

**$s$ -KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN KESİRLİ NEWTON TIPLI  
EŞİTSİZLİKLER**

**DAVUT ALEMDAR**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**DANIŞMAN  
DOÇ. DR. HÜSEYİN BUDAK**

**DÜZCE, 2024**

**T.C.**  
**DÜZCE ÜNİVERSİTESİ**  
**LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

**$s$ -KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN KESİRLİ NEWTON TIPLI  
EŞİTSİZLİKLER**

Davut ALEMDAR tarafından hazırlanan tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

**Tez Danışmanı**

Doç. Dr. Hüseyin BUDAK  
Düzce Üniversitesi

**Jüri Üyeleri**

Doç. Dr. Hüseyin BUDAK  
Düzce Üniversitesi

Prof. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA  
Düzce Üniversitesi

Dr. Öğr. Üyesi Cihan ÜNAL  
Sinop Üniversitesi

Tez Savunma Tarihi: 27/12/2024

## BEYAN

Bu tez çalışmasının kendi çalışmam olduğunu, tezin planlanmasından yazımına kadar bütün aşamalarda etik dışı davranışımın olmadığını, bu tezdeki bütün bilgileri akademik ve etik kurallar içinde elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara kaynak gösterdiğimi ve bu kaynakları da kaynaklar listesine aldığımı, yine bu tezin çalışılması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını beyan ederim.

27 Aralık 2024

Davut ALEMDAR

## TEŞEKKÜR

Yüksek lisans öğrenimimde ve bu tezin hazırlanmasında gösterdiği her türlü destek ve yardımdan dolayı çok değerli hocam Doç. Dr. Hüseyin BUDAK'e en içten dileklerle teşekkür ederim.

Tez çalışmam boyunca bilgi ve tecrübelerini esirgemeyen Dr. Hasan KARA'ya şükranlarımı sunarım.

Bu çalışma boyunca yardımlarını ve desteklerini esirgemeyen eşim İınayet ALEMDAR ve sevgili aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

27 Aralık 2024

Davut ALEMDAR

## İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
SİMGELER .....	vi
ÖZET .....	vii
ABSTRACT .....	viii
1. GİRİŞ .....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR .....	5
3. RIEMANN-LIOUVILLE KESİRLİ İNTEGRALLERİ İÇİN BİRİNCİ TİP NEWTON EŞİTSİZLİKLERİ .....	12
4. RIEMANN-LIOUVILLE KESİRLİ İNTEGRALLERİ İÇİN İKİNCİ TİP NEWTON EŞİTSİZLİKLERİ .....	22
5. $s$ -KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN BİRİNCİ TİP NEWTON EŞİTSİZLİKLERİ .....	34
6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER .....	48
7. KAYNAKLAR.....	50
ÖZGEÇMİŞ.....	53

## SİMGELER

$\Gamma$	Gamma Fonksiyonu
$B$	Beta Fonksiyonu
$K_s^1$	Birinci Anlamda $s$ -Konveks Fonksiyonların Kümesi
$K_s^2$	İkinci Anlamda $s$ -Konveks Fonksiyonların Kümesi
$\mathcal{J}_{\kappa_1+}^\alpha$	Riemann-Liouville Sağ Tarafı Kesirli İntegral
$\mathcal{J}_{\kappa_2-}^\alpha$	Riemann-Liouville Sol Tarafı Kesirli İntegrali
$L_1[\kappa_1, \kappa_2]$	$[\kappa_1, \kappa_2]$ Aralığında İntegrallenebilen Fonksiyonların Kümesi
$L_p[\kappa_1, \kappa_2]$	$[\kappa_1, \kappa_2]$ Aralığında $p$ . Kuvveti İntegrallenebilen Fonksiyonların Kümesi

## ÖZET

### **$s$ -KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN KESİRLİ NEWTON TIPLI EŞİTSİZLİKLER**

Davut ALEMDAR  
Düzce Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Doç. Dr. Hüseyin BUDAK

Aralık 2024, 52 sayfa

Bu tezde,  $s$ -konveks fonksiyonlar kullanılarak Riemann-Liouville kesirli integraller içeren Newton tipli eşitsizlikler elde edilmiştir. Ek olarak, Hölder ve Power-mean eşitsizlikleri yardımıyla yeni Newton tipli eşitsizlikler içeren sonuçlar bulunmuştur. Ayrıca, elde edilen sonuçların özel durumları, literatürdeki çalışmalara bir genelleme olarak verilmiştir.

**Anahtar sözcükler:** Newton Tipli Eşitsizlikler, Riemann-Liouville Kesirli İntegralleri,  $s$ -Konveks Fonksiyonlar.

## ABSTRACT

### FRACTIONAL NEWTON TYPE INEQUALITIES FOR $s$ -CONVEX FUNCTIONS

Davut ALEMDAR

Düzce University

Graduate School, Department of Mathematics

Master's Thesis

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Hüseyin BUDAK

December 2024, 52 pages

In this thesis, Newton type inequalities including Riemann-Liouville fractional integrals are obtained by using  $s$ -convex functions. Moreover, new Newton type inequalities are obtained by using Hölder and Power-mean inequalities. Furthermore, special cases of the obtained results are given as a generalization to the studies in the literature.

**Keywords:** Newton type Inequalities, Riemann-Liouville Fractional Integrals,  $s$ -Convex Functions.

# 1. GİRİŞ

Eşitsizlikler, matematiksel analizde iki veya daha fazla ifadenin büyüklük, küçüklük ya da eşit olmama durumunu göstermek amacıyla açıklanan bir kavramdır. Matematiğin bir çok alanında; analiz, cebir, geometri ve diğer pek çok alt alanda önemli bir yere sahiptir. Bu tür ifadeler, belirli bir ilişkiyi tanımlamak ve sistemler arasında sınır koymak için geliştirilmiştir. Örneğin, optimizasyon problemlerinde belirli bir değişkenin veya fonksiyonun minimum ya da maksimum değerini bulmak amacıyla, eşitsizlikler temel araçlardan biri olarak kullanılır. Bunun yanı sıra, eşitsizlikler farklı fonksiyonların belirli bir aralıkta nasıl davrandığını anlamak için de kullanılır ve bu sayede birçok uygulamada önemli bir yer tutar.

Eşitsizlikler üzerinde yapılan çalışmalar, genellikle fonksiyonların sınır değerleri, ortalamalar veya diğer matematiksel özellikleri üzerinde bir çerçeve sunarak analizlere katkı sağlar. Matematiksel teorilerin geliştirilmesinde olduğu kadar mühendislik, ekonomi ve fizikte de bu ifadelerden geniş ölçüde yararlanılmaktadır. Newton tipli eşitsizlikler gibi özel türler, diferansiyel denklemler, optimizasyon ve daha pek çok alanda özel uygulama alanları bulur. Eşitsizliklerin özellikleri ve sınır koşulları üzerine yapılan bu çalışmalar, yalnızca teorik bir çerçevede kalmaz; aynı zamanda çok geniş bir pratik uygulama alanına sahiptir.

Eşitsizlik alanında yapılan ilk temel çalışma 1934 yılında Hardy, Littlewood ve Polya tarafından kaleme alınan "Inequalities" kitabıdır [1]. 1934 yılından sonra elde edilen yeni eşitsizlikleri içeren "Inequalities" adlı kitap 1961 yılında E. F. Beckenbach ve R. Bellman tarafından yayımlanmıştır [2]. 1970 yılında Mitrinoviç'in yayımladığı yukarıda sözü edilen iki kitapta yer almayan konuları "Analytic Inequalities" isimli kitabında yer vermiştir [3].

Konveks analiz, matematikte konveks kümeler ve konveks fonksiyonlar üzerine odaklanan bir alt alandır. Konveks bir küme, bir uzay içerisindeki herhangi iki nokta arasındaki doğru parçasının tamamen küme içinde kaldığı bir küme olarak tanımlanır. Bu tür

kümelerin özellikleri ve yapısal analizi, konveks analiz çalışmaları için temel teşkil eder. Benzer şekilde, bir fonksiyonun konveks olması, belirli koşulları sağlamasıyla ilişkilidir; örneğin, bir fonksiyonun grafiğinin altındaki bölge her zaman eğrisel veya doğrusal bir çizgiyle üst sınırlandırılabilir durumdaysa bu fonksiyon konvekstir. Konveks fonksiyonların türevleriyle olan ilişkisi ve optimal değer arayışındaki kullanımı, konveks analizi oldukça önemli bir araç haline getirir.

Konveks analiz, optimizasyon teorisi, ekonomi, mühendislik ve matematiksel fizik gibi birçok alanda önemli bir yer edinmiştir. Özellikle doğrusal ve doğrusal olmayan programlama, optimizasyon problemleri ve ekonomi modellemesi gibi alanlarda konveks yapıların analizi ve bu yapıların nasıl optimize edileceği üzerine çalışmalar yapılmaktadır. Konveks fonksiyonlar, minimum ve maksimum noktalarını belirleme, türevleriyle arama süreçlerini basitleştirme gibi özellikleriyle dikkat çeker ve hesaplamalı matematik ile teorik matematikte sıklıkla kullanılır. Ayrıca, konveks analiz, diğer birçok matematiksel yöntemle birleşerek daha karmaşık yapıların ve sistemlerin anlaşılmasında yol gösterici bir rol üstlenir.

Kesirli analiz, matematiğin kesirli türevler ve kesirli integraller üzerine odaklanan bir alt dalı olarak dikkat çeker. Klasik türev ve integral kavramlarının genelleştirilmesiyle ortaya çıkan kesirli analiz, daha karmaşık dinamik sistemlerin ve süreçlerin daha iyi anlaşılmasına olanak tanır. Bu bağlamda, kesirli türevler ve integraller, belirli bir süreye yayılmış bellek etkisi gibi fenomenlerin modellenmesi için kullanılır. Geleneksel türev ve integral işlemlerine göre daha esnek ve geniş bir kullanım alanına sahip olan bu yapı, çeşitli bilimsel alanlarda uygulamalı olarak kullanılmaktadır. Saygın matematikçilerden biri olan Newton 1661 de vebadan kaçmak için ailesiyle gittiği çiftliklerinde kaldığı iki yıl içerisinde türev ve integral üzerine çalışmalar yapmıştır. Fakat bu çalışmalarını hemen yayımlamamıştır. Newtondan habersiz olarak Leibniz ise türev ve integral tanımları üzerinde çalışmış 1684 ve 1686 yıllarında yayımlamıştır.

Kesirli türev ve kesirli integral kavramlarının temeli ise 1695'te Leibniz'in L'Hospital'e "Tam sayılı mertebeden türevlerin anlamı tam sayılı olmayan türevlere genişletilebilir mi?" sorusunu sorduğu bir mektupla başlar. Bu mektuba L'Hospital ise "1/2. mertebeden olursa ne olur?" sorusu ile cevap vermiştir. Leibniz "ileride bir gün çok güzel sonuçlara yol

açacak ancak şimdilik bir paradoks" demiştir. Bu mektuptan sonra kesirli türev ve integral birçok matematikçi için çalışma alanı olmuştur. Ancak kesirli türev ve integral tanımlarını ilk olarak Liouville ele almıştır.

Kesirli analizde, en yaygın kullanılan tanımlardan biri Riemann-Liouville kesirli türevi ve integralidir. Bu tür tanımlar, klasik tanımlardan farklı olarak fonksiyonların geçmiş değerleriyle daha geniş bir ilişki kurmayı mümkün kılar. Böylece fizik, mühendislik, biyoloji ve ekonomi gibi alanlarda çok çeşitli sistemler modellenir ve analiz edilir. Ayrıca, kesirli diferansiyel denklemler, kaotik sistemlerin incelenmesi ve kontrol teorisi gibi birçok alanda derin bir etki yaratmıştır. Kesirli analizin uygulamaları, sadece teorik çalışmalarda değil, aynı zamanda pratik problemler ve mühendislik sistemlerinin çözümünde de büyük önem taşımaktadır.

Kesirli hesabın popüleritesi son yıllarda bilimin çeşitli alanlarındaki geniş uygulama yelpazesinden dolayı artmıştır. Kesirli hesabın önemi göz önüne alındığında, kesirli integraller için çeşitli operatörler dikkate alınabilir. Örneğin, Erden ve ark. tarafından belirli bir kuvvette mutlak değerdeki ilk türevi aritmetik-harmonik olarak konveks olan fonksiyonlar için çeşitli Newton tipli eşitsizlikler elde edilmiştir [4]. Buna ek olarak, Sitthiwiratham ve ark. tarafından bazı Newton tipli eşitsizlikler, diferansiyellenebilir konveks fonksiyonlar için Riemann-Liouville kesirli integralleri kullanılarak ispatlanmıştır ve sınırlı varyasyonlu fonksiyonlar için çeşitli Riemann-Liouville kesirli Newton tipli eşitsizlikler sunulmuştur [5]. Yine bu konuda yapılmış olan birçok çalışma için [6, 7, 8, 9, 10, 11, 12] referanslarına bakılabilir.

Newton-Cotes kareleme kuralı, Simpson'ın ikinci kuralının temelini oluşturur. Bu temelden hareketle elde edilen sonuçların Newton tipli eşitsizlikler olduğu literatürden bilinmektedir. Newton tipli eşitsizlikleri dikkate alan birçok matematikçi olmuştur. Örneğin, Gao ve Shi tarafından ikinci türevleri konveks olan fonksiyonlar için bazı Newton tipli eşitsizlikler ispatlanmıştır [13]. Luangboon ve ark. tarafından kuantum integrallerle birkaç Newton tipli eşitsizlik oluşturuldu [14]. Noor ve ark. tarafından [15] ve [16] kaynaklarında sırasıyla harmonik konveks ve  $p$ -harmonik konveks fonksiyonlarla bağlantılı Newton tipli eşitsizlikler ispatlandı. Üstelik Ali ve ark. tarafından kuantum türevlenebilir konveks fonksiyonlar için bazı Newton tipli eşitsizlikler elde edildi [17]. Ayrıca, Erden ve ark.

tarafından Newton tipli kareleme formülünün çeşitli hata tahminleri, sınırlı varyasyon ve Lipschitzian fonksiyonları ile sunulmuştur [18]. Newton tipli eşitsizliklerle elde edilmiş bazı sonuçlar için [19, 20, 21] referanslarına bakılabilir.

Bu tezin amacı olarak ise şu süreç göz önünde bulundurulabilir. Literatürde Hezenci ve Budak tarafından Riemann-Liouville kesirli integralleri içeren birinci tip Newton eşitsizlikleri elde edildi [22]. Ayrıca Hezenci ve ark. tarafından Riemann-Liouville kesirli integralleri için ikinci tip Newton eşitsizlikleri elde edildi [23]. Bu tezde elde edilen Riemann-Liouville kesirli integralleri içeren birinci tip Newton eşitsizlikleri için  $s$ -konveks fonksiyonlar kullanılarak genelleştirilmiş, yeni eşitsizlikler ve sonuçlar elde edilmiştir.

Bu tezin bu bölümden sonra gelecek olan ikinci bölümünde tez boyunca kullanılmış olan temel tanım ve teoremler verilir. Üçüncü bölümde ise literatürde elde edilmiş olan birinci tip Riemann-Liouville kesirli integralleri içeren Newton tipli eşitsizlikler verilir. Dördüncü bölümde ise literatürde elde edilmiş olan ikinci tip Riemann-Liouville Kesirli integrallerini içeren Newton tipli eşitsizlikler verilir. Tezin beşinci bölümü ise bu tezin ana bölümünü oluşturmaktadır.  $s$ -konveks fonksiyonlar kullanılarak elde edilen Newton tipli eşitsizlikler elde edildi. Bulunan eşitsizliklerde parametrelerin özel seçimleri ile literatürde hangi çalışmalarını genelleştirdiği verilmektedir. Ayrıca sonuçlar ve öneriler bölümünde ise okurlara burada elde edilmiş sonuçların öneminden ve gelecekteki yapılabilecek çalışmalardan söz edilmektedir.

## 2. TEMEL KAVRAMLAR

Tezin bu bölümünde tez boyunca kullanılan temel tanım ve teoremler verilir.

**Tanım 2.1 (Konveks Küme).**  $L$  bir lineer uzay ve  $A \subseteq L$  olmak üzere  $\forall x, y \in A$  için  $B = \{z \in L : z = \alpha x + (1 - \alpha)y, 0 \leq \alpha \leq 1\} \subseteq A$  ise  $A$  kümesine konveks küme denir. Eğer  $z \in B$  ise  $z = \alpha x + (1 - \alpha)y$  eşitliğindeki  $x$  ve  $y$  nin katsayıları için  $\alpha + (1 - \alpha) = 1$  bağıntısı her zaman doğrudur. Bu sebeple konveks küme tanımındaki  $\alpha, 1 - \alpha$  yerine  $\alpha + \beta = 1$  şartını sağlayan ve negatif olmayan  $\alpha, \beta$  reel sayıları alınabilir. Geometrik olarak  $B$  kümesi uç noktaları  $x$  ve  $y$  olan bir doğru parçasıdır. Bu durumda sezgisel olarak konveks küme, boş olmayan ve herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçasını ihtiva eden kümedir [24].

**Tanım 2.2 (J-Konveks Fonksiyon).**  $\Lambda, \mathbb{R}$  de bir aralık olmak üzere her  $x, y \in \Lambda$  için

$$\omega\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{\omega(x) + \omega(y)}{2}$$

şartını sağlayan bir  $\omega$  fonksiyonuna  $\Lambda$  üzerinde Jensen anlamında konveks veya  $J$ -konveks fonksiyon denir [3].

**Tanım 2.3 (Kesin J-Konveks Fonksiyon).** Her  $x, y \in \Lambda$  ve  $x \neq y$  için,

$$\omega\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{\omega(x) + \omega(y)}{2}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa,  $\omega$  fonksiyonuna  $\Lambda$  üzerinde kesin  $J$ -konveks fonksiyon denir [3].

**Tanım 2.4 (Konveks Fonksiyon).**  $\omega : \Lambda \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu,  $x, y \in \Lambda$  ve  $\eta \in [0, 1]$  için

$$\omega(\eta x + (1 - \eta)y) \leq \eta \omega(x) + (1 - \eta) \omega(y) \quad (2.1)$$

eşitsizliği geçerli ise  $\omega$  fonksiyonuna konveks fonksiyon olarak isimlendirilir. Eşitsizlik tam tersi olduğunda  $\omega$  fonksiyonuna konkav fonksiyon denir [25].

**Tanım 2.5 (Birinci Anlamda s-Konveks Fonksiyon).**  $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ ,  $\omega : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  bir fonksiyon ve  $0 < s \leq 1$  olsun.  $\alpha^s + \beta^s = 1$  olmak üzere  $\forall x, y \in \mathbb{R}_+$  ve her  $\alpha, \beta \geq 0$  için

$$\omega(\alpha x + \beta y) \leq \alpha^s \omega(x) + \beta^s \omega(y) \quad (2.2)$$

eşitsizliği geçerli ise  $\omega$  fonksiyonuna birinci anlamda  $s$ -konveks fonksiyon denir. Birinci anlamda  $s$ -konveks fonksiyonların sınıfı  $K_s^1$  ile tanımlanır [26].

**Tanım 2.6 (İkinci Anlamda s-Konveks Fonksiyon).**  $\omega : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  ve  $0 < s \leq 1$  olsun.  $\alpha, \beta \geq 0$ ,  $\alpha + \beta = 1$  olmak üzere  $\forall x, y \in \mathbb{R}_+$  için

$$\omega(\alpha x + \beta y) \leq \alpha^s \omega(x) + \beta^s \omega(y) \quad (2.3)$$

eşitsizliğini sağlayan  $\omega$  fonksiyonuna ikinci anlamda  $s$ -konveks fonksiyon denir. İkinci anlamda  $s$ -konveks fonksiyonların sınıfı  $K_s^2$  ile gösterilir [26].

Burada birinci anlamda ve ikinci anlamda  $s$  konveks fonksiyon tanımları  $s = 1$  için konveks fonksiyon elde edilir.

**Tanım 2.7 (h-Konveks Fonksiyon).**  $h : \Lambda \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  pozitif bir fonksiyon olsun.  $\forall x, y \in \Lambda$ ,  $\alpha \in (0, 1)$  olmak üzere

$$\omega(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq h(\alpha) \omega(x) + h(1 - \alpha) \omega(y) \quad (2.4)$$

koşulunu sağlayan  $\omega$  fonksiyonuna  $h$ -konveks fonksiyon denir. Eşitsizlik yön değiştirdiği takdirde  $h$  fonksiyonuna  $h$ -konkav fonksiyon denir [27].

**Tanım 2.8 (Quasi-Konveks Fonksiyon).**  $S \subset \mathbb{R}^n$  boştan farklı bir küme ve  $\omega : S \rightarrow \mathbb{R}$  bir fonksiyon olsun.  $\forall x, y \in S$  ve  $\lambda \in [0, 1]$  için

$$\omega(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \max\{\omega(x), \omega(y)\} \quad (2.5)$$

şartını sağlıyorsa  $\omega$  fonksiyonuna quasi-konveks fonksiyon denir.

Aynı koşullar altında

$$\omega(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \max\{\omega(x), \omega(y)\} \quad (2.6)$$

ise  $\omega$  fonksiyonuna quasi-konkav fonksiyon denir [28].

**Tanım 2.9 (J-Quasi-Konveks Fonksiyon).**  $\omega : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$  bir fonksiyon ve  $\forall x, y \in \Lambda$  olsun.

$$\omega\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \max\{\omega(x), \omega(y)\} \quad (2.7)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa  $\omega$  fonksiyonuna J-quasi-konvektir denir [28].

**Tanım 2.10 (Wright-Quasi-Konveks Fonksiyon).**  $\omega : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$  bir fonksiyon olsun.  $y > x$ ,  $\delta > 0$  koşulları altında  $\forall x, y, y + \delta \in \Lambda$  ve  $\forall \alpha \in [0, 1]$  olmak üzere

$$\frac{1}{2}[\omega(\alpha x + (1-\alpha)y) + \omega((1-\alpha)x + \alpha y)] \leq \max\{\omega(x), \omega(y)\} \quad (2.8)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa  $\omega$  fonksiyonuna Wright-quasi-konvektir denir [28].

**Tanım 2.11 (log-Konveks Fonksiyon).**  $\omega : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$  ve  $\Lambda \subseteq \mathbb{R}$  aralık olsun.  $\forall x, y \in \Lambda$  ve  $\alpha \in [0, 1]$  olmak üzere

$$\omega(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \omega^\alpha(x) \omega^{1-\alpha}(y) \quad (2.9)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa  $\omega$  fonksiyonuna log-konvektir denir [25].

**Tanım 2.12 (r-Konveks Fonksiyon).**  $\omega$  pozitif bir fonksiyon olsun.  $\forall x, y \in [\kappa_1, \kappa_2]$  ve  $\lambda \in [0, 1]$  için

$$\omega(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \begin{cases} \lambda \omega^r(x) + (1-\lambda) \omega^r(y), & r \neq 0 \\ [\omega(x)]^\lambda [\omega(y)]^{1-\lambda}, & r = 0 \end{cases} \quad (2.10)$$

eşitsizliğini sağlayan  $\omega$  fonksiyonuna  $[\kappa_1, \kappa_2]$  aralığında  $r$ -konveks denir [29].

**Tanım 2.13.**  $x \in \mathbb{R}_+$  için gamma fonksiyonu,

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-\eta} \eta^{x-1} d\eta$$

olarak tanımlanır.

gamma fonksiyonunun

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad x \in \mathbb{R}^+$$

$$\Gamma(\varkappa + 1) = (\varkappa)!, \varkappa \in \mathbb{N}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

gibi özellikleri vardır [30].

**Tanım 2.14.** Beta fonksiyonu  $\varkappa, y \in \mathbb{R}^+$  için

$$B(\varkappa, y) = \int_0^1 \eta^{\varkappa-1} (1-\eta)^{y-1} d\eta$$

olarak tanımlanır.

Beta fonksiyonu, gamma fonksiyonu cinsinden

$$B(\varkappa, y) = \frac{\Gamma(\varkappa)\Gamma(y)}{\Gamma(\varkappa+y)}, \varkappa, y \in \mathbb{R}^+$$

olarak yazılır [30].

**Tanım 2.15.**  $\omega \in L_1[\kappa_1, \kappa_2]$ ,  $\kappa_1, \kappa_2 \in \mathbb{R}$ 'yi  $\kappa_1 < \kappa_2$  ile ele alalım.  $\alpha > 0$  mertebesinden  $\mathcal{J}_{\kappa_1+}^\alpha \omega$  ve  $\mathcal{J}_{\kappa_2-}^\alpha \omega$  Riemann-Liouville kesirli integralleri sırasıyla

$$\mathcal{J}_{\kappa_1+}^\alpha \omega(\varkappa) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\kappa_1}^{\varkappa} (\varkappa - \eta)^{\alpha-1} \omega(\eta) d\eta, \quad \varkappa > \kappa_1$$

ve

$$\mathcal{J}_{\kappa_2-}^\alpha \omega(\varkappa) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\varkappa}^{\kappa_2} (\eta - \varkappa)^{\alpha-1} \omega(\eta) d\eta, \quad \varkappa < \kappa_2,$$

biçiminde verilir [31, 32].

**Tanım 2.16** (İntegraller için Hölder Eşitsizliği).  $p > 1$  ve  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ,  $\omega$  ve  $g$ ,  $[\kappa_1, \kappa_2]$  aralığında tanımlı reel fonksiyonlar olsun.  $\omega \in L_p[\kappa_1, \kappa_2]$  ve  $g \in L_q[\kappa_1, \kappa_2]$  olsun.

$$\int_{\kappa_1}^{\kappa_2} |\omega(\varkappa)g(\varkappa)| d\varkappa \leq \left( \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} |\omega(\varkappa)|^p d\varkappa \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} |g(\varkappa)|^q d\varkappa \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliğine Hölder Eşitsizliği denir [33].

Ayrıca Hölder Eşitsizliğinin özel bir sonucu olarak verilen power mean Eşitsizliği aşağıdaki gibi ifade edilmektedir.

**Tanım 2.17** (Power Mean Eşitsizliği).  $q \geq 1$  olsun. Aynı zamanda  $\omega$  ve  $g$ ,  $[\kappa_1, \kappa_2]$  aralığında tanımlı reel fonksiyonlar olsun. Eğer  $\omega \in L[\kappa_1, \kappa_2]$  ve  $g \in L_q[\kappa_1, \kappa_2]$  ise

$$\int_{\kappa_1}^{\kappa_2} |\omega(\varkappa)g(\varkappa)| d\varkappa \leq \left( \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} |\omega(\varkappa)| d\varkappa \right)^{1-\frac{1}{q}} \left( \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} |\omega(\varkappa)||g(\varkappa)|^q d\varkappa \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği sağlanır [33].

Eşitsizlik teorisi, matematiğin birçok dalında çok sayıda uygulamaya sahip, önemli bir konudur. Birçok matematikçi Hermite-Hadamard, Simpson ve Newton tipli eşitsizlikleri üzerine çalışmalar yapmış ve bunu genelleştirmek adına  $s$ -konveks fonksiyonlar, yarı-konveks fonksiyonlar,  $\log$ -konveks fonksiyonlar vb. dahil olmak üzere çeşitli fonksiyon sınıfları için genişletmekle çok ilgilidirler. Son yıllarda kesirli analiz, konveks fonksiyonlar üzerindeki eşitsizlik teorisinin bir dizi alanında ispatlanmış uygulamaları nedeniyle ilgiyi artırmıştır. Hermite-Hadamard tipli eşitsizlik, Simpson tipli eşitsizlik ve Newton tipli eşitsizlik kullanılarak yeni formüllerin sınırları elde edilebilir.

Simpson tipli eşitsizlikler Simpson kurallarından türetilir ve aşağıdaki eşitsizlik biçimini alır:

- i. Simpson'ın 1/3 kuralı veya Simpson'ın kareleme formülü:

$$\int_{\kappa_1}^{\kappa_2} \omega(\varkappa) d\varkappa \approx \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{6} \left[ \omega(\kappa_1) + 4\omega\left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}\right) + \omega(\kappa_2) \right]$$

şeklindedir [34].

- ii. Simpson'ın ikinci formülü, genellikle Simpson'ın 3/8 kuralı veya Newton-Cotes kareleme formülü olarak bilinir:

$$\int_{\kappa_1}^{\kappa_2} \omega(\varkappa) d\varkappa \approx \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{8} \left[ \omega(\kappa_1) + 3\omega\left(\frac{2\kappa_1 + \kappa_2}{3}\right) + 3\omega\left(\frac{\kappa_1 + 2\kappa_2}{3}\right) + \omega(\kappa_2) \right].$$

biçimindedir [34].

Klasik Simpson tipli eşitsizliği aşağıdaki gibidir:

**Teorem 2.18.** Eğer  $\omega : [\kappa_1, \kappa_2] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(\kappa_1, \kappa_2)$  üzerinde dördüncü mertebeden türevlenebilir ve sürekli bir fonksiyon ve  $\|\omega^{(4)}\|_\infty = \sup_{\varkappa \in (\kappa_1, \kappa_2)} |\omega^{(4)}(\varkappa)| < \infty$ , olsun bu durumda

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{6} \left[ \omega(\kappa_1) + 4\omega\left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}\right) + \omega(\kappa_2) \right] - \frac{1}{\kappa_2 - \kappa_1} \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} \omega(\varkappa) d\varkappa \right| \\ & \leq \frac{1}{2880} \|\omega^{(4)}\|_\infty (\kappa_2 - \kappa_1)^4 \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir [35].

Klasik Newton tipli eşitsizliği aşağıdaki gibidir:

**Teorem 2.19.**  $\omega : [\kappa_1, \kappa_2] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(\kappa_1, \kappa_2)$  üzerinde dördüncü mertebeden türevlenebilir ve sürekli bir fonksiyon olduğuna ve  $\|\omega^{(4)}\|_\infty = \sup_{\varkappa \in (\kappa_1, \kappa_2)} |\omega^{(4)}(\varkappa)| < \infty$  olduğuna dikkat ediniz. O zaman eşitsizlik:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{8} \left[ \omega(\kappa_1) + 3\omega\left(\frac{2\kappa_1 + \kappa_2}{3}\right) + 3\omega\left(\frac{\kappa_1 + 2\kappa_2}{3}\right) + \omega(\kappa_2) \right] - \frac{1}{\kappa_2 - \kappa_1} \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} \omega(\varkappa) d\varkappa \right| \\ & \leq \frac{1}{6480} \|\omega^{(4)}\|_\infty (\kappa_2 - \kappa_1)^4 \end{aligned}$$

şeklindedir [21].

Diferansiyellenebilir konveks fonksiyonlar için iyi bilinen Riemann-Liouville kesirli integralleri yardımıyla bazı Newton tipli eşitsizlikler aşağıdaki şekilde verilmektedir:

**Teorem 2.20.**  $\omega : [\kappa_1, \kappa_2] \rightarrow \mathbb{R}$  sürekli bir fonksiyon  $(\kappa_1, \kappa_2)$  ve  $\omega' \in L_1([\kappa_1, \kappa_2])$  olsun.  $|\omega'|$  fonksiyonu  $[\kappa_1, \kappa_2]$  üzerinde konveks olmak üzere, aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{8} \left[ \omega(\kappa_1) + 3\omega\left(\frac{2\kappa_1 + \kappa_2}{3}\right) + 3\omega\left(\frac{\kappa_1 + 2\kappa_2}{3}\right) + \omega(\kappa_2) \right] \right. \\ & \quad \left. - \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{2(\kappa_2 - \kappa_1)^\alpha} [\mathcal{J}_{\kappa_1^+}^\alpha \omega(\kappa_2) + \mathcal{J}_{\kappa_2^-}^\alpha \omega(\kappa_1)] \right| \\ & \leq \frac{(\kappa_2 - \kappa_1)}{2} (\Omega_1(\alpha) + \Omega_2(\alpha) + \Omega_3(\alpha)) [|\omega'(\kappa_1)| + |\omega'(\kappa_2)|]. \end{aligned}$$

Burada,

$$\begin{aligned} \Omega_1(\alpha) &= \int_0^{\frac{1}{3}} \left| \eta^\alpha - \frac{1}{8} \right| d\eta \\ &= \begin{cases} \frac{2\alpha}{\alpha+1} \left(\frac{1}{8}\right)^{1+\frac{1}{\alpha}} + \frac{1}{(\alpha+1)3^{\alpha+1}} - \frac{1}{24}, & 0 < \alpha \leq \frac{\ln(\frac{1}{8})}{\ln(\frac{1}{3})}, \\ \frac{1}{24} - \frac{1}{(\alpha+1)3^{\alpha+1}}, & \frac{\ln(\frac{1}{8})}{\ln(\frac{1}{3})} < \alpha \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Omega_2(\alpha) &= \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \left| \eta^\alpha - \frac{1}{2} \right| d\eta \\ &= \begin{cases} \frac{2^{\alpha+1}-1}{(\alpha+1)3^{\alpha+1}} - \frac{1}{6}, & 0 < \alpha < \frac{\ln(\frac{1}{2})}{\ln(\frac{1}{3})}, \\ \frac{2\alpha}{\alpha+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{1+\frac{1}{\alpha}} + \frac{1+2^{\alpha+1}}{(\alpha+1)3^{\alpha+1}} - \frac{1}{2}, & \frac{\ln(\frac{1}{2})}{\ln(\frac{1}{3})} \leq \alpha \leq \frac{\ln(\frac{1}{2})}{\ln(\frac{2}{3})}, \\ \frac{1-2^{\alpha+1}}{(\alpha+1)3^{\alpha+1}} + \frac{1}{6}, & \frac{\ln(\frac{1}{2})}{\ln(\frac{2}{3})} < \alpha, \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Omega_3(\alpha) &= \int_{\frac{2}{3}}^1 \left| \eta^\alpha - \frac{7}{8} \right| d\eta = \begin{cases} \frac{3^{\alpha+1}-2^{\alpha+1}}{(\alpha+1)3^{\alpha+1}} - \frac{7}{24}, & 0 < \alpha < \frac{\ln(\frac{7}{8})}{\ln(\frac{2}{3})}, \\ \frac{2\alpha}{\alpha+1} \left(\frac{7}{8}\right)^{1+\frac{1}{\alpha}} + \frac{2^{\alpha+1}+3^{\alpha+1}}{(\alpha+1)3^{\alpha+1}} - \frac{35}{24}, & \frac{\ln(\frac{7}{8})}{\ln(\frac{2}{3})} \leq \alpha \end{cases} \end{aligned}$$

şeklindedir [36].

### 3. RIEMANN-LIOUVILLE KESİRLİ İNTEGRALLERİ İÇİN BİRİNCİ TİP NEWTON EŞİTSİZLİKLERİ

Bu bölümde öncelikle bir eşitlik verilecektir. Bu eşitlik kullanılarak Hezenci ve Budak tarafından elde edilen birinci tip Riemann-Liouville kesirli integrallerini içeren Newton tipli eşitsizliklere ulaşılır [22].

**Lemma 3.1.**  $\omega : [\kappa_1, \kappa_2] \rightarrow \mathbb{R}$ , fonksiyonu  $(\kappa_1, \kappa_2)$  aralığında türevlenebilir olsun ve  $\omega' \in L_1[\kappa_1, \kappa_2]$  olacak şekilde sürekli bir fonksiyon ise, o zaman özdeşlik

$$\begin{aligned} & \frac{1}{8} \left[ \omega(\kappa_1) + 3\omega\left(\frac{2\kappa_1 + \kappa_2}{3}\right) + 3\omega\left(\frac{\kappa_1 + 2\kappa_2}{3}\right) + \omega(\kappa_2) \right] \\ & - \frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(\kappa_2 - \kappa_1)^\alpha} \left[ \mathcal{J}_{\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}-}^\alpha \omega(\kappa_1) + \mathcal{J}_{\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}+}^\alpha \omega(\kappa_2) \right] \\ & = \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{4} [\Lambda_1 + \Lambda_2] \end{aligned}$$

şeklinindedir. Burada

$$\begin{cases} \Lambda_1 = \int_0^{\frac{2}{3}} (\eta^\alpha - \frac{1}{4}) \left[ \omega'\left(\frac{\eta}{2}\kappa_2 + \frac{2-\eta}{2}\kappa_1\right) - \omega'\left(\frac{\eta}{2}\kappa_1 + \frac{2-\eta}{2}\kappa_2\right) \right] d\eta, \\ \Lambda_2 = \int_{\frac{2}{3}}^1 (\eta^\alpha - 1) \left[ \omega'\left(\frac{\eta}{2}\kappa_2 + \frac{2-\eta}{2}\kappa_1\right) - \omega'\left(\frac{\eta}{2}\kappa_1 + \frac{2-\eta}{2}\kappa_2\right) \right] d\eta. \end{cases}$$

biçimindedir.

*İspat.* Kısmi integrasyon yardımıyla

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= \int_0^{\frac{2}{3}} \left( \eta^\alpha - \frac{1}{4} \right) \left[ \omega'\left(\frac{\eta}{2}\kappa_2 + \frac{2-\eta}{2}\kappa_1\right) - \omega'\left(\frac{\eta}{2}\kappa_1 + \frac{2-\eta}{2}\kappa_2\right) \right] d\eta \quad (3.1) \\ &= \frac{2}{\kappa_2 - \kappa_1} \left( \eta^\alpha - \frac{1}{4} \right) \left[ \omega\left(\frac{\eta}{2}\kappa_2 + \frac{2-\eta}{2}\kappa_1\right) + \omega\left(\frac{\eta}{2}\kappa_1 + \frac{2-\eta}{2}\kappa_2\right) \right] \Big|_0^{\frac{2}{3}} \\ &\quad - \frac{2\alpha}{\kappa_2 - \kappa_1} \int_0^{\frac{2}{3}} \eta^{\alpha-1} \left[ \omega\left(\frac{\eta}{2}\kappa_2 + \frac{2-\eta}{2}\kappa_1\right) + \omega\left(\frac{\eta}{2}\kappa_1 + \frac{2-\eta}{2}\kappa_2\right) \right] d\eta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{\kappa_2 - \kappa_1} \left( \left( \frac{2}{3} \right)^\alpha - \frac{1}{4} \right) \left[ \omega \left( \frac{2\kappa_1 + \kappa_2}{3} \right) + \omega \left( \frac{\kappa_1 + 2\kappa_2}{3} \right) \right] \\
&+ \frac{1}{2(\kappa_2 - \kappa_1)} (\omega(\kappa_1) + \omega(\kappa_2)) \\
&- \frac{2\alpha}{\kappa_2 - \kappa_1} \int_0^{\frac{2}{3}} \eta^{\alpha-1} \left[ \omega \left( \frac{\eta}{2} \kappa_2 + \frac{2-\eta}{2} \kappa_1 \right) + \omega \left( \frac{\eta}{2} \kappa_1 + \frac{2-\eta}{2} \kappa_2 \right) \right] d\eta
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
\Lambda_2 &= \int_{\frac{2}{3}}^1 (\eta^\alpha - 1) \left[ \omega' \left( \frac{\eta}{2} \kappa_2 + \frac{2-\eta}{2} \kappa_1 \right) - \omega' \left( \frac{\eta}{2} \kappa_1 + \frac{2-\eta}{2} \kappa_2 \right) \right] d\eta \quad (3.2) \\
&= -\frac{2}{\kappa_2 - \kappa_1} \left( \left( \frac{2}{3} \right)^\alpha - 1 \right) \left[ \omega \left( \frac{2\kappa_1 + \kappa_2}{3} \right) + \omega \left( \frac{\kappa_1 + 2\kappa_2}{3} \right) \right] \\
&- \frac{2\alpha}{\kappa_2 - \kappa_1} \int_{\frac{2}{3}}^1 \eta^{\alpha-1} \left[ \omega \left( \frac{\eta}{2} \kappa_2 + \frac{2-\eta}{2} \kappa_1 \right) + \omega \left( \frac{\eta}{2} \kappa_1 + \frac{2-\eta}{2} \kappa_2 \right) \right] d\eta.
\end{aligned}$$

(3.1) ve (3.2) toplanırsa

$$\begin{aligned}
\Lambda_1 + \Lambda_2 & \quad (3.3) \\
&= \frac{1}{2(\kappa_2 - \kappa_1)} \left[ \omega(\kappa_1) + 3\omega \left( \frac{2\kappa_1 + \kappa_2}{3} \right) + 3\omega \left( \frac{\kappa_1 + 2\kappa_2}{3} \right) + \omega(\kappa_2) \right] \\
&- \frac{2\alpha}{\kappa_2 - \kappa_1} \int_0^1 \eta^{\alpha-1} \left[ \omega \left( \frac{\eta}{2} \kappa_2 + \frac{2-\eta}{2} \kappa_1 \right) + \omega \left( \frac{\eta}{2} \kappa_1 + \frac{2-\eta}{2} \kappa_2 \right) \right] d\eta
\end{aligned}$$

elde edilir.  $\eta \in [0, 1]$  için  $x = \frac{\eta}{2} \kappa_2 + \frac{2-\eta}{2} \kappa_1$  ve  $y = \frac{\eta}{2} \kappa_1 + \frac{2-\eta}{2} \kappa_2$  değişken değişimi yapılsa (3.3) eşitliği aşağıdaki gibi yeniden yazılabilir:

$$\begin{aligned}
\Lambda_1 + \Lambda_2 & \quad (3.4) \\
&= \frac{1}{2(\kappa_2 - \kappa_1)} \left[ \omega(\kappa_1) + 3\omega \left( \frac{2\kappa_1 + \kappa_2}{3} \right) + 3\omega \left( \frac{\kappa_1 + 2\kappa_2}{3} \right) + \omega(\kappa_2) \right] \\
&- \frac{2^{\alpha+1} \Gamma(\alpha+1)}{(\kappa_2 - \kappa_1)^{\alpha+1}} \left[ \mathcal{J}_{\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}-}^\alpha \omega(\kappa_1) + \mathcal{J}_{\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}+}^\alpha \omega(\kappa_2) \right].
\end{aligned}$$

(3.4)'ın her iki tarafını  $\frac{\kappa_2 - \kappa_1}{4}$  ile çarpılırsa, Lemma 3.1 in ispatı tamamlanır.  $\square$

**Teorem 3.2.** Lemma 3.1 varsayımlarının geçerli olmak üzere ve eğer  $|\omega'|$  fonksiyonu  $[\kappa_1, \kappa_2]$  aralığında konveks ise, bu durumda

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{8} \left[ \omega(\kappa_1) + 3\omega\left(\frac{2\kappa_1 + \kappa_2}{3}\right) + 3\omega\left(\frac{\kappa_1 + 2\kappa_2}{3}\right) + \omega(\kappa_2) \right] \right. \\ & \left. - \frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(\kappa_2 - \kappa_1)^\alpha} \left[ \mathcal{J}_{\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}-}^\alpha \omega(\kappa_1) + \mathcal{J}_{\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}+}^\alpha \omega(\kappa_2) \right] \right| \\ & \leq \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{4} (\Omega_1(\alpha) + \Omega_2(\alpha)) [|\omega'(\kappa_1)| + |\omega'(\kappa_2)|] \end{aligned} \quad (3.5)$$

Newton tipli eşitsizliği sağlanır. Burada

$$\begin{aligned} \Omega_1(\alpha) &= \int_0^{\frac{2}{3}} \left| \eta^\alpha - \frac{1}{4} \right| d\eta \\ &= \begin{cases} \frac{2\alpha}{\alpha+1} \left(\frac{1}{4}\right)^{1+\frac{1}{\alpha}} + \frac{1}{\alpha+1} \left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha+1} - \frac{1}{6}, & 0 < \alpha < \frac{\ln(\frac{1}{4})}{\ln(\frac{2}{3})}, \\ \frac{1}{6} - \frac{1}{\alpha+1} \left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha+1}, & \frac{\ln(\frac{1}{4})}{\ln(\frac{2}{3})} < \alpha \end{cases} \end{aligned}$$

ve

$$\Omega_2(\alpha) = \int_{\frac{2}{3}}^1 (1 - \eta^\alpha) d\eta = \frac{1}{3} - \frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\alpha+1} \left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha+1}.$$

*İspat.* Lemma 3.1 ifadesindeki eşitliğin mutlak değeri alınırsa

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{8} \left[ \omega(\kappa_1) + 3\omega\left(\frac{2\kappa_1 + \kappa_2}{3}\right) + 3\omega\left(\frac{\kappa_1 + 2\kappa_2}{3}\right) + \omega(\kappa_2) \right] \right. \\ & \left. - \frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(\kappa_2 - \kappa_1)^\alpha} \left[ \mathcal{J}_{\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}-}^\alpha \omega(\kappa_1) + \mathcal{J}_{\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}+}^\alpha \omega(\kappa_2) \right] \right| \\ & \leq \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{4} \left\{ \int_0^{\frac{2}{3}} \left| \eta^\alpha - \frac{1}{4} \right| \right. \\ & \quad \times \left[ \left| \omega' \left( \frac{\eta}{2} \kappa_2 + \frac{2-\eta}{2} \kappa_1 \right) \right| + \left| \omega' \left( \frac{\eta}{2} \kappa_1 + \frac{2-\eta}{2} \kappa_2 \right) \right| \right] d\eta \\ & \quad + \int_{\frac{2}{3}}^1 |\eta^\alpha - 1| \\ & \quad \times \left[ \left| \omega' \left( \frac{\eta}{2} \kappa_2 + \frac{2-\eta}{2} \kappa_1 \right) \right| + \left| \omega' \left( \frac{\eta}{2} \kappa_1 + \frac{2-\eta}{2} \kappa_2 \right) \right| \right] d\eta \left. \right\} \end{aligned} \quad (3.6)$$

elde edilir.  $|\omega'|$  fonksiyonu konveks fonksiyon olduğundan

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{8} \left[ \omega(\kappa_1) + 3\omega\left(\frac{2\kappa_1 + \kappa_2}{3}\right) + 3\omega\left(\frac{\kappa_1 + 2\kappa_2}{3}\right) + \omega(\kappa_2) \right] \right. \\
& \quad \left. - \frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(\kappa_2 - \kappa_1)^\alpha} \left[ \mathcal{J}_{\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}-}^\alpha \omega(\kappa_1) + \mathcal{J}_{\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}+}^\alpha \omega(\kappa_2) \right] \right| \\
& \leq \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{4} \left\{ \int_0^{\frac{2}{3}} \left| \eta^\alpha - \frac{1}{4} \right| \left[ \frac{\eta}{2} |\omega'(\kappa_2)| + \frac{2-\eta}{2} |\omega'(\kappa_1)| \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{\eta}{2} |\omega'(\kappa_1)| + \frac{2-\eta}{2} |\omega'(\kappa_2)| \right] d\eta \right. \\
& \quad \left. + \int_{\frac{2}{3}}^1 (1-\eta^\alpha) \left[ \frac{\eta}{2} |\omega'(\kappa_2)| + \frac{2-\eta}{2} |\omega'(\kappa_1)| \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{\eta}{2} |\omega'(\kappa_1)| + \frac{2-\eta}{2} |\omega'(\kappa_2)| \right] d\eta \right\} \\
& = \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{4} (\Omega_1(\alpha) + \Omega_2(\alpha)) [|\omega'(\kappa_1)| + |\omega'(\kappa_2)|]
\end{aligned}$$

olur ve ispat tamamlanır. □

**Teorem 3.3.** Lemma 3.1 varsayımları geçerli ve  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  olmak üzere,  $q > 1$  için  $|\omega'|^q$  fonksiyonu  $[\kappa_1, \kappa_2]$  aralığında konveks fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{8} \left[ \omega(\kappa_1) + 3\omega\left(\frac{2\kappa_1 + \kappa_2}{3}\right) + 3\omega\left(\frac{\kappa_1 + 2\kappa_2}{3}\right) + \omega(\kappa_2) \right] \right. \\
& \quad \left. - \frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(\kappa_2 - \kappa_1)^\alpha} \left[ \mathcal{J}_{\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}-}^\alpha \omega(\kappa_1) + \mathcal{J}_{\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}+}^\alpha \omega(\kappa_2) \right] \right| \\
& \leq \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{4} \left\{ \left( \int_0^{\frac{2}{3}} \left| \eta^\alpha - \frac{1}{4} \right|^p d\eta \right)^{\frac{1}{p}} \right. \\
& \quad \times \left[ \left( \frac{|\omega'(\kappa_2)|^q + 5|\omega'(\kappa_1)|^q}{9} \right)^{\frac{1}{q}} + \left( \frac{|\omega'(\kappa_1)|^q + 5|\omega'(\kappa_2)|^q}{9} \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\
& \quad \left. + \left( \int_{\frac{2}{3}}^1 (1-\eta^\alpha)^p d\eta \right)^{\frac{1}{p}} \right. \\
& \quad \left. \times \left[ \left( \frac{5|\omega'(\kappa_2)|^q + 7|\omega'(\kappa_1)|^q}{36} \right)^{\frac{1}{q}} + \left( \frac{5|\omega'(\kappa_1)|^q + 7|\omega'(\kappa_2)|^q}{36} \right)^{\frac{1}{q}} \right] \right\} \tag{3.7}
\end{aligned}$$

Newton tipli eşitsizliği geçerlidir.

*İspat.* Hölder eşitsizliği (3.6) ifadesinde uygulanarak

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{8} \left[ \omega(\kappa_1) + 3\omega\left(\frac{2\kappa_1 + \kappa_2}{3}\right) + 3\omega\left(\frac{\kappa_1 + 2\kappa_2}{3}\right) + \omega(\kappa_2) \right] \right. \\
& \left. - \frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(\kappa_2 - \kappa_1)^\alpha} \left[ \mathcal{J}_{\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}-}^\alpha \omega(\kappa_1) + \mathcal{J}_{\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}+}^\alpha \omega(\kappa_2) \right] \right| \\
& \leq \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{4} \left\{ \left( \int_0^{\frac{2}{3}} \left| \eta^\alpha - \frac{1}{4} \right|^p d\eta \right)^{\frac{1}{p}} \right. \\
& \times \left( \int_0^{\frac{2}{3}} \left| \omega' \left( \frac{\eta}{2} \kappa_2 + \frac{2-\eta}{2} \kappa_1 \right) \right|^q d\eta \right)^{\frac{1}{q}} \\
& + \left( \int_0^{\frac{2}{3}} \left| \eta^\alpha - \frac{1}{4} \right|^p d\eta \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \times \left( \int_0^{\frac{2}{3}} \left| \omega' \left( \frac{\eta}{2} \kappa_1 + \frac{2-\eta}{2} \kappa_2 \right) \right|^q d\eta \right)^{\frac{1}{q}} \\
& + \left( \int_{\frac{2}{3}}^1 \left| \eta^\alpha - 1 \right|^p d\eta \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \times \left( \int_{\frac{2}{3}}^1 \left| \omega' \left( \frac{\eta}{2} \kappa_2 + \frac{2-\eta}{2} \kappa_1 \right) \right|^q d\eta \right)^{\frac{1}{q}} \\
& + \left( \int_{\frac{2}{3}}^1 \left| \eta^\alpha - 1 \right|^p d\eta \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \left. \times \left( \int_{\frac{2}{3}}^1 \left| \omega' \left( \frac{\eta}{2} \kappa_1 + \frac{2-\eta}{2} \kappa_2 \right) \right|^q d\eta \right)^{\frac{1}{q}} \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir.  $|\omega'|^q$  fonksiyonu konveks fonksiyon olduğundan

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{8} \left[ \omega(\kappa_1) + 3\omega\left(\frac{2\kappa_1 + \kappa_2}{3}\right) + 3\omega\left(\frac{\kappa_1 + 2\kappa_2}{3}\right) + \omega(\kappa_2) \right] \right. \\
& \left. - \frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(\kappa_2 - \kappa_1)^\alpha} \left[ \mathcal{J}_{\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}-}^\alpha \omega(\kappa_1) + \mathcal{J}_{\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}+}^\alpha \omega(\kappa_2) \right] \right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{4} \left\{ \left( \int_0^{\frac{2}{3}} \left| \eta^\alpha - \frac{1}{4} \right|^p d\eta \right)^{\frac{1}{p}} \right. \\
&\quad \times \left( \int_0^{\frac{2}{3}} \left( \frac{\eta}{2} |\omega'(\kappa_2)|^q + \frac{2-\eta}{2} |\omega'(\kappa_1)|^q \right) d\eta \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad + \left( \int_0^{\frac{2}{3}} \left| \eta^\alpha - \frac{1}{4} \right|^p d\eta \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad \times \left( \int_0^{\frac{2}{3}} \left( \frac{\eta}{2} |\omega'(\kappa_1)|^q + \frac{2-\eta}{2} |\omega'(\kappa_2)|^q \right) d\eta \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad + \left( \int_{\frac{2}{3}}^1 (1 - \eta^\alpha)^p d\eta \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad \times \left( \int_{\frac{2}{3}}^1 \left( \frac{\eta}{2} |\omega'(\kappa_2)|^q + \frac{2-\eta}{2} |\omega'(\kappa_1)|^q \right) d\eta \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad + \left( \int_{\frac{2}{3}}^1 (1 - \eta^\alpha)^p d\eta \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad \times \left. \left( \int_{\frac{2}{3}}^1 \left( \frac{\eta}{2} |\omega'(\kappa_1)|^q + \frac{2-\eta}{2} |\omega'(\kappa_2)|^q \right) d\eta \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \\
&= \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{4} \left( \int_0^{\frac{2}{3}} \left| \eta^\alpha - \frac{1}{4} \right|^p d\eta \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad \times \left[ \left( \frac{|\omega'(\kappa_2)|^q + 5|\omega'(\kappa_1)|^q}{9} \right)^{\frac{1}{q}} + \left( \frac{|\omega'(\kappa_1)|^q + 5|\omega'(\kappa_2)|^q}{9} \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\
&\quad + \left( \int_{\frac{2}{3}}^1 (1 - \eta^\alpha)^p d\eta \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad \times \left[ \left( \frac{5|\omega'(\kappa_2)|^q + 7|\omega'(\kappa_1)|^q}{36} \right)^{\frac{1}{q}} + \left( \frac{5|\omega'(\kappa_1)|^q + 7|\omega'(\kappa_2)|^q}{36} \right)^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned}$$

bulunur ve ispat tamamlanır.  $\square$

**Teorem 3.4.** Lemma 3.1 varsayımları geçerli olmak üzere ve  $|\omega'|^q$ ,  $q \geq 1$ , fonksiyonu  $[\kappa_1, \kappa_2]$  aralığında konveks fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdaki Newton tipli eşitsizlik sağlanır:

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{8} \left[ \omega(\kappa_1) + 3\omega\left(\frac{2\kappa_1 + \kappa_2}{3}\right) + 3\omega\left(\frac{\kappa_1 + 2\kappa_2}{3}\right) + \omega(\kappa_2) \right] \right. \\
& \quad \left. - \frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(\kappa_2 - \kappa_1)^\alpha} \left[ \mathcal{J}_{\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}-}^\alpha \omega(\kappa_1) + \mathcal{J}_{\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}+}^\alpha \omega(\kappa_2) \right] \right| \\
& \leq \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{4} \left\{ (\Omega_1(\alpha))^{1-\frac{1}{q}} \left[ [\Omega_3(\alpha) |\omega'(\kappa_2)|^q + \Omega_4(\alpha) |\omega'(\kappa_1)|^q]^{\frac{1}{q}} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + [\Omega_3(\alpha) |\omega'(\kappa_1)|^q + \Omega_4(\alpha) |\omega'(\kappa_2)|^q]^{\frac{1}{q}} \right] \right. \\
& \quad \left. + (\Omega_2(\alpha))^{1-\frac{1}{q}} \left[ [\Omega_5(\alpha) |\omega'(\kappa_2)|^q + \Omega_6(\alpha) |\omega'(\kappa_1)|^q]^{\frac{1}{q}} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + [\Omega_5(\alpha) |\omega'(\kappa_1)|^q + \Omega_6(\alpha) |\omega'(\kappa_2)|^q]^{\frac{1}{q}} \right] \right\}. \tag{3.8}
\end{aligned}$$

Burada,  $\Omega_1(\alpha)$  ve  $\Omega_2(\alpha)$  Teorem 3.2 ifadesinde tanımlandı ve

$$\begin{aligned}
& \Omega_3(\alpha) \\
& = \int_0^{\frac{2}{3}} \frac{\eta}{2} \left| \eta^\alpha - \frac{1}{4} \right| d\eta \\
& = \begin{cases} \frac{\alpha+1}{2(\alpha+2)} \left(\frac{1}{4}\right)^{1+\frac{2}{\alpha}} + \frac{1}{2(\alpha+2)} \left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha+2} - \frac{1}{36}, & 0 < \alpha < \frac{\ln(\frac{1}{4})}{\ln(\frac{2}{3})}, \\ \frac{1}{36} - \frac{1}{2(\alpha+2)} \left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha+2}, & \frac{\ln(\frac{1}{4})}{\ln(\frac{2}{3})} < \alpha \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \Omega_4(\alpha) \\
& = \int_0^{\frac{2}{3}} \frac{2-\eta}{2} \left| \eta^\alpha - \frac{1}{4} \right| d\eta \\
& = \begin{cases} \frac{2\alpha}{\alpha+1} \left(\frac{1}{4}\right)^{1+\frac{1}{\alpha}} + \frac{1}{\alpha+1} \left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha+1} \\ \quad - \frac{\alpha+1}{2(\alpha+2)} \left(\frac{1}{4}\right)^{1+\frac{2}{\alpha}} - \frac{1}{2(\alpha+2)} \left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha+2} - \frac{5}{36}, & 0 < \alpha < \frac{\ln(\frac{1}{4})}{\ln(\frac{2}{3})}, \\ \frac{5}{36} - \frac{1}{\alpha+1} \left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha+1} + \frac{1}{2(\alpha+2)} \left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha+2}, & \frac{\ln(\frac{1}{4})}{\ln(\frac{2}{3})} < \alpha, \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\Omega_5(\alpha) = \int_{\frac{2}{3}}^1 \frac{\eta}{2} (1 - \eta^\alpha) d\eta = \frac{5}{36} - \frac{1}{2(\alpha+2)} + \frac{1}{2(\alpha+2)} \left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha+2},$$

$$\begin{aligned} & \Omega_6(\alpha) \\ &= \int_{\frac{2}{3}}^1 \frac{2-\eta}{2} (1 - \eta^\alpha) d\eta \\ &= \frac{7}{36} - \frac{\alpha+3}{2(\alpha+1)(\alpha+2)} + \frac{1}{\alpha+1} \left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha+1} - \frac{1}{2(\alpha+2)} \left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha+2}. \end{aligned}$$

*İspat.* (3.6) de power-mean eşitsizliğini uygulanırsa

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{8} \left[ \omega(\kappa_1) + 3\omega\left(\frac{2\kappa_1 + \kappa_2}{3}\right) + 3\omega\left(\frac{\kappa_1 + 2\kappa_2}{3}\right) + \omega(\kappa_2) \right] \right. \\ & \quad \left. - \frac{2^{\alpha-1} \Gamma(\alpha+1)}{(\kappa_2 - \kappa_1)^\alpha} \left[ \mathcal{J}_{\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}-}^\alpha \omega(\kappa_1) + \mathcal{J}_{\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}+}^\alpha \omega(\kappa_2) \right] \right| \\ & \leq \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{4} \left\{ \left( \int_0^{\frac{2}{3}} \left| \eta^\alpha - \frac{1}{4} \right| d\eta \right)^{1-\frac{1}{q}} \right. \\ & \quad \times \left. \left( \int_0^{\frac{2}{3}} \left| \eta^\alpha - \frac{1}{4} \right| \left| \omega' \left( \frac{\eta}{2} \kappa_2 + \frac{2-\eta}{2} \kappa_1 \right) \right|^q d\eta \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ & \quad + \left. \left( \int_0^{\frac{2}{3}} \left| \eta^\alpha - \frac{1}{4} \right| d\eta \right)^{1-\frac{1}{q}} \right. \\ & \quad \times \left. \left( \int_0^{\frac{2}{3}} \left| \eta^\alpha - \frac{1}{4} \right| \left| \omega' \left( \frac{\eta}{2} \kappa_1 + \frac{2-\eta}{2} \kappa_2 \right) \right|^q d\eta \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ & \quad + \left. \left( \int_{\frac{2}{3}}^1 |\eta^\alpha - 1| d\eta \right)^{1-\frac{1}{q}} \right. \\ & \quad \times \left. \left( \int_{\frac{2}{3}}^1 |\eta^\alpha - 1| \left| \omega' \left( \frac{\eta}{2} \kappa_2 + \frac{2-\eta}{2} \kappa_1 \right) \right|^q d\eta \right)^{\frac{1}{q}} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left( \int_{\frac{2}{3}}^1 |\eta^\alpha - 1| d\eta \right)^{1-\frac{1}{q}} \\
& \times \left( \int_{\frac{2}{3}}^1 |\eta^\alpha - 1| \left| \omega' \left( \frac{\eta}{2} \kappa_1 + \frac{2-\eta}{2} \kappa_2 \right) \right|^q d\eta \right)^{\frac{1}{q}} \Bigg\}
\end{aligned}$$

bulunur.  $|\omega'|^q$  fonksiyonu konveks fonksiyon olduğundan

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{8} \left[ \omega(\kappa_1) + 3\omega\left(\frac{2\kappa_1 + \kappa_2}{3}\right) + 3\omega\left(\frac{\kappa_1 + 2\kappa_2}{3}\right) + \omega(\kappa_2) \right] \right. \\
& \left. - \frac{2^{\alpha-1} \Gamma(\alpha+1)}{(\kappa_2 - \kappa_1)^\alpha} \left[ \mathcal{J}_{\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}-}^\alpha \omega(\kappa_1) + \mathcal{J}_{\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}+}^\alpha \omega(\kappa_2) \right] \right| \\
& \leq \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{4} \left\{ \left( \int_0^{\frac{2}{3}} \left| \eta^\alpha - \frac{1}{4} \right| d\eta \right)^{1-\frac{1}{q}} \right. \\
& \times \left. \left( \int_0^{\frac{2}{3}} \left| \eta^\alpha - \frac{1}{4} \right| \left[ \frac{\eta}{2} |\omega'(\kappa_2)|^q + \frac{2-\eta}{2} |\omega'(\kappa_1)|^q \right] d\eta \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& + \left. \left( \int_0^{\frac{2}{3}} \left| \eta^\alpha - \frac{1}{4} \right| d\eta \right)^{1-\frac{1}{q}} \right. \\
& \times \left. \left( \int_0^{\frac{2}{3}} \left| \eta^\alpha - \frac{1}{4} \right| \left[ \frac{\eta}{2} |\omega'(\kappa_1)|^q + \frac{2-\eta}{2} |\omega'(\kappa_2)|^q \right] d\eta \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& + \left. \left( \int_{\frac{2}{3}}^1 (1 - \eta^\alpha) d\eta \right)^{1-\frac{1}{q}} \right. \\
& \times \left. \left( \int_{\frac{2}{3}}^1 |\eta^\alpha - 1| \left[ \frac{\eta}{2} |\omega'(\kappa_2)|^q + \frac{2-\eta}{2} |\omega'(\kappa_1)|^q \right] d\eta \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& + \left. \left( \int_{\frac{2}{3}}^1 (1 - \eta^\alpha) d\eta \right)^{1-\frac{1}{q}} \right\}
\end{aligned}$$

$$\times \left( \int_{\frac{2}{3}}^1 |\eta^\alpha - 1| \left[ \frac{\eta}{2} |\omega'(\kappa_1)|^q + \frac{2-\eta}{2} |\omega'(\kappa_2)|^q \right] d\eta \right)^{\frac{1}{q}}$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanır.

□



#### 4. RIEMANN-LIOUVILLE KESİRLİ İNTEGRALLERİ İÇİN İKİNCİ TİP NEWTON EŞİTSİZLİKLERİ

Bu bölümde öncelikle bir eşitlik sunulur. Bu eşitlikten yararlanılarak Hezenci ve ark. tarafından elde edilen ikinci tip Riemann-Liouville kesirli integrallerini içeren Newton tipli eşitsizlikler verilir [23].

**Lemma 4.1.**  $\omega : [\kappa_1, \kappa_2] \rightarrow \mathbb{R}$ , fonksiyonu  $(\kappa_1, \kappa_2)$  aralığında türevlenebilir olsun ve  $\omega' \in L_1[\kappa_1, \kappa_2]$  olacak şekilde sürekli bir fonksiyon ise

$$\begin{aligned} & \frac{1}{8} \left[ \omega(\kappa_1) + 3\omega\left(\frac{2\kappa_1 + \kappa_2}{3}\right) + 3\omega\left(\frac{\kappa_1 + 2\kappa_2}{3}\right) + \omega(\kappa_2) \right] \\ & - \frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(\kappa_2 - \kappa_1)^\alpha} \left[ \mathcal{J}_{\kappa_1+}^\alpha \omega\left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}\right) + \mathcal{J}_{\kappa_2-}^\alpha \omega\left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}\right) \right] \\ & = \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{4} [\Lambda_1 + \Lambda_2]. \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Burada

$$\left\{ \begin{array}{l} \Lambda_1 \\ = \int_0^{\frac{1}{3}} \eta^\alpha \left[ \omega'\left(\frac{1+\eta}{2}\kappa_2 + \frac{1-\eta}{2}\kappa_1\right) - \omega'\left(\frac{1+\eta}{2}\kappa_1 + \frac{1-\eta}{2}\kappa_2\right) \right] d\eta, \\ \Lambda_2 \\ = \int_{\frac{1}{3}}^1 (\eta^\alpha - \frac{3}{4}) \left[ \omega'\left(\frac{1+\eta}{2}\kappa_2 + \frac{1-\eta}{2}\kappa_1\right) - \omega'\left(\frac{1+\eta}{2}\kappa_1 + \frac{1-\eta}{2}\kappa_2\right) \right] d\eta \end{array} \right.$$

şeklindedir.

*İspat.* Kısmi integrasyon yardımıyla

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= \int_0^{\frac{1}{3}} \eta^\alpha \\ & \times \left[ \omega'\left(\frac{1+\eta}{2}\kappa_2 + \frac{1-\eta}{2}\kappa_1\right) - \omega'\left(\frac{1+\eta}{2}\kappa_1 + \frac{1-\eta}{2}\kappa_2\right) \right] d\eta \end{aligned} \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{\kappa_2 - \kappa_1} \eta^\alpha \\
&\times \left[ \omega \left( \frac{1+\eta}{2} \kappa_2 + \frac{1-\eta}{2} \kappa_1 \right) + \omega \left( \frac{1+\eta}{2} \kappa_1 + \frac{1-\eta}{2} \kappa_2 \right) \right] \Big|_0^{\frac{1}{3}} \\
&- \frac{2\alpha}{\kappa_2 - \kappa_1} \int_0^{\frac{1}{3}} \eta^{\alpha-1} \\
&\times \left[ \omega \left( \frac{1+\eta}{2} \kappa_2 + \frac{1-\eta}{2} \kappa_1 \right) + \omega \left( \frac{1+\eta}{2} \kappa_1 + \frac{1-\eta}{2} \kappa_2 \right) \right] d\eta \\
&= \frac{2}{\kappa_2 - \kappa_1} \left( \frac{1}{3} \right)^\alpha \left[ \omega \left( \frac{\kappa_1 + 2\kappa_2}{3} \right) + \omega \left( \frac{2\kappa_1 + \kappa_2}{3} \right) \right] \\
&- \frac{2\alpha}{\kappa_2 - \kappa_1} \int_0^{\frac{1}{3}} \eta^{\alpha-1} \\
&\times \left[ \omega \left( \frac{1+\eta}{2} \kappa_2 + \frac{1-\eta}{2} \kappa_1 \right) + \omega \left( \frac{1+\eta}{2} \kappa_1 + \frac{1-\eta}{2} \kappa_2 \right) \right] d\eta
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
\Lambda_2 &= \int_{\frac{1}{3}}^1 \left( \eta^\alpha - \frac{3}{4} \right) \\
&\times \left[ \omega' \left( \frac{1+\eta}{2} \kappa_2 + \frac{1-\eta}{2} \kappa_1 \right) - \omega' \left( \frac{1+\eta}{2} \kappa_1 + \frac{1-\eta}{2} \kappa_2 \right) \right] d\eta \\
&= \frac{1}{2(\kappa_2 - \kappa_1)} [\omega(\kappa_1) + \omega(\kappa_2)] - \frac{2}{\kappa_2 - \kappa_1} \left( \left( \frac{1}{3} \right)^\alpha - \frac{3}{4} \right) \\
&\times \left[ \omega \left( \frac{\kappa_1 + 2\kappa_2}{3} \right) + \omega \left( \frac{2\kappa_1 + \kappa_2}{3} \right) \right] \\
&- \frac{2\alpha}{\kappa_2 - \kappa_1} \int_{\frac{1}{3}}^1 \eta^{\alpha-1} \\
&\times \left[ \omega \left( \frac{1+\eta}{2} \kappa_2 + \frac{1-\eta}{2} \kappa_1 \right) + \omega \left( \frac{1+\eta}{2} \kappa_1 + \frac{1-\eta}{2} \kappa_2 \right) \right] d\eta
\end{aligned} \tag{4.2}$$

eşitliğine ulaşılır. (4.1) ve (4.2) kullanılarak

$$\begin{aligned}
\Lambda_1 + \Lambda_2 & \\
&= \frac{1}{2(\kappa_2 - \kappa_1)} \\
&\times \left[ \omega(\kappa_1) + 3\omega \left( \frac{2\kappa_1 + \kappa_2}{3} \right) + 3\omega \left( \frac{\kappa_1 + 2\kappa_2}{3} \right) + \omega(\kappa_2) \right]
\end{aligned} \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{2\alpha}{\kappa_2 - \kappa_1} \int_0^1 \eta^{\alpha-1} \\
& \times \left[ \omega \left( \frac{1+\eta}{2} \kappa_2 + \frac{1-\eta}{2} \kappa_1 \right) + \omega \left( \frac{1+\eta}{2} \kappa_1 + \frac{1-\eta}{2} \kappa_2 \right) \right] d\eta
\end{aligned}$$

eşitliği bulunur.  $\eta \in [0, 1]$  için  $\varkappa = \frac{1+\eta}{2} \kappa_2 + \frac{1-\eta}{2} \kappa_1$  ve  $y = \frac{1+\eta}{2} \kappa_1 + \frac{1-\eta}{2} \kappa_2$  değişken değişimi kullanılarak (4.3) eşitliği

$$\begin{aligned}
& \Lambda_1 + \Lambda_2 \tag{4.4} \\
& = \frac{1}{2(\kappa_2 - \kappa_1)} \left[ \omega(\kappa_1) + 3\omega\left(\frac{2\kappa_1 + \kappa_2}{3}\right) + 3\omega\left(\frac{\kappa_1 + 2\kappa_2}{3}\right) + \omega(\kappa_2) \right] \\
& - \frac{2^{\alpha+1} \Gamma(\alpha+1)}{(\kappa_2 - \kappa_1)^{\alpha+1}} \left[ \mathcal{J}_{\kappa_1+}^{\alpha} \omega\left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}\right) + \mathcal{J}_{\kappa_2-}^{\alpha} \omega\left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}\right) \right]
\end{aligned}$$

biçiminde yazılabilir. (4.4) denkleminin her iki taraf  $\frac{\kappa_2 - \kappa_1}{4}$  ile çarpılarak Lemma 4.1 ifadesinin ispatı tamamlanmış olur.  $\square$

**Teorem 4.2.** Lemma 4.1 ifadesinin şartlarını geçerli olsun.  $|\omega'|$  fonksiyonun  $[\kappa_1, \kappa_2]$  üzerinde konveks olduğu varsayalım. Bu durumda

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{8} \left[ \omega(\kappa_1) + 3\omega\left(\frac{2\kappa_1 + \kappa_2}{3}\right) + 3\omega\left(\frac{\kappa_1 + 2\kappa_2}{3}\right) + \omega(\kappa_2) \right] \right. \\
& \left. - \frac{2^{\alpha-1} \Gamma(\alpha+1)}{(\kappa_2 - \kappa_1)^{\alpha}} \left[ \mathcal{J}_{\kappa_1+}^{\alpha} \omega\left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}\right) + \mathcal{J}_{\kappa_2-}^{\alpha} \omega\left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}\right) \right] \right| \\
& \leq \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{4} (\Omega_1(\alpha) + \Omega_2(\alpha)) [|\omega'(\kappa_1)| + |\omega'(\kappa_2)|]
\end{aligned} \tag{4.5}$$

kesirli Newton tipli eşitsizliği elde edilir. Burada,

$$\Omega_1(\alpha) = \int_0^{\frac{1}{3}} \eta^{\alpha} d\eta = \frac{1}{\alpha+1} \left(\frac{1}{3}\right)^{\alpha+1},$$

ve

$$\begin{aligned}
& \Omega_2(\alpha) \\
& = \int_{\frac{1}{3}}^1 \left| \eta^{\alpha} - \frac{3}{4} \right| d\eta
\end{aligned}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\alpha+1} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{\alpha+1}\right) - \frac{1}{2}, & 0 < \alpha \leq \frac{\ln(\frac{3}{4})}{\ln(\frac{1}{3})}, \\ \frac{1}{\alpha+1} \left[2\alpha \left(\frac{3}{4}\right)^{1+\frac{1}{\alpha}} + \left(\frac{1}{3}\right)^{\alpha+1} + 1\right] - 1, & \frac{\ln(\frac{3}{4})}{\ln(\frac{1}{3})} < \alpha \end{cases}$$

şeklindedir.

*İspat.* Lemma 4.1 ifadesinin mutlak değeri kullanılarak

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{8} \left[ \omega(\kappa_1) + 3\omega\left(\frac{2\kappa_1 + \kappa_2}{3}\right) + 3\omega\left(\frac{\kappa_1 + 2\kappa_2}{3}\right) + \omega(\kappa_2) \right] \right. \\ & \left. - \frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(\kappa_2 - \kappa_1)^\alpha} \left[ \mathcal{J}_{\kappa_1+}^\alpha \omega\left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}\right) + \mathcal{J}_{\kappa_2-}^\alpha \omega\left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}\right) \right] \right| \\ & \leq \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{4} \left\{ \int_0^{\frac{1}{3}} |\eta^\alpha| \right. \\ & \times \left[ \left| \omega'\left(\frac{1+\eta}{2}\kappa_2 + \frac{1-\eta}{2}\kappa_1\right) \right| + \left| \omega'\left(\frac{1+\eta}{2}\kappa_1 + \frac{1-\eta}{2}\kappa_2\right) \right| \right] d\eta \\ & + \int_{\frac{1}{3}}^1 \left| \eta^\alpha - \frac{3}{4} \right| \\ & \times \left[ \left| \omega'\left(\frac{1+\eta}{2}\kappa_2 + \frac{1-\eta}{2}\kappa_1\right) \right| + \left| \omega'\left(\frac{1+\eta}{2}\kappa_1 + \frac{1-\eta}{2}\kappa_2\right) \right| \right] d\eta \left. \right\} \end{aligned} \quad (4.6)$$

eşitsizliğine ulaşılır.  $|\omega'|$  fonksiyonu konveks olduğundan

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{8} \left[ \omega(\kappa_1) + 3\omega\left(\frac{2\kappa_1 + \kappa_2}{3}\right) + 3\omega\left(\frac{\kappa_1 + 2\kappa_2}{3}\right) + \omega(\kappa_2) \right] \right. \\ & \left. - \frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(\kappa_2 - \kappa_1)^\alpha} \left[ \mathcal{J}_{\kappa_1+}^\alpha \omega\left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}\right) + \mathcal{J}_{\kappa_2-}^\alpha \omega\left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}\right) \right] \right| \\ & \leq \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{4} \left\{ \int_0^{\frac{1}{3}} \eta^\alpha \left[ \left(\frac{1+\eta}{2}\right) |\omega'(\kappa_2)| + \left(\frac{1-\eta}{2}\right) |\omega'(\kappa_1)| \right. \right. \\ & \left. \left. + \left(\frac{1+\eta}{2}\right) |\omega'(\kappa_1)| + \left(\frac{1-\eta}{2}\right) |\omega'(\kappa_2)| \right] d\eta \right. \\ & \left. + \int_{\frac{1}{3}}^1 \left| \eta^\alpha - \frac{3}{4} \right| \left[ \left(\frac{1+\eta}{2}\right) |\omega'(\kappa_2)| + \left(\frac{1-\eta}{2}\right) |\omega'(\kappa_1)| \right. \right. \\ & \left. \left. + \left(\frac{1+\eta}{2}\right) |\omega'(\kappa_1)| + \left(\frac{1-\eta}{2}\right) |\omega'(\kappa_2)| \right] d\eta \right\} \\ & = \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{4} (\Omega_1(\alpha) + \Omega_2(\alpha)) [|\omega'(\kappa_1)| + |\omega'(\kappa_2)|] \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu da Teorem 4.2 ifadesinin ispatını tamamlar.  $\square$

**Sonuç 4.3.** Teorem 4.2 ifadesinde  $\alpha = 1$  alınırsa

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{8} \left[ \omega(\kappa_1) + 3\omega\left(\frac{2\kappa_1 + \kappa_2}{3}\right) + 3\omega\left(\frac{\kappa_1 + 2\kappa_2}{3}\right) + \omega(\kappa_2) \right] \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{\kappa_2 - \kappa_1} \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} \omega(\eta) d\eta \right| \\ & \leq \frac{25(\kappa_2 - \kappa_1)}{576} [|\omega'(\kappa_1)| + |\omega'(\kappa_2)|] \end{aligned}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Bu eşitsizlik Sitthiwiratham ve ark. [5] tarafından elde edilen eşitsizliktir.

**Teorem 4.4.** Lemma 4.1 ifadesinin koşulları geçerli olsun.  $|\omega'|^q, q > 1$  fonksiyonu  $[\kappa_1, \kappa_2]$  üzerinde konveks olsun. Bu durumda,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  olmak üzere

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{8} \left[ \omega(\kappa_1) + 3\omega\left(\frac{2\kappa_1 + \kappa_2}{3}\right) + 3\omega\left(\frac{\kappa_1 + 2\kappa_2}{3}\right) + \omega(\kappa_2) \right] \right. \\ & \quad \left. - \frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(\kappa_2 - \kappa_1)^\alpha} \left[ \mathcal{J}_{\kappa_1^+}^\alpha \omega\left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}\right) + \mathcal{J}_{\kappa_2^-}^\alpha \omega\left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}\right) \right] \right| \\ & \leq \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{4} \left\{ \left( \frac{1}{(\alpha p + 1)} \left(\frac{1}{3}\right)^{\alpha p + 1} \right)^{\frac{1}{p}} \right. \\ & \quad \times \left[ \left( \frac{7|\omega'(\kappa_2)|^q + 5|\omega'(\kappa_1)|^q}{36} \right)^{\frac{1}{q}} + \left( \frac{7|\omega'(\kappa_1)|^q + 5|\omega'(\kappa_2)|^q}{36} \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\ & \quad + \left( \int_{\frac{1}{3}}^1 \left| \eta^\alpha - \frac{3}{4} \right|^p d\eta \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \quad \times \left[ \left( \frac{5|\omega'(\kappa_2)|^q + |\omega'(\kappa_1)|^q}{9} \right)^{\frac{1}{q}} + \left( \frac{5|\omega'(\kappa_1)|^q + |\omega'(\kappa_2)|^q}{9} \right)^{\frac{1}{q}} \right] \left. \right\} \end{aligned} \quad (4.7)$$

şeklindeki Newton tipli eşitsizlik elde edilir.

*İspat.* (4.6) ifadesinde Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{8} \left[ \omega(\kappa_1) + 3\omega\left(\frac{2\kappa_1 + \kappa_2}{3}\right) + 3\omega\left(\frac{\kappa_1 + 2\kappa_2}{3}\right) + \omega(\kappa_2) \right] \right. \\ & \quad \left. - \frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(\kappa_2 - \kappa_1)^\alpha} \left[ \mathcal{J}_{\kappa_1^+}^\alpha \omega\left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}\right) + \mathcal{J}_{\kappa_2^-}^\alpha \omega\left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}\right) \right] \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{4} \left\{ \left( \int_0^{\frac{1}{3}} |\eta^\alpha|^p d\eta \right)^{\frac{1}{p}} \right. \\
&\quad \times \left( \int_0^{\frac{1}{3}} \left| \omega' \left( \frac{1+\eta}{2} \kappa_2 + \frac{1-\eta}{2} \kappa_1 \right) \right|^q d\eta \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad + \left( \int_0^{\frac{1}{3}} |\eta^\alpha|^p d\eta \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad \times \left( \int_0^{\frac{1}{3}} \left| \omega' \left( \frac{1+\eta}{2} \kappa_1 + \frac{1-\eta}{2} \kappa_2 \right) \right|^q d\eta \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad + \left( \int_{\frac{1}{3}}^1 \left| \eta^\alpha - \frac{3}{4} \right|^p d\eta \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad \times \left( \int_{\frac{1}{3}}^1 \left| \omega' \left( \frac{1+\eta}{2} \kappa_2 + \frac{1-\eta}{2} \kappa_1 \right) \right|^q d\eta \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad + \left( \int_{\frac{1}{3}}^1 \left| \eta^\alpha - \frac{3}{4} \right|^p d\eta \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad \times \left. \left( \int_{\frac{1}{3}}^1 \left| \omega' \left( \frac{1+\eta}{2} \kappa_1 + \frac{1-\eta}{2} \kappa_2 \right) \right|^q d\eta \right)^{\frac{1}{q}} \right\}
\end{aligned}$$

biçiminde yazılır.  $|\omega'|^q$  fonksiyonunun konveksliğinden yararlanılarak

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{1}{8} \left[ \omega(\kappa_1) + 3\omega\left(\frac{2\kappa_1 + \kappa_2}{3}\right) + 3\omega\left(\frac{\kappa_1 + 2\kappa_2}{3}\right) + \omega(\kappa_2) \right] \right. \\
&\quad \left. - \frac{2^{\alpha-1} \Gamma(\alpha+1)}{(\kappa_2 - \kappa_1)^\alpha} \left[ \mathcal{J}_{\kappa_1+}^\alpha \omega\left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}\right) + \mathcal{J}_{\kappa_2-}^\alpha \omega\left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}\right) \right] \right| \\
&\leq \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{4} \left\{ \left( \int_0^{\frac{1}{3}} \eta^{\alpha p} d\eta \right)^{\frac{1}{p}} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left( \int_0^{\frac{1}{3}} \left( \frac{1+\eta}{2} |\omega'(\kappa_2)|^q + \frac{1-\eta}{2} |\omega'(\kappa_1)|^q \right) d\eta \right)^{\frac{1}{q}} \\
& + \left( \int_0^{\frac{1}{3}} \eta^{\alpha p} d\eta \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \times \left( \int_0^{\frac{1}{3}} \left( \frac{1+\eta}{2} |\omega'(\kappa_1)|^q + \frac{1-\eta}{2} |\omega'(\kappa_2)|^q \right) d\eta \right)^{\frac{1}{q}} \\
& + \left( \int_{\frac{1}{3}}^1 \left| \eta^\alpha - \frac{3}{4} \right|^p d\eta \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \times \left( \int_{\frac{1}{3}}^1 \left( \frac{1+\eta}{2} |\omega'(\kappa_2)|^q + \frac{1-\eta}{2} |\omega'(\kappa_1)|^q \right) d\eta \right)^{\frac{1}{q}} \\
& + \left( \int_{\frac{1}{3}}^1 \left| \eta^\alpha - \frac{3}{4} \right|^p d\eta \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \times \left( \int_{\frac{1}{3}}^1 \left( \frac{1+\eta}{2} |\omega'(\kappa_1)|^q + \frac{1-\eta}{2} |\omega'(\kappa_2)|^q \right) d\eta \right)^{\frac{1}{q}} \Bigg\} \\
& = \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{4} \left\{ \left( \frac{1}{(\alpha p + 1)} \left( \frac{1}{3} \right)^{\alpha p + 1} \right)^{\frac{1}{p}} \right. \\
& \times \left[ \left( \frac{7|\omega'(\kappa_2)|^q + 5|\omega'(\kappa_1)|^q}{36} \right)^{\frac{1}{q}} + \left( \frac{7|\omega'(\kappa_1)|^q + 5|\omega'(\kappa_2)|^q}{36} \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\
& + \left( \int_{\frac{1}{3}}^1 \left| \eta^\alpha - \frac{3}{4} \right|^p d\eta \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \times \left[ \left( \frac{5|\omega'(\kappa_2)|^q + |\omega'(\kappa_1)|^q}{9} \right)^{\frac{1}{q}} + \left( \frac{5|\omega'(\kappa_1)|^q + |\omega'(\kappa_2)|^q}{9} \right)^{\frac{1}{q}} \right] \Bigg\},
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.  $\square$

**Sonuç 4.5.** Teorem 4.4 ifadesinde  $\alpha = 1$  alınır, (4.7) eşitsizliği

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{8} \left[ \omega(\kappa_1) + 3\omega\left(\frac{2\kappa_1 + \kappa_2}{3}\right) + 3\omega\left(\frac{\kappa_1 + 2\kappa_2}{3}\right) + \omega(\kappa_2) \right] \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{\kappa_2 - \kappa_1} \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} \omega(\eta) d\eta \right| \\
& \leq \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{4} \left\{ \left( \frac{1}{p+1} \left[ \left(\frac{1}{4}\right)^{p+1} + \left(\frac{5}{12}\right)^{p+1} \right] \right)^{\frac{1}{p}} \right. \\
& \quad \times \left[ \left( \frac{5|\omega'(\kappa_2)|^q + |\omega'(\kappa_1)|^q}{9} \right)^{\frac{1}{q}} + \left( \frac{5|\omega'(\kappa_1)|^q + |\omega'(\kappa_2)|^q}{9} \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\
& \quad + \left( \frac{1}{p+1} \left(\frac{1}{3}\right)^{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \quad \left. \times \left[ \left( \frac{7|\omega'(\kappa_2)|^q + 5|\omega'(\kappa_1)|^q}{36} \right)^{\frac{1}{q}} + \left( \frac{7|\omega'(\kappa_1)|^q + 5|\omega'(\kappa_2)|^q}{36} \right)^{\frac{1}{q}} \right] \right\}
\end{aligned}$$

eşitsizliğine dönüşür. Burada  $q > 1$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  şeklindedir.

**Teorem 4.6.** Lemma 4.1 varsayımları geçerli olmak üzere ve  $q \geq 1$  için  $|\omega'|^q$  fonksiyonu  $[\kappa_1, \kappa_2]$  üzerinde konveks fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{8} \left[ \omega(\kappa_1) + 3\omega\left(\frac{2\kappa_1 + \kappa_2}{3}\right) + 3\omega\left(\frac{\kappa_1 + 2\kappa_2}{3}\right) + \omega(\kappa_2) \right] \right. \\
& \quad \left. - \frac{2^{\alpha-1} \Gamma(\alpha+1)}{(\kappa_2 - \kappa_1)^\alpha} \left[ \mathcal{J}_{\kappa_1^+}^\alpha \omega\left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}\right) + \mathcal{J}_{\kappa_2^-}^\alpha \omega\left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}\right) \right] \right| \\
& \leq \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{4} \left\{ (\Omega_1(\alpha))^{1-\frac{1}{q}} \left[ [\Omega_3(\alpha) |\omega'(\kappa_2)|^q + \Omega_4(\alpha) |\omega'(\kappa_1)|^q]^{\frac{1}{q}} \right. \right. \\
& \quad \left. + [\Omega_3(\alpha) |\omega'(\kappa_1)|^q + \Omega_4(\alpha) |\omega'(\kappa_2)|^q]^{\frac{1}{q}} \right] \\
& \quad + (\Omega_2(\alpha))^{1-\frac{1}{q}} \left[ [\Omega_5(\alpha) |\omega'(\kappa_2)|^q + \Omega_6(\alpha) |\omega'(\kappa_1)|^q]^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. \left. + [\Omega_5(\alpha) |\omega'(\kappa_1)|^q + \Omega_6(\alpha) |\omega'(\kappa_2)|^q]^{\frac{1}{q}} \right] \right\}
\end{aligned} \tag{4.8}$$

şeklindeki Newton tipli eşitsizlik sağlanır. Burada  $\Omega_1(\alpha)$  ve  $\Omega_2(\alpha)$  Teorem 4.2 ifadesinde verilmiştir ve

$$\Omega_3(\alpha) = \int_0^{\frac{1}{3}} \left( \frac{1+\eta}{2} \right) \eta^\alpha d\eta = \frac{4\alpha+7}{6(\alpha+1)(\alpha+2)} \left( \frac{1}{3} \right)^{\alpha+1},$$

$$\Omega_4(\alpha) = \int_0^{\frac{1}{3}} \left( \frac{1-\eta}{2} \right) \eta^\alpha d\eta = \frac{2\alpha+5}{6(\alpha+1)(\alpha+2)} \left( \frac{1}{3} \right)^{\alpha+1},$$

$$\begin{aligned} & \Omega_5(\alpha) \\ &= \int_{\frac{1}{3}}^1 \left( \frac{1+\eta}{2} \right) \left| \eta^\alpha - \frac{3}{4} \right| d\eta \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2(\alpha+1)} \left( 1 - \left( \frac{1}{3} \right)^{\alpha+1} \right) + \frac{1}{2(\alpha+2)} \left( 1 - \left( \frac{1}{3} \right)^{\alpha+2} \right) - \frac{5}{12}, & 0 < \alpha \leq \frac{\ln(\frac{3}{4})}{\ln(\frac{1}{3})}, \\ \frac{1}{2(\alpha+1)} \left[ 2\alpha \left( \frac{3}{4} \right)^{1+\frac{1}{\alpha}} + \left( \frac{1}{3} \right)^{\alpha+1} + 1 \right] \\ \quad + \frac{1}{2(\alpha+2)} \left[ \alpha \left( \frac{3}{4} \right)^{1+\frac{2}{\alpha}} + \left( \frac{1}{3} \right)^{\alpha+2} + 1 \right] - \frac{17}{24}, & \frac{\ln(\frac{3}{4})}{\ln(\frac{1}{3})} < \alpha. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \Omega_6(\alpha) \\ &= \int_{\frac{1}{3}}^1 \left( \frac{1-\eta}{2} \right) \left| \eta^\alpha - \frac{3}{4} \right| d\eta \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2(\alpha+1)} \left( 1 - \left( \frac{1}{3} \right)^{\alpha+1} \right) - \frac{1}{2(\alpha+2)} \left( 1 - \left( \frac{1}{3} \right)^{\alpha+2} \right) - \frac{1}{12}, & 0 < \alpha \leq \frac{\ln(\frac{3}{4})}{\ln(\frac{1}{3})}, \\ \frac{1}{2(\alpha+1)} \left[ 2\alpha \left( \frac{3}{4} \right)^{1+\frac{1}{\alpha}} + \left( \frac{1}{3} \right)^{\alpha+1} + 1 \right] \\ \quad - \frac{1}{2(\alpha+2)} \left[ \alpha \left( \frac{3}{4} \right)^{1+\frac{2}{\alpha}} + \left( \frac{1}{3} \right)^{\alpha+2} + 1 \right] - \frac{7}{24}, & \frac{\ln(\frac{3}{4})}{\ln(\frac{1}{3})} < \alpha \end{cases} \end{aligned}$$

şeklindedir.

*İspat.* Power mean eşitsizliği, (4.6) ifadesine uygulanırsa

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{8} \left[ \omega(\kappa_1) + 3\omega\left(\frac{2\kappa_1+\kappa_2}{3}\right) + 3\omega\left(\frac{\kappa_1+2\kappa_2}{3}\right) + \omega(\kappa_2) \right] \right. \\ & \quad \left. - \frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(\kappa_2-\kappa_1)^\alpha} \left[ \mathcal{J}_{\kappa_1+}^\alpha \omega\left(\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}\right) + \mathcal{J}_{\kappa_2-}^\alpha \omega\left(\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}\right) \right] \right| \\ & \leq \frac{\kappa_2-\kappa_1}{4} \left\{ \left( \int_0^{\frac{1}{3}} |\eta^\alpha| d\eta \right)^{1-\frac{1}{q}} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left( \int_0^{\frac{1}{3}} |\eta^\alpha| \left| \omega' \left( \frac{1+\eta}{2} \kappa_2 + \frac{1-\eta}{2} \kappa_1 \right) \right|^q d\eta \right)^{\frac{1}{q}} \\
& + \left( \int_0^{\frac{1}{3}} |\eta^\alpha| d\eta \right)^{1-\frac{1}{q}} \\
& \times \left( \int_0^{\frac{1}{3}} |\eta^\alpha| \left| \omega' \left( \frac{1+\eta}{2} \kappa_1 + \frac{1-\eta}{2} \kappa_2 \right) \right|^q d\eta \right)^{\frac{1}{q}} \\
& + \left( \int_{\frac{1}{3}}^1 \left| \eta^\alpha - \frac{3}{4} \right| d\eta \right)^{1-\frac{1}{q}} \\
& \times \left( \int_{\frac{1}{3}}^1 \left| \eta^\alpha - \frac{3}{4} \right| \left| \omega' \left( \frac{1+\eta}{2} \kappa_2 + \frac{1-\eta}{2} \kappa_1 \right) \right|^q d\eta \right)^{\frac{1}{q}} \\
& + \left( \int_{\frac{1}{3}}^1 \left| \eta^\alpha - \frac{3}{4} \right| d\eta \right)^{1-\frac{1}{q}} \\
& \times \left. \left( \int_{\frac{1}{3}}^1 \left| \eta^\alpha - \frac{3}{4} \right| \left| \omega' \left( \frac{1+\eta}{2} \kappa_1 + \frac{1-\eta}{2} \kappa_2 \right) \right|^q d\eta \right)^{\frac{1}{q}} \right\}.
\end{aligned}$$

şeklindeki eşitsizliğe ulaşılır.  $|\omega'|^q$  fonksiyonunun konveksliği yardımıyla

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{8} \left[ \omega(\kappa_1) + 3\omega \left( \frac{2\kappa_1 + \kappa_2}{3} \right) + 3\omega \left( \frac{\kappa_1 + 2\kappa_2}{3} \right) + \omega(\kappa_2) \right] \right. \\
& \left. - \frac{2^{\alpha-1} \Gamma(\alpha+1)}{(\kappa_2 - \kappa_1)^\alpha} \left[ \mathcal{J}_{\kappa_1+}^\alpha \omega \left( \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} \right) + \mathcal{J}_{\kappa_2-}^\alpha \omega \left( \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} \right) \right] \right| \\
& \leq \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{4} \left\{ \left( \int_0^{\frac{1}{3}} \eta^\alpha d\eta \right)^{1-\frac{1}{q}} \right. \\
& \left. \times \left( \int_0^{\frac{1}{3}} \eta^\alpha \left[ \left( \frac{1+\eta}{2} \right) |\omega'(\kappa_2)|^q + \left( \frac{1-\eta}{2} \right) |\omega'(\kappa_1)|^q \right] d\eta \right)^{\frac{1}{q}} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left( \int_0^{\frac{1}{3}} \eta^\alpha d\eta \right)^{1-\frac{1}{q}} \\
& \times \left( \int_0^{\frac{1}{3}} \eta^\alpha \left[ \left( \frac{1+\eta}{2} \right) |\omega'(\kappa_1)|^q + \left( \frac{1-\eta}{2} \right) |\omega'(\kappa_2)|^q \right] d\eta \right)^{\frac{1}{q}} \\
& + \left( \int_{\frac{1}{3}}^1 \left| \eta^\alpha - \frac{3}{4} \right| d\eta \right)^{1-\frac{1}{q}} \\
& \times \left( \int_{\frac{1}{3}}^1 \left| \eta^\alpha - \frac{3}{4} \right| \left[ \left( \frac{1+\eta}{2} \right) |\omega'(\kappa_2)|^q + \left( \frac{1-\eta}{2} \right) |\omega'(\kappa_1)|^q \right] d\eta \right)^{\frac{1}{q}} \\
& + \left( \int_{\frac{1}{3}}^1 \left| \eta^\alpha - \frac{3}{4} \right| d\eta \right)^{1-\frac{1}{q}} \\
& \times \left( \int_{\frac{1}{3}}^1 \left| \eta^\alpha - \frac{3}{4} \right| \left[ \left( \frac{1+\eta}{2} \right) |\omega'(\kappa_1)|^q + \left( \frac{1-\eta}{2} \right) |\omega'(\kappa_2)|^q \right] d\eta \right)^{\frac{1}{q}} \Bigg\} \\
& = \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{4} \left\{ (\Omega_1(\alpha))^{1-\frac{1}{q}} \left[ [\Omega_3(\alpha) |\omega'(\kappa_2)|^q + \Omega_4(\alpha) |\omega'(\kappa_1)|^q]^{\frac{1}{q}} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + [\Omega_3(\alpha) |\omega'(\kappa_1)|^q + \Omega_4(\alpha) |\omega'(\kappa_2)|^q]^{\frac{1}{q}} \right] \right. \\
& \quad \left. + (\Omega_2(\alpha))^{1-\frac{1}{q}} \left[ [\Omega_5(\alpha) |\omega'(\kappa_2)|^q + \Omega_6(\alpha) |\omega'(\kappa_1)|^q]^{\frac{1}{q}} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + [\Omega_5(\alpha) |\omega'(\kappa_1)|^q + \Omega_6(\alpha) |\omega'(\kappa_2)|^q]^{\frac{1}{q}} \right] \right\}
\end{aligned}$$

eşitsizliği bulunur. Böylece Teorem 4.6 ifadesinin ispatı tamamlanmış olur.  $\square$

**Sonuç 4.7.** Eğer Teorem 4.6 ifadesinde  $\alpha = 1$  seçilirse,  $q > 1$  için

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{8} \left[ \omega(\kappa_1) + 3\omega\left(\frac{2\kappa_1 + \kappa_2}{3}\right) + 3\omega\left(\frac{\kappa_1 + 2\kappa_2}{3}\right) + \omega(\kappa_2) \right] - \frac{1}{\kappa_2 - \kappa_1} \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} \omega(\eta) d\eta \right| \\
& \leq \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{72} \\
& \times \left\{ \left[ \left( \frac{11|\omega'(\kappa_2)|^q + 7|\omega'(\kappa_1)|^q}{18} \right)^{\frac{1}{q}} + \left( \frac{11|\omega'(\kappa_1)|^q + 7|\omega'(\kappa_2)|^q}{18} \right)^{\frac{1}{q}} \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{17}{8}\right)^{1-\frac{1}{q}} \\
& \times \left[ \left(\frac{973|\omega'(\kappa_2)|^q + 251|\omega'(\kappa_1)|^q}{576}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{973|\omega'(\kappa_1)|^q + 251|\omega'(\kappa_2)|^q}{576}\right)^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned}$$

eşitsizliğine ulaşılır.



## 5. $s$ -KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN BİRİNCİ TİP NEWTON EŞİTSİZLİKLERİ

Bu bölümde Bölüm 3'te verilen Lemma 3.1 kullanılarak yeni sonuçlar verilecektir.

**Teorem 5.1.** Lemma 3.1 nin koşulları sağlansın. Eğer  $|\omega'|$  fonksiyon  $[\kappa_1, \kappa_2]$  aralığında  $s$ -konveks ise, bu durumda aşağıdaki kesirli Newton tipli eşitsizliği vardır:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{8} \left[ \omega(\kappa_1) + 3\omega\left(\frac{2\kappa_1 + \kappa_2}{3}\right) + 3\omega\left(\frac{\kappa_1 + 2\kappa_2}{3}\right) + \omega(\kappa_2) \right] \right. \\ & \left. - \frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(\kappa_2 - \kappa_1)^\alpha} \left[ \mathcal{J}_{\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}-}^\alpha \omega(\kappa_1) + \mathcal{J}_{\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}+}^\alpha \omega(\kappa_2) \right] \right| \\ & \leq \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{4} (\Upsilon_1(\alpha, s) + \Upsilon_2(\alpha, s) + \Upsilon_3(\alpha, s) + \Upsilon_4(\alpha, s)) [|\omega'(\kappa_1)| + |\omega'(\kappa_2)|]. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Burada,

$$\begin{aligned} & \Upsilon_1(\alpha, s) \\ & = \int_0^{\frac{2}{3}} \left(\frac{\eta}{2}\right)^s \left| \eta^\alpha - \frac{1}{4} \right| d\eta \\ & = \begin{cases} \frac{1}{2^s} \left[ \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{s+1}{\alpha}} \frac{1}{2(s+1)} - \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{\alpha+s+1}{\alpha}} \frac{2}{\alpha+s+1} \right. \\ \quad \left. + \left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha+s+1} \frac{1}{\alpha+s+1} - \left(\frac{2}{3}\right)^{s+1} \frac{1}{4(s+1)} \right], & 0 < \alpha < \frac{\ln(\frac{1}{4})}{\ln(\frac{2}{3})}, \\ \frac{1}{2^s} \left[ \left(\frac{2}{3}\right)^{s+1} \left( \frac{1}{4(s+1)} - \left(\frac{2}{3}\right)^\alpha \frac{1}{\alpha+s+1} \right) \right], & \frac{\ln(\frac{1}{4})}{\ln(\frac{2}{3})} < \alpha \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Upsilon_2(\alpha, s) = \int_0^{\frac{2}{3}} \left(\frac{2-\eta}{2}\right)^s \left| \eta^\alpha - \frac{1}{4} \right| d\eta,$$

$$\begin{aligned} & \Upsilon_3(\alpha, s) \\ & = \int_{\frac{2}{3}}^1 \left(\frac{\eta}{2}\right)^s (1 - \eta^\alpha) d\eta \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2^s} \left[ \frac{1}{s+1} \left( 1 - \left( \frac{2}{3} \right)^{s+1} \right) - \frac{1}{\alpha+s+1} \left( 1 - \left( \frac{2}{3} \right)^{\alpha+s+1} \right) \right],$$

ve

$$\Upsilon_4(\alpha, s) = \int_{\frac{2}{3}}^1 \left( \frac{2-\eta}{2} \right)^s (1-\eta^\alpha) d\eta$$

olarak tanımlanır.

*İspat.* Lemma 3.1 ifadesindeki eşitliğin mutlak değeri alınırsa

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{8} \left[ \omega(\kappa_1) + 3\omega\left(\frac{2\kappa_1 + \kappa_2}{3}\right) + 3\omega\left(\frac{\kappa_1 + 2\kappa_2}{3}\right) + \omega(\kappa_2) \right] \right. \\ & \quad \left. - \frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(\kappa_2 - \kappa_1)^\alpha} \left[ \mathcal{J}_{\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}-}^\alpha \omega(\kappa_1) + \mathcal{J}_{\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}+}^\alpha \omega(\kappa_2) \right] \right| \\ & \leq \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{4} \\ & \quad \times \left\{ \int_0^{\frac{2}{3}} \left| \eta^\alpha - \frac{1}{4} \right| \right. \\ & \quad \times \left[ \left| \omega' \left( \frac{\eta}{2} \kappa_2 + \frac{2-\eta}{2} \kappa_1 \right) \right| + \left| \omega' \left( \frac{\eta}{2} \kappa_1 + \frac{2-\eta}{2} \kappa_2 \right) \right| \right] d\eta \\ & \quad + \int_{\frac{2}{3}}^1 |\eta^\alpha - 1| \left[ \left| \omega' \left( \frac{\eta}{2} \kappa_2 + \frac{2-\eta}{2} \kappa_1 \right) \right| \right. \\ & \quad \left. \left. + \left| \omega' \left( \frac{\eta}{2} \kappa_1 + \frac{2-\eta}{2} \kappa_2 \right) \right| \right] d\eta \right\} \end{aligned} \quad (5.2)$$

bulunur.  $|\omega'|$ 'nin  $s$ -konveksliği kullanılarak aşağıdakiler elde edilebilir:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{8} \left[ \omega(\kappa_1) + 3\omega\left(\frac{2\kappa_1 + \kappa_2}{3}\right) + 3\omega\left(\frac{\kappa_1 + 2\kappa_2}{3}\right) + \omega(\kappa_2) \right] \right. \\ & \quad \left. - \frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(\kappa_2 - \kappa_1)^\alpha} \left[ \mathcal{J}_{\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}-}^\alpha \omega(\kappa_1) + \mathcal{J}_{\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}+}^\alpha \omega(\kappa_2) \right] \right| \\ & \leq \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{4} \\ & \quad \times \left\{ \int_0^{\frac{2}{3}} \left| \eta^\alpha - \frac{1}{4} \right| \left[ \left( \frac{\eta}{2} \right)^s |\omega'(\kappa_2)| + \left( \frac{2-\eta}{2} \right)^s |\omega'(\kappa_1)| \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \left( \frac{\eta}{2} \right)^s |\omega'(\kappa_1)| + \left( \frac{2-\eta}{2} \right)^s |\omega'(\kappa_2)| \right] d\eta \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\frac{2}{3}}^1 (1 - \eta^\alpha) \left[ \left( \frac{\eta}{2} \right)^s |\omega'(\kappa_2)| + \left( \frac{2 - \eta}{2} \right)^s |\omega'(\kappa_1)| \right. \\
& \left. + \left( \frac{\eta}{2} \right)^s |\omega'(\kappa_1)| + \left( \frac{2 - \eta}{2} \right)^s |\omega'(\kappa_2)| d\eta \right] \\
& = \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{4} (\Upsilon_1(\alpha, s) + \Upsilon_2(\alpha, s) + \Upsilon_3(\alpha, s) + \Upsilon_4(\alpha, s)) \\
& \times [|\omega'(\kappa_1)| + |\omega'(\kappa_2)|].
\end{aligned}$$

Böylece ispat tamamlanır. □

**Sonuç 5.2.** Teorem 5.1 de  $s = 1$  seçilirse, bu durumda

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{8} \left[ \omega(\kappa_1) + 3\omega\left(\frac{2\kappa_1 + \kappa_2}{3}\right) + 3\omega\left(\frac{\kappa_1 + 2\kappa_2}{3}\right) + \omega(\kappa_2) \right] \right. \\
& \left. - \frac{2^{\alpha-1} \Gamma(\alpha+1)}{(\kappa_2 - \kappa_1)^\alpha} \left[ \mathcal{J}_{\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}-}^\alpha \omega(\kappa_1) + \mathcal{J}_{\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}+}^\alpha \omega(\kappa_2) \right] \right| \\
& \leq \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{4} (\Phi_1(\alpha) + \Phi_2(\alpha)) [|\omega'(\kappa_1)| + |\omega'(\kappa_2)|].
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Burada,

$$\begin{aligned}
& \Phi_1(\alpha) \\
& = \int_0^{\frac{2}{3}} \left| \eta^\alpha - \frac{1}{4} \right| d\eta \\
& = \begin{cases} \frac{2\alpha}{\alpha+1} \left(\frac{1}{4}\right)^{1+\frac{1}{\alpha}} + \frac{1}{\alpha+1} \left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha+1} - \frac{1}{6}, & 0 < \alpha < \frac{\ln(\frac{1}{4})}{\ln(\frac{2}{3})}, \\ \frac{1}{6} - \frac{1}{\alpha+1} \left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha+1}, & \frac{\ln(\frac{1}{4})}{\ln(\frac{2}{3})} < \alpha, \end{cases} \\
& \Phi_2(\alpha) \\
& = \int_{\frac{2}{3}}^1 (1 - \eta^\alpha) d\eta = \frac{1}{3} - \frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\alpha+1} \left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha+1}.
\end{aligned}$$

Bu eşitsizlik Hezenci ve Budak tarafından [22] de verilmiştir.

**Sonuç 5.3.** Teorem 5.1 ifadesinde  $\alpha = 1$  seçilirse aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\left| \frac{1}{8} \left[ \omega(\kappa_1) + 3\omega\left(\frac{2\kappa_1 + \kappa_2}{3}\right) + 3\omega\left(\frac{\kappa_1 + 2\kappa_2}{3}\right) + \omega(\kappa_2) \right] \right| \tag{5.4}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{\kappa_2 - \kappa_1} \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} \omega(\eta) d\eta \Big| \\
& \leq \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{4} (\Upsilon_1(1, s) + \Upsilon_2(1, s) + \Upsilon_3(1, s) + \Upsilon_4(1, s)) \\
& \times [|\omega'(\kappa_1)| + |\omega'(\kappa_2)|].
\end{aligned}$$

Burada,

$$\begin{aligned}
& \Upsilon_1(1, s) \\
& = \int_0^{\frac{2}{3}} \left(\frac{\eta}{2}\right)^s \left|\eta - \frac{1}{4}\right| d\eta \\
& = \frac{1}{2^s} \left[ \frac{1}{2^{2s+3}(s+1)(s+2)} \right] + \left(\frac{2}{3}\right)^{s+1} \left( \frac{5s+2}{12(s+1)(s+2)} \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \Upsilon_2(1, s) \\
& = \frac{s-6}{2(s+1)(s+2)} + \left(\frac{7}{8}\right)^{s+1} \frac{7}{(s+1)(s+2)} \\
& + \left(\frac{2}{3}\right)^{s+1} \frac{-5s-26}{6(s+1)(s+2)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \Upsilon_3(1, s) \\
& = \int_{\frac{2}{3}}^1 \left(\frac{\eta}{2}\right)^s (1-\eta) d\eta \\
& = \frac{1}{2^s} \left[ \frac{1}{s+1} \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{s+1}\right) - \frac{1}{s+2} \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{s+2}\right) \right]
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
& \Upsilon_4(1, s) \\
& = \int_{\frac{2}{3}}^1 \left(\frac{2-\eta}{2}\right)^s (1-\eta) d\eta \\
& = \frac{1}{2^s} \left[ \frac{1}{(s+1)(s+2)} + \frac{4^{s+2}}{3^{s+2}(s+2)} - \frac{4^{s+1}}{3^{s+1}(s+1)} \right].
\end{aligned}$$

**Sonuç 5.4.** Teorem 5.1 de  $\alpha = 1, s = 1$  seçerek, Sitthiwirattam ve ark. [5, Remark 3] tarafından ispatlanan aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{8} \left[ \omega(\kappa_1) + 3\omega\left(\frac{2\kappa_1 + \kappa_2}{3}\right) + 3\omega\left(\frac{\kappa_1 + 2\kappa_2}{3}\right) + \omega(\kappa_2) \right] \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{\kappa_2 - \kappa_1} \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} \omega(\eta) d\eta \right| \\ & \leq \frac{25(\kappa_2 - \kappa_1)}{576} [|\omega'(\kappa_1)| + |\omega'(\kappa_2)|]. \end{aligned}$$

**Teorem 5.5.** Lemma 3.1 koşullarının sağlandığını ve  $|\omega'|^q$  fonksiyonunun (burada  $q > 1$ )  $[\kappa_1, \kappa_2]$  aralığında  $s$ -konveks olduğu varsayalım. O halde aşağıdaki Newton tipli eşitsizlik geçerlidir:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{8} \left[ \omega(\kappa_1) + 3\omega\left(\frac{2\kappa_1 + \kappa_2}{3}\right) + 3\omega\left(\frac{\kappa_1 + 2\kappa_2}{3}\right) + \omega(\kappa_2) \right] \right. \\ & \quad \left. - \frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(\kappa_2 - \kappa_1)^\alpha} \left[ \mathcal{J}_{\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}-}^\alpha \omega(\kappa_1) + \mathcal{J}_{\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}+}^\alpha \omega(\kappa_2) \right] \right| \\ & \leq \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{4} \left\{ \left( \int_0^{\frac{2}{3}} \left| \eta^\alpha - \frac{1}{4} \right|^p d\eta \right)^{\frac{1}{p}} \right. \\ & \quad \times \left[ \left( \frac{1}{2^s(s+1)} \left( \frac{2}{3} \right)^{s+1} |\omega'(\kappa_2)|^q \right. \right. \\ & \quad + \frac{1}{2^s(s+1)} \left[ 2^{s+1} - \left( \frac{4}{3} \right)^{s+1} \right] |\omega'(\kappa_1)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ & \quad + \left( \frac{1}{2^s(s+1)} \left[ 2^{s+1} - \left( \frac{4}{3} \right)^{s+1} \right] |\omega'(\kappa_2)|^q \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{1}{2^s(s+1)} \left( \frac{2}{3} \right)^{s+1} |\omega'(\kappa_1)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\ & \quad + \left( \int_{\frac{2}{3}}^1 (1 - \eta^\alpha)^p d\eta \right)^{\frac{1}{p}} \left[ \frac{1}{2^s(s+1)} \left[ 1 - \left( \frac{2}{3} \right)^{s+1} \right] |\omega'(\kappa_2)|^q \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2^s(s+1)} \left[ \left( \frac{4}{3} \right)^{s+1} - 1 \right] |\omega'(\kappa_1)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right] + \\ & \quad \left[ \frac{1}{2^s(s+1)} \left[ 1 - \left( \frac{2}{3} \right)^{s+1} \right] |\omega'(\kappa_1)|^q \right. \end{aligned} \tag{5.5}$$

$$+ \frac{1}{2^s(s+1)} \left[ \left( \frac{4}{3} \right)^{s+1} - 1 \right] \left| \omega'(\kappa_2) \right|^q \Bigg]^{\frac{1}{q}} \Bigg\}.$$

Burada,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  dir.

*İspat.* (5.2) eşitsizliğinde Hölder eşitsizliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{8} \left[ \omega(\kappa_1) + 3\omega\left(\frac{2\kappa_1 + \kappa_2}{3}\right) + 3\omega\left(\frac{\kappa_1 + 2\kappa_2}{3}\right) + \omega(\kappa_2) \right] \right. \\ & \left. - \frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(\kappa_2 - \kappa_1)^\alpha} \left[ \mathcal{J}_{\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}-}^\alpha \omega(\kappa_1) + \mathcal{J}_{\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}+}^\alpha \omega(\kappa_2) \right] \right| \\ & \leq \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{4} \left\{ \left( \int_0^{\frac{2}{3}} \left| \eta^\alpha - \frac{1}{4} \right|^p d\eta \right)^{\frac{1}{p}} \right. \\ & \quad \times \left( \int_0^{\frac{2}{3}} \left| \omega' \left( \frac{\eta}{2} \kappa_2 + \frac{2-\eta}{2} \kappa_1 \right) \right|^q d\eta \right)^{\frac{1}{q}} \\ & \quad + \left( \int_0^{\frac{2}{3}} \left| \eta^\alpha - \frac{1}{4} \right|^p d\eta \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \quad \times \left( \int_0^{\frac{2}{3}} \left| \omega' \left( \frac{\eta}{2} \kappa_1 + \frac{2-\eta}{2} \kappa_2 \right) \right|^q d\eta \right)^{\frac{1}{q}} \\ & \quad + \left( \int_{\frac{2}{3}}^1 \left| \eta^\alpha - 1 \right|^p d\eta \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \quad \times \left( \int_{\frac{2}{3}}^1 \left| \omega' \left( \frac{\eta}{2} \kappa_2 + \frac{2-\eta}{2} \kappa_1 \right) \right|^q d\eta \right)^{\frac{1}{q}} \\ & \quad + \left( \int_{\frac{2}{3}}^1 \left| \eta^\alpha - 1 \right|^p d\eta \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \quad \times \left. \left( \int_{\frac{2}{3}}^1 \left| \omega' \left( \frac{\eta}{2} \kappa_1 + \frac{2-\eta}{2} \kappa_2 \right) \right|^q d\eta \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.  $|\omega'|^q$  fonksiyonunun  $s$ -konvekslik özellikleri göz önüne alındığında, aşağıdakiler kolayca bulunur:

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{8} \left[ \omega(\kappa_1) + 3\omega\left(\frac{2\kappa_1 + \kappa_2}{3}\right) + 3\omega\left(\frac{\kappa_1 + 2\kappa_2}{3}\right) + \omega(\kappa_2) \right] \right. \\
& \quad \left. - \frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(\kappa_2 - \kappa_1)^\alpha} \left[ \mathcal{J}_{\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}-}^\alpha \omega(\kappa_1) + \mathcal{J}_{\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}+}^\alpha \omega(\kappa_2) \right] \right| \\
& \leq \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{4} \left\{ \left( \int_0^{\frac{2}{3}} \left| \eta^\alpha - \frac{1}{4} \right|^p d\eta \right)^{\frac{1}{p}} \right. \\
& \quad \times \left( \int_0^{\frac{2}{3}} \left( \left( \frac{\eta}{2} \right)^s |\omega'(\kappa_2)|^q + \left( \frac{2-\eta}{2} \right)^s |\omega'(\kappa_1)|^q \right) d\eta \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \quad + \left( \int_0^{\frac{2}{3}} \left| \eta^\alpha - \frac{1}{4} \right|^p d\eta \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \quad \times \left( \int_0^{\frac{2}{3}} \left( \left( \frac{\eta}{2} \right)^s |\omega'(\kappa_1)|^q + \left( \frac{2-\eta}{2} \right)^s |\omega'(\kappa_2)|^q \right) d\eta \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \quad + \left( \int_{\frac{2}{3}}^1 (1 - \eta^\alpha)^p d\eta \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \quad \times \left( \int_{\frac{2}{3}}^1 \left( \left( \frac{\eta}{2} \right)^s |\omega'(\kappa_2)|^q + \left( \frac{2-\eta}{2} \right)^s |\omega'(\kappa_1)|^q \right) d\eta \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \quad + \left( \int_{\frac{2}{3}}^1 (1 - \eta^\alpha)^p d\eta \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \quad \times \left. \left( \int_{\frac{2}{3}}^1 \left( \left( \frac{\eta}{2} \right)^s |\omega'(\kappa_1)|^q + \left( \frac{2-\eta}{2} \right)^s |\omega'(\kappa_2)|^q \right) d\eta \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \\
& = \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{4} \left\{ \left( \int_0^{\frac{2}{3}} \left| \eta^\alpha - \frac{1}{4} \right|^p d\eta \right)^{\frac{1}{p}} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[ \left( \frac{1}{2^s(s+1)} \left( \frac{2}{3} \right)^{s+1} |\omega'(\kappa_2)|^q \right. \right. \\
& + \frac{1}{2^s(s+1)} \left[ 2^{s+1} - \left( \frac{4}{3} \right)^{s+1} \right] |\omega'(\kappa_1)|^q \Big)^{\frac{1}{q}} \\
& + \left( \frac{1}{2^s(s+1)} \left[ 2^{s+1} - \left( \frac{4}{3} \right)^{s+1} \right] |\omega'(\kappa_2)|^q \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{2^s(s+1)} \left( \frac{2}{3} \right)^{s+1} |\omega'(\kappa_1)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\
& + \left( \int_{\frac{2}{3}}^1 (1-\eta^\alpha)^p d\eta \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \times \left[ \frac{1}{2^s(s+1)} \left[ 1 - \left( \frac{2}{3} \right)^{s+1} \right] |\omega'(\kappa_2)|^q \right. \\
& + \frac{1}{2^s(s+1)} \left[ \left( \frac{4}{3} \right)^{s+1} - 1 \right] |\omega'(\kappa_1)|^q \Big)^{\frac{1}{q}} \\
& + \left[ \frac{1}{2^s(s+1)} \left[ 1 - \left( \frac{2}{3} \right)^{s+1} \right] |\omega'(\kappa_1)|^q \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{2^s(s+1)} \left[ \left( \frac{4}{3} \right)^{s+1} - 1 \right] |\omega'(\kappa_2)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right] \Big\}.
\end{aligned}$$

Bu da ispatı tamamlar. □

**Sonuç 5.6.** Teorem 5.5 de  $s = 1$  seçilirse, Hezenci ve Budak [22] tarafından sunulan aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{8} \left[ \omega(\kappa_1) + 3\omega\left(\frac{2\kappa_1 + \kappa_2}{3}\right) + 3\omega\left(\frac{\kappa_1 + 2\kappa_2}{3}\right) + \omega(\kappa_2) \right] \right. \\
& \left. - \frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(\kappa_2 - \kappa_1)^\alpha} \left[ \mathcal{J}_{\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}-}^\alpha \omega(\kappa_1) + \mathcal{J}_{\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}+}^\alpha \omega(\kappa_2) \right] \right| \\
& \leq \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{4} \left\{ \left( \int_0^{\frac{2}{3}} \left| \eta^\alpha - \frac{1}{4} \right|^p d\eta \right)^{\frac{1}{p}} \right. \\
& \left. \times \left[ \left( \frac{|\omega'(\kappa_2)|^q + 5|\omega'(\kappa_1)|^q}{9} \right)^{\frac{1}{q}} + \left( \frac{|\omega'(\kappa_1)|^q + 5|\omega'(\kappa_2)|^q}{9} \right)^{\frac{1}{q}} \right] \right\}
\end{aligned} \tag{5.6}$$

$$\begin{aligned}
& + \left( \int_{\frac{2}{3}}^1 (1 - \eta^\alpha)^p d\eta \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \times \left[ \left( \frac{5|\omega'(\kappa_2)|^q + 7|\omega'(\kappa_1)|^q}{36} \right)^{\frac{1}{q}} + \left( \frac{5|\omega'(\kappa_1)|^q + 7|\omega'(\kappa_2)|^q}{36} \right)^{\frac{1}{q}} \right] \Big\}.
\end{aligned}$$

**Sonuç 5.7.** Teorem 5.5’de  $\alpha = 1$  alınırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{8} \left[ \omega(\kappa_1) + 3\omega\left(\frac{2\kappa_1 + \kappa_2}{3}\right) + 3\omega\left(\frac{\kappa_1 + 2\kappa_2}{3}\right) + \omega(\kappa_2) \right] \right. \\
& \left. - \frac{1}{\kappa_2 - \kappa_1} \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} \omega(\eta) d\eta \right| \\
& \leq \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{4} \left\{ \left( \frac{1}{p+1} \left[ \left(\frac{1}{4}\right)^{p+1} + \left(\frac{5}{12}\right)^{p+1} \right] \right)^{\frac{1}{p}} \right. \\
& \times \left[ \left( \frac{1}{2^s(s+1)} \left(\frac{2}{3}\right)^{s+1} |\omega'(\kappa_2)|^q \right. \right. \\
& + \frac{1}{2^s(s+1)} \left[ 2^{s+1} - \left(\frac{4}{3}\right)^{s+1} \right] |\omega'(\kappa_1)|^q \Big)^{\frac{1}{q}} \\
& + \left( \frac{1}{2^s(s+1)} \left[ 2^{s+1} - \left(\frac{4}{3}\right)^{s+1} \right] |\omega'(\kappa_2)|^q \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{2^s(s+1)} \left(\frac{2}{3}\right)^{s+1} |\omega'(\kappa_1)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\
& + \left( \frac{1}{p+1} \left(\frac{1}{3}\right)^{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left[ \frac{1}{2^s(s+1)} \left[ 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{s+1} \right] |\omega'(\kappa_2)|^q \right. \\
& + \frac{1}{2^s(s+1)} \left[ \left(\frac{4}{3}\right)^{s+1} - 1 \right] |\omega'(\kappa_1)|^q \Big)^{\frac{1}{q}} \\
& + \left[ \frac{1}{2^s(s+1)} \left[ 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{s+1} \right] |\omega'(\kappa_1)|^q \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{2^s(s+1)} \left[ \left(\frac{4}{3}\right)^{s+1} - 1 \right] |\omega'(\kappa_2)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right] \Big\}.
\end{aligned} \tag{5.7}$$

**Sonuç 5.8.** Teorem 5.5 ifadesinde  $s = \alpha = 1$  seçilirse, Hezenci ve Budak [22] tarafından sunulan aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{8} \left[ \omega(\kappa_1) + 3\omega\left(\frac{2\kappa_1 + \kappa_2}{3}\right) + 3\omega\left(\frac{\kappa_1 + 2\kappa_2}{3}\right) + \omega(\kappa_2) \right] \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{\kappa_2 - \kappa_1} \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} \omega(\eta) d\eta \right| \\
& \leq \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{4} \left\{ \left( \frac{1}{p+1} \left[ \left(\frac{1}{4}\right)^{p+1} + \left(\frac{5}{12}\right)^{p+1} \right] \right)^{\frac{1}{p}} \right. \\
& \quad \times \left[ \left( \frac{|\omega'(\kappa_2)|^q + 5|\omega'(\kappa_1)|^q}{9} \right)^{\frac{1}{q}} + \left( \frac{|\omega'(\kappa_1)|^q + 5|\omega'(\kappa_2)|^q}{9} \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\
& \quad + \left( \frac{1}{p+1} \left(\frac{1}{3}\right)^{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \quad \times \left[ \left( \frac{5|\omega'(\kappa_2)|^q + 7|\omega'(\kappa_1)|^q}{36} \right)^{\frac{1}{q}} + \left( \frac{5|\omega'(\kappa_1)|^q + 7|\omega'(\kappa_2)|^q}{36} \right)^{\frac{1}{q}} \right] \left. \right\}.
\end{aligned}$$

**Teorem 5.9.** Lemma 3.1'nin koşulları sağlanırsa ve  $|\omega'|^q$  fonksiyonu (burada  $q \geq 1$ )  $[\kappa_1, \kappa_2]$  üzerinde  $s$ -konveks ise, bu durumda aşağıdaki Newton tipli eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{8} \left[ \omega(\kappa_1) + 3\omega\left(\frac{2\kappa_1 + \kappa_2}{3}\right) + 3\omega\left(\frac{\kappa_1 + 2\kappa_2}{3}\right) + \omega(\kappa_2) \right] \right. \tag{5.8} \\
& \quad \left. - \frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(\kappa_2 - \kappa_1)^\alpha} \left[ \mathcal{J}_{\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}-}^\alpha \omega(\kappa_1) + \mathcal{J}_{\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}+}^\alpha \omega(\kappa_2) \right] \right| \\
& \leq \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{4} \left\{ (\Phi_1(\alpha))^{1-\frac{1}{q}} \left[ [\Upsilon_1(\alpha, s) |\omega'(\kappa_2)|^q + \Upsilon_2(\alpha, s) |\omega'(\kappa_1)|^q]^{\frac{1}{q}} \right. \right. \\
& \quad \left. + [\Upsilon_2(\alpha, s) |\omega'(\kappa_1)|^q + \Upsilon_1(\alpha, s) |\omega'(\kappa_2)|^q]^{\frac{1}{q}} \right] \\
& \quad + (\Phi_2(\alpha))^{1-\frac{1}{q}} \left[ [\Upsilon_3(\alpha, s) |\omega'(\kappa_2)|^q + \Upsilon_4(\alpha, s) |\omega'(\kappa_1)|^q]^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. \left. + [\Upsilon_4(\alpha, s) |\omega'(\kappa_1)|^q + \Upsilon_3(\alpha, s) |\omega'(\kappa_2)|^q]^{\frac{1}{q}} \right] \right\}.
\end{aligned}$$

Burada  $\Upsilon_1(\alpha, s)$ ,  $\Upsilon_2(\alpha, s)$ ,  $\Upsilon_3(\alpha, s)$ ,  $\Upsilon_4(\alpha, s)$  Teorem 5.1 de tanımlanmıştır ve  $\Phi_1(\alpha)$ ,  $\Phi_2(\alpha)$  ise Sonuç 5.2 de verilmiştir.

*İspat.* (5.2) eşitsizliğinde power-mean eşitsizliği kullanılırsa,

$$\left| \frac{1}{8} \left[ \omega(\kappa_1) + 3\omega\left(\frac{2\kappa_1 + \kappa_2}{3}\right) + 3\omega\left(\frac{\kappa_1 + 2\kappa_2}{3}\right) + \omega(\kappa_2) \right] \right|$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(\kappa_2 - \kappa_1)^\alpha} \left[ \mathcal{J}_{\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}-}^\alpha \omega(\kappa_1) + \mathcal{J}_{\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}+}^\alpha \omega(\kappa_2) \right] \Big\| \\
& \leq \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{4} \left\{ \left( \int_0^{\frac{2}{3}} \left| \eta^\alpha - \frac{1}{4} \right| d\eta \right)^{1-\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \times \left( \int_0^{\frac{2}{3}} \left| \eta^\alpha - \frac{1}{4} \right| \left| \omega' \left( \frac{\eta}{2} \kappa_2 + \frac{2-\eta}{2} \kappa_1 \right) \right|^q d\eta \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \quad + \left( \int_0^{\frac{2}{3}} \left| \eta^\alpha - \frac{1}{4} \right| d\eta \right)^{1-\frac{1}{q}} \\
& \quad \times \left( \int_0^{\frac{2}{3}} \left| \eta^\alpha - \frac{1}{4} \right| \left| \omega' \left( \frac{\eta}{2} \kappa_1 + \frac{2-\eta}{2} \kappa_2 \right) \right|^q d\eta \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \quad + \left( \int_{\frac{2}{3}}^1 |\eta^\alpha - 1| d\eta \right)^{1-\frac{1}{q}} \\
& \quad \times \left( \int_{\frac{2}{3}}^1 |\eta^\alpha - 1| \left| \omega' \left( \frac{\eta}{2} \kappa_2 + \frac{2-\eta}{2} \kappa_1 \right) \right|^q d\eta \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \quad + \left( \int_{\frac{2}{3}}^1 |\eta^\alpha - 1| d\eta \right)^{1-\frac{1}{q}} \\
& \quad \times \left. \left( \int_{\frac{2}{3}}^1 |\eta^\alpha - 1| \left| \omega' \left( \frac{\eta}{2} \kappa_1 + \frac{2-\eta}{2} \kappa_2 \right) \right|^q d\eta \right)^{\frac{1}{q}} \right\}
\end{aligned}$$

bulunur.  $|\omega'|^q$  fonksiyonunun  $s$ -konveks olduğu göz önüne alındığında,

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{8} \left[ \omega(\kappa_1) + 3\omega\left(\frac{2\kappa_1 + \kappa_2}{3}\right) + 3\omega\left(\frac{\kappa_1 + 2\kappa_2}{3}\right) + \omega(\kappa_2) \right] \right. \\
& \quad \left. - \frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(\kappa_2 - \kappa_1)^\alpha} \left[ \mathcal{J}_{\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}-}^\alpha \omega(\kappa_1) + \mathcal{J}_{\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}+}^\alpha \omega(\kappa_2) \right] \right| \Big\| \\
& \leq \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{4} \left\{ \left( \int_0^{\frac{2}{3}} \left| \eta^\alpha - \frac{1}{4} \right| d\eta \right)^{1-\frac{1}{q}} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left( \int_0^{\frac{2}{3}} \left| \eta^\alpha - \frac{1}{4} \right| \left[ \left( \frac{\eta}{2} \right)^s |\omega'(\kappa_2)|^q + \left( \frac{2-\eta}{2} \right)^s |\omega'(\kappa_1)|^q \right] d\eta \right)^{\frac{1}{q}} \\
& + \left( \int_0^{\frac{2}{3}} \left| \eta^\alpha - \frac{1}{4} \right| d\eta \right)^{1-\frac{1}{q}} \\
& \times \left( \int_0^{\frac{2}{3}} \left| \eta^\alpha - \frac{1}{4} \right| \left[ \left( \frac{\eta}{2} \right)^s |\omega'(\kappa_1)|^q + \left( \frac{2-\eta}{2} \right)^s |\omega'(\kappa_2)|^q \right] d\eta \right)^{\frac{1}{q}} \\
& + \left( \int_{\frac{2}{3}}^1 (1-\eta^\alpha) d\eta \right)^{1-\frac{1}{q}} \\
& \times \left( \int_{\frac{2}{3}}^1 \left| \eta^\alpha - 1 \right| \left[ \left( \frac{\eta}{2} \right)^s |\omega'(\kappa_2)|^q + \left( \frac{2-\eta}{2} \right)^s |\omega'(\kappa_1)|^q \right] d\eta \right)^{\frac{1}{q}} \\
& + \left( \int_{\frac{2}{3}}^1 (1-\eta^\alpha) d\eta \right)^{1-\frac{1}{q}} \\
& \times \left( \int_{\frac{2}{3}}^1 \left| \eta^\alpha - 1 \right| \left[ \left( \frac{\eta}{2} \right)^s |\omega'(\kappa_1)|^q + \left( \frac{2-\eta}{2} \right)^s |\omega'(\kappa_2)|^q \right] d\eta \right)^{\frac{1}{q}} \Bigg\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar. □

**Sonuç 5.10.** Teorem 5.9 de  $s = 1$  seçilirse aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{8} \left[ \omega(\kappa_1) + 3\omega\left(\frac{2\kappa_1 + \kappa_2}{3}\right) + 3\omega\left(\frac{\kappa_1 + 2\kappa_2}{3}\right) + \omega(\kappa_2) \right] \right. \\
& \left. - \frac{2^{\alpha-1} \Gamma(\alpha+1)}{(\kappa_2 - \kappa_1)^\alpha} \left[ \mathcal{J}_{\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}-}^\alpha \omega(\kappa_1) + \mathcal{J}_{\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}+}^\alpha \omega(\kappa_2) \right] \right| \\
& \leq \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{4} \left\{ (\Phi_1(\alpha))^{1-\frac{1}{q}} \left[ \Upsilon_1(\alpha, 1) |\omega'(\kappa_2)|^q + \Upsilon_2(\alpha, 1) |\omega'(\kappa_1)|^q \right]^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad + \left[ \Upsilon_2(\alpha, 1) |\omega'(\kappa_1)|^q + \Upsilon_1(\alpha, 1) |\omega'(\kappa_2)|^q \right]^{\frac{1}{q}} \\
& \quad + (\Phi_2(\alpha))^{1-\frac{1}{q}} \left[ \Upsilon_3(\alpha, 1) |\omega'(\kappa_2)|^q + \Upsilon_4(\alpha, 1) |\omega'(\kappa_1)|^q \right]^{\frac{1}{q}} \\
& \quad \left. + \left[ \Upsilon_4(\alpha, 1) |\omega'(\kappa_1)|^q + \Upsilon_3(\alpha, 1) |\omega'(\kappa_2)|^q \right]^{\frac{1}{q}} \right\}.
\end{aligned} \tag{5.9}$$

Burada,  $\Phi_1(\alpha)$  ve  $\Phi_2(\alpha)$  Sonuç 5.2 de verilmiştir ve

$$\begin{aligned} & \Upsilon_1(\alpha, 1) \\ &= \int_0^{\frac{2}{3}} \frac{\eta}{2} \left| \eta^\alpha - \frac{1}{4} \right| d\eta \\ &= \begin{cases} \frac{\alpha}{2(\alpha+2)} \left(\frac{1}{4}\right)^{1+\frac{2}{\alpha}} + \frac{1}{2(\alpha+2)} \left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha+2} - \frac{1}{36}, & 0 < \alpha < \frac{\ln(\frac{1}{4})}{\ln(\frac{2}{3})}, \\ \frac{1}{36} - \frac{1}{2(\alpha+2)} \left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha+2}, & \frac{\ln(\frac{1}{4})}{\ln(\frac{2}{3})} < \alpha \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \Upsilon_2(\alpha, 1) \\ &= \int_0^{\frac{2}{3}} \frac{2-\eta}{2} \left| \eta^\alpha - \frac{1}{4} \right| d\eta \\ &= \begin{cases} \frac{2\alpha}{\alpha+1} \left(\frac{1}{4}\right)^{1+\frac{1}{\alpha}} + \frac{1}{\alpha+1} \left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha+1} \\ - \frac{\alpha+1}{2(\alpha+2)} \left(\frac{1}{4}\right)^{1+\frac{2}{\alpha}} - \frac{1}{2(\alpha+2)} \left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha+2} - \frac{5}{36}, & 0 < \alpha < \frac{\ln(\frac{1}{4})}{\ln(\frac{2}{3})}, \\ \frac{5}{36} - \frac{1}{\alpha+1} \left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha+1} + \frac{1}{2(\alpha+2)} \left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha+2}, & \frac{\ln(\frac{1}{4})}{\ln(\frac{2}{3})} < \alpha, \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \Upsilon_3(\alpha, 1) \\ &= \int_{\frac{2}{3}}^1 \frac{\eta}{2} (1-\eta^\alpha) d\eta = \frac{5}{36} - \frac{1}{2(\alpha+2)} + \frac{1}{2(\alpha+2)} \left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha+2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \Upsilon_4(\alpha, 1) \\ &= \int_{\frac{2}{3}}^1 \frac{2-\eta}{2} (1-\eta^\alpha) d\eta \\ &= \frac{7}{36} - \frac{\alpha+3}{2(\alpha+1)(\alpha+2)} + \frac{1}{\alpha+1} \left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha+1} - \frac{1}{2(\alpha+2)} \left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha+2}. \end{aligned}$$

Bu eşitsizlik Hezenci ve Budak tarafından [22] de verilmiştir.

**Sonuç 5.11.** Teorem 5.9 de  $\alpha = 1$  alınrsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{8} \left[ \omega(\kappa_1) + 3\omega\left(\frac{2\kappa_1 + \kappa_2}{3}\right) + 3\omega\left(\frac{\kappa_1 + 2\kappa_2}{3}\right) + \omega(\kappa_2) \right] \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{\kappa_2 - \kappa_1} \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} \omega(\eta) d\eta \right| \\
& \leq \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{4} \left\{ \left( \frac{17}{144} \right)^{1 - \frac{1}{q}} \left[ [\Upsilon_1(1, s) |\omega'(\kappa_2)|^q + \Upsilon_2(1, s) |\omega'(\kappa_1)|^q]^{\frac{1}{q}} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + [\Upsilon_2(1, s) |\omega'(\kappa_1)|^q + \Upsilon_1(1, s) |\omega'(\kappa_2)|^q]^{\frac{1}{q}} \right] \right. \\
& \quad \left. + \left( \frac{1}{18} \right)^{1 - \frac{1}{q}} \left[ [\Upsilon_3(1, s) |\omega'(\kappa_2)|^q + \Upsilon_4(1, s) |\omega'(\kappa_1)|^q]^{\frac{1}{q}} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + [\Upsilon_4(1, s) |\omega'(\kappa_1)|^q + \Upsilon_3(1, s) |\omega'(\kappa_2)|^q]^{\frac{1}{q}} \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{5.10}$$

Burada  $\Upsilon_1(1, s), \Upsilon_2(1, s), \Upsilon_3(1, s)$  ve  $\Upsilon_4(1, s)$  notasyonları Sonuç 5.3 ifadesinde verilmiştir.

**Sonuç 5.12.** Teorem 5.9'de  $\alpha = 1$  ve  $s = 1$  alarak seçilirse (5.8) eşitsizliği Hezenci ve Budak tarafından elde edilen,

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{8} \left[ \omega(\kappa_1) + 3\omega\left(\frac{2\kappa_1 + \kappa_2}{3}\right) + 3\omega\left(\frac{\kappa_1 + 2\kappa_2}{3}\right) + \omega(\kappa_2) \right] \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{\kappa_2 - \kappa_1} \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} \omega(\eta) d\eta \right| \\
& \leq \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{72} \left\{ \left( \frac{17}{8} \right)^{1 - \frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \times \left[ \left( \frac{251 |\omega'(\kappa_2)|^q + 973 |\omega'(\kappa_1)|^q}{576} \right)^{\frac{1}{q}} + \left( \frac{251 |\omega'(\kappa_1)|^q + 973 |\omega'(\kappa_2)|^q}{576} \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\
& \quad \left. + \left[ \left( \frac{7 |\omega'(\kappa_2)|^q + 11 |\omega'(\kappa_1)|^q}{18} \right)^{\frac{1}{q}} + \left( \frac{7 |\omega'(\kappa_1)|^q + 11 |\omega'(\kappa_2)|^q}{18} \right)^{\frac{1}{q}} \right] \right\},
\end{aligned}$$

eşitsizliğine dönüşür.

## 6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tezde birinci tip Newton tipli eşitsizliklerin kesirli integral operatörü ile çalışılmasını genelleştirmesi amacıyla Riemann-Liouville kesirli integralleri kullanılmıştır. Birinci tip Newton eşitsizlikleri, analizde ve uygulamalı matematikte önemli yer tutan ve fonksiyonların karşılaştırılmasına yardımcı olan eşitsizliklerdir. Ancak bu çalışmada, Newton tipli eşitsizlikler,  $s$ -konveks fonksiyonlar kullanılarak yeni genelleştirilmiş eşitsizlikler elde edilmiştir.

$s$ -konveks fonksiyonlar, konvekslikte önemli bir yere sahip olup, fonksiyonların karşılaştırılmasını daha geniş bir pencerede inceler. Bu fonksiyonlar, genellikle çeşitli sınıflarda yapılan eşitsizliklerin elde edilmesinde kullanılır. Çalışmada, Newton tipli eşitsizliklerin  $s$ -konveks fonksiyonlar ile birleştirilmesiyle, daha genel eşitsizlikler elde edilmiştir. Bu yeni eşitsizlikler, matematiksel analizde daha geniş bir uygulama alanı bulabilir, çünkü  $s$ -konveks fonksiyonlar, klasik konveks fonksiyonlardan daha genel bir yapıya sahiptir.

Gelecekteki araştırmalar için, bu konuda daha fazla inceleme ve yeni çalışmalara yön verilmesi mümkündür. Örneğin, farklı konveks fonksiyon sınıfları için genelleştirilmiş kesirli Newton tipli eşitsizlikler elde edilebilir. Bunun üzerine yapılabilecek yeni çalışmalar, daha farklı eşitsizliklerin elde edilmesine ve bir fonksiyonun integrali için yeni sınırlar elde edilmesine olanak tanıyabilir. Ayrıca, yeni integral eşitsizliklerinin tanımlanması, hem teorik hem de uygulamalı matematikte literatüre katkı sağlayabilir. Örneğin, mühendislikte, fizikte, ekonomi gibi farklı branşlarda daha doğru sonuçlar elde edilmesini sağlayabilecek yeni eşitsizlikler keşfedilebilir.

Bu tezde özellikle Riemann-Liouville kesirli integralleri içeren birinci tip Newton tipli eşitsizlikler için kullanılan  $s$ -konvekslik, gelecekteki çalışmalarda ikinci tip Newton tipli eşitsizlikler için de uygulanabilir. Ve yeni bir çalışma alanı olabilir. Ayrıca literatürde kullanılan birçok kesirli integral operatörü için de benzer çalışmalar yapılabilir.

Sonuç olarak, bu çalışma, kesirli integrallerin ve konveks fonksiyonların bir arada kullanılması, daha kapsamlı eşitsizliklerin geliştirilmesine olanak sağlamaktadır. Gelecek araştırmalar bu alanda yapılan katkıları genişleterek, daha fazla fonksiyon sınıfı için genelleştirilmiş eşitsizliklerin keşfedilmesini sağlayabilir.



## 7. KAYNAKLAR

- [1] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Polya, *Inequalities*, 2nd edition, Cambridge University Press, Cambridge, 1942.
- [2] E. F. Beckenbach ve R. Bellman, *Inequalities*, Berlin, Almanya: Springer-Verlag, 1961.
- [3] D. S. Mitrinović, *Analytic Inequalities*, Berlin, Deutschland: Springer Verlag, ss. 27-180, 1970.
- [4] S. Erden, S. Iftikhar, P. Kumam ve M. U. Awan, “Some Newton’s like inequalities with applications,” *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales Serie A Matemáticas*, c. 114, sayı 4, ss. 1–13, 2020.
- [5] T. Sitthiwiratham, K. Nonlaopon, M. A. Ali ve H. Budak, “Riemann-Liouville fractional Newton’s type inequalities for differentiable convex functions,” *Fractal Fract.*, c. 6, sayı 3, ss. 175, 2022.
- [6] S. Iftikhar, P. Kumam ve S. Erden, “Newton’s-type integral inequalities via local fractional integrals,” *Fractals*, c. 28, sayı 03, 2050037, 2020.
- [7] S. Iftikhar, S. Erden, P. Kumam ve M. U. Awan, “Local fractional Newton’s inequalities involving generalized harmonic convex functions,” *Advances in Difference Equations*, c. 2020, sayı 1, ss. 1-14, 2020.
- [8] F. Hezenci, H. Budak, “Some Perturbed Newton type inequalities for Riemann-Liouville fractional integrals,” *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, c. 53, sayı 4, ss. 1117-1127, 2023.
- [9] C. Unal, F. Hezenci ve H. Budak, “Conformable fractional Newton-type inequalities with respect to differentiable convex functions,” *Journal of Inequalities and Applications*, ss. 1-19, 2023.
- [10] H. Budak, C. Unal ve F. Hezenci, “Study on error bounds for Newton-type inequalities in conformable fractional integrals,” *Mathematica Slovaca*, c. 74, sayı 2, ss. 313-330, 2024.
- [11] M. U. Awan, M. A. Noor, Du. T. S. ve K. I. Noor, “New refinements of fractional Hermite-Hadamard inequality,” *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas*, c. 113, ss. 21-29, 2019.
- [12] Z. Q. Yang, Y. J. Li ve Du. T. S., “A generalization of Simpson type inequality via differentiable functions using  $(s, m)$ -convex functions,” *Ital. J. Pure Appl. Math.*, c. 35, ss. 327-338, 2015.
- [13] S. Gao ve W. Shi, “On new inequalities of Newton’s type for functions whose second derivatives absolute values are convex,” *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, c. 74, sayı 1, ss. 33-41, 2012.
- [14] W. Luangboon, K. Nonlaopon, J. Tari boon ve S. K. Ntouyas, “Simpson-and Newton-Type Inequalities for Convex Functions via  $(p, q)$ -Calculus,” *Mathematics*, c. 9, sayı 12, ss. 1338, 2021.

- [15] M. A. Noor, K.I. Noor ve S. Iftikhar, “Some Newton’s type inequalities for harmonic convex functions,” *J. Adv. Math. Stud.* c. 9, sayı 1, ss. 07-16, 2016.
- [16] M. A. Noor, K.I. Noor ve S. Iftikhar, “Newton inequalities for p-harmonic convex functions,” *Honam Math. J.* c. 40, sayı 2, ss. 239-250, 2018.
- [17] M.A. Ali, H. Budak ve Z. Zhang, “A new extension of quantum Simpson’s and quantum Newton’s type inequalities for quantum differentiable convex functions,” *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, c. 45, sayı 4, ss. 1845–1863, 2022.
- [18] S. Erden, S. Iftikhar, P. Kumam ve P. Thounthong, “On error estimations of Simpson’s second type quadrature formula,” *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, ss. 1–13, 2020.
- [19] S. Iftikhar, S. Erden, M.A. Ali, J. Baili ve H. Ahmad, “Simpson’s Second-Type Inequalities for Co-ordinated Convex Functions and Applications for Cubature Formulas,” *Fractal and Fractional*, c.6, sayı 1, ss. 33, 2022.
- [20] M. A. Noor, K.I. Noor ve M. U. Awan, “Some Newton’s type inequalities for geometrically relative convex functions,” *Malasian Journal of Mathematical Sciences*, c. 9, sayı 3, ss. 491–502, 2015.
- [21] S. S. Dragomir, “On Simpson’s quadrature formula for mappings of bounded variation and applications,” *Tamkang J. of Math.* c. 30, ss. 53–58, 1999.
- [22] F. Hezenci ve H. Budak, “Fractional Newton-type integral inequalities by means of various function classes,” *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, c. 48, sayı 1, ss. 1198–1215, 2025.
- [23] F. Hezenci, H. Budak ve T. Du, “Newton-Type Inequalities For Fractional Integrals By Various Function Classes,” yayına gönderildi.
- [24] M. Bayraktar, *Fonksiyonel Analiz*. Ankara, Türkiye: Gazi Kitapevi, 2018.
- [25] J. E. Pečarić, F. Proschan ve Y. L. Tong, “Convex Functions, Partial Orderings and Statistical Applications,” *Mathematics in science and engineering*, c. 187, sayı 1, ss. 467, 1992.
- [26] W. Orlicz ve W. Matuszewska, “A note on modular spaces,” *Bulletin de Academie Polonaise des Sciences-Serie des Sciences Mathematiques Astronomiques et Physiques*, c. 16, sayı 10, ss. 801-808, 1968.
- [27] S. Varosanec, “On h-convexity,” *Journal of Applied Mathematics, Statistics and Informatics*, c. 326, sayı 1, ss. 303-311, 2007.
- [28] S. S. Dragomir ve C. E. M. Pearce, “Quasi-convex functions and Hadamard’s inequality,” *Bulletin Australian Mathematical Society*, c. 57, sayı 3, ss. 377–385, 1998.
- [29] C. E. M. Pearce, J. E. Pecaric ve V. Simić, “Stolarsky means and Hadamard’s inequality,” *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, c. 220, sayı 1, ss. 99-109, 1998.

- [30] P. Kannapan, *Functional Equations and Inequalities with Applications*, Almanya: Springer, 2009.
- [31] R. Gorenflo ve F. Mainardi, *Fractional calculus: Integral and differential equations of fractional order*, Wien, Springer Verlag, 1997.
- [32] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava ve J. J. Trujillo, *Theory and applications of fractional differential equations*, Amsterdam, Elsevier, 2006.
- [33] D. S. Mitrinović, J. E. Pečarić ve A. M. Fink, *Classical and New Inequalities in Analysis*, Kluwer Academic Publishers, 740, UK., 1993.
- [34] P. J. Davis ve P. Rabinowitz, *Methods of numerical integration*, Academic Press, New York-San Francisco-London, 1975.
- [35] M. Alomari, M. Darus ve S. Dragomir, “New inequalities of Simpson’s type for  $s$ -convex functions with applications,” *Res. Rep. Coll.*, c. 12, sayı 9, 2009.
- [36] F. Hezenci, H. Budak ve P. Kösem, “A new version of Newton’s inequalities for Riemann-Liouville fractional integrals,” *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, c. 56, sayı 6, 2022.

# ÖZGEÇMİŞ

## KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Davut ALEMDAR  
Yabancı Dili : İngilizce

## ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Y. Lisans	Matematik Bölümü	Düzce Üniversitesi	2025
Lisans	Matematik Bölümü	Karadeniz Teknik Üniversitesi	2012
Lise	Sayısal	Düzce Lisesi	2005

## TEZDEN ÇIKAN YAYINLAR

D. Alemdar, H. Kara, ve H. Budak, "Fractional Newton-type inequalities involving  $s$ -convex functions," *Turkish Journal of Science*, c. 9, sayı 1, ss. 68–79, 2024.