulanık küme (intuitionistic fuzzy set) kavramını sunmuşlardır.

Nötrosofi, Smarandache tarafından 1980 yılında temelleri atılan felsefe dalıdır.

Smarandache (1998), nötrosofik mantık , nötrosofik küme ve nötrosofik olasılık kavramları üzerine çalışmıştır. Nötrosofik küme (neutrosophic set) ve belirsizlik / nötralite derecesini tanıtmıştır.

Kandasamy ve Smarandache (2006a), I belirsizlik elemanını kullanarak $x+yI$ şeklindeki nötrosofik sayıları ve devamında nötrosofik grup cebirsel yapısını tanıtmışlardır. Bu cebirsel yapı ile ilgili özelliklerin incelendiği teoremler vermişler ve örnekler sunmuşlardır.

Kandasamy ve Smarandache (2006b), nötrosofik halka ve bu halka üzerinde birçok teorem ve bunların uygulamalarını sunmuşlardır.

Bu çalışmaların akabinde nötrosofik cebirsel yapılara ilgi artmış ve birçok araştırmacı bu konular hakkında makaleler yayınlamıştır.

Conrad K. (2019), Gauss tam sayılar kümesi üzerinde çalışmıştır. $\mathbb{Z}[i]=\{x+yi: \mathrm{x}, y\in\mathbb{Z}\}$ Gauss tam sayılar kümesinde bölme algoritması, Euclid algoritması, modüler aritmetik gibi konuları araştırmış, birçok teorem sunmuştur.

Çeven ve Tekin (2020), $\langle\mathbb{Z}\cup I\rangle$ nötrosofik tam sayılar halkasını incelemişlerdir. Nötrosofik tam sayılar halkasında, nötrosofik tam sayıların normu ve normun özellikleri üzerinde durmuşlardır. Verilen özellikler ispatlanmış ve örneklendirilmiştir. Ayrıca nötrosofik tam sayılar halkasında bölme algoritması ve nötrosofik asal sayı kavramı verilmiş ve bu verilen kavramlarla ilgili örnekler sunulmuştur.

Yurttakal ve Çeven (2021), makalede $\mathbb{Z}[I]$ nötrosofik tam sayılar halkasında bir denklik bağıntısı incelemişler ve $\mathbb{Z}[I]$ tam sayılar halkasının bir parçalanmasını elde etmişlerdir. Sonra sıralama bağıntısı tanımlayıp nötrosofik tam sayılar halkasında pozitif ve negatif olma durumunu ve $\mathbb{Z}[I]$ da sıralama kavramlarını incelemişlerdir. Ayrıca bir pozitif nötrosofik tam sayının faktoriyelinin nasıl hesaplandığı ile ilgili bilgiler sunmuşlardır.

Abobala (2020), nötrosofik lineer denklemler ve nötrosofik quadratik denklemler üzerine çalışmış ve örnekler vermiştir. Ayrıca refined nötrosofik denklemlere de yer vermiştir.

Abobala vd. (2021), makalede ilk olarak nötrosofik kare matrislerin determinantı ve determinantın özelliklerini incelemişler ve örnekler vermişlerdir. Ardından nötrosofik kare matrisin tersi incelenmiştir. Ayrıca nilpotent matris, idempotent matris ve ortogonal matris kavramları tanımlanmış ve incelenmiştir. Nötrosofik kare matrisin köşegenleştirilmesi ve son olarak da, nötrosofik kare matrisin özdeğer ve özvektörleri ile ilgili teorem, ispat ve örneklere yer verilmiştir.

Sankari ve Abobala (2020), makalede, nötrosofik tam sayılar halkasında iki değişkenli lineer Diophantine denklemlerin çözülebilirliği için gerekli koşulları incelemişler ve çeşitli örnekler vermişlerdir.

Alhasan (2021), nötrosofik lineer denklem ve denklem sistemleriyle ilgili bazı tanımlar, teoremler ve örnekler vermiştir. Ardından nötrosofik lineer denklem sistemlerinin Cramer kuralı ile çözümünü incelemiştir.

Abobala (2021), Nötrosofik tam sayılar halkasında kongrüanslar, Euler teoremi, bölünebilirlik kavramlarını incelemiş, Pell denkleminin çözümü ile ilgili bir algoritma vermiştir.

3. NORM KAVRAMI, NÖTROSOFİK KARE MATRİSLER VE NÖTROSOFİK DENKLEMLER

3.1 Norm Kavramı

Bu kısımdaki bilgiler Çeven ve Tekin (2020) kaynağından alınmıştır.

$(R,+,.)$ bir halka ve I ise $I^2=I$ eşitliğini sağlayan bir belirsizlik elemanı olsun. $\langle R\cup I\rangle=\{a+bI:\ a,b\in R\}$ kümesi, R deki ikili işlemler altında, I ve R ile üretilen bir nötrosofik halka olarak adlandırılır.
$\langle R\cup I\rangle$ ifadesi, kısa olması için $R[I]$ olarak gösterilir.

Yukarıdaki tanıma göre, $\langle\mathbb{Z}\cup I\rangle=\{a+bI:\ a,b\in\mathbb{Z}\}$ kümesi nötrosofik tam sayılar halkasıdır ve kısaca $\mathbb{Z}[I]$ ile gösterilir. $\langle\mathbb{Q}\cup I\rangle=\{a+bI:\ a,b\in\mathbb{Q}\}$ kümesi ise nötrosofik rasyonel sayılar halkasıdır ve kısaca $\mathbb{Q}[I]$ ile gösterilir.
$\langle\mathbb{R}\cup I\rangle=\{a+bI:\ a,b\in\mathbb{R}\}$ kümesi de nötrosofik reel sayılar halkasıdır ve kısaca $\mathbb{R}[I]$ ile gösterilir.

Tanım 3.1.1 $x=a+bI\in\mathbb{Q}[I]$ olsun. $a+b-bI$ nötrosofik rasyonel sayısına x'in eşleniği denir ve $\overline{x}$ ile gösterilir. $x=a+bI$ nötrosofik rasyonel sayısının normu $N(x)=x.\overline{x}=a(a+b)$ şeklinde tanımlanır.

Önerme 3.1.1 $x=a+bI\in\mathbb{Q}[I]$ ve $y=c+dI\in\mathbb{Q}[I]$ olsun.

(i) $N(x)\in\mathbb{Q}$,

(ii) $x\in\mathbb{Z}[I]$ ise $N(x)\in\mathbb{Z}$,

(iii) $N(x)=0\Leftrightarrow a=0$ veya $a=-b$,

(iv) $a\in\mathbb{Q}\Rightarrow N(a)=a^2$,

(v) $N(bI)=0$,

(vi) $N(xy) = N(x)N(y)$,

(vii) $x \neq 0$ ve $N(x) \neq 0$ ise $\dfrac{1}{x} \in \mathbb{Q}[I]$,

(viii) $y \neq 0$ ve $N(y) \neq 0$ ise $N\left(\dfrac{x}{y}\right) = \dfrac{N(x)}{N(y)}$

İspat: (i)-(v) tanımlardan kolayca gösterilir.

(vi) $$\begin{aligned} N(xy) &= N\big((a+bI)(c+dI)\big) \\ &= N\big(ac + (ad+bc+bd)I\big) \\ &= ac(ac+ad+bc+bd) \\ &= a^2c^2 + a^2cd + abc^2 + abcd \\ &= (a^2+ab)(c^2+cd) \\ &= N(x)N(y) \end{aligned}$$

(vii) $x = a + bI \in \mathbb{Q}[I]$ olsun. Bu durumda

$$\frac{1}{x} = \frac{\overline{x}}{x.\overline{x}} = \frac{a+b}{N(x)} - \frac{b}{N(x)} I \in \mathbb{Q}[I]$$

olduğu görülür.

(viii) $x = a + bI \in \mathbb{Q}[I]$ olsun.

$$\begin{aligned} N\left(\frac{1}{x}\right) &= N\left(\frac{a+b}{N(x)} - \frac{b}{N(x)} I\right) \\ &= \frac{a+b}{N(x)}\left(\frac{a+b}{N(x)} - \frac{b}{N(x)}\right) \\ &= \frac{1}{N(x)} \end{aligned}$$

olduğu için,

$$N\left(\frac{x}{y}\right)=N\left(x.\frac{1}{y}\right)=N(x)N\left(\frac{1}{y}\right)=\frac{N(x)}{N(y)}$$

elde edilir.

Tanım 3.1.2 $x, y\in\mathbb{Z}[I]$ olsun. $y=xz$ olacak şekilde bir z nötrosofik tam sayısı var ise x sayısı y sayısını böler denir ve $x|y$ ile gösterilir. x ve z'ye y'nin bölenleri denir.

Örnek 3.1.1

(i) $3=(3-2I)(1+2I)$ olduğu için $1+2I|3$ ve $3-2I|3$ dir.

(ii) $\mathbb{Z}[I]$da $2+7I$, $3+5I$ sayılarını ele alalım.

$\frac{3+5I}{2+7I}=\frac{(3+5I)(9-7I)}{(2+7I)(9-7I)}=\frac{27}{18}-\frac{11}{18}I\notin\mathbb{Z}[I]$ olduğu için $2+7I$, $3+5I$'yı $\mathbb{Z}[I]$'da bölmez.

Teorem 3.1.2 (Bölme Algoritması) $u, v\in\mathbb{Z}[I]$ ve $v\neq 0$ olsun.
$u=q.v+r$, $|N(r)|<|N(v)|$ olacak şekilde $q, r\in\mathbb{Z}[I]$ vardır.

İspat $\frac{u}{v}\in\mathbb{Q}[I]$ 'dır. $\frac{u}{v}=x+yI$ $(x, y\in\mathbb{Q})$ olsun. $m, n\in\mathbb{Z}$ sırasıyla x, y'ye en yakın tam sayılar olsun. O zaman $|x-m|\leq\frac{1}{2}$ ve $|y-n|\leq\frac{1}{2}$ yazılabilir. $q=m+nI$ alalım. O zaman,

$$\begin{aligned}N\left(\frac{u}{v}-q\right)&=N((x-m)+(y-n)I)\\&=(x-m)((x-m)+(y-n))\\&=(x-m)^2+(x-m)(y-n)\\&\leq\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\\&<1\end{aligned}$$

olur.

Buradan,

$$\left|N\left(\frac{u}{v}-q\right)\right|=\left|N\left(\frac{u-qv}{v}\right)\right|$$

$$=\left|\frac{N(u-qv)}{N(v)}\right|$$

$$=\frac{|N(u-qv)|}{|N(v)|}$$

<1 olduğu için,

$|N(u-qv)|<|N(v)|$ elde edilir. $u-qv=r$ yazılırsa sonuca ulaşılır.

Örnek 3.1.2 $u=5+6I$, $v=3+2I$ olsun.

$$\frac{u}{v}=\frac{5+6I}{3+2I}=\frac{(5+6I)(5-2I)}{(3+2I)(5-2I)}=\frac{25+8I}{15}=\frac{25}{15}+\frac{8}{15}I=x+yI$$

$m=2$, $n=1$ alınır. Buradan $q=2+I$ ve $r=u-qv=-1-3I$ olur.

$\mathbb{Z}[I]$ ve $\mathbb{Z}$'deki bölme algoritmaları arasında önemli bir fark olduğuna dikkat edilmelidir: $\mathbb{Z}[I]$'da bölüm ve kalan tek değildir.

Örnek 3.1.3

$8+6I=(3+2I)(2+I)+2-3I$ ve $|N(2-3I)|=2<|N(2+I)|=6$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca,

$8+6I=(3+2I)(4-I)-4+3I$ ve $|N(-4+3I)|=4<|N(4-I)|=12$

şeklinde de yazılabilir.

3.2 Nötrosofik Kare Matrisler

Bu kısımdaki bilgiler Abobala vd. (2021) kaynağından alınmıştır.

Tanım 3.2.1 (Nötrosofik matris) $K[I]$ bir nötrosofik cisim, $1\le i\le m$ ve $1\le j\le n$ için $a_{ij}\in K[I]$ olmak üzere, $M_{m\times n}=[a_{ij}]$ matrisine bir nötrosofik matris denir.

Tanım 3.2.2 A ve B, $n\times n$ tipli reel elemanlı kare matrisler olmak üzere $M=A+BI$ matrisi $n\times n$ tipli bir nötrosofik kare matristir. M matrisinin determinantı,

$$\det M=\det A+I\left[\det\left(A+B\right)-\det A\right]$$

olarak tanımlanır.

Tanım 3.2.3 A ve B, $n\times n$ tipli iki reel kare matrisler olmak üzere $M=A+BI$, $n\times n$ tipli nötrosofik kare matris; S_1 ve S_2, $n\times n$ tipli iki reel kare matrisler olmak üzere $S=S_1+S_2I$, $n\times n$ tipli nötrosofik kare matris; $U_{n\times n}$ ise $n\times n$ birim matris olsun. M tersinir bir matristir ancak ve ancak $S.M=M.S=U_{n\times n}$ dır.

Teorem 3.2.1 A ve B, $n\times n$ tipli iki reel kare matris olmak üzere $M=A+BI$ nötrosofik kare matris olsun. M tersinirdir ancak ve ancak A ve $A+B$ matrisleri tersinir matrislerdir. M nin tersinir olması durumunda

$$M^{-1}=A^{-1}+I\left[\left(A+B\right)^{-1}-A^{-1}\right]$$

olur.

İspat A ve $A+B$ tersinir matrisler ise o zaman $\left(A+B\right)^{-1}$, A^{-1} vardır. Bu durumda $M^{-1}=A^{-1}+I\left[\left(A+B\right)^{-1}-A^{-1}\right]$ olduğunu ispatlayalım.

$$M.M^{-1}=\left(A+BI\right).\left(A^{-1}+I\left[\left(A+B\right)^{-1}-A^{-1}\right]\right)$$

$$=AA^{-1}+I\left[A\left(A+B\right)^{-1}-AA^{-1}+BA^{-1}+B\left(A+B\right)^{-1}-BA^{-1}\right]$$

$$=U_{n\times n}+I\left[\left(A+B\right)\left(A+B\right)^{-1}-U_{n\times n}\right]$$

$$=U_{n\times n}+I\left[U_{n\times n}-U_{n\times n}\right]=U_{n\times n}=M^{-1}M$$

olduğundan M^{-1} matrisi M matrisinin tersidir.

Şimdi M nin tersinin olduğunu kabul edelim. Bu durumda $M.S=S.M=U_{n\times n}$ eşitliğini sağlayan bir $S=S_1+S_2I$ matrisi vardır.

$$M.S=\left(A+BI\right)\left(S_1+S_2I\right)$$

$$= AS_1 + I\left[(A+B)(S_1+S_2) - AS_1\right]$$

$$= U_{n\times n} + 0_{n\times n} = SM$$

O zaman şunu elde ederiz,

(a) $S_1A = AS_1 = U_{n\times n}$, bu durumda A tersinirdir ve $A^{-1} = S_1$ dir.

(b) $(A+B)(S_1+S_2) - AS_1 = (S_1+S_2)(A+B) - S_1A = 0_{n\times n}$ buradan

$(S_1+S_2)(A+B) = (A+B)(S_1+S_2) = AS_1 = U_{n\times n}$ olur. Bu $A+B$ nin tersinir olduğunu gösterir.

Teorem 3.2.2 M tersinir matristir ancak ve ancak $\det M \neq 0$ dır.

İspat Teorem 3.2.1 den M nin tersinir olmasının gerek ve yeter koşulunun $A+B$ ve A nın tersinir olması gerektiğini biliyoruz. Bu yüzden $\det(A+B) \neq 0$, $\det A \neq 0$ dır. Bu da $\det M = \det A + I\left[\det(A+B) - \det A\right] \neq 0$ olduğu anlamına gelir.

Uyarı 3.2.1 Bu teoremin tam olarak doğru olmadığı, tezin 4. kısmında Teorem 4.6 ve örnek 4.5(iii) ile gösterilmiştir.

Örnek3.2.1 $M = \begin{bmatrix} 1 & -1+I \\ I & 2+I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.I$ nötrosofik matrisini düşünelim. Burada $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ olur.

(a) $\det A = 2$, $A+B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $\det(A+B) = 3$ **,** $\det M = 2 + I[3-2] = 2 + I \neq 0$

olduğundan teoreme göre M tersinir matristir.

(b) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, $(A+B)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ elde edilir, buna göre

$$M^{-1} = A^{-1} + I\left[(A+B)^{-1} - A^{-1}\right] = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} + I\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}I \\ -\frac{1}{3}I & \frac{1}{2} - \frac{1}{6}I \end{bmatrix}$$

olduğu görülür.

(c) $MM^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = U_{2\times 2}$ olduğu kolayca gösterilebilir.

Teorem 3.2.3 A , B $n\times n$ reel kare matrisler olmak üzere $M = A + BI$**,** $n\times n$ tipli nötrosofik kare matris olsun.

(i) $M^r = A^r + I\left[(A+B)^r - A^r\right]$

(ii) M nilpotenttir ancak ve ancak A ve $A+B$ nilpotenttir.

(iii) M idempotenttir ancak ve ancak A ve $A+B$ idempotenttir.

İspat (i) r üzerinden matematiksel tümevarım kullanılarak ispatlanabilir: $r=1$ için önermenin doğru olduğu açıktır. $r=k$ için önermenin doğru olduğu kabul edilsin. $r=k+1$ için doğru olduğunu aşağıdaki gibi ispatlanabilir:

$$M^{k+1} = M^k.M = \left(A^k + I\left[(A+B)^k - A^k\right]\right).(A+BI)$$

$$= A^{k+1} + I\left[A^k.B + (A+B)^k.A + (A+B)^k.B - A^k.A - A^k.B\right]$$

$$= A^{k+1} + I\left[(A+B)^k.(A+B) - A^{k+1}\right]$$

$$= A^{k+1} + I\left[(A+B)^{k+1} - A^{k+1}\right]$$

(ii) M nilpotenttir ancak ve ancak $\exists\, r \in N^+$ için $M^r = 0$ dir. Bu durumda $A^r + I\left[(A+B)^r - A^r\right] = 0$ dır. Buradan $A^r = (A+B)^r = 0$ olur. Bu da A ve $A+B$ nin nilpotent olduğunu gösterir.

(iii) İspatı (ii) deki ispata benzerdir.

Teorem 3.2.4 $M = A + BI$ ve $N = C + DI$ iki $n\times n$ nötrosofik kare matris olsun.

(i) $\det(M.N) = \det M.\det N$**,**

(ii) $\det\left(M^{-1}\right)=\left(\det M\right)^{-1}$,

(iii) $\det M=1$ ancak ve ancak $\det A=\det\left(A+B\right)=1$

dir.

İspat (i) $M.N=A.C+I\left[B.C+B.D+A.D\right]$

$$=A.C+I\left[\left(A+B\right)\left(C+D\right)-A.C\right]$$

olduğundan

$\det\left(M.N\right)=\det\left(A.C\right)+I\left[\det\left(\left(A+B\right)\left(C+D\right)\right)-\det\left(A.C\right)\right]$

$=\det A.\det C+I\left[\det\left(A+B\right).\det\left(C+D\right)-\det\left(A.C\right)\right]$

$=\det A.\det C+I\left[\det\left(A+B\right).\det\left(C+D\right)-\det A.\det C\right]$

$=\left(\det A+I\left[\det\left(A+B\right)-\det A\right]\right).\left(\det C+I\left[\det\left(C+D\right)-\det C\right]\right)$

$=\det M.\det N$

olur.

(ii) $\det\left(MM^{-1}\right)=\det\left(U_{n\times n}\right)=1$ olup buradan $\det M.\det\left(M^{-1}\right)=1$ yani $\det\left(M^{-1}\right)=\left(\det M\right)^{-1}$ elde edilir.

(iii) $\det M=1$ olması $\det A+I\left[\det\left(A+B\right)-\det A\right]=1$ olması demektir. Bu da $\det A=\det\left(A+B\right)=1$ eşitliğini gerektirir.

Not: (iii) Bölümündeki sonuç kolaylıkla aşağıdaki gerçeğe genellenebilir:

$$\det M=\det A \text{ ancak ve ancak } \det A=\det\left(A+B\right).$$

Tanım 3.2.3 A ve B iki $n\times n$ kare matris olmak üzere $M=A+BI$ bir $n\times n$ nötrosofik kare matris olsun. M ortagonaldir ancak ve ancak $M.M^{T}=U_{n\times n}$ dır.

Teorem 3.2.5 $M=A+BI$ bir $n\times n$ nötrosofik matris olsun.

(a) M ortogonaldir ancak ve ancak A , B ortogonal matrislerdir.

(b) M ortogonal ise $\det M\in\left\{1,-1,-1+2I,1-2I\right\}$ dir.

İspat :

(a) M ortogonal nötrosofik matristir ancak ve ancak $M^T = M^{-1}$ dir. Buradan şu eşitlik çıkar: $A^T + B^T I = A^{-1} + I\left[\left(A+B\right)^{-1} - A^{-1}\right]$. Böylece $A^{-1} = A^T$ ve $\left(A+B\right)^{-1} = B^T + A^{-1} = B^T + A^T = \left(A+B\right)^T$ eşitlikleri elde edilir, ispat tamamlanır.

(b) M ortogonal ise $\det\left(M.M^T\right) = \det\left(U_{n\times n}\right) = 1$ eşitliği elde edilir. Buradan $\det M . \det M^T = 1$ ve $\left(\det M\right)^2 = 1$ olur, böylece $\det M \in \{1,-1,-1+2I,1-2I\}$ olduğu görülür.

3.3 Nötrosofik Diophantine Denklemler

Tezin bu kısmında sadece Diophantine denklemlere ait bilgiler verilmiştir. Sankari ve Abobala (2020) kaynağından yararlanılmıştır. Tezin 4. kısmında nötrosofik denklemlerin geneli hakkında detaylı bilgi ve sonuçlar aktarılacaktır.

Tanım 3.3.1 $\mathbb{Z}[I] = \{a+bI : a,b \in \mathbb{Z}\}$ tam sayılar halkası olsun. İki değişkenli lineer Diophantine denklem aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$AX + BY = C \;\; ; \;\; \text{A,B,C} \in \mathbb{Z}[I]$$

Teorem 3.3.1 $\mathbb{Z}[I] = \{a+bI : a,b \in \mathbb{Z}\}$ tam sayılar halkası olsun.

$X = x_1 + x_2 I$, $Y = y_1 + y_2 I$, $A = a_1 + a_2 I$, $B = b_1 + b_2 I$ olmak üzere,

$AX + BY = C$ iki değişkenli nötrosofik lineer Diophantine denklemi aşağıdaki iki klasik Diophantine denkleme denktir.

(i) $a_1 x_1 + b_1 y_1 = c_1$

(ii) $\left(a_1 + a_2\right)\left(x_1 + x_2\right) + \left(b_1 + b_2\right)\left(y_1 + y_2\right) = c_1 + c_2$

İspat: $AX + BY = C$ 'in (i) ve (ii) yi içerdiğini göstermek yeterlidir.

$AX + BY = C$ denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\left(a_1 + a_2 I\right)\left(x_1 + x_2 I\right) + \left(b_1 + b_2 I\right)\left(y_1 + y_2 I\right) = c_1 + c_2 I$$

$$\left[a_1x_1+b_1y_1\right]+\left[a_1x_2+a_2x_1+a_2x_2+b_1y_2+b_2y_1+b_2y_2\right]I=c_1+c_2I$$

Buradan,

$a_1x_1+b_1y_1=c_1$ denklem (i) ve $a_1x_2+a_2x_1+a_2x_2+b_1y_2+b_2y_1+b_2y_2=c_2$ elde edilir. Denklem(ii) yi elde etmek için, $a_1x_2+a_2x_1+a_2x_2+b_1y_2+b_2y_1+b_2y_2=c_2$ ye denklem (i) eklenir.

$$a_1x_1+b_1y_1+a_1x_2+a_2x_1+a_2x_2+b_1y_2+b_2y_1+b_2y_2=c_1+c_2$$

$$\left(a_1+a_2\right)\left(x_1+x_2\right)+\left(b_1+b_2\right)\left(y_1+y_2\right)=c_1+c_2$$

denklem (ii) elde edilir.

Teorem 3.3.2 $\mathbb{Z}\left[I\right]=\left\{a+bI : a,b\in\mathbb{Z}\right\}$ tam sayılar halkası olsun.

$X=x_1+x_2I$, $Y=y_1+y_2I$, $A=a_1+a_2I$, $B=b_1+b_2I$ olmak üzere,

$AX+BY=C$ iki değişkenli Diophantine denklemi çözülebilirdir ancak ve ancak $\left(a_1,b_1\right)\mid c_1$ ve $\left(a_1+a_2,b_1+b_2\right)\mid c_1+c_2$ dir.

İspat: Teorem 3.3.1'e göre $\mathbb{Z}\left[I\right]$ daki $AX+BY=C$ nötrosofik lineer denkleminin çözümünü bulmak için, $\mathbb{Z}$ deki aşağıdaki iki Diophantine denklem çözülebilir.

(i) $a_1x_1+b_1y_1=c_1$

(ii) $\left(a_1+a_2\right)\left(x_1+x_2\right)+\left(b_1+b_2\right)\left(y_1+y_2\right)=c_1+c_2$

$\mathbb{Z}$ de denklem(i) çözülebilirdir $\Leftrightarrow \left(a_1,b_1\right)\mid c_1$ dir.

$\mathbb{Z}$ de denklem(ii) çözülebilirdir $\Leftrightarrow \left(a_1+a_2,b_1+b_2\right)\mid c_1+c_2$

Böylece ispat tamamlanır.

Örnek 3.3.1

(a) $\left(2+2I\right)X+\left(3+4I\right)Y=5+5I$ nötrosofik Diophantine denklemi çözülebirdir, çünkü; $\left(2,3\right)\mid 5$ ve $\left(4,7\right)\mid 10$ dir.

(b) $\left(2+3I\right)X+\left(4+5I\right)Y=5+I$ nötrosofik lineer denklemi çözülebilir değildir, çünkü; $\left(2,4\right)\nmid 5$ dir.

Not: $\mathbb{Z}[I]=\{a+bI : a,b\in\mathbb{Z}\}$ **t**am sayılar halkası olsun.

$X=x_1+x_2I$, $Y=y_1+y_2I$, $A=a_1+a_2I$, $B=b_1+b_2I$ olmak üzere,

$AX+BY=C$ iki değişkenli Diophantine denklemi çözülürken aşağıdaki adımlar takip edilir.

(a) Teorem 3.3.2 ile çözülebilirliği kontrol edilir.

(b) $a_1x_1+b_1y_1=c_1$ denklemi çözülür.

(c) $(a_1+a_2)(x_1+x_2)+(b_1+b_2)(y_1+y_2)=c_1+c_2$ çözülür.

(d) x_2 , y_2 hesaplanır.

Örnek 3.3.2 $(2+2I)X+(3+4I)Y=5+5I$ nötrosofik Diophantine denklemini yukarıda belirtilen adımlara göre çözelim.

(a) Çözülebilirdir, çünkü $(2,3)|5$ ve $(4,7)|10$ dir.

(b) $2x_1+3y_1=5$ denklemi $\mathbb{Z}$ de klasik Diophantine denklemdir. Çözümlerden biri $x_1=4$, $y_1=-1$ dir.

(c) $(2+2)(x_1+x_2)+(3+4)(y_1+y_2)=5+5$

$4(x_1+x_2)+7(y_1+y_2)=10$ klasik Diophantine denkleminin bir çözümü $(x_1+x_2)=-1$, $(y_1+y_2)=2$ dir.

(d) $x_2=-5$, $y_2=3$ olur.

Buradan, $(2+2I)X+(3+4I)Y=5+5I$ denkleminin bir çözümü $X=4-5I$, $Y=-1+3I$ olur.

3.4 Nötrosofik Denklem sistemleri ve Cramer Kuralı

Tezin bu kısmında, iki bilinmeyenli nötrosofik denklem sistemlerinde Cramer kuralının kullanımı ile ilgili bilgi verilmiştir. Alhasan (2021) kaynağından yararlanılmıştır.

$$(a_{11}+b_{11}I)x+(a_{12}+b_{12}I)y=c_1+d_1I$$
$$(a_{21}+b_{21}I)x+(a_{22}+b_{22}I)y=c_2+d_2I$$

denklem sisteminde,

$$A=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11}I & a_{12}+b_{12}I \\ a_{21}+b_{21}I & a_{22}+b_{22}I \end{bmatrix}$$

$$\det(A)=\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11}I & a_{12}+b_{12}I \\ a_{21}+b_{21}I & a_{22}+b_{22}I \end{vmatrix}$$

$$\det(x)=\begin{vmatrix} c_1+d_1I & a_{12}+b_{12}I \\ c_2+d_2I & a_{22}+b_{22}I \end{vmatrix} \quad , \quad \det(y)=\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11}I & c_1+d_1I \\ a_{21}+b_{21}I & c_2+d_2I \end{vmatrix}$$ olur.

$\det(A)=a+bI$ olduğu kabul edilirse, aşağıdaki durumlara dikkat edilir.

1. $\det A\neq 0$ veya $a\neq 0$ veya $a\neq -b$ ise, sistemin aşağıdaki formüllerle verilen tek çözümü vardır:

$$x=\frac{\det(x)}{\det(A)} \quad , \quad y=\frac{\det(y)}{\det(A)}$$

2. $a=0$ veya $a=-b$ ise sistem çözümsüz.

3. $\det(A)=0+0I$ ise, iki durum olur,

   i) $\det(x)$ ve $\det(y)$ den birisi 0 (sıfır) değilse, sistem çözümsüzdür.

   ii) $\det(x_i)=0+0I;\ i=1,2,...,n$ ise, sistemin sonsuz çözümü vardır.

Uyarı 3.4.1 Cramer kuralında x ve y bulunurken bölme işlemi yapılmaktadır. Tezin 4. bölümünde Teorem 4.2 de bölme işlemiyle ilgili detaylı bilgiler ve örnek 4.2 de bu durumlara örnekler verilmiştir. Bu durumda yukarıda belirtilen maddelerde bazı hatalar vardır. Böyle denklem sistemlerinin olası çözüm durumlarının analizi için, tezin 4. bölümünde yer alan Sonuç 4.2 incelenmelidir.

Örnek 3.4.1

$(2+I)x+3y=5+I$

$(3-2I)x+2y=I$

denklem sisteminin çözümünü bulalım,

$$A=\begin{bmatrix} 2+I & 3 \\ 3-2I & 2 \end{bmatrix} \quad \text{ve } \det A=\begin{vmatrix} 2+I & 3 \\ 3-2I & 2 \end{vmatrix}=4+2I-9+6I=-5+8I\neq 0+0I \quad \text{dır.}$$

$$\det x=\begin{vmatrix} 5+I & 3 \\ I & 2 \end{vmatrix}=10-I \quad , \quad \det y=\begin{vmatrix} 2+I & 5+I \\ 3-2I & I \end{vmatrix}=-15+12I \quad \text{dır.}$$

$$x=\frac{\det x}{\det A}=\frac{10-I}{-5+8I}=-2+5I \quad \text{ve} \quad y=\frac{\det y}{\det A}=\frac{-15+12I}{-5+8I}=3-4I \quad \text{olur.}$$

Çözümü doğrulamak için, x ve y değerleri ilk denklemde yerine konulursa sağladığı görülür:

$$(2+I)x+3y=(2+I)(-2+5I)+3(3-4I)$$

$$=-4-2I+10I+5I+9-12I=5+I \quad .$$

Örnek 3.4.2

$2Ix+7y=I$

$3Ix+y=2I$ Denklem sisteminin çözümünü bulalım,

$A=\begin{bmatrix} 2I & 7 \\ 3I & 1 \end{bmatrix}$, $\det A=\begin{vmatrix} 2I & 7 \\ 3I & 1 \end{vmatrix}=2I-21I=0-19I$, $\det A=a+bI$ için $a\neq 0$ ve $a\neq -b$ ise durumunu sağlamıyor.

$\det x=\begin{vmatrix} I & 7 \\ 2I & 1 \end{vmatrix}=I-14I=0-13I$ olur. O zaman,

$x=\dfrac{\det x}{\det A}=\dfrac{0-13I}{0-19I}$ (Tanımsız) olduğu için sistem çözümsüzdür.

Uyarı 3.4.2 Alhasan (2021) makalesinde, bu sorunun çözümü bu şekilde bırakılıp çözümsüzdür denilse de, aslında bu sorunun çözümü vardır. Tezin 4. bölümünde Teorem 4.2 de bölme işlemiyle ilgili hükümler ve Teorem 4.7 ve Teorem 4.8 de denklem sistemlerinin çözüm durumları ile ilgili hükümler incelenirse, bu soruda verilen denklem sisteminin bir çözümü aşağıdaki gibi olur:

$x=\dfrac{13I}{19I}$ sayısını ele alalım. Bu bölme işleminin $\left(m+nI:\ m+n=\dfrac{13}{19},\ \text{m,n}\in\mathbb{R}\right)$ koşulunu sağlayan sonsuz sayıda $m+nI$ şeklinde çözümü vardır. Bir örnek verilecek olursa, $x=\dfrac{13I}{19I}$ bölme işleminin sonuçlarından bir tanesi $x=\dfrac{10}{19}+\dfrac{3}{19}I$ olabilir.

$\det y=\begin{vmatrix}2I & I\\ 3I & 2I\end{vmatrix}=I$, $y=\dfrac{\det y}{\det A}=-\dfrac{I}{19I}$ olur. Bu bölme işleminin de $\left(m+nI:\ m+n=\dfrac{-1}{19},\ \text{m,n}\in\mathbb{R}\right)$ koşulunu sağlayan sonsuz sayıda $m+nI$ şeklinde çözümü vardır. Bir örnek verilecek olursa $y=\dfrac{0}{19}-\dfrac{1}{19}I$ olabilir.

Bulunan bu x ve y değerleri, denklem sisteminde yerine konulursa, denklemleri sağladığı görülür.

$2I\left(\dfrac{10}{19}+\dfrac{3}{19}I\right)+7\left(-\dfrac{1}{19}I\right)=\dfrac{20}{19}I+\dfrac{6}{19}I-\dfrac{7}{19}I=\dfrac{19}{19}I=I$ birinci denklemi sağlıyor.

$3I\left(\dfrac{10}{19}I+\dfrac{3}{19}I\right)+\left(-\dfrac{1}{19}I\right)=\dfrac{30}{19}I+\dfrac{9}{19}I-\dfrac{1}{19}I=\dfrac{38}{19}I=2I$ ikinci denklemi de sağlıyor.

Örnek 3.4.3

$(2+I)x+3y=5+I$

$(3-2I)x+y=I$

denklem sisteminin çözümünü bulalım,

$A=\begin{bmatrix}2+I & 3\\ 3-2I & 1\end{bmatrix}$, $\det A=\begin{vmatrix}2+I & 3\\ 3-2I & 1\end{vmatrix}=2+I-9+6I=-7+7I$ olur.

Bu durum, $\det A=a+bI$ da , $a\neq 0$ ve $a\neq -b$ olmalıdır koşulunu sağlamıyor.

($a=-7$, $b=7$ ve bu durumda $a=-b$)

Bu yüzden çözüm yoktur.

Uyarı 3.4.3 Burada gerçekten bu denklem sisteminin çözümü yoktur. Ama sebebi $\det A = a + bI$ daki $a \neq -b$ olmalıdır koşulu değildir. Tezin 4. bölümünde bir denklem sisteminin çözülebilir olma şartları, Teorem 4.7 ve Teorem 4.8 de belirtilmiştir. Burada, soru özelinde, eğer Cramer kuralını uygularsak,

$$\det x = \begin{vmatrix} 5+I & 3 \\ I & 1 \end{vmatrix} = 5 + I - 3I = 5 - 2I$$

$x = \dfrac{\det x}{\det A} = \dfrac{5-2I}{-7+7I}$ olur. Burada $\dfrac{5-2I}{-7+7I} \notin \mathbb{R}[I]$ dır. Tezin 4. kısmında Teorem 4.2 de bölme işlemi ile ilgili bilgiler incelendiğinde bu görülecektir.

Örnek 3.4.4

$$(2+I)x + (1+I)y + (3-I)z = 2+I$$

$$(-1+I)x + (3-2I)y + (1+3I)z = 4+2I$$

$$(3+2I)x + (4-I)y + (2-3I)z = 5-I$$

denklem sisteminin çözümünü bulalım,

$$A = \begin{bmatrix} 2+I & 1+I & 3-I \\ -1+I & 3-2I & 1+3I \\ 3+2I & 4-I & 2-3I \end{bmatrix}, \quad \det A = \begin{vmatrix} 2+I & 1+I & 3-I \\ -1+I & 3-2I & 1+3I \\ 3+2I & 4-I & 2-3I \end{vmatrix} = -30 + 21I ,$$

$$\det x = \begin{vmatrix} 2+I & 1+I & 3-I \\ 4+2I & 3-2I & 1+3I \\ 5-I & 4-I & 2-3I \end{vmatrix} = 4 + 29I , \quad \det y = \begin{vmatrix} 2+I & 2+I & 3-I \\ -1+I & 4+2I & 1+3I \\ 3+2I & 5-I & 2-3I \end{vmatrix} = -35 - 31I$$

$$\det z = \begin{vmatrix} 2+I & 1+I & 2+I \\ -1+I & 3-2I & 4+2I \\ 3+2I & 4-I & 5-I \end{vmatrix} = -11 + 14I$$ olur. Buradan,

$$x = \frac{\det x}{\det A} = \frac{4+29I}{-30+21I} = \frac{-2}{15} - \frac{477}{135} I$$

$$y = \frac{\det y}{\det A} = \frac{-35-31I}{-30+21I} = \frac{7}{6} + \frac{37}{6} I$$

$$z = \frac{\det z}{\det A} = \frac{-11+14I}{-30+21I} = \frac{11}{30} - \frac{7}{10} I$$

$$(x, y, z) = \left(\frac{-2}{15} - \frac{477}{135} I,\ \frac{7}{6} + \frac{37}{6} I,\ \frac{11}{30} - \frac{7}{10} I \right)$$

olur.

Çözümün doğruluğunu test etmek için, bulunan x, y ve z değerleri ilk denklemde yerine konulursa,

$(2+I)\left(-\frac{2}{15}-\frac{477}{135}I\right)+(1+I)\left(\frac{7}{6}+\frac{37}{6}I\right)+(3-I)\left(\frac{11}{30}-\frac{7}{10}I\right)=2+I$ sağladığı görülür.

Örnek 3.4.5

$(2+I)x+(1+I)y+(3-I)z=0$

$(-1+I)x+(3-2I)y+(1+3I)z=0$

$(3+2I)x+(4-I)y+(2-3I)z=0$

denklem sisteminin çözümünü bulalım,

$$A=\begin{bmatrix} 2+I & 1+I & 3-I \\ -1+I & 3-2I & 1+3I \\ 3+2I & 4-I & 2-3I \end{bmatrix}, \quad \det A=\begin{vmatrix} 2+I & 1+I & 3-I \\ -1+I & 3-2I & 1+3I \\ 3+2I & 4-I & 2-3I \end{vmatrix}=-30+21I$$

$$\det x=\begin{vmatrix} 0 & 1+I & 3-I \\ 0 & 3-2I & 1+3I \\ 0 & 4-I & 2-3I \end{vmatrix}=0, \quad \det y=\begin{vmatrix} 2+I & 0 & 3-I \\ -1+I & 0 & 1+3I \\ 3+2I & 0 & 2-3I \end{vmatrix}=0$$

$$\det z=\begin{vmatrix} 2+I & 1+I & 0 \\ -1+I & 3-2I & 0 \\ 3+2I & 4-I & 0 \end{vmatrix}=0$$ olur. Buradan,

$$x=\frac{\det x}{\det A}=0, \quad y=\frac{\det y}{\det A}=0, \quad z=\frac{\det z}{\det A}=0$$

$(x,y,z)=(0,0,0)$

olur.

4. NÖTROSOFİK KARE MATRİSLER VE NÖTROSOFİK LİNEER DENKLEM SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİ ÜZERİNE BAZI SONUÇLAR

Bu bölümde, Çeven ve Sekmen (2023) tarafından yayınlanan "On Neutrosophic Square Matrices and Solutions of Systems of Linear Equations" isimli makaleye yer verilmiştir.

Teorem 4.1 $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}[I]$ olsun. $\alpha\beta=\alpha\gamma$ ve $N(\alpha)\neq 0$ ise $\beta=\gamma$ dır.

İspat: $\alpha=\alpha_1+\alpha_2 I,\ \beta=\beta_1+\beta_2 I,$ ve $\gamma=\gamma_1+\gamma_2 I$ olmak üzere $\alpha\beta=\alpha\gamma$ ve $N(\alpha)\neq 0$ olsun. $N(\alpha)=\alpha_1(\alpha_1+\alpha_2)\neq 0$ olduğu için $\alpha_1\neq 0$ ve $\alpha_1+\alpha_2\neq 0$ olur. $\alpha\beta=\alpha\gamma$ olduğu için $(\alpha_1+\alpha_2 I)(\beta_1+\beta_2 I)=(\alpha_1+\alpha_2 I)(\gamma_1+\gamma_2 I)\Rightarrow$
$\alpha_1\beta_1+((\alpha_1+\alpha_2)(\beta_1+\beta_2)-\alpha_1\beta_1)I=\alpha_1\gamma_1+((\alpha_1+\alpha_2)(\gamma_1+\gamma_2)-\alpha_1\gamma_1)I$ olur. Buradan, $\alpha_1\beta_1=\alpha_1\gamma_1$ ve $\alpha_1\neq 0$ olduğu için $\beta_1=\gamma_1$ elde edilir. Aynı şekilde $(\alpha_1+\alpha_2)(\beta_1+\beta_2)=(\alpha_1+\alpha_2)(\gamma_1+\gamma_2)$ ve $\alpha_1+\alpha_2\neq 0$ olduğu için $\beta_1+\beta_2=\gamma_1+\gamma_2$ elde edilir. Bir önceki adımda elde edilen $\beta_1=\gamma_1$ eşitliği kullanılarak $\beta_2=\gamma_2$ olur. Sonuç olarak, $\beta=\gamma$ olduğu görülür.

Tanım 4.1 $0\neq a+bI$, $c+dI\in\mathbb{R}[I]$ olsun. $c+dI=(k+tI)(a+bI)$ olacak şekilde bir $k+tI\in\mathbb{R}[I]$ nötrosofik reel sayısı var ise o zaman $a+bI$ böler $c+dI$ yi denir ve $a+bI\,|\,c+dI$ olarak gösterilir. Bu durumda $\dfrac{c+dI}{a+bI}=k+tI\in\mathbb{R}[I]$ olur. $\mathbb{R}[I]$ bölme işlemine göre kapalı değildir. İki nötrosofik sayının bölümü bir nötrosofik sayı olmayabilir.

Örnek 4.1 $10+5I=(2+3I)(5-2I)$ olduğu için $2+3I\,|\,10+5I$ dir. Fakat $2+4I=(k+tI)(1-I)$ olacak şekilde bir $k+tI$ nötrosofik sayısı yoktur. Bu durumda $1-I\nmid 2+4I$ dir.

Teorem 4.2 $0 \neq \alpha+\beta I,\ \gamma+\delta I \in \mathbb{R}[I]$ ve $x=\dfrac{\gamma+\delta I}{\alpha+\beta I}$ için

i) $N(\alpha+\beta I) \neq 0$ ise $x=\dfrac{\gamma}{\alpha}+\dfrac{\alpha\delta-\beta\gamma}{\alpha(\alpha+\beta)} I \in \mathbb{R}[I]$

ii) $N(\alpha+\beta I)=0$ ise,

a) $\alpha=0,\ \gamma \neq 0$ ise $x=\dfrac{\gamma+\delta I}{\alpha+\beta I}=\dfrac{\gamma+\delta I}{\beta I} \notin \mathbb{R}[I]$

b) $\alpha=0,\ \gamma=0$ ise $x=\dfrac{\gamma+\delta I}{\alpha+\beta I}=\dfrac{\delta I}{\beta I}=m+nI \in \mathbb{R}[I]$ $\left(m+n=\dfrac{\delta}{\beta}\right)$

c) $\beta=-\alpha \neq 0,\ \gamma+\delta \neq 0$ ise $x=\dfrac{\gamma+\delta I}{\alpha+\beta I}=\dfrac{\gamma+\delta I}{\alpha-\alpha I} \notin \mathbb{R}[I]$

d) $\beta=-\alpha \neq 0,\ \gamma=-\delta \neq 0$ ise $x=\dfrac{\gamma+\delta I}{\alpha+\beta I}=\dfrac{\gamma-\gamma I}{\alpha-\alpha I}=\dfrac{\gamma}{\alpha}+nI \in \mathbb{R}[I]$ $(n \in \mathbb{R})$

İspat: i) $N(\alpha+\beta I)=\alpha(\alpha+\beta) \neq 0$ olsun. O zaman $\alpha \neq 0$ ve $\alpha+\beta \neq 0$ olur. Buradan şunu elde ederiz,

$$x=\frac{\gamma+\delta I}{\alpha+\beta I}$$

$$=\frac{(\gamma+\delta I)(\alpha+\beta-\beta I)}{(\alpha+\beta I)(\alpha+\beta-\beta I)}$$

$$=\frac{\gamma(\alpha+\beta)+(\alpha\delta-\beta\gamma) I}{N(\alpha+\beta I)}$$

$$=\frac{\gamma}{\alpha}+\frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{\alpha(\alpha+\beta)} I \in \mathbb{R}[I]$$

ii) $N(\alpha+\beta I)=\alpha(\alpha+\beta)=0$ olsun. O zaman $\alpha=0$ veya $\alpha+\beta=0$ dır.

($\alpha+\beta I \neq 0$ olduğu için, α ve β ikisi birden sıfır olamaz.)

İlk olarak $\alpha=0$ ve $\alpha+\beta \neq 0$ olsun.

$x=\dfrac{\gamma+\delta I}{\alpha+\beta I}=m+nI$ olacak şekilde bir $m+nI \in \mathbb{R}[I]$ var ise,

$m\alpha=\gamma$ ve $(m+n)(\alpha+\beta)=\gamma+\delta$ olmalıdır.

a) $\alpha=0$ için eğer $\gamma \neq 0$ ise, $m\alpha=\gamma$ olacak şekilde bir $m \in \mathbb{R}$ yoktur.

Yani, $\gamma \neq 0$ olması durumunda $x = \dfrac{\gamma + \delta I}{\beta I} \notin \mathbb{R}[I]$ dir.

b) $\alpha = 0$ ve $\gamma = 0$ ise, $m\alpha = \gamma$ eşitliği her $m \in \mathbb{R}$ için doğru olur. $(m+n)(\alpha+\beta) = \gamma + \delta$ eşitliğinden $m + n = \dfrac{\delta}{\beta}$ elde edilir. Böylece $m + n = \dfrac{\delta}{\beta}$ olmak üzere, $x = \dfrac{\gamma + \delta I}{\alpha + \beta I} = \dfrac{\delta I}{\beta I} = m + nI \in \mathbb{R}[I]$ olur.

c) $\alpha \neq 0$ ve $\alpha + \beta = 0$ olsun. O zaman $\beta = -\alpha$ elde edilir. $m\alpha = \gamma$ eşitliğinden $m = \dfrac{\gamma}{\alpha}$ elde edilir. $(m+n)(\alpha+\beta) = \gamma + \delta$ eşitliğinden, $\left(\dfrac{\gamma}{\alpha} + n\right).0 = \gamma + \delta$ olur. O zaman $\gamma + \delta \neq 0$ ise $\left(\dfrac{\gamma}{\alpha} + n\right).0 = \gamma + \delta$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{R}$ olmaz. Buradan $\gamma + \delta \neq 0$ olmak üzere, $x = \dfrac{\gamma + \delta I}{\alpha + \beta I} = \dfrac{\gamma + \delta I}{\alpha - \alpha I} \notin \mathbb{R}[I]$ olur.

d) $\gamma + \delta = 0$ ise, $\left(\dfrac{\gamma}{\alpha} + n\right).0 = \gamma + \delta$ eşitliği her $n \in \mathbb{R}$ için doğrudur. Bu durumda her $n \in \mathbb{R}$ için, $x = \dfrac{\gamma + \delta I}{\alpha + \beta I} = \dfrac{\gamma - \gamma I}{\alpha - \alpha I} = \dfrac{\gamma}{\alpha} + nI \in \mathbb{R}[I]$ olur.

Örnek 4.2 $\dfrac{2+I}{1+I} = 2 - \dfrac{1}{2}I \in \mathbb{R}[I]$, $\dfrac{2+I}{I} \notin \mathbb{R}[I]$, $\dfrac{4I}{2I} = m + nI \in \mathbb{R}[I]$ ($m+n=2$ olduğu durumda), $\dfrac{2+I}{1-I} \notin \mathbb{R}[I]$, her $n \in \mathbb{R}$ için $\dfrac{2-2I}{1-I} = 2 + nI \in \mathbb{R}[I]$.

Teorem 4.3 $0 \neq \alpha, \beta \in \mathbb{R}[I]$ olmak üzere $\alpha x = \beta$ bir nötrosofik lineer denklem olsun.

i) $N(\alpha) \neq 0$ ise, $\alpha x = \beta$ denkleminin $\mathbb{R}[I]$ da tek çözümü vardır ve çözüm $x = \dfrac{\bar{\alpha}.\beta}{N(\alpha)}$ olur.

ii) $N(\alpha) = 0$ ve $\alpha \mid \beta$ ise, $\alpha x = \beta$ denkleminin $\mathbb{R}[I]$ da sonsuz çözümü vardır.

iii) $N(\alpha) = 0$ ve $\alpha \nmid \beta$ ise, $\alpha x = \beta$ denkleminin $\mathbb{R}[I]$ da çözümü yoktur.

İspat: Teorem 4.2 den ispat açıktır.

Örnek 4.3 i) $(2+3I)x=4-I$ Nötrosofik lineer denklemini düşünelim. $N(2+3I)=10\neq 0$ ve $\overline{2+3I}=5-3I$ olduğu için $x=\dfrac{(\overline{2+3I})(4-I)}{N(2+3I)}=2-\dfrac{7}{5}I$ olur.

ii) $(1-I)x=3-3I$ denklemi için, $1-I\neq 0$, $N(1-I)=0$ ve $1-I|3-3I$ olduğu için denklemin sonsuz sayıda çözümü vardır. $x=a+bI$ olsun. O zaman $(1-I)(a+bI)=3-3I$ olduğu için $a-aI=3-3I$ elde edilir. Buradan, $a=3$, $b\in\mathbb{R}$ olduğu görülür. Bu durumda çözüm kümesi $\{3+bI : b\in\mathbb{R}\}$ olur.

iii) $(1-I)x=2+I$ Nötrosofik lineer denklemini düşünelim. $1-I\neq 0$, $N(1-I)=0$ ve $1-I\nmid 2+I$ dır. $(1-I)(a+bI)=2+I$ olacak şekilde bir nötrosofik $a+bI$ sayısı olmadığı için denklemin çözümü yoktur.

iv) $2Ix=4I$ denkleminin çözüm kümesi $\{m+nI : m+n=2,\ m,n\in\mathbb{R}\}$ dir.

$\mathbb{R}$ deki $ax+by=c$ $(a\neq 0 \text{ veya } b\neq 0)$ denklemini düşünelim.

i) $b\neq 0$ ise çözüm kümesi $\left\{\left(x,\dfrac{c-ax}{b}\right) : x\in\mathbb{R}\right\}$

ii) $a\neq 0$ ise çözüm kümesi $\left\{\left(\dfrac{c-by}{a},y\right) : y\in\mathbb{R}\right\}$ dir.

Şimdi iki değişkenli bir nötrosofik lineer denklemin çözümünü araştıracağız.

Teorem 4.4 $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}[I]$ ve $\alpha\neq 0,\ \beta\neq 0$ olmak üzere $\alpha x+\beta y=\gamma$ iki bilinmeyenli bir nötrosofik lineer denklem olsun.

i) $N(\alpha)\neq 0$ ise çözüm kümesi $\left\{\left(\dfrac{(\gamma-\beta y)\bar{\alpha}}{N(\alpha)},y\right)\middle| y\in\mathbb{R}[I]\right\}$,

ii) $N(\beta)\neq 0$ ise çözüm kümesi $\left\{\left(x,\dfrac{(\gamma-\alpha x)\bar{\beta}}{N(\beta)}\right)\middle| x\in\mathbb{R}[I]\right\}$,

iii) $N(\alpha)=0$ ve $N(\beta)=0$ ise

a) $\beta|\gamma-\alpha x$ durumunu sağlayan bütün x ler için sonsuz sayıda $y\in\mathbb{R}[I]$ vardır,

b) $\beta \nmid \gamma - \alpha x$ durumunu sağlayan x için $y \in \mathbb{R}[I]$ yoktur,

veya

c) $\alpha | \gamma - \beta y$ durumunu sağlayan bütün y ler için sonsuz sayıda $x \in \mathbb{R}[I]$ vardır,

d) $\alpha \nmid \gamma - \beta y$ durumunu sağlayan y için $x \in \mathbb{R}[I]$ yoktur.

İspat: i) $N(\alpha) \neq 0$ ise, $x = \dfrac{\gamma - \beta y}{\alpha} = \dfrac{(\gamma - \beta y)\bar{\alpha}}{\alpha\bar{\alpha}} = \dfrac{(\gamma - \beta y)\bar{\alpha}}{N(\alpha)} \in \mathbb{R}[I]$ olur. O zaman, çözüm kümesi $\left\{ \left(\dfrac{(\gamma - \beta y)\bar{\alpha}}{N(\alpha)}, y \right) \middle| y \in \mathbb{R}[I] \right\}$ olur.

ii) $N(\beta) \neq 0$ için, ispat (i) ile benzerdir.

iii) $N(\alpha) = 0$ ve $N(\beta) = 0$ olsun. $\alpha x + \beta y = \gamma$ denkleminden $y = \dfrac{\gamma - \alpha x}{\beta}$ elde edilir. Bu durumda, Teorem 4.3 ile

Her $x \in \mathbb{R}[I]$ için $\beta | \gamma - \alpha x$ ise, o zaman sonsuz sayıda $y = \dfrac{\gamma - \alpha x}{\beta} \in \mathbb{R}[I]$ vardır.

Fakat $x \in \mathbb{R}[I]$ için $\beta \nmid \gamma - \alpha x$ ise, o zaman $\mathbb{R}[I]$ da $y = \dfrac{\gamma - \alpha x}{\beta}$ yoktur. Buradan (a) ve (b) doğru olur. Benzer şekilde (c) ve (d) doğrudur.

Alhasan Y. A., *Types of System of the neutrosophic linear equations and Cramer's rule* isimli makalesinin 3.1 bölümündeki analizine göre, iki bilinmeyenli her nötrosofik lineer denklem çözülebilirdir. Fakat teorem 4.4 ten görüldüğü üzere bazı denklemler çözümsüz olabilir.

Örnek 4.4 i) $(1+I)x + (2-I)y = 1+2I$ denklemini düşünelim. $N(2-I) = 2 \neq 0$ ve $\overline{2-I} = 1+I$ olduğu için her $x \in \mathbb{R}[I]$ için,

$$y = \frac{1+2I}{2-I} - \frac{1+I}{2-I}x$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{5}{2}I - \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}I \right)x$$

olur.

ii) $2Ix+3Iy=4I$ denklemini düşünelim. $N(2I)=0$ ve $N(3I)=0$ dır. Bu durumda, her $x\in\mathbb{R}[I]$ için $y=\dfrac{4I-2Ix}{3I}$ ve $3I|4I-2Ix$ olduğu için sonsuz sayıda çözüm vardır. Örneğin, $x=0$ için, $y=a+bI$ $\left(a+b=\dfrac{4}{3}\right)$ çözümleri olur. Çünkü $\dfrac{4I}{3I}=\left\{a+bI\in\mathbb{R}[I]\middle| a+b=\dfrac{4}{3}\right\}$ dır.

iii) $2Ix+3Iy=1+4I$ denklemini düşünelim. $N(2I)=0$ ve $N(3I)=0$ olduğu görülür. Bu durumda, her $x\in\mathbb{R}[I]$ için $y=\dfrac{1+4I-2Ix}{3I}$ ve $3I\nmid 1+4I-2Ix$ olduğu için bu denklemin çözümü yoktur.

Abobala vd. (2021) de, $M=A+BI$ matrisinin determinantı, A ve B bileşenleri bakımından bir tanım olarak verilmişti. Bu özellik, aşağıda teorem olarak verildi.

Teorem 4.5 A ve B, $n\times n$ reel matris ve $M=A+BI$ olsun. M nin determinantı, $\det M=\det A+(\det(A+B)-\det A)I$ dır.

İspat: $M=A+BI=\left[m_{ij}\right]_{2\times 2}$, $A=\left[a_{ij}\right]_{2\times 2}$ ve $B=\left[b_{ij}\right]_{2\times 2}$ olsun. O zaman,

$$\det(M)=m_{11}m_{22}-m_{12}m_{21}$$
$$=(a_{11}+b_{11}I)(a_{22}+b_{22}I)-(a_{12}+b_{12}I)(a_{21}+b_{21}I)$$
$$=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}+(a_{11}b_{22}+b_{11}a_{22}+b_{11}b_{22}-a_{12}b_{21}-b_{12}a_{21}-b_{12}b_{21})I$$
$$=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}+$$
$$(a_{11}b_{22}+b_{11}a_{22}+b_{11}b_{22}+a_{11}a_{22}+a_{12}a_{21}-a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}-a_{12}b_{21}-b_{12}a_{21}-b_{12}b_{21})I$$
$$=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}-((a_{11}+b_{11})(a_{22}+b_{22})-(a_{21}+b_{21})(a_{12}+b_{12})-(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}))I$$
$$=\det A+(\det(A+B)-\det A)I$$

olur.

Böylece $n=2$ için iddia doğrudur. Şimdi $n-1$ için iddianın doğru olduğunu kabul edelim. O zaman 1. satırın kofaktör açılımıyla,

$\det(M)=m_{11}M_{11}+m_{12}M_{12}+...+m_{1n}M_{1n}$ dir. Burada M_{1j}, $m_{1j}=a_{1j}+b_{1j}I \quad (1\leq j\leq n)$ nın kofaktörüdür. M'_{1j} , A'_{1j} ve B'_{1j} matrisleri sırasıyla M , A ve B matrislerinin 1. satır ve j. sütunlarının silinmesiyle elde edilen $(n-1)\times(n-1)$ altmatrisler olsun. $M'_{1j}=A'_{1j}+B'_{1j}I$ ve

$$M'_{1j}=(-1)^{1+j}\det M'_{1j}=(-1)^{1+j}\left(\det A'_{1j}+\left(\det\left(A'_{1j}+B'_{1j}\right)-\det A'_{1j}\right)I\right)$$

olduğu göz önüne alınarak aşağıdaki işlemler yapılır.

$$\begin{aligned}
\det(M)=\ & m_{11}\left(\det A'_{11}+\left(\det\left(A'_{11}+B'_{11}\right)-\det A'_{11}\right)I\right)\\
&-m_{12}\left(\det A'_{12}+\left(\det\left(A'_{12}+B'_{12}\right)-\det A'_{12}\right)I\right)\\
&+...+m_{1n}(-1)^{1+n}\left(\det A'_{1n}+\left(\det\left(A'_{1n}+B'_{1n}\right)-\det A'_{1n}\right)I\right)\\
=\ & m_{11}\det A'_{11}-m_{12}\det A'_{12}+...+m_{1n}(-1)^{1+n}\det A'_{1n}\\
&+(m_{11}\det\left(A'_{11}+B'_{11}\right)-m_{12}\det\left(A'_{12}+B'_{12}\right)+...+m_{1n}(-1)^{1+n}\det\left(A'_{1n}+B'_{1n}\right)\\
&-\left(m_{11}\det A'_{11}-m_{12}\det A'_{12}+...+m_{1n}(-1)^{1+n}\det A'_{1n}\right))I\\
=\ & \det A+\left(\det(A+B)-\det A\right)I
\end{aligned}$$

Böylece, teorem her $n\in\mathbb{Z}^+$ için doğru olur.

M^{-1} matrisinin varlığını incelemek için aşağıdaki teorem yazılabilir. Ama öncesi şuna dikkat edelim, herhangi bir $a+bI\in\mathbb{R}[I]$ için $N(a+bI)=0$ ise $a(a+b)=0$ elde edilir. Böylece $a=0$ veya $a+b=0$ olur. O zaman $a+bI$ nötrosofik sayısı, bI veya $a-aI$ şeklinde bir nötrosofik sayı olur.

Aynı zamanda, Tanım 3.1.1, Önerme 3.1.1.(vi) ve Teorem 4.5 ile $M=A+BI$ olmak üzere, $N(\det M)=\det A.\det(A+B)$ olduğu görülür.

Teorem 4.6 A ve B , $n\times n$ reel matris ve $M=A+BI$ olsun. O zaman,

$N(\det M)\neq 0$ ancak ve ancak M tersinirdir.

İspat: $N(\det M)\neq 0$ olsun. O zaman, $\det A\neq 0$ ve $\det(A+B)\neq 0$ olduğu elde edilir. Buradan $\det M\neq 0$ olur. $M.Adj(M)=\det M.I_n$ olduğu biliniyor. Buradan

$M\dfrac{1}{\det M}Adj(M)=I_n$ olur. $K=\dfrac{1}{\det M}Adj(M)$ olsun. $\dfrac{1}{\det M}=\dfrac{\overline{\det M}}{\det M.\overline{\det M}}=\dfrac{\overline{\det M}}{N(\det M)}\in\mathbb{R}[I]$ olduğu için, K matrisinin bütün entrileri nötrosofik reel sayılardır ve $K=M^{-1}$ dir. Böylece, M tersinir matristir. Karşıt taraftan bakarsak, M tersinir matris olsun. O zaman $MN=NM=I_n$ olacak şekilde bir $N=C+DI$ nötrosofik matrisi vardır. Buradan $(A+BI)(C+DI)=I_n$ ve $(C+DI)(A+BI)=I_n$ olduğu için $AC=CA=I_n$ ve

$(A+B)(C+D)=(C+D)(A+B)=I_n$ elde edilir. Böylece A ve $A+B$ tersinir reel matrislerdir. Bu durumda, $\det A\neq 0$ ve $\det(A+B)\neq 0$ olduğu için, $N(\det M)=\det A.\det(A+B)\neq 0$ olur. Şuna dikkat edelim, $N(\det M)=0$ olması durumunda (bu $\det M=0$ olmasını içerir), M nin tersinir olduğunu kabul edelim. O zaman $M.M^{-1}=I_n$ olduğu için $\det\left(M.M^{-1}\right)=1$ elde ederiz. Buradan $\det(M).\det\left(M^{-1}\right)=1$ olur. O zaman,

$N\left(\det(M).\det\left(M^{-1}\right)\right)=\underbrace{N(\det M)}_{0}.N\left(\det M^{-1}\right)=N(1)=1$ eşitliği doğru olmaz.

Böylece M tersinir matris olmaz.

Örnek 4.5 i) $M=\begin{bmatrix}1+I & 3-I\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ olsun. $N(\det M)=N(0)=0$ olduğu için, M tersinir değildir.

ii) $M=\begin{bmatrix}2-I & 1+I\\ 3 & 4I\end{bmatrix}$ olsun. $\det M=-3+I\neq 0$ ve $N(\det M)=6\neq 0$ dır. Böylece M tersinir matristir ve

$$M^{-1}=\frac{1}{-3+I}.\begin{bmatrix}4I & -1-I\\ -3 & 2-I\end{bmatrix}$$

$$=\frac{-2-I}{(-3+I)(-2-I)}.\begin{bmatrix}4I & -1-I\\ -3 & 2-I\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{6}.(-2-I).\begin{bmatrix} 4I & -1-I \\ -3 & 2-I \end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{6}.\begin{bmatrix} -12I & 2+4I \\ 6+3I & -4+I \end{bmatrix}$$

olur.

iii) $M=\begin{bmatrix} 3I & 0 \\ 0 & 2I \end{bmatrix}$ olsun. O zaman $\det M = 6I \neq 0$ ve $N(\det M)=0$ olur.

Teorem 4.6 ile M nin tersi olmaz. İkinci bir yol olarak, M matrisinin $M^{-1}=\begin{bmatrix} a+bI & c+dI \\ e+fI & g+hI \end{bmatrix}$ gibi bir tersi var ise, $M.M^{-1}=I$ olduğu için $3I(a+bI)=1$ ve $2I(g+hI)=1$ elde edilir. Fakat teorem 4.2 ile yukarıdaki eşitlikleri sağlayan $a,b\in\mathbb{R}$ ve $g,h\in\mathbb{R}$ yoktur. Böylece M matrisinin bir tersi yoktur.

Uyarı 4.1 Teorem 4.6 ve Örnek 4.5.(iii) ile $\det M \neq 0$ durumu, M nin tersinir matris olması için yeterli değildir. Bu yüzden, Abobala vd (2021) makalesinde verilmiş olan teorem 3.4 bütünüyle doğru değildir.

Şimdi, A ve B $n\times n$ reel matris olsun ve $C=D+EI$ $n\times 1$ sütun vektör olsun ve $M=A+BI$ olsun. $MZ=C$ nötrosofik lineer denklem sistemini düşünelim.

Teorem 4.7 $N(\det M)\neq 0$ ise $MZ=C$ nötrosofik lineer denklem sisteminin tek çözümü vardır ve bu çözüm $Z=M^{-1}C$ dir.

İspat: Teorem 4.6 ile, M tersinir bir matristir. $MZ=C$ yi M^{-1} ile soldan çarparak, $Z=M^{-1}C$ elde edilir. Eğer Z_1 ve Z_2, $MZ=C$ nin iki çözümü ise, o zaman $MZ_1=MZ_2$ olur. Soldan M^{-1} ile çarpılarak $Z_1=Z_2$ elde edilir.

Aşağıdaki sonuç, $M=A+BI$ ve $C=D+EI$ olmak üzere, A, B, D, E bileşenleri ile $MZ=C$ nötrosofik lineer denklem sisteminin çözüm vektörü $Z=X+YI$ yi açıklar.

Sonuç 4.1 A ve B, $n\times n$ reel matris ve D ve E, $n\times 1$ reel sütun vektör olsun. $M=A+BI$, $n\times n$ matris ve $C=D+EI$, $n\times 1$ sütun vektör olsun. $N(\det M)\neq 0$ ise, $MZ=C$ nötrosofik lineer denklem sisteminin çözümü $Z=X+YI$ vektörüdür. Burada $X=A^{-1}D$ ve $Y=(A+B)^{-1}(D+E)-A^{-1}D$ dir.

İspat: Teorem 4.7 ile $Z=M^{-1}C$ elde edilir. Buradan Teorem 3.2.1 kullanılarak,

$$\begin{aligned} Z&=X+YI \\ &=M^{-1}C \\ &=\left(A^{-1}+\left((A+B)^{-1}-A^{-1}\right)I\right)(D+EI) \\ &=A^{-1}D+\left(A^{-1}E+(A+B)^{-1}D-A^{-1}D+(A+B)^{-1}E-A^{-1}E\right)I \\ &=A^{-1}D+\left((A+B)^{-1}(D+E)-A^{-1}D\right)I \end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek 4.6 $(2-I)Z_1+(1+I)Z_2=1+2I$

$$3Z_1+4IZ_2=3+4I$$

denklem sistemini düşünelim. Burada,

$$M=\begin{bmatrix} 2-I & 1+I \\ 3 & 4I \end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}}_{A}+\underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}}_{B}I \;,\; C=\begin{bmatrix} 1+2I \\ 3+4I \end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}}_{D}+\underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}}_{E}I \;,\; Z=\begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix} \text{ dir.}$$

Teorem 4.7 kullanılırsa, $M^{-1}=\dfrac{1}{6}\begin{bmatrix} -12I & 2+4I \\ 6+3I & -4+I \end{bmatrix}$ olduğu için,

$Z=M^{-1}C=\begin{bmatrix} 1 \\ -1+2I \end{bmatrix}$ elde edilir. Sonuç 4.1 kullanılırsa, $A^{-1}=\dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$,

$(A+B)^{-1}=-\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ olduğu için,

$X=A^{-1}D=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $Y=(A+B)^{-1}(D+E)-A^{-1}D=\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ elde edilir.

Buradan, $Z=X+YI=\begin{bmatrix} 1 \\ -1+2I \end{bmatrix}$ olur.

Teorem 4.7 ve Sonuç 4.1 de, $N(\det M) \neq 0$ olduğunda $MZ = C$ nötrosofik lineer denklem sisteminin çözüm kümesi araştırılmıştır. $N(\det M) = 0$ olduğunda M nin tersi olmadığı için, M^{-1} kullanılarak bir çözüm bulunamaz. $N(\det M) = 0$ olması durumunda aşağıdaki teoremi yazabiliriz.

Teorem 4.8 $\det M \neq 0$ fakat $N(\det M) = 0$ ise $MZ = C$ nötrosofik lineer denklem sisteminin ya birden fazla çözümü vardır ya da hiç çözümü yoktur.

İspat: $\det M \neq 0$ ve $N(\det M) = 0$ olduğu için Cramer kuralını kullanabiliriz.

Z çözümünün i-ninci bileşeni $Z_i = \dfrac{\det M_i}{\det M}$ olur. Burada, $i = 1,2,...,n$ olmak üzere M_i , C vektörüyle M nin i-ninci sütununun yer değiştirilmesiyle oluşan matristir. $\det M \mid \det M_i$ olacak şekildeki bütün i-ler için, teorem 4.2 ile $Z_i \in \mathbb{R}[I]$ dır. Buradan $MZ = C$ bir çözümden fazlasına sahiptir. $\det M \nmid \det M_i$ olacak bazı i-ler için $Z_i \notin \mathbb{R}[I]$ dır. Böyle bir durumda $MZ = C$ nin çözümü yoktur.

Örnek 4.7 $3IX + (1+I)Y = 6I$

$$2IY = 4I$$

sistemi için,

$M = \begin{bmatrix} 3I & 1+I \\ 0 & 2I \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 6I \\ 4I \end{bmatrix}$, $\det M = 6I \neq 0$, $N(\det M) = 0$ dir. İkinci denklem ile

$Y = \dfrac{4I}{2I} = p + qI \quad (p+q = 2,\ p,q \in \mathbb{R})$ elde edilir. İlk denklemde yerine konularak,

$X = \dfrac{-p + (4-q)I}{3I}$ olur. Bu durumda, $p = 0$ ise, $3I \mid (4-q)I$ ve $X = \dfrac{(4-q)I}{3I} \in \mathbb{R}[I]$ dır. ($p \neq 0$ için, $3I \nmid -p + (4-q)I$ olduğu için çözüm olmaz). Buradan, $p + q = 2$ olduğu için, $q = 2$ ve $Y = 2I$ elde edilir. Böylece verilen nötrosofik lineer denklem sisteminin çözümü

$X = \dfrac{2I}{3I} = \left\{ u + vI : u,v \in \mathbb{R},\ u + v = \dfrac{2}{3} \right\}$

$Y = 2I$

olur.

Reel lineer cebirde, $\det A \neq 0$ olduğunda, $AX = B$ sisteminin yalnız bir çözümü olduğuna dikkat edelim.

Örnek 4.8 $3IX + (1+I)Y = 6I$

$$2IY = 1 + 4I$$

sisteminde, $2I \nmid 1 + 4I$ olduğu için çözüm yoktur.

Sonuç 4.2 M nin $n \times n$ nötrosofik matris ve C nin $n \times 1$ sütun vektör olduğu $MZ = C$ sistemini düşünelim.

i) $N(\det M) \neq 0$ ise, $MZ = C$ nötrosofik lineer denklem sisteminin tek çözümü vardır. (Teorem 4.7)

ii) $\det M \neq 0$ fakat $N(\det M) = 0$ ise, $MZ = C$ nötrosofik lineer denklem sisteminin ya birden fazla çözümü vardır ya da çözümü yoktur. (Teorem 4.8)

iii) $\det M = 0$ ise, $MZ = C$ denklem sisteminin ya birden fazla çözümü vardır ya da çözümü yoktur.

Uyarı 4.2 Sonuç 4.2 ve yukarıdaki örnekleri göz önüne aldığımızda, Alhasan'ın makalesindeki bölüm 4.2 deki belirtmiş olduğu bazı sonuçlarda ve bazı örneklerde hatalar olduğu görülür. Alhasan'ın makalesindeki örnek 4.2.2 deki

$2Ix + 7y = I$

$3Ix + y = 2I$

sisteminin çözümsüz olduğu belirtilmişti, halbuki sonsuz sayıda çözümü vardır:

$$x = \frac{13I}{19I} = \left\{ u + vI \,\middle|\, u, v \in \mathbb{R},\ u + v = \frac{13}{19} \right\}$$

$$y = -\frac{1}{19}I$$

olur.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında nötrosofik kare matrisler ve nötrosofik lineer denklem sistemlerinin çözümleri üzerine çalışılmıştır. Elde edilen bazı sonuçlar aşağıdaki gibi özetlenebilir.

$\alpha = a + bI$ nın eşleniği $\bar{\alpha} = a + b - bI$ dır.

$\alpha = a + bI$ nın normu $N(\alpha) = a(a+b)$ dir.

$M = A + BI$ matrisinin determinantı $\det M = \det A + I\left[\det(A+B) - \det A\right]$ dır.

$M = A + BI$ matrisinin tersi $M^{-1} = A^{-1} + I\left[(A+B)^{-1} - A^{-1}\right]$ dır.

$\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}[I]$ için $N(\alpha) \neq 0$ ve $\alpha\beta = \alpha\gamma$ ise $\beta = \gamma$ dir.

$0 \neq \alpha + \beta I$, $\gamma + \delta I \in \mathbb{R}[I]$ ve $x = \dfrac{\gamma + \delta I}{\alpha + \beta I}$ için,

i) $N(\alpha + \beta I) \neq 0$ ise $x = \dfrac{\gamma}{\alpha} + \dfrac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\alpha(\alpha+\beta)} I \in \mathbb{R}[I]$

ii) $N(\alpha + \beta I) = 0$ ise,

a) $\alpha = 0,\ \gamma \neq 0$ ise $x = \dfrac{\gamma + \delta I}{\alpha + \beta I} = \dfrac{\gamma + \delta I}{\beta I} \notin \mathbb{R}[I]$

b) $\alpha = 0,\ \gamma = 0$ ise $x = \dfrac{\gamma + \delta I}{\alpha + \beta I} = \dfrac{\delta I}{\beta I} = m + nI \in \mathbb{R}[I]$ $\left(m + n = \dfrac{\delta}{\beta}\right)$

c) $\beta = -\alpha \neq 0,\ \gamma + \delta \neq 0$ ise $x = \dfrac{\gamma + \delta I}{\alpha + \beta I} = \dfrac{\gamma + \delta I}{\alpha - \alpha I} \notin \mathbb{R}[I]$

d) $\beta = -\alpha \neq 0,\ \gamma = -\delta \neq 0$ ise $x = \dfrac{\gamma + \delta I}{\alpha + \beta I} = \dfrac{\gamma - yI}{\alpha - \alpha I} = \dfrac{\gamma}{\alpha} + nI \in \mathbb{R}[I]$ $(n \in \mathbb{R})$ dır.

$0 \neq \alpha, \beta \in \mathbb{R}[I]$ için $\alpha x = \beta$ nötrosofik lineer denkleminin çözüm durumları aşağıdaki gibidir:

i) $N(\alpha) \neq 0$ ise $\alpha x = \beta$ denkleminin $\mathbb{R}[I]$ da tek çözümü vardır $x = \dfrac{\bar{\alpha}.\beta}{N(\alpha)}$

ii) $N(\alpha) = 0$ ve $\alpha | \beta$ ise $\alpha x = \beta$ denkleminin $\mathbb{R}[I]$ da sonsuz çözümü vardır.

iii) $N(\alpha) = 0$ ve $\alpha \nmid \beta$ ise $\alpha x = \beta$ denkleminin $\mathbb{R}[I]$ da çözümü yoktur.

$\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}[I]$ ve $\alpha \neq 0,\ \beta \neq 0$ olmak üzere $\alpha x + \beta y = \gamma$ iki bilinmeyenli bir nötrosofik lineer denklemin çözüm durumları aşağıdaki gibidir:

i) $N(\alpha) \neq 0$ ise çözüm kümesi $\left\{ \left(\dfrac{(\gamma - \beta y)\bar{\alpha}}{N(\alpha)}, y \right) \middle| y \in \mathbb{R}[I] \right\}$,

ii) $N(\beta) \neq 0$ ise çözüm kümesi $\left\{ \left(x, \dfrac{(\gamma - \alpha x)\bar{\beta}}{N(\beta)} \right) \middle| x \in \mathbb{R}[I] \right\}$,

iii) $N(\alpha) = 0$ ve $N(\beta) = 0$ ise,

a) $\beta | \gamma - \alpha x$ durumunu sağlayan bütün x ler için sonsuz sayıda $y \in \mathbb{R}[I]$ vardır,

b) $\beta \nmid \gamma - \alpha x$ durumunu sağlayan x için $y \in \mathbb{R}[I]$ yoktur,

c) $\alpha | \gamma - \beta y$ durumunu sağlayan bütün y ler için sonsuz sayıda $x \in \mathbb{R}[I]$ vardır,

d) $\alpha \nmid \gamma - \beta y$ durumunu sağlayan y için $x \in \mathbb{R}[I]$ yoktur.

A ve B $n \times n$ reel matrisler ve $M = A + BI$ nötrosofik reel matris olmak üzere, M tersinirdir ancak ve ancak $N(\det M) \neq 0$ dır.

$N(\det M) \neq 0$ ise $MZ = C$ nötrosofik lineer denklem sisteminin tek çözümü vardır ve bu çözüm $Z = M^{-1}C$ dir.

$\det M \neq 0$ ama $N(\det M) = 0$ ise $MZ = C$ nötrosofik lineer denklem sisteminin ya birden çok çözümü vardır ya da çözümü yoktur.

$\det M = 0$ ise $MZ = C$ nötrosofik lineer denklem sisteminin ya birden çok çözümü vardır ya da çözümü yoktur.

A ve B, $n \times n$ reel matris ve C ve D, $n \times 1$ reel sütun vektör olsun. $M = A + BI$, $n \times n$ matris ve $C = D + EI$, $n \times 1$ sütun vektör olsun. $N(\det M) \neq 0$ ise, $MZ = C$ nötrosofik lineer denklem sisteminin çözümü $Z = X + YI$ vektörüdür. Burada $X = A^{-1}D$ ve $Y = (A+B)^{-1}(D+E) - A^{-1}D$ dir.

KAYNAKLAR

Abobala, M., 2020. On Some Neutrosophic Algebraic Equations. Journal of New Theory, 33, 26-32.

Abobala, M., 2021. Partial Foundation of Neutrosophic Number Theory. Neutrosophic Sets and Systems, 39, 120-132.

Abobala, M., Hatip, A., Olgun, N., Broumi, S., Salama, A. A., Khaled, H. E., 2021. The Algebraic Creativity in The Neutrosophic Square Matrices. Neutrosophic Sets and Systems, 40, 1-11.

Abobala, M., Bal, M., Hatip, A., 2021. A Review on Recent Advantages in Algebraic Theory of Neutrosophic Matrices. International Journal of Neutrosophic Science, 17/1, 68-86.

Alhasan, Y.A., 2021. Types of System of The Neutrosophic Linear Equations and Cramer's Rule. Neutrosophic Sets and Systems, 45, 402-413.

Atanassov, K., 1986. Intuitionistic Fuzzy Sets. Fuzzy Sets and Systems, 20, 87-96.

Çeven, Y., Sekmen, A. İ., 2023. On Neutrosophic Square Matrices and Solutions of Systems of Linear Equations. Süleyman Demirel University Faculty of Arts and Sciences Journal of Science, 18(3), 203-212.

Çeven, Y., Tekin, Ş.S., 2020. Some Proporties of Neutrosophic İntegers, Kırklareli University Journal of Engineering and Science, 6, 50-59.

Conrad, K., 2013. The Gaussian Integers. Erişim Tarihi:25.09.2019. https://kconrad.math.uconn.edu//blurbs/ugradnumthy/Zinotes.pdf

Edalatpanah, S.A., 2020. Systems of neutrosophic linear equations. Neutrosophic Sets and Systems, 33, 92-104.

Kandasamy, W.B.V., Smarandache, F., 2006. Some Neutrosophic Algebraic Structures and Neutrosophic N-Algebraic Structures. Hexis, Church Rock.

Kandasamy, W.B.V., Smarandache, F., 2006. Neutrosophic Rings.

Murphy, T., 2015. Introduction to Number Theory. Erişim Tarihi:10.10.2019. https://www.maths.tcd.ie/pub/maths/Courseware/NumberTheory.pdf

Sankari, H., Abobala, M., 2020. Neutrosophic Linear Diophantine Equations with Two Variables. Neutrosophic Sets and Systems, 38, 399-408.

Smarandache, F., 1998. Neutrosophy / Neutrosophic Probability, Set, and Logic. American Research Press, Rehoboth.

Yurttakal, A.N., Çeven, Y., 2021. Some Elementary Properties of Neutrosophic Integers. Neutrosophic Sets and Systems, 41.

Zadeh, L.A., 1965. Fuzzy Sets. Information Control, 8, 338-353.