

T.C.  
FIRAT ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

150119  
150119

150119

POLİNOMAL DİFERANSİYEL QUADRATURE (PDQ) METODU İLE  
ELASTİK ZEMİNE OTURAN PLAK VE KABUKLARIN GEOMETRİK  
BAKIMDAN LİNEER OLMAYAN STATİK VE DİNAMİK ANALİZİ

İnş. Yük. Müh. Ömer CİVALEK

DOKTORA TEZİ  
İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

ELAZIĞ, 2004

T.C.  
FIRAT ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

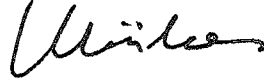
POLİNOMAL DİFERANSİYEL QUADRATURE (PDQ) METODU İLE  
ELASTİK ZEMİNE OTURAN PLAK VE KABUKLARIN GEOMETRİK  
BAKIMDAN LİNEER OLMAYAN STATİK VE DİNAMİK ANALİZİ

İnş. Yük. Müh. Ömer CİVALEK

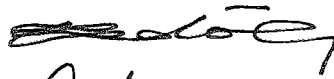
DOKTORA TEZİ  
İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

Bu tez, 02/04/2004 tarihinde aşağıda belirtilen jüri tarafından oybirliği /oyçokluğu ile başarılı / başarısız olarak değerlendirilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Mehmet ÜLKER



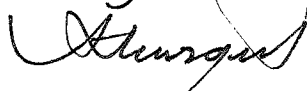
Üye: Prof. Dr. Ragıp ERDÖL



Üye: Prof. Ali Sayıl ERDOĞAN



Üye: Prof. Dr. Aydın TURGUT



Üye: Doç. Dr. Yusuf CALAYIR



Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 02.04.2004 tarih ve 14-3 sayılı kararıyla onaylanmıştır.

## TEŐEKKÜR

Gerek doktora ders aŐamasında ve gerekse bu tezin hazırlanması süresince, yönlendirme ve yardımlarıyla çalışmanın sonuçlandırılmasını temin eden, öngörölmeven olumsuzlukları ve aksamaları engin bilgisi ve hoşgörüsüyle çözümlleyen danışman hocam sayın Prof. Dr. Mehmet ÜLKER Bey'e, Diferansiyel Quadrature yöntemi ile ilgili bazı önemli belgelerin ve yayınların temin edilmesinde gösterdiği kolaylık ve bazı konularda düşüncelerine başvurduğum Oklahoma Üniversitesi Uçak-Uzay Fakültesi Profesörlerinden Dr. Charles W. BERT'e ve Doç. Dr. M. Cengiz ALTAN'a eğitimim süresince beni maddi ve manevi olarak sabırla destekleyen Anneme, Babama, kardeşlerime ve çalışma süresince gösterdikleri anlayış nedeni ile EŐime ve oğluma içten teşekkürlerimi sunarım.

Ömer CİVALEK



*Bu çalışmadaki emek payımı; Ablam Saniye, Oğlum Arif Hikmet,  
Yeğenlerim; Talat, Hüşyar, Ahmet, Ayşe Nur, Yusuf, Gevher Huma,  
Melike ve diğerlerine, ithaf ederim.*

## İÇİNDEKİLER

SAYFA

<b>İÇİNDEKİLER</b> .....	I
<b>ŞEKİLLER LİSTESİ</b> .....	III
<b>ÇİZELGELER LİSTESİ</b> .....	VIII
<b>KISALTMALAR LİSTESİ</b> .....	IX
<b>ÖZET</b> .....	X
<b>ABSTRACT</b> .....	XI
<b>1.GİRİŞ</b> .....	1
1.1. Elastik Zemine Oturan Plak ve Kabuklar.....	1
1.2. Daha Önceki Çalışmalar.....	1
1.3. Çalışmanın Amacı ve Önemi.....	6
<b>2. DİFERANSİYEL QUADRATURE METODU(DQM)</b> .....	8
2.1. Diferansiyel Quadrature Metoduna Genel Bir Bakış.....	8
2.2. Kuvvet Polinomları.....	11
2.3. Legendre Polinomları.....	14
2.4. Lagrange Polinomları.....	20
2.5. Chebyshev Polinomları.....	24
2.6. Harmonik Fonksiyon.....	25
2.7. Düğüm (Grid) Nokta.....	29
2.8. Zaman Değişkeninin İntegrasyonu.....	31
2.8.1. Newmark- $\beta$ Metodu.....	31
2.8.2. Sonlu Farklar Metodu.....	32
2.8.3. DQ Metodunun Zaman Değişkeni İntegrasyonunda Kullanılması.....	32
<b>3. ELASTİK ZEMİNE OTURAN ÇİFT EĞRİLİKLİ KABUK VE DİKDÖRTGEN PLAK İÇİN TEMEL DENKLEMLER</b> .....	34
3.1. Elastik Zemine Oturan Çift Eğrilikli Basık Kabuk.....	34
3.1.1. Elastik Zemine Oturan Çift Eğrilikli Basık Kabuğun Dinamik Analizi.....	34
3.1.2. Elastik Zemine Oturan Çift Eğrilikli Basık Kabuğun Statik Analizi.....	39
3.2. Elastik Zemine Oturan İnce ve İzotrop Dikdörtgen Plak.....	40
3.2.1. Elastik Zemine Oturan İzotrop Plağın Dinamik Analizi.....	40
3.2.2. Elastik Zemine Oturan İzotrop Plağın Statik Analizi.....	44
3.3. Elastik Zemine Oturan Orthotrop Dikdörtgen Plak.....	47
3.4. Sınır Ve Başlangıç Koşulları.....	48
3.4.1. Düzleminde Dönmesi Engellenmiş Dört Kenarından Basit Mesnet.....	48
3.4.2. Düzleminde Dönmesi Engellenmiş Dört Kenarından Ankastre Mesnet.....	48

3.4.3. Karşılıklı Uzun Kenarları Ankastre ve Kısa Kenarlar Basit Mesnet .....	49
3.4.4. Başlangıç Koşulları.....	49
<b>4. SAYISAL UYGULAMALAR.....</b>	<b>50</b>
4.1. Dikdörtgen Plakların Analizi.....	50
4.1.1. Dikdörtgen Plakların Statik Hesabı.....	50
4.1.2. Dikdörtgen Plakların Dinamik Hesabı.....	66
4.2. Çift Eğrilikli Basık Kabukların Analizi.....	83
4.2.1. Çift Eğrilikli Basık Kabukların Statik Hesabı.....	83
4.2.2. Çift Eğrilikli Basık Kabukların Dinamik Hesabı.....	85
<b>5. HATA ANALİZİ.....</b>	<b>100</b>
<b>6. SONUÇLAR.....</b>	<b>108</b>
<b>KAYNAKLAR</b>	
<b>ÖZGEÇMİŞ</b>	
<b>EKLER</b>	

## ŞEKİLLER LİSTESİ

## SAYFA

Şekil 2.1 Tek boyutlu sistem için tanımlanan düğüm (grid) noktaları.....	10
Şekil 2.2 Bir boyutlu sistemler için düğüm noktaları.....	13
Şekil 2.3. İki boyutlu dörtgen bir bölge için düğüm (grid) noktaları.....	15
Şekil 3.1. Elastik zemine oturan çift eğrilikli basık kabuk ve elemanları.....	35
Şekil 3.2. Elastik zemine oturan dikdörtgen plak.....	41
Şekil 4.1 Elastik zemin etkisinin dikkate alınmadığı dikdörtgen plak için Yük- Deplasman eğrisi (CCCC Plak; $\nu = 0.316$ ).....	51
Şekil 4.2 Elastik zemin etkisinin dikkate alınmadığı dikdörtgen plak için Yük- Deplasman eğrisi (SSSS Plak; $\nu = 0.316$ ).....	52
Şekil 4.3 Elastik zemin etkisinin dikkate alınmadığı dikdörtgen plak için Yük- Deplasman eğrisi (CCCC Orthotrop Plak; $E_y/E_x = 40$ ; $G_{xy}/E_x=0.6$ ; $\nu_y =0.25$ ).....	53
Şekil 4.4 Elastik zemin etkisinin dikkate alınmadığı dikdörtgen plak için Yük- Deplasman eğrisi (SSSS Orthotrop Plak; $k = 1$ ; $E_y/E_x = 40$ ; $G_{xy}/E_x=0.6$ ; $\nu_y =0.25$ ).....	54
Şekil 4.5 Elastik zemine oturan kare plak için Yük-Deplasman eğrisi (CCCC Plak).....	55
Şekil 4.6 Elastik zemine oturan kare plak için Yük-Deplasman eğrisi (SSSS Plak).....	56
Şekil 4.7 Elastik zemine oturan Orthotrop kare plak için Yük-Deplasman eğrisi (CCCC Plak; $E_y/E_x = 3$ ; $G_{xy}/E_x=0.5$ ; $\nu_y =0.22$ ).....	57
Şekil 4.8 Elastik zemine oturan Orthotrop kare plak için Yük-Deplasman eğrisi (SSSS Plak; $E_y/E_x = 3$ ; $G_{xy}/E_x=0.5$ ; $\nu_y =0.22$ ).....	58
Şekil 4.9 Elastik zemine oturan kare plak için Yük-Deplasman eğrisi (CCCC Plak; $K=50$ ; $G=25$ ).....	59
Şekil 4.10 CCCC mesnet koşuluna sahip izotrop dikdörtgen plağın yük-deplasman eğrisi ( $k=1/2$ ; $\nu = 1/3$ ).....	60

Şekil 4.11 CCCC mesnet koşuluna sahip izotrop dikdörtgen plağın yük-deplasman eğrisi ( $k=2/3$ ; $\nu = 1/3$ ).....	61
Şekil 4.12 CCCC mesnet koşuluna sahip izotrop dikdörtgen plağın yük-deplasman eğrisi ( $k=1$ ; $\nu = 1/3$ ).....	62
Şekil 4.13a Farklı geometrideki dikdörtgen plak için Zemin parametresi $K$ 'ya bağlı plak maksimum deplasmanı (CCCC; $a/b$ plak kenarlarının oranı).....	63
Şekil 4.13b Farklı Zemin parametresi $K$ 'ya bağlı plak maksimum deplasmanı (CCCC; $a/b = 1/2$ ).....	63
Şekil 4.14 Farklı kenar boyutlarının oranına bağlı CCCC Dikdörtgen plağın yük-merkezi deplasman eğrisi.....	64
Şekil 4.15 CCCC Dikdörtgen plağın sönümlü dinamik hesabı ( $P = 29.14$ ).....	66
Şekil 4.16 SSSS mesnetli dikdörtgen plağın sabit adım yükü altında dinamik hesabı ( $P= 100$ ; $G=0$ ; $k=1$ ).....	67
Şekil 4.17 CCCC mesnetli dikdörtgen plağın sabit adım yükü altında dinamik hesabı ( $P= 100$ ; $G=0$ ; $k=1$ ).....	68
Şekil 4.18 CCCC mesnetli dikdörtgen plağın sinüs yükü altında dinamik hesabı ( $P= 200$ ; $G=0$ ; $k=1$ ; $\tau = 0.16$ ).....	69
Şekil 4.19 SSSS mesnetli dikdörtgen plağın sinüs yükü altında dinamik hesabı ( $P= 200$ ; $K=800$ ; $k=1$ ; $\tau = 0.16$ ).....	70
Şekil 4.20 CCCC mesnetli dikdörtgen plağın sinüs yükü altında dinamik hesabı ( $P= 200$ ; $K=800$ ; $k=1$ ; $\tau = 0.16$ ).....	71
Şekil 4.21 CCCC mesnetli dikdörtgen plağın sinüs yükü altında dinamik hesabı ( $P= 200$ ; $K=400$ ; $k=1$ ; $\tau = 0.16$ ).....	72
Şekil 4.22 SSSS mesnetli dikdörtgen plağın sinüs yükü altında dinamik hesabı ( $P= 200$ ; $K=400$ ; $k=1$ ; $\tau = 0.16$ ).....	73
Şekil 4.23 CCCC mesnetli dikdörtgen plağın sabit adım yük altında dinamik hesabı ( $P= 100$ ; $K=800$ ; $G=8$ ; $k=1$ ).....	74
Şekil 4.24 SSSS mesnetli dikdörtgen plağın sabit adım yük altında dinamik hesabı ( $P= 100$ ; $K=800$ ; $G=8$ ; $k=1$ ).....	75
Şekil 4.25 CCCC mesnetli dikdörtgen plağın sabit adım yük altında dinamik hesabı ( $P= 100$ ; $K=800$ ; $G=50$ ; $k=1$ ).....	76

Şekil 4.26 SSSS mesnetli dikdörtgen plağın sabit adım yük altında dinamik hesabı ( $P=100$ ; $K=800$ ; $G=50$ ; $k=1$ ).....	77
Şekil 4.27 CCCC mesnetli dikdörtgen plağın sinüs yükü altında dinamik hesabı ( $P=200$ ; $K=400$ ; $G=50$ ; $k=1$ ; $\tau=0.16$ ).....	78
Şekil 4.28 SSSS mesnetli dikdörtgen plağın sinüs yükü altında dinamik hesabı ( $P=200$ ; $K=400$ ; $G=50$ ; $k=1$ ; $\tau=0.1$ ).....	79
Şekil 4.29 SSSS mesnetli dikdörtgen plağın sabit adım yükü altında dinamik hesabı ( $P=100$ ; $G=0$ ; $k=1$ ).....	80
Şekil 4.30 CCCC mesnetli dikdörtgen plağın sinüs yükü altında dinamik hesabı ( $P=200$ ; $G=0$ ; $k=1$ ; $\tau=0.16$ ).....	81
Şekil 4.31 SSSS mesnetli dikdörtgen plağın sinüs yükü altında dinamik hesabı ( $P=100$ ; $K=800$ ; $G=8$ ; $k=1$ ).....	82
Şekil 4.32 CCCC silindirik panel için yük-deplasman eğrisi ( $R_2=0$ ).....	84
Şekil 4.33 Farklı zemin parametresi ( $K$ ) için kabuk deplasmanının değişimi ( $R_x=R_y=5.0$ ; $P=100$ ; $G=0$ ; $m_r=0$ ; CCCC çift eğrilikli kabuk ).....	86
Şekil 4.34 Farklı zemin parametresi ( $K$ ) için kabuk deplasmanının değişimi ( $R_x=R_y=5.0$ ; $P=100$ ; $G=0$ ; $m_r=0$ ; SSSS çift eğrilikli kabuk ).....	87
Şekil 4.35 Farklı zemin parametresi ( $K$ ) için kabuk deplasmanının değişimi ( $R_x=R_y=5.0$ ; $P=200$ ; $G=0$ ; $m_r=0$ ; CCCC çift eğrilikli kabuk ).....	88
Şekil 4.36 Farklı zemin parametresi ( $K$ ) için kabuk deplasmanının değişimi ( $R_x=R_y=5.0$ ; $P=200$ ; $G=0$ ; $m_r=0$ ; SSSS çift eğrilikli kabuk ).....	89
Şekil 4.37 Farklı zemin kayma parametresi ( $G$ ) için kabuk deplasmanının değişimi ( $R_x=R_y=5.0$ ; $P=100$ ; $K=800$ ; $m_r=0$ ; CCCC çift eğrilikli kabuk ).....	90
Şekil 4.38 Farklı zemin kayma parametresi ( $G$ ) için kabuk deplasmanının değişimi ( $R_x=R_y=5.0$ ; $P=100$ ; $K=800$ ; $m_r=0$ ; SSSS çift eğrilikli kabuk ).....	91
Şekil 4.39 Farklı zemin kayma parametresi ( $G$ ) için kabuk deplasmanının değişimi ( $R_x=R_y=7.0$ ; $P=200$ ; $K=400$ ; $m_r=0$ ; CCCC çift eğrilikli kabuk ).....	92
Şekil 4.40 Farklı zemin kayma parametresi ( $G$ ) için kabuk deplasmanının değişimi ( $R_x=R_y=5.0$ ; $P=200$ ; $K=400$ ; $m_r=0$ ; SSSS çift eğrilikli kabuk ).....	93

Şekil 4.41 Farklı ( $m_r$ ) için kabuk deplasmanının değişimi ( $R_x=R_y=7.0$ ; $P=100$ ; $K=800$ ; $G=50$ ; CCCC çift eğrilikli kabuk ).....	94
Şekil 4.42 Farklı ( $m_r$ ) için kabuk deplasmanının değişimi ( $R_x=R_y=7.0$ ; $P=100$ ; $K=800$ ; $G=50$ ; SSSS çift eğrilikli kabuk ).....	95
Şekil 4.43 Farklı ( $m_r$ ) için kabuk deplasmanının değişimi ( $R_x=R_y=7.0$ ; $P=200$ ; $K=400$ ; $G=50$ ; CCCC çift eğrilikli kabuk ).....	96
Şekil 4.44 Farklı ( $m_r$ ) için kabuk deplasmanının değişimi ( $R_x=R_y=7.0$ ; $P=200$ ; $K=400$ ; $G=50$ ; SSSS çift eğrilikli kabuk ).....	97
Şekil 4.45 Farklı zemin parametresi ( $K$ ) için kabuk deplasmanının değişimi ( $R_x=R_y=5.0$ ; $P=100$ ; $G=0$ ; $m_r=0$ ; CCCC çift eğrilikli kabuk ).....	98
Şekil 4.46 Farklı zemin kayma parametresi ( $G$ ) için kabuk deplasmanının değişimi ( $R_x=R_y=5.0$ ; $P=100$ ; $K=800$ ; $m_r=0$ ; CCCC çift eğrilikli kabuk ).....	99
Şekil 5.1 Dinamik analiz için zaman değişkeninin integrasyonun da kullanılan metoda ve zaman aralığına bağlı olarak hatanın değişimi (HDQ için ünüform düğüm nokta dağılımı).....	101
Şekil 5.2 Dinamik analiz için zaman değişkeninin integrasyonun da kullanılan metoda ve zaman aralığına bağlı olarak hatanın değişimi (HDQ için ünüform olmayan düğüm nokta dağılımı).....	102
Şekil 5.3 Dinamik analiz için konum değişkeninin integrasyonun da kullanılan metoda ve düğüm nokta sayısına bağlı olarak hatanın değişimi (Ünüform olmayan düğüm nokta dağılımı).....	103
Şekil 5.4 Dinamik analiz için konum değişkeninin integrasyonun da kullanılan metoda ve düğüm nokta sayısına bağlı olarak hatanın değişimi (Ünüform düğüm nokta dağılımı).....	103
Şekil 5.5 Statik analiz için kullanılan metoda ve düğüm nokta sayısına bağlı olarak hatanın değişimi (Ünüform olmayan düğüm nokta dağılımı).....	104
Şekil 5.6 Statik analiz için kullanılan metoda ve düğüm nokta sayısına bağlı olarak hatanın değişimi (Ünüform düğüm nokta dağılımı).....	105
Şekil 5.7 Polinomal Diferansiyel Quadrature ile kullanılan Newmark ve Sonlu farklar metodunda elde edilen hata oranları.....	106

Şekil 5.8 Plak dinamik analizinde zaman değişkeni sabit iken konum değişkeni için kullanılan metoda bağlı hata değeri.....	106
Şekil 5.9 DQ yönteminde kullanılan polinoma bağlı plak statik analizi için hata değerleri.....	107



## ÇİZELGELER LİSTESİ

SAYFA

Çizelge 4.1 Ortotrop malzeme için seçilen malzeme özellikleri.....	65
Çizelge 4.2 Üniform yük etkisindeki kare plağın farklı zemin parametreleri için hesaplanan maksimum deplasman değerleri.....	65
Çizelge 4.3 Çift eğrilikli kabuk için statik sonuçların karşılaştırılması ( $k = 1$ ; $R_x = 5.0$ ; $R_y = 5.0$ ; $P = 42.7$ ; Üniform düğüm nokta dağılımı; $N_x = N_y = 13$ ).....	83
Çizelge 4.4 Çift eğrilikli kabuk için statik sonuçların karşılaştırılması ( $k = 1$ ; $R_x = 5.0$ ; $R_y = 5.0$ ; $P = 42.7$ ; Üniform olmayan düğüm noktası; $N_x = N_y = 13$ )...	83
Çizelge 4.5 Çift eğrilikli kabuk için statik sonuçların karşılaştırılması ( $k = 1$ ; $R_x = 5.0$ ; $R_y = 5.0$ ; $P = 42.7$ ; Üniform düğüm nokta dağılımı; $N_x = N_y = 17$ ).....	84

## KISALTMALAR

Bu çalışmada elastik zemine oturan plak ve kabukların lineer olmayan statik ve dinamik analizi için gerekli yönetici denklemler, zaman ve konum(uzay) değişkeninin çeşitli mertebelerden türevini içeren diferansiyel denklemler ile ifade edilmektedir. Bu amaçla çalışmada konum değişkeninin integrasyonu için farklı tip polinomun kullanıldığı diferansiyel quadrature metodu, zaman değişkeni için ise Sonlu farklar, Newmark- $\beta$  ve yine diferansiyel quadrature olarak üç farklı metot kullanılmıştır. Kullanılan farklı metot ve polinom fonksiyonlarının verdiği sonuçların performanslarının karşılaştırılması çalışmanın esas amacı olduğundan notasyonda ve gösterimde kolaylık sağlaması amacıyla aşağıdaki kısaltmalar yapılmıştır.

Plak	: PLK
Kabuk	: KBK
Elastik zemine oturan plak	: PLK-EZ
Elastik zemine oturan kabuk	: KBK-EZ
Diferansiyel quadrature	: DQ
Polinomal diferansiyel quadrature	: PDQ
Harmonik diferansiyel quadrature	: HDQ
Kuvvet polinomu	: KuvPol
Legendre polinomu	: LgnPol
Lagrange polinomu	: LagPol
Chebysev polinomu	: ChbPol
Harmonik polinom	: HarPol
Newmark- $\beta$	: NWM
Sonlu farklar	: SF
Statik analiz	: STK
Dinamik analiz	: DYN

## ÖZET

Doktora Tezi

# POLİNOMAL DİFERANSİYEL QUADRATURE (PDQ) METODU İLE ELASTİK ZEMİNE OTURAN PLAK VE KABUKLARIN GEOMETRİK BAKIMDAN LİNEER OLMAYAN STATİK VE DİNAMİK ANALİZİ

Ömer CİVALEK

Fırat Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
İnşaat Anabilim Dalı

2004, Sayfa : 111

Gerek mühendislik sistemlerinin analizinde ve gerekse uygulamalı disiplinlerde diferansiyel denklemlerin çözümü büyük bir öneme sahiptir. Çoğunlukla bir sınır değer ve/veya başlangıç değer formunda olan bu denklemlerin analitik çözümü çoğu durumda mümkün değildir. Bu amaçla yeter doğrulukta çözümler elde etmek için günümüze kadar pek çok sayısal analiz yöntemi geliştirilmiştir. Bu yöntemlerin her birinin; gerektirdikleri bilgisayar kapasiteleri, zaman ve hassasiyet açısından biri birine göre avantajları ve dezavantajları mevcuttur. Bu tezde Winkler-Pasternak elastik zemine oturan plak ve kabukların geometrik bakımdan lineer olmayan statik ve dinamik analizleri için polinomal diferansiyel quadrature (PDQ) metodu geliştirilmiştir. Diferansiyel Quadrature Metodunda bir fonksiyonun koordinat doğrultusuna göre türevi, tüm çözüm bölgesindeki yüksek dereceden bir polinom yardımıyla yaklaşım kurabilen sürekli bir fonksiyon ve o doğrultu boyunca bütün ağ noktalarındaki fonksiyon değerlerinin tümünün lineer toplamı olarak ifade edilir. Diferansiyel quadrature metodundaki ağırlık katsayıları; Kuvvet, Legendre, Chebyshev ve Lagrange polinomları ve harmonik fonksiyonlar ile hesaplanmıştır. Sonuçlar, literatürdeki mevcut analitik ve diğer sayısal yöntemler ile elde edilen çözümler ile karşılaştırılmıştır.

**Anahtar Kelimeler :** Elastik zemine oturan plak ve kabuk, Geometrik bakımdan lineer olmayan analiz, Polinomal diferansiyel quadrature, Dinamik analiz.

## ABSTRACT

PhD. Thesis

# GEOMETRICALLY NON-LINEAR STATIC AND DYNAMIC ANALYSIS OF PLATES AND SHELLS RESTING ON ELASTIC FOUNDATION BY THE METHOD OF POLYNOMIAL DIFFERENTIAL QUADRATURE (PDQ)

Ömer CİVALEK

Fırat University  
Graduate School of Natural and Applied Sciences  
Department of Mechanical Engineering

2004, Page : 111

The solution of differential equations has a great importance in the analysis of engineering systems and applied disciplines. It is not always possible to obtain the analytical solutions of these equations, which has a boundary value and/or initial value form as usual. For this purpose, it has been improved many numerical analysis method to obtain the adequate solutions up to now. All of these methods have a relative advantage and disadvantage with respect to each other because of the time aspect and the sensitivity. In this thesis, polynomial differential quadrature (PDQ) method is developed for the geometrically nonlinear static and dynamic analysis of plates and shells resting on Winkler-Pasternak elastic foundation. In the method of differential quadrature, partial space derivatives of a function appearing in a differential equation are approximated by means of a polynomial expressed as the weighted linear sum of the function values at a preselected grid of discrete points. The weighting coefficients for differential quadrature are obtained using the Power, Legendre, Chebyshev and Lagrange polynomials, and harmonic functions. Results are compared with existing solutions available from other analytical and numerical methods in the literature.

**Key Words:** Plates and shells on elastic foundation, Geometrically non-linear analysis, Polynomial differential quadrature, Dynamic analysis.

## 1. GİRİŞ

### 1.1. Elastik Zemine Oturan Plak Ve Kabuklar

Elastik zemine oturan çeşitli geometrilerdeki plak ve kabukların lineer ve lineer olmayan analizi geçen 25 yıl boyunca araştırmacıların ve teorisyenlerin en fazla ilgisini çeken konulardan biri olmuştur. Özellikle 1960' lı yıllardan sonra uçak-uzay sanayiindeki hızlı gelişmeler ve kompozitlerin sektörde kullanılması ile farklı tip ve amaçlar için geliştirilen yapılar ile birlikte elastik zemine oturan yapı türlerinde ve ihtiyaçlarında da bir artış olmuştur.

Elastik zemine oturan plak ve kabuklar pek çok sektörde özellikle; füze ve roket rampaları olarak askeri alanlarda ve uçak-uzay sanayisinde, teknoloji de çeşitli uygulamalarda, inşaat ve makine mühendisliği alanında, endüstride çeşitli fabrika kren ve makinaların zemine sabitlenmesinde, dış hekimliği ve biyomekanikte, kıyı-liman yapılarında, sıvı ve gazların iletim hatlarında, temel ve zemin mühendisliğinde, nükleer enerji santrallerinde, uçak hangarlarında, özel amaçlı (özellikle ağır kargo uçakları ve süpersonik uçakların inebileceği) hava alanı inşasında ve demiryolu uygulamalarında karşılaşılır [1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12]. Daha çok yüksek maliyet gerektiren büyük kapsamlı işlerde ve stratejik yapılarda kullanılan elastik zemine oturan plak ve kabukların her türlü dış etkiye karşı yeter güvenlikte inşası büyük önem kazanmaktadır. Dolayısı ile, gerek mevcut yükler ve kendi ağırlıkları altındaki gerilme, deformasyon, eğilme ve çeşitli noktalarındaki deplasmanlarının hesaplandığı statik hesap ve gerekse deprem gibi dinamik yükler altındaki dinamik analizleri yeter hassasiyete sahip olarak yapılmalıdır.

### 1.2. Daha Önceki Çalışmalar

Günümüze kadar elastik zemine oturan plak ve kabukların hesabı çeşitli sayısal yöntemler kullanılarak yapılmıştır. Bu çalışmalarda daha çok, sonlu farklar, sonlu elemanlar, sınır elemanlar, Ritz, Galerkin yöntemi, sayısal ya da çok ölçekli pertürbasyon yöntemlerin kullanıldığı pertürbasyon teknikleri, kollokasyon, varyasyonel teknikler ve seriler ile yapılmış çözümleri içermektedir.

Nath ve diğeri tarafından yapılan çalışmada [1] elastik zemine oturan dikdörtgen plakların lineer olmayan titreşimi incelenmiştir. Zamana bağlı olarak deplasmanlar elde edilmiştir. Üniform adım yük ve sinüs periyodik gibi iki farklı dinamik yük etkisi dikkate alınmıştır. Plakın lineer olmayan dinamik hesabı için gerekli hareket denklemi Von- Karman plak denklemi olarak elde edilmiş ve bu denklem sonlu farklar metodu ile çözülmüştür. Zemin parametresi,  $K$ , değerinin artmasıyla hesaplanan deplasmanın genliğinin azaldığı vurgulanmıştır.

Dumir ve Bhaskar [2] Winkler ve Pasternak tipi elastik zemine oturan dikdörtgen plakların lineer olmayan statik hesabını yapmışlardır. Çalışmada ortogonal nokta kollokasyon metodunu kullanmışlardır. Göz önüne alınan zemin modeli non-lineerdir. Mesnet koşulları olarak basit ve ankastre durumlar dikkate alınmıştır.

Dumir yapmış olduğu çalışmada izotrop ince plakların Galerkin yöntemiyle lineer olmayan dinamik analizini yapmıştır ve elde ettiği değerlere elastik zeminin etkisi incelenmiştir [3].

Elastik zemine oturan ince izotrop dairesel plakların lineer olmayan dinamik hesabı Chebyshev polinomları ve Houbolt tekniği ile hesaplanmıştır [4]. Çalışmada göz önüne alınan elastik zemin, hem Winkler (kesme etkilerinin ihmal edildiği) hem de Pasternak (kesme etkisinin dikkate alındığı) zemin türleridir. Plak lineer olmayan titreşiminin yönetici diferansiyel denklemi hem konum hem de zaman değişkeninin çeşitli mertebelerden türevlerini içeren bir non-lineer denklemdir. Çalışmada konum değişkeninin integrasyonu için Chebyshev polinomları, zaman değişkeninin integrasyonu için Houbolt tekniği kullanılmıştır.

Yapılan diğer çalışmalarda [5,10] dairesel plakların geometrik bakımdan lineer olmayan statik hesabı Chebyshev polinomları kullanılarak yapılmıştır.

Sonlu farklar ve Houbolt metotları, elastik zemine oturan çift eğrilikli basık kabukların dinamik hesabına uygulanmıştır [6]. Von Karman-Donnell kabuk teorisi kullanılarak sistem yönetici denklemi elde edilmiştir. Sisteme ait bu hareket denklemi, konum değişkenini içeren türevlerin sonlu farklar, zaman değişkeni için Houbolt sayısal integrasyon metodunun kullanılması ile lineer bir denklem takımına indirgenmiştir. Dinamik yük olarak adım ve sinüsoidal yük dikkate alınmıştır. Zemin rijitliği ve kütesinin deplasmanlar üzerine etkisi incelenmiştir.

Cheung tarafından yapılan çalışmada [7] elastik zemine oturan dikdörtgen plakların sonlu elemanlar ile çözümü sunulmuştur. Lineer statik analizin yapıldığı çalışmada eğilme momentleri ve gerilmeler hesaplanmıştır.

Bir başka çalışmada [8] Reissner-Mindlin plak teorisi kullanılarak iki parametrelili elastik zemine oturan dikdörtgen plaklar için 9 düğüm noktalı bir katı (solid) sonlu eleman geliştirilmiş ve lineer statik analiz yapılmıştır.

Kukreti ve Man-Gi yaptıkları çalışmada [9] üniform yayılı yük etkisindeki dikdörtgen plakların minimum potansiyel enerji prensibine dayalı analitik yaklaşım ile lineer statik hesabı yapılmıştır.

Dairesel ve dikdörtgen plakların non-lineer titreşim frekanslarının hesaplandığı çalışmada [11] Galerkin metodu kullanılmıştır.

Qin [12] yaptığı çalışmasında kare bir plağın çeşitli noktalarındaki deplasmanları ve eğilme momentleri Winkler ve Pasternak zemin türü için incelenmiştir. Çalışmada Hibrit bir sonlu eleman modeli önerilmiştir.

İki parametrelili zemin modelinin dikkate alındığı çalışmada Yang [13] ince dikdörtgen plakların lineer statik hesabını yapmış ve çeşitli noktalardaki düşey deplasmanlar ile eğilme değerleri elde edilmiştir.

Sonlu elemanlar metodu ile elastik zemine oturan plakların lineer statik hesabı yapılmış ve eğilme momenti ile deplasmanlar bulunmuştur. Winkler zemin için çözüm yapılmış ve metot izotrop elastik yarı düzlem için geliştirilerek zemin etkisini içeren genel bir rijitlik matrisi kurulmuştur [14].

Dillard tarafından yapılan çalışmada [15] Winkler elastik zemine oturan dikdörtgen ve kare plakların eğilme hesabı analitik olarak gerçekleştirilmiştir. Sistem yönetici denklemi 6. mertebeden bir diferansiyel denklem olup çözüme seriler yardımıyla ulaşılmıştır. Çalışmada tekil yük ve tekil moment etkileri dikkate alınmıştır.

Lineer vizkoelastik zemine oturan dairesel plakların eğilme hesabı Laplace dönüşümü yardımıyla gerçekleştirilmiştir [16].

Datta tarafından yapılan çalışmada [17] elastik zemine oturan daire ve dikdörtgen şeklinde geometrilere sahip plakların lineer olmayan titreşimi analitik olarak incelenmiştir. Galerkin metodu ile lineer olmayan titreşim frekansları elde edilmiştir. Basit ve ankastre mesnet koşulları için çözüm yapılmıştır.

İki parametrelili elastik zemine oturan ince plakların statik hesabı sınır elamanlar metodu ile yapılmıştır. Dördüncü mertebeden olan sisteme ait yönetici diferansiyel denklem her biri ikinci mertebeden olan Poisson ve Helmholtz gibi bilinen iki forma indirgenmiş ve sınır elamanlar metodu ile çözülmüştür [18].

Tabakalı kompozit dikdörtgen plakların lineer olmayan eğilme hesabı, üniform yayılı yük ve termal etkiler dikkate alınarak yapılmıştır. Kayma etkilerini denklemlere ilave eden Pasternak zemin modeli (iki parametrelili) kullanılan çalışmada, sayısal çözümler için Galerkin-Perturbasyon kombinasyonu kullanılmıştır[19].

Lineer davranışa sahip olmayan bir zemine oturan kompozit tabakalı dikdörtgen bir plağın, aksel olmayan düzlem yükü etkisinde inelastik burkulma hesabı analitik olarak incelenmiştir [20]. Çalışmada kullanılan yöntem, lineerleştirmeye dayalı perturbasyon tekniğidir.

Pasternak elastik zemine oturan dairesel silindirik kabuğun serbest titreşimi, Paliwal ve Pandey [21] tarafından yapılmıştır. Literatürde yaygın olarak bilinen Donnel-Muhtari kabuk denklemleri analitik olarak çözülmüş ve zemin parametresine bağlı olarak frekans değişimi incelenmiştir.

Massalas ve Kafousias [22] yaptıkları çalışmada, kübik nonlineariteye sahip zemine oturan basık silindirik panelin eğilmeli titreşimi incelenmiştir. Büyük deplasman teorisi ile elde edilen yönetici denklem çok ölçekli perturbasyon tekniği ile lineerleştirilmiş ve elde edilen denklem Galerkin metodu ile çözülmüştür.

Paliwal ve diğ.[23] yaptıkları çalışmada, Winkler-Pasternak iki parametrelili zemine oturan dairesel silindirik kabuğun membran kabuk teorisine dayalı elde edilen hareket denklemleri bir özdeğer forma indirgenmiş ve kabuğun radyal, boylamasına ve enine titreşim modunun zemin parametresine bağlı olarak etkilendiği vurgulanmıştır.

Yine Paliwal ve Bhalla [24] tarafından yapılan çalışmada Pasternak elastik zemine oturan silindirik kabuğun lineer olmayan statik hesabı Varyasyonel prensip ve Galerkin yönteminin birlikte uygulanmasıyla yapılmıştır. Kenarlarından basit mesnetli kabuğun yük-deplasman eğrisi farklı yük, malzeme, geometri ve zemin özellikleri için elde edilmiştir.

Nath ve Jain [25] tarafından yapılan çalışmada Winkler-Pasternak elastik zemine oturan basık küresel kabuğun lineer olmayan dinamik analizi sürekli adım yük fonksiyonu için elde edilmiştir. Kabuk yönetici denklemleri Donnel kabuk teorisi ile

çıkartılmıştır. Elde edilen kısmi türevli nonlinear hareket denklemi Taylor serisine açılarak lineerleştirilmiştir. Daha sonra konum (uzay) değişkenleri Chebyshev serileri, zaman değişkeni ise Houbolt sayısal integrasyon metodu yardımıyla integre edilerek lineer bir denklem takımına dönüştürülmüş ve çözülmüştür.

Diferansiyel quadrature metotlarının herhangi biriyle çözülmüş elastik zemine oturan kabuk problemine literatürde rastlanmamıştır. Elastik zemine oturan plaklar ile ilgili literatürde iki adet çalışma olup [26,27] bu çalışmalarda lineer statik analiz yapılmıştır.

Liu yaptığı çalışmada [26] Winkler elastik zemine oturan kalın dikdörtgen plakların Reissner plak teorisine göre elde edilen yönetici denklem diferansiyel quadrature elemanlar yöntemi ile lineer statik hesabını incelemiştir. Çalışmada basit mesnet ve ankastre mesnet durumları dikkate alınmıştır. Liew ve diğ. [27] tarafından yapılan çalışmada elastik zemine oturan kalın plakların lineer statik analizi yapılmıştır. Bilindiği gibi kalın plaklar Kirchhoff plak teorisi ile çözülmektedir. Ancak Kirchhoff plak teorisinde boyuna kayma deformasyonları ihmal edilmektedir. Bu etkileri dikkate alan plak teorileri geliştirilmiştir. Bunlar Reissner [28] ve Mindlin [29] plak teorileridir.

Literatürde DQ yöntemlerinden herhangi biriyle elastik zemine oturan kabukların lineer veya lineer olmayan dinamik hesabı ile ilgili bir çalışma yoktur. Elastik zemine oturan plakların DQ çözümü ise sadece lineer statik analizinin yapıldığı iki çalışma olup bu çalışmalarda nonlinear etkiler incelenmediği gibi sadece statik analiz yapılmıştır. Sonuç olarak literatürde DQ yöntemleri ile elastik zemine oturan plak ve/veya kabukların statik veya dinamik hesabı ile ilgili bir çalışma ile karşılaşılmamıştır.

Çalışma temel olarak altı esas bölüm halinde düzenlenmiştir. Bu bölümde, yani giriş bölümünde, çalışma esas hatlarıyla tanıtılmış ve daha önce yapılan çalışmalar vurgulanmıştır. Çalışmanın amacı ve önemi açıklanmıştır. Çalışmada kullanılacak olan diferansiyel quadrature (DQ) metodu ikinci bölümde verilmiş, gerekli formülasyonlar çıkartılmıştır. Diferansiyel quadrature (DQ) metodunda ağırlık katsayılarının hesabında kullanılacak polinomlar ve ağırlık katsayı hesabı yine bu bölümde verilmiştir. Üçüncü bölümde elastik zemine oturan dikdörtgen plak ve çift eğrilikli basık kabuklara ait temel denklemler ve bunların DQ formları çıkartılmıştır. Elastik zemine oturan plak ve kabuklara ait statik ve dinamik hesap sonuçları dördüncü bölümde sunulmuştur. Bu

bölüm statik hesap için yük-deplasman ve dinamik analizler için zamana bağlı deplasman grafiklerini içermektedir. Beşinci bölümde, DQ metodunda kullanılan farklı polinomlar ve zaman integrasyonu için kullanılan sonlu farklar, Newmark- $\beta$ , veya yine DQ metotlarının kullanılması ile elde edilen hata değerleri grafik olarak takdim edilmiş ve kapsamlı bir hata analizi yapılmıştır. Altıncı bölümde elde edilen bulgular tartışılmış ve sonuçlar maddeler halinde sıralanmıştır.

### 1.3. Çalışmanın Amacı ve Önemi

Yüksek mukavemetli malzemelerin imalatı ve kompozitlerin yapı sektöründe kullanılması, mühendislik yapılarının uygulama alanlarının çeşitliliğine yol açmıştır. Elastik zemine oturan yapılar özellikle kıyı-liman yapıları, demiryolu ve raylı sistemler, biyomekanik, nükleer enerji santralleri, makine ve inşaat mühendisliği, uçak-uzay sanayi ve pek çok askeri ve savunma amaçlı yapılarda kullanılmaktadır. Geniş bir uygulama alanına sahip olması nedeniyle bu tür sistemlerin hesabı ve dizaynı önem kazanmaktadır. Bu yapılar direkt olarak zemin ile temas halinde olduklarından diğer yapılar içinde büyük bir öneme sahip olan dinamik analiz bu tür sistemler için biraz daha önem arz etmektedir. Buna ilaveten, daha çok ulaşım, savunma ve askeri amaçlı stratejik yapılarda kullanıldığından bu tür yapıların deprem gibi dinamik bir yüklemeye karşı da gerekli dayanıma sahip bir şekilde boyutlandırılmaları gerekmektedir.

Diferansiyel quadrature metotlarının uygulamalı mühendislik alanında ve özellikle yapı mekaniği problemlerinde kullanımı henüz 12 yıllık bir geçmişe sahiptir. Metodun günümüze kadarki uygulamalarında daha çok standart diferansiyel quadrature metodu, genelleştirilmiş diferansiyel quadrature metodu ve quadrature elemanlar metodu kullanılmış olup, pratik amaçlı mühendislik analizinde daha az düğüm(grid) noktası kullanılarak daha hassas sonuçlar verdiği vurgulanmıştır [26,27]. Metodun günümüzdeki uygulamaları, kırılma mekaniği, çatlak bölgesindeki gerilme hesabı ve bazı tür akışkanlar mekaniği ve ısı transferi problemlerinde ortaya çıkan hareketli sınır koşullarına sahip problemlerin modellenmesi ile ilgilidir.

Sonuç olarak söylenebilir ki elastik zemine oturan plak ve kabukların geometrik bakımdan lineer olmayan statik ve özellikle dinamik hesabı günümüzde önemini korumakta ve üzerinde çalışılmaktadır. Geniş bir spektrumda uygulama alanına sahip

olan bu yapıların lineer olmayan dinamik hesabı DQ yöntemleriyle birlikte sonlu farklar ve Newmark gibi zaman değişkenine ait integrasyon metotları ile daha pratik ve kısmen daha az bir bilgisayar ihtiyacı ve dolayısı ile kısmen daha az bir sürede gerçekleştirilebilecektir.

Elde edilecek yük-deplasman ve dinamik hesap için zamana bağlı deplasman ifadeleri boyutlandırmaya esas teşkil edecek doneler olup ileride yapılabilecek deplasman kısıtlayıcısı altında elastik zemine oturan plak ve kabukların pratik olarak optimizasyonunu gerçekleştirecek çalışmalarda kullanılabilir niteliktedir. Elastik zemine oturan farklı geometrideki plak (dairesel plak) veya kabukların (dönel kabuk) lineer olmayan dinamik hesapları bu çalışma kapsamındaki formülasyonlar ile çözülebilecek yapıda olup gelecekte yapılabilecek çalışmalar arasındadır.



## 2. DİFERANSİYEL QUADRATURE METODU (DQM)

### 2.1. Diferansiyel Quadrature Metoduna Genel Bir Bakış

Daha önceki giriş bölümünde belirtildiği gibi kapalı matematik çözüm yani analitik çözüm çoğu uygulamalı bilim dalında ve mühendislik problemlerinde ulaşılmak istenen ideal çözümdür. Ancak analitik çözüm, problemlerin çeşitli karakteristikleri nedeniyle çoğu kez imkansız olur. Bazen mevcut malzeme bileşenlerinin doğrusal olmayan bünye denklemleri, bazen problemin başlangıcında problemi gerçekleşmesi gereken başlangıç değerlerinin karmaşıklığı veya özdeş denklemlere götürmesi veya temas yani dokunma (sıvı-yapı, zemin-yapı etkileşim problemlerinde olduğu gibi) fiziksel olaylarında olduğu gibi sınır koşullarının lineer olmaması gibi nedenlerle kapalı matematik çözüm imkansız olup, tek çözüm sayısal yaklaşım kurmaktır. Mevcut bu sayısal çözümlerin biri birlerine ve problem tiplerine göre bazı üstünlükleri veya bazı olumsuzlukları olabilir. Yeter doğrulukta çözümler elde etmek için günümüze kadar pek çok sayısal analiz yöntemi önerilmiştir.

Genel olarak sayısal yaklaşım yöntemleri, zaman veya uzay bölgesi belirli aralıklara bölünerek çözüme birkaç adımda ulaşmayı veya çoğu durumda ardışık iterasyon çözümlerini gerektirir [30,34,35,36,38]. Bu nedenle geliştirilen sayısal yöntemler; gerektirdikleri hesaplayıcı ihtiyacı, çözüm için harcama zaman veya CPU(Merkezi işlem birimi) süresi, denklemlerin stabilitesi, kullanılan düğüm noktası sayısı, problem çözümü için ön işlemler, ve en önemlisi bu çözüm için harcanan para yani ekonomi gibi kıstaslar açısından çeşitli avantajlara veya dezavantajlara sahip olur. Doğal olarak esas olan, daha kısa sürede daha hassas sonuçlar elde etmektir [49]. Daha hassas sonuçların daha az sayıda düğüm noktası kullanılarak elde edilebilmesi ve böylelikle daha az bilgisayar ihtiyacı, sonuçların daha kısa sürede elde edilebilmesi yani daha ekonomik çözümler elde edilebilme imkanının araştırılması çalışmaları yeni yöntemlerin geliştirilmesine yol açmıştır. Bu yöntemler içinde, Richard Bellman tarafından [50] geliştirilen ve ilk defa "Differential Quadrature" terimi ile tanıtılan bu yöntem herhangi bir sistemin diferansiyel formda elde edilmiş sistem denklemlerini mevcut sınır/başlangıç koşullarını da denklemlere dahil ederek çözümünü önerir. İlk

çalışmasında Bellman [50] önerdiği bu metoda dair çeşitli uygulamaları daha sonra yaptığı çalışmalarında [50,51] vermiştir. Bu çalışmalarında Bellman; biomekanik, akışkanlar dinamiği ve fiziko-kimya problemlerinde karşılaşılan bazı lineer olmayan adi türevli diferansiyel denklemlerin çözümünü vermiştir. Daha sonra yazmış olduğu kitaplarında diferansiyel quadrature metoduna bir bölüm ayırmış [43,44] ve basit bazı bağıntılar vermiştir. Metodun literatürdeki yapı mekaniği ve yapı mühendisliği alanındaki ilk uygulaması Bert ve ekibi tarafından kiriş ve plakların titreşim hesabıdır [53]. Bununla birlikte Shu ve Richards tarafından ağırlık katsayılarının hesaplanması için Genelleştirilmiş Diferansiyel Quadrature (GDQ) metodu adıyla genel bir formülasyonun önerilmesinden sonra, 1992 yılından itibaren diferansiyel quadrature metodu ve genelleştirilmiş diferansiyel quadrature metodu ile ilgili çalışmalar büyük bir hız kazanmıştır. Bu tarihten sonra yapı mekaniği ve akışkanlar mekaniği gibi uygulamalı mekanik alanında diferansiyel quadrature metodu ve genelleştirilmiş diferansiyel quadrature metodu kullanılarak yapılmış pek çok çalışma mevcuttur [47-55] ve [59-69]. Son yıllarda metod giderek yaygınlaşmıştır. [61-72].

Diferansiyel quadrature metodu; *“bir fonksiyonun verilen bir ayrık noktadaki bir uzay değişkenine göre kısmi türevi, o değişken bölgesinin bütün ayrık noktalarındaki fonksiyon değerlerinin ağırlıklı bir lineer toplamı ile ifade edilir”*, şeklinde tanımlanan düşünceye dayanır. Yeter yaklaşıpta sonuçlar elde etmek için daha az sayıda düğüm kullanan diferansiyel quadrature metodu; fizik ve mühendislikte karşılaşılan başlangıç değer ve sınır değer problemleri için farklı bir yaklaşım ortaya koymuştur.

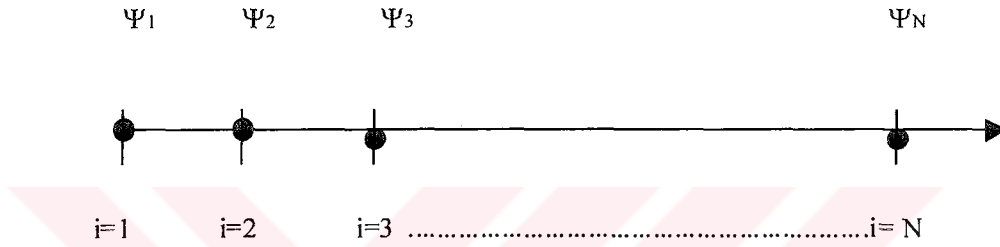
Bu amaçla tek boyutlu (Şekil 2.1) bir  $\psi(x)$  fonksiyonun birinci türevini  $x_i (i=1,2,\dots,N)$  noktalarında  $N$  ayrık nokta için göz önüne alırsak  $i$ .nci ayrık nokta için birinci türev

$$\psi_x(x_i) = \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{x=x_i} = \sum_{j=1}^N A_{ij} \psi(x_j); \quad i = 1,2,\dots,N \quad (2.1)$$

olacaktır. Burada  $x_j$  değişken bölgesindeki ayrık noktaları,  $\psi(x_j)$  bu noktalardaki fonksiyon değerlerini, ve  $A_{ij}$  birinci dereceden türev için bu değerleri fonksiyon değerlerine bağlayan ağırlık katsayılarını ifade eder. Örnek olarak eşit aralıklı düğüm nokta dağılımı için birinci mertebeden ağırlık katsayıları

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^N \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^N \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_N & \dots & x_N^N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^N \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^N \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_N & \dots & x_N^N \end{bmatrix}^{-1}$$

üçlü çarpımı ile ifade edilir.



Şekil 2.1 Tek boyutlu sistem için tanımlanan düğüm noktaları

Ağırlık katsayılarının hesabı, karşılık gelen koordinat yönlerinde fonksiyonel yaklaşımlar ile gerçekleştirilir. Test fonksiyonu ya da yaklaşım fonksiyonu olarak bilinen bu fonksiyonların seçiminde süreklilik şartına dikkat edilmelidir. Benzer zorunluluk sonlu elamanlar yöntemindeki enterpolasyon fonksiyonlarının seçiminde de vardır. Ancak DQ metodunda, seçilen fonksiyonların Ritz metodunda olduğu gibi sınır şartını sağlaması zorunluluğu yoktur. Yaklaşım fonksiyonları, alan değişkenlerinin olası kararlı (üniform) durumlarını tanımlayabilmeli ve diferansiyel denklemdeki ya da sınır şartlarındaki mevcut en yüksek dereceli diferansiyele kadar türevinin alınabilmesi gerekir. Yani süreklilik şartı için, bir koordinat yönündeki düğüm sayısı, diferansiyel denklemdeki karşılık gelen bağımsız değişkene göre en yüksek dereceli türevin bir fazlasına eşit olmalıdır. Bu çalışmada ağırlık katsayılarının hesaplanmasında çeşitli tipte polinomlar kullanılacak ve her polinoma ait ağırlık katsayılarının hesabında gerekli formülasyonlar çıkartılacaktır.

## 2.2. Kuvvet Polinomları

Bellman ve arkadaşları [43,44] ağırlık katsayılarının hesabı için iki farklı yöntem önermişlerdir. Bunlardan birincisinde (2.1) denklemi tam olarak alındığında, test fonksiyonu olarak  $(N-1)$  veya daha küçük dereceden polinom fonksiyon;

$$\Psi_k(x) = x^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (2.2)$$

olarak seçilir ve bu ifade denklem (2.1)'de yerine yazılırsa aşağıda belirtildiği formda bir lineer denklem takımı verir

$$(k-1)x_i^{k-2} = \sum_{j=1}^N A_{ij} x_j^{k-1} \quad (2.3)$$

$i = 1, 2, \dots, N$  ve  $k = 1, 2, \dots, N$  için

Ancak bu denklem sisteminin katsayılar matrisinin determinantı Vandermonde formunda olduğundan tekil bir çözüme sahiptir. Denklem ağırlık katsayıları için analitik olarak Hamming'in önerdiği yöntemle [45] yada Vandermonde denklemleri için Bjorck ve Pereyra'nın önerdiği gibi bilinen bazı özel algoritmalar ile sayısal olarak çözülebilir [46]. Bu tekilliği gidermek için, ağırlık katsayıları, farklı düğüm nokta sayıları ile (2.3) denklemi eşit düğüm değerleri için hesaplanmalıdır. Denklem (2.1) aşağıdaki formda da verilebilir.

$$\left\{ \frac{\partial \Psi(x)}{\partial x} \right\}_j = [A_{ij}] \left\{ \Psi(x) \right\}_j \quad (2.4)$$

veya

$$\begin{Bmatrix} \Psi'(x_1) \\ \Psi'(x_2) \\ \cdot \\ \cdot \\ \Psi'(x_N) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1N} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2N} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{N1} & A_{N2} & \cdot & A_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Psi(x_1) \\ \Psi(x_2) \\ \cdot \\ \cdot \\ \Psi(x_N) \end{Bmatrix} \quad (2.5)$$

Benzer işlemler iki ve daha yüksek dereceden türev ifadeleri için de yazılabilir. Böylece, her bir dereceden türev için ağırlık ifadeleri birinci dereceden türev ifadesinden farklı olmaktadır. İkinci dereceden türev için yöntem

$$\psi_{xx}(x_i) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \Big|_{x=x_i} = \sum_{j=1}^N B_{ij} \psi(x_j); \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.6)$$

olarak verilir. Burada  $B_{ij}$  ikinci dereceden türev için ağırlık katsayısıdır. Denklem (2.6) birinci dereceden ağırlık katsayıları cinsinden

$$u_{xx}(x_i) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{x=x_i} = \sum_{j=1}^N A_{ij} \sum_{k=1}^N A_{jk} u(x_k); \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.7)$$

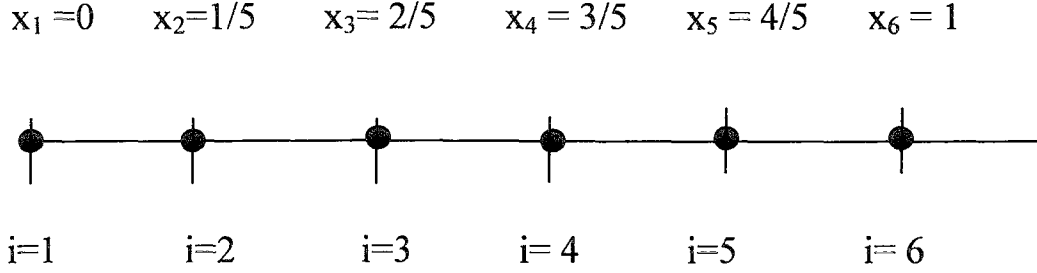
olarak yazılır. Denklem (2.6) matris formunda

$$\begin{Bmatrix} \Psi''(x_1) \\ \Psi''(x_2) \\ \cdot \\ \cdot \\ \Psi''(x_N) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1N} \\ B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2N} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ B_{N1} & B_{N2} & \cdot & B_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Psi(x_1) \\ \Psi(x_2) \\ \cdot \\ \cdot \\ \Psi(x_N) \end{Bmatrix} \quad (2.8)$$

olur. Denklem (2.2) ile verilen polinom fonksiyon uygulanırsa ikinci dereceden türev ifadesi

$$(k-1)(k-2)x_i^{k-3} = \sum_{j=1}^N B_{ij} x_j^{k-1} \quad (2.9)$$

olmaktadır. Bu denklem yukarıda verilen (2.3) denklemine benzer yaklaşımla çözülür. Örnek olarak Şekil 2.2'de görüldüğü şekilde eşit aralıklı altı nokta (N= 6) seçelim.



Şekil 2.2 Bir boyutlu sistemler için düğüm noktaları

Örnek olarak 6 noktalı eşit aralıklı düğüm nokta dağılımı için birinci mertebeden türev için gerekli ağırlık katsayısı

$$A = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} -137 & 300 & -300 & 200 & -75 & 12 \\ -12 & -65 & 120 & -60 & 20 & -3 \\ 3 & -30 & -20 & 60 & -15 & 2 \\ -2 & 15 & -60 & 20 & 30 & -3 \\ 3 & -20 & 60 & -120 & 65 & 12 \\ -12 & 75 & -200 & 300 & -300 & 137 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir.

Daha hassas sonuç elde edilmek istenirse daha büyük sayıda aralığa bölünerek hesap yapılır. Ancak bir boyutlu problemlerde; örneğin kirişlerin eğilme, burkulma ve titreşim hesabı gibi,  $N = 7$ , plak ve kabukların stabilite ve titreşim hesabı gibi iki boyutlu problemlerde ise  $N=9$  alınarak yeter yaklaşıklıkta sonuçlar elde edilmiştir [47,48,53,54,60,61,62,69,72,74]. Eğer spesifik yani özel olarak hesap yapılmak istenen bir nokta var ise bu noktaya göre düzenlenmiş eşit olmayan aralıklı düğüm nokta seçimi de benzer olarak yapılır[76,78,82,83,84,85].

Bununla birlikte N düğüm nokta sayısı 22 den büyük olunca elde edilen yukarıdaki denklemde  $x$  in kuvvetlerinden oluşan matris bir Vandermonde matrisi olup sistemin

çözümü tekil olur ve matrisin tersini almak bir hayli güçleşir. İşte bu tekilliği gidermek ve ağırlık katsayılarının hesabında daha kullanışlı bir formülasyon elde edebilmek için bazı araştırmacılar [82,83] analitik ifadeler elde etmişlerdir.

İkinci, üçüncü ve dördüncü dereceden ağırlık katsayıları  $B_{ij}$ ,  $C_{ij}$ ,  $D_{ij}$ , aşağıdaki formda hesaplanır

$$B_{ij} = \sum_{k=1}^N A_{ik} A_{kj} \quad (2.10)$$

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^N A_{ik} B_{kj} \quad (2.11)$$

$$D_{ij} = \sum_{k=1}^N A_{ik} C_{kj} \quad (2.12)$$

### 2.3. Legendre Polinomları

Bellman [50] ve arkadaşları tarafından ağırlık katsayılarının hesaplanması için önerilen ikinci yöntem birinciye benzer olup farklı bir test fonksiyonu seçilir. Denklem (2.1)'i sağlayacak şekilde  $x_k$  ötelenmiş Legendre polinomunun kökleri olarak

$$u_k(x) = \frac{L_N(x)}{(x - x_k) L_N'(x_k)}, \quad k=1,2,\dots,N \quad (2.13)$$

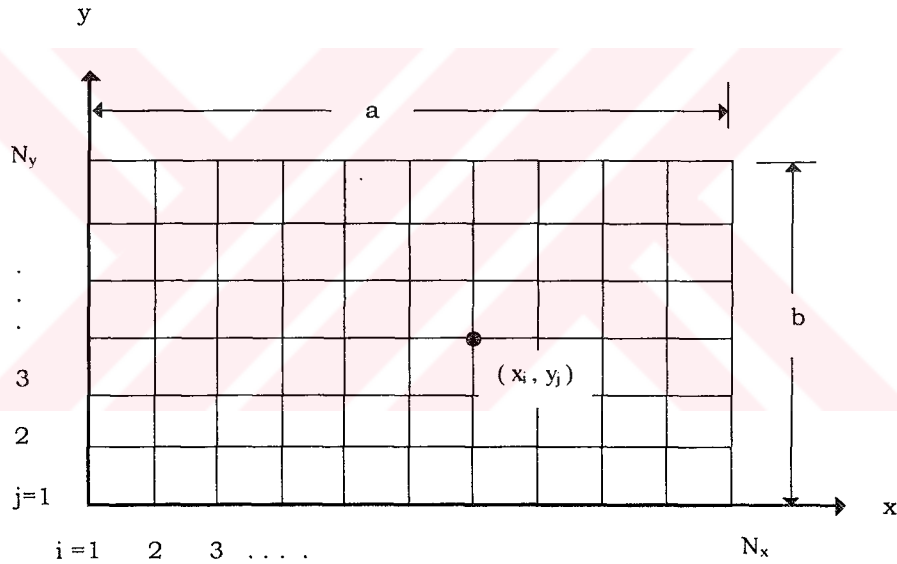
fonksiyonu seçilir. Burada N düğüm nokta sayısı,  $L_N(x)$  N. Dereceden legendre polinomu,  $L_N'(x)$  ise bu polinomun birinci türevidir. Denklemdeki  $x_k$  ötelenmiş legendre polinomunun kökleri olarak seçilip (2.13) ile verilen polinom fonksiyon (2.1) denkleminde yazılırsa ağırlık katsayıları

$$A_{ij} = \frac{L_N'(x_i)}{(x_i - x_j) L_N'(x_j)} ; \quad i \neq j \text{ için} \quad (2.14a)$$

$$A_{ii} = \frac{1-2x_i}{2x_i(x_i-1)} ; \quad i=j \text{ için} \quad (2.14b)$$

$$i, j = 1, 2, \dots, N$$

elde edilir. Bu ikinci yaklaşımda, (2.14a) ve (2.14b) ile tanımlanan ağırlık katsayıları birincide olduğu gibi herhangi bir teklik problemi ve lineer denklem takımı çözmeden elde edilir. Bir boyutlu problemlere benzer olarak iki boyutlu problemler için de diferansiyel quadrature metodu geliştirilebilir. Şekil 2.3'de görülen dikdörtgen düzlem için,  $N_x$  x-doğrultusundaki düğüm nokta sayısı ve  $N_y$  y-doğrultusundaki düğüm nokta sayısı olmak üzere türev ifadeleri yazılabilir.



Şekil 2.3. İki boyutlu dörtgen bir bölge için düğüm noktaları

Bu amaçla  $u(x,y)$  fonksiyonunun  $r$ -inci mertebeden  $x$ 'e göre,  $s$ -inci mertebeden  $y$ 'e göre ve  $(r+s)$ -nci- mertebeden  $x$  ve  $y$  değişkenlerine göre  $(x_i, y_j)$  ayrık noktaları için türev ifadeleri;

$$\left. \frac{\partial^r u}{\partial x^r} \right|_{x=x_i} = \sum_{k=1}^{N_x} A_{ik}^{(r)} u(x_k, y_j); \quad r = 1, 2, \dots, N_x - 1 \quad (2.15)$$

$$\left. \frac{\partial^s u}{\partial y^s} \right|_{y=y_j} = \sum_{k=1}^{N_x} B_{jk}^{(s)} u(x_i, y_k); \quad s=1,2,\dots,N_y-1 \quad (2.16)$$

$$\left. \frac{\partial^{(r+s)} u}{\partial x^r \partial y^s} \right|_{x_i y_j} = \frac{\partial^r}{\partial x^r} \left( \left. \frac{\partial^s u}{\partial y^s} \right|_{x_i y_j} \right) = \sum_{k=1}^{N_x} A_{ik}^{(r)} \sum_{m=1}^{N_y} B_{jm}^{(s)} u(x_k, y_m) \quad (2.17)$$

$i=1,2,\dots, N_x$ , ve  $j=1,2,\dots, N_y$  olarak verilir. Bir başka yaklaşımda Bert ve Malik [56] iki boyutlu problemler için  $x$  ve  $y$  yönünde fonksiyonlar seçerek çözümün bir çarpım polinom şeklinde yazılabileceğini önermiştir. Böylece

$$u(x, y) = F(x) \cdot G(y) \quad (2.18)$$

alınarak

$$F(x) = x^{\alpha-1}; \quad \alpha = 1,2,\dots,N_x \quad (2.19a)$$

$$G(y) = y^{\beta-1}; \quad \beta = 1,2,\dots,N_y \quad (2.19b)$$

şeklinde kuvvet polinomları için sırasıyla  $x$  ve  $y$  yönündeki türevler

$$\sum_{k=1}^{N_x} (x_k^{\alpha-1}) A_{ik}^{(r)} = \frac{\partial^r}{\partial x^r} (x^{\alpha-1}) \quad ; \quad i=1,2,\dots,N_x \quad \text{ve} \quad \alpha=1,2,\dots,N_x \quad (2.20)$$

$$\sum_{l=1}^{N_y} (y_l^{\beta-1}) B_{jl}^{(s)} = \frac{\partial^s}{\partial y^s} (y^{\beta-1}) \quad ; \quad j=1,2,\dots,N_y \quad \text{ve} \quad \beta=1,2,\dots,N_y \quad (2.21)$$

olur.  $A_{ij}^{(r)}$  ve  $B_{ij}^{(s)}$   $u(x,y)$  fonksiyonunun sırasıyla  $x$ 'e ve  $y$ 'ye göre  $r$  inci ve  $s$  inci mertebeden  $x_i$  ve  $y_j$  ayırık noktaları için yazılan türev ağırlık katsayılarıdır. Bu

katsayılar ilk olarak Shu ve Richards tarafından geliştirilmiştir [82]. Bu ağırlık katsayıları;

$$A_{ij}^{(r)} = r \left[ A_{ii}^{(r-1)} A_{ij}^{(1)} - \frac{A_{ij}^{(r-1)}}{x_i - x_j} \right]; \quad i, j = 1, 2, \dots, N_x, \quad j \neq i; \quad \text{ve } r = 2, 3, \dots, N_x - 1 \quad (2.22)$$

$$B_{ij}^{(s)} = s \left[ B_{ii}^{(s-1)} B_{ij}^{(1)} - \frac{A_{ij}^{(s-1)}}{y_i - y_j} \right]; \quad i, j = 1, 2, \dots, N_y, \quad j \neq i; \quad \text{ve } s = 2, 3, \dots, N_y - 1 \quad (2.23)$$

$$A_{ii}^{(r)} = - \sum_{j=1, j \neq i}^{N_x} A_{ij}^{(r)}; \quad i = 1, 2, \dots, N_x \quad \text{ve } r = 1, 2, \dots, N_x - 1 \quad (2.24)$$

$$B_{ii}^{(s)} = - \sum_{j=1, j \neq i}^{N_y} B_{ij}^{(s)}; \quad i = 1, 2, \dots, N_y \quad \text{ve } r = 1, 2, \dots, N_y - 1 \quad (2.25)$$

olmaktadır.

Yukarıda temel prensipleri verilen DQ yaklaşımında ağırlık katsayılarının hesaplanmasında çeşitli güçlükler ortaya çıkmaktadır. Birinci yöntemde elde edilen denklemin katsayılar matrisi Vandermonde sistemi olduğundan determinantının hesabında güçlük çıkar ve denklemin çözümü tekindir. Özellikle düğüm sayısı arttıkça sonuçların hassasiyeti azalabilmektedir.  $N$  düğüm sayısı 20 den büyük olduğu durumlarda sonuçların güvenilirliği azalmaktadır. Bunlara ilaveten, her bir işlem adımında  $N \times N$  denklem takımını çözme zorunluluğu vardır. İkinci yaklaşımda ise farklı sınır şartları ve geometri için metodun uygulanabilirliği azalmaktadır. Yani; gerek, daha az sayıda düğüm noktası seçilerek her işlem adımında bir lineer denklem takımı çözmeyi gerektiren birinci yöntemde gerekse de düğüm noktalarının dağılımını kısıtlayan Legendre yaklaşımında metodun uygulanabilirliği açısından çeşitli güçlükler vardır. Dolayısıyla; hem bu güçlükleri gidermek açısından hem de metodun kullanım alanı ve uygulanabilirliğini kolaylaştırmaya yönelik çabalar sonucunda iki ayrı grup tarafından bağımsız olarak yöntem geliştirilerek ağırlık katsayılarının hesabı farklı

düğüm noktaları ve yüksek dereceden türevler için uygun bir formda elde edilebilmiş ve geliştirilmiş diferansiyel quadrature metodu ortaya çıkmıştır [62,74,82,83]. Shu ve Richards ağırlık katsayıları için herhangi bir tekilliğe neden olmayan ve büyük sayıda lineer denklem takımı çözümü gerektirmeyen analitik ifadeler önermişlerdir [82,83]. Bu yöntemde birinci ve ikinci dereceden türevler için ;

$$A_{ij}^{(1)} = \frac{M^{(1)}(x_i)}{(x_i - x_j)M^{(1)}(x_j)}; \quad i, j = 1, 2, \dots, N_x, \quad j \neq i, \quad (2.26)$$

$$B_{ij}^{(1)} = \frac{P^{(1)}(y_i)}{(y_i - y_j)P^{(1)}(y_j)}; \quad i, j = 1, 2, \dots, N_y, \quad j \neq i, \quad (2.27)$$

ifadeleri verilmektedir. Burada;

$$M^{(1)}(x_i) = \prod_{j=1, j \neq i}^{N_x} (x_i - x_j), \quad P^{(1)}(y_i) = \prod_{j=1, j \neq i}^{N_y} (y_i - y_j) \quad (2.28)$$

ve

$$A_{ij}^{(r)} = r \left[ A_{ij}^{(r-1)} A_{ij}^{(1)} - \frac{A_{ij}^{(r-1)}}{x_i - x_j} \right]; \quad i, j = 1, 2, \dots, N_x, \quad j \neq i; \quad \text{ve } r = 2, 3, \dots, N_x - 1 \quad \text{için} \quad (2.29)$$

$$B_{ij}^{(s)} = s \left[ B_{ij}^{(s-1)} B_{ij}^{(1)} - \frac{B_{ij}^{(s-1)}}{y_i - y_j} \right]; \quad i, j = 1, 2, \dots, N_y, \quad j \neq i; \quad \text{ve } s = 2, 3, \dots, N_y - 1 \quad \text{için} \quad (2.30)$$

$$A_{ii}^{(r)} = - \sum_{j=1, j \neq i}^{N_x} A_{ij}^{(r)}; \quad i = 1, 2, \dots, N_x \quad \text{ve } r = 1, 2, \dots, N_x - 1 \quad (2.31)$$

$$B_{ii}^{(s)} = - \sum_{j=1, j \neq i}^{N_y} B_{ij}^{(s)}; \quad i=1,2,\dots,N_y \text{ ve } r=1,2,\dots,N_y-1 \quad (2.32)$$

şeklinde tanımlanır. Üniform düğüm noktaları için denklem (2.20) ve (2.21) ile verilen aşağıdaki forma indirgenir.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{(i-1)!(N-i)!}{\Delta x(i-j)(j-1)!(N-j)!} \quad i, j = 1, 2, \dots, N, j \neq i \quad (2.33)$$

$$B_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{(i-1)!(M-i)!}{\Delta y(i-j)(j-1)!(M-j)!}; \quad i, j = 1, 2, \dots, M, j \neq i \quad (2.34)$$

Burada  $\Delta x = x_i - x_{i-1}$  ve  $\Delta y = y_i - y_{i-1}$ . Bütün düğüm noktalarındaki fonksiyon değerleri hesaplanınca herhangi bir noktadaki türev yaklaşımları;

$$U(x, y_j) = \sum_{i=1}^{N_x} U(x_i, y_j) \alpha_i(x) \quad (2.35a)$$

$$U(x_i, y) = \sum_{j=1}^{N_y} U(x_i, y_j) \beta_j(y) \quad (2.35b)$$

$$U(x, y) = \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} U(x_i, y_j) \alpha_i(x) \beta_j(y) \quad (2.35c)$$

Burada  $\alpha_i(x)$  ve  $\beta_j(y)$  değerleri sırasıyla  $x$  ve  $y$  doğrultularındaki Lagranj enterpolasyon polinom fonksiyonlarıdır ve

$$\alpha_i(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_{N_x})}{M^{(1)}(x_i)} \quad (2.36a)$$

$$\beta_j(y) = \frac{(y - y_1)(y - y_2) \dots (y - y_{j-1})(y - y_{j+1}) \dots (y - y_{N_y})}{P^{(1)}(y_j)} \quad (2.37b)$$

olarak verilir. Benzer olarak  $U(x, y)$  fonksiyonunun  $x$  ve  $y$  koordinatlarına göre herhangi bir noktadaki türevi elde edilebilir. Eğer  $x_i$

$$x_i = \{ \cos 0, \cos \pi/N, \cos 2\pi/N, \dots, \cos 1 \} \quad (2.38)$$

şeklinde trigonometrik bir formda seçilirse (2.26) ve (2.27) denklemleri [60,71];

$$A_{ij} = \frac{(-1)^{i+j}}{c_j(x_i - x_j)} \quad 0 < i < N \quad (2.39)$$

$$A_{ij} = \frac{2(-1)^{i+j}}{c_j(x_i - x_j)} \quad i = 0 \text{ ve } i = N \quad (2.40)$$

olarak verilir.

## 2.4. Lagrange Polinomları

Ağırlık katsayılarının hesaplanmasında yukarıda anlatılan kuvvet polinomları ve Legendre polinomlarının kullanılması bilinen ilk yöntemdir ve  $N \leq 20$  olduğu durumda kuvvet polinomları uygun olup daha büyük sayıda düğüm noktası için Legendre polinomları kullanılmalıdır. Benzer olarak Lagrange polinomları kullanılarak bu ağırlık katsayılarını elde edelim. Bağımlı  $u$  değişkeni [85];

$$u(\bar{x}) = c_0 + c_1 \bar{x} + c_2 \bar{x}^2 + \dots + c_{n+2} \bar{x}^{n+2} \quad (2.41a)$$

olsun. Burada  $x$  değişkenininin  $\bar{x}$  ile ifade edilmesinin nedeni  $[-1,1]$  aralığında lokal koordinatlarda işlem yapılmasıdır. Global koordinatlardan lokal koordinatlara dönüşüm

$$\bar{x} = \frac{2}{(x_j - x_i)}(x - x_i) - 1 \quad (2.41b)$$

ile gerçekleştirilir. Burada  $x_i$  ve  $x_j$  global koordinat sisteminin uç noktalarıdır. Böylece (2.41) denklemi

$$u(\bar{x}) = [b]\{c\} \quad (2.42)$$

olarak yazılır. Burada

$$[b] = [1 \quad \bar{x} \quad \bar{x}^2 \quad \dots \quad \bar{x}^{n+1} \quad \bar{x}^{n+2}] \quad (2.43)$$

$$\{c\} = \left\{ c_0 \quad c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_n \quad c_{n+1} \quad c_{n+2} \right\}^T \quad (2.44)$$

ile tanımlıdır. Böylece bağımlı değişken  $u$

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ u'_0 \\ u_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{n-1} \\ u_n \\ u'_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \bar{x}_0 & \bar{x}_0^2 & \cdot & \cdot & \bar{x}_0^n & \bar{x}_0^{n+1} & \bar{x}_0^{n+2} \\ 0 & 1 & 2\bar{x}_0 & \cdot & \cdot & n\bar{x}_0^{n-1} & (n+1)\bar{x}_0^n & (n+2)\bar{x}_0^{n+1} \\ 1 & \bar{x}_1 & \bar{x}_1^2 & \cdot & \cdot & \bar{x}_1^n & \bar{x}_1^{n+1} & \bar{x}_1^{n+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \bar{x}_{n-1} & \bar{x}_{n-1}^2 & \cdot & \cdot & \bar{x}_{n-1}^n & \bar{x}_{n-1}^{n+1} & \bar{x}_{n-1}^{n+2} \\ 1 & \bar{x}_n & \bar{x}_n^2 & \cdot & \cdot & \bar{x}_n^n & \bar{x}_n^{n+1} & \bar{x}_n^{n+2} \\ 0 & 1 & 2\bar{x}_n & \cdot & \cdot & n\bar{x}_n^{n-1} & (n+1)\bar{x}_n^n & (n+2)\bar{x}_n^{n+1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ c_n \\ c_{n+1} \\ c_{n+2} \end{Bmatrix} \quad (2.45)$$

veya

$$\{\bar{u}\} = [N_0]\{c\} \quad (2.46)$$

olarak yazılır. Bu denklemde

$$\{\bar{u}\} = \left\{ u(\bar{x}) \quad u'(\bar{x}) \quad \dots \dots u(\bar{x}) \dots \dots u(\bar{x}) \quad u'(\bar{x}) \right\}^T \quad (2.47a)$$

ve

$$[N] = \left\{ [b][b'] \dots \dots [b] \dots \dots [b'] \right\}^T \quad (2.47b)$$

Denklem (2.46) den hareket ederek[85]

$$\{c\} = [N_0]^{-1} \{u\} \quad (2.48)$$

yazabiliriz. Bu denklemdeki  $c$  değerleri (2.41) polinomundaki sabitlerdir. Denklem (2.46) ve (2.47a) dan

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\bar{x}} \{\bar{u}\} &= \left( \frac{d}{d\bar{x}} [N] \right) [N_0]^{-1} \{u\} + [N] \underbrace{\frac{d}{d\bar{x}} \left( [N_0]^{-1} \{u\} \right)}_{=0} \\ &= \left( \frac{d}{d\bar{x}} [N] \right) [N_0]^{-1} \{u\} \end{aligned} \quad (2.49)$$

yazılabilir. Böylece 1'den  $n'$  e kadar belirli ayrık noktalar için[85];

$$\frac{d}{d\bar{x}} \{u\} = [A] \{u\} \quad (2.50)$$

yazılır. Bu denklemde

$$[A] = [N'_0][N_0]^{-1} \quad (2.51)$$

ile tanımlı olup  $N_0$  matrisinin türevi

$$[N'_0] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2\bar{x}_0 & \dots & n\bar{x}_0^{n-1} & (n+1)\bar{x}_0^n & (n+2)\bar{x}_0^{n+1} \\ 0 & 0 & 2 & \dots & n(n-1)\bar{x}_0^{n-2} & (n+1)n\bar{x}_0^{n-1} & (n+2)(n+1)\bar{x}_0^n \\ 0 & 1 & 2\bar{x}_1 & \dots & n\bar{x}_1^{n-1} & (n+1)\bar{x}_1^n & (n+2)\bar{x}_1^{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & 2\bar{x}_n & \dots & n\bar{x}_n^{n-1} & (n+1)\bar{x}_n^n & (n+2)\bar{x}_n^{n+1} \\ 0 & 0 & 2 & \dots & n(n-1)\bar{x}_n^{n-2} & (n+1)n\bar{x}_n^{n-1} & (n+2)(n+1)\bar{x}_n^n \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

olarak hesaplanır. Bu matriste

$$x_i = \frac{2i-n}{n}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

formülüyle verilir. Böylece Lagrange polinomları kullanılarak elde edilen ağırlık katsayı matrisi birinci dereceden türev için

$$[A] \equiv \left[ \frac{d}{d\bar{x}} \right] \quad (2.53)$$

olur. İkinci, üçüncü ve dördüncü mertebeden türevler için ağırlık matrisleri

$$[B] \equiv \left[ \frac{d^2}{d\bar{x}^2} \right] = \left[ \frac{d}{d\bar{x}} \right] \left[ \frac{d}{d\bar{x}} \right] = [A][A] \quad (2.54a)$$

$$[C] \equiv \left[ \frac{d^3}{d\bar{x}^3} \right] = \left[ \frac{d}{d\bar{x}} \right] \left[ \frac{d}{d\bar{x}} \right] \left[ \frac{d}{d\bar{x}} \right] = [A][A][A] \equiv [B][A] \quad (2.54b)$$

$$[D] \equiv \left[ \frac{d^4}{d\bar{x}^4} \right] = [B][B] \equiv [C][A] \quad (3.54c)$$

şeklinde hesaplanır.

## 2.5. Chebyshev Polinomları

Yukarıdaki işlemlere benzer olarak bağımlı değişken  $u$  [85];

$$u(\bar{x}) = c_0 T_0(\bar{x}) + c_1 T_1(\bar{x}) + \dots + c_{n+1} T_{n+1}(\bar{x}) + c_{n+2} T_{n+2}(\bar{x}) \quad (2.55)$$

şeklinde ifade edilir. Bu denklemdaki  $T_n$  'ler birinci tür Chebyshev polinomları olup;

$$T_n(\bar{x}) = \cos(n \cos^{-1} \bar{x}) \quad (2.56)$$

ile tanımlıdır. Böylece, bunların örneğin ilk dört terimi:

$$T_0(\bar{x}) = 1, \quad T_1(\bar{x}) = \bar{x}, \quad T_2(\bar{x}) = -1 + 2\bar{x}^2 \quad \text{ve} \quad T_3(\bar{x}) = -3\bar{x} + 4\bar{x}^3 \quad (3.56a)$$

olarak tanımlıdır. Buradan ağırlık katsayısı matrisi Lagrange polinomlarında hesaplandığı gibi, örneğin birinci dereceden türev için ağırlık katsayı matrisi;

$$[A] = [N'_0][N_0]^{-1} \quad (2.57)$$

olarak verilebilir. Bu denklemdaki  $[N_0]$  matrisi  $T_n(\bar{x})$  lerden oluşan

$$[N'_0] = \begin{bmatrix} T_0(\bar{x}_0) & T_1(\bar{x}_0) & \dots & \dots & T_{n+1}(\bar{x}_0) & T_{n+2}(\bar{x}_0) \\ T'_0(\bar{x}_0) & T'_1(\bar{x}_0) & \dots & \dots & T'_{n+1}(\bar{x}_0) & T'_{n+2}(\bar{x}_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ T_0(\bar{x}_n) & T_1(\bar{x}_n) & \dots & \dots & T_{n+1}(\bar{x}_n) & T_{n+2}(\bar{x}_n) \\ T'_0(\bar{x}_n) & T'_1(\bar{x}_n) & \dots & \dots & T'_{n+1}(\bar{x}_n) & T'_{n+2}(\bar{x}_n) \end{bmatrix} \quad (2.58a)$$

ve

$$[N'_0] = \frac{d}{dx} [N_0] \quad (2.58b)$$

ifadeleridir. Burada ayrıklı bölüştürülmüş noktalar  $[-1, 1]$  aralığında lokal koordinat sisteminde konuşlandırılmıştır ve

$$\bar{x}_i = -\cos\left(\frac{\pi i}{n}\right); \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (2.59)$$

olarak tanımlıdır.

## 2.6. Harmonik Fonksiyonlar

Harmonik diferansiyel quadrature yönteminde ağırlık katsayılarının hesaplanması için önerilen test fonksiyonu trigonometrik ya da harmonik formda olduğundan yöntem harmonik diferansiyel quadrature olarak önerilmiştir [84]. Bu fonksiyon

$$h_k(x) = \frac{\sin \frac{(x-x_0)\pi}{2} \dots \sin \frac{(x-x_{k-1})\pi}{2} \sin \frac{(x-x_{k+1})\pi}{2} \dots \sin \frac{(x-x_N)\pi}{2}}{\sin \frac{(x_k-x_0)\pi}{2} \dots \sin \frac{(x_k-x_{k-1})\pi}{2} \sin \frac{(x_k-x_{k+1})\pi}{2} \dots \sin \frac{(x_k-x_N)\pi}{2}}$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, N \quad (2.60)$$

olarak verilmektedir. Bu denklem daha kısa ve kapalı bir ifadeyle

$$h_k(x) = \frac{\prod_{i=0}^N \sin\left(\frac{x-x_i}{2}\pi\right)}{\prod_{i=0, k=0}^N \sin\left(\frac{x_k-x_i}{2}\pi\right)} \quad (2.61)$$

olarak yazabiliriz. Ağırlık katsayılarını tanımlamak için

$$E(x) = \prod_{k=0}^N \sin\left(\frac{x-x_k}{2}\pi\right) = F(x, x_k) \sin\left(\frac{x-x_k}{2}\pi\right) \quad (2.62)$$

şeklinde yazılır. Bu denklemde

$$F(x_i, x_i) = \prod_{i \neq k, k=0}^N \sin\left(\frac{x_i-x_k}{2}\pi\right) = P(x_i) \quad (2.63)$$

$$F(x_i, x_j) = F(x_i, x_i) \delta_{ij} \quad (2.64)$$

olmak üzere (3.61) denklemi

$$h_k(x) = \frac{F(x, x_k)}{P(x_k)} \quad (2.65)$$

şekline indirgenir. Buradan birinci ve ikinci mertebeden ağırlık katsayıları

$$A_{ij} = \frac{F^{(1)}(x_i, x_j)}{P(x_j)} \quad (2.66)$$

$$B_{ij} = \frac{F^{(2)}(x_i, x_j)}{P(x_j)} \quad (2.67)$$

olur. Bu denklemlerdeki  $F^{(1)}(x_i, x_j)$  ve  $F^{(2)}(x_i, x_j)$  ifadeleri  $F(x_i, x_j)$  fonksiyonunun birinci ve ikinci mertebeden türevleridir. Bu türevler (2.62) denkleminde türev alarak

$$E^{(1)}(x) = F^{(1)}(x, x_k) \sin\left(\frac{x-x_k}{2}\pi\right) + \frac{\pi}{2} F(x, x_k) \cos\left(\frac{x-x_k}{2}\pi\right) \quad (2.68)$$

$$\begin{aligned}
E^{(2)}(x) &= F^{(2)}(x, x_k) \sin\left(\frac{x-x_k}{2}\pi\right) + \pi F^{(1)}(x, x_k) \cos\left(\frac{x-x_k}{2}\pi\right) \\
&\quad - \frac{\pi^2}{4} F(x, x_k) \sin\left(\frac{x-x_k}{2}\pi\right)
\end{aligned} \tag{2.69}$$

olur. Yine ikinci mertebeden ağırlık katsayılarında kullanılmak üzere  $F^{(3)}(x)$  ifadesi

$$\begin{aligned}
E^{(3)}(x) &= F^{(3)}(x, x_k) \sin\left(\frac{x-x_k}{2}\pi\right) + \frac{3}{2}\pi F^{(2)}(x, x_k) \cos\left(\frac{x-x_k}{2}\pi\right) \\
&\quad - \frac{3\pi^2}{4} F^{(1)}(x, x_k) \sin\left(\frac{x-x_k}{2}\pi\right) - \frac{\pi^3}{8} F(x, x_k) \cos\left(\frac{x-x_k}{2}\pi\right)
\end{aligned} \tag{2.70}$$

olarak elde edilir. Bu denklemler kullanılarak ağırlık katsayıları için gereken birinci ve ikinci mertebeden türevler sırasıyla

$$F^{(1)}(x_i, x_j) = \frac{\pi P(x_i)}{2 \sin\left[\frac{x_i - x_j}{2}\right]\pi}, \quad j \neq i \text{ için} \tag{2.71}$$

$$F^{(1)}(x_i, x_i) = \frac{E^{(2)}(x_i)}{\pi}, \quad j = i \text{ için} \tag{2.72}$$

$$F^{(2)}(x_i, x_j) = \frac{E^{(2)}(x_i) - \pi F^{(1)}(x_i, x_j) \cos\left(\frac{x_i - x_j}{2}\pi\right)}{\sin\left(\frac{x_i - x_j}{2}\pi\right)}; \quad j \neq i \text{ için} \tag{2.73}$$

$$F^{(2)}(x_i, x_i) = \frac{2}{3\pi} \left[ E^{(3)}(x_i) + \frac{\pi^3}{8} F(x_i, x_i) \right]; \quad j = i \text{ için} \tag{2.74}$$

olmaktadır. Yukarıda (2.66) ve (2.67) ile tanımlanan ağırlık katsayıları ;

$$A_{ij} = \frac{\pi P(x_i)}{2 \sin\left[\frac{x_i - x_j}{2}\right]\pi}, \quad j \neq i \text{ için} \quad (2.75)$$

şeklindedir. Burada

$$P(x_i) = \prod_{j=1, j \neq i}^N \sin\left(\frac{x_i - x_j}{2}\pi\right), \quad j=1,2,\dots,N \text{ için} \quad (2.76)$$

formundadır. Eğer  $j = i$  için birinci mertebeden ağırlık katsayısı hesaplanacak olursa,

$$A_{ii} = - \sum_{j=1, j \neq i}^N A_{ij} \quad j=1,2,\dots,N \text{ için} \quad (2.77)$$

şeklinde olur. Benzer olarak ikinci mertebeden ağırlık katsayıları

$$B_{ij} = A_{ij} \left[ 2 A_{ii} - \pi \cotg \frac{x_i - x_j}{2} \pi \right]; \quad j \neq i \text{ için} \quad (2.78)$$

$$B_{ii} = \frac{2}{3\pi} \left[ \frac{E^{(3)}(x_i)}{P(x_i)} + \frac{\pi^3}{8} \right]; \quad j = i \text{ için} \quad (2.79)$$

ile tanımlıdır. Burada da  $i, j = 1,2,3,\dots,N$  değerlerini alır. Bert ve arkadaşları tarafından [54,55,56] yukarıda (2.60) formülü ile verilen fonksiyon;

$$h_k(x) = \left[ 1, \sin \pi x, \cos \pi x, \dots, \sin \frac{N-1}{2} \pi x, \cos \frac{N-1}{2} \pi x \right] \quad (2.80)$$

olarak seçilerek ağırlık katsayıları için benzer formülasyonlar elde edilmiştir.

## 2.7. Dügüm Nokta Seçimi

Diferansiyel quadrature (DQ) yönteminde çözümün hassasiyeti bazı problem türlerinde sınır koşullarına bağlı olsa da (sınır değer problemlerinde) genelde bu hassasiyet düğüm noktalarının seçimine ve sayısına bağlıdır. DQ yönteminde, düğüm noktaları sonlu farklar metodunda teşkil edilen şebeke (network) seçimi, veya sonlu elemanlar metodunda seçilen sonlu eleman ağ tipi ile hemen hemen benzerdir. Bu benzerlik yapısal bir benzerlik olmayıp fiziksel sistemi temsil eden matematik model için çözümün bulunacağı temel noktalar bazındadır. Daha önce yapılan çalışmalarda gösterilmiştir ki; lineer türden denklemler ve homojen sınır koşullarına sahip problemlerde eşit aralıklı seçilen düğüm noktaları çözüm hassasiyeti açısından yeterlidir.

Bununla birlikte titreşim problemlerinde daha çok bir diğer tür (Chebyshev-Gauss-Lobatto) düğüm nokta seçiminin daha uygun olduğu gösterilmiştir. Zamana bağlı denklemlerde ve başlangıç değer problemlerinde ise eşit aralıklı olmayan türden düğüm nokta seçimi en uygun çözümleri türetmiştir. Sonuç olarak, her tür problem için etkili seçimin bilinmesi analiz süresini kısaltacaktır.

Bazı durumlarda ise örnek noktaların sayısı verilen bağıntıların performansında yani ağırlık katsayılarının hesabında etkili değildir. Hesap performansını geliştirmek açısından önemlidir. Bundan başka, bazı durumlarda bu noktalar çözümün doğruluğunu etkileyebilmektedir. Örneğin eşit aralıklı noktalar ile işlem kısmen daha kolay ve uygulaması daha basittir, ancak eşit olmayan nokta aralığı için az da olsa sonuçların hassaslığı bazı tür problemlerde azalır bazılarında artar. Düğüm noktalarının seçimi ile ilgili ayrıntılı bilgi Shu ve arkadaşları [83] ve Bert ve Malik'in [56] çalışmalarında bulunabilir. Düğüm noktalarının seçiminde sıkça kullanılan ve önerilen eşit aralıklı ve eşit olmayan aralıklı Chebyshev-Gauss-Lobatto düğüm dağılımları bu çalışma kapsamında kullanılacaktır.

Düğüm noktalarının seçimi için;

a) Her iki doğrultuda yani her bir koordinat yönünde (tek boyutlu problemler için bir yönde) eşit aralıklı seçilen

$$x_i = \frac{i-1}{N_x-1}; \quad i = 1, 2, \dots, N_x \quad (2.81)$$

$$y_j = \frac{j-1}{N_y-1}; \quad j = 1, 2, \dots, N_y \quad (2.82)$$

olarak verilir.

b) Bazı durumlarda eşit aralıklı olmayan noktaların seçiminin daha iyi sonuç verdiği bilinmektedir. Yine iki boyutlu problemler için eşit olmayan düğüm noktaları Chebyshev-Gauss-Lobatto noktaları için:

$$x_i = \frac{1}{2} \left[ 1 - \cos \left( \frac{i-1}{N_x-1} \pi \right) \right]; \quad i = 1, 2, \dots, N_x \quad (2.83)$$

$$y_j = \frac{1}{2} \left[ 1 - \cos \left( \frac{j-1}{N_y-1} \pi \right) \right]; \quad j = 1, 2, \dots, N_y \quad (2.84)$$

şeklinde seçilir.

Bununla birlikte diferansiyel quadrature çözümlerinde farklı koordinat yönlerindeki farklı tip düğüm noktaları seçilebileceği gibi, farklı koordinat yönlerinde farklı test fonksiyonları da seçilebilir. Bu çalışmada hem eşit hem de eşit olmayan noktalama düğüm seçimi kullanılmıştır.

## 2.8. Zaman Değişkeninin İntegrasyonu

Elastik zemine oturan plak ve kabukların lineer olmayan titreşimindeki uzaysal (konum) değişkene ait türev ifadeler için DQ formülasyonları yukarıda verilmiştir. Ancak bu denklemler (hareket denklemi) zamana bağlı olduğundan zamana bağlı integrasyon ifadelerinde, bu çalışmada literatürde yaygın olarak bilinen Newmark- $\beta$  metodu ve sonlu farklar yöntemleri kullanılacaktır [58,81]. Bunlar sırasıyla aşağıda açıklanmıştır.

### 2.8.1. Newmark - $\beta$ metodu

Deplasman, hız ve ivme ifadeleri ardışık olarak

$$u_{i+1} = u_i + \Delta u_i \quad (2.85a)$$

$$\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + \Delta \dot{u}_i \quad (2.85b)$$

$$\ddot{u}_{i+1} = \ddot{u}_i + \Delta \ddot{u}_i \quad (2.85c)$$

ile verilir. Burada

$$\Delta \dot{u}_i = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \Delta u_i - \frac{\gamma}{\beta} \dot{u}_i + \Delta t \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right) \ddot{u}_i \quad (2.86a)$$

$$\Delta \ddot{u}_i = \frac{\gamma}{\beta (\Delta t)^2} \Delta u_i - \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \dot{u}_i - \frac{1}{2\beta} \ddot{u}_i \quad (2.86b)$$

Denklemlerdeki sabitler Newmark ortalama ivme ve Newmark lineer ivme için şöyledir:

ortalama ivme için  $\gamma = 1/2$ ,  $\beta = 1/4$

lineer ivme için  $\gamma = 1/2$ ,  $\beta = 1/6$

Böylece ivme ve hız için

$$\ddot{u}_{i+1} = \frac{1}{\beta(\Delta t)^2}(u_{i+1} - u_i) - \frac{1}{\beta(\Delta t)}\dot{u}_i - \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right)\ddot{u}_i \quad (2.87a)$$

$$\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i(1 - \gamma)(\Delta t)\ddot{u}_i + \gamma(\Delta t)\ddot{u}_{i+1} \quad (2.87b)$$

ifadeleri elde edilir.

### 2.8.2. Sonlu Farklar Metodu

Sonlu farklar metodunda birinci ve ikinci mertebeden türev ifadeleri

$$\dot{u}_i = \frac{1}{2\Delta t}(u_{i+1} - u_{i-1}) \quad (2.88a)$$

$$\ddot{u}_i = \frac{1}{(\Delta t)^2}(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) \quad (2.88b)$$

olarak tanımlanır. Buradaki ileri ve geri farklar terimleri

$$u_{i+1} = u_i + (\Delta t)\dot{u}_i + \frac{(\Delta t)^2}{2}\ddot{u}_i + \frac{(\Delta t)^3}{6}\dddot{u}_i + \dots \quad (2.89a)$$

$$u_{i-1} = u_i - (\Delta t)\dot{u}_i + \frac{(\Delta t)^2}{2}\ddot{u}_i - \frac{(\Delta t)^3}{6}\dddot{u}_i + \dots \quad (2.89b)$$

ile verilir.

### 2.8.3. DQ Metodunun Zaman Değişkeni İntegrasyonu İçin Kullanılması

Birinci ve ikinci mertebeden zamana bağlı türevler için DQ metodunu da kullanmak mümkündür. Zamana bağlı türevler içeren diferansiyel denklemler için (akışkanlar mekaniği, ısı iletimi ve bazı fiziko-kimya problemleri için) DQ metodunun

uygulanması Fung [69,70] ve Tanaka ve Chen [72] tarafından, geçen birkaç yıl içinde verilmiştir.

Boyutsuz zaman değişkeni  $\tau = t/T$  için birinci ve ikinci mertebeden türevler, yani hız ve ivme ifadeleri, aşağıdaki şekilde deplasman bileşeni cinsinden

$$\begin{Bmatrix} \dot{u}_0(t) \\ \dot{u}_1(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{u}_N(t) \end{Bmatrix} = (T) \sum_{j=0}^N A_{ij} u(\tau_j) = (T) \begin{bmatrix} A_{10} & A_{11} & \cdot & \cdot & A_{1N} \\ A_{20} & A_{21} & \cdot & \cdot & A_{2N} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{N0} & A_{N1} & \cdot & \cdot & A_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0(\tau_0 T) \\ u_1(\tau_1 T) \\ \cdot \\ \cdot \\ u_N(\tau_N T) \end{Bmatrix} \quad (2.90a)$$

$$\begin{Bmatrix} \ddot{u}_0(t) \\ \ddot{u}_1(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \ddot{u}_N(t) \end{Bmatrix} = (T)^2 \sum_{j=0}^N B_{ij} u(\tau_j) = (T)^2 \begin{bmatrix} B_{10} & B_{11} & \cdot & \cdot & B_{1N} \\ B_{20} & B_{21} & \cdot & \cdot & B_{2N} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ B_{N0} & B_{N1} & \cdot & \cdot & B_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0(\tau_0 T) \\ u_1(\tau_1 T) \\ \cdot \\ \cdot \\ u_N(\tau_N T) \end{Bmatrix} \quad (2.90b)$$

olarak verilir. Burada  $A_{ij}$  ve  $B_{ij}$  katsayıları sırasıyla birinci ve ikinci mertebeden türevler için gerekli ağırlık katsayı matrisleridir. Eşit ağırlıklı düğüm nokta dağılımı için birinci mertebeden ağırlık katsayısı

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & t_1 & \cdot & \cdot & t_1^N \\ 1 & t_2 & \cdot & \cdot & t_2^N \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & t_N & \cdot & \cdot & t_N^N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & N \\ 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & t_1 & \cdot & \cdot & t_1^N \\ 1 & t_2 & \cdot & \cdot & t_2^N \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & t_N & \cdot & \cdot & t_N^N \end{bmatrix}^{-1} \quad (2.91)$$

olarak verilir.

### 3. ELASTİK ZEMİNE OTURAN ÇİFT EĞRİLİKLİ KABUK VE DİKDÖRTGEN PLAK İÇİN TEMEL DENKLEMLER

#### 3.1. Elastik Zemine Oturan Çift Eğrilikli Basık Kabuk

##### 3.1.1. Elastik Zemine Oturan Çift Eğrilikli Basık Kabuğun Dinamik Analizi

Winkler-Pasternak türü iki parametrelili elastik zemine oturan çift eğrilikli basık kabuğun (Şekil 3.1) geometrik bakımdan lineer olmayan dinamik analizi için gerekli hareket denklemi, Von Karman-Donnell tipi non-lineer kısmi türevli bir diferansiyel denklem takımı olup bu denklemler kabuğun  $x$ ,  $y$ ,  $z$  doğrultularındaki deplasman bileşenleri  $(u,v,w)$  cinsinden ve bunların boyutsuz formunda tanımlanan,  $(U,V,W)$  değişkenlerine bağlı olarak [6]:

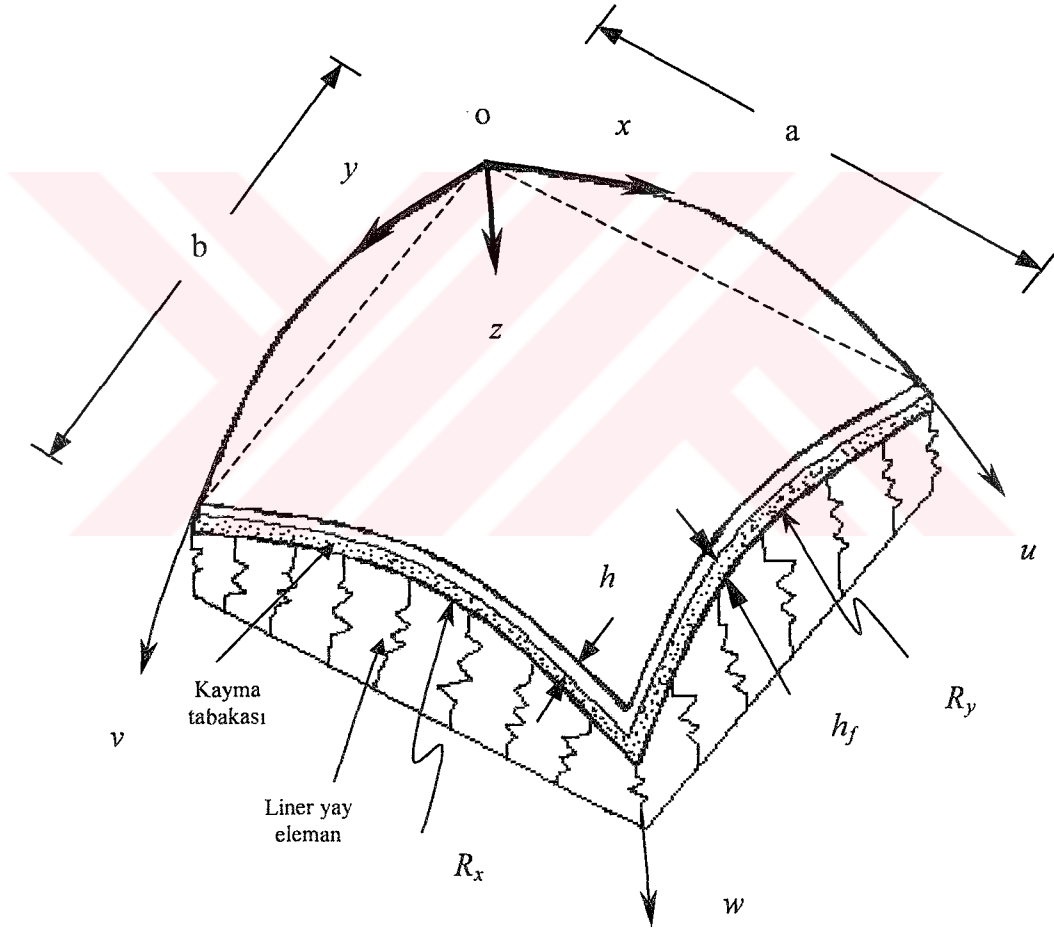
$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \beta^2 \frac{(1-\nu)}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} + \beta \frac{(1+\nu)}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial X \partial Y} + \left[ \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + \beta^2 \frac{(1-\nu)}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} \right] \frac{\partial W}{\partial X} \\ & + \beta^2 \frac{(1+\nu)}{2} \frac{\partial W}{\partial Y} \frac{\partial^2 W}{\partial X \partial Y} - (R_Y + \nu R_X) \frac{\partial W}{\partial X} = 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} & \beta^2 \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} + \frac{(1-\nu)}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \beta \frac{(1+\nu)}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial X \partial Y} + \beta \left[ \beta^2 \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} + \frac{(1-\nu)}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} \right] \frac{\partial W}{\partial Y} \\ & + \beta \frac{(1+\nu)}{2} \frac{\partial W}{\partial X} \frac{\partial^2 W}{\partial X \partial Y} - (R_X + \nu R_Y) \frac{\partial W}{\partial Y} = 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^4 W}{\partial X^4} + 2\beta^2 \frac{\partial^4 W}{\partial X^2 \partial Y^2} + \beta^4 \frac{\partial^4 W}{\partial Y^4} - 12 \left[ \frac{\partial U}{\partial X} + \beta \nu \frac{\partial V}{\partial Y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W}{\partial X} \right)^2 + \frac{1}{2} \beta^2 \nu \left( \frac{\partial W}{\partial Y} \right)^2 - W(R_X + \nu R_Y) \right] \left( \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + R_X \right) \\ & - 12 \left[ \beta \frac{\partial V}{\partial Y} + \nu \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{1}{2} \nu \left( \frac{\partial W}{\partial X} \right)^2 + \frac{1}{2} \beta^2 \left( \frac{\partial W}{\partial Y} \right)^2 - W(R_Y + \nu R_X) \right] \left( \beta^2 \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} + R_Y \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -12 \left[ \beta \frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{\partial V}{\partial X} + \beta \frac{\partial W}{\partial X} \frac{\partial W}{\partial Y} \right] (1-\nu) \beta \frac{\partial^2 W}{\partial X \partial Y} + KW - G \left( \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + \beta^2 \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} \right) - 12(1-\nu^2) \frac{q a^4}{E h^4} \\
& + \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} + C \frac{\partial W}{\partial \tau} + m_r \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} = 0
\end{aligned} \tag{3.3}$$

olarak ifade edilir.



Şekil 3.1. Elastik zemine oturan çift eğrilikli basık kabuk ve elemanları

Denklemlerdeki boyutsuz değişkenler

$$W = w/h, X = x/a, Y = y/b, \beta = a/b, U = ua/h^2, V = va/h^2$$

$$R_X = r_x b^2/h, R_Y = r_y b^2/h, \tau = t\sqrt{D/\rho a^4 h}, C = c\sqrt{\gamma a^4 h/D} \quad (3.4)$$

$$D = Eh^3/12(1-\nu^2), m_r = h_f \rho_f /h\rho, G = G_f a^2/D, K = k_f a^4/D$$

olarak tanımlıdır. Bu denklemlerde  $x, y, z$  kabuk konum değişkenleri,  $u, v, w$ , sırasıyla kabuğun  $x, y$ , ve  $z$  yönündeki deplasmanları,  $a$  ve  $b$  kabuğun kenar boylarını,  $k$ , kabuk kenar boylarının oranını,  $r_x$  ve  $r_y$  kabuğun  $x$  ve  $y$  yönündeki eğrilikleri,  $t$  zaman,  $D$  kabuk eğilme rijitliği,  $E$  elastisite modülü,  $h$  kabuk kalınlığı,  $G_f$  zemin kayma modülü,  $h_f$  zemin kalınlığı,  $\rho_f$  ve  $\rho$  zemin ve kabuk malzeme için birim boy kütlesi,  $m_r$  zemin kütlesinin kabuk kütlesine oranı,  $c$  sönüm katsayısını belirtir.

Denklemlerin gösteriminde hem basitlik sağlamak ve hem de literatürdeki yaygın gösterim şekline uymak için yukarıda (3.1), (3.2) ve (3.3) ile verilen denklemler, aşağıdaki formda tekrar yazılabilir. Böylece elastik zemine oturan çift eğrilikli basık kabuğun geometrik bakımdan lineer olmayan dinamik analizi için gerekli diferansiyel denklemler;

$$U_{,XX} + \frac{\beta^2}{2}(1-\nu)U_{,YY} + \frac{\beta}{2}(1+\nu)V_{,XY} + \left[ W_{,XX} + \frac{\beta^2}{2}(1-\nu)W_{,YY} \right] W_{,X} + \frac{\beta^2}{2}(1+\nu)W_{,YY}W_{,XY} - (R_Y + \nu R_X)W_{,X} = 0 \quad (3.5)$$

$$\beta^2 V_{,YY} + \frac{1}{2}(1-\nu)V_{,XX} + \beta \frac{1}{2}(1+\nu)U_{,XY} + \beta \left[ \beta^2 W_{,YY} + \frac{1}{2}(1-\nu)W_{,XX} \right] W_{,Y} + \beta \frac{1}{2}(1+\nu)W_{,X}W_{,XY} - W_{,Y} - (R_X + \nu R_Y)W_{,Y} = 0 \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned}
& W_{,xxxx} + 2\beta^2 W_{,xxyy} + \beta^4 W_{,yyyy} - 12 \left[ U_{,x} + \beta v V_{,y} + \frac{1}{2} (W_{,x})^2 + \frac{1}{2} \beta^2 v (W_{,y})^2 - W (R_x + v R_y) \right] (W_{,xx} + R_x) \\
& - 12 \left[ \beta V_{,y} + v U_{,x} + \frac{1}{2} v (W_{,x})^2 + \frac{1}{2} \beta^2 (W_{,y})^2 - W (R_y + v R_x) \right] (\beta^2 W_{,yy} + R_y) \\
& - 12 \left[ \beta U_{,y} + V_{,x} + \beta W_{,x} W_{,y} \right] (1-v) \beta W_{,xy} + KW - G(W_{,xx} + \beta^2 W_{,yy}) - 12(1-v^2) \frac{q a^4}{E h^4} \\
& + W_{,\tau\tau} + C W_{,\tau} + m_r W_{,\tau\tau} = 0
\end{aligned} \tag{3.7}$$

olarak verilir.

Yukarıda elastik zemine oturan iki eğrilikli basık kabuk için verilen denklemlerdeki konum değişkenine DQ metodunun, zaman değişkeni için ise Sonlu farklar metodunun uygulanması ve denklemlerdeki non-lineer terimlerin Ek-3'de verilen yöntemle lineerleştirilmesi ile kabuğun  $(X, Y, Z)$  doğrultularındaki boyutsuz deplasman bileşenleri  $(U, V, W)$  cinsinden aşağıdaki lineer denklem takımı elde edilir:

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{N_x} B_{ik} U_{kj} + \beta^2 d_1 \sum_{k=1}^{N_y} B_{jk} U_{ik} + \beta d_2 \sum_{m=1}^{N_y} A_{jm} \sum_{k=1}^{N_x} A_{ik} V_{km} \\
& + \sum_{k=1}^{N_x} A_{ik} W_{kj} \left[ \sum_{k=1}^{N_x} B_{ik} W_{kj} + \beta^2 d_1 \sum_{k=1}^{N_y} B_{jk} W_{ik} \right] + \beta^2 d_2 \sum_{k=1}^{N_y} A_{jk} W_{ik} \sum_{m=1}^{N_y} A_{jm} \sum_{k=1}^{N_x} A_{ik} W_{km} \\
& - (R_x + v R_y) \sum_{k=1}^{N_x} A_{ik} W_{kj} = 0
\end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned}
& \beta^2 \sum_{k=1}^{N_x} B_{jk} V_{ik} + d_1 \sum_{k=1}^{N_x} B_{ik} V_{kj} + \beta d_2 \sum_{m=1}^{N_y} A_{jm} \sum_{k=1}^{N_x} A_{ik} U_{km} \\
& + \beta \sum_{k=1}^{N_y} A_{jk} U_{ik} \left[ d_1 \sum_{k=1}^{N_x} B_{ik} W_{kj} + \beta^2 \sum_{k=1}^{N_y} B_{jk} W_{ik} \right] + \beta d_2 \sum_{k=1}^{N_y} A_{ik} W_{kj} \sum_{m=1}^{N_y} A_{jm} \sum_{k=1}^{N_x} A_{ik} W_{km} \\
& - (R_y + v R_x) \sum_{k=1}^{N_y} A_{jk} W_{ik} = 0
\end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{N_x} D_{ik} W_{kj} + 2\beta^2 \sum_{m=1}^{N_y} B_{jm} \sum_{k=1}^{N_x} B_{ik} W_{km} + \beta^4 \sum_{k=1}^{N_y} D_{jk} W_{ik} \\
& - 12 \left( \sum_{k=1}^{N_x} B_{ik} W_{kj} + R_x \right) \left\{ \sum_{k=1}^{N_x} A_{ik} U_{kj} + \beta v \sum_{k=1}^{N_y} A_{jk} U_{ik} + \frac{1}{2} \left[ \left( \sum_{k=1}^{N_x} A_{ik} W_{kj} \right)^2 + \beta^2 v \left( \sum_{k=1}^{N_y} A_{jk} U_{ik} \right)^2 \right] \right. \\
& \left. - W_{ik} (R_x + v R_y) \right\} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 12 \left( \beta^2 \sum_{k=1}^{N_y} B_{jk} W_{ik} + R_y \right) \left\{ \beta \sum_{k=1}^{N_y} A_{jk} V_{ik} + v \sum_{k=1}^{N_x} A_{ik} W_{kj} + \frac{1}{2} \left[ v \left( \sum_{k=1}^{N_x} A_{ik} W_{kj} \right)^2 + \beta^2 \left( \sum_{k=1}^{N_y} A_{jk} U_{ik} \right)^2 \right] \right. \\
& \left. - W_{ik} (R_y + v R_x) \right\} - 12(1-v)\beta \left[ \beta \sum_{k=1}^{N_y} A_{jk} U_{ik} + \sum_{k=1}^{N_x} A_{ik} V_{kj} + \beta \sum_{k=1}^{N_x} A_{ik} W_{kj} \sum_{k=1}^{N_y} A_{jk} W_{ik} \right] \sum_{m=1}^{N_y} A_{jm} \sum_{k=1}^{N_x} A_{ik} W_{km}
\end{aligned}$$

$$- 12(1-v)^2 \frac{q a^4}{E h^4} - K W_{ik} - G \left( \sum_{k=1}^{N_x} B_{ik} W_{kj} + \beta^2 \sum_{k=1}^{N_y} B_{jk} W_{ik} \right) + \frac{1}{(\Delta t)^2} (W_{i+1} - 2W_i + W_{i-1})$$

$$+ C \left[ \frac{1}{2(\Delta t)} (W_{i+1} - W_{i-1}) \right] + m_r \left[ \frac{1}{(\Delta t)^2} (W_{i+1} - 2W_i + W_{i-1}) \right] \quad (3.10)$$

Bu denklemlerde  $N_x$  ve  $N_y$  sırasıyla  $x$  ve  $y$  yönünde seçilen düğüm nokta sayılarını belirtmektedir. Böylece mevcut diferansiyel denklem bir lineer denklem takımına indirgenmiş olur. Seçilecek düğüm nokta sayıları lineer denklem takımının boyutunu ve çözüm süresini belirler.

### 3.1.2. Elastik Zemine Oturan Çift Eğrilikli Kabuğun Statik Analizi

Elastik zemine oturan çift eğrilikli kabuk denkleminde zaman değişkeni ile ilgili terimler sıfır alınır, elastik zemine oturan çift eğrilikli kabuk için lineer olmayan statik analiz denklemleri;

$$U_{,XX} + \frac{\beta^2}{2}(1-\nu)U_{,YY} + \frac{\beta}{2}(1+\nu)V_{,XY} + \left[ W_{,XX} + \frac{\beta^2}{2}(1-\nu)W_{,YY} \right] W_{,X} + \frac{\beta^2}{2}(1+\nu)W_{,YY}W_{,XY} - (R_Y + \nu R_X)W_{,X} = 0 \quad (3.11)$$

$$\beta^2 V_{,YY} + \frac{1}{2}(1-\nu)V_{,XX} + \beta \frac{1}{2}(1+\nu)U_{,XY} + \beta \left[ \beta^2 W_{,YY} + \frac{1}{2}(1-\nu)W_{,XX} \right] W_{,Y} + \beta \frac{1}{2}(1+\nu)W_{,X}W_{,XY} - W_{,Y} - (R_X + \nu R_Y)W_{,Y} = 0 \quad (3.12)$$

$$W_{,XXXX} + 2\beta^2 W_{,XXYY} + \beta^4 W_{,YYYY} - 12 \left[ U_{,X} + \beta \nu V_{,Y} + \frac{1}{2}(W_{,X})^2 + \frac{1}{2}\beta^2 \nu (W_{,Y})^2 - W(R_X + \nu R_Y) \right] (W_{,XX} + R_X) - 12 \left[ \beta V_{,Y} + \nu U_{,X} + \frac{1}{2}\nu (W_{,X})^2 + \frac{1}{2}\beta^2 (W_{,Y})^2 - W(R_Y + \nu R_X) \right] (\beta^2 W_{,YY} + R_Y)$$

$$\begin{aligned}
& -12[\beta U_{,y} + V_{,x} + \beta W_{,x} W_{,y}] (1-\nu) \beta W_{,xy} + KW \\
& -G(W_{,xx} + \beta^2 W_{,yy}) - 12(1-\nu^2) \frac{q a^4}{E h^4}
\end{aligned} \tag{3.13}$$

olarak elde edilir.

### 3.2. Elastik Zemine Oturan İnce Ve İzotrop Dikdörtgen Plak

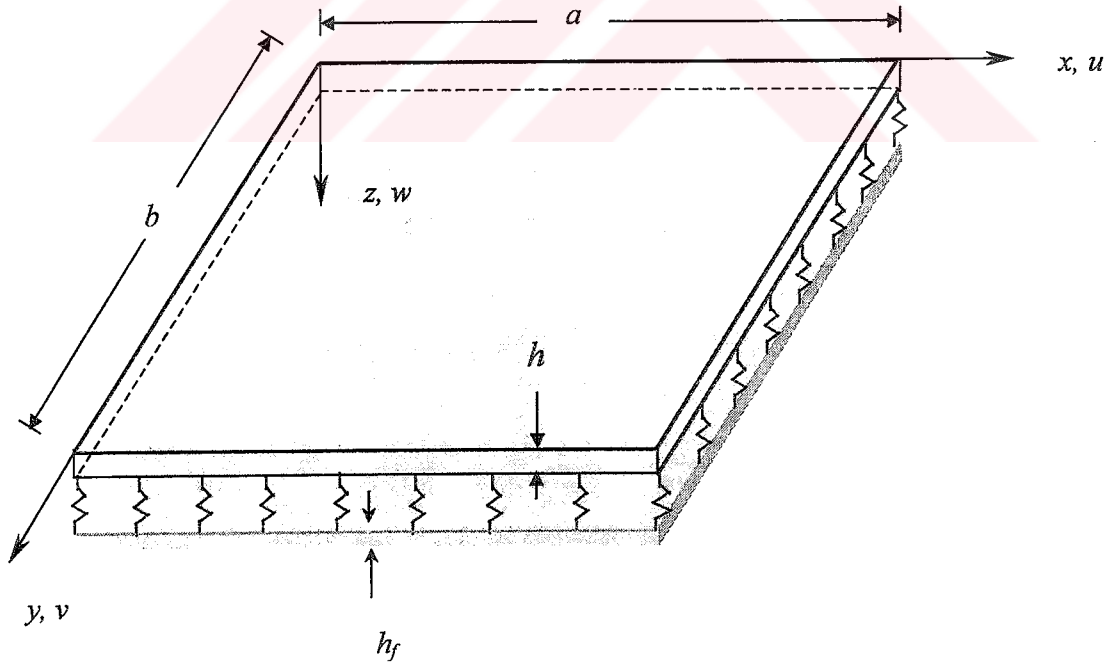
#### 3.2.1. Elastik Zemine Oturan Plağın Dinamik Analizi

Elastik zemine oturan çift eğrilikli kabuk için verilen (3.1), (3.2) ve (3.3) denklemlerinde sadece  $R_x$  yerine sıfır alınırsa elastik zemine oturan eğrisel panelin lineer olmayan dinamik analizi için yönetici denklemler elde edilir. Eğer  $R_x$  ve  $R_y$  yerine sıfır alınırsa elastik zemine (Winkler-Pasternak) oturan dikdörtgen ve izotrop plağın (Şekil 3.2) hareket denklemleri elde edilir [1,4,6].

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \beta^2 \frac{(1-\nu)}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} + \beta \frac{(1+\nu)}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial X \partial Y} + \left[ \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + \beta^2 \frac{(1-\nu)}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} \right] \frac{\partial W}{\partial X} \\
& + \beta^2 \frac{(1+\nu)}{2} \frac{\partial W}{\partial Y} \frac{\partial^2 W}{\partial X \partial Y} = 0
\end{aligned} \tag{3.14}$$

$$\begin{aligned}
& \beta^2 \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} + \frac{(1-\nu)}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \beta \frac{(1+\nu)}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial X \partial Y} + \beta \left[ \beta^2 \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} + \frac{(1-\nu)}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} \right] \frac{\partial W}{\partial Y} \\
& + \beta \frac{(1+\nu)}{2} \frac{\partial W}{\partial X} \frac{\partial^2 W}{\partial X \partial Y} - \frac{\partial W}{\partial Y} = 0
\end{aligned} \tag{3.15}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^4 W}{\partial X^4} + 2\beta^2 \frac{\partial^4 W}{\partial X^2 \partial Y^2} + \beta^4 \frac{\partial^4 W}{\partial Y^4} - 12 \left[ \frac{\partial U}{\partial X} + \beta v \frac{\partial V}{\partial Y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W}{\partial X} \right)^2 + \frac{1}{2} \beta^2 v \left( \frac{\partial W}{\partial Y} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} \\
& - 12 \left[ \beta \frac{\partial V}{\partial Y} + v \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{1}{2} v \left( \frac{\partial W}{\partial X} \right)^2 + \frac{1}{2} \beta^2 v \left( \frac{\partial W}{\partial Y} \right)^2 \right] \left( \beta^2 \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} \right) \\
& - 12 \left[ \beta \frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{\partial V}{\partial X} + \beta \frac{\partial W}{\partial X} \frac{\partial W}{\partial Y} \right] (1-v) \beta \frac{\partial^2 W}{\partial X \partial Y} + KW \\
& - G \left( \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + \beta^2 \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} \right) - 12(1-v^2) \frac{q a^4}{E h^4} \\
& + \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} + C \frac{\partial W}{\partial \tau} + m_r \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} = 0
\end{aligned} \tag{3.16}$$



Şekil 3.2. Elastik zemine oturan dikdörtgen plak

Elastik zemine oturan dikdörtgen plağın geometrik bakımdan lineer olmayan dinamik davranışına ait hareket denklemleri yine standart bir gösterim şekli sağlamak amacıyla

$$\begin{aligned}
 & U_{,XX} + \frac{\beta^2}{2}(1-\nu)U_{,YY} + \frac{\beta}{2}(1+\nu)V_{,XY} + \left[ W_{,XX} + \frac{\beta^2}{2}(1-\nu)W_{,YY} \right] W_{,X} \\
 & + \frac{\beta^2}{2}(1+\nu)W_{,YY}W_{,XY} = 0
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned}
 & \beta^2 V_{,YY} + \frac{1}{2}(1-\nu)V_{,XX} + \beta \frac{1}{2}(1+\nu)U_{,XY} + \beta \left[ \beta^2 W_{,YY} + \frac{1}{2}(1-\nu)W_{,XX} \right] W_{,Y} \\
 & + \beta \frac{1}{2}(1+\nu)W_{,X}W_{,XY} - W_{,Y} = 0
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned}
 & W_{,XXXX} + 2\beta^2 W_{,XXYY} + \beta^4 W_{,YYYY} - 12 \left[ U_{,X} + \beta v V_{,Y} + \frac{1}{2}(W_{,X})^2 + \frac{1}{2}\beta^2 v (W_{,Y})^2 \right] W_{,XX} \\
 & - 12 \left[ \beta V_{,Y} + v U_{,X} + \frac{1}{2}v (W_{,X})^2 + \frac{1}{2}\beta^2 (W_{,Y})^2 \right] (\beta^2 W_{,YY}) \\
 & - 12 [\beta U_{,Y} + V_{,X} + \beta W_{,X}W_{,Y}] (1-\nu)\beta W_{,XY} + KW \\
 & - G(W_{,XX} + \beta^2 W_{,YY}) - 12(1-\nu^2) \frac{q a^4}{E h^4} \\
 & + W_{,\tau\tau} + C W_{,\tau} + m_r W_{,\tau\tau} = 0
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

olarak yazılır.

Elastik zemine oturan dikdörtgen plağın geometrik bakımdan lineer olmayan dinamik davranışını idare eden hareket denklemlerinin DQ formu aşağıdaki şekilde kurulur;

$$\sum_{k=1}^{N_x} B_{ik} U_{kj} + \beta^2 d_1 \sum_{k=1}^{N_y} B_{jk} U_{ik} + \beta d_2 \sum_{m=1}^{N_y} A_{jm} \sum_{k=1}^{N_x} A_{ik} V_{km}$$

$$+ \sum_{k=1}^{N_x} A_{ik} W_{kj} \left[ \sum_{k=1}^{N_x} B_{ik} W_{kj} + \beta^2 d_1 \sum_{k=1}^{N_y} B_{jk} W_{ik} \right]$$

$$+ \beta^2 d_2 \sum_{k=1}^{N_y} A_{jk} W_{ik} \sum_{m=1}^{N_y} A_{jm} \sum_{k=1}^{N_x} A_{ik} W_{km} = 0$$

(3.20)

$$\beta^2 \sum_{k=1}^{N_x} B_{jk} V_{ik} + d_1 \sum_{k=1}^{N_x} B_{ik} V_{kj} + \beta d_2 \sum_{m=1}^{N_y} A_{jm} \sum_{k=1}^{N_x} A_{ik} U_{km}$$

$$+ \beta \sum_{k=1}^{N_y} A_{jk} U_{ik} \left[ d_1 \sum_{k=1}^{N_x} B_{ik} W_{kj} + \beta^2 \sum_{k=1}^{N_y} B_{jk} W_{ik} \right] + \beta d_2 \sum_{k=1}^{N_y} A_{ik} W_{kj} \sum_{m=1}^{N_y} A_{jm} \sum_{k=1}^{N_x} A_{ik} W_{km} = 0$$

(3.21)

$$\sum_{k=1}^{N_x} D_{ik} W_{kj} + 2\beta^2 \sum_{m=1}^{N_y} B_{jm} \sum_{k=1}^{N_x} B_{ik} W_{km} + \beta^4 \sum_{k=1}^{N_y} D_{jk} W_{ik}$$

$$- 12 \left( \sum_{k=1}^{N_x} B_{ik} W_{kj} \right) \left\{ \sum_{k=1}^{N_x} A_{ik} U_{kj} + \beta v \sum_{k=1}^{N_y} A_{jk} U_{ik} + \frac{1}{2} \left[ \left( \sum_{k=1}^{N_x} A_{ik} W_{kj} \right)^2 + \beta^2 v \left( \sum_{k=1}^{N_y} A_{jk} U_{ik} \right)^2 \right] \right\}$$

$$\begin{aligned}
& -12(\beta^2 \sum_{k=1}^{N_y} B_{jk} W_{ik}) \left\{ \beta \sum_{k=1}^{N_y} A_{jk} V_{ik} + v \sum_{k=1}^{N_x} A_{ik} W_{kj} + \frac{1}{2} \left[ v \left( \sum_{k=1}^{N_x} A_{ik} W_{kj} \right)^2 + \beta^2 \left( \sum_{k=1}^{N_y} A_{jk} U_{ik} \right)^2 \right] \right\} \\
& -12(1-v)\beta \left[ \beta \sum_{k=1}^{N_y} A_{jk} U_{ik} + \sum_{k=1}^{N_x} A_{ik} V_{kj} + \beta \sum_{k=1}^{N_x} A_{ik} W_{kj} \sum_{k=1}^{N_y} A_{jk} W_{ik} \right] \sum_{m=1}^{N_y} A_{jm} \sum_{k=1}^{N_x} A_{ik} W_{km} \\
& -12(1-v^2) \frac{q a^4}{E h^4} - K W_{ik} - G \left( \sum_{k=1}^{N_x} B_{ik} W_{kj} + \beta^2 \sum_{k=1}^{N_y} B_{jk} W_{ik} \right) \\
& \frac{1}{(\Delta t)^2} (W_{i+1} - 2W_i + W_{i-1}) + C \left[ \frac{1}{2(\Delta t)} (W_{i+1} - W_{i-1}) \right] \\
& + m_r \left[ \frac{1}{(\Delta t)^2} (W_{i+1} - 2W_i + W_{i-1}) \right] \tag{3.22}
\end{aligned}$$

olarak yazılır.

### 3.2.2. Elastik Zemine Oturan İzotrop Plağın Statik Analizi

Winkler-Pasternak Elastik zemine oturan dikdörtgen plağın geometrik bakımdan lineer olmayan statik davranışını idare eden hareket denklemlerini elde etmek için Denklem (3.17), (3.18) ve (3.19) ifadelerinde zaman ile ilgili terimler sıfırlanır ise

$$\begin{aligned}
& U_{,XX} + \frac{\beta^2}{2}(1-v)U_{,YY} + \frac{\beta}{2}(1+v)V_{,XY} + \left[ W_{,XX} + \frac{\beta^2}{2}(1-v)W_{,YY} \right] W_{,X} \\
& + \frac{\beta^2}{2}(1+v)W_{,YY}W_{,XY} = 0 \tag{3.23}
\end{aligned}$$

$$\beta^2 V_{,YY} + \frac{1}{2}(1-\nu)V_{,XX} + \beta \frac{1}{2}(1+\nu)U_{,XY} + \beta \left[ \beta^2 W_{,YY} + \frac{1}{2}(1-\nu)W_{,XX} \right] W_{,Y} + \beta \frac{1}{2}(1+\nu)W_{,X}W_{,XY} - W_{,Y} = 0 \quad (3.24)$$

$$W_{,XXXX} + 2\beta^2 W_{,XXYY} + \beta^4 W_{,YYYY} - 12 \left[ U_{,X} + \beta \nu V_{,Y} + \frac{1}{2}(W_{,X})^2 + \frac{1}{2}\beta^2 \nu (W_{,Y})^2 \right] W_{,XX} - 12 \left[ \beta V_{,Y} + \nu U_{,X} + \frac{1}{2}\nu (W_{,X})^2 + \frac{1}{2}\beta^2 (W_{,Y})^2 \right] (\beta^2 W_{,YY}) - 12 [\beta U_{,Y} + V_{,X} + \beta W_{,X}W_{,Y}] (1-\nu)\beta W_{,XY} + KW - G(W_{,XX} + \beta^2 W_{,YY}) - 12(1-\nu^2) \frac{qa^4}{Eh^4} \quad (3.25)$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemlerin DQ formunda yazılması ile

$$\sum_{k=1}^{N_x} B_{ik} U_{kj} + \beta^2 d_1 \sum_{k=1}^{N_y} B_{jk} U_{ik} + \beta d_2 \sum_{m=1}^{N_y} A_{jm} \sum_{k=1}^{N_x} A_{ik} V_{km} + \sum_{k=1}^{N_x} A_{ik} W_{kj} \left[ \sum_{k=1}^{N_x} B_{ik} W_{kj} + \beta^2 d_1 \sum_{k=1}^{N_y} B_{jk} W_{ik} \right] + \beta^2 d_2 \sum_{k=1}^{N_y} A_{jk} W_{ik} \sum_{m=1}^{N_y} A_{jm} \sum_{k=1}^{N_x} A_{ik} W_{km} = 0 \quad (3.26)$$

$$\beta^2 \sum_{k=1}^{N_x} B_{jk} V_{ik} + d_1 \sum_{k=1}^{N_x} B_{ik} V_{kj} + \beta d_2 \sum_{m=1}^{N_y} A_{jm} \sum_{k=1}^{N_x} A_{ik} U_{km}$$

$$\begin{aligned}
& + \beta \sum_{k=1}^{N_y} A_{jk} U_{ik} \left[ d_1 \sum_{k=1}^{N_x} B_{ik} W_{kj} + \beta^2 \sum_{k=1}^{N_y} B_{jk} W_{ik} \right] \\
& + \beta d_2 \sum_{k=1}^{N_y} A_{ik} W_{kj} \sum_{m=1}^{N_y} A_{jm} \sum_{k=1}^{N_x} A_{ik} W_{km} = 0
\end{aligned} \tag{3.27}$$

$$\sum_{k=1}^{N_x} D_{ik} W_{kj} + 2\beta^2 \sum_{m=1}^{N_y} B_{jm} \sum_{k=1}^{N_x} B_{ik} W_{km} + \beta^4 \sum_{k=1}^{N_y} D_{jk} W_{ik}$$

$$\begin{aligned}
& -12 \left( \sum_{k=1}^{N_x} B_{ik} W_{kj} \right) \left\{ \sum_{k=1}^{N_x} A_{ik} U_{kj} + \beta v \sum_{k=1}^{N_y} A_{jk} U_{ik} + \frac{1}{2} \left[ \left( \sum_{k=1}^{N_x} A_{ik} W_{kj} \right)^2 + \beta^2 v \left( \sum_{k=1}^{N_y} A_{jk} U_{ik} \right)^2 \right] \right\} \\
& -12 \left( \beta^2 \sum_{k=1}^{N_y} B_{jk} W_{ik} \right) \left\{ \beta \sum_{k=1}^{N_y} A_{jk} V_{ik} + v \sum_{k=1}^{N_x} A_{ik} W_{kj} + \frac{1}{2} \left[ v \left( \sum_{k=1}^{N_x} A_{ik} W_{kj} \right)^2 + \beta^2 \left( \sum_{k=1}^{N_y} A_{jk} U_{ik} \right)^2 \right] \right\} \\
& -12(1-v)\beta \left[ \beta \sum_{k=1}^{N_y} A_{jk} U_{ik} + \sum_{k=1}^{N_x} A_{ik} V_{kj} + \beta \sum_{k=1}^{N_x} A_{ik} W_{kj} \sum_{k=1}^{N_y} A_{jk} W_{ik} \right] \sum_{m=1}^{N_y} A_{jm} \sum_{k=1}^{N_x} A_{ik} W_{km} \\
& -12(1-v^2) \frac{qa^4}{Eh^4} - K W_{ik} - G \left( \sum_{k=1}^{N_x} B_{ik} W_{kj} + \beta^2 \sum_{k=1}^{N_y} B_{jk} W_{ik} \right)
\end{aligned} \tag{3.28}$$

olarak lineer denklem takımı elde edilir.

### 3.3. Elastik Zemine Oturan Ortotrop Dikdörtgen Plak

Winkler elastik zemine oturan dikdörtgen ve ortotrop plağın statik hesabını ifade eden denklemler [40]:

$$(U_{,XX} + W_{,X}W_{,XX} + v_y \beta V_{,XY} + v_y \beta^2 W_{,Y}W_{,XY}) + \frac{\beta D_{xy}}{D_x} (\beta U_{,YY} + V_{,XY} + \beta W_{,X}W_{,YY} + \beta W_{,Y}W_{,XY}) = 0 \quad (3.29)$$

$$+ \frac{\beta D_y}{D_x} (\beta V_{,YY} + \beta^2 W_{,Y}W_{,YY} + v_x U_{,XY} + v_x W_{,X}W_{,XY}) + \frac{D_{xy}}{D_x} (V_{,XX} + \beta U_{,XY} + V_{,XY} + \beta W_{,Y}W_{,XX} + \beta W_{,X}W_{,XY}) = 0 \quad (3.30)$$

$$W_{,XXXX} + \frac{2H\beta^2}{D_x} W_{,XXYY} + \frac{\beta^4 D_y}{D_x} W_{,YYYY} - 12 \left[ U_{,X} + \beta v_y V_{,Y} + \frac{1}{2} (W_{,X})^2 + \frac{1}{2} \beta^2 v_y (W_{,Y})^2 \right] W_{,XX} - 12 \frac{D_y}{D_x} \left[ \beta V_{,Y} + v_x U_{,X} + \frac{1}{2} \beta^2 (W_{,Y})^2 + \frac{1}{2} v_x (W_{,X})^2 \right] (\beta^2 W_{,YY}) - 24 \frac{D_{xy}}{D_x} [\beta U_{,Y} + V_{,X} + \beta W_{,X}W_{,Y}] \beta W_{,XY} + KW - \frac{q a^4}{D_x h} = 0 \quad (3.31)$$

şeklinde tanımlanır. Bu denklemlerde:

$$\beta = a/b; X = x/a; Y = y/b; U = ua/h^2; V = va/h^2; W = w/h; K = k a^4/D_x$$

$$D_x = E_x h^3/12(1-\nu_x \nu_y); D_y = E_y h^3/12(1-\nu_x \nu_y); H = D' + 2D_{xy} \quad (3.32)$$

$$D' = \nu_x E_y h^3/12(1-\nu_x \nu_y) = \nu_y E_x h^3/12(1-\nu_x \nu_y); D_{xy} = G_{xy} h^3/12$$

olarak tanımlanmıştır.

### 3.4. Sınır ve Başlangıç Koşulları

Çalışmada plak ve kabuk için düzleminde dönmeye karşı tutulmuş, dört kenarından basit mesnet (SSSS) ve yine dönmeye karşı tutulmuş, dört kenarından ankastre mesnet (CCCC) koşulları dikkate alınmıştır. Dinamik hesap için ise başlangıç koşulları verilmelidir. Bu koşullar aşağıdadır:

#### 3.4.1. Düzleminde Dönmesi Engellenmiş Dört Kenarından Basit Mesnet (SSSS)

$$Y = 0 \text{ ve } Y = 1 \text{ için } U = V = W = 0 \quad (3.33a)$$

$$Y = 0 \text{ ve } Y = 1 \text{ için } \left( \beta^2 \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} \right) = 0 \quad (3.33b)$$

$$X = 0 \text{ ve } X = 1 \text{ için } U = V = W = 0 \quad (3.33c)$$

$$X = 0 \text{ ve } X = 1 \text{ için } \left( \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + \nu \beta^2 \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} \right) = 0 \quad (3.33d)$$

#### 3.4.2. Düzleminde Dönmesi Engellenmiş Dört Kenarından Ankastre Mesnet (CCCC)

$$Y = 0 \text{ ve } Y = 1 \text{ için } U = V = W = 0 \quad (3.34a)$$

$$Y = 0 \text{ ve } Y = 1 \text{ için } \left( \frac{\partial W}{\partial Y} \right) = 0 \quad (3.34b)$$

$$X = 0 \text{ ve } X = 1 \text{ için } U = V = W = 0 \quad (3.34c)$$

$$X = 0 \text{ ve } X = 1 \text{ için } \left( \frac{\partial W}{\partial X} \right) = 0 \quad (3.34d)$$

### 3.4.3. Karşılıklı Uzun Kenarları Ankastre ve Kısa Kenarları Basit Mesnet (SCSC)

$$X = 0 \text{ ve } X = 1 \text{ için } W = 0 \quad (3.35a)$$

$$X = 0 \text{ ve } X = 1 \text{ için } \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} = 0 \quad (3.35b)$$

$$Y = 0 \text{ ve } Y = 1 \text{ için } W = 0 \quad (3.35c)$$

$$Y = 0 \text{ ve } Y = 1 \text{ için } \left( \frac{\partial W}{\partial Y} \right) = 0 \quad (3.35d)$$

### 3.4.4. Başlangıç Koşulları

$$\tau = 0 \text{ için } W = 0 \quad (3.36a)$$

$$\tau = 0 \text{ için } \left( \frac{\partial W}{\partial \tau} \right) = 0 \quad (3.36b)$$

olarak verilmektedir. Bu denklemlerin DQ formu yazılarak her bir problem tipi için yukarıda verilen esas denklemler ile birlikte dikkate alınmaları gerekir.

## 4. SAYISAL UYGULAMALAR

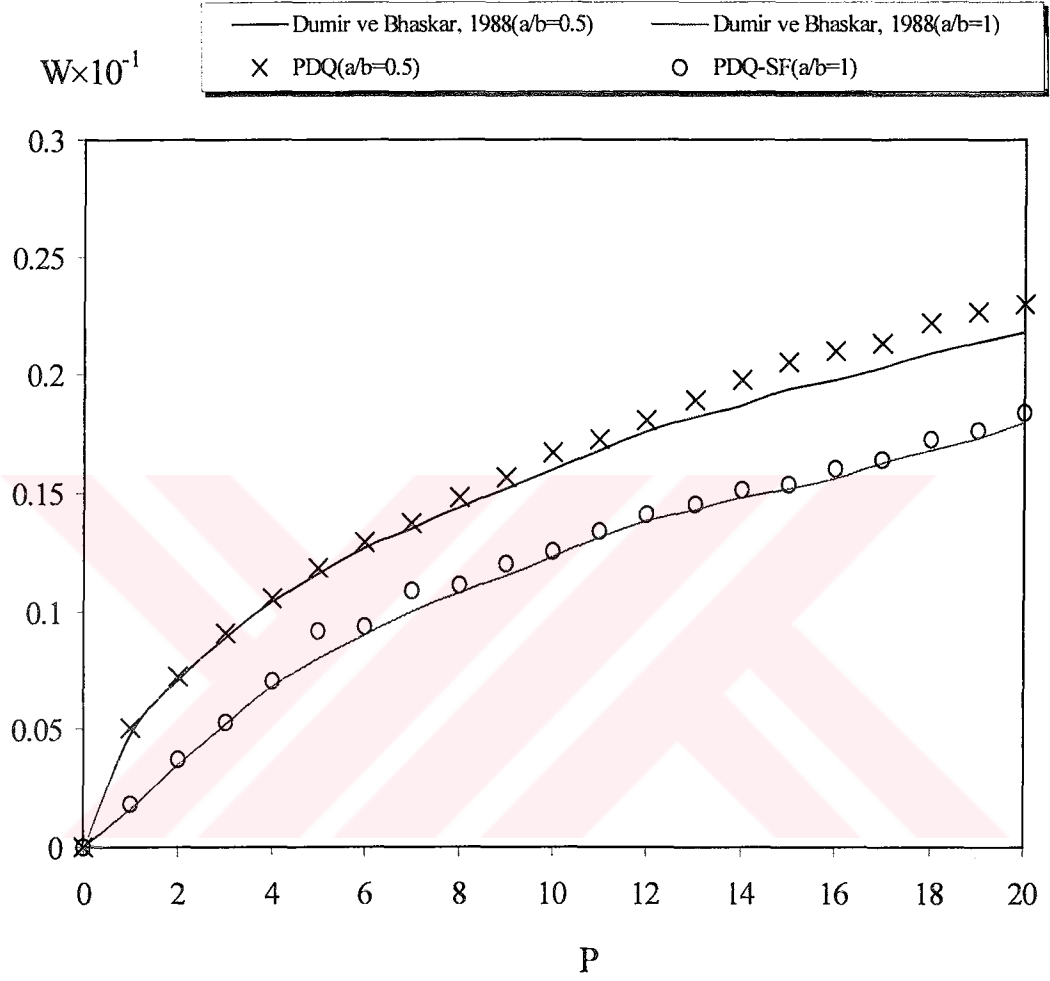
### 4.1. Dikdörtgen Plakların Analizi

#### 4.1.1. Dikdörtgen Plakların Statik Hesabı

Şekil 4.1 - Şekil 4.14'de izotrop ve ortotrop dikdörtgen plakların lineer olmayan statik analiz sonuçları görülmektedir. Sonuçlar dikkate alınan yüke karşılık deplasmanları göstermektedir. Sayısal uygulamalarda dört kenarında basit mesnetli (SSSS) ve dört kenarından ankastre (CCCC) mesnet koşulları dikkate alınmıştır. Elde edilen sonuçlar Dumir ve Bhaskar tarafından [2] ortogonal kollokasyon metodu ile elde edilen sonuçlar ile karşılaştırmalı olarak verilmiştir.

Statik hesapta üniform yayılı ve sinüs fonksiyonu olarak verilen yükler dikkate alınmıştır. Ortotrop plak için (Şekil 4.3, Şekil 4.4, Şekil 4.4 ve Şekil 4.8) verilen sonuçlarda ortotrop malzemeye ait gerekli bilgi ilgili şeklin altında verilmiştir. PDQ metodunda üniform aralıklı düğüm noktası (Denklem 2.81 ve Denklem 2.82) kullanılmış ve DQ metodunda ağırlık katsayılarının hesabı için Chebyshev polinomları kullanılmıştır. Üniform düğüm noktası için elde edilen sonuçlar Chebyshev polinomları için üniform olmayan düğüm nokta dağılımına göre daha iyi sonuçlar vermiştir. Üniform olmayan düğüm nokta dağılımı için en uygun sonuçlar Lagrange polinomlarının kullanılması ile hesaplanmıştır.

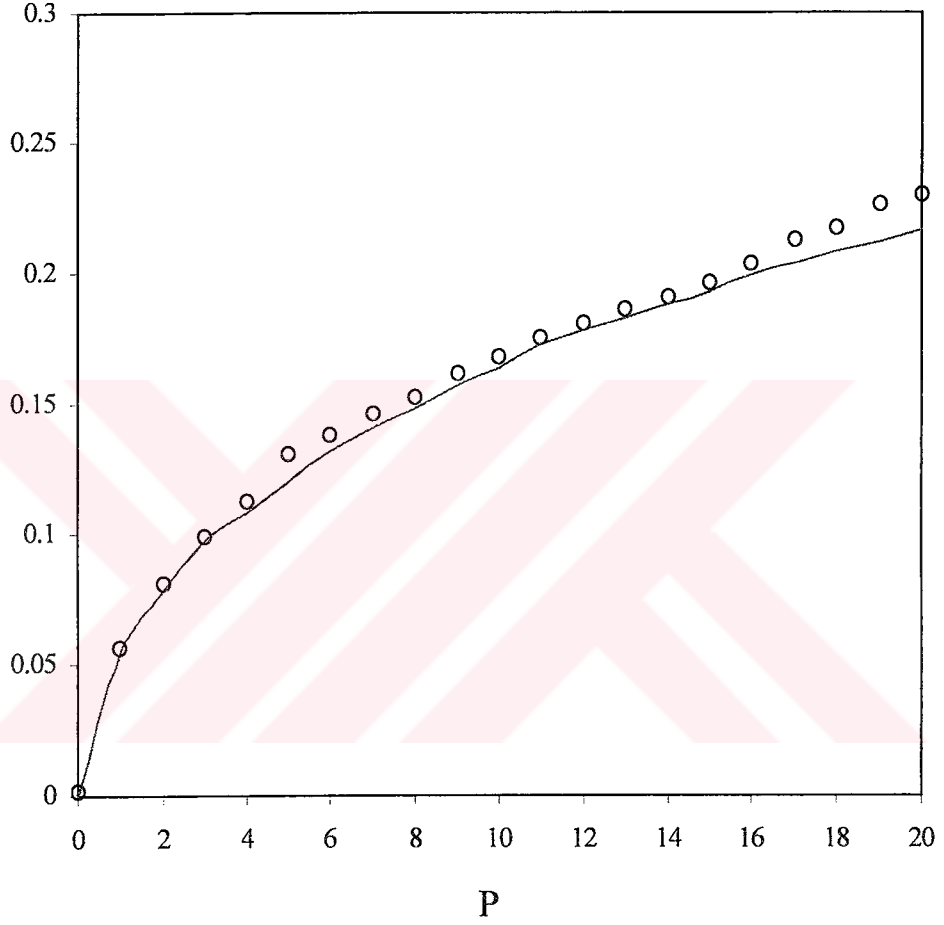
Şekil 4.14'de dört kenarında ankastre tutulmuş (CCCC) dikdörtgen plağın üniform yayılı yük etkisindeki merkezi deplasmanları görülmektedir. Dört farklı plak boyutlarının oranı ( $k$ ) için verilen grafikte kare plak için ( $a/b=1$ ) Timoshenko ve Woinowsky-Krieger [35] tarafından verilen analitik sonuçta görülmektedir. Legendre polinomu kullanılarak elde edilen DQ sonuçlarında üniform düğüm noktaları kullanılmış ve her iki yönde 7 düğüm noktası ile elde edilen sonuçlar Timoshenko ve Woinowsky-Krieger [35] tarafından  $a/b = 1$  için verilen sonuçlar ile hemen hemen çakışmıştır.



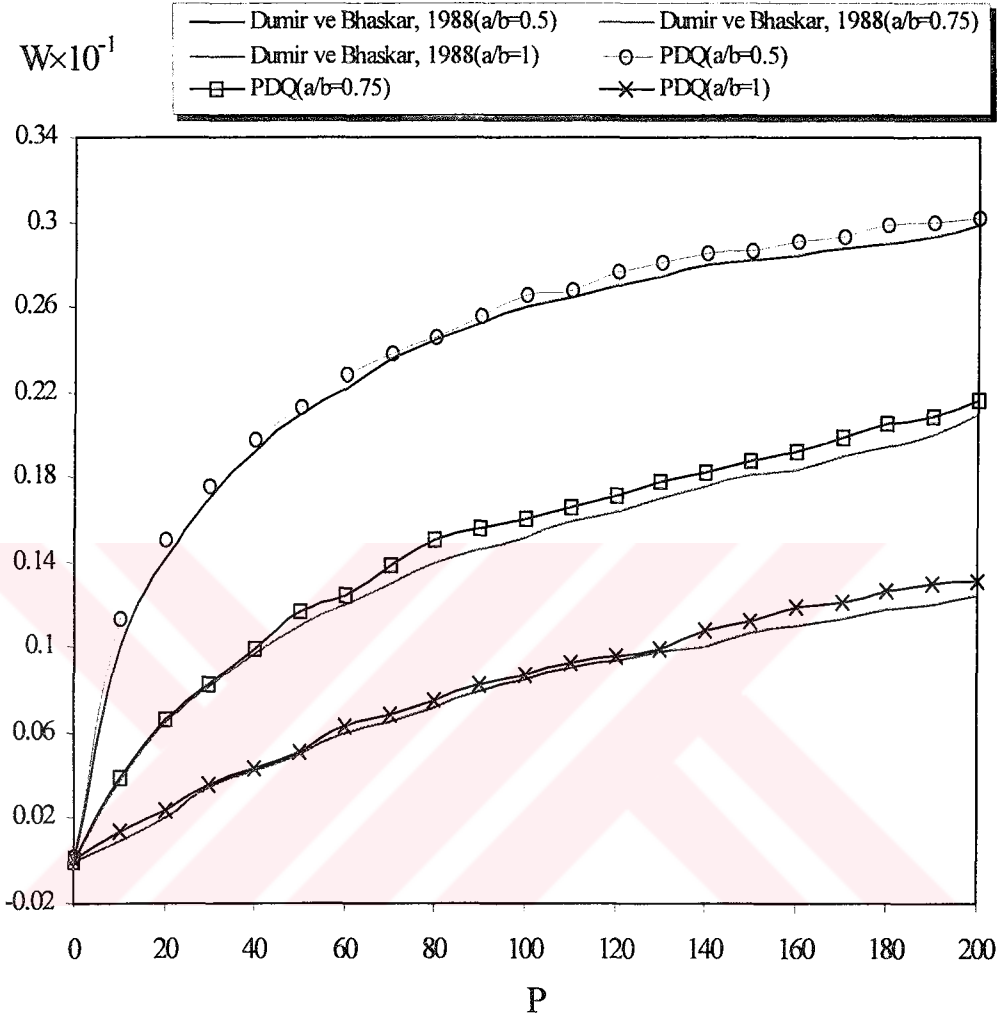
Şekil 4.1 Elastik zemin etkisinin dikkate alınmadığı dikdörtgen plak için Yük-Deplasman eğrisi (CCCC Plak;  $\nu = 0.316$ )

$W \times 10^{-1}$

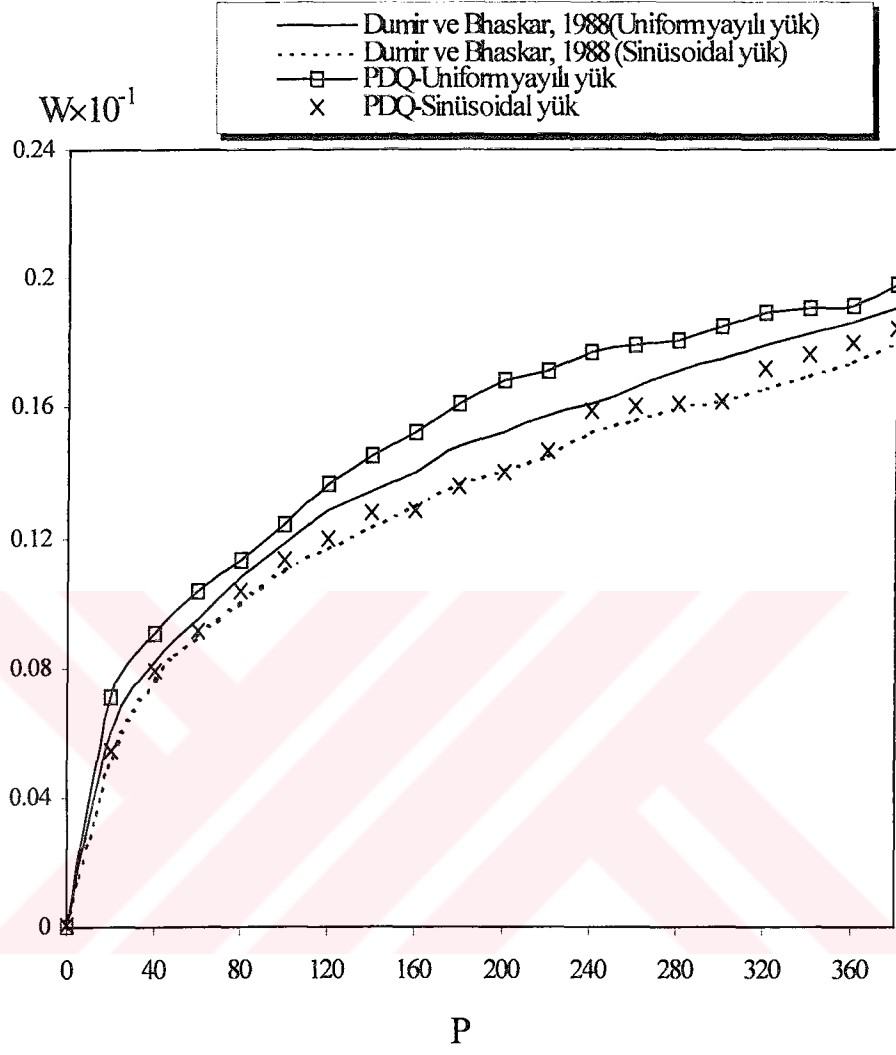
— Durnir ve Bhaskar, 1988(a/b=1)  
○ PDQ(a/b=1)



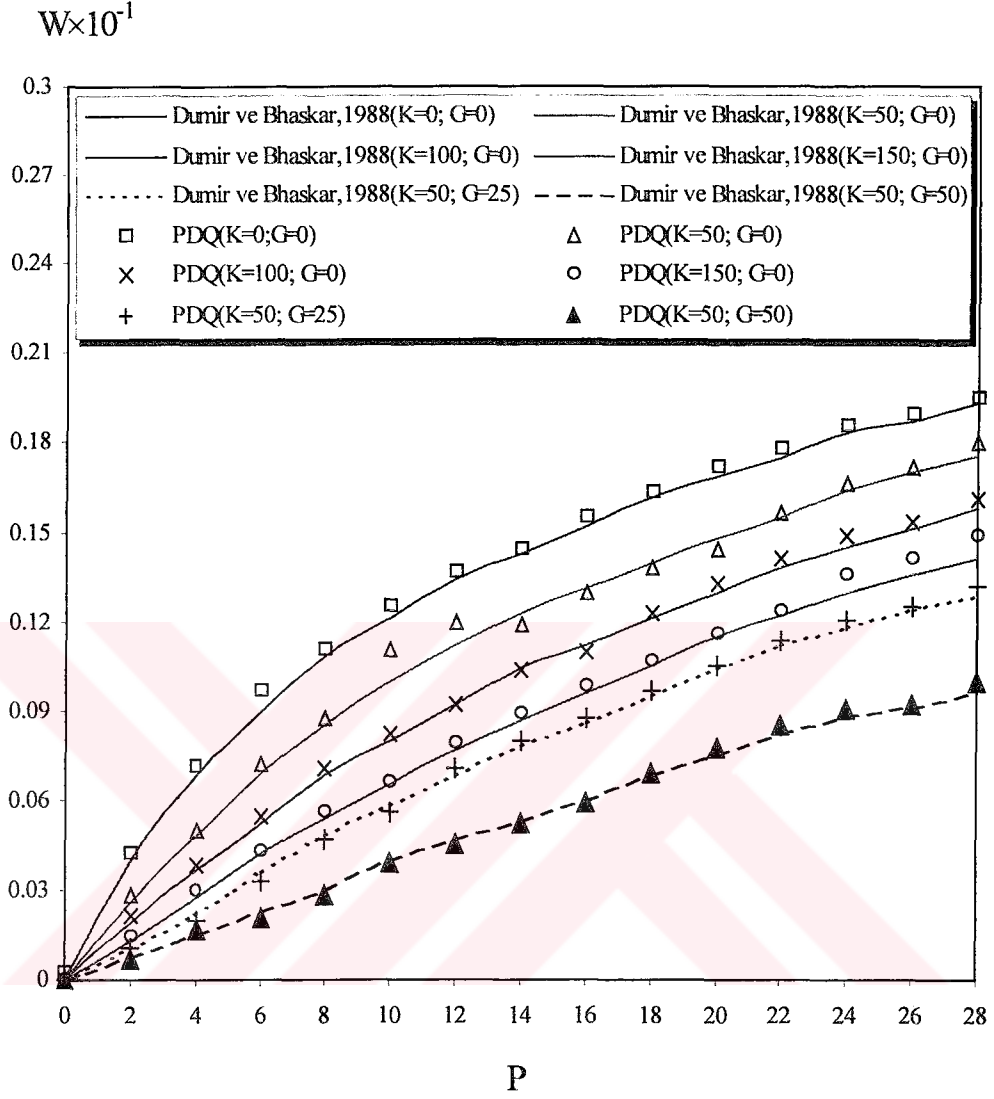
Şekil 4.2 Elastik zemin etkisinin dikkate alınmadığı dikdörtgen plak için Yük-Deplasman eğrisi (SSSS Plak;  $\nu = 0.316$ )



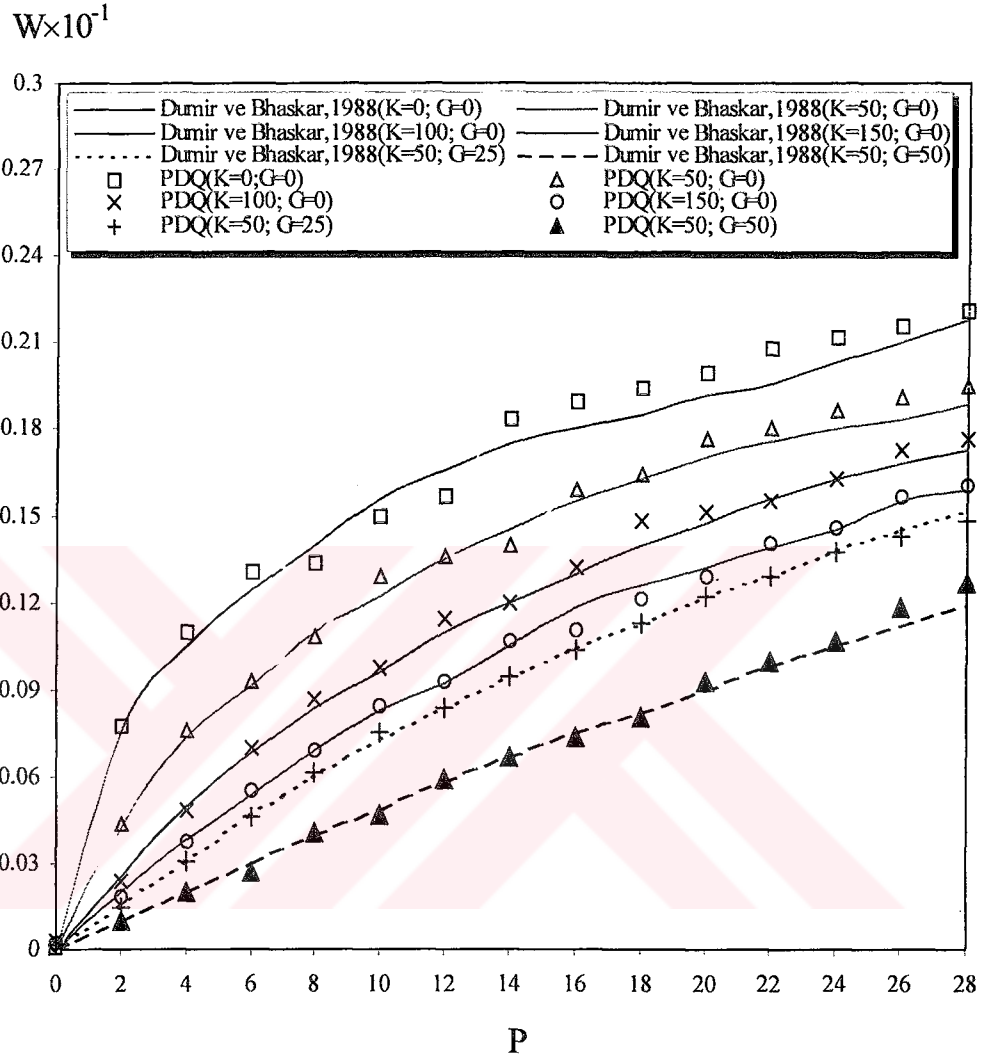
Şekil 4.3 Elastik zemin etkisinin dikkate alınmadığı dikdörtgen plak için Yük-Deplasman eğrisi (CCCC Ortotrop Plak;  $E_y/E_x = 40$ ;  $G_{xy}/E_x=0.6$ ;  $\nu_y = 0.25$ )



Şekil 4.4 Elastik zemin etkisinin dikkate alınmadığı dikdörtgen plak için Yük-Deplasman eğrisi (SSSS Ortotrop Plak;  $a/b = 1$ ;  $E_y/E_x = 40$ ;  $G_{xy}/E_x = 0.6$ ;  $\nu_y = 0.25$ )

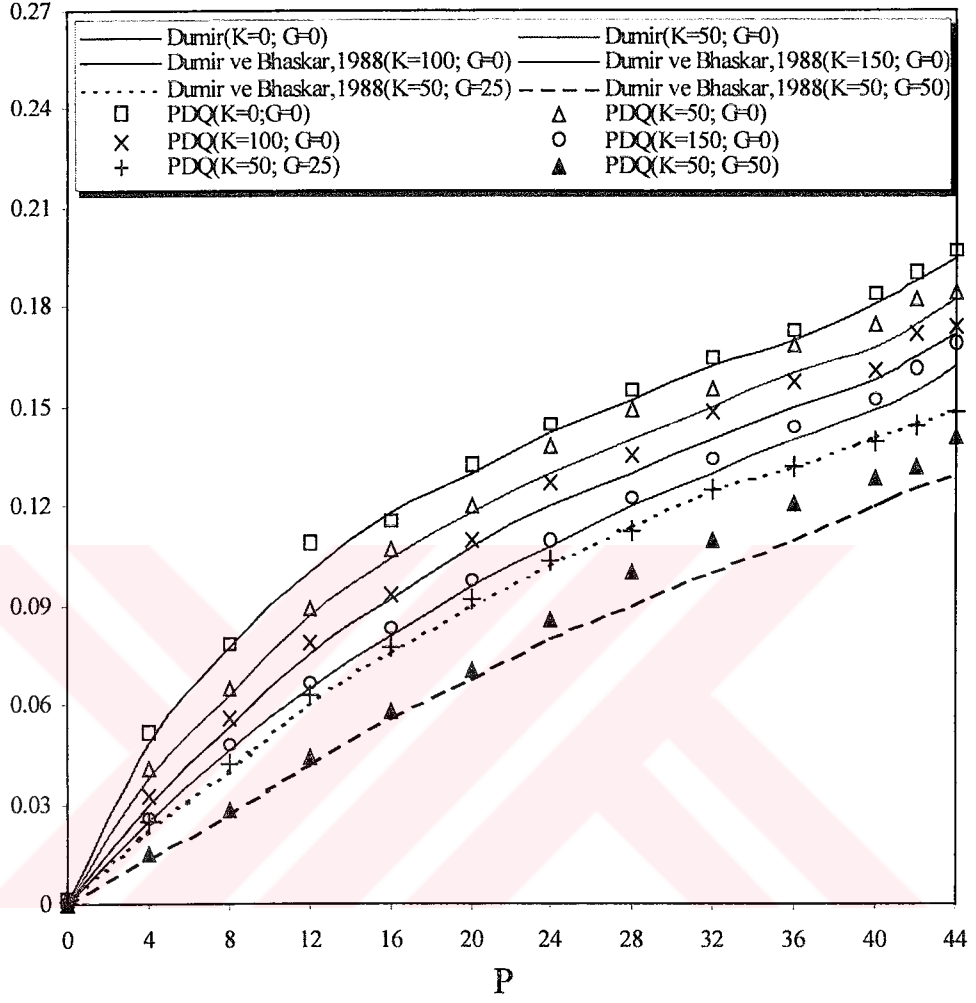


Şekil 4.5 Elastik zemine oturan kare plak için Yük-Deplasman eğrisi  
(CCCC Plak)



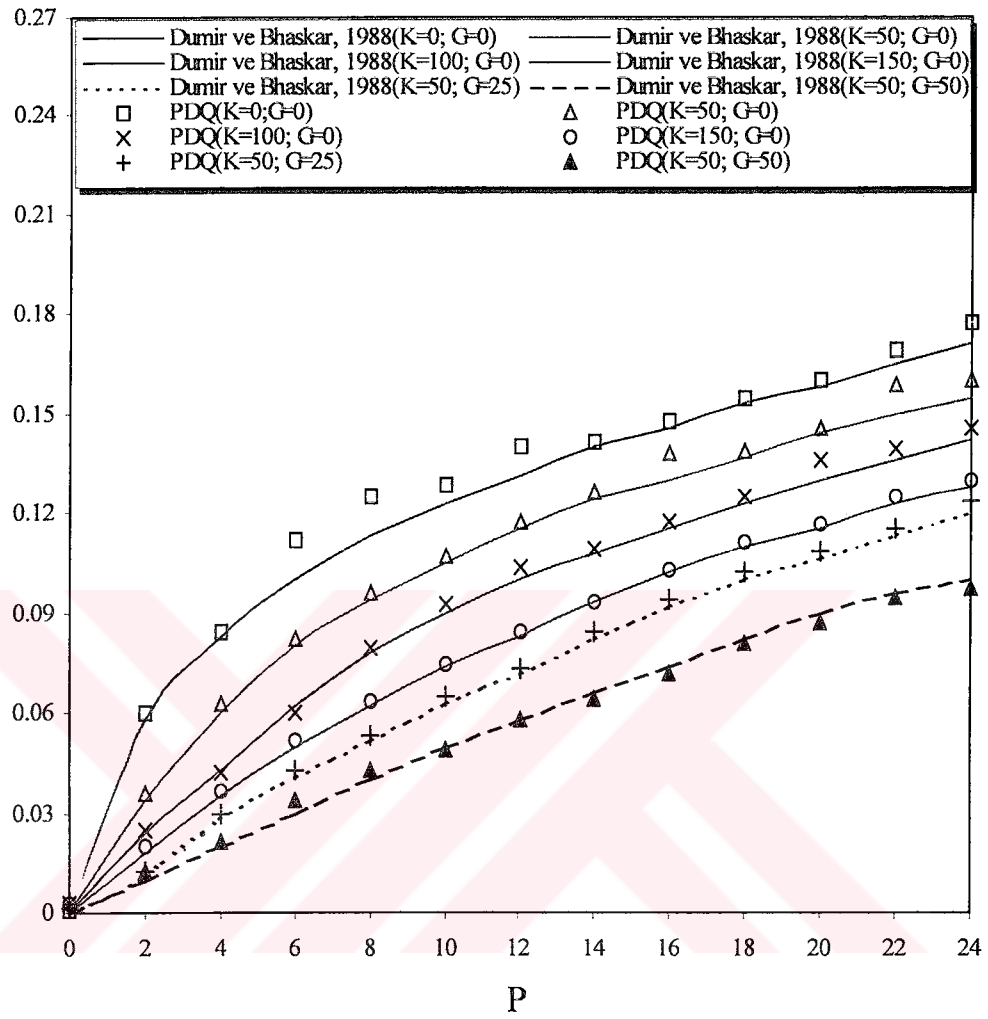
Şekil 4.6 Elastik zemine oturan kare plak için Yük-Deplasman eğrisi  
(SSSS Plak)

$W \times 10^{-1}$

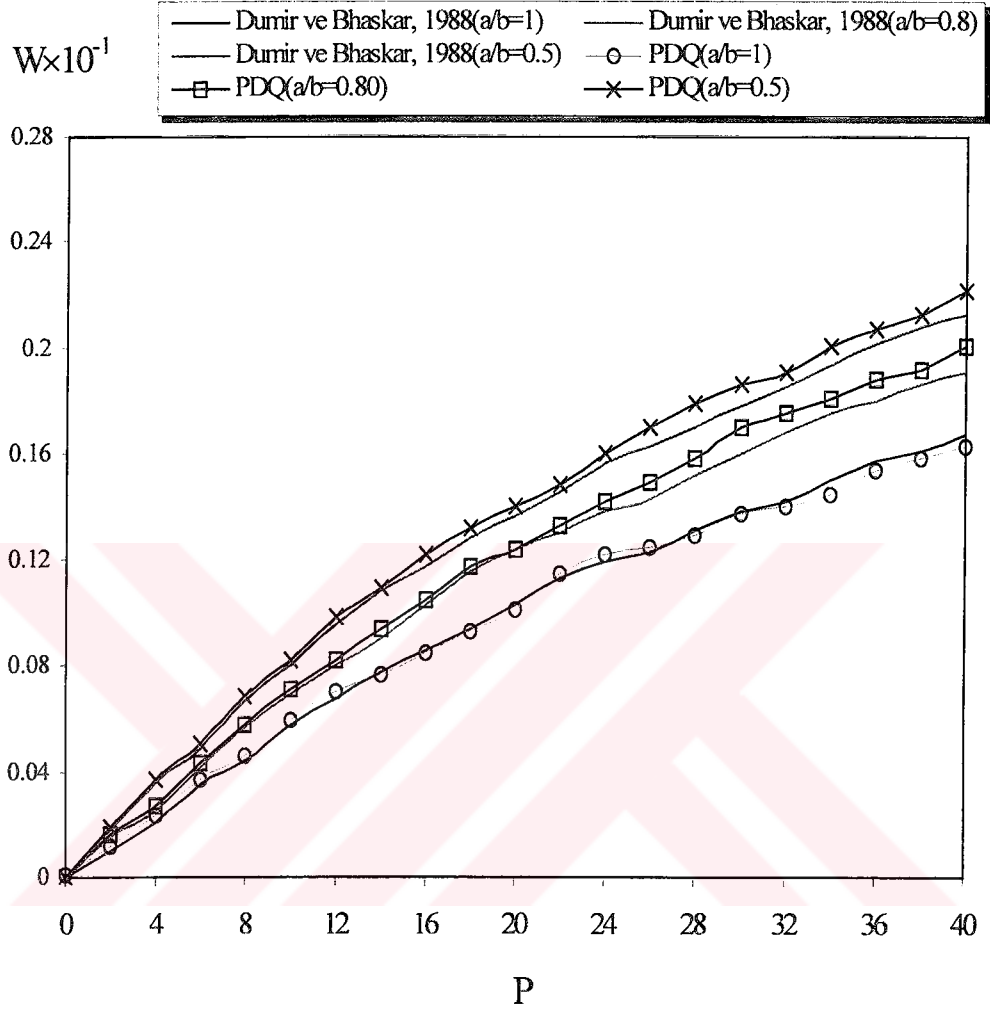


Şekil 4.7 Elastik zemine oturan Ortotrop kare plak için Yük-Deplasman eğrisi  
(CCCC Plak;  $E_y/E_x = 3$ ;  $G_{xy}/E_x = 0.5$ ;  $\nu_y = 0.22$ )

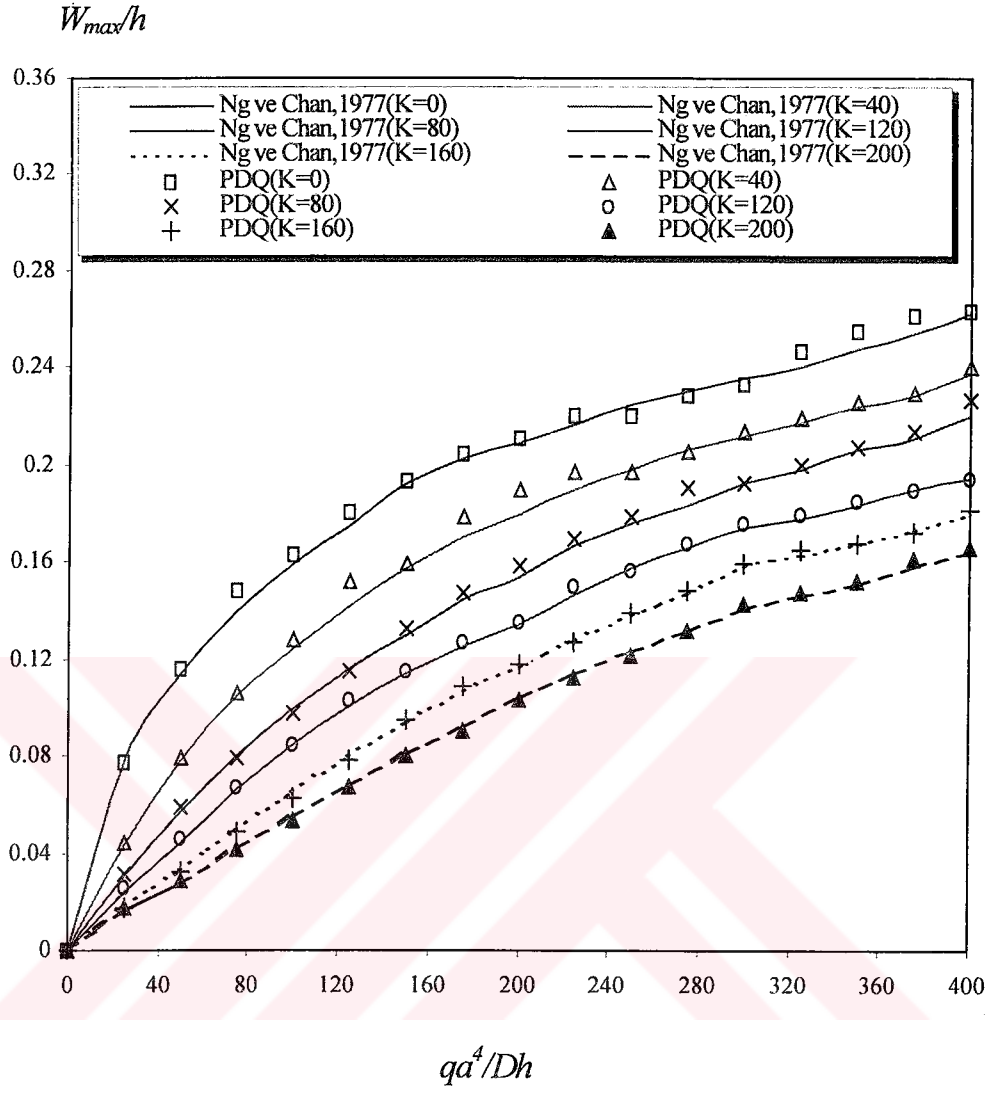
$W \times 10^{-1}$



Şekil 4.8 Elastik zemine oturan Ortotrop kare plak için Yük-Deplasman eğrisi  
(SSSS Plak;  $E_y/E_x = 3$ ;  $G_{xy}/E_x = 0.5$ ;  $\nu_y = 0.22$ )

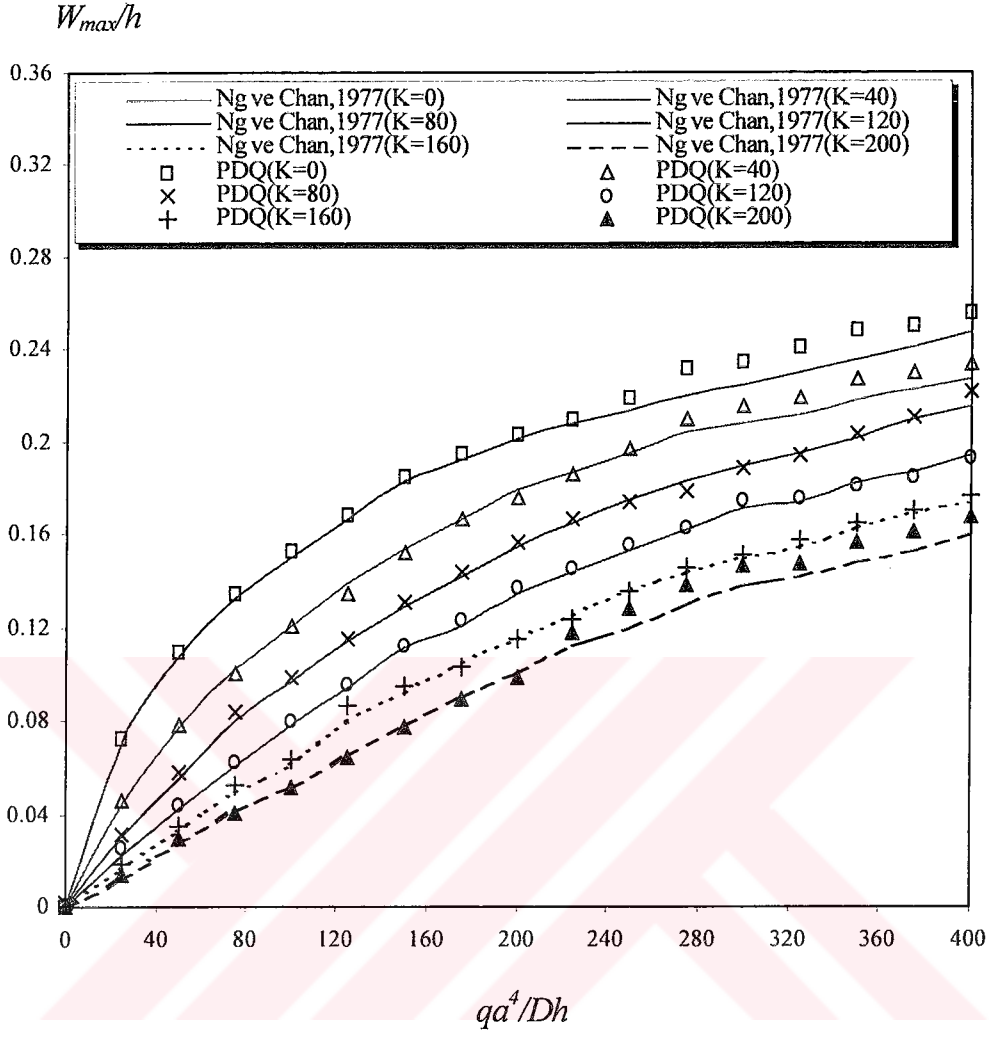


Şekil 4.9 Elastik zemine oturan kare plak için Yük-Deplasman eğrisi  
(CCCC Plak; K=50; G=25)

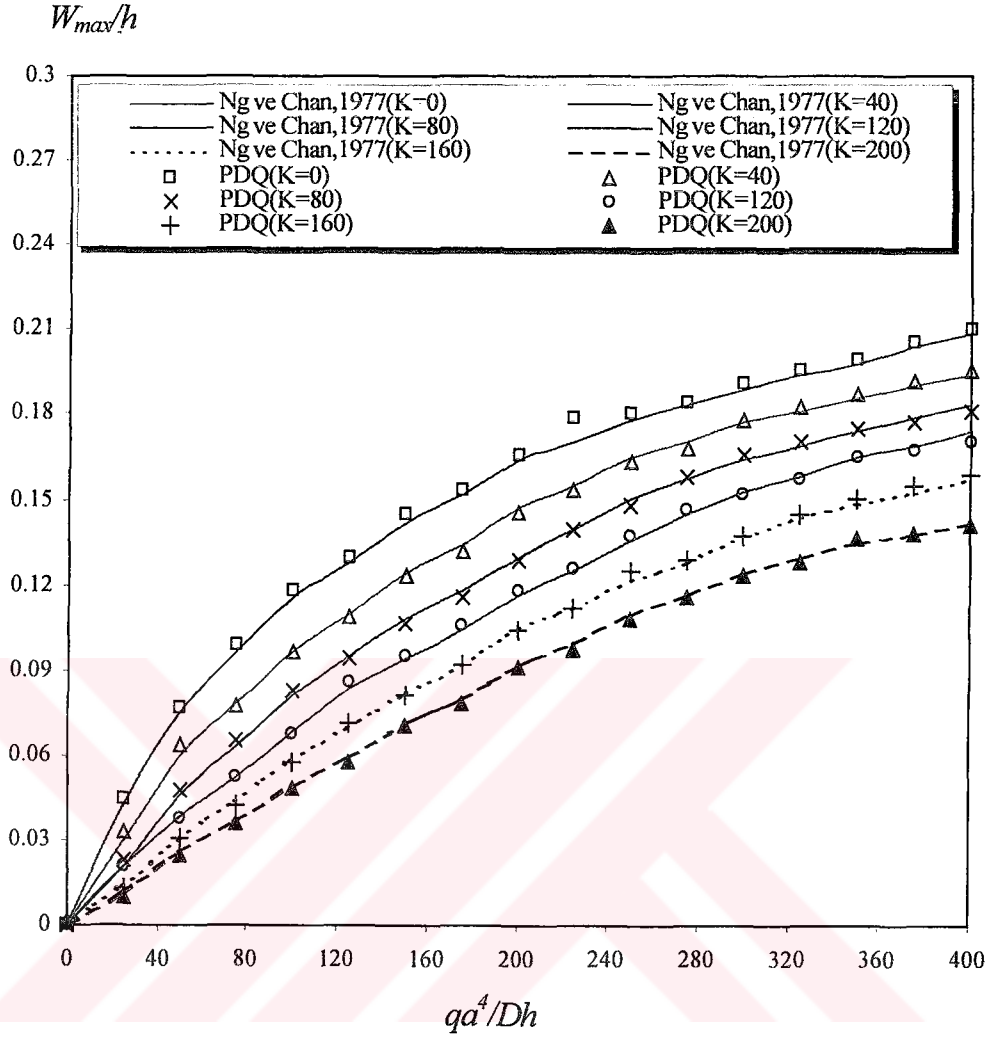


Şekil 4.10 CCCC mesnet koşuluna sahip izotrop dikdörtgen plağın yük-deplasman eğrisi

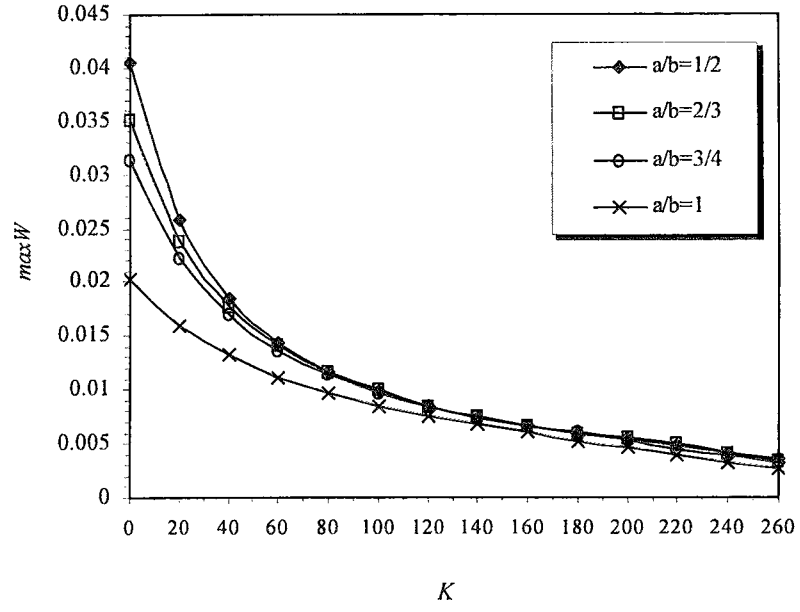
( $a/b=1/2$ ;  $\nu = 1/3$  )



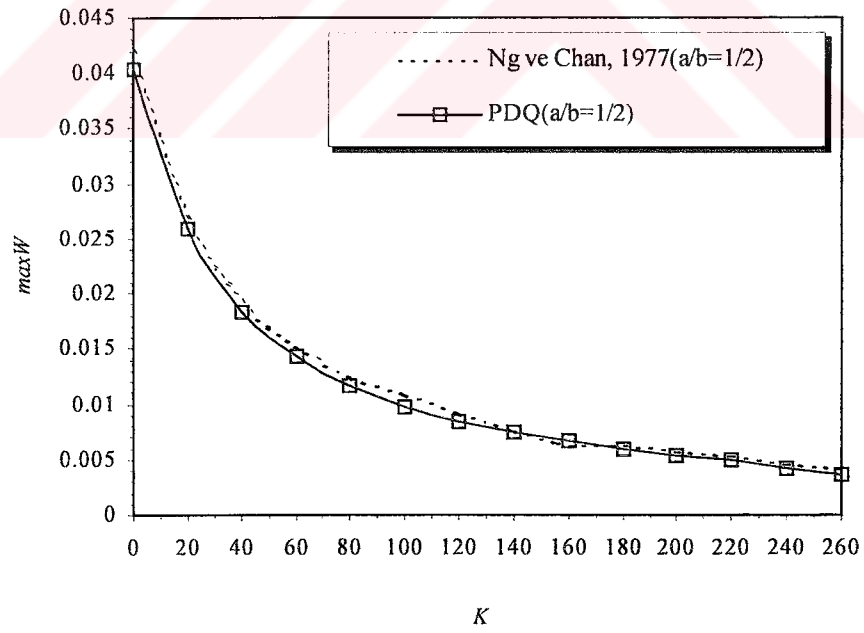
Şekil 4.11 CCCC mesnet koşuluna sahip izotrop dikdörtgen plağın yük-deplasman eğrisi  
( $a/b=2/3$ ;  $\nu = 1/3$ )



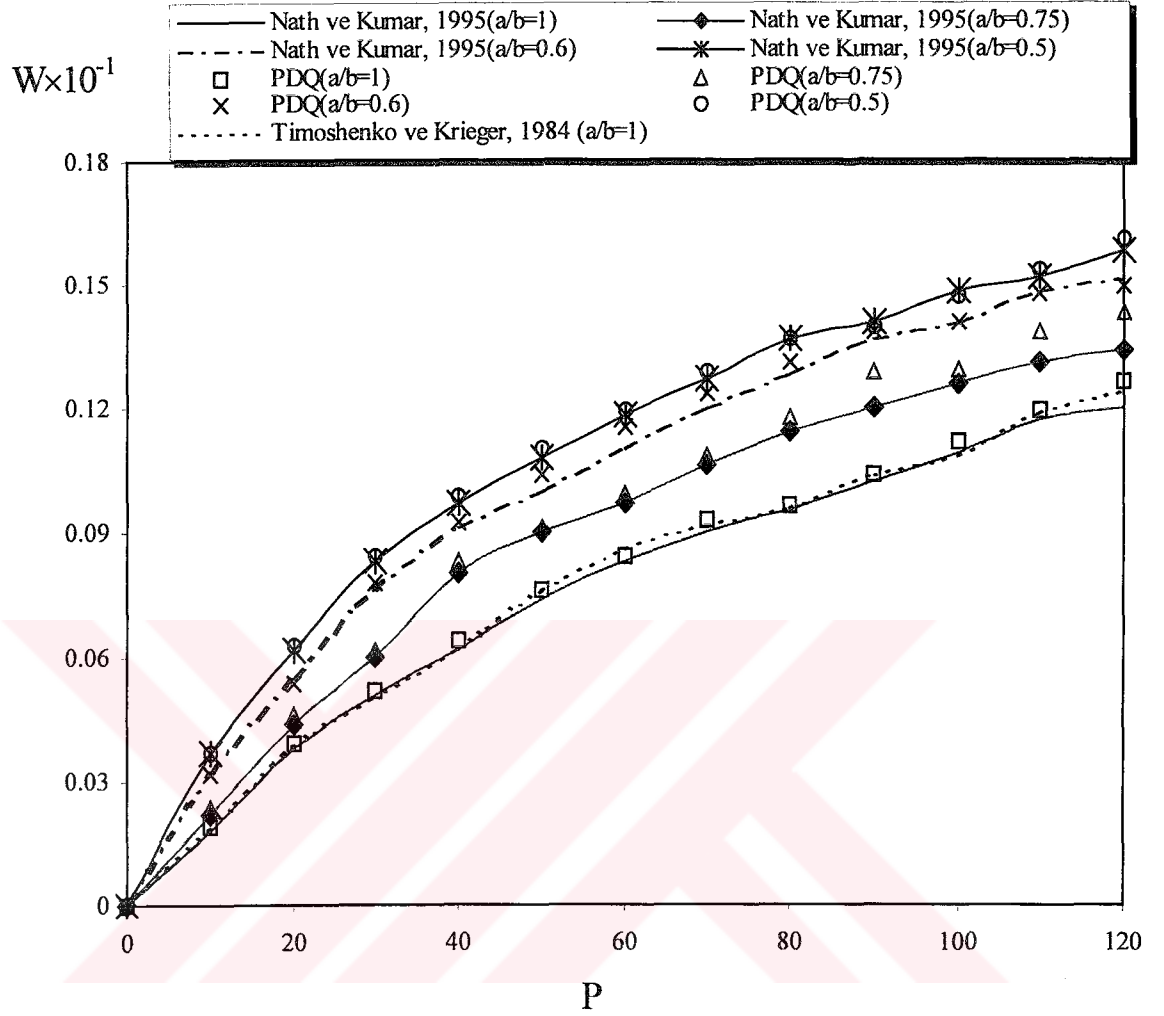
Şekil 4.12 CCCC mesnet koşuluna sahip izotrop dikdörtgen plağın yük-deplasman eğrisi  
( $a/b=1$ ;  $\nu = 1/3$ )



Şekil 4.13a Farklı geometrideki dikdörtgen plak için Zemin parametresi K'ya bağlı plak maksimum deplasmanı (CCCC; a/b plak kenarlarının oranı)



Şekil 4.13b Farklı Zemin parametresi K'ya bağlı plak maksimum deplasmanı (CCCC; a/b=1/2)



Şekil 5.14 Farklı kenar boyutlarının oranına bağlı CCCC Dikdörtgen plağın yük-merkezi deplasman eğrisi

Çizelge 4.1'de verilen malzeme özellikleri için ortotrop plağa ait deplasman ifadeleri çeşitli mesnet koşulları için elde edilmiş ve Çizelge 4.2'de özetlenmiştir. Parantez içinde verilen değerler ChbDQ ile yani Chebyshev polinomunun kullanıldığı DQ yöntemi ile hesaplanmıştır. Parantez içindeki değerler Dumir ve Bhaskar [2] tarafından verilen sonuçları göstermektedir.

Çizelge 4.1 Ortotrop malzeme için seçilen malzeme özellikleri

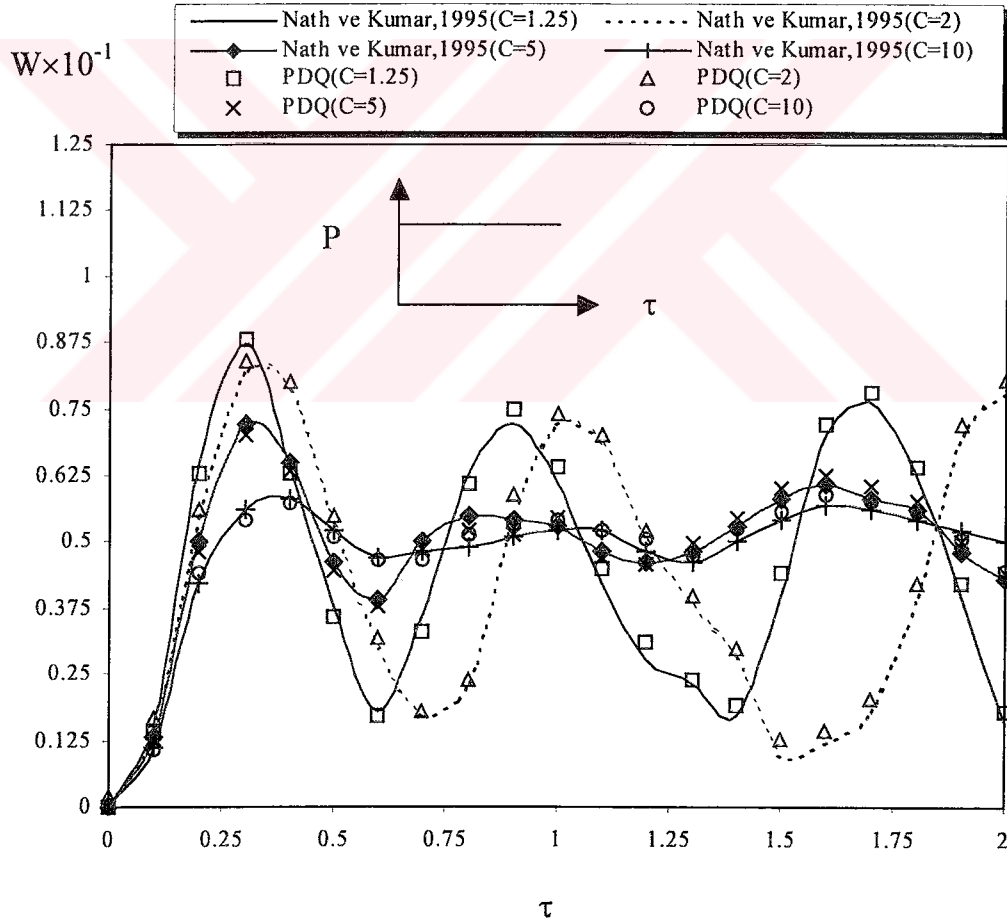
Malzeme No	$E_y / E_x$	$G_{xy} / E_x$	$\nu_y$	Malzeme Cinsi
1	1	$0.5/(1+\nu_y)$	0.30	İzotrop
2	3	0.5	0.25	Cam-Epoksi
3	10	0.333	0.22	Boron-Epoksi
4	40	0.6	0.25	Grafit-Epoksi

Çizelge 4.2 Üniform yük etkisindeki kare plağın farklı zemin parametreleri için hesaplanan maksimum deplasman değerleri

Malzeme No	Zemin parametreleri		Mesnet koşulları		
	K	G	CCCC	SSSS	SCSC
1	0	0	0.221(0.2312)	0.709 (0.7278)	0.334 (0.3365)
	50	0	0.132 (0.1338)	0.222 (0.0235)	0.165 (0.1634)
	100	0	0.093 (0.0954)	0.127 (0.1292)	0.107 (0.1055)
	150	0	0.071(0.0708)	0.088 (0.0865)	0.788 (0.8014)
	50	25	0.060 (0.0611)	0.081 (0.0804)	0.693 (0.6890)
	50	50	0.039 (0.0402)	0.49 (0.4758)	0.440 (0.3874)
2	0	0	0.129 (0.1274)	0.472 (0.4511)	0.156 (0.1546)
	50	0	0.094 (0.0953)	0.201 (0.2023)	0.107 (0.1055)
	100	0	0.074 (0.0738)	0.126 (0.1250)	0.081 (0.0789)
	150	0	0.061 (0.0591)	0.090 (0.088)	0.649 (0.6472)
	50	25	0.052 (0.0533)	0.083 (0.0816)	0.586 (0.5901)
	50	50	0.036 (0.0377)	0.052 (0.0539)	0.403 (0.4552)
3	0	0	0.051 (0.0528)	0.238 (0.2377)	0.053 (0.0556)
	50	0	0.044 (0.0462)	0.142 (0.1438)	0.045 (0.0472)
	100	0	0.039 (0.0406)	0.100 (0.1023)	0.040 (0.0385)
	150	0	0.035 (0.0342)	0.076 (0.0755)	0.035 (0.0324)
	50	25	0.032 (0.0311)	0.071 (0.0704)	0.034 (0.0318)
	50	50	0.025 (0.0238)	0.048 (0.0462)	0.027 (0.0251)
4	0	0	0.012 (0.0118)	0.065 (0.0633)	0.012 (0.0109)
	50	0	0.012 (0.0116)	0.054 (0.0575)	0.012 (0.0144)
	100	0	0.011 (0.0105)	0.046 (0.0448)	0.117 (0.1193)
	150	0	0.011 (0.1074)	0.040 (0.0409)	0.012 (0.0154)
	50	25	0.011 (0.0125)	0.040 (0.0384)	0.114 (0.1168)
	50	50	0.010 (0.0117)	0.031 (0.0345)	0.106 (0.1085)

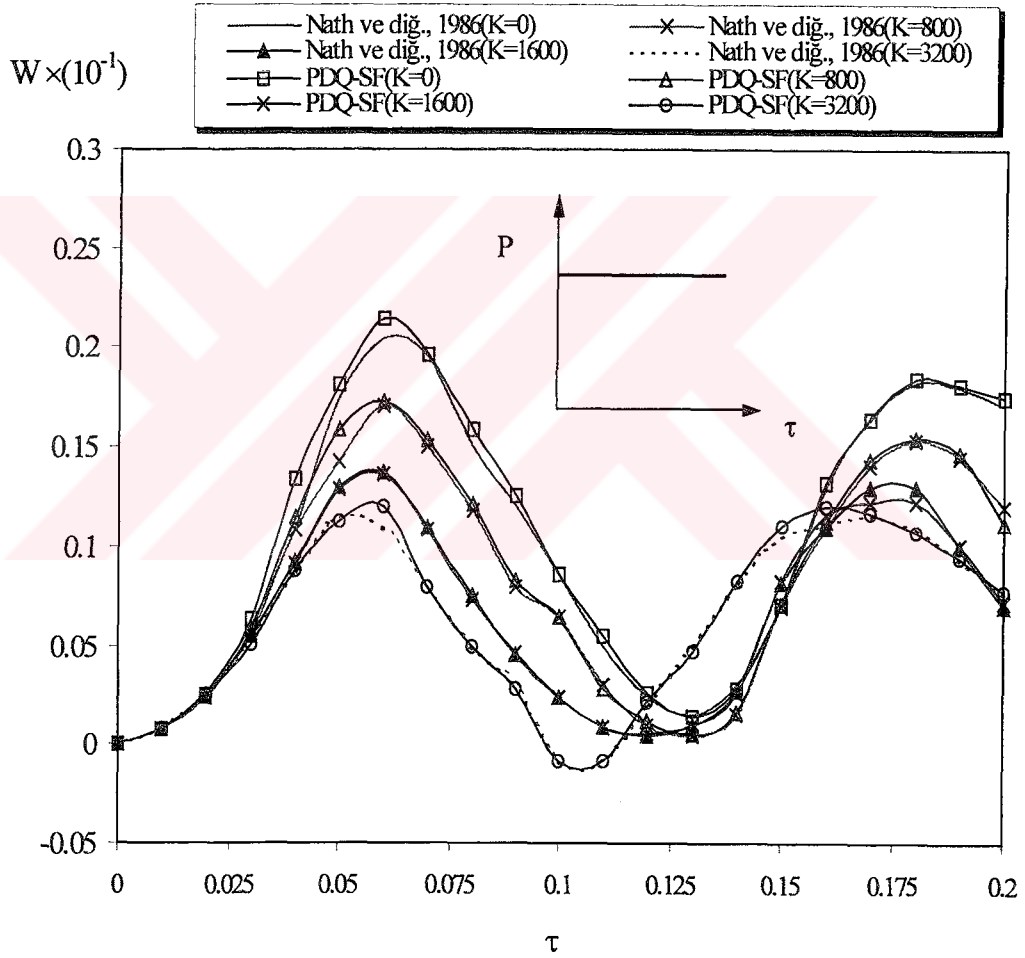
#### 4.1.2. Dikdörtgen Plakların Dinamik Hesabı

Bu bölümde elastik zemine oturan dikdörtgen plakların veya oturmamış yani elastik zemin etkisinin dikkate alınmadığı dikdörtgen plakların geometrik bakımdan lineer olmayan dinamik analizine ait örnekler sunulacaktır. Şekil 4.15’de elastik zemin etkisinin dikkate alınmadığı CCCC plak için farklı sönüm oranları ve sabit adım yükü etkisinde zamana bağlı merkezi deplasmanın değişimi sunulmuştur. Sabit yük değeri,  $P = 29.14$  olarak boyutsuzdur. DQ ile elde edilen sonuçlarda konum değişkeni için Lagrange polinomları, zaman değişkeni için sonlu farklar kullanılmıştır. Sonuçlar Nath ve Kumar tarafından verilen [41] değerler ile uyum içindedir.



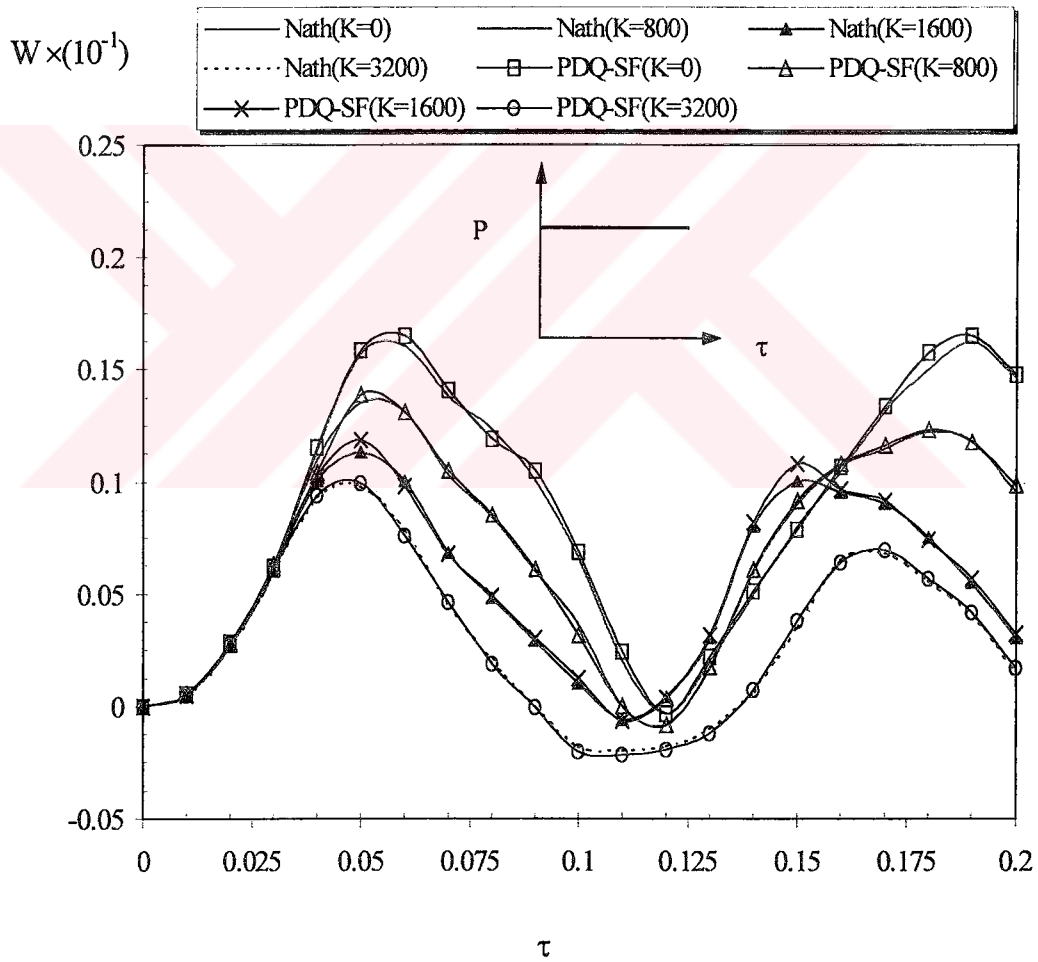
Şekil 4.15 CCCC Dikdörtgen plâğın sönümlü dinamik hesabı ( $P = 29.14$ )

Şekil 4.16 - Şekil 4.28'de iki farklı mesnet koşulunun (SSSS ve CCCC) ve iki farklı dinamik yükün (sabit adım yük ve sinüs yük) dikkate alındığı dikdörtgen plaklara ait zamana bağlı merkezi deplasmanlar, literatürde verilen değerler ile birlikte [1] karşılaştırmalı olarak görülmektedir. Bu şekiller; zemin parametresi ( $K$ ), Zemin kayma modülü ( $G$ ) ve kütle oranları ( $m_r$ ) nın farklı değerleri için zamana bağlı deplasman grafiklerini içermektedir.

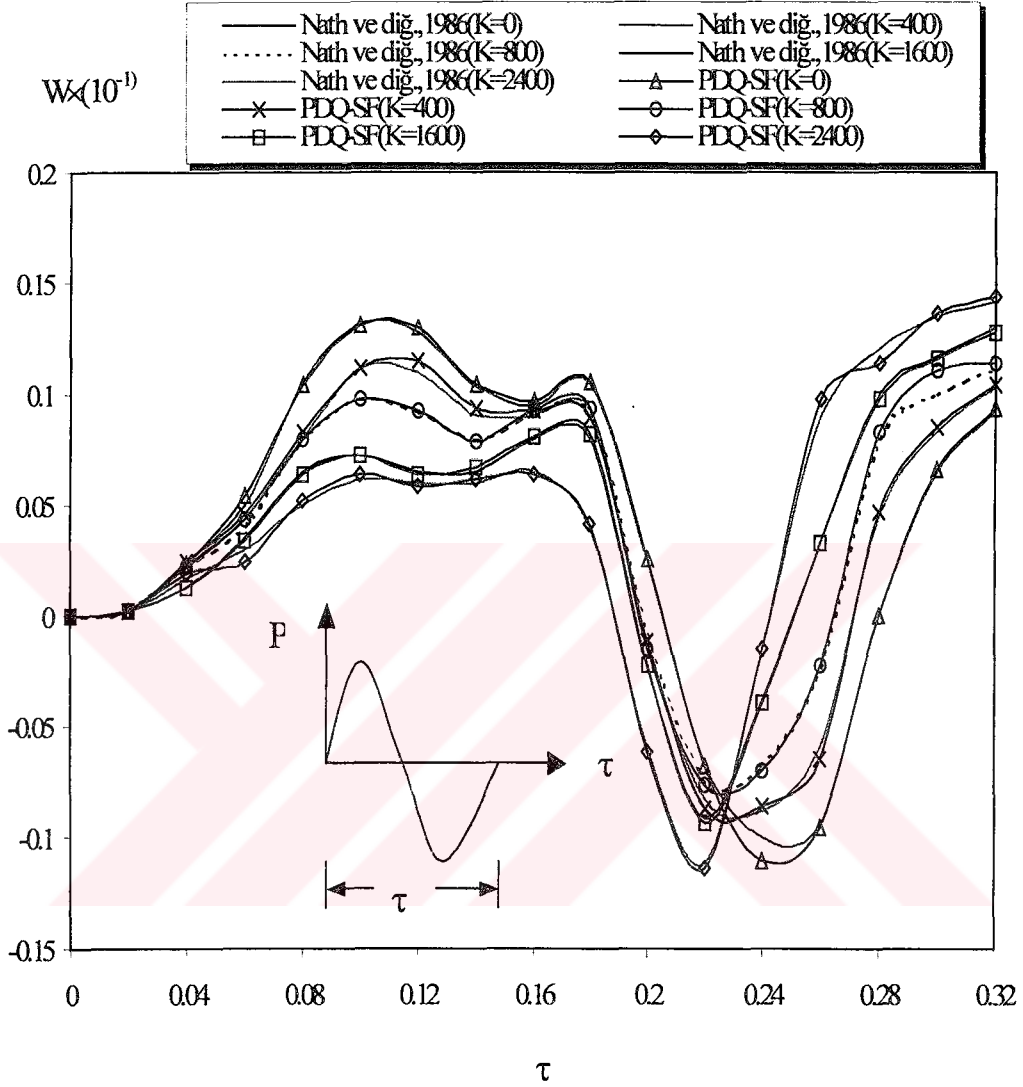


Şekil 4.16 SSSS mesnetli dikdörtgen plağın sabit adım yükü altında dinamik hesabı  
( $P=100$ ;  $G=0$ ;  $a/b=1$ )

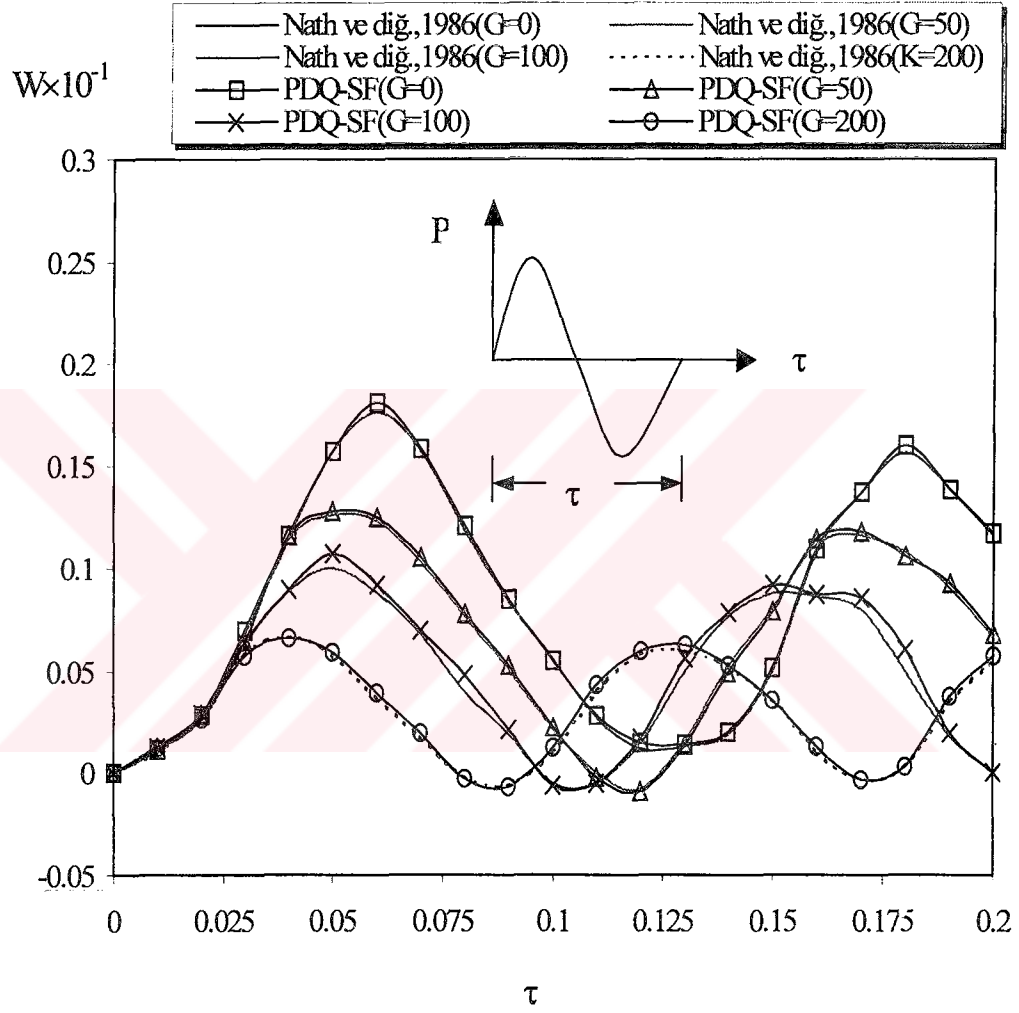
Aşağıdaki şekillerde ( Şekil 4.17 –Şekil 4.28) PDQ-SF ifadesi, konum yani uzay değişkeni için polinomal DQ yönteminin, zamana bağlı türev ifadeler için Sonlu farklar metodunun kullanıldığını belirtmektedir. DQ yönteminde ağırlık katsayılarının hesabı için dinamik analiz problemlerinde Lagrange polinomları ile harmonik fonksiyonlar tercih edilmiştir. Üniform olmayan düğüm nokta dağılımı (Denklem 2.83 ve Denklem 2.84) dinamik analiz için daha uygundur. Dinamik problemler için üniform olmayan düğüm nokta dağılımının daha iyi sonuç verdiği literatürden de bilinmektedir [54,55,56,59,60,61,71].



Şekil 4.17 CCCC mesnetli dikdörtgen plağın sabit adım yük altında dinamik hesabı  
( $P=100$ ;  $G=0$ ;  $a/b=1$ )

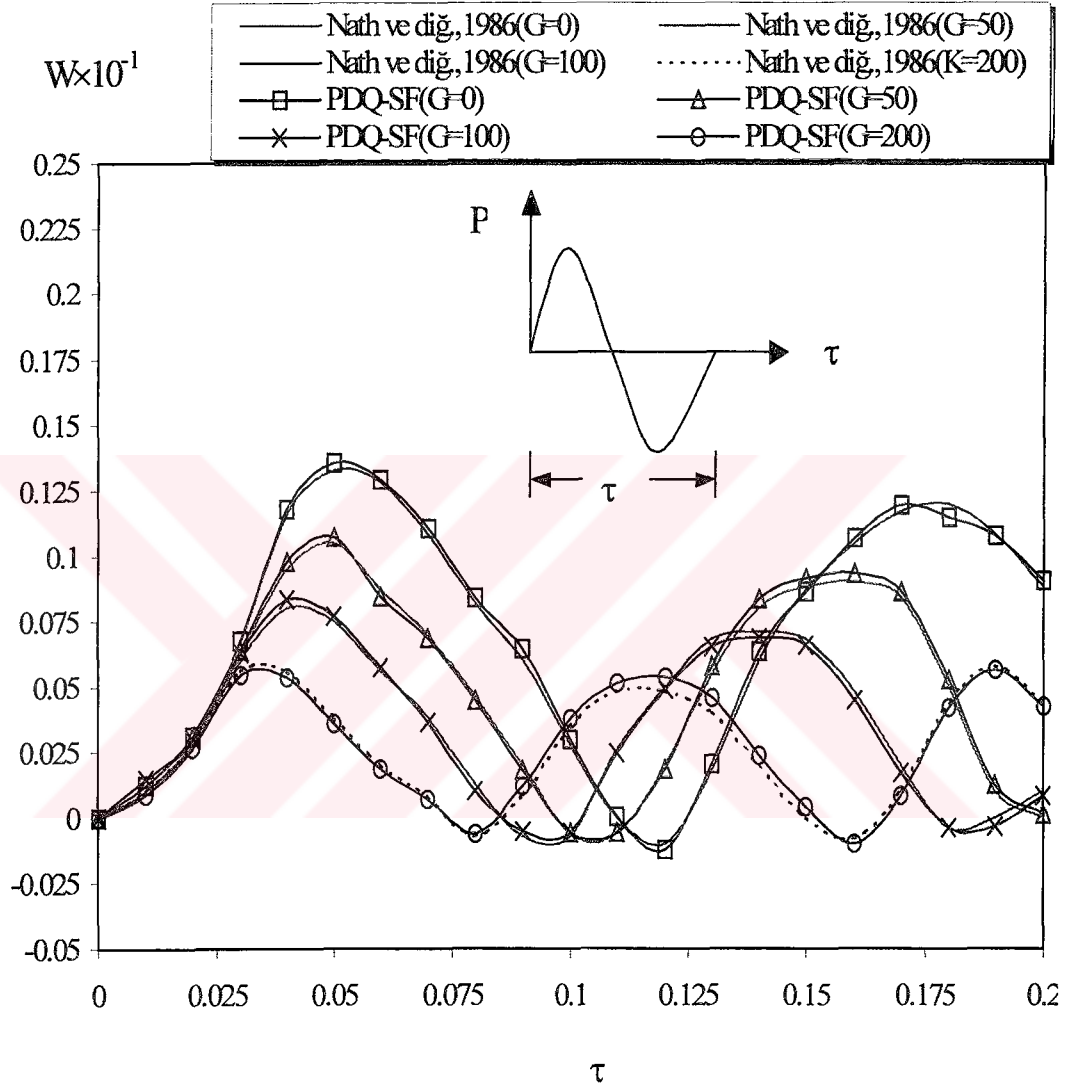


Şekil 4.18 CCCC mesnetli dikdörtgen plağın sinüs yükü altında dinamik hesabı  
( $P=200$ ;  $G=0$ ;  $a/b=1$ ;  $\tau=0.16$ )

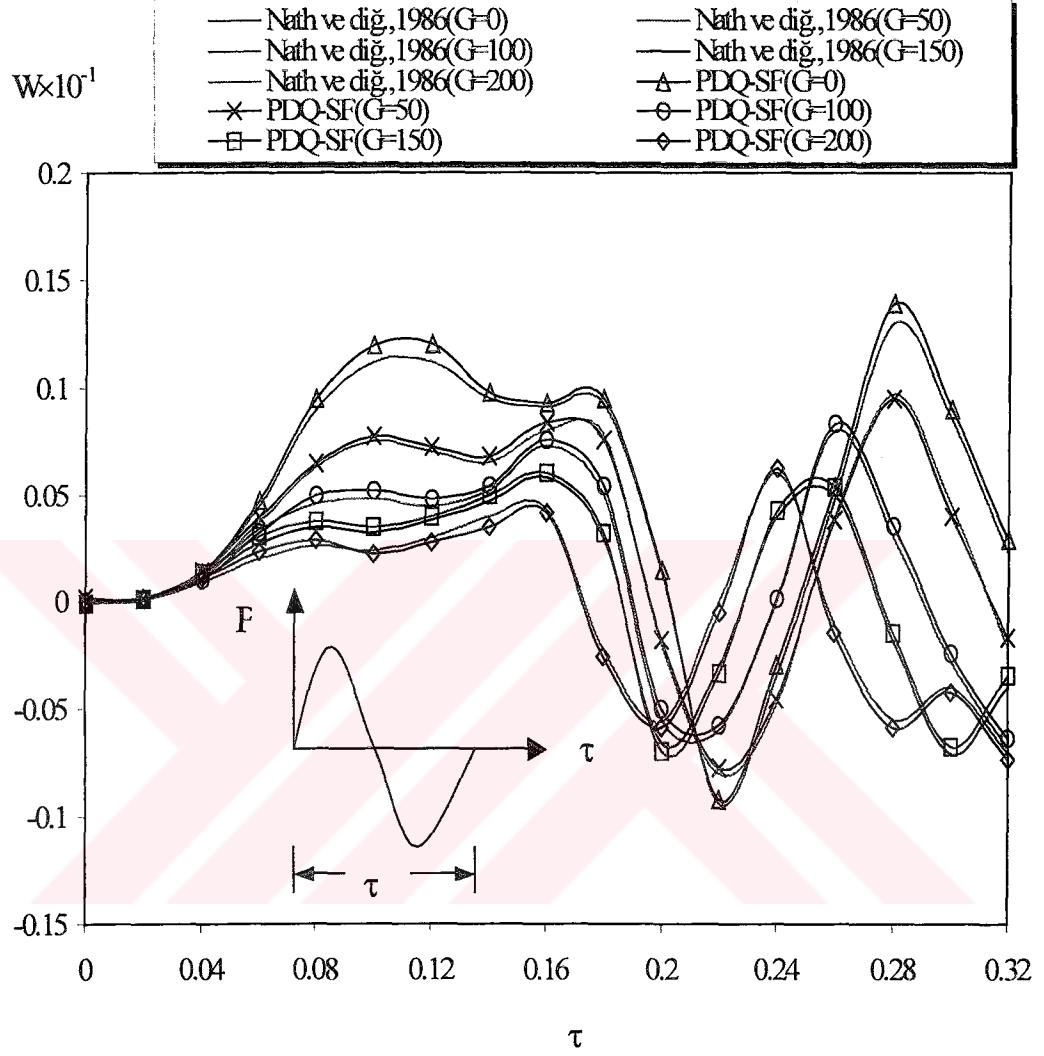


Şekil 4.19 SSSS mesnetli dikdörtgen plâgın sinüs yükü altında dinamik hesabı

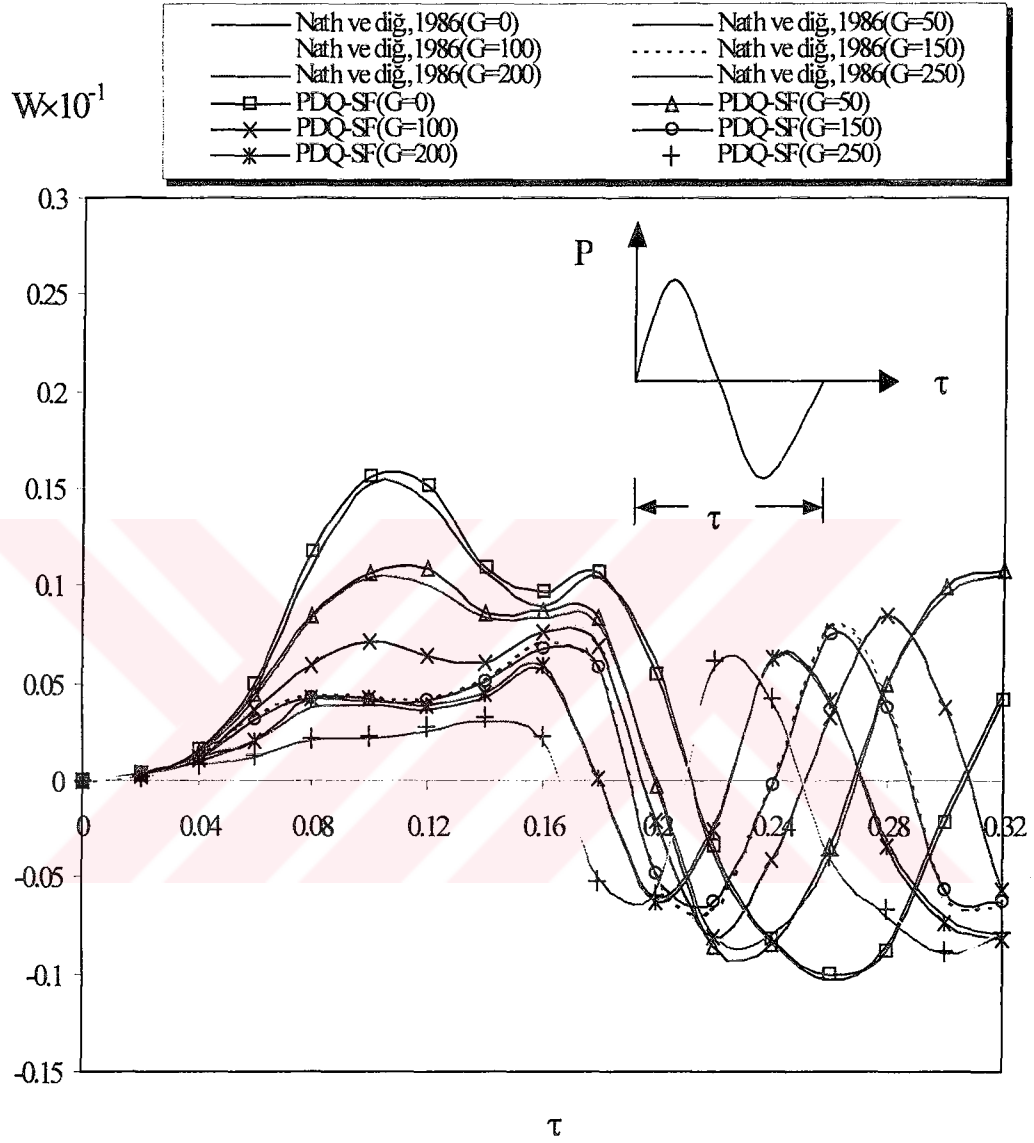
( $P=200$ ;  $K=800$ ;  $a/b=1$ ;  $\tau=0.16$ )



Şekil 4.20 CCCC mesnetli dikdörtgen plağın sinüs yükü altında dinamik hesabı  
 ( $P=200$ ;  $K=800$ ;  $a/b=1$ ;  $\tau=0.16$ )

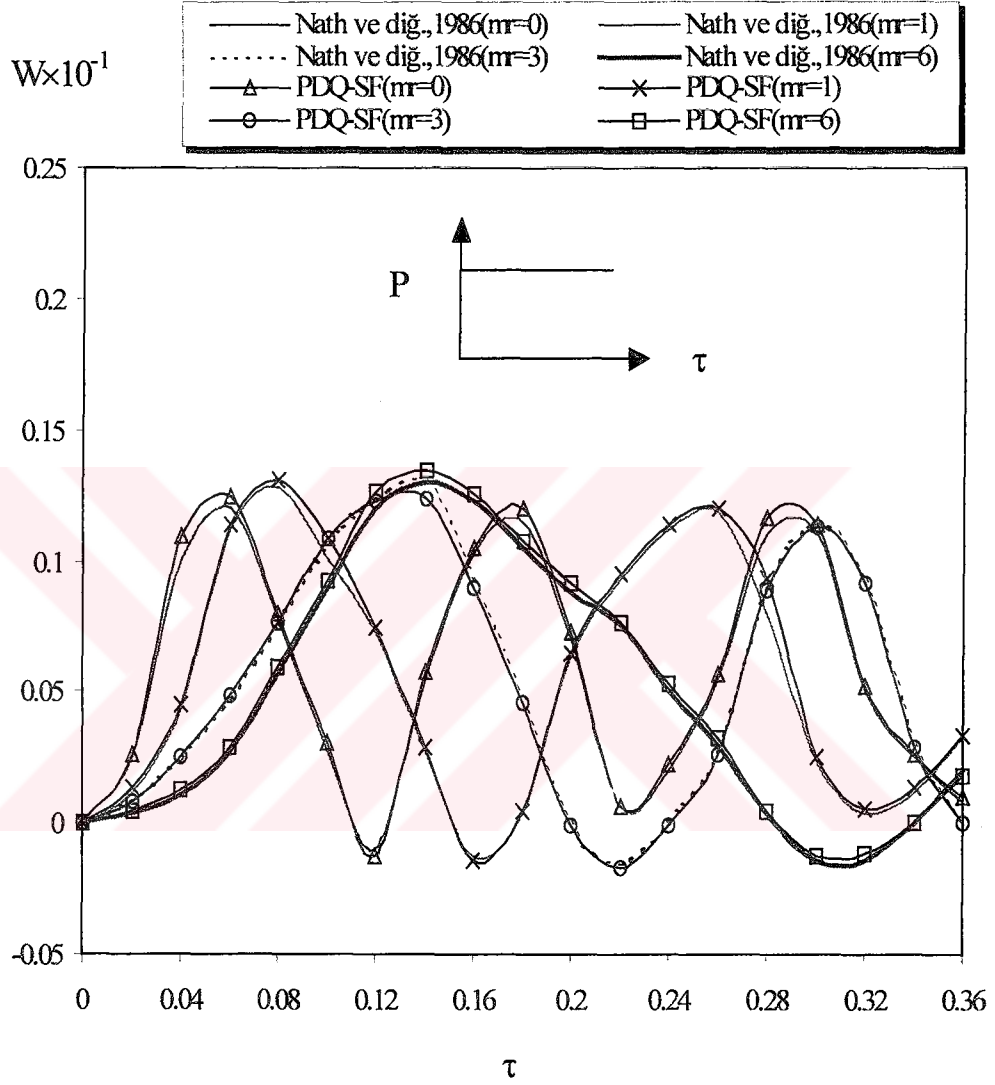


Şekil 4.21 CCCC mesnetli dikdörtgen plağın sinüs yükü altında dinamik hesabı  
 (P= 200; K=400; a/b=1;  $\tau = 0.16$ )

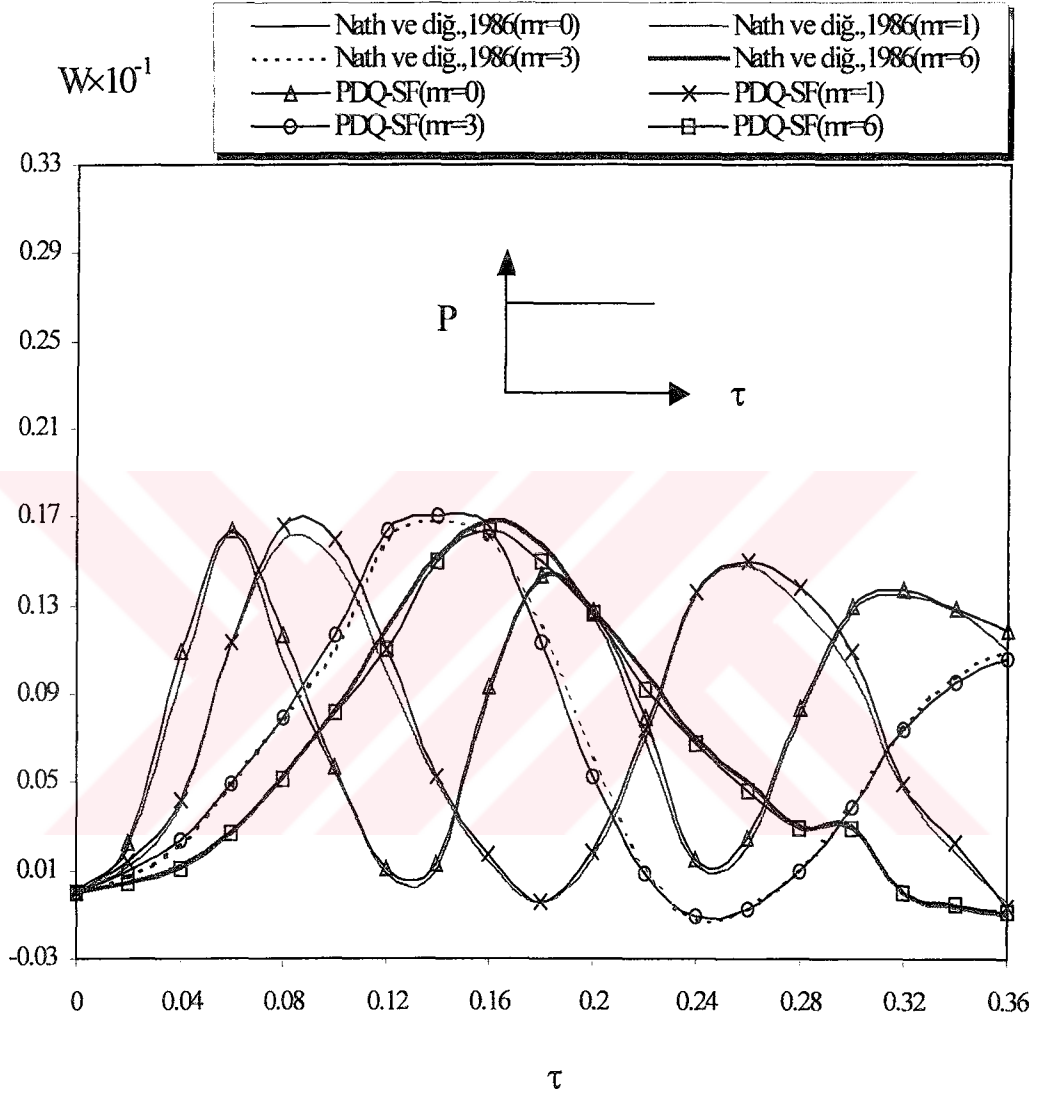


Şekil 4.22 SSSS mesnetli dikdörtgen plağın sinüs yükü altında dinamik hesabı

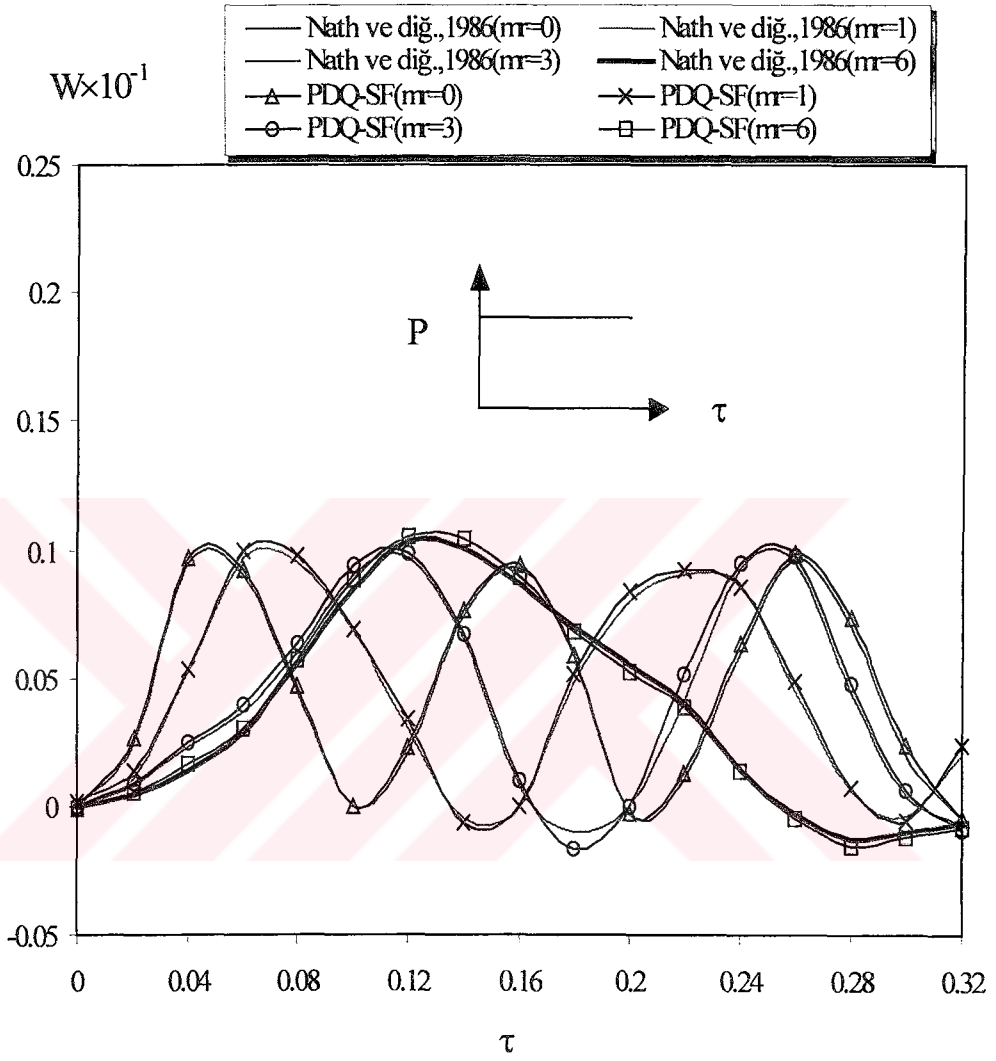
( $P=200$ ;  $K=400$ ;  $a/b=1$ ;  $\tau=0.16$ )



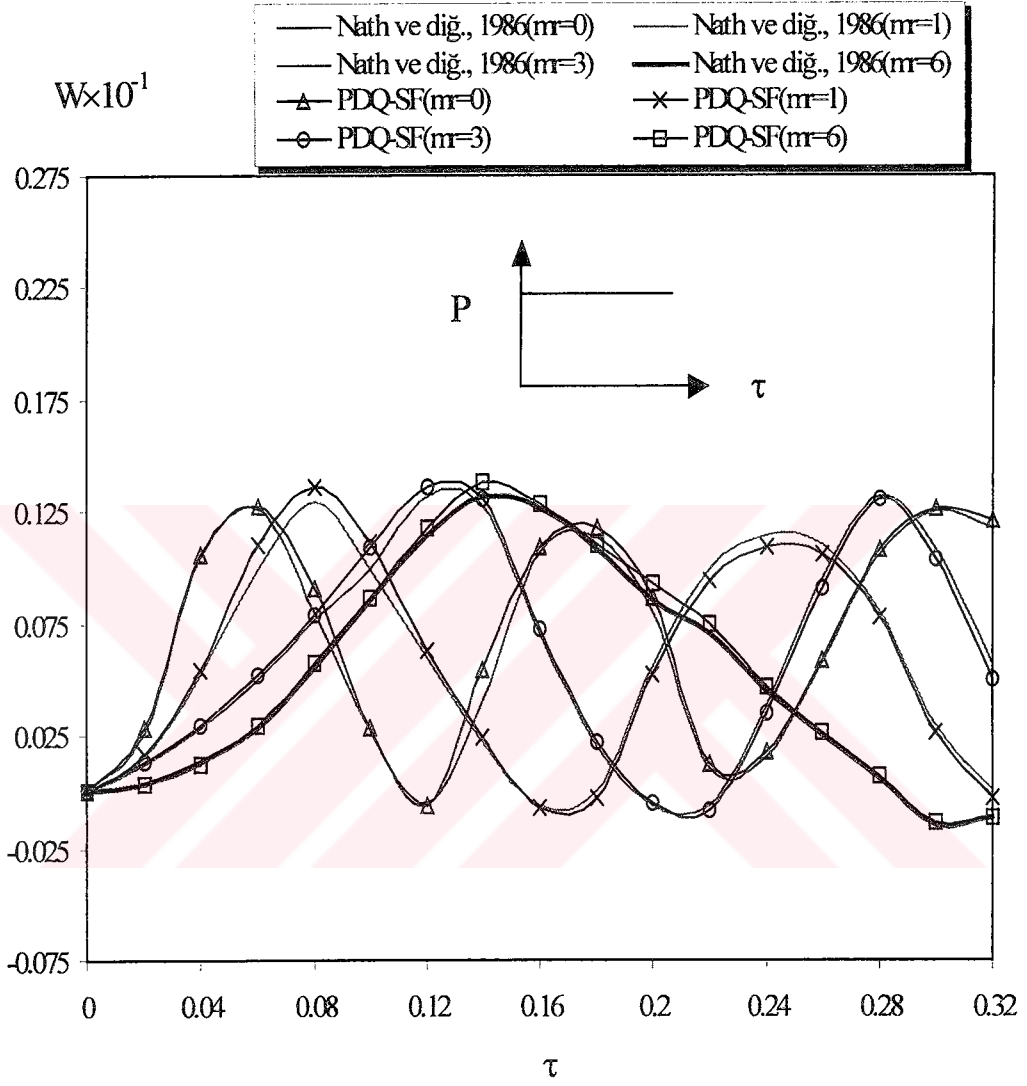
Şekil 4.23 CCCC mesnetli dikdörtgen plağın sabit adım yük altında tında dinamik hesabı  
 (P= 100; K=800; G=8; a/b =1)



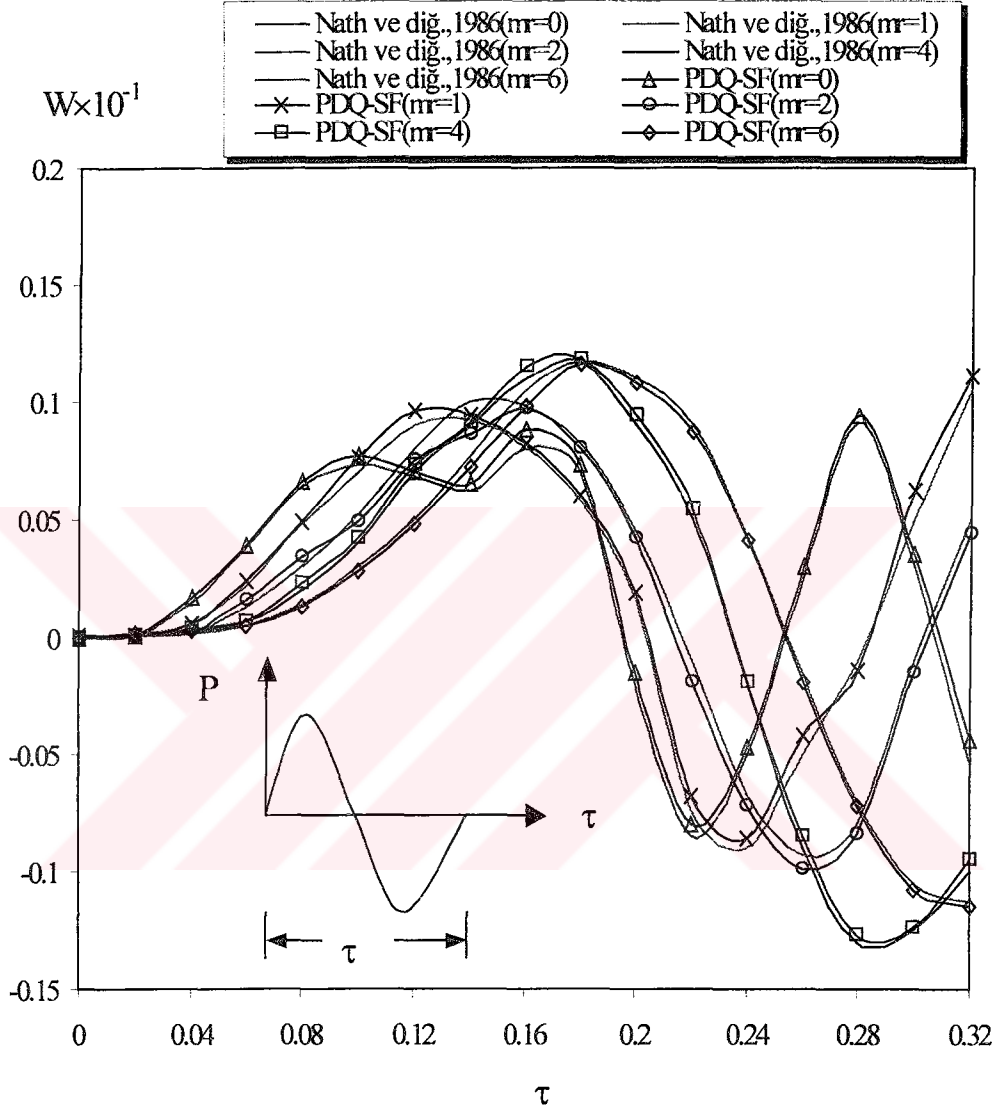
Şekil 4. 24 SSSS mesnetli dikdörtgen plağın sabit adım yük altında dinamik hesabı  
( $P=100$ ;  $K=800$ ;  $G=8$ ;  $a/b=1$ )



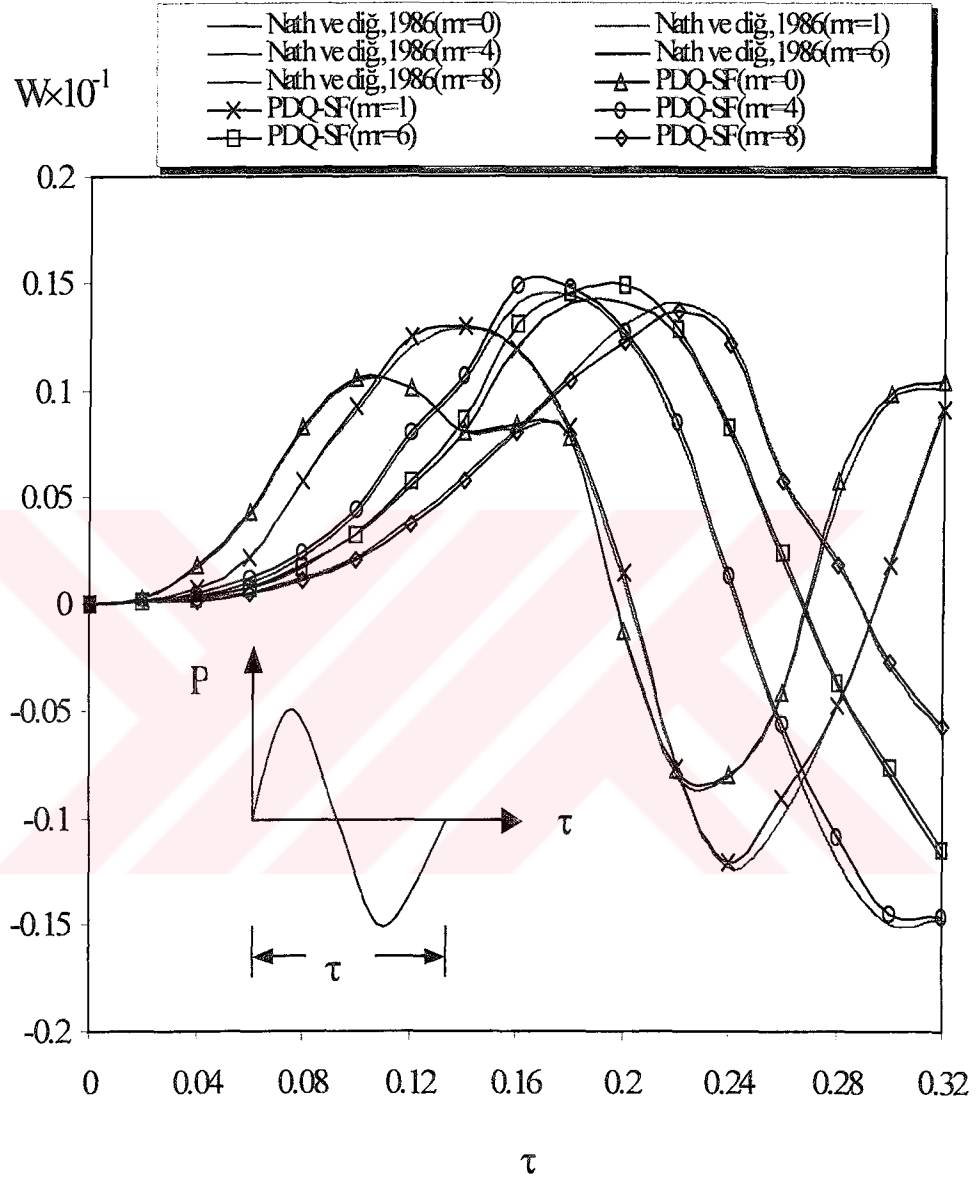
Şekil 4.25 CCCC mesnetli dikdörtgen plağın sabit adım yük altında dinamik hesabı  
( $P=100$ ;  $K=800$ ;  $G=50$ ;  $a/b=1$ )



Şekil 4.26 SSSS mesnetli dikdörtgen plağın sabit adım yük altında dinamik hesabı  
 ( $P=100$ ;  $K=800$ ;  $G=50$ ;  $a/b=1$ )

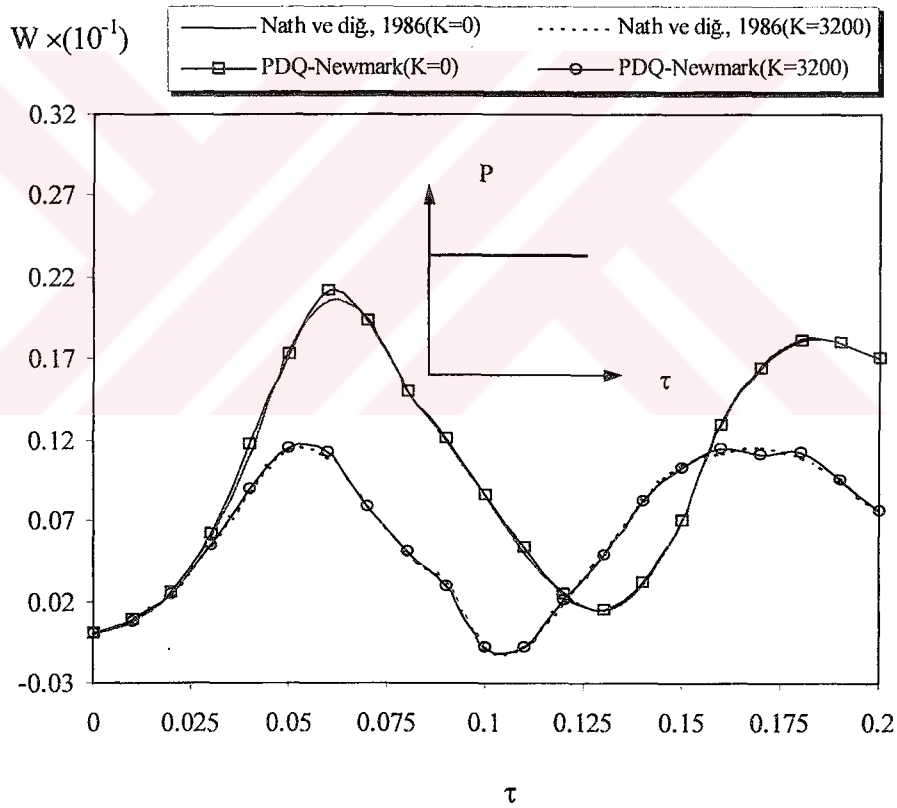


Şekil 4.27 CCCC mesnetli dikdörtgen plâgım sinüs yükü altında dinamik hesabı  
 ( $P=200$ ;  $K=400$ ;  $G=50$ ;  $a/b=1$ ;  $\tau=0.16$ )



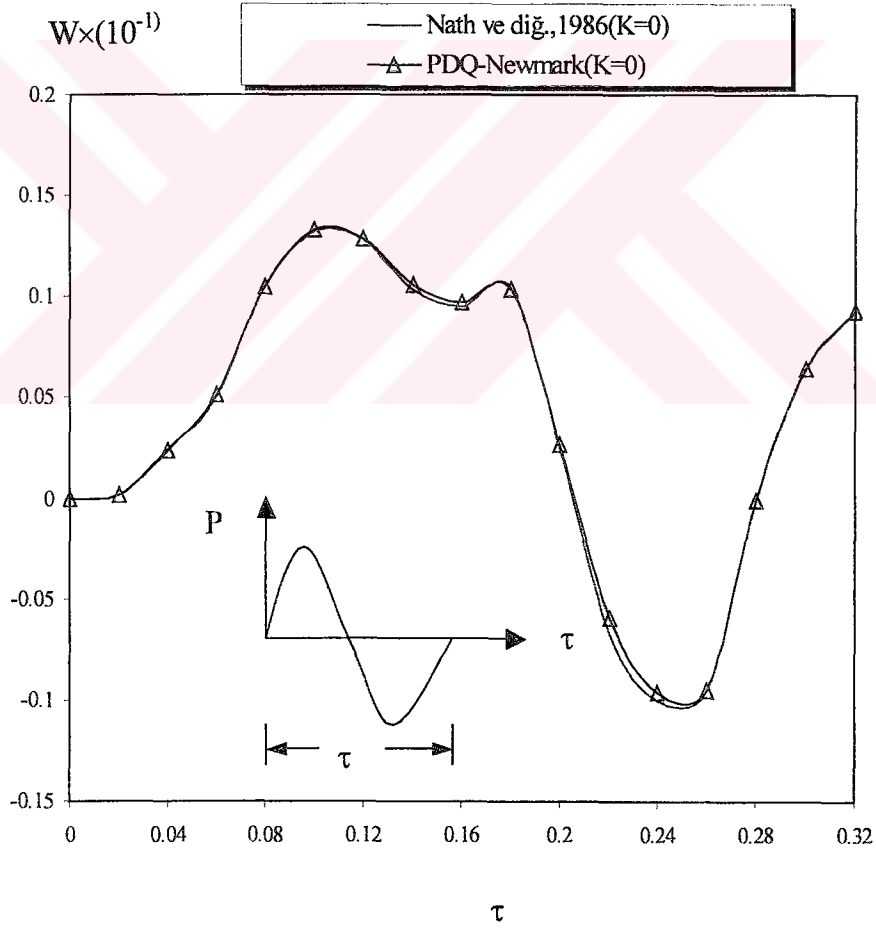
Şekil 4.28 SSSS mesnetli dikdörtgen plâgım sinüs yükü altında dinamik hesabı  
(P= 200; K=400; G=50; a/b =1;  $\tau = 0.1$ )

Şekil 4.29 – Şekil 4.41’de verilen grafiklerde zaman değişkeninin integrasyonu için Newmark- $\beta$  yöntemi kullanılmıştır. Daha önce Şekil 4.16’da verilen grafikte PDQ-SF ile bulunan sonuçlar gösterilmektedir. Aynı grafik  $K=0$  ve  $K=3200$  için Şekil 4.29’da verilmiştir. Şekil 4.16’da zaman değişkenini integrasyonu için sonlu farklar kullanılmış iken Şekil 4.29’da Newmark- $\beta$  kullanılmıştır. Görüleceği üzere PDQ-Newmark- $\beta$  kombinasyonu PDQ-SF çiftine göre %2 mertebesinde daha iyi bir yakınsama sağlamıştır. Bu örneklerin hepsinde diğer dinamik analiz problemlerinde olduğu gibi üniform olmayan düğüm nokta dağılımı kullanılmıştır.



Şekil 4.29 SSSS mesnetli dikdörtgen plağın sabit adım yükü altında dinamik hesabı  
( $P=100$ ;  $G=0$ ;  $a/b=1$ )

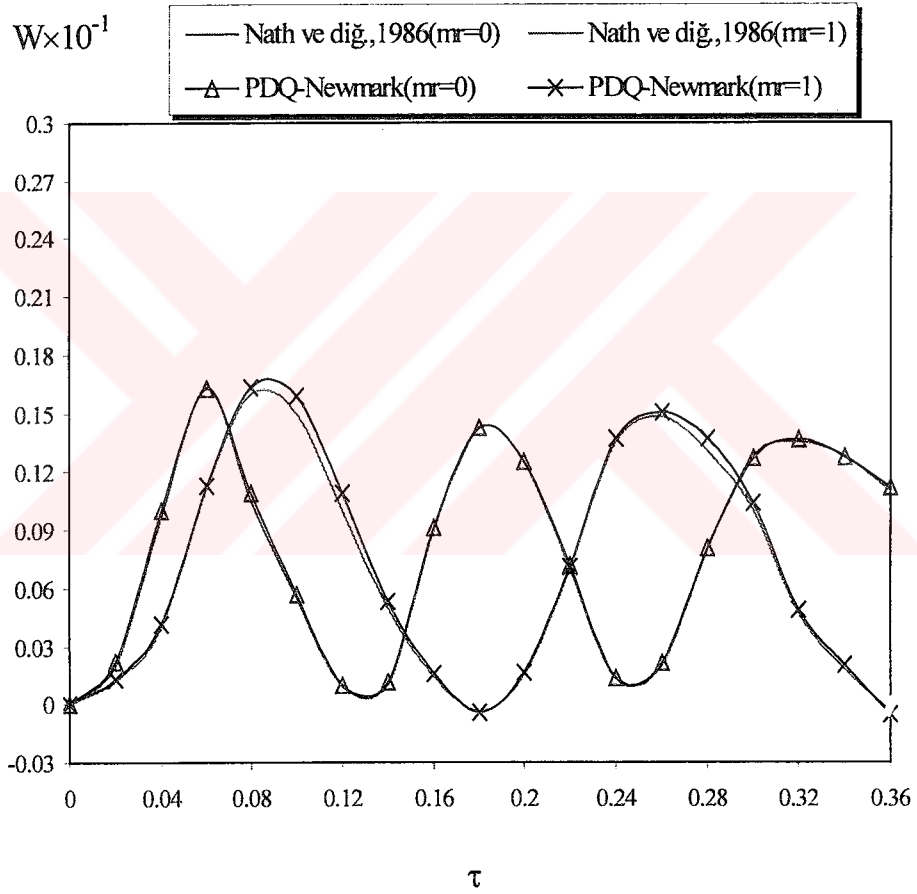
Şekil 4.18’de beş farklı K (0, 400,80,1600,2400) için PDQ-SF ile hesaplanan zamana bağlı deplasman grafiği K=0 için PDQ-Newmark- $\beta$  ile elde edilmiş ve Şekil 4.30’da sunulmuştur. Diğer bütün parametre ve çözüm seçenekleri aynıdır. Sadece zaman integrasyonu için sonlu farklar yerine Newmark- $\beta$  yöntemi kullanılmıştır. Elde edilen sonuçlar, literatürdeki değerler dikkate alınınca PDQ-SF’a göre %1 mertebesinde daha doğru bulunmuştur. DQ yönteminde ağırlık katsayı hesabı için harmonik fonksiyonlar kullanılmış, diğer polinomlar için elde edilen değerler ve yapılacak hata analizi 5. bölümde sunulacaktır.



Şekil 4.30 CCCC mesnetli dikdörtgen plâgım sinüs yükü altında dinamik hesabı

(P= 200; G=0; a/b =1;  $\tau = 0.16$ )

Karşılaştırma amacıyla Şekil 4.24'de dört farklı kütle oranı  $m_r$  için (0, 1,3, 6) için PDQ-SF ile hesaplanan zamana bağlı deplasman grafiği  $m_r = 0$  ve  $m_r = 1$  için PDQ-Newmark- $\beta$  ile elde edilmiş ve Şekil 4.31'de verilmiştir. Zaman integrasyonu için sonlu farklar yerine Newmark- $\beta$  yöntemi kullanılmıştır. Elde edilen sonuçlar PDQ-SF'a göre Nath ve diğ.[1,4] tarafından verilen değerler esas alınınca yaklaşık %2 mertebesinde daha hassas olarak hesaplanmıştır.



Şekil 4.31 SSSS mesnetli dikdörtgen plâgın sinüs yükü altında dinamik hesabı  
( $P=100$ ;  $K=800$ ;  $G=8$ ;  $a/b=1$ )

## 4.2. Çift Eğrilikli Basık Kabukların Analizi

### 4.2.1. Çift Eğrilikli Basık Kabukların Statik Hesabı

Düğüm noktasının üniform veya üniform olmaması ve farklı düğüm nokta sayıları için çift eğrilikli kabuğun statik hesabına ait sonuçlar Nath ve diğ. [6] tarafından verilen sonuçlar ile birlikte Çizelge 4.3, Çizelge 4.4 ve Çizelge 4.5’de verilmiştir. Düğüm nokta sayısı artınca (Çizelge 4.5) Kuvvet ve Legendre polinomları üniform düğüm nokta tipi için iyi sonuçlar vermiştir. Ancak daha az sayıda düğüm noktası kullanılınca Lagrange ve Chebyshev polinomları statik hesap için üniform olmayan düğüm nokta dağılımı kullanılmak üzere her zaman daha iyi sonuçlar vermektedir. Bununla birlikte düğüm nokta sayısı artınca bütün polinomların ürettiği çözümler daha iyidir. Ancak bu durumda da, düğüm nokta sayısı arttığından, indirgenmiş lineer denklem takımının boyutu büyümekte ve çözüm süresi artmaktadır. Şekil 4.32’de bir yöndeki eğriliğin sıfır alındığı ( $R_y = 0$ ) silindirik panel için yük-deplasman eğrisi verilmiştir. PDQ ile hesaplanan sonuçlar Nath ve Sandeep’in [42] verdiği değerler ile uyum içindedir.

Çizelge 4.3 Çift eğrilikli kabuk için statik sonuçların karşılaştırılması  
( $a/b = 1$ ;  $R_x = 5.0$ ;  $R_y = 5.0$ ;  $P = 42.7$ ; Üniform düğüm nokta dağılımı;  $N_x = N_y = 13$ )

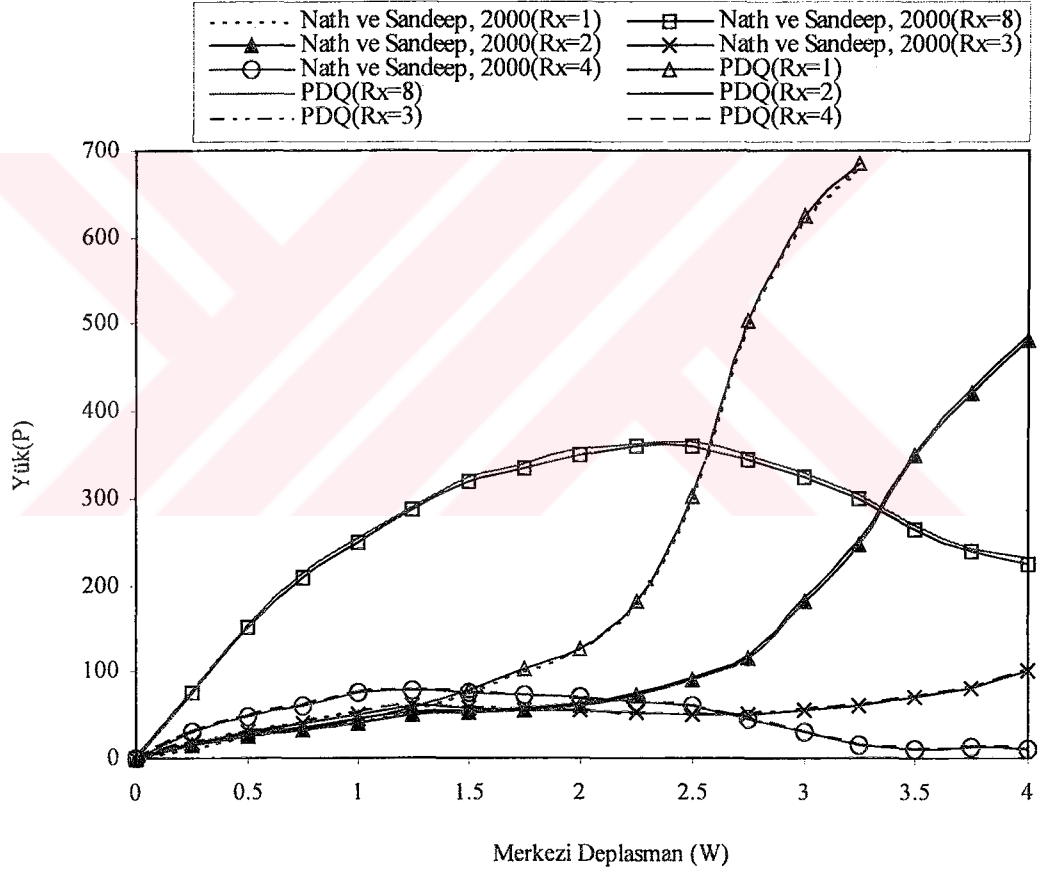
Mesnet Durumu	Merkezi Deplasman					
	Ref.42	PDQ (Kuvvet)	PDQ (Legendre)	PDQ (Harmonik)	PDQ (Chebyshev)	PDQ (Lagrange)
CCCC	0.619	0.688	0.675	0.671	0.652	0.633
SSSS	1.616	1.794	1.724	1.708	1.682	1.640

Çizelge 4.4 Çift eğrilikli kabuk için statik sonuçların karşılaştırılması  
( $a/b = 1$ ;  $R_x = 5.0$ ;  $R_y = 5.0$ ;  $P = 42.7$ ; Üniform olmayan düğüm noktası;  $N_x = N_y = 13$ )

Mesnet Durumu	Merkezi Deplasman					
	Ref.42	PDQ (Kuvvet)	PDQ (Legendre)	PDQ (Harmonik)	PDQ (Chebyshev)	PDQ (Lagrange)
CCCC	0.619	0.691	0.683	0.662	0.647	0.628
SSSS	1.616	1.803	1.736	1.684	1.676	1.632

Çizelge 4.5 Çift eğrilikli kabuk için statik sonuçların karşılaştırılması  
 (a/b = 1; Rx = 5.0; Ry = 5.0; P = 42.7)  
 Üniform düğüm nokta dağılımı (Nx = Ny = 17)

Mesnet Durumu	Merkezi Deplasman					
	Ref.42	PDQ (Kuvvet)	PDQ (Legendre)	PDQ (Harmonik)	PDQ (Chebyshev)	PDQ (Lagrange)
CCCC	0.619	0.648	0.636	0.665	0.640	0.622
SSSS	1.616	1.630	1.628	1.681	1.628	1.629



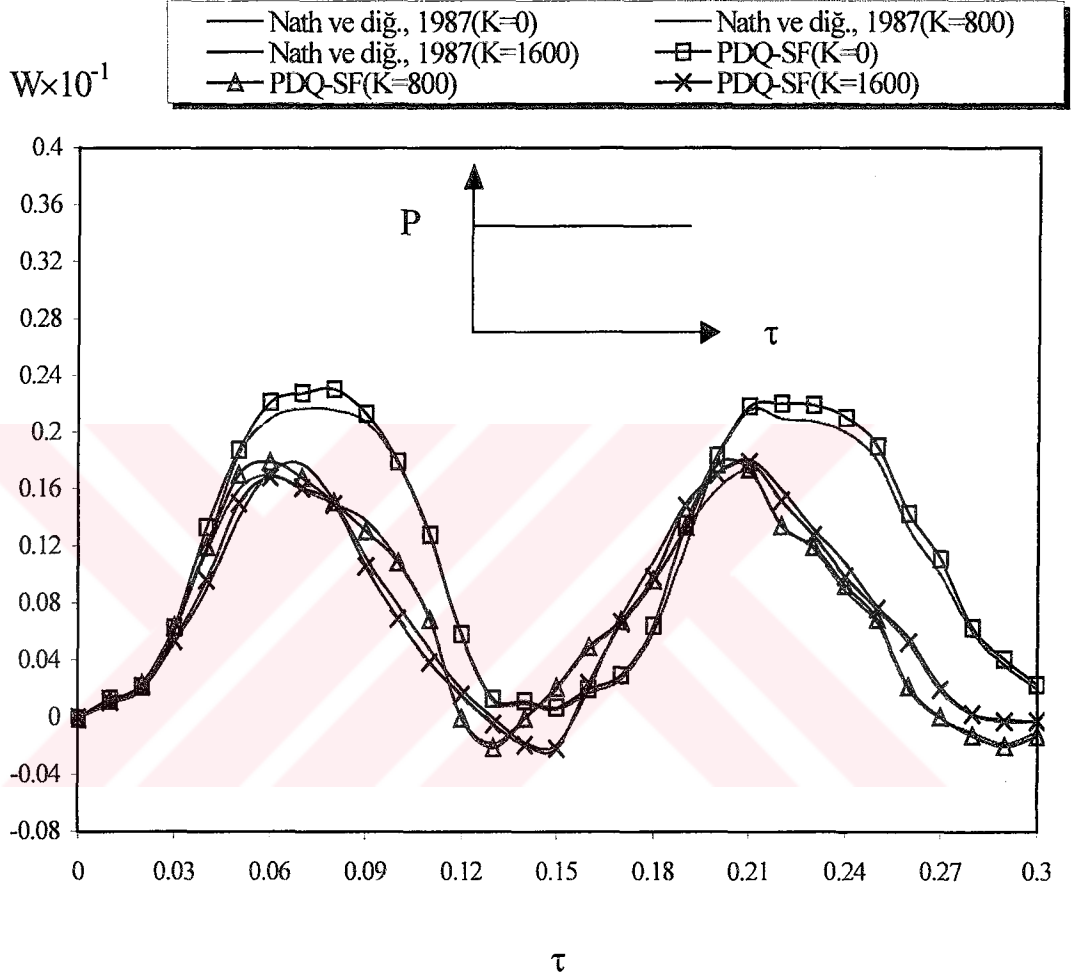
Şekil 4.32 CCCC silindirik panel için yük-deplasman eğrisi ( $R_2 = 0$ )

#### 4.2.2. Çift Eğrilikli Basık Kabukların Dinamik Hesabı

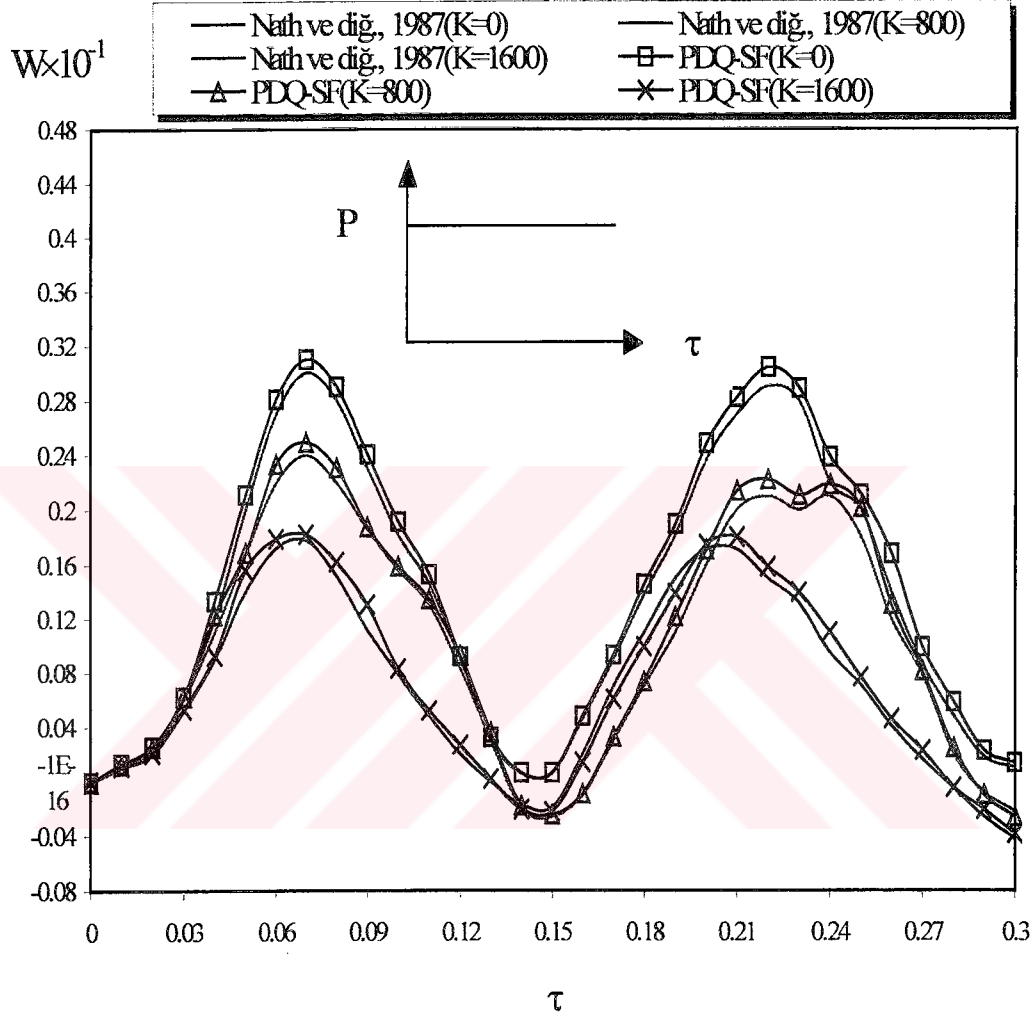
Bu bölümde elastik zemine oturan çift eğrilikli basık kabuk, eğrisel panel veya elastik zemin etkisinin dikkate alınmadığı kabukların geometrik bakımdan lineer olmayan dinamik analizine ait örnekler sunulacaktır. Şekil 4.33- Şekil 4.44'de zamana bağlı merkezi deplasman grafikleri, farklı parametrelerin ( $G$ ,  $K$ ,  $m_r$ ) değişiminin bu deplasman üzerine etkisini göstermektedir. Bu grafiklerde konum değişkeni integrasyonu için DQ ile elde edilen sonuçlarda konum değişkeni için harmonik fonksiyon, zaman değişkeni için sonlu farklar kullanılmıştır. Sonuçlar Nath ve diğerleri [6] tarafından verilen değerler ile birlikte grafik olarak takdim edilmiştir.

Şekil 4.45'de verilen grafik Şekil 4.33'de verilen grafiğin zaman değişkeni için Newmark- $\beta$  yönteminin kullanılması ile elde edilen sonuçları göstermektedir. Şekil 4.46 ise Şekil 4.37'de verilen sonuçlar olup yine zaman değişkeni için sonlu farklar yerine Newmark- $\beta$  yönteminin kullanılması ile elde edilmiştir.

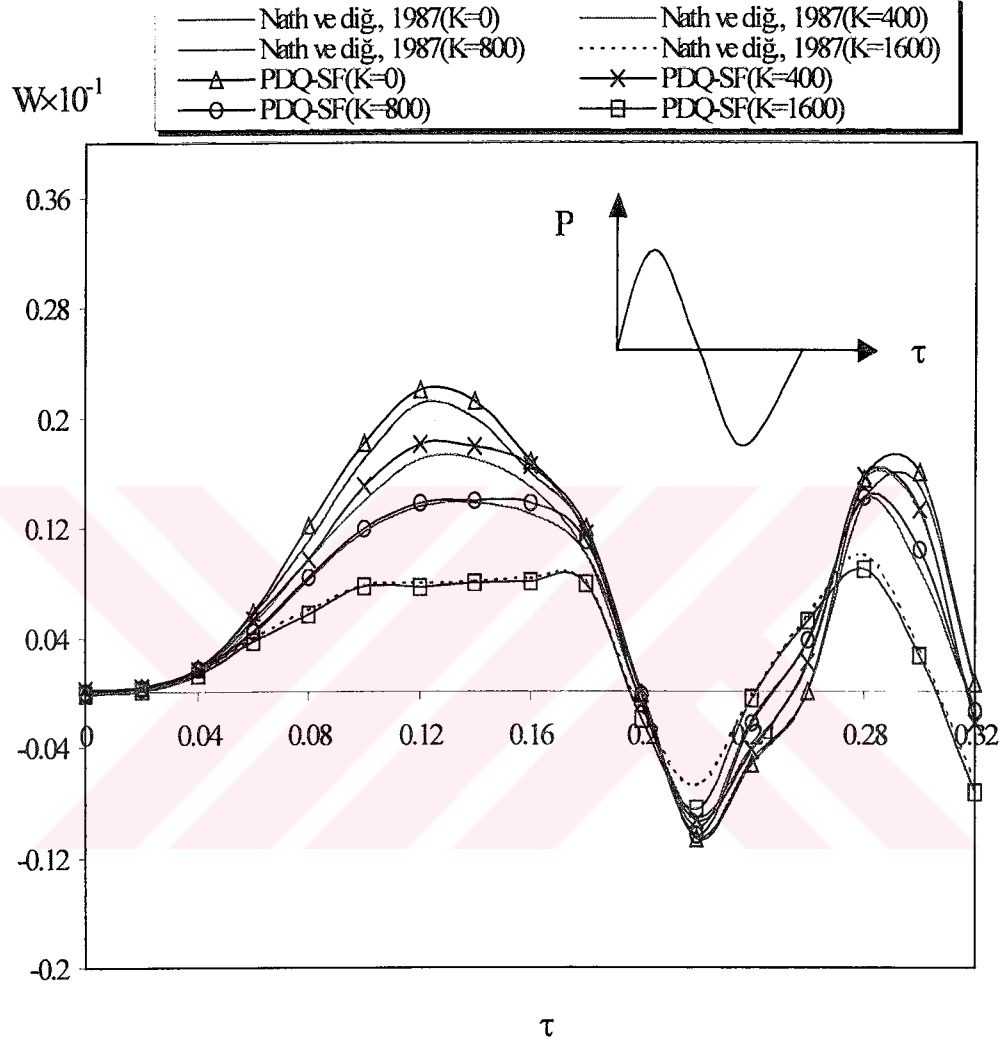
Bununla birlikte daha detaylı bir karşılaştırma takip eden 5. Bölümde yapılacaktır. DQ metodunda ağırlık katsayılarının hesabında kullanılan her bir polinomun çözüm hassasiyetine olan etkisi ayrı ayrı incelenecektir. Yine dinamik analiz problemlerinde düğüm nokta tipinin ve sayısının etkisi ve zamana bağlı ifadelerin integrasyonunda kullanılacak metotların performansı yine 5. Bölümde incelenecektir.



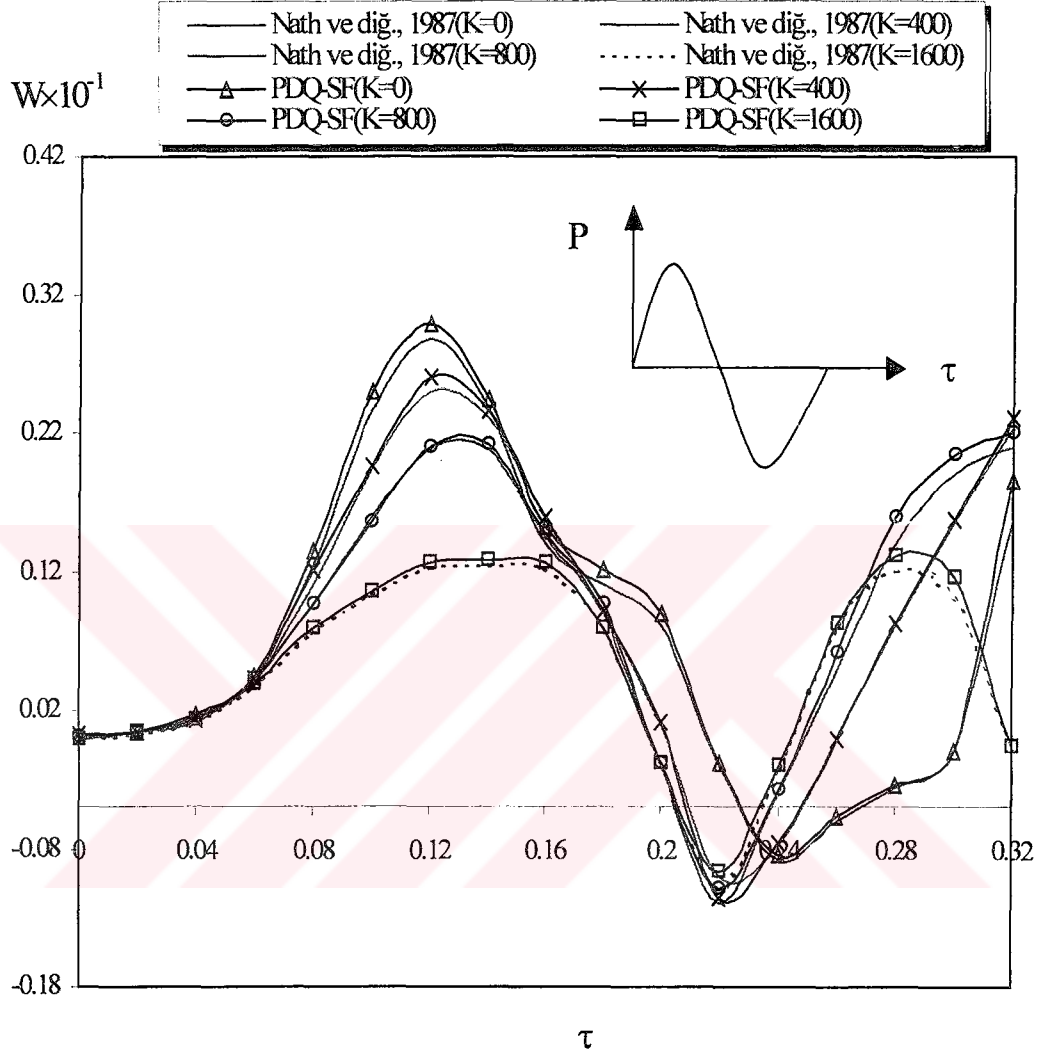
Şekil 4.33 Farklı zemin parametresi (K) için kabuk deplasmanının değişimi  
 ( $R_x=R_y=5.0$ ;  $P=100$ ;  $G=0$ ;  $m_r=0$ ; SSSS çift eğrilikli kabuk )



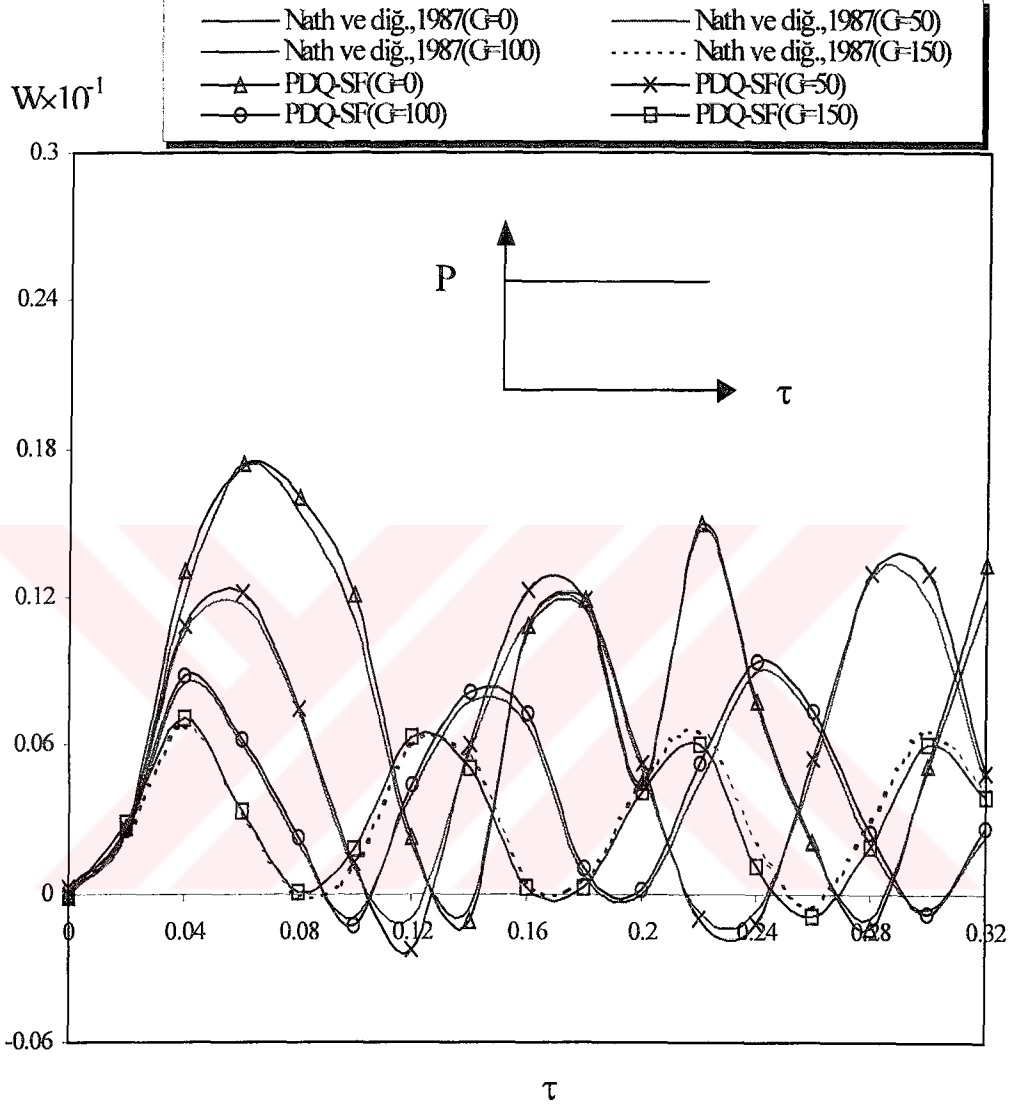
Şekil 4.34 Farklı zemin parametresi (K) için kabuk deplasmanının değişimi  
 ( $R_x=R_y=5.0$ ;  $P=100$ ;  $G=0$ ;  $m_r=0$ ; CCCC çift eğrilikli kabuk )



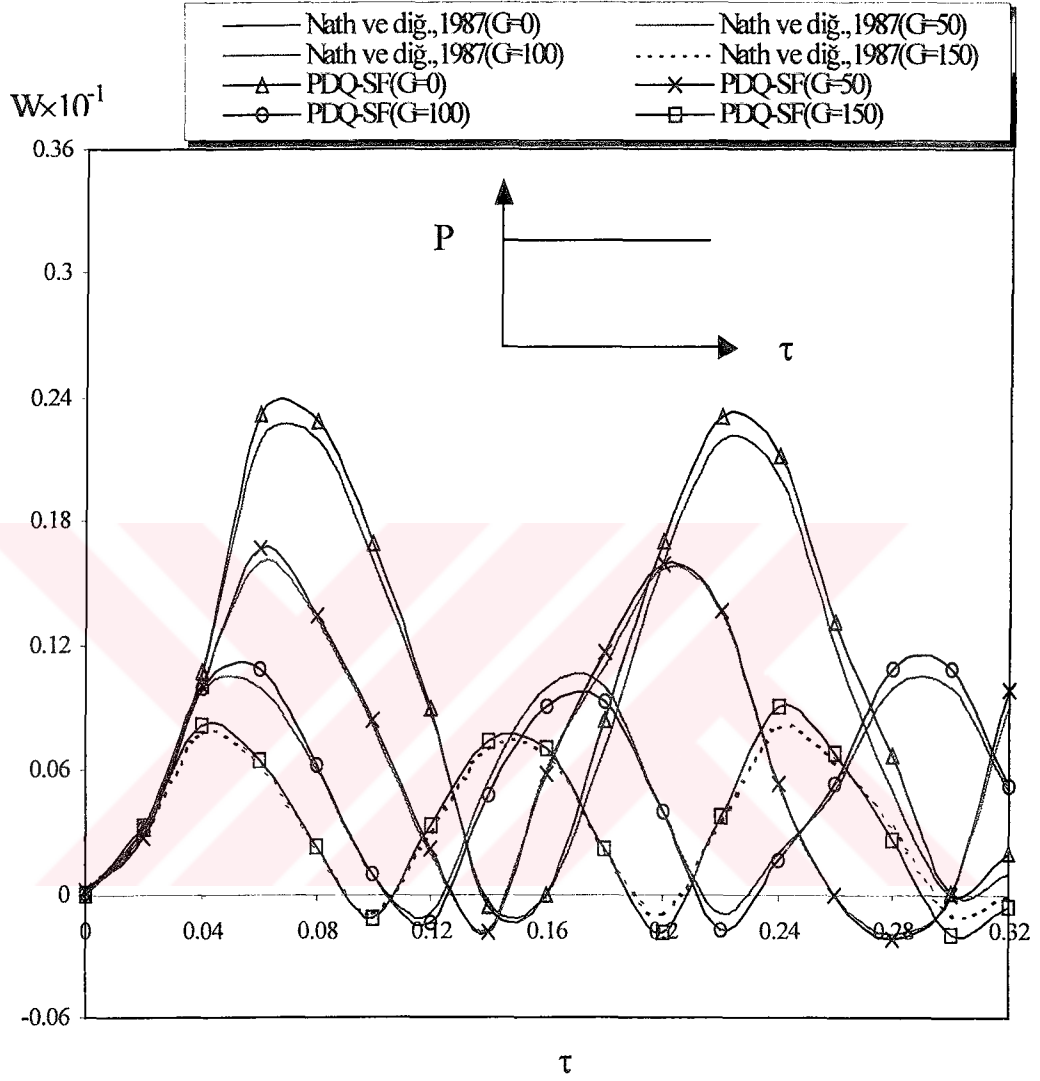
Şekil 4.35 Farklı zemin parametresi (K) için kabuk deplasmanının değişimi  
 ( $R_x=R_y=5.0$ ;  $P=200$ ;  $G=0$ ;  $m_r=0$ ; CCCC çift eğrilikli kabuk )



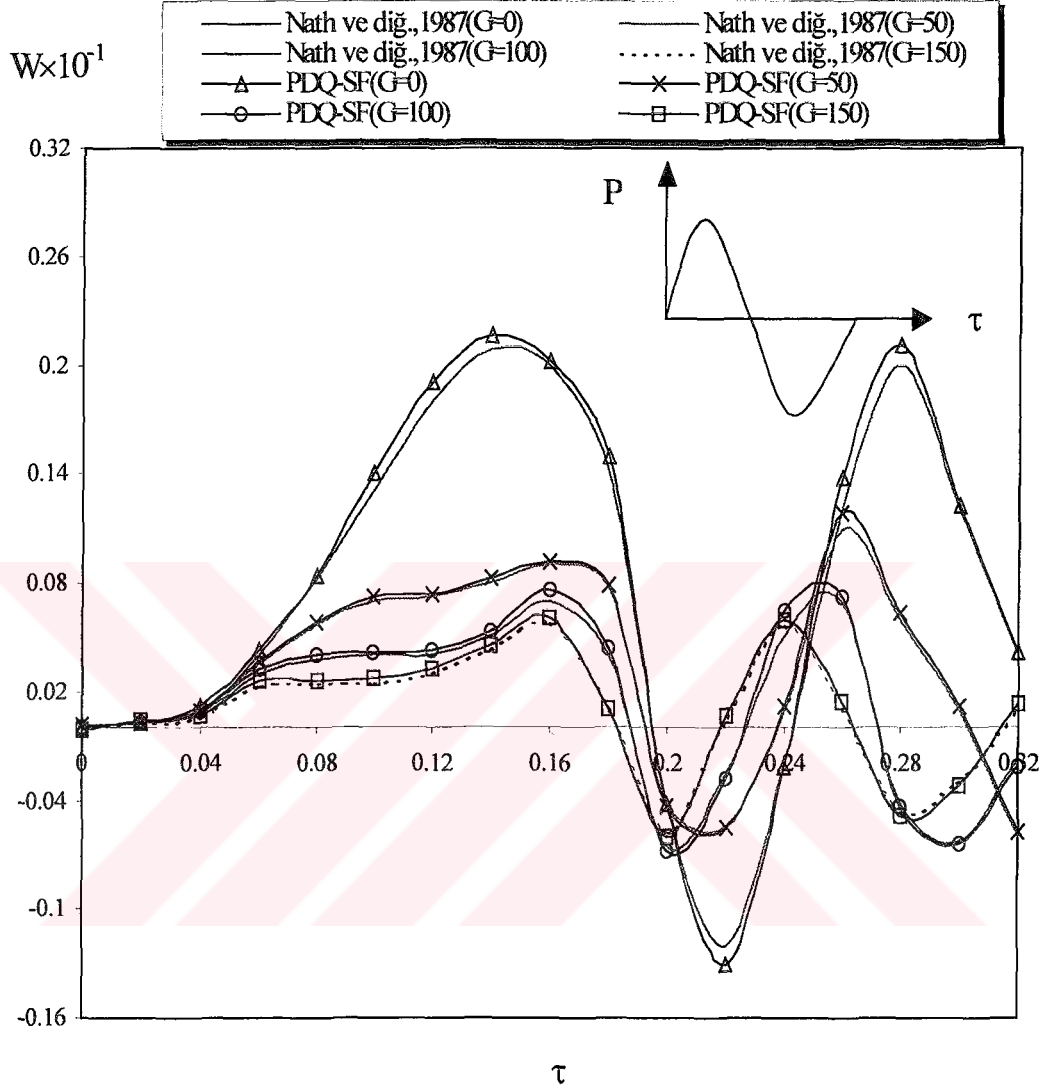
Şekil 4.36 Farklı zemin parametresi (K) için kabuk deplasmanının değişimi  
 ( $R_x=R_y=5.0$ ;  $P=200$ ;  $G=0$ ;  $m_r=0$ ; SSSS çift eğrilikli kabuk )



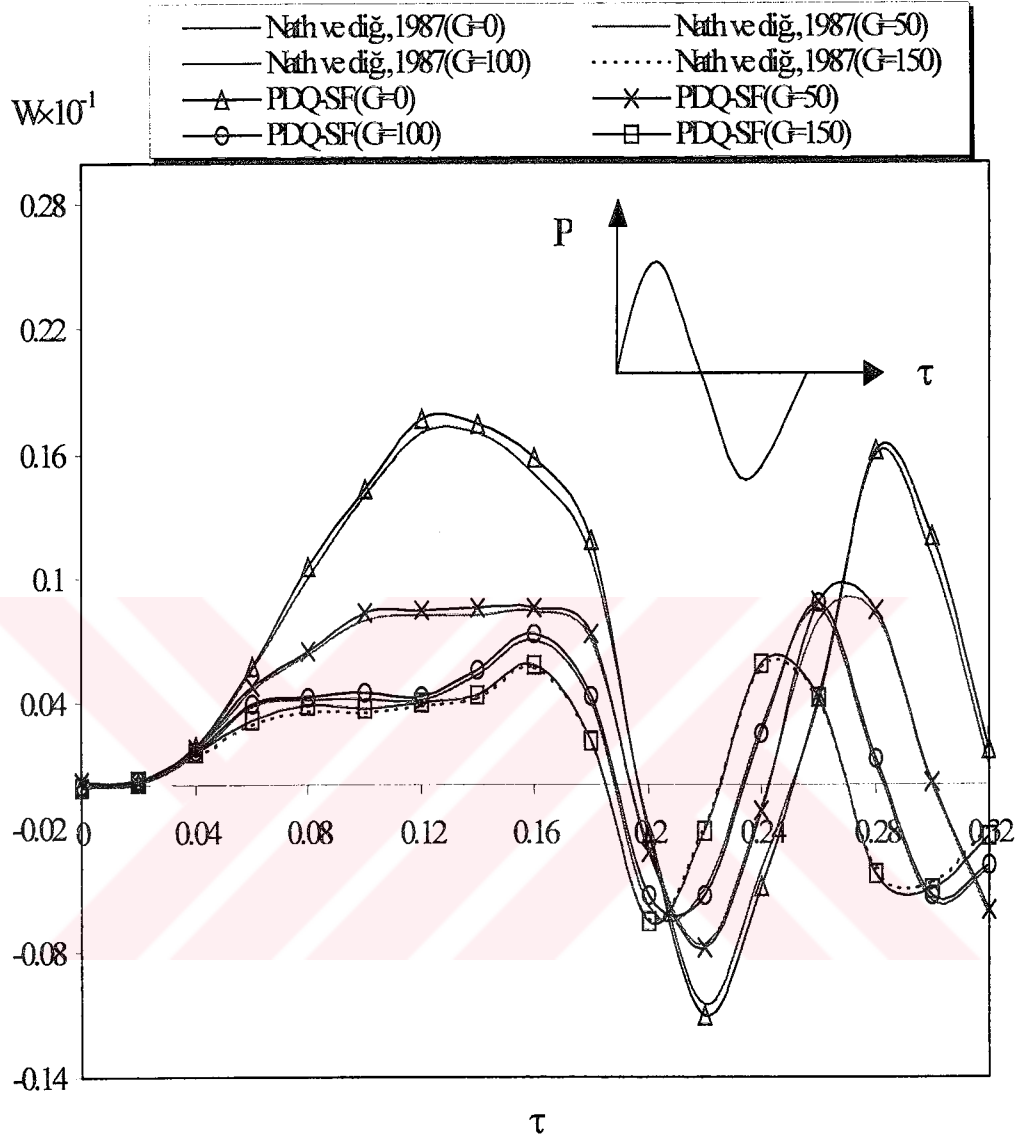
Şekil 4.37 Farklı zemin kayma parametresi (G) için kabuk deplasmanının değişimi  
( $R_x=R_y=5.0$ ;  $P=100$ ;  $K = 800$ ;  $m_r = 0$ ; CCCC çift eğrilikli kabuk )



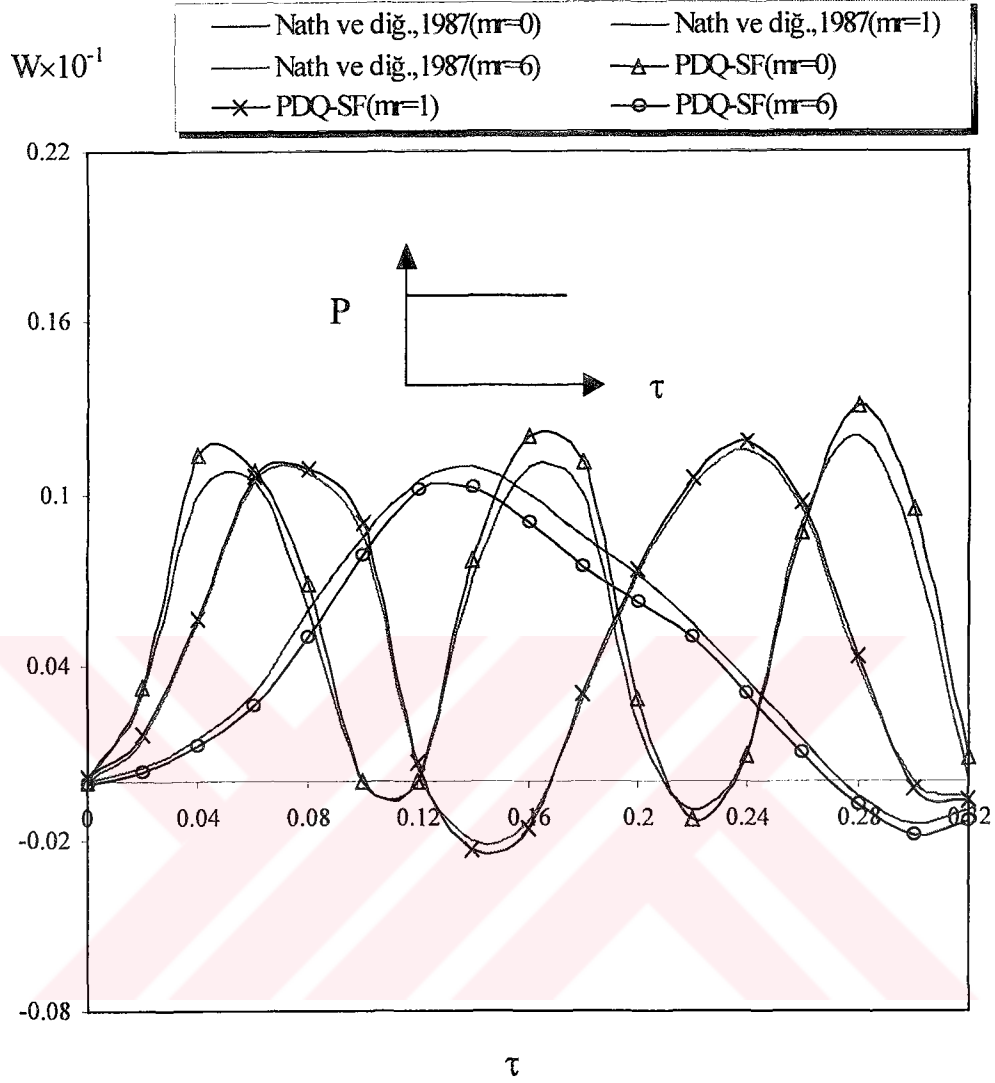
Şekil 4.38 Farklı zemin kayma parametresi (G) için kabuk deplasmanının değişimi  
 ( $R_x=R_y=5.0$ ;  $P=100$ ;  $K = 800$ ;  $m_r = 0$ ; SSSS çift eğrilikli kabuk )



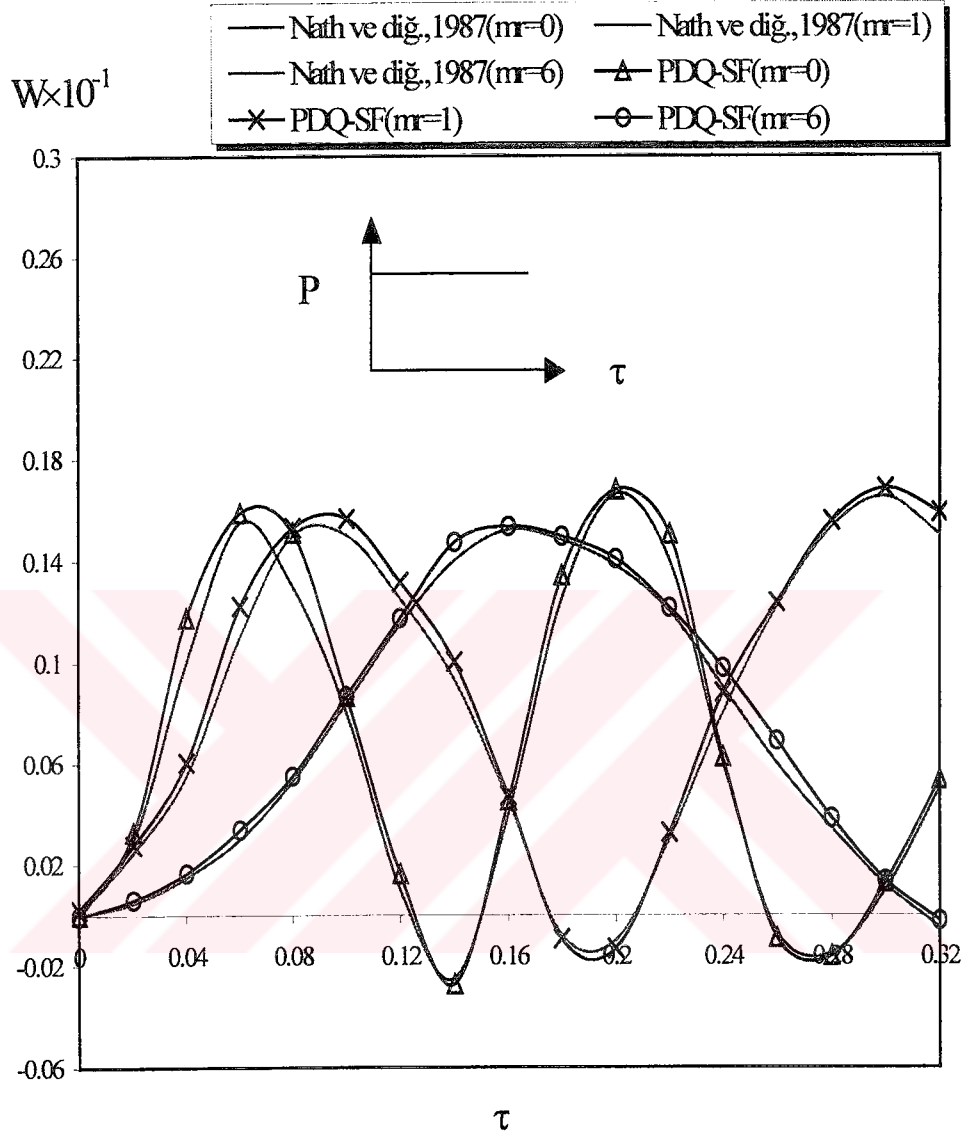
Şekil 4.39 Farklı zemin kayma parametresi (G) için kabuk deplasmanının değişimi  
 ( $R_x=R_y=7.0$ ;  $P=200$ ;  $K=400$ ;  $m_r=0$ ; CCCC çift eğrilikli kabuk)



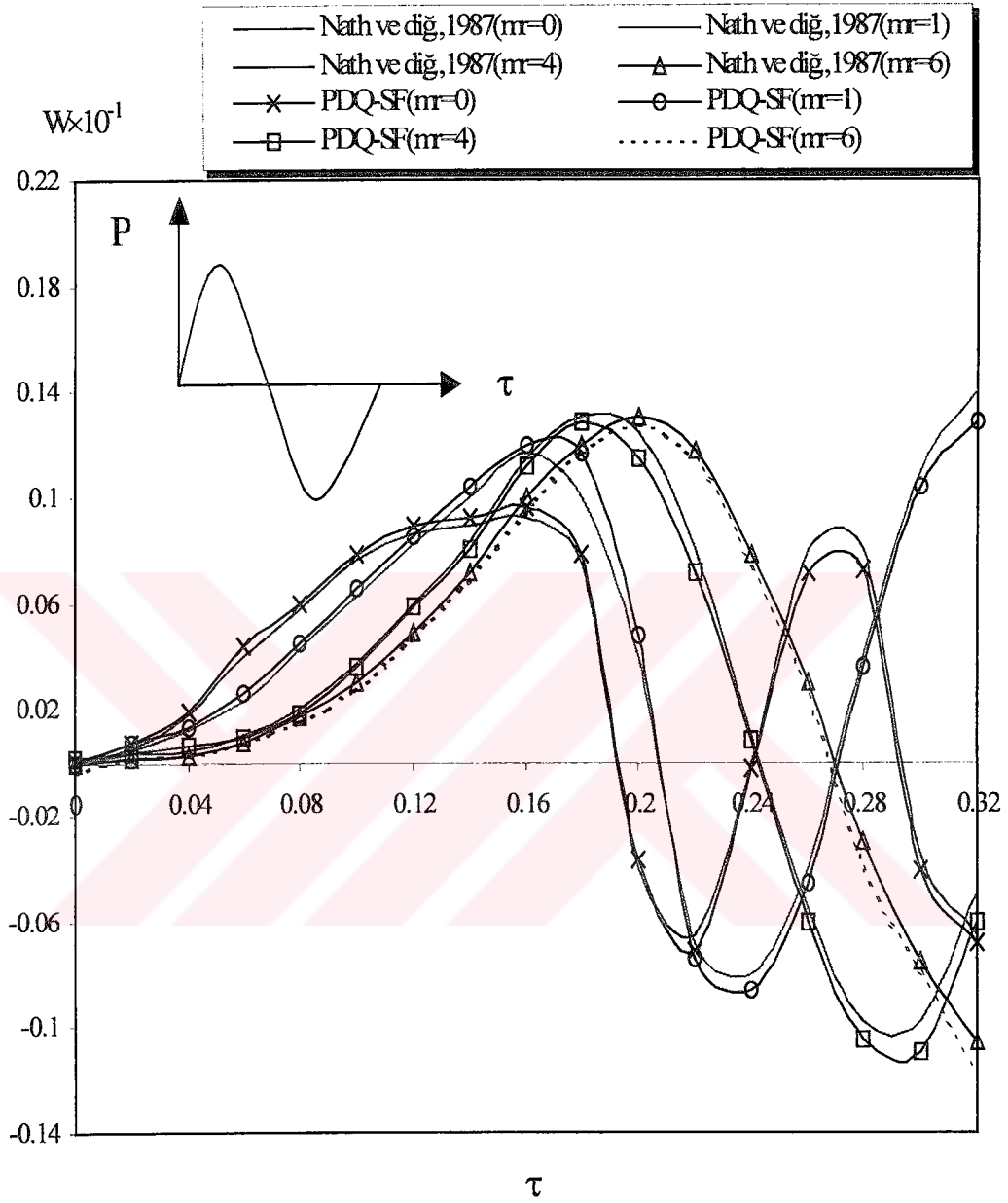
Şekil 4.40 Farklı zemin kayma parametresi ( $G$ ) için kabuk deplasmanının değişimi  
 ( $R_x=R_y=5.0$ ;  $P=200$ ;  $K=400$ ;  $m_r=0$ ; SSSS çift eğrilikli kabuk )



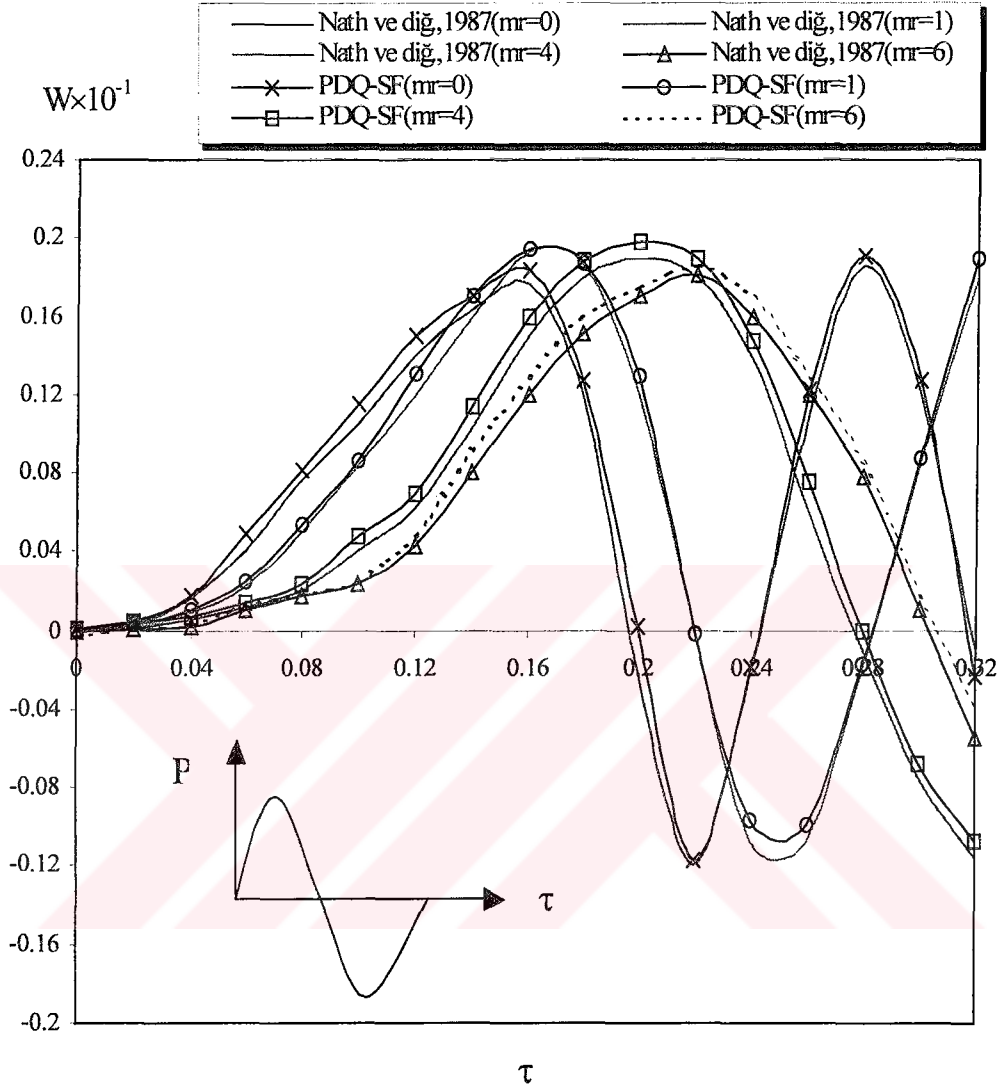
Şekil 4.41 Farklı ( $m_r$ ) için kabuk deplasmanının değişimi  
 ( $R_x=R_y=7.0$ ;  $P=100$ ;  $K=800$ ;  $G=50$ ; CCCC çift eğrilikli kabuk )



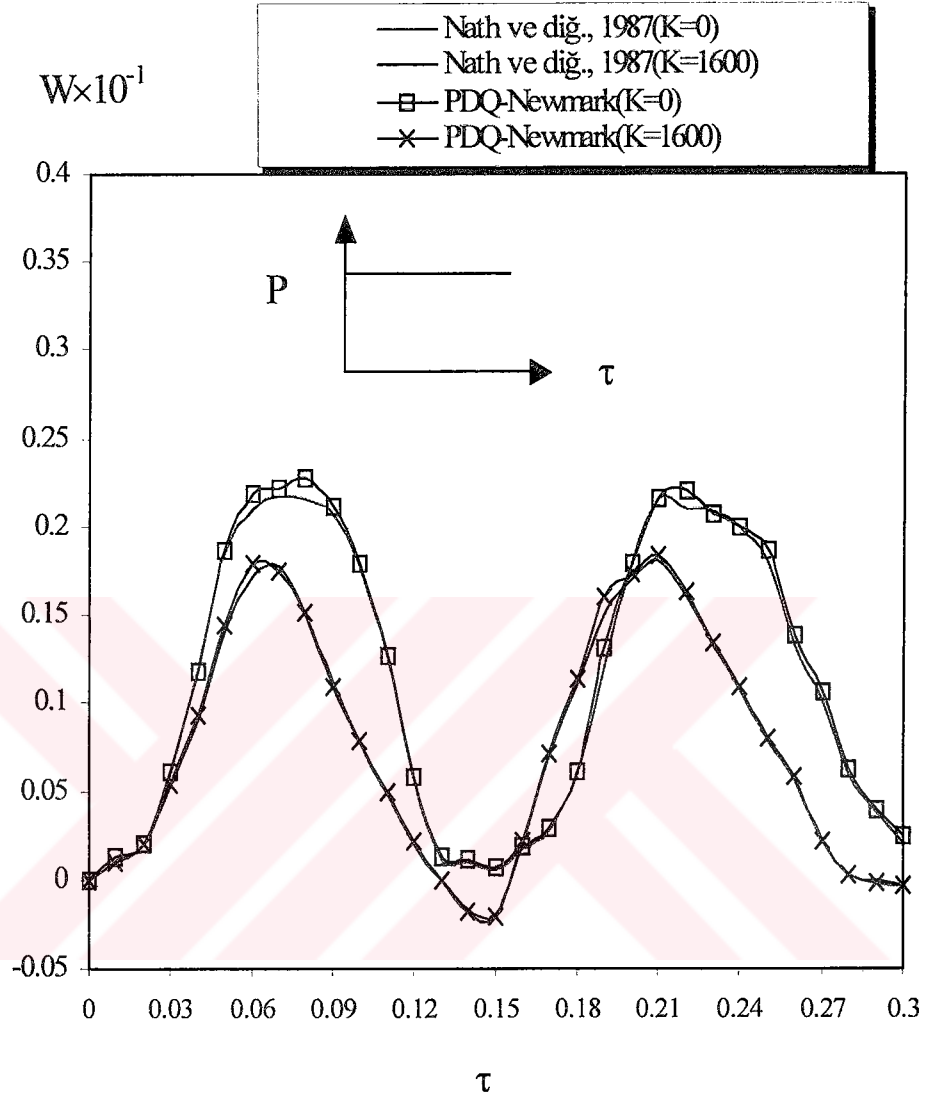
Şekil 4.42 Farklı ( $m_r$ ) için kabuk deplasmanının değişimi  
 ( $R_x=R_y=7.0$ ;  $P=100$ ;  $K=800$ ;  $G=50$ ; SSSS çift eğrilikli kabuk )



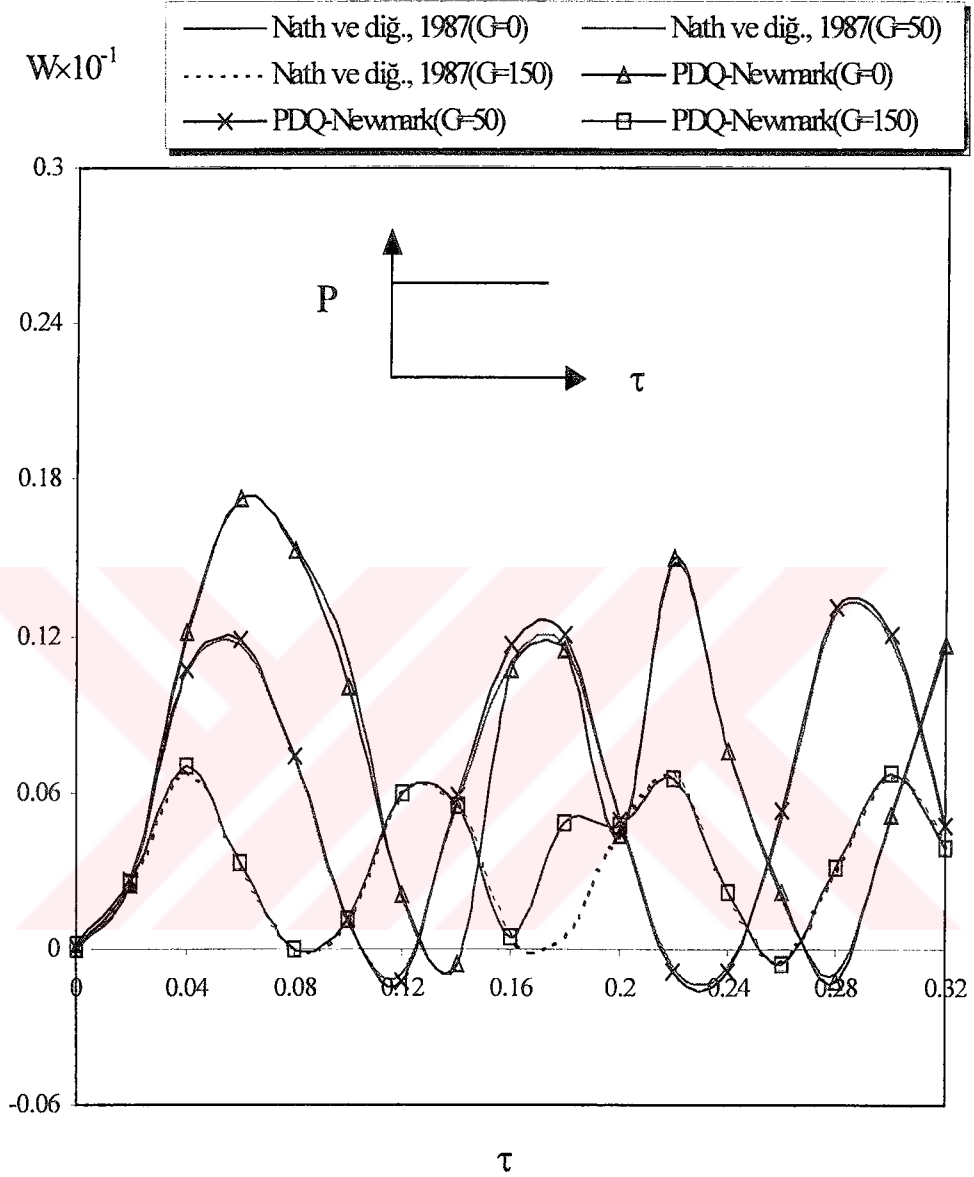
Şekil 4.43 Farklı ( $m_r$ ) için kabuk deplasmanının değişimi  
 ( $R_x=R_y=7.0$ ;  $P=200$ ;  $K=400$ ;  $G=50$ ; CCCC çift eğrilikli kabuk)



Şekil 4.44 Farklı ( $m_r$ ) için kabuk deplasmanının değişimi  
 ( $R_x=R_y=7.0$ ;  $P=200$ ;  $K=400$ ;  $G=50$ ; SSSS çift eğrilikli kabuk )



Şekil 4.45 Farklı zemin parametresi (K) için kabuk deplasmanının değişimi  
 ( $R_x=R_y=5.0$ ;  $P=100$ ;  $G = 0$ ;  $m_r = 0$ ; CCCC çift eğrilikli kabuk )



Şekil 4.46 Farklı zemin kayma parametresi ( $G$ ) için kabuk deplasmanının değişimi  
 ( $R_x=R_y=5.0$ ;  $P=100$ ;  $K=800$ ;  $m_r=0$ ; CCCC çift eğrilikli kabuk )

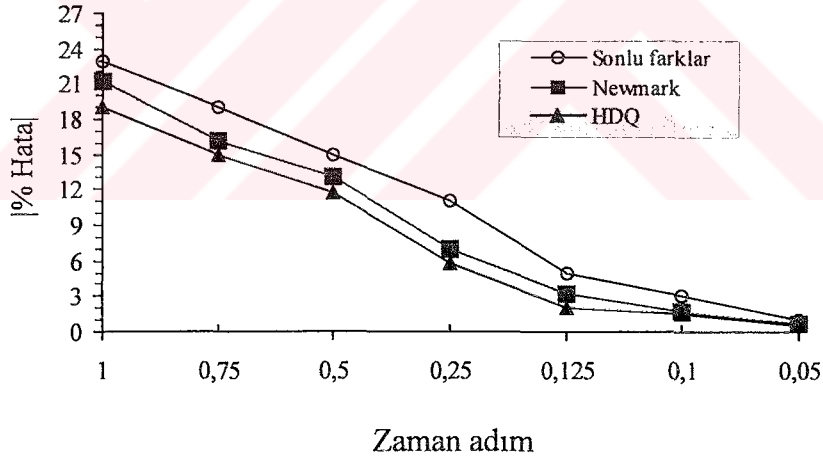
## 5. HATA ANALİZİ

Çalışmada elastik zemine oturan dikdörtgen plakların ve iki eğrilikli basık kabukların hem statik hem de dinamik hesapları yapılmıştır. Bu amaçla kullanılan denklemler hem zaman değişkeninin hem de konum (uzay) değişkeninin türevini içermektedir. Konum değişkenlerinin türevini içeren ifadeler için DQ metodu kullanılmıştır. Ancak DQ metodunda ağırlık katsayısı hesapları için çeşitli polinomlar kullanılmaktadır. Bu polinomlar; Chebyshev, Lagrange, Legendre ve kuvvet polinomları ile trigonometrik bir sinüs harmonik fonksiyonudur. Böylece DQ metodundaki ağırlık katsayı hesabı için 5 farklı polinom fonksiyon seçilebilmektedir. Zamana bağlı türev ifadeler için yani zaman değişkeninin integrasyonu için Newmark- $\beta$ , Sonlu farklar ve ağırlık katsayı hesabı için harmonik fonksiyonun kullanıldığı HDQ metodu ile birlikte 3 farklı metod kullanılmıştır. Böylece seçilecek çözüm yöntemi olarak lineer olmayan statik hesap için 5, lineer olmayan dinamik analiz için 15 farklı alternatif seçilebilmektedir.

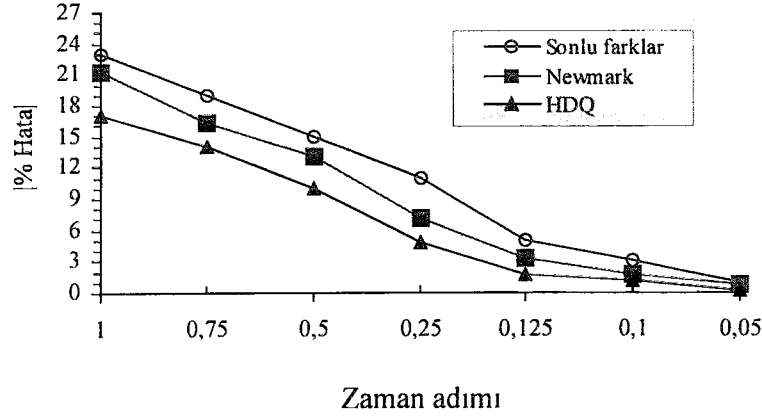
Bu kadar çok sayıda alternatif olduğu için, hangi çözümün daha pratik ve daha ekonomik olduğunu görmek açısından çalışmada göz önüne alınan sayısal örneklerden biri seçilerek hata analizi yapılmıştır. Bu amaçla, elastik zemine oturan çift eğrilikli kabuğun sinüsoidal dinamik yük etkisindeki lineer olmayan dinamik hesabı bu metodların hepsi ile yapılarak Nath ve diğ.[6] tarafından verilen sonuç esas olmak üzere % hatalar hesaplanmış ve bu hatalar hangi polinom fonksiyonun konum değişkeni ve yine hangi metodun zaman değişkeni için daha uygun olduğu pratik olarak belirlenmeye çalışılmıştır. Bu örneğe ait PDQ-SF sonuçları Şekil 4.43'de mevcuttur. Dört kenarından ankastre ve Winkler-Pasternak elastik zemine oturmuş çift eğrilikli ( $R_x = R_y = 7.0$ ) kabuk için hata analizleri yapılmıştır. Plakların statik ve dinamik analizleri için bir örnek seçilerek farklı polinom ve düğüm nokta sayısına ve tipine bağlı olarak hata analizleri yapılmıştır.

Şekil 5.1 ve 5.2’de verilen hata değerleri dinamik hesap için üniform ve üniform olmayan düğüm nokta dağılımının etkisini göstermek amacıyla verilmiştir. İki farklı düğüm nokta seçimi harmonik diferansiyel quadrature (HDQ) yönteminde kullanılmıştır. Görüleceği üzere üniform olmayan düğüm nokta dağılımı için HDQ metodu daha iyi sonuç vermiştir. Bu karşılaştırmada konum (uzay) değişkeninin integrasyonunda Lagrange polinomları kullanılmıştır. Bu karşılaştırma zaman değişkeninin integrasyonu için kullanılan HDQ, Newmark ve Sonlu farklar için yapılmıştır. Bu karşılaştırma, sayısal uygulamalar kısmında çözülen dört bir etrafında ankastre (CCCC) ve Winkler-Pasternak elastik zemine oturmuş çift eğrilikli ( $R_x = R_y = 7.0$ ) kabuk için yapılmıştır. Bu örneğe ait PDQ-SF sonuçları Şekil 4.43’de verilmiştir.

Üniform düğüm nokta dağılımında zaman adımı 0.125 için hata değeri % 2.2 iken üniform olmayan düğüm nokta dağılımı için bu hata %1.7’e kadar düşmüştür.



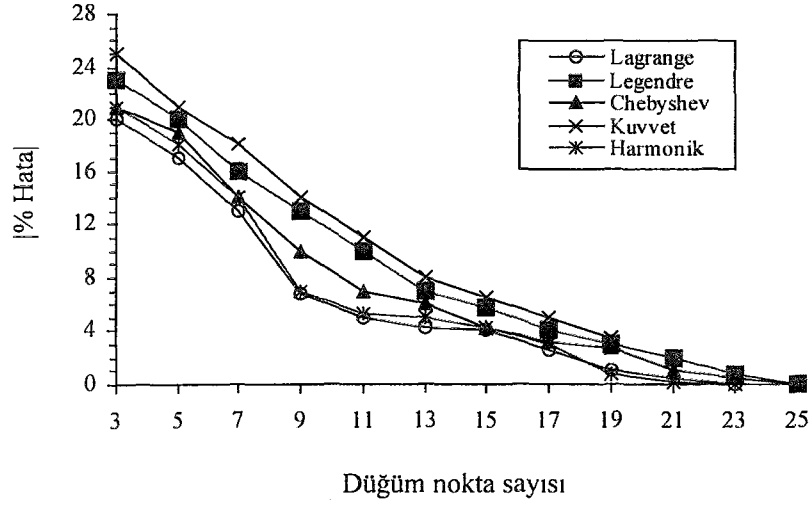
Şekil 5.1 Dinamik analizde zaman değişkeninin integrasyonunda kullanılan metoda ve zaman aralığına bağlı olarak hatanın değişimi (HDQ için üniform düğüm nokta dağılımı)



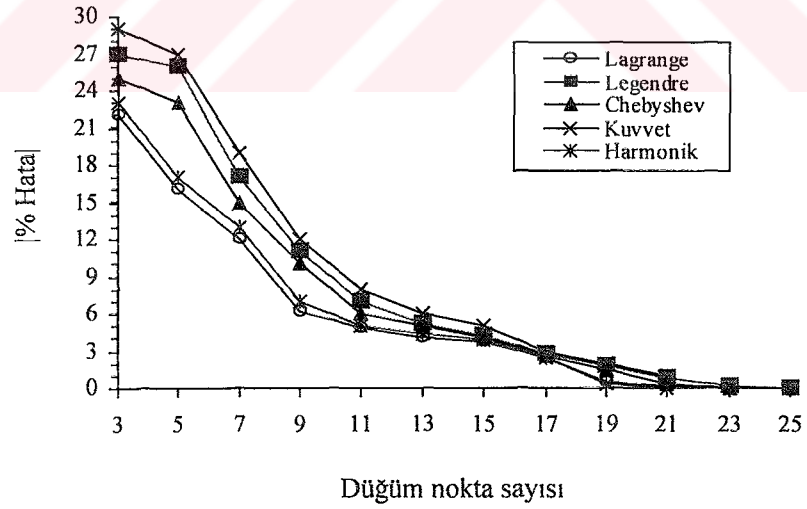
Şekil 5.2 Dinamik analizde zaman değişkeninin integrasyonunda kullanılan metoda ve zaman aralığına bağlı olarak hatanın değişimi (HDQ için üniform olmayan düğüm nokta dağılımı)

Şekil 5.3 ve 5.4’de ise verilen hata değerleri dikkate alınan dört kenarından ankastre (CCCC) ve Winkler-Pasternak elastik zemine oturmuş çift eğrilikli ( $R_x = R_y = 7.0$ ) kabuğun dinamik hesabında konum değişkeni için DQ yönteminde kullanılan polinomların çözüm hassasiyeti üzerine etkisini göstermek amacıyla verilmiştir. Beş tip (Lagrange, Chebyshev, Legendre ve Kuvvet polinomları ile harmonik fonksiyonlar) polinom diferansiyel quadrature (HDQ) yönteminde kullanılmıştır. Şekillerden görülmektedir ki üniform olmayan düğüm nokta dağılımı için Lagrange polinomu daha iyi sonuç vermektedir. Bu karşılaştırmada zaman (uzay) değişkeninin integrasyonunda sonlu farklar yöntemi kullanılmıştır.

Üniform düğüm nokta dağılımında düğüm nokta sayısı 13’den sonra bütün polinomlar anlamlı sonuçlar vermiştir. Ancak üniform olmayan düğüm nokta dağılımı kullanılıncsa Chebyshev ve Lagrange polinomları ile harmonik fonksiyonlar 15 düğüm nokta sayısı için yeterli sonuçlar verirken diğer polinomlar daha fazla düğüm nokta sayısına ihtiyaç duymaktadır.

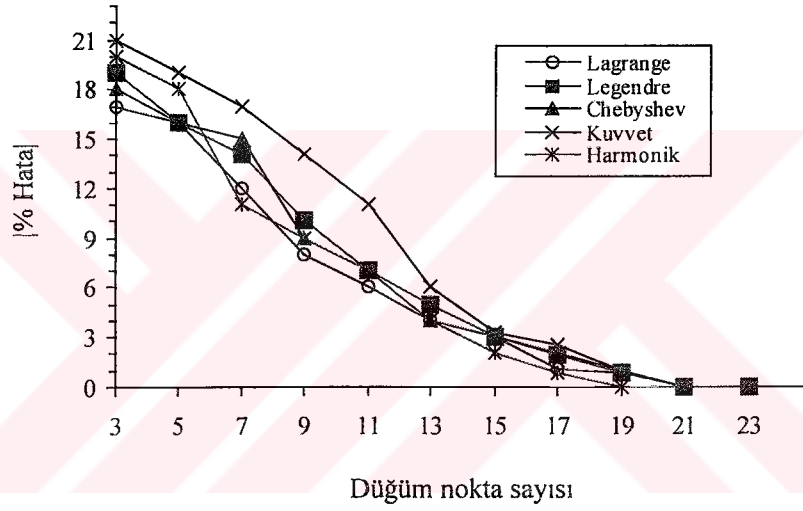


Şekil 5.3 Dinamik analiz için konum değişkeninin integrasyonunda kullanılan metoda ve düğüm nokta sayısına bağlı olarak hatanın değişimi (Üniform olmayan düğüm nokta dağılımı)

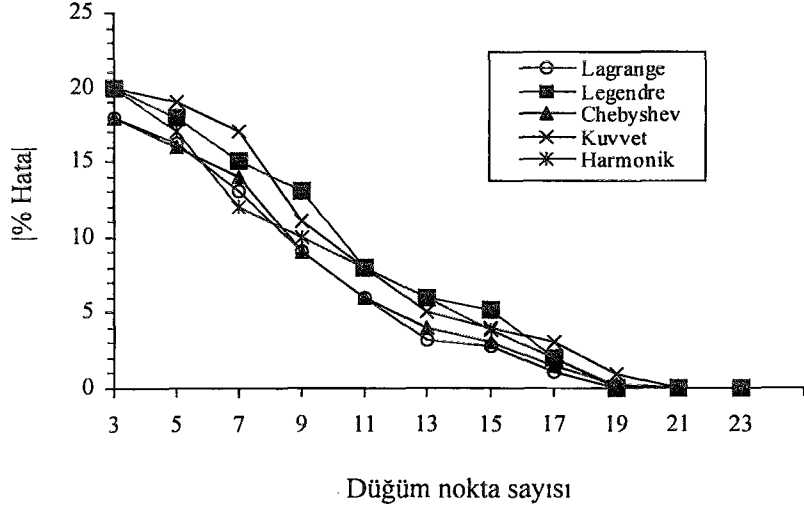


Şekil 5.4 Dinamik analiz için konum değişkeninin integrasyonunun da kullanılan metoda ve düğüm nokta sayısına bağlı olarak hatanın değişimi (Üniform düğüm nokta dağılımı)

Kabuğun statik hesabında hata analizi yapmak için Bölüm 4'de çözülen ve Çizelge 4.1 de sonuçları verilen çift eğrilikli kabuk ( $k=1$ ;  $R_x = 5.0$ ;  $R_y = 5.0$ ;  $P = 42.7$ ) problemi dikkate alınmıştır. Düğüm nokta sayısı artınca (Şekil 6.6) Kuvvet ve Legendre polinomları üniform düğüm nokta tipi için iyi sonuçlar vermiştir. Ancak daha az sayıda düğüm noktası kullanılıncsa Lagrange ve Chebyshev polinomları statik hesap için üniform olmayan düğüm nokta dağılımı kullanılmak üzere her zaman daha iyi sonuçlar vermektedir (Şekil 5.6).

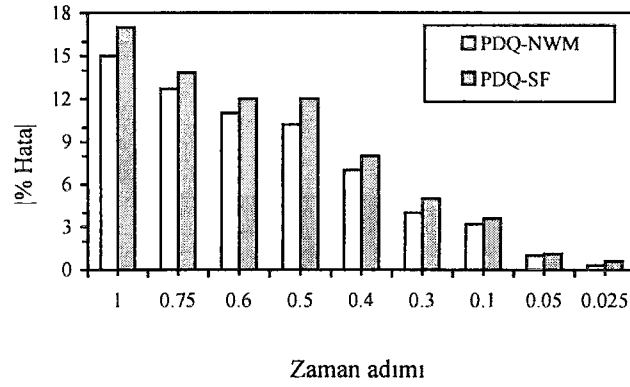


Şekil 5.5 Statik analiz için kullanılan metoda ve düğüm nokta sayısına bağlı olarak hatanın değişimi (Üniform olmayan düğüm nokta dağılımı)



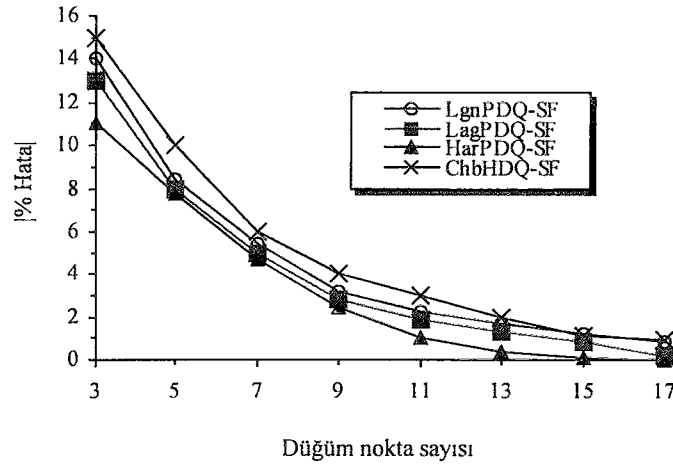
Şekil 5.6 Statik analiz için kullanılan metoda ve düğüm nokta sayısına bağlı olarak hatanın değişimi (Üniform düğüm nokta dağılımı)

Plâğın dinamik hesabında zaman değişkeninin integrasyonunda Sonlu farklar veya Newmark metotlarının kullanılmasına bağlı olarak elde edilen hata değerlerinin zaman adımı ile değişimi Şekil 5.7’de ve yine düğüm nokta sayısına bağlı olarak Şekil 5.8’de verilmiştir. Zaman adımı küçüldükçe hata azalmakta ve Newmark ile sonlu farklar arasındaki farkta kapanmaktadır. Bu hata analizinde, sonuçları Şekil 4.16’da verilmiş olan SSSS mesnetli dikdörtgen plâğın sabit adım yükü altında dinamik hesabına ( $P=100$ ;  $G=0$ ;  $k=1$ ) ait örnek dikkate alınmıştır. Benzer olarak 5.8’de verilen sonuçlar için yine aynı örnek kullanılmış ve Nath ve diğ. [1] tarafından verilen sonuçlar esas kabul edilmiştir. Daha önceki kabuğun dinamik analiz probleminde yapılan hata analizinde varılan sonuçlarda olduğu gibi plâğın dinamik hesabının DQ metodu ile çözümü çeşitli parametrelere bağlıdır. Zaman adımı ve gerek konum(uzay)ve gerekse zaman değişkeni için seçilen metot etkili olmaktadır.



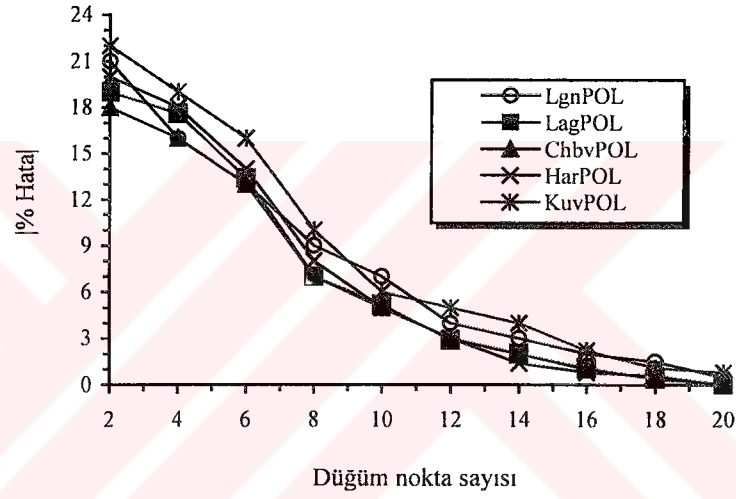
Şekil 5.7 Polinomal Diferansiyel Quadrature ile kullanılan Newmark ve Sonlu farklar metodunda elde edilen hata oranları

Şekil 5.8'de ise yine düğüm nokta sayısına bağlı olarak zaman değişkeni için sonlu farklar, konum değişkeni için 4 farklı polinom fonksiyonun kullanılmasına bağlı olarak elde edilen mutlak hata değerleri % olarak verilmiştir. Görüldüğü üzere zaman değişkeni için metod değişmemesine rağmen konum değişkeni için farklı polinom kullanılması çözüm hassasiyetini etkilemektedir.



Şekil 5.8 Plağın dinamik analizinde zaman değişkeni sabit iken konum değişkeni için kullanılan metoda bağlı hata değeri

Plak statik hesabında ise konum değişkeninin integrasyonunda farklı polinomların kullanılmasına bağlı olarak elde edilen hata değerlerinin düğüm nokta sayısına bağlı olarak değişimi Şekil 5.9’ da gösterilmektedir. Bu analiz için sonuçları Şekil 4.5’de verilen elastik zemine oturan dört kenarından ankastre tutulmuş kare plak (CCCC) dikkate alınmıştır. Görüleceği üzere Lagrange ve Chebyshev polinomları kısmen daha iyi sonuçlar üretmiştir. Şekil 5.9’da üniform olmayan düğüm nokta dağılımı kullanılmıştır.



Şekil 5.9 DQ yönteminde kullanılan polinoma bağlı plak statik analizi için hata değerleri

## 6. SONUÇLAR

Mühendislikte ve uygulamalı temel bilimlerde diferansiyel quadrature metotları geçen on yıl içinde pek çok problemin çözümüne başarıyla uygulanmıştır. Fiziko-Kimya problemleri, nükleer enerji, uygulamalı fizik, akışkanlar mekaniği, ısı transferi, mekanik, sürekli ortamlar mekaniği, uygulamalı matematik vb. alanlar bunlardan bazılarıdır. Yapı mekaniği alanında diferansiyel quadrature metotları geniş bir kullanım spektrumuna sahiptir. Katı cisimler mekaniği alanında ilk kez Bert ve diğ. [53] tarafından 1987 yılında kullanılmasıyla metot araştırmacıların dikkatini çekmiştir. Kısmi veya adi türevli diferansiyel denklemler ile ifade edilen pek çok fiziksel sistem bu metotlar ile başarı ile modellenmiştir. Bu problemlerden bazıları şunlardır: Tabakalı ve kompozit plakların statik ve dinamik hesapları, Elastik kirişlerin ve Bernoulli-Euler kirişinin statik ve dinamik analizleri, Reissner ve Mindlin plakların sayısal çözümü, kabukların titreşimi, eğrisel kirişlerin statik hesapları, Gerilme analizi vb. Literatürde elastik zemine oturan plak ve kabukların lineer olmayan statik ve dinamik hesaplarında diferansiyel quadrature metotlarının kullanıldığı herhangi bir çalışma yoktur.

Bu çalışmada Winkler-Pasternak elastik zemine oturan dikdörtgen plakların ve yine Winkler-Pasternak elastik zemine oturan çift eğrilikli basık kabukların statik ve dinamik analizleri ağırlık katsayılarının hesabında farklı polinomal fonksiyonları kullanıldığı ve çalışmada polinomal diferansiyel quadrature metodu olarak adlandırılan yöntemle gerçekleştirilmiştir. Von Karman-Donnell teorisi ile elde edilen çift eğrilikli kabuğun geometrik bakımdan lineer olmayan davranışını ifade eden kısmi türevli türev denklemi hem zaman değişkeninin hem de konum (uzay) değişkeninin türevini içermektedir. Konum değişkeni için polinomal diferansiyel quadrature metodu, zaman değişkeninin integrasyonu için ise Newmark- $\beta$ , Sonlu farklar ve diferansiyel quadrature metotlarının üçü kullanılmış ve böylece hibrid bir çözüm elde edilmiştir.

Elde edilen sonuçlar şöyle özetlenebilir :

- 1- Çalışmada konum yani uzay değişkenine ait türev ifadeler için polinomal diferansiyel quadrature metodu kullanılmıştır. Diferansiyel quadrature metodu için gerekli ağırlık katsayılarının hesabı için çeşitli polinomlar kullanılmış olup, bunlar: kuvvet, Legendre, Lagrange polinomu, Chebyshev polinomları ile harmonik test fonksiyonlarıdır.
- 2- Zaman değişkeni integrasyonu için sonlu farklar, Newmark- $\beta$  ve diferansiyel quadrature metotlarından biri kullanılmıştır.
- 3- Konum değişkeni için elde edilen çözümler seçilen düğüm nokta sayısı ve tipine bağlı olarak değişmiştir.
- 4- Büyük zaman adımları için en uygun çözüm PDQ-HDQ çifti ile elde edilmiştir. Yani konum değişkeni için Lagrange polinomunun kullanıldığı polinomal diferansiyel quadrature (PDQ), zaman değişkeni için harmonik test fonksiyonlarının kullanıldığı harmonik diferansiyel quadrature (HDQ) metodu dinamik analiz problemleri için uygundur.
- 5- Zaman adımı daha küçük seçildiğinde PDQ-Newmark- $\beta$  çözümleri uygun bulunmuştur. Ancak daha küçük zaman aralığı kullanıldığından indirgenmiş lineer denklem takımının boyutu ve dolayısıyla çözüm için gereken süre artmaktadır. Bu durumda tabiidir ki daha küçük zaman adımları seçildiğinden (zaman değişkeni için) PDQ-HDQ kombinasyonu da uygun çözümler verecektir.
- 6- Konum yani uzay değişkeni için üniform olmayan düğüm kullanılınca Lagrange polinomları diğer ikisine kıyasla kısmen de olsa daha hassas sonuçlar vermektedir. Üniform düğüm nokta dağılımı için Chebyshev ve Legendre polinomları yeter doğrulukta sonuçlara kısmen daha az sayıda düğüm noktası ile ulaşmıştır.
- 7- Genel anlamda lineer olmayan dinamik analiz için en elverişli çözüm; konum değişkeni için üniform olmayan düğüm nokta dağılımı ve daha fazla düğüm noktası seçilerek Lagrange polinomlarının kullanıldığı, zaman değişkeni için yine üniform olmayan düğüm noktası seçilerek harmonik fonksiyonların kullanılması durumunda hesaplanmıştır. Yani PDQ (Lagrange)-HDQ (2. Tip düğüm nokta dağılımı) çözümü en uygundur.

- 8- Üniform düğüm nokta dağılımı kullanılıncaya dinamik analiz için PDQ-Newmark- $\beta$  çözümleri yeter doğruluktur. Bu kombinasyonda PDQ yöntemindeki polinomlar Legendre ve Chebyshev polinomlarıdır.
- 9- Üniform olmayan düğüm nokta dağılımı üniform düğüm noktalarına göre her zaman daha iyi sonuç vermiştir. Özellikle Lagrange interpolasyon polinomu ve harmonik fonksiyonların kullanıldığı durumda bu fark daha belirginleşmektedir.
- 10- Statik hesap için düğüm nokta tipinin çözüm hassasiyetine olan etkisi hemen hemen ihmal edilebilir. Ancak düğüm nokta sayısı statik hesapta da etken bir parametredir.
- 11- Dinamik hesapta doğru sonuca ulaşma bakımından kullanılan polinomların sıralaması şöyledir : Lagrange, Chebyshev, Legendre, Kuvvet. Bir başka ifadeyle, aynı sayıda düğüm noktası kullanılıncaya Lagrange polinomu için elde edilen çözüm diğerlerine göre daha hassas olup, hata miktarı en fazla olan çözüm kuvvet polinomları kullanılıncaya elde edilmektedir. Ayrıca kuvvet polinomları kullanılıncaya düğüm nokta sayısı 20 den büyük olunca sistem çözümü mümkün olmamaktadır.
- 12- Çözüm hassasiyetini: düğüm nokta tipi, düğüm nokta sayısı ve kullanılan polinom fonksiyonu etkileyen faktörler olarak verilebilir. Dinamik analizde zaman integrasyonu yöntemi olarak Newmark- $\beta$  veya Sonlu farklar kullanılıncaya zaman adımını küçük seçmek gerekmektedir. Bu durumda sonuç olarak elde edilen denklem takımının boyutu büyümekte ve çözüm ekonomik olmamaktadır.

Kısaca vurgulamak gerekirse statik hesapta Chebyshev ve Legendre interpolasyon polinom fonksiyonlarının kullanıldığı DQ yöntemi eşit aralıklı düğüm nokta dağılımı için en uygun sonucu vermekte, dinamik analiz yapılıncaya: konum değişkeni için harmonik fonksiyonların kullanıldığı HDQ, zaman değişkeni için Newmark- $\beta$  metodu ile en ideal çözüme ulaşılmaktadır. Konum değişkeni için Lagrange interpolasyon polinomu ve zaman değişkeni için Newmark- $\beta$  kombinasyonu da eşit olmayan düğüm nokta dağılımı için yeterli bulunmaktadır.

Her iki değişken (konum ve zaman değişkenleri) için eşit olmayan düğüm nokta dağılımı kullanılıncı harmonik fonksiyonların kullanılması durumunda da hassas sonuçlar elde edilebilmektedir. Harmonik fonksiyonlar ile örneğin 19 düğüm nokta sayısı ile en uygun çözüml elde edildiğinde, Lagrange polinomları kullanılıncı aynı hassasiyet 21 ve daha büyük düğüm sayısı ile elde edilmiştir. Bu karşılaştırma için diğer bütün parametrelerin aynı seçildiği belirtilmelidir.

Elde edilen sonuçlardan hareket ederek denilebilir ki diferansiyel quadrature yöntemleri yapı mekaniği alanında, lineer analizde olduğu kadar lineer olmayan statik ve dinamik analiz alanında da başarılı sonuçlar vermektedir. Deprem gibi dinamik yüklere veya termal etkilere maruz tabakalı kompozit plak ve kabukların, malzeme ve geometri değişimleri bakımından lineer olmayan statik, dinamik ve titreşim hesapları gelecekte uygulanacak potansiyel çalışma alanları olup, metod optimizasyon problemleri için geliştirilecektir.

## KAYNAKLAR

1. Nath, Y., Varma, K.K. and Mahrenholtz, D.,1986, Nonlinear Dynamic response of rectangular plates on linear elastic foundation, *Computers and Structures*, 24(3), 391-399.
2. Dumir, P.C. and Bhaskar, A.,1988, Nonlinear static analysis of rectangular plates on elastic foundations by the orthogonal point collocation method, *Comput. Method. In Applied Mech. And Engineering*, 67, 111-124.
3. Dumir, P.C, 1988, Nonlinear dynamic response of isotropic thin rectangular plates on elastic foundations, *Acta Mechanica*, 71, 233-244.
4. Nath, Y., 1979, Non-linear dynamic response of rectangular plates subjected to transient loads, *Journal of Sound and vibration*, 63(2), 179-188.
5. Nath, Y., 1982, Large Amplitude Response of circular plates on elastic foundations, *Int. J.of Non-linear Mechanics*, 17(4), 285-296.
6. Nath, Y., Mahrenholtz, O.,Varma, K.K., 1987, Nonlinear dynamic response of a doubly curved shallow shell on an elastic foundation, *J. of sound and vibration*, 112(1), 53-61.
7. Cheung, M.S. 1978, A simplified finite element solution for the plates on elastic foundation, *Computers and structures*, 8, 139-145.
8. Buczkowski, R., Torbacki, W., 2001, Finite element modelling of thick plates on two-parameter elastic foundation, *Int. J. For Numerical and Analytical Meth. Geomechanics*, 25, 1409-1427.
9. Kukreti, A.R. and Man-Gi, K.,1992, Analysis of rectangular plate resting on an elastic half space using an energy approach,*Appl. Math. Modelling*, Vol.16, 338-356.
10. Alwar, R.S. and Nath, Y., 1976, Application of Chebyshev polynomials to the nonlinear analysis of circular plates, *Int. J. Mech. Sciences*, 18, 589-595.
11. Gajendar, N, 1967, Large amplitude vibrations of plates on elastic foundations, *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2, 163-172.
12. Qin, Q.H., 1994, Hybrid Trefftz finite element approach for plate bending on an elastic foundation, *Applied Math. Modelling*, 18,334-339.
13. Yang, T.Y., 1972, A finite element analysis of plates on a two parameter foundation model, *computers and structures*, 2, 593-614.
14. Cheung, Y.K. and Zienkiewicz, O.C.,1965, Plates and tanks on elastic foundations- An application of finite element method, *Int. J. Solids and Structures*, 1, 451-461.

15. Dillard, D.A., 1989, Bending of plates on thin elastomeric foundations, *J. Of Applied Mechanics*, ASME, 56, 382-386.
16. Nassar, M., 1981, Bending of a circular plate on a linear viscoelastic foundation, *Appl. Math. Modelling*, 5, 60-62.
17. Datta, S, 1976, Large amplitude free vibrations of irregular plates placed on an elastic foundation, *Int. J. Non-Linear Mech.*, 11, 337-345.
18. Sladek, J., Sladek, V., and Mang, H.H, 2002, Meshless local boundary integral equation method for simply supported and clamped plates resting on elastic foundation, *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*,191, 5943-5959.
19. Shen, H-S., 2000, Nonlinear bending of shear deformable laminated plates under lateral pressure and thermal loading and resting on elastic foundation, *J.of Strain Analysis*, 35(2), 93-108.
20. Shen Hui-S, and Williams, F.W.,1995, Postbuckling analysis of imperfect composite laminated plates on non-linear elastic foundations, *Int. J. of Nonlinear Mechanic*,30(5), 651-659.
21. Paliwal, D.N., and Pandey, R.K., 1998, The free vibration of a cylindrical shell on an elastic foundation, *J. of Vibration and Acoustics*, 120, 63-71.
22. Massalas, C. and Kafousias, N., 1979, Nonlinear vibrations of a cylindrical panel on a nonlinear elastic foundation, *J. of sound and vibration*, 66(4), 507-512.
23. Paliwal, D.N, Kumar, P.R., Nath, T., 1996, Free vibrations of circular cylindrical shell on Winkler and Pasternak foundations, *Int. J. of Pressure Vess. And Piping*, 69, 79-89.
24. Paliwal, D.N., Bhalla, V., 1993, Large deflection analysis of cylindrical shells on a pasternak foundation, *Int. J. of Pressure Vess. And Piping*, 53, 261-271.
25. Nath, Y, Jain, R.K., 1983, Nonlinear dynamic analysis of shallow spherical shells on elastic foundation, *Int. J. Mech. Sci.*, 25(6), 409-419.
26. Liu, F-L, 2000, Rectangular thick plates on winkler foundation : Differential Quadrature element solution, *Int. J. Solids and Struc.*,37, 1743-1763.
27. Liew, K.M., Han, J-B, Xiao, Z.M., and Du, H., 1996, Differentiel Quadrature Method for Mindlin plates on Winkler foundations, *Int. J. Mech. Sciences*, 38(4), 405-421.
28. Reissner, E.,1945, The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates, *J. Appl. Mech.*, 12, 69-77.

29. Mindlin, R.D.,1951, Influence of rotator inertia and shear on flexural motion of isotropic elastic plates, J. of Appl. Mech., 18, 31-38.
30. Ugural, A.C., 1999, *Stresses in plates and shells*, 2<sup>ed</sup>. Ed., McGraw-Hill, Boston.
31. Vlasov, V.Z., and Leont'ev N.N.,1966, *Beams, Plates and Shells on Elastic foundations*, Translated from Russian to English by Barouch, A, Israel Program for scientific translations, Jarusalem.
32. Vinson, J.R., 1989, *The behavior of thin walled structures: Beams, plates, and shells*, Kluwer Academic Publishers, Netherlands.
33. Dym, Clive, L.,1974, *Introduction to the theory of shells*, Pergamon press, Oxford, UK.
34. Markus, S., 1988, *The mechanics of vibrations of cylindrical shells*, Elsevier, New York.
35. Timoshenko, S., Woinowski-Krieger, S.,1959, *Theory of plates and shells*, McGraw-Hill, NewYork.
36. Leissa, A.W., 1973, *Vibration of shells*, NASA, SP-288.
37. Gibson, J.E., 1980, *Thin Shells: computing and theory*, Pergamon Press, New York.
38. Brush, D.O., and Almroth, B.O.,1975, *Bucklin of bars, plates, and shells*, McGraw-Hill, New York.
40. Ng, S.S, Chan, Y.T., 1977, Solution of some boundary value problems in applied mechanics by the collocation least square method, Comput. Meth. In Appl. Mech. And Eng., 11, 137-150.
41. Nath, Y., Kumar, S., 1995, Chebyshev series solution to non-linear boundary value problems in rectangular domain, Comput. Meth. In Appl. Mech. And Eng., 125, 41-52.
42. Nath, Y., Sandeep, K., 2000, Nonlinear analysis of doubly curved shells: An analytical approach, Sadhana, 25,4, 343-352.
43. Bellman, R., 1973, *Methods of nonlinear analysis*, 2, Academic Press, New York.
44. Bellman, R., Roth, R.S., 1986, *Methods in approximation*, D Reidel Publishing, Dordrecht, Netherlands.
45. Hamming, R.W., 1973, *Numerical methods for scientists and engineers*, New York, McGraw-Hill.
46. Björck A, Pereyra V.,1970, Solution of Vandermonde system of equations. Mathematical computing, 24, 893-903.

47. Quan J.R, Chang C.T.,1989, New insights in solving distributed system equations by the quadrature method-I analysis. *Computers in Chemical Engineering*,13(7),779-788.
48. Striz A.G, Chen W, Bert C.W.,1994, Static analysis of structures by the quadrature element method. *Int. J. of Solids and Structures*, 31(20), 2807-2818.
49. Bathe K.J.,1982, *Finite element procedures in engineering analysis*, Englewood Cliffs. NJ, Prentice-Hall.
50. Bellman, R.& Casti, J., 1971, Differential quadrature and long-term integration, *J. of Math. Analysis and Applications*, 34, 235-238.
51. Bellman, R., Kashef, B.G.& Casti, J.,1972, Differential quadrature : A Technique for the rapid solution of nonlinear partial differential equation, *J. of Computational Physics*, 10, 40-52.
52. Bert, C.W., & Malik M., 1996, The differential quadrature method for irregular domains and application to plate vibration, *Int. J. Mech. Sci.*, 38(6), 589-606.
53. Bert, C.W., Jang, S. K., & Striz, A.,G.,1987, Two new approximate methods for analyzing free vibration of structural components, *AIAA Journal* ,26 (5), 612-618.
54. Bert, C.W., Wang, Z.& Striz, A.,G., 1993, Differential quadrature for static and free vibration analysis of anisotropic plates, *Int. J. of Solids and Structures*, 30(13), 1737-1744.
55. Bert, C.W. & Malik, M.,1996, Free vibration analysis of tapered rectangular plates by differential quadrature method: a semi- analytical approach, *J. of Sound and Vibration*, 190(1), 41-63.
56. Bert CW, Malik M., 1996, Differential quadrature method in computational mechanics: a review. *Applied Mechanics Review*, 49(1),1-28.
57. Celia, M .A. & Gray, W.G., 1992, *Numerical methods for differential equations, fundamental concepts for scientific and engineering applications*. NJ, Prentice Hall.
58. Chopra A.K., 1995, *Dynamics of structures, theory and applications to earthquake engineering*, New Jersey, Prentice- Hall.
59. Civalek, Ö., 2004, Application of differential quadrature (DQ) and harmonic differential quadrature (HDQ) for buckling analysis of thin isotropic plates and elastic columns, *Engineering Structures, An International Journal*, 26(2), 171-186.
60. Civalek, Ö., Ülker, M., 2004, Harmonic differential quadrature (HDQ) for axisymmetric bending analysis of thin isotropic circular plates, *International Journal of Structural Engineering and Mechanics*, Vol. 17(1), 1-14.

61. Civalek, Ö., Ülker, M., 2004, Free vibration analysis of elastic beams using harmonic differential quadrature (HDQ), *Mathematical and Computational Applications*, Vol. 9(2), 257-264.
62. Civalek, Ö., Çatal, H.H., 2002, Bir ve İki boyutlu yapıların genelleştirilmiş diferansiyel quadrature yöntemiyle dinamik analizi, *Türkiye İnşaat Mühendisleri Odası, Mühendislik Haberleri*, Sayı 417, s.39-46.
63. Civalek, Ö., Çatal, H.H., 2003, Plakların diferansiyel quadrature metodu ile stabilite ve titreşim analizi, *IMO Teknik Dergi*, Vol. 14 (1), 2835-2852.
64. Civalek, Ö., Çatal, H.H., 2003, Diktörtgen ve kare plakların diferansiyel quadrature metodu ile statik hesabı., *Dokuz Eylül Üniversitesi Fen ve Mühendislik Dergisi*, (Baskıda).
65. Civalek, Ö., Çatal, H.H., 2003, Linear static and vibration analysis of circular and annular plates by the harmonic differential quadrature (HDQ) method, *J. of Eng. and Architecture Faculty of Osmangazi University* Vol.16(1),45-76.
66. Ülker, M., Civalek, Ö., 2004, Free vibration analysis of beams and plates by the method of harmonic differential quadrature (HDQ), *Fırat Üniversitesi Fen ve Bilim Dergisi* (baskıda).
67. Ülker, M., Civalek, Ö., 2004, Application of harmonic differential quadrature (HDQ) to deflection and bending analysis of one-and two-dimensional structures, *Fırat Üniversitesi Fen ve Bilim Dergisi* (baskıda).
68. Civalek Ö., 2002a, *Yapıların diferansiyel quadrature metodu ile statik ve dinamik analizi*, Doktora Semineri, Fırat Üniversitesi, Elazığ.
69. Fung, T.C., 2001, Solving Initial Value Problems by Differential Quadrature Method- Part 1: First-order equations, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*,50, 1411-1427.
70. Fung, T.C., 2002, Stability and Accuracy of Differential Quadrature Method in Solving Dynamic Problems, *Comput. Methods. Appl. Mech. Eng.*, 191,1311-1331.
71. Shu, C., 2000, *Differential Quadrature and Its Application in Engineering*, Springer, London.
72. Tanaka, M., Chen, W., 2001, Dual reciprocity BEM applied to transient elastodynamics problems with differential quadrature method in time, *Comput. Meth. Appl. Mech.Eng.*, 190, 2331-2347.
73. Çakıroğlu, A., Özmen, G., & Özden, E.,1974, *Yapı Sistemlerinin Hesabı İçin Matris Metotları Ve Elektronik Hesap Makinası Programları*, Cilt I, İstanbul: Matbaa Teknisyenleri Basımevi.

74. Du, H., Liew, K.M., & Lim, M.K., 1996, Generalized differential quadrature method for buckling analysis., *J. of Eng. Mech., ASCE*,122(2),95-100.
75. Hildebrand, F.B., 1965, *Methods of applied mathematics*, Prentice-Hall.
76. Liew, K.M., Teo, T. M. & Han, J.B., 1999, Comparative accuracy of DQ and HDQ methods for three- dimensional vibration analysis of rectangular plates. *Int. J. for Numerical Meth. in Eng.*, 45, 1831-1848.
77. Meirovitch L., 1986, *Elements of vibration analysis*, Singapore, McGraw-Hill.
78. Malik, M., & Bert, C.W., 1998, Three- dimensional elasticity solutions for free vibrations of rectangular plates by the differential quadrature method. *Inter. J. of Solids and Structures*, 35(3-4), 299-318.
79. Mitchell, A. R., 1976, *Computational methods in partial differential equations*, John Wiley.
80. Mondkar, D.P.,& Powell, G.H.,1977, Finite element analysis of non-linear static and dynamic response, *Inter. J. for Numerical Methods in Eng.*,11, 499-520.
81. Newmark, N.M., 1959, A method of computation for structural dynamics, *Trans. ASCE*, 127, 1406-1435.
82. Shu, C., and Richards, B.E., 1992, Application of generalized differential quadrature to solve two- dimensional incompressible Navier-Stokes equations, *Inter. J. for Numerical Methods in Fluids*, 15, 791-798.
83. Shu, C., Chen, W., Xue, H., & Du, H., 2001, Numerical study of grid distribution effect on accuracy of DQ analysis of beams and plates by error estimation of derivative approximation, *Int. Journal for Num. in Eng.*, 51, 159-179.
84. Shu, C.,& Xue, H.,1997, Explicit computations of weighting coefficients in the harmonic differential quadrature, *J. of Sound And Vibration*, 204(3), 549-555.
85. Striz, A.G., Chen, W., & Bert, C.W., 1994, Static analysis of structures by the quadrature element method, *Inter. J. of Solids and Structures*, 31(20), 2807-2818.
86. Zienkiewicz O.C., 1977, *The finite element method in engineering science*.(3<sup>rd</sup> ed.). London,McGraw- Hill.

## ÖZGEÇMİŞ

1973 yılında Elazığ'da doğdu. Haziran 1996 yılında Fırat Üniversitesi Mühendislik Fakültesi İnşaat Mühendisliği Bölümünden Lisans, Temmuz 1998 yılında Fırat Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Mühendisliği (Mekanik) Anabilim dalında Yüksek Lisans derecelerini aldı. 1996-2000 yılları arasında Pamukkale Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, Mekanik Anabilim dalında Araştırma görevlisi olarak görev yaptı. 2000 yılından beri İller Bankası Genel Müdürlüğünde mühendis olarak görev yapmaktadır. Plak ve kabukların lineer olmayan dinamik analizleri, Diferansiyel quadrature metotları, Yapay zeka yöntemlerin mühendislik uygulamaları, Kısmi ve adi türevli diferansiyel denklemlerin sayısal çözümleri esas çalışma alanlarını oluşturmaktadır. Çalışma konuları ile ilgili yurt içi ve yurt dışı hakemli dergilerde ve sempozyumlarda yayınlanmış 42 adet yayını vardır.

## Ek-1 : Program menülerinden görünümler

Çalışmada kullanılan program, yazar tarafından Microsoft Excel dahili Visual Basic kullanılarak hazırlanmıştır. Ek-2’de görülen data sayfası bir Excel sayfası olup, bu sayfa kullanılarak program datası girilmektedir. Programın menülerinden genel bir görünüm aşağıda verilmiştir. Mevcut data ile Analiz opsiyonu seçili iken Data No yazılır ve Sonuçların yazılacağı sayfa verilerek çözüm yapılır. Data no kısmındaki datanın yapısı Ek-2 kısmında verilen şekilde görülmektedir.

The screenshot displays the 'PDO - Non-Dynamics' software interface. The title bar at the top reads 'PDO - Non-Dynamics'. The main window is titled 'Sistem Özellikleri ve Analiz Yöntemi'. Below the title, there are three columns of radio button options:

- Column 1:  Plak,  Kabuk
- Column 2:  Lineer Analiz,  Non-Lineer Analiz
- Column 3:  Mevcut Data ile Analiz,  Datanın Seçilmesi

Below the options, there are two input fields: 'Data No' and 'Sonuç Sayfa No'. Under 'Data No', there are three input fields for initial conditions:  $u_0$ ,  $\dot{u}_0$ , and  $\ddot{u}_0$ . At the bottom, there are two buttons: 'Hesapla' and 'Program Hakkında'.

Eğer Datanın Seçilmesi opsiyonu aktif ise bu durumda oluşan menü aşağıda verilmiştir. Çözüm için gerekli data bu menüler kullanılarak girilir ve Hesapla komutu ile hesap yapılır.

**PBQ - Non-Dynamics**

**Sistem Özellikleri ve Analiz Yöntemi**

Plak  Lineer Analiz  Mevcut Data ile Analiz  
 Kabuk  Non-Lineer Analiz  Datanın Seçilmesi

Data No  Sonuç Sayfa No

Başlangıç Koşulları

$u_0$    
 $\dot{u}_0$    
 $\ddot{u}_0$

**Hesapla** **Program Hakkında**

**Data**

SSSS  Sabit Adım Yük  Rx   Ry   İzotrop malzeme  
 CCCC  Sinüsoidal Yük  v   Orthotrop malzeme  
 SCSC

Başlangıç Koşulları

$u_0$   P  mr   
 $\dot{u}_0$   K  C   
 $\ddot{u}_0$   G  k

Hesap zaman aralığı

t(ilik)   
t(son)   
Delta-t

Yük değişimi

P(ilik)   
P(son)   
Delta-P

Zaman İntegrasyonu  Newmark  Sonlu farklar  HDQ

Eğer Datanın Seçilmesi opsiyonu aktif ise ve bu durumda malzeme orthotrop ise oluşan menü aşağıda verilmiştir.

**PDO - Non-Dynamics**

**Sistem Özellikleri ve Analiz Yöntemi**

Plak  Lineer Analiz  Mevcut Data ile Analiz  
 Kabuk  Non-Lineer Analiz  Datanın Seçilmesi

Data No  Sonuç Sayfa No

Başlangıç Koşulları

$u_0$    
 $\dot{u}_0$    
 $\ddot{u}_0$

Ortotrop Malzeme Datası

Ey/Ex   
Gxy/Gx   
v(y)

**Hesapla** **Program Hakkında**

**Data**

SSSS  Sabit Adım Yük  Rx  Ry   
 CCCC  Sinüsoidal Yük  v   
 SCSC  İzotrop malzeme  Orthotrop malzeme

Başlangıç Koşulları

$u_0$   P  mr   
 $\dot{u}_0$   K  C   
 $\ddot{u}_0$   G  k

Hesap zaman aralığı

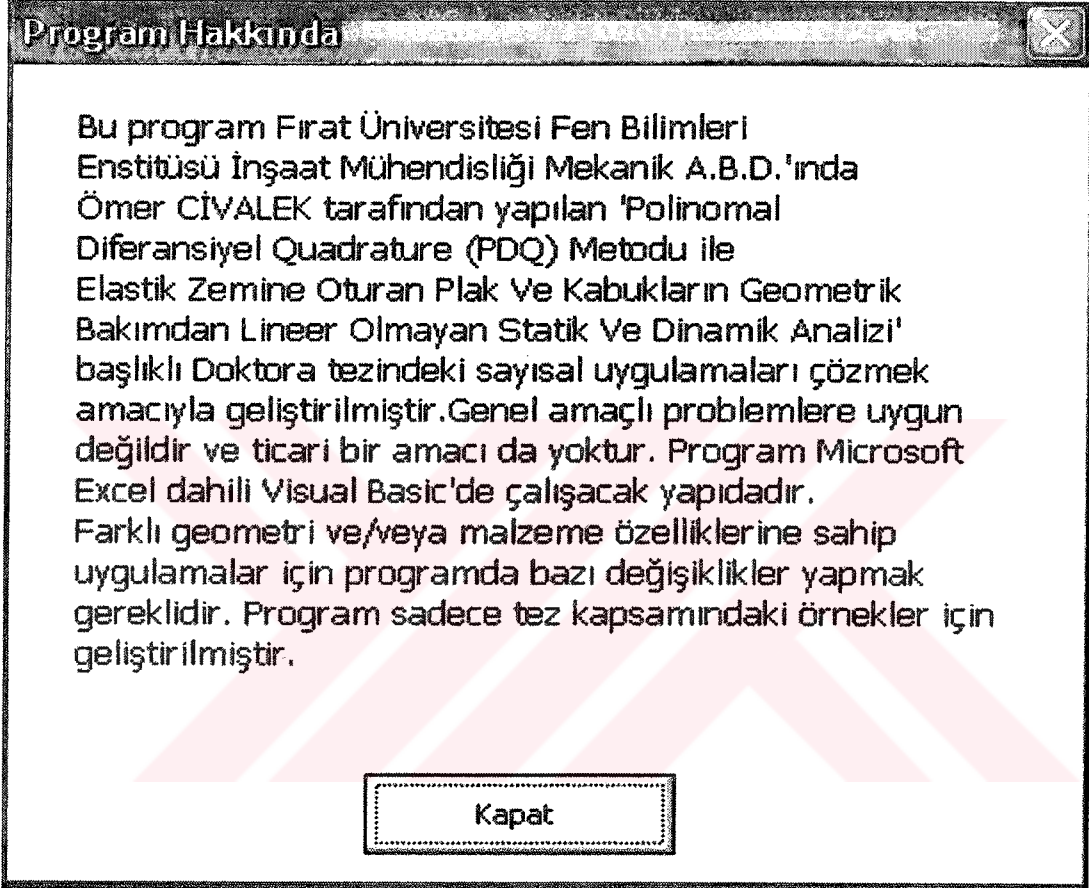
t(ilk)   
t(son)   
Delta-t

Yük değişimi

P(ilk)   
P(son)   
Delta-P

**Zaman İntegrasyonu**  Newmark  Sonlu farklar  HDQ

Program hakkında opsiyonu tıklanınca program hakkında kısa bir bilgi verilmektedir.



Ek-2 : Data sayfası

Data 3.1	Poisson oranı ( $\nu$ )	k1	k2	k3	k4	k5	k6	k7	Yük			Pr-son
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	K7	Dinamik	Sabit adım yük	Sinusoidal	
		G1	G2	G3	G4	G5	G6	G7		Unüform		P
		$\tau$ -ilk	$\tau$ -son	$\Delta\tau$		Pilk	Pson	$\Delta P$		Zaman		
		C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7		Integrasyonu	Newmark	HDO
		mr1	mr2	mr3	mr4	mr5	mr6	mr7				
Mesnet Türü	CCCC	SSSS	SCSC	CSCS								
Ortotrop Matzeme	Ey/Ex	Gxy/Ex	$\nu(y)$	Kabuk Eğriliikleri				Rx				
							Ry					

**Ek-3:** Bölüm 4'de elastik zemine oturan plak ve kabukların lineer olmayan analizleri için verilen yönetici diferansiyel denklemlerdeki non-lineer terimler aşağıdaki formülasyonlar ile lineerleştirilmiştir [1,4,5,10].

$$(W_J)^2 = (W_J) \cdot (W_J)$$

Burada  $W_J$  terimi Taylor serisi ile ardışık olarak yazılır ise

$$W_J = W_{J-1} + (\partial W / \partial X)_{J-1} \partial X + (\partial^2 W / \partial X^2)_{J-1} \frac{\partial X^2}{2} + \dots$$

Geri farklar yaklaşımı kullanılarak  $(\partial W / \partial X)_{J-1}$  ve  $(\partial^2 W / \partial X^2)_{J-1}$  ifadeleri

$$(\partial W / \partial X)_{J-1} = [(W)_{J-1} - (W)_{J-2}] / \partial X$$

$$(\partial^2 W / \partial X^2)_{J-1} = [(W)_{J-1} - 2(W)_{J-2} + \frac{1}{2}(W)_{J-3} + \dots$$

olarak yazılır. Böylece

$$(W_J)^2 = (W)_J [a(W)_{J-1} + b(W)_{J-2} + c(W)_{J-3}]$$

ile verilir.

Bu denklemdeki  $a, b$  ve  $c$  katsayıları şu şekilde tanımlıdır.

$$J=1; a = b = c = 1$$

$$J=2; a = 2.0, b = 0, c = 0$$

$$J=3; a = -2.0, b = 2.5, c = 0$$

$$J>3; a = 2.5, b = -2.0, c = 0.50$$