155718

SEMİ-ÖKLİDYEN UZAYLARDA SCHLAFLİ DİFERENSİYEL FORMÜLÜ

Murat SAVAŞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

(MATEMATİK)

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

AĞUSTOS 2004

ANKARA

Murat SAVAŞ tarafından hazırlanan Semi-Öklidyen Uzaylarda Schlafli Diferensiyel Formülü adlı bu tezin yüksek lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Baki KARLIĞA
Tez Yöneticisi

Bu çalışma, jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: : Prof. Dr. Erdoğan Esin

Üye : Prof. Dr. Baki Karlığa

Üye : Prof. Dr. Yusuf Yaylı

Üye : ______________________

Üye : ______________________

Bu tez, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygundur.

İÇİNDEKİLER

SEMİ-ÖKLİDYEN UZAYLARDA SCHLAFLİ DİFERENSİYEL FORMÜLÜ

(Yüksek Lisans Tezi)

Murat SAVAŞ

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Ağustos 2004

ÖZET

Bu tez sekiz bölümden oluşmaktadır. Bölüm 1 de Schlafli diferensiyel formülü ve bu alanda yapılan çalışmalar hakkında bazı tarihi bilgiler verildi. Bölüm 2 de temel tanım, kavram ve özellikler verildi. Bölüm 3 de yarı-Öklidyen uzaylarda hiperkuadrikler, hiperkuadriklerin özellikleri, sınıflandırılması ve aralarındaki izometriler verildi. Bu bölümde ayrıca hiperkuadrikler üzerinde n-simpleks ve yüzlerinin tanımı verildi. Bölüm 4 de hacim elemanı ve yarı-Öklidyen uzayda Kneser in verdiği Schlafli diferensiyel formülünün ispatı için; seçilen vektörün durumuna göre koordinat dönüşümleri incelendi. Bölüm 5 de birim hiperkuadrikler üzerindeki simpleksler için Schlafli diferensiyel formülünün genelleştirilmesi verildi. Bölüm 6 da keyfi boyutlu bir simpleksin polar ve tümleyen dual tanımlarını vererek, Santalo formülünün 3-boyutlu ispatı verildi. Bölüm 7 de Gauss-Bonnet ve Santalo formüllerinin simplekslerin hacmi için genelleştirilmesi yapılarak, tek ve çift boyutlu yüzlerdeki dihedral açılarla ilgili sonuçlar verildi. Bölüm 8 de bu çalışmadan elde edilen sonuçların özeti ve hedefleri verildi.

Bilim Kodu : **403.0201**

Anahtar Kelimeler : **Simplex, hacim, Schlafli**

Sayfa Adedi : **84**

Tez Yöneticisi : **Prof. Dr. Baki KARLIĞA**

SCHLAFLI DIFFERENTIAL FORMULA IN SEMI-EUCLIDIAN SPACE

(M.Sc. Thesis)

Murat SAVAŞ

GAZI UNIVERSITY

INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

August 2004

ABSTRACT

This thesis is consists of eight chapters. In chapter 1, we have given some information about history of Schlafli differential formula. In chapter 2, given basic definitions, concepts and properties are given. In chapter 3, the definition of a hyperquadrics, the classification of hyperquadrics and the isometries of two hyperquadrics are given. Morever, in that chapter n-simplex and its faces on a hyperquadrics are defined. In chapter 4, the coordinate maps are examined with respect to the causalcharacter of a vector for the volume element and the proof of Schlafli's differential formula given by Kneser in semi-Euclidian space. In chapter 5, the generalization of Schlafli's differential formula to the simplices on the unit hyperquadric is given. In chapter 6, Santalo's formula in three dimensions is proved by giving the definitions of polar dual and complementary dual of a simplices in arbitrary dimensions. In chapter 7, some results with related to dihedral angle at these faces with odd and even dimensions are given, by using the generalization of Gauss-Bonnet and Santalo's formula for the volume of simplices. In chapter 8, the summary of the results obtained from that study and its targets are given.

Science Code : 403.02.01

Key Words : Simplex, Volume, Schlafli

Page Number: 84

Adviser : Prof. Dr. Baki KARLIĞA

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren hocam Sayın Prof. Dr. Baki KARLIĞA'ya, yine kıymetli tecrübelerinden yararlandığım Atakan YAKUT'a ve manevi destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan Naciye Esra ÇAPANOĞLU na ve aileme teşekkürü bir borç bilirim.

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil **Sayfa**

SİMGELER

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler açıklamaları ile birlikte aşağıda verilmiştir.

Simgeler	**Açıklama**
C	Simplektik koni
Δ	Simpleks
F	Simpleksin bir yüzü
Q_q^n	q-indeksli hiperkuadrik
V	Hacim
α	Dihedral açı
Θ	Polar açı
R_ν^n	ν- indeksli semi-Öklidyen uzay
S_q^n	q-indeksli psedo-küresel uzay
H_q^n	q-indeksli psedo-hiperbolik uzay

1. GİRİŞ

Keyfi boyutlu hiperbolik ve küresel polihedronların hacim hesabında Schlafli diferensiyel formülü merkezi rol oynar. Sabit eğrilikli yarı-Öklidyen uzayda diferensiyellenebilir n-simpleksler ailesi Δ olmak üzere Δ ailesine ait hacimlerin diferensiyelini; 2-eşboyutlu yüzlerin hacmine ve bu yüzlerdeki dihedral açılara bağlı olarak ifade edebiliriz. Buna göre; 2-eşboyutlu yüzlerin hacmi $V_{n-2}(F)$, bu yüzlerdeki dihedral açıları α_F ve 2-eşboyutlu yüzler üzerinden toplam alınmak üzere; Δ simpleksinin hacminin diferensiyeli;

$$dV_n(\Delta) = \frac{\kappa}{n-1}\sum_{F} V_{n-2}(F)d\alpha_F$$

şeklindedir(1).

Bu formül ilk olarak keyfi boyutlu küresel simpleksler için 1832 de Ludwig Schlafli tarafından ispatlandı. 1936 da ise Helmuth Kneser bu formülün hiperbolik duruma genelleşebilen farklı bir ispatını verdi(2). Daha sonra da (3) de John Milnor aynı formülü hiperbolik manifoldlar üzerindeki simpleksler için vermiştir. Son zamanlarda ise bu formülün hiperbolik 3-manifoldun hacim hesaplarında da kullanıldığı gösterilmiştir(4,5,6). Hiperbolik uzay formlarının hacminin hesaplanması Hodgson' un fikridir(7). Bonahon da (8) de hiperbolik 3-manifoldların konvekslik bölgesinin hacmi için Schlafli diferensiyel formülünü bulmuştur.

Diğer taraftan J.M. Schlenker tarafından yönetilen bazı çalışmalarda; sabit eğrilikli tam yarı-Riemann manifoldların içerdiği simplekslerin hacmi üzerine çalışılmaktadır(9,10). Buna önemli bir örnek olarak S_1^n i verebiliriz; çünkü S_1^n bir sabit eğrilikli Lorentz manifoldudur. Burada S_1^n ve n-boyutlu hiperbolik uzay H^n arasında bir duallik ilişkisi; S_1^n nin her bir v noktasını, H^n de birim normali v olan bir hiperdüzleme karşılık getirmek şeklindedir(11). Bu dualiteden yararlanarak S_1^n

de ki simplekslerin hacmi için Schlafli diferensiyel formülü; hiperbolik simplekslerin hacmi ile hiperdüzlemlerin arakesitlerinin ölçümü arasında bağlantı kurmak için kullanıldı. Bu bağıntı (12) de Santalo tarafından 3-boyutta, integral geometri kullanılarak gösterilmiştir. Bu denklemin bir analoğuda; küresel dörtyüzlünün hacmiyle hiperdüzlemlerin arakesitinin ölçümü arasında bir bağlantı kurar. Bu ilişki de küresel Schlafli diferensiyel formülü kullanılarak Milnor tarafından verilmiştir(3). Bu çalışmada Kneser yöntemiyle Schlafli diferensiyel formülünün psedo-küresel ve psedo-hiperbolik uzaya genelleştirilmiş ispatı verildi. Ayrıca Gauss-Bonnet ve Santalo formüllerinden ortaya çıkan sonuçların ispatında Schlafli diferensiyel formülü kullanıldı.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde çalışmalarımızın tabanını oluşturan simetrik bilineer formlar, yarı-Öklidyen uzaylar, yarı-Riemanyan manifoldlar genel olarak tanıtılacaktır. Bu bölüm için temel referanslarımız; (13), ve (14) nolu kaynaklar olacaktır.

2.1. Simetrik Bilineer Formlar

Tanım 2.1.1. V bir reel vektör uzayı olsun.

$$g : V \times V \to R$$

dönüşümü $\forall a, b \in R$ ve $\forall u, v, w \in V$ için;

(i) $g(u,v) = g(v,u)$

(ii) $g(au + bv, w) = ag(u,w) + bg(v,w)$

$g(u, av + bw) = ag(u,v) + bg(u,w)$

özelliklerine sahip ise bu durumda g dönüşümüne V vektör uzayı üzerinde simetrik bilineer form denir (13,14).

Tanım 2.1.2. V reel vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilineer form g olsun.

(i) $\forall v \in V$ ve $v \neq 0$ için $g(v,v) > 0$ ise g simetrik bilineer formuna pozitif tanımlı,

(ii) $\forall v \in V$ ve $v \neq 0$ için $g(v,v) < 0$ ise g simetrik bilineer formuna negatif tanımlı,

(iii) $\forall v \in V$ ve $v \neq 0$ için $g(v,v) \geq 0$ ise g simetrik bilineer formuna yarı-pozitif tanımlı,

(iv) $\forall v \in V$ ve $v \neq 0$ için $g(v,v) \leq 0$ ise g simetrik bilineer formuna yarı-negatif tanımlı denir.

Tanım 2.1.3. V bir reel vektör uzayı ve $g: V \times V \to R$; V üzerinde simetrik bilineer form olsun.

(i) g nin non-dejenere olması için gerek ve yeter koşul $g(u,v)=0$ ve $\forall v \in V$ için $u=0$ olmasıdır,

(ii) g nin dejenere olması için gerek ve yeter koşul $g(w,v)=0$ ve $\forall v \in V$ için $w \neq 0$ olmasıdır,

(iii) V üzerindeki g non-dejenere simetrik bilineer form V nin bir alt vektör uzayına indirgenebilir. İndirgenen simetrik bilineer form dejenere veya non-dejeneredir(14).

Tanım 2.1.4. V bir reel vektör uzayı ve $g: V \times V \to R$; V üzerinde simetrik bilineer form olsun. V nin sıfır uzayı (radikal veya null uzayı);

$$RadV = \{\xi \in V : g(\xi, v) = 0, v \in V\}$$

şeklinde tanımlanır ve $RadV \subset V$ dir. $RadV$ alt uzayının boyutuna g nin sıfırlık derecesi (nullity degree) denir ve $nullV$ ile gösterilir.

Yukarıdaki tanıma göre; V üzerindeki g simetrik bilineer formunun dejenere (veya non-dejenere) olması için gerek ve yeter koşul $nullV > 0$ (veya $nullV = 0$) olmasıdır(13).

Örnek 2.1.1. 2-boyutlu reel vektör uzayı R^2 ve g simetrik bilineer formu $\forall x, y \in R^2$ için;

$$g: R^2 \times R^2 \to R$$
$$(x,y) \to g(x,y) = -x_1 y_1 + x_2 y_2$$

şeklinde tanımlansın. Buna göre $RadR^2 = \{(0,0)\}$ ve g nin sıfırlık derecesi $nullR^2 = 0$ dır. Yukarıdaki tanım gereğince de g non-dejeneredir.

Tanım 2.1.5 g simetrik bilineer formuna karşılık gelen kuadratik form; $\forall v \in V$ için

$$h : V \to R$$
$$v \to h(v) = g(v,v)$$

şeklinde tanımlı bir dönüşümdür. Bu durumda g, h yardımıyla $\forall v, w \in V$ için;

$$g(v,w) = \frac{1}{2}\{h(v+w) - h(v) - h(w)\} \qquad [2.1]$$

şeklinde ifade edilebilir(14).

V nin bir $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ bazı için; $\lambda_i \in R$ ve v_i ler de v nin E bazına karşılık gelen koordinat bileşenleri olmak üzere;

$$h(v) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (v_i)^2$$

formuna sahiptir. λ_i katsayılarının pozitif, negatif ve sıfır olanlarının sayıları, sırası ile p, q ve r ise bu durumda h ya (p,q,r)-tipindendir denir ve ayrıca $p + q + r = m$ dir (15).

Önerme 2.1.1. V üzerinde g simetrik bilineer formuna ait (p,q,r)-tipinden bir kuadratik form h olsun. Bu durumda;

(i) g nin dejenere (vaya non-dejenere) olması için gerek ve yeter koşul $r > 0 (r = 0)$ olmasıdır,

(ii) g nin pozitif (veya negatif) tanımlı olması için gerek ve yeter koşul $p = m(q = m)$ olmasıdır,

(iii) g nin pozitif (veya negatif) yarı-tanımlı olması için gerek ve yeter koşul $q = 0$, $p > 0,\ r > 0(p = 0,\ q > 0,\ r > 0)$ olmasıdır.

İspat: (15)

Tanım 2.1.6. V nin bir bazı $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ olsun. $b_{ij} = g(e_i, e_j)$ olarak tanımlanan $B = [b_{ij}]_{m\times m}$ matrisine E bazına göre g nin matrisi denir. G simetrik olduğundan B matrisi de simetriktir (14).

Sonuç 2.1.1: V nin herhangi bir e bazına göre g nin matrisi B olsun. g nin non-dejenere (veya dejenere) olması için gerek ve yeter koşul $rankB = m$, $(rankB < m)$ olmasıdır (14).

Tanım 2.1.7. V bir reel vektör uzayı ve $g : V \times V \to R$; V üzerinde bir simetrik bilineer form olsun.

$$g|_W : W \times W \to R$$

negatif tanımlı olacak şekilde en büyük boyutlu W alt uzayının boyutuna, g-simetrik bilineer formunun indeksi denir ve q ile gösterilir. Ayrıca q ya V vektör uzayının da indeksi denir ve $indV = q$ ile gösterilir (14).

Buna göre $1 \le q \le boyV$ dir. $q = 0$ olması için gerek ve yeter koşul g nin pozitif yarı-tanımlı olmasıdır.

2.2. Yarı-Öklid Uzayları

Tanım 2.2.1. V reel vektör uzayı üzerinde bir g non-dejenere, simetrik bilineer formu tanımlanırsa g ye bir skalar çarpım (yarı-Öklid metriği) ve V ye yarı-Öklid uzayı denir. $p.q \neq 0$ ise g ye gerçek yarı-Öklid metriği denir.

Özel olarak g pozitif tanımlı ise, g ye Öklid metriği ve V ye de Öklid uzayı denir. $q = 1$ ise g ye Lorentz (Minkowski) metriği ve V ye de Lorentz uzayı veya Minkowski uzayı denir (14).

Tanım 2.2.2. Bir $v \in V$ vektörü için;

(i) $g(v,v) > 0$ veya $v = 0$ ise v vektörüne uzay benzeri (space-like) vektör,

(ii) $g(v,v) < 0$ ise v vektörüne zaman benzeri (time-like) vektör,

(iii) $g(v,v) = 0$ ise $v \neq 0$ olmak üzere, v vektörüne ışık benzeri (light-like, null veya isotropik) vektör denir(14).

Tanım 2.2.3. V yarı-Öklid uzayı ve g de yarı-Öklid metriği olmak üzere;

(i) $\Gamma_N = \{v \in (V - \{0\}) : g(v,v) = 0\}$ şeklinde tanımlı Γ_N cümlesine V nin ışık konisi,

(ii) $\Gamma_S = \{v \in V : g(v,v) \geq 0\}$ şeklinde tanımlı Γ_S cümlesine V nin uzay konisi,

(iii) $\Gamma_T = \{v \in (V - \{0\}) : g(v,v) < 0\}$ şeklinde tanımlı Γ_T cümlesine V nin zaman konisi denir (14).

Tanım 2.2.4. V yarı-Öklid uzayı ve g yarı-Öklid metriği olmak üzere;

$$\|.\| : V \to R$$

$$v \to \|v\| = |g(v,v)|^{\frac{1}{2}}$$

şeklinde tanımlı fonksiyona norm fonksiyonu denir. $\|v\|$ ya da v nin normu veya v nin boyu denir. Boyu 1 birim olan vektöre de birim vektör denir (14).

Tanım 2.2.5. $u, v \in V$ için $u \neq 0$ ve $v \neq 0$ olmak üzere; $g(u,v) = 0$ ise, bu durumda u ve v vektörlerine ortogonal vektörler denir ve $u \perp v$ şeklinde gösterilir (14).

Teorem 2.2.1. Bir $V \neq \{0\}$ yarı-Öklid uzayı daima bir ortonormal baza sahiptir.

İspat: (14).

Örnek 2.2.1. (n+1)-boyutlu reel vektör uzayı R^{n+1} ve bu uzayın bir ortonormal bazı $E = \{e_0 = (1,0,\dots,0), e_1 = (0,1,0,\dots,0), \dots, e_n = (0,0,\dots,1)\}$ olsun. q indeksi $0 < q < n+1$ olmak üzere; R^{n+1} üzerinde bir yarı-Riemann metrik $\forall x, y \in R^{n+1}$ için

$$g(x,y) = -\sum_{i=0}^{q-1} x_i y_i + \sum_{j=q}^{n} x_j y_j$$

şeklindedir. Bu metrikle birlikte R^{n+1} bir yarı-Öklid uzayı olur ve R_q^{n+1} ile gösterilir. Özel olarak $q = 1$ ise R_1^{n+1} bir Lorentz (Minkowski) vektör uzayıdır.

Tanım 2.2.6. V, R_v^{n+1} nin bir alt vektör uzayı olsun. Bu taktirde V alt vektör uzayına;

(i) Eğer V bir zaman benzeri (time-like) vektöre sahipse V ye zaman benzeri (time-like)

(ii) Eğer V deki sıfır olmayan her vektör uzay benzeri (space-like) ise V ye uzay benzeri (space-like)

(iii) Aksi durumlarda V ye ışık benzeri (ligt-like) denir(16).

Tanım 2.2.7. x ve y , R_v^{n+1} de iki zaman benzeri (time-like) vektör olsun.

$$< x, y >= \|x\|\|y\| ch\varphi(x, y) \qquad [2.2]$$

olacak şekilde bir tek negatif olmayan $\varphi(x, y)$ reel sayısı vardır. Burada $\varphi(x, y)$ ye x ve y arasındaki zaman benzeri (time-like) açı denir(16).

Tanım 2.2.8 x ve y R_v^{n+1} de uzay benzeri (space-like) alt vektör uzayını geren iki uzay benzeri (space-like) vektör olsun.

$$< x, y >= \|x\|\|y\| \cos\varphi(x, y) \qquad [2.3]$$

olacak şekilde bir tek $\varphi(x, y)$ reel sayısı vardır. Burada $\varphi(x, y)$ ye, R_v^{n+1} de x ve y arasındaki uzay benzeri (space-like) açı denir(16).

Tanım 2.2.9. x ve y R_v^{n+1} de zaman benzeri (time-like) alt vektör uzayını geren iki uzay benzeri (space-like) vektör olsun.

$$|< x, y >| = \|x\|\|y\| ch\varphi(x, y) \qquad [2.4]$$

olacak şekilde bir tek pozitif $\varphi(x, y)$ reel sayısı vardır. Burada $\varphi(x, y)$ ye, R_v^{n+1} de x ve y arasındaki zaman benzeri (time-like) açı denir(16).

Tanım 2.2.10. R_v^{n+1} de x bir uzay benzeri (space-like) ve y de bir zaman benzeri (time-like) vektör olsun.

$$|< x, y >| = \|x\|\|y\| sh\varphi(x, y) \qquad [2.5]$$

olacak şekilde bir tek negatif olmayan $\varphi(x,y)$ reel sayısı vardır. Burada $\varphi(x,y)$ ye, R_v^{n+1} de x ve y arasındaki zaman benzeri (time-like) açı denir(16).

Teorem 2.2.2. V vektör uzayı için bir ortonormal baz $\{e_0, e_1, \dots, e_n\}$ olsun. $\varepsilon_i = g(e_i, e_i)$ olmak üzere; $\forall v \in V$ vektörü;

$$v = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon_i g(v, e_i) e_i \qquad [2.6]$$

olacak biçimde tek türlü yazılır.

İspat: (14).

Tanım 2.2.11. (V, g) m-boyutlu yarı-Öklid uzayı ve W da V nin bir alt uzayı olsun. $g|_W$ dejenere ise bu durumda W ya V nin ışıksı veya dejenere alt uzayı denir. Aksi halde W ya V nin non-dejenere alt uzayı denir.

$W^{\perp} = \{v \in V : g(v,w) = 0, \forall w \in W\}$ cümlesine de W nın dik uzayı denir. Genellikle $W \cap W^{\perp} \neq \{0\}$ dır (14).

Önerme 2.2.1. (V, g) m-boyutlu yarı-Öklid uzayı ve W da V nin alt uzayı olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler vardır:

(i) $boyW + boyW^{\perp} = m$,

(ii) $(W^{\perp})^{\perp} = W$,

(iii) $RadW = RadW^{\perp} = W \cap W^{\perp}$.

İspat: (14).

Sonuç 2.2.1. V bir yarı-Öklid uzayı ve W da V nin bir alt uzayı olsun. Aşağıdaki önermeler denktir.

(i) W, V nin bir non-dejenere alt uzayıdır,

(ii) $W^{\perp}$ de V nin bir diğer non-dejenere alt uzaydır,

(iii) W ve $W^{\perp}$; V nin tamamlayıcı (complementary) ortogonal alt uzaylarıdır.

(iv) V; W ve $W^{\perp}$ in ortogonal direk toplamıdır(14).

2.3. Yarı-Riemann Manifoldlar ve Altmanifoldlar

Tanım 2.3.1 M diferensiyellenebilir bir manifold olsun. M üzerinde non-dejenere ve sabit indeksli $(0,2)$-tipinden g tensör alanına bir metrik tensör denir (14).

Başka bir ifadeyle M manifoldunun her p noktasındaki T_pM tanjant uzayına $g|_p$ skalar çarpımı karşılık gelir ve $g|_p$ nin indeksi her $p \in M$ için aynıdır.

Tanım 2.3.2. M diferensiyellenebilir bir manifold ve g de M üzerinde sabit indeksli bir metrik tensör olmak üzere; (M, g) ikilisine bir yarı-Riemann manifold denir (14).

Tanım 2.3.3. (M, g) bir yarı-Riemann manifold olsun. g nin sabit indeksi q ya (M, g) yarı-Riemann manifoldunun indeksi denir. q indeksli ve n-boyutlu bir yarı-Riemann manifold M_q^n ile gösterilir (14).

Tanım 2.3.4. M_q^n bir yarı-Riemann manifold olsun. Eğer $n \geq 2$ ve $q = 1$ ise bu durumda M_1^n yarı-Riemann manifolduna Lorentz manifoldu denir. Özel olarak $q = 0$ ise bu durumda M^n bir Riemann manifoldu ve g de bir Riemann metriğidir(14).

Tanım 2.3.5. M_q^n bir yarı-Riemann manifoldu ve $\alpha : I \subset R \rightarrow M_q^n$ diferensiyellenebilir bir eğri olsun. α nın teğet vektör alanı T olmak üzere;

(i) $g(T,T) > 0$ ise α eğrisine uzay benzeri (space-like) eğri,

(ii) $g(T,T) < 0$ ise α eğrisine zaman benzeri (time-like) eğri,

(iii) $g(T,T) = 0$ ise α eğrisine ışık benzeri (light-like veya null) eğri denir (14).

Eğrinin özel bir hali olan doğruyu göz önüne alalım. Doğrunun doğrultman vektörü uzay benzeri ise, doğru uzay benzeri doğru, doğrultman vektörü zaman benzeri ise, doğru zaman benzeri doğru ve doğrultman vektörü ışık benzeri ise, doğru ışık benzeri olur.

Tanım 2.3.6. M_v^n m-boyutlu ve v-indeksli bir yarı-Riemann manifoldu ve $\overline{M}_q^n$ n-boyutlu ve q-indeksli bir diğer yarı-Riemann manifoldu olsun.

$$f : M_v^m \rightarrow \overline{M}_q^n$$

dönüşümü bir izometrik immersiyon ise $(rankf = m)$ M_v^n ya $\overline{M}_q^n$ nin bir yarı-Riemann altmanifoldu denir (14).

3. HİPERKUADRİKLER

3.1. Hiperkuadrikler ve Özellikleri

f fonksiyonu

$$\begin{aligned} f : R_\nu^{n+1} \times R_\nu^{n+1} &\to R \\ (u,v) &\to f(u,v) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı bir simetrik bilineer form olsun. $q \in F\left(R_\nu^{n+1}\right)$ ve $F\left(R_\nu^{n+1}\right) = \left\{q \middle| q : R_\nu^{n+1} \to R, q(u) = f(u,u)\right\}$ olacak şekildeki q fonksiyonu doğal koordinatlarda;

$$q(u) = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon_i (u^i)^2 = -\sum_{i=0}^{\nu-1} (u^i)^2 + \sum_{j=\nu}^{n} (u^i)^2 \qquad [3.1]$$

şeklinde tanımlanır.

<u>*Tanım 3.1.1*</u> $r > 0$ ve $\varepsilon = \pm 1$ olmak üzere;

$$Q = q^{-1}(\varepsilon r^2) = \left\{x \in R_\nu^{n+1} \middle| q(x) = \varepsilon r^2\right\} \qquad [3.2]$$

kümesi R_ν^{n+1} de bir semi-Riemannyan hiperyüzey belirtir. Bu hiperyüzeylere, R_ν^{n+1} nin hiperkuadrikleri denir. $\varepsilon = 1$ ve $\varepsilon = -1$ durumlarına göre R_ν^{n+1} de iki aileye ayrılırlar. Ayrıca $\Lambda = q^{-1}(0) - \{0\}$ olması durumu da R_ν^{n+1} de ışık benzeri (null) koni olarak adlandırılır(14).

<u>*Tanım 3.1.2.*</u> $n \geq 2$ ve $0 \leq \nu \leq n$ olmak üzere;

$$S_\nu^n(r) = q^{-1}(r^2) = \{p \in R_\nu^{n+1} : <p,p>= r^2\} \qquad [3.3]$$

kümesine R_ν^{n+1} de ν-indeksli n-boyutlu $r > 0$ yarıçaplı psedoküre denir(14).

Tanım 3.1.3. $n \geq 2$ ve $0 \leq \nu \leq n$ olmak üzere;

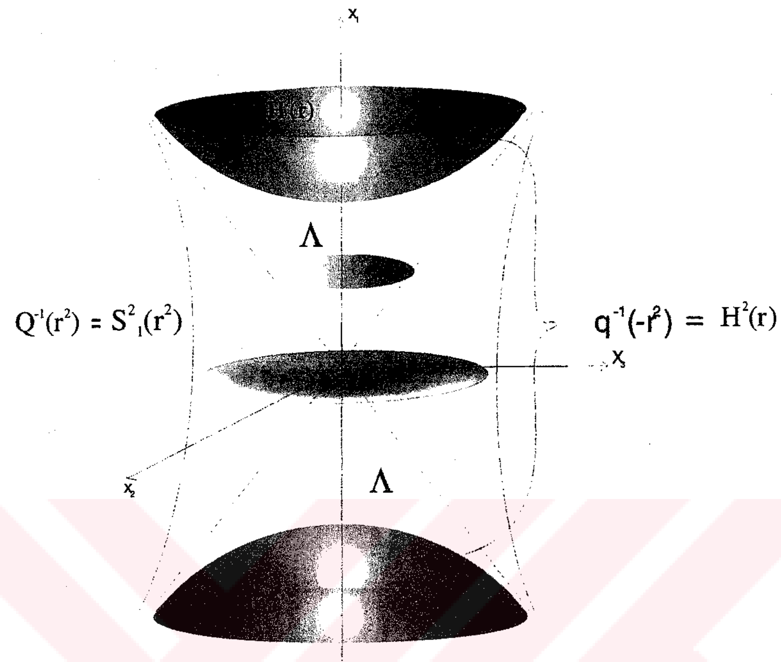
$$H_\nu^n(r) = q^{-1}(-r^2) = \{p \in R_{\nu+1}^{n+1} : <p,p>= -r^2\} \qquad [3.4]$$

kümesine $R_{\nu+1}^{n+1}$ de ν-indeksli n-boyutlu $r > 0$ yarıçaplı psedohiperbolik uzay denir(14).

R_ν^{n+1} deki psedoküreler ν-indeksli iken psedohiperbolik uzaylar ise $(\nu-1)$-indeksli hiperkuadriklerdir. $\varepsilon = \pm 1$ olmak üzere ε ile belirtilmiş R_ν^{n+1} nin hiperkuadrikleri genel olarak aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$Q_\nu^n(\varepsilon) = \{x \in R_\nu^{n+1} : <x,x>= \varepsilon r^2\} \qquad [3.5]$$

Bu gösterimler altında hiperkuadriklerin önemli örnekleri; $Q_0^n(1)$ ile S^n n-boyutlu küresini, $Q_1^n(-1)$ ile H_0^n n-boyutlu psedohiperbolik uzayı göstermekte olup, H^n bunun iki bileşeninden birisidir. $Q_1^n(1)$ ile de S_1^n n-boyutlu de Sitter küresi gösterilir.



Şekil 3.1. 3- boyutlu uzayda hiperkuadrikler.

Önerme3.1.1. R_v^{n+1} de bir Λ ışık benzeri (null) koni bir hiperyüzeydir, skalar çarpım altında invaryanttır ve $(R^v - 0) \times S^{n-v}$ ye diffeomorfiktir. R_v^{n+1} nün yer vektörü olan P, Λ ışık benzeri (null) konisine hem teğet hem de normaldir. Bundan dolayı Λ ışık benzeri (null) konisi yarı-riemannyan değildir(14).

İspat: $\Lambda = q^{-1}(0) - \{0\} = \{w \in R_v^{n+1} | q(w,w) = 0\}$ şeklinde tanımlıdır. $gradq = 2P \neq 0$ olduğundan Λ bir hiperyüzeydir ve $gradq \perp \Lambda$ dır. Dolayısıyla P de Λ ya diktir. $\forall w \in \Lambda$ için orjin ve ışık benzeri (null) koniyi birleştiren $\overrightarrow{Ow} = P_w$, w yı kendisine teğet kabul eden Λ nın bir esas doğrusu vardır. Dolayısıyla P_w, Λ ya teğettir. Buradan $\underline{P}$ yer vektörü Λ ışık benzeri (null) konisine teğettir. O halde Φ dönüşümü;

$$\Phi : (R^{\nu} - 0) \times S^{n-\nu} \rightarrow R_{\nu}^{n+1}$$

$$(x,p) \rightarrow \Phi(x,p) = \left(x_0, x_1, \ldots, x_{\nu-1}, \|x\| p_1, \|x\| p_2, \ldots, \|x\| p_{n-\nu+1}\right)$$

şeklinde tanımlanırsa;

$$\begin{aligned} <\Phi(x,p), \Phi(x,p)> &= -\sum_{i=0}^{\nu-1} x_i^2 + \|x\|^2 \sum_{i=1}^{n-\nu+1} p_i^2 \\ &= -\|x\|^2 + \|x\|^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

bulunur ve $\Phi(x,p) \in \Lambda$ dır. Φ dönüşümü bire-bir ve örtendir. Φ nin bileşenleri koordinat fonksiyonları olduğundan diferensiyellenebilirdir. Φ^{-1} dönüşümü;

$$\Phi^{-1} : \Lambda \rightarrow (R^{\nu} - 0) \times S^{n-\nu}$$

$$y \rightarrow \Phi^{-1}(y) = (y_0, y_1, \ldots, y_{\nu-1}, \frac{1}{\sum_{j=\nu}^{n} y_j^2}(y_\nu, y_{\nu+1}, \ldots, y_n))$$

şeklinde tanımlı olup, Φ^{-1} dönüşümünün bileşenleri diferensiyellenebilir olduğundan Φ^{-1} dönüşümü de diferensiyellenebilirdir. O halde Φ bir diffeomorfizmdir. $\underline{P}$ yer vektörü Λ ya hem teğet hem de normaldir. $\forall w \in \Lambda$ için, $<w, P>= 0$ iken $P \neq 0$ olduğundan non-dejenere değildir. Bundan dolayı Λ null konisi yarı-Riemann değildir.

Önerme3.1.2 $r > 0$ yarıçaplı psedoküre (psedohiperbolik uzay) ile birim psedoküre (birim psedohiperbolik uzay) homotetiktir(14).

<u>*İspat:*</u> $\Psi : R_\nu^{n+1} \to R_\nu^{n+1}$ dönüşümü tanımlansın. Buna göre;

$$\Psi|_{S_\nu^n(1)} : S_\nu^n(1) \to S_\nu^n(r)$$
$$p \to rp = (rp_0, rp_1, \dots, rp_n)$$
$$= (ry_0, ry_1, \dots, ry_n)$$

şeklindedir. $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, $S_\nu^n(1)$ in ve $\{y_0, y_1, \dots, y_n\}$ de $S_\nu^n(r)$ nin koordinat fonksiyonu olsun.

$$J_{\Psi|_{S_\nu^n(1)}} = \left[\frac{\partial \Psi_i}{\partial x_j}\right] = \left[\frac{\partial (rx_i)}{\partial x_j}\right]$$
$$= [r\delta_{ij}] = rI$$

olduğundan $\Psi|_{S_\nu^n(1)}$ dönüşümü diferensiyellenebilir. Ayrıca $\Psi|_{S_\nu^n(1)}$ bire-bir ve örtendir. $\Psi|^{-1}{}_{S_\nu^n(1)}$ dönüşümü de difrensiyellenebilir olduğundan $\Psi|_{S_\nu^n(1)}$ bir diffeomorfizmdir. Sonuç olarak $\Psi|_{S_\nu^n(1)}$ bir homotetidir.

<u>*Not:*</u> Hiperkuadrikler üzerinde çalışırken; sadelik açısından herhangi bir hiperkuadrik yerine ona homotetik olan birim hiperkuadrik üzerinde çalışacağız.

$S_\nu^n(r)$ psedoküresi bir $H_{n-\nu}^n(r)$ psedohiperbolik uzaya aşağıdaki gibi homotetiktir.

<u>*Lemma 3.1.1.*</u> $p = (p_0, p_1, \dots p_n) \in R_\nu^{n+1}$ olmak üzere;

$$\sigma : R_\nu^{n+1} \to R_{n-\nu+1}^{n+1}$$
$$p \to \sigma(p) = (p_\nu, p_{\nu+1}, \dots, p_n, p_0, p_1, \dots, p_{\nu-1})$$

şeklinde tanımlı dönüşüm anti-izometridir ve her $S_\nu^n(r)$ psedoküresini anti-izometrik olarak $H_{n-\nu}^n(r)$ psedohiperbolik uzaya taşır. σ^{-1} de $H_{n-\nu}^n(r)$ yi anti-izometrik olarak $S_\nu^n(r)$ psedoküresine taşır(14).

İspat: σ ; bire-bir, örten ve diferensiyellenebilirdir.

$$\sigma^{-1} : R_{n-\nu+1}^{n+1} \rightarrow R_\nu^{n+1}$$
$$q \rightarrow \left(q_{n-\nu+1}, q_{n-\nu+2}, \ldots, q_n, q_0, q_1, \ldots, q_{n-\nu}\right)$$

şeklinde tanımlı olup σ^{-1} de diferensiyellenebilir. Dolayısıyla σ bir diffeomorfizmdir. $\forall p \in R_\nu^{n+1}$ için;

$$\begin{aligned} < \sigma(p), \sigma(p) > &= < \left(p_\nu, p_{\nu+1}, \ldots, p_n, p_0, p_1, \ldots, p_{\nu-1}\right), \left(p_\nu, p_{\nu+1}, \ldots, p_n, p_0, p_1, \ldots, p_{\nu-1}\right) > \\ &= -\sum_{j=\nu}^{n} (p_j)^2 + \sum_{i=0}^{\nu-1} (p_i)^2 \\ &= - < p, p > \end{aligned}$$

olduğundan σ bir anti izometridir. $\forall p \in S_\nu^n(r)$ için;

$$\begin{aligned} < \sigma(p), \sigma(p) > &= - < p, p > \\ &= -r^2 \end{aligned}$$

dır. Dolayısıyla $\sigma(p) \in H_{n-\nu}^n(r)$ olduğundan $\sigma, S_\nu^n(r)$ yi $H_{n-\nu}^n(r)$ ye taşır. $\forall q \in H_{n-\nu}^n(r)$ için;

$$\begin{aligned} < \sigma^{-1}(q), \sigma^{-1}(q) > &= - < q, q > \\ &= r^2 \end{aligned}$$

olur ve $\sigma^{-1}(q) \in S_\nu^n(r)$ olduğundan σ^{-1}, $H_{n-\nu}^n(r)$ yi $S_\nu^n(r)$ ye taşır.

<u>*Lemma 3.1.2.*</u> $S_\nu^n(r)$ psedoküresi, $R^\nu \times S^{n-\nu}$ ye ve $H_\nu^n(r)$ psedohiperbolik uzayıda $S^\nu \times R^{n-\nu}$ ye diffeomorfiktir(14).

<u>*İspat:*</u> $\forall x \in R^\nu$ ve $\forall p \in S^{n-\nu}$ olmak üzere;

$$\Phi : R^\nu \times S^{n-\nu} \to S_\nu^n \subset R_\nu^{n+1}$$

$$(x,p) \to \left(x, \left(r^2 + \|x\|^2\right)^{1/2} p \right)$$

dönüşümü tanımlansın. Buna göre;

$$\begin{aligned} < \Phi(x,p), \Phi(x,p) > &= -\sum_{i=0}^{\nu-1} x_i^2 + (r^2 + \|x\|^2) \sum_{i=1}^{n-\nu+1} p_i^2 \\ &= -\|x\|^2 + r^2 + \|x\|^2 \\ &= r^2 \end{aligned}$$

bulunur. Buradan da; $\Phi(x,p) \in S_\nu^n(r)$ dir. Φ dönüşümü bire-bir, örten ve diferensiyellenebilirdir. Φ^{-1} dönüşümü;

$$\Phi^{-1} : S_\nu^n \to R^\nu \times S^{n-\nu}$$

$$\begin{aligned} y \to \Phi^{-1}(y_0, y_1, \ldots, y_{\nu-1}, y_\nu, \ldots, y_n) &= \Phi^{-1}(x_0, x_1, \ldots, x_{\nu-1}, q_\nu, \ldots, q_n) \\ &= \left(x, \left(r^2 + \|x\|^2\right)^{-1/2} q \right) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı olup Φ^{-1} diferensiyellenebilirdir. O halde Φ bir diffeomorfizmdir. Bu sonuçtan Φ dönüşümünün $R^\nu \times S^{n-\nu}$ yi S_ν^n nün içine taşıdığı görülür.

$H^n_\nu(r)$ psedohiperbolik uzayının $S^\nu \times R^{n-\nu}$ ye diffeomorfik olduğunu göstermek için $\forall p \in S^\nu$ ve $\forall x \in R^{n-\nu}$ olmak üzere;

$$\Psi : S^\nu \times R^{n-\nu} \to H^n_\nu(r) \subset R^{n+1}_{\nu+1}$$
$$(p,x) \to \left(\left(r^2 + \|x\|^2\right)^{1/2} p, x \right)$$

dönüşümü tanımlansın.

$$\begin{aligned} <\Psi(p,x), \Psi(p,x)> &= -\left(r^2 + \|x\|^2\right) \sum_{i=0}^{\nu} p_i^2 + \sum_{i=1}^{n-\nu} x_i^2 \\ &= -r^2 - \|x\|^2 + \|x\|^2 \\ &= -r^2 \end{aligned}$$

olduğundan $\Psi(p,x) \in H^n_\nu(r)$ dir. Ψ dönüşümü bire-bir, örten ve diferensiyellenebilirdir. Ψ^{-1} dönüşümü;

$$\Psi^{-1} : H^n_\nu \to S^\nu \times R^{n-\nu}$$
$$\left(q_0, q_1, \ldots, q_{\nu-1}, x_\nu, \ldots, x_n\right) \to \left(\left(r^2 + \|x\|^2\right)^{-1/2} q, x \right)$$

şeklinde tanımlı olup diferensiyellenebilir olduğundan Ψ bir diffeomorfizmdir. O halde $H^n_\nu(r)$ ile $S^\nu \times R^{n-\nu}$ birbirine diffeomorftur.

<u>*Sonuç 3.1.1.*</u> S^0 aşağıda ifade edildiği gibi iki noktayı göstermektedir.

$$\begin{aligned} S^0 &= \{p \in R \,|\, <p,p> = 1\} \\ &= \{-1, 1\} \end{aligned}$$

$H_0^n(r)$ nin iki farklı bileşene sahip olduğu;

$$\begin{aligned} H_0^n(r) &\cong S^0 \times R^n \\ &= \{-1,1\} \times R^n \\ &= \left(\{-1\} \times R^n\right) \times \left(\{1\} \times R^n\right) \end{aligned}$$

şeklinde gösterilir. Buna göre; $\left(\{-1\} \times R^n\right)$ ve $\left(\{1\} \times R^n\right)$ $H_0^n(r)$ nin bileşenleridir. Bu bileşenler R_v^n ye diffeomorfturlar. R^n bağlantılı olduğundan $H_0^n(r)$ nin bileşenleri de bağlantılıdır. Bu bileşenler

$$\begin{aligned} &\Phi : R_1^{n+1} \to R_1^{n+1} \\ &(p_0, p_1, \dots, p_n) \to (-p_0, p_1, \dots, p_n) \end{aligned}$$

izometrisi altında kongruenttir. Fakat H^0 bir tek nokta olarak kabul edilmiştir.

Tanım 3.1.4. R_1^{n+1} de n-boyutlu $H_0^n(r)$ psedohiperbolik uzayının $(r,0,0,\dots,0)$ dan geçen bileşenine üst bileşen, $(-r,0,0,\dots,0)$ dan geçen bileşenine alt bileşen denir(14).

Önerme.3.1.3. γ, $S_v^n(r) \subset R_v^{n+1}$ in sabit olmayan bir geodeziği olsun.

(1) γ zaman benzeri (time-like) ise R_v^{n+1}de bir hiperbolün tek kanadının bir parametrizasyonudur.

(2) γ ışık benzeri (null) ise R_v^{n+1} nin bir doğrusudur, yani geodeziğidir.

(3) γ uzay benzeri (space-like) ise R_v^{n+1} de bir elipsin periyodik bir parametrizasyonudur(14).

<u>İspat:</u> $p \in S = S_v^n$ ve Π, R_v^{n+1} de p den ve orjinden geçen bir düzlem olsun. g, R_v^{n+1} nün skalar çarpımı ise o zaman p uzay benzeri (space-like) olduğundan $g|_\Pi$ için üç durum söz konusudur.

(i) $g|_\Pi$ pozitif tanımlıdır. O zaman $\Pi \cap S$, $\Pi \approx R^2$ de bir çemberdir. Gerçekten $\{e_1, e_2\}$, Π için bir ortonormal baz ise $ae_1 + be_2$ nin $S = \{v \in R^{n+1} | < v, v >= r^2\}$ de bir nokta olabilmesi için gerek ve yeter koşul $a^2 + b^2 = r^2$ olmasıdır. $\alpha(t) = r\cos te_1 + r\sin te_2$, $\Pi \cap S$ nin sabit hız paremetrizasyonudur.

$$
\begin{aligned}
<\dot{\alpha}, \dot{\alpha}> &= <(-r\sin t, r\cos t), (-r\sin t, r\cos t)> \\
&= r^2
\end{aligned}
$$

olup α eğrisi uzay benzeri (space-like) dir. Ayrıca P_α, yer vektörünün α ya kısıtlanmışı olmak üzere;

$$
\begin{aligned}
\ddot{\alpha} = \overline{D}_{\dot{\alpha}}\dot{\alpha} &= \overline{D}_{\dot{\alpha}}(-r\sin te_1 + r\cos te_2) \\
&= -r\cos te_1 - r\sin te_2 \\
&= -(r\cos te_1 + r\sin te_2) \\
&= -P_\alpha
\end{aligned}
$$

(ii) $g|_\Pi$ non-dejenere ve indeksi 1 dir. $\{e_0, e_1\}$, Π için $p = re_1$ ve e_0 zaman benzeri (time-like) olacak şekilde bir ortonormal baz olsun. $ae_0 + be_1 \in \Pi$ noktasının S de bir nokta olabilmesi için gerek ve yeter koşul $-a^2 + b^2 = r^2$ olmasıdır. $\Pi \cap S$, $\Pi \approx R_1^2$ de bir hiperboldür. P den geçen kanat $\alpha(t) = rshte_0 + rchte_1$ sabit hız paremetrizasyonuna sahiptir.

$$
\begin{aligned}
<\dot{\alpha}, \dot{\alpha}> &= -r^2ch^2t + r^2sh^2t \\
&= -r^2(ch^2t - sh^2t)
\end{aligned}
$$

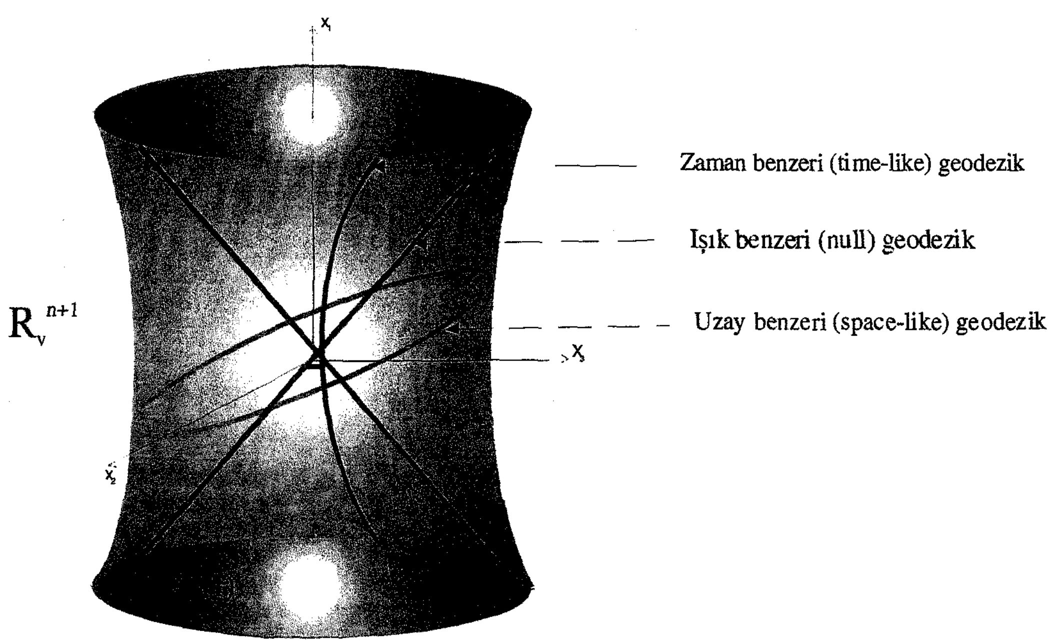
$$= -r^2$$

olduğundan α zaman benzeri (time-like) dir. Bu nedenle;

$$\ddot{\alpha} = \overline{D}_{\dot{\alpha}}\dot{\alpha} = rshte_0 + rchte_1$$
$$= P_\alpha$$

$\ddot{\alpha}$, S ye normal ve α, S de geodeziktir.

(iii) $g|_\Pi$, 1-boyutlu ışık benzeri (null) uzayı ile dejeneredir. Böylece ışık benzeri (null) uzayda $v \neq 0$ ise v ışık benzeri (null) vektördür. $\{p, v\}$, Π nin bir bazı olsun. $ap + bv \in \Pi$ nin S de bir nokta olabilmesi için gerek ve yeter koşul $a = \pm 1$ olmasıdır. $\Pi \cap S$, birbirine paralel iki doğrudan meydana gelir. $\alpha(t) = p + tv$ orjinden ve p den geçen ve $\dot{\alpha}(t) = v$ olduğundan α eğrisi ışık benzeri (null) olur. Ayrıca $\dot{\alpha}(0) = v_p$ ve α ışık benzeri (null) geodeziktir.



Şekil 3.2. 3-boyutlu uzayda geodezikler.

Önerme 3.1.4. $n \geq 2$ ve $0 \leq \nu \leq n$ olmak üzere;

(1) $S_\nu^n(r)$ psedoküresi $K = \frac{1}{r^2}$ pozitif sabit eğriliği olan bir tam yarı-Riemann manifoldudur.

(2) $H_\nu^n(r)$ psedohiperbolik uzay $K = -\frac{1}{r^2}$ negatif sabit eğriliği olan bir tam yarı-Riemann manifoldudur(14).

Hiperkuadriklerin tamamı basit irtibatlıdır(14). $Q_q^n(\varepsilon)$ hiperkuadriğinin herhangi bir bağlantılı bileşenini $S_q^n(\varepsilon)$ ile gösterilecek ve $S_q^n(\varepsilon)$ nu n-boyutlu hiperkuadrik olarak adlandırılcaktır. R_q^{n+1} de bir lineer yarı-uzayı, sınırlı-kapalı yarı-uzaylarda olduğu gibi R_q^{n+1} nun hiperdüzlemi olacak şekilde tanımlanacaktır.

3.2. Simplektik Koni ve n-Simpleks

Tanım 3.2.1. R_q^{n+1} de n≥2 , (n+1)-lineer yarı-uzayın arakesitine simplektik koni denir. Bu simplektik koniyi C ile gösterecek olursak, R_q^{n+1}nun herhangi bir $\{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$ bazı için R_q^{n+1} da her C simplektik konisi;

$$C = \{x_0 v_0 + x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n | x_0 \geq 0, x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0\} \qquad [3.6]$$

şeklinde gösterilir(17).

Tanım 3.2.2. Sınırlı hiperdüzlemlerin k-tanesinin C simplektik konisiyle arakesitine; C simplektik konisinin k-eşboyutlu yüzü denir. C simplektik konisinin k-eşboyutlu yüzü;

$$C_{i_1,i_2,\dots,i_k} = \{x_0 v_0 + x_1 v_1 + \dots + x_n v_n | x_0 \geq 0, x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0; x_{i_k} = x_{i_2} = \dots = x_{i_k} = 0\}$$

[3.7]

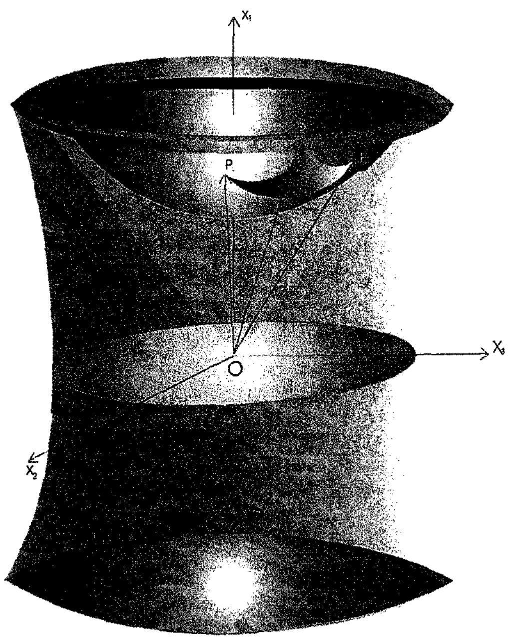
şeklinde gösterilir(17).

$S_q^n(\varepsilon)$ hiperkuadriğiyle keyfi simplektik C konisinin arakesiti boş yada kompakt olmayabilir. Biz bu durumları incelemeyeceğiz.

Tanım 3.2.3. $S_q^n(\varepsilon)$ n-boyutlu hiperkuadriğinde; $S_q^n(\varepsilon)$ ile bir simplektik C konisinin boştan farklı ve kompakt arakesitine bir n-simpleks denir(17). Bir $\Delta \subset S_q^n(\varepsilon)$ n-simpleksi; $\{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ R_q^{n+1} nun bir bazı, $x_0 \geq 0, x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$ ve hepsi birden sıfıra eşit olmamak üzere; $< x_0 v_0 + x_1 v_1 + \dots + x_n v_n, x_0 v_0 + x_1 v_1 + \dots + x_n v_n > > 0$ için

$$\Delta = \{x_0 v_0 + x_1 v_1 + \dots + x_n v_n | x_0 \geq 0, x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0\} \cap S_q^n(\varepsilon) \qquad [3.8]$$

şeklindedir. Buda kısaca; $\Delta = C \cap S_q^n(\varepsilon)$ şeklinde gösterilir.



Şekil 3.3. Hiperbolik uzayda 2-simpleks

Tanım 3.2.4. (k=0,1,...,n) olmak üzere; C simplektik konisinin k-eşboyutlu yüzüyle $S_q^n(\varepsilon)$ nun arakesitine $\Delta \subset S_q^n(\varepsilon)$ n-simpleksinin k-eşboyutlu bir yüzü denir. Δ n-simpleksinin k-eşboyutlu yüzleri;

$$F_{i_1,i_2,\ldots,i_k} = \{x_0 v_0 + x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n \mid x_0 \geq 0, x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0; x_{i_1} = x_{i_2} = \ldots = x_{i_k} = 0\} \cap S_q^n(\varepsilon) \qquad [3.9]$$

şeklindedir. Buda kısaca; $F_{i_1,i_2,\ldots,i_k} = C_{i_1,i_2,\ldots,i_k} \cap S_q^n(\varepsilon)$ şeklinde gösterilir(17).

C nin tüm k-eşboyutlu $C_{i_1,i_2,\ldots,i_k}$ yüzleri R_q^{n+1} nun (n+1-k)-boyutlu lineer alt uzaylarını gerer ve bu uzay $< C_{i_1,i_2,\ldots,i_k} >$ ile gösterilsin. Eğer bu uzayda indirgenmiş metrik ν-indeksli non-dejenere ise bu taktirde $< C_{i_1,i_2,\ldots,i_k} > \cap S_q^n(\varepsilon)$, $S_\nu^{n-k}(\varepsilon)$ tipinden (n-k)-boyutlu bir hiperkuadriktir ve bu $\Delta = C \cap S_q^n(\varepsilon)$ nın bir yüzüne karşılık gelir. O halde; $F_{i_1,i_2,\ldots,i_k} = C_{i_1,i_2,\ldots,i_k} \cap S_q^n(\varepsilon)$ bu hiperkuadrik içinde (n-k)-boyutlu bir simplekstir. Eğer $< C_{i_1,i_2,\ldots,i_k} >$ deki indirgenmiş metrik dejenere ise bu taktirde Δ nın yüzüde $S_q^n(\varepsilon)$ nun bir altmanifoldu gibi dejenere metriğe sahiptir(17).

4. HACİM ELEMANI VE KOORDİNAT DÖNÜŞÜMLERİ

4.1. Hacim Elemanı

$(n+1)$-boyutlu V skalar çarpım uzayı üzerinde bir hacim elemanı $(n+1)$-tane $v_0, v_1, \ldots, v_n \in V$ vektörleri ile belirlenmiş paralel yüzün hacmini veren multineer w fonksiyonu ile belirlenir. Buna göre aşağıdaki tanımı verebiliriz

Tanım 4.1.1. Bir n-boyutlu M semi-Riemannyan manifoldu üzerinde M nin her çatısı için $w(e_1, e_2, \ldots, e_n) = \pm 1$ olacak şekildeki sürekli w, n-formuna bir hacim elemanı denir(14).

Lemma 4.1.1. ξ, U üzerinde koordinat sistemi olmak üzere w_ξ,

$$w_\xi(\partial_1, \partial_2, \ldots, \partial_n) = \left|\det(g_{ij})\right|^{1/2} \qquad [4.1]$$

olacak şekildeki bir hacim elementidir(14).

İspat: U üzerindeki $V_1, V_2, \ldots, V_n$ vektör alanı için $V_j = \sum_{i=1}^{n} V_j^i \partial_i$ şeklinde yazabiliriz. $w_\xi(\partial_1, \partial_2, \ldots, \partial_n) = \left|\det(g_{ij})\right|^{1/2}$ olmak üzere determinantın özelliklerinden ve w_ξ nin U üzerinde bir n-form olduğundan

$$\begin{aligned} w_\xi(V_1, V_2, \ldots, V_n) &= w_\xi\left(\sum_{j=1}^{n} V_1^j \partial_j, \ldots, \sum_{j=1}^{n} V_n^j \partial_j\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} V_1^j .. V_n^j w_\xi(\partial_1, \partial_2, \ldots, \partial_n) \\ &= \det(V_i^j)\left|\det(g_{ij})\right|^{1/2} \end{aligned}$$

elde edilir. $V_1, V_2, \ldots, V_n$ bir çatı alanı olsun. Buradan;

$$\begin{aligned}\delta_{ij}\varepsilon_j &= < V_i, V_j > \\ &= < \sum_{r=1}^{n} V_i^r \partial_r, \sum_{s=1}^{n} V_j^s \partial_s > \\ &= \sum_{\substack{r=1 \\ s=1}}^{n} V_i^r g_{rs} V_j^s\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Eşitliğin iki yanında da determinant alınırsa;

$$(-1)^v = \left(\det\left(V_j^i\right)\right)^2 \det\left(g_{ij}\right)$$

elde edilir. Buradan da;

$$\begin{aligned}w_\xi(V_1, V_2, \ldots, V_n) &= \det\left(V_j^i\right)\left|\det\left(g_{ij}\right)\right|^{1/2} \\ &= \pm 1\end{aligned}$$

olduğu görülür.

Yukarda bulunan eşitliğin diferensiyel form notasyonlarında ki ifadesi $|g| = \left|\det\left(g_{ij}\right)\right|$ olmak üzere;

$$w_\xi = |g|^{1/2} dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_n \qquad [4.2]$$

şeklindedir(14).

Lemma 4.1.2 Bir semi-Riemannyan M manifoldunun (global) bir hacim elemanına sahip olması için gerek yeter koşul M nin yönlendirilebilir olmasıdır(14).

İspat: w bir hacim elemanı ise $T_p(M)$ nin $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ bir bazı için $\lambda(p) = w(v_1, v_2, ..., v_n) > 0$ olacak şekilde $\lambda(p)$ sürekli fonksiyonu $T_p(M)$ nin bir yönlendirmesini oluşturur.

Eğer M yönlendirilmiş ise buradan bütün pozitif yönlendirilmiş ξ koordinat sistemleri için w_ξ lokal hacim elemanı üst üste çakışacaktır. Bu nedenle bu da bir global hacim elemanını verir. Aslında determinant formülünden;

$$w_\eta = Jw_\xi \qquad [4.3]$$

dir(14).

4.2. Koordinat Dönüşümleri:

$\{e_0, e_1, ..., e_n\}$, $<e_j, e_j> = \pm 1$ ve $<e_j, e_j> = -1 \quad 0 \le j \le v-1$ olacak şekilde R_v^{n+1} in bir ortogonal bazı olsun. $x \in R_v^{n+1}$ için

$$x = \sum_{i=0}^{n} x_i e_i \qquad [4.4]$$

yazılımı tek olarak vardır(14). R_v^{n+1} de koordinat dönüşümlerini elde ederken $x \in R_v^{n+1}$ nin iki farklı durumu söz konusudur.

1. Durum. $x \in R_v^{n+1}$ bir zaman benzeri (time-like) vektör ise $<x, x> \; < 0$ dır. Açık olarak yazılırsa;

$$<x, x> = -\sum_{i=0}^{v-1} x_i^2 + \sum_{i=v}^{n} x_i^2 = -r^2 \qquad [4.5]$$

şeklindedir. $r(x)=\sqrt{|<x,x>|}$, $i=0,1,\ldots,n-2$ için $\varphi_i\in[0,\pi]$; ve $\varphi_{n-1}\in[0.2\pi]$ olmak üzere; x in yeni koordinatla ifade edilmesi $i<n-1$ için, $\eta:R_v^{n+1}\times R_v^{n+1}\to R$ olmak üzere;

$$\begin{aligned}\eta_i(x)&=\eta(e_i,x_0e_0+x_1e_1+\ldots+x_ne_n)\\&=<e_i,x_ie_i+x_{i+1}e_{i+1}+\ldots+x_ne_n>\end{aligned}$$

olacak şekilde dönüşümler tanımlansın(16). İşlemlerin sadeliği için

$$x_ie_i+x_{i+1}e_{i+1}+\ldots+x_ne_n=x^{(i)}$$

ile gösterilirse;

$$\begin{aligned}\eta_0&=\eta(e_0,x_0e_0+x_1e_1+\ldots+x_ne_n)\\&=<e_0,x^{(0)}>\\&=-x_0\end{aligned}\qquad[4.6]$$

olur. e_0 ve $x^{(0)}$ zaman benzeri (time-like) olduğundan

$$\begin{aligned}<e_0,x^{(0)}>&=-|e_0||x^{(0)}|ch\varphi_0\\&=-rch\varphi_0\end{aligned}\qquad[4.7]$$

bulunur. [4.6] ve [4.7] den

$$x_0=rch\varphi_0\qquad[4.8]$$

elde edilir. η_1 için

$$\eta_1=\eta(e_1,x_1e_1+x_2e_2+\ldots+x_ne_n)$$

$$=< e_1, x^{(1)} >$$
$$= -x_1 \qquad [4.9]$$

olur. Bununla birlikte;

$$x^{(1)} = x^{(0)} - x_0 e_0$$

olduğuna göre;

$$\begin{aligned} < x^{(1)}, x^{(1)} > &=< x^{(0)} - x_0 e_0, x^{(0)} - x_0 e_0 > \\ &=< x^{(0)}, x^{(0)} > -2x_0^2 < e_0, e_0 > + x_0^2 < e_0, e_0 > \\ &=< x^{(0)}, x^{(0)} > + x_0^2 \\ &= -r^2 + r^2 ch^2 \varphi_0 \\ &= r^2\left(-1 + ch^2 \varphi_0\right) \\ &= r^2 sh^2 \varphi_0 > 0 \end{aligned}$$

olur ki $x^{(1)}$ vektörü uzay benzeri (space-like)dir ve $\left|x^{(1)}\right| = rsh\varphi_0$ olur. e_1 zaman benzeri (time-like) olduğuna göre;

$$\begin{aligned} < e_1, x^{(1)} > &= -\left|e_1\right|\left|x^{(1)}\right| sh\varphi \\ &= -rsh\varphi_0 sh\varphi_1 \end{aligned} \qquad [4.10]$$

bulunur. [4.9] ve [4.10] eşitliklerinden;

$$x_1 = rsh\varphi_0 sh\varphi_1 \qquad [4.11]$$

elde edilir. η_2 için;

$$\eta_2 = \eta(e_2, x_2 e_2 + x_3 e_3 + \ldots + x_n e_n)$$

$$=< e_2, x^{(2)} >$$
$$= -x_2 \qquad [4.12]$$

olur. Aynı zamanda;

$$x^{(2)} = x^{(1)} - x_1 e_1$$

olduğuna göre;

$$\begin{aligned} < x^{(2)}, x^{(2)} > &= < x^{(1)}, x^{(1)} > + x_1^2 \\ &= r^2 sh^2\varphi_0 + r^2 sh^2\varphi_0 sh^2\varphi_1 \\ &= r^2 sh^2\varphi_0 \left(1 + sh^2\varphi_1\right) \\ &= r^2 sh^2\varphi_0 ch^2\varphi_1 > 0 \end{aligned}$$

olup $x^{(2)}$ vektörü uzay benzeri (space-like)dir ve $|x_2| = rsh\varphi_0 ch\varphi_1$ olur. e_2 zaman benzeri (time-like) olduğundan;

$$\begin{aligned} < e_2, x^{(2)} > &= -|e_2|\,|x^{(2)}|\,sh\varphi_2 \\ &= -rsh\varphi_0 ch\varphi_1 sh\varphi_2 \end{aligned} \qquad [4.13]$$

bulunur. [4.12] ve [4.13] ten

$$x_2 = rsh\varphi_0 ch\varphi_1 sh\varphi_2 \qquad [4.14]$$

elde edilir. η_3 için

$$\eta_3 = \eta(e_3, x_3 e_3 + x_4 e_4 + \ldots + x_n e_n)$$
$$=< e_3, x^{(3)} >$$
$$= -x_3 \qquad [4.15]$$

olur ve aynı zamanda ;

$$x^{(3)} = x^{(2)} - x_2 e_2$$

olduğuna göre;

$$\begin{aligned} < x^{(3)}, x^{(3)} > &= < x^{(2)}, x^{(2)} > + x_2^2 \\ &= r^2 sh^2\varphi_0 ch^2\varphi_1 + r^2 sh^2\varphi_0 ch^2\varphi_1 sh^2\varphi_2 \\ &= r^2 sh^2\varphi_0 ch^2\varphi_1 \left(1 + sh^2\varphi_2\right) \\ &= r^2 sh^2\varphi_0 ch^2\varphi_1 ch^2\varphi_2 > 0 \end{aligned}$$

olup $x^{(3)}$ vektörü uzay benzeri (space-like)dir ve $\left|x^{(3)}\right| = rsh\varphi_0 ch\varphi_1 ch\varphi_2$ dır. e_3 zaman benzeri (time-like) olduğundan;

$$\begin{aligned} < e_3, x^{(3)} > &= -\left|e_3\right|\left|x^{(3)}\right| sh\varphi_3 \\ &= -rsh\varphi_0 ch\varphi_1 ch\varphi_2 sh\varphi_3 \end{aligned} \qquad [4.16]$$

bulunur. [4.15] ve [4.16] dan;

$$x_3 = rsh\varphi_0 ch\varphi_1 ch\varphi_2 sh\varphi_3 \qquad [4.17]$$

elde edilir. Yukarıdaki işlemler $\eta_{\nu-1}$ e kadar tekrarlanırsa;

$$\begin{aligned} \eta_{\nu-1} &= \eta(e_{\nu-1}, x_{\nu-1}e_{\nu-1} + x_\nu e_\nu + \ldots + x_n e_n) \\ &= < e_{\nu-1}, x^{(\nu-1)} > \\ &= -x_{\nu-1} \end{aligned} \qquad [4.18]$$

olur ve bununla birlikte;

$$x^{(\nu-1)} = x^{(\nu-2)} - x_{\nu-2}e_{\nu-2}$$

olduğuna göre;

$$\begin{aligned} < x^{(\nu-1)}, x^{(\nu-1)} > &= < x^{(\nu-2)}, x^{(\nu-2)} > + x_{\nu-2}^2 \\ &= r^2 sh^2\varphi_0 ch^2\varphi_1 ch^2\varphi_2 \ldots ch^2\varphi_{\nu-3}\left(1 + sh^2\varphi_{\nu-2}\right) \\ &= r^2 sh^2\varphi_0 ch^2\varphi_1 ch^2\varphi_2 \ldots ch^2\varphi_{\nu-3} ch^2\varphi_{\nu-2} > 0 \end{aligned}$$

olur ki $x^{(\nu-1)}$ vektörü uzay benzeri (space-like)dir ve $\left|x^{(\nu-1)}\right| = rsh\varphi_0 ch\varphi_1 ch\varphi_2 \ldots ch\varphi_{\nu-2}$ bulunur. $e_{\nu-1}$ zaman benzeri (time-like) olduğundan;

$$\begin{aligned} < e_{\nu-1}, x^{(\nu-1)} > &= -\left|e_{\nu-1}\right|\left|x^{(\nu-1)}\right| sh\varphi_{\nu-1} \\ &= -rsh\varphi_0 ch\varphi_1 ch\varphi_2 \ldots ch\varphi_{\nu-2} sh\varphi_{\nu-1} \end{aligned} \qquad [4.19]$$

bulunur. [4.18] ve [4.19] dan

$$x_{\nu-1} = rsh\varphi_0 ch\varphi_1 ch\varphi_2 \ldots ch\varphi_{\nu-2} sh\varphi_{\nu-1} \qquad [4.20]$$

elde edilir. η_ν için

$$\begin{aligned} \eta_\nu &= \eta(e_\nu, x_\nu e_\nu + x_{\nu+1}e_{\nu+1} + \ldots + x_n e_n) \\ &= < e_\nu, x^{(\nu)} > \\ &= x_\nu \end{aligned} \qquad [4.21]$$

olur ve aynı zamanda;

$$x^{(\nu)} = x^{(\nu-1)} - x_{\nu-1}e_{\nu-1}$$

olduğuna göre;

$$
\begin{aligned}
< x^{(\nu)}, x^{(\nu)} > &= < x^{(\nu-1)}, x^{(\nu-1)} > + x_{\nu-1}^2 \\
&= r^2 sh^2\varphi_0 ch^2\varphi_1 ch^2\varphi_2 \ldots ch^2\varphi_{\nu-2}\left(1 + sh^2\varphi_{\nu-1}\right) \\
&= r^2 sh^2\varphi_0 ch^2\varphi_1 ch^2\varphi_2 \ldots ch^2\varphi_{\nu-2} ch^2\varphi_{\nu-1} > 0
\end{aligned}
$$

olup $x^{(\nu)}$ vektörü de uzay benzeri (space-like)dir ve $\left|x^{(\nu)}\right| = rsh\varphi_0 ch\varphi_1 ch\varphi_2 \ldots ch\varphi_{\nu-1}$ dir. e_ν uzay benzeri (space-like) olduğundan;

$$
\begin{aligned}
< e_\nu, x^{(\nu)} > &= \left|e_\nu\right|\left|x^{(\nu)}\right|\cos\varphi_\nu \\
&= rsh\varphi_0 ch\varphi_1 ch\varphi_2 \ldots ch\varphi_{\nu-1}\cos\varphi_\nu
\end{aligned}
\qquad [4.22]
$$

olup [4.21] ve [4.22] den

$$
x_\nu = rsh\varphi_0 ch\varphi_1 ch\varphi_2 \ldots ch\varphi_{\nu-1}\cos\varphi_\nu \qquad [4.23]
$$

elde edilir. $\eta_{\nu+1}$ için

$$
\begin{aligned}
\eta_{\nu+1} &= \eta(e_{\nu+1}, x_{\nu+1}e_{\nu+1} + x_{\nu+2}e_{\nu+2} + \ldots + x_n e_n) \\
&= < e_{\nu+1}, x^{(\nu+1)} > \\
&= x_{\nu+1}
\end{aligned}
\qquad [4.24]
$$

olur aynı zamanda

$$
x^{(\nu+1)} = x^{(\nu)} - x_\nu e_\nu
$$

olduğuna göre

$$< x^{(\nu+1)}, x^{(\nu+1)} >=< x^{(\nu)}, x^{(\nu)} > -x_\nu^2$$
$$= r^2 sh^2\varphi_0 ch^2\varphi_1 ch^2\varphi_2 \dots ch^2\varphi_{\nu-1}\left(1-\cos^2\varphi_\nu\right)$$
$$= r^2 sh^2\varphi_0 ch^2\varphi_1 ch^2\varphi_2 \dots ch^2\varphi_{\nu-1}\sin^2\varphi_\nu > 0$$

olup $x^{(\nu+1)}$ vektörü de uzay benzeri (space-like)dir ve $\left|x^{(\nu+1)}\right| = rsh\varphi_0 ch\varphi_1 ch\varphi_2 \dots ch\varphi_{\nu-1}\sin\varphi_\nu$ bulunur. $e_{\nu+1}$ vektörü uzay benzeri (space-like) olduğundan;

$$< e_{\nu+1}, x^{(\nu+1)} >= \left|e_{\nu+1}\right|\left|x^{(\nu+1)}\right|\cos\varphi_{\nu+1}$$
$$= rsh\varphi_0 ch\varphi_1 ch\varphi_2 \dots ch\varphi_{\nu-1}\sin\varphi_\nu \cos\varphi_{\nu+1} \qquad [4.25]$$

olup [4.24]ve [4.25] ten

$$x_{\nu+1} = rsh\varphi_0 ch\varphi_1 ch\varphi_2 \dots ch\varphi_{\nu-1}\sin\varphi_\nu \cos\varphi_{\nu+1} \qquad [4.26]$$

elde edilir. $\eta_{\nu+2}$ için

$$\eta_{\nu+2} = \eta(e_{\nu+2}, x_{\nu+2}e_{\nu+2} + x_{\nu+3}e_{\nu+3} + \dots + x_n e_n)$$
$$=< e_{\nu+2}, x^{(\nu+2)} >$$
$$= x_{\nu+2} \qquad [4.27]$$

olur. Aynı zamanda;

$$x^{(\nu+2)} = x^{(\nu+1)} - x_{\nu+1}e_{\nu+1}$$

olduğuna göre

$$< x^{(\nu+2)}, x^{(\nu+2)} >=< x^{(\nu+1)}, x^{(\nu+1)} > -x_{\nu+1}^2$$

$$= r^2 sh^2\varphi_0 ch^2\varphi_1 ch^2\varphi_2 \ldots ch^2\varphi_{\nu-1} \sin^2\varphi_\nu \left(1-\cos^2\varphi_{\nu+1}\right)$$
$$= r^2 sh^2\varphi_0 ch^2\varphi_1 ch^2\varphi_2 \ldots ch^2\varphi_{\nu-1} \sin^2\varphi_\nu \sin^2\varphi_{\nu+1} > 0$$

olur ki $x^{(\nu+2)}$ vektörü uzay benzeri (space-like)dir. $\left|x^{(\nu+2)}\right| = rsh\varphi_0 ch\varphi_1 ch\varphi_2 \ldots ch\varphi_{\nu-1} \sin\varphi_\nu \sin\varphi_{\nu+1}$ normu hesaplanır. $e_{\nu+2}$ de uzay benzeri (space-like) olduğundan;

$$< e_{\nu+2}, x^{(\nu+2)} > = \left|e_{\nu+2}\right| \left|x^{(\nu+2)}\right| \cos\varphi_{\nu+2}$$
$$= rsh\varphi_0 ch\varphi_1 ch\varphi_2 \ldots ch\varphi_{\nu-1} \sin\varphi_\nu \sin\varphi_{\nu+1} \cos\varphi_{\nu+2} \qquad [4.28]$$

bulunur ve [4.27] ve [4.28] den

$$x_{\nu+2} = rsh\varphi_0 ch\varphi_1 ch\varphi_2 \ldots ch\varphi_{\nu-1} \sin\varphi_\nu \sin\varphi_{\nu+1} \cos\varphi_{\nu+2} \qquad [4.29]$$

elde edilir. Yukarıdaki işlemler η_{n-2} e kadar yapılırsa;

$$\eta_{n-2} = \eta(e_{n-2}, x_{n-2}e_{n-2} + x_{n-1}e_{n-1} + x_n e_n)$$
$$= < e_{n-2}, x^{(n-2)} >$$
$$= x_{n-2} \qquad [4.30]$$

elde edilir ve

$$x^{(n-2)} = x^{(n-3)} - x_{n-3}e_{n-3}$$

olduğuna göre

$$< x^{(n-2)}, x^{(n-2)} > = < x^{(n-3)}, x^{(n-3)} > - x_{n-3}^2$$
$$= r^2 sh^2\varphi_0 ch^2\varphi_1 ch^2\varphi_2 \ldots ch^2\varphi_{\nu-1} \sin^2\varphi_\nu \sin^2\varphi_{\nu+1} \ldots \sin^2\varphi_{n-4} \left(1-\cos^2\varphi_{n-3}\right)$$
$$= r^2 sh^2\varphi_0 ch^2\varphi_1 ch^2\varphi_2 \ldots ch^2\varphi_{\nu-1} \sin^2\varphi_\nu \sin^2\varphi_{\nu+1} \ldots \sin^2\varphi_{n-4} \sin^2\varphi_{n-3} > 0$$

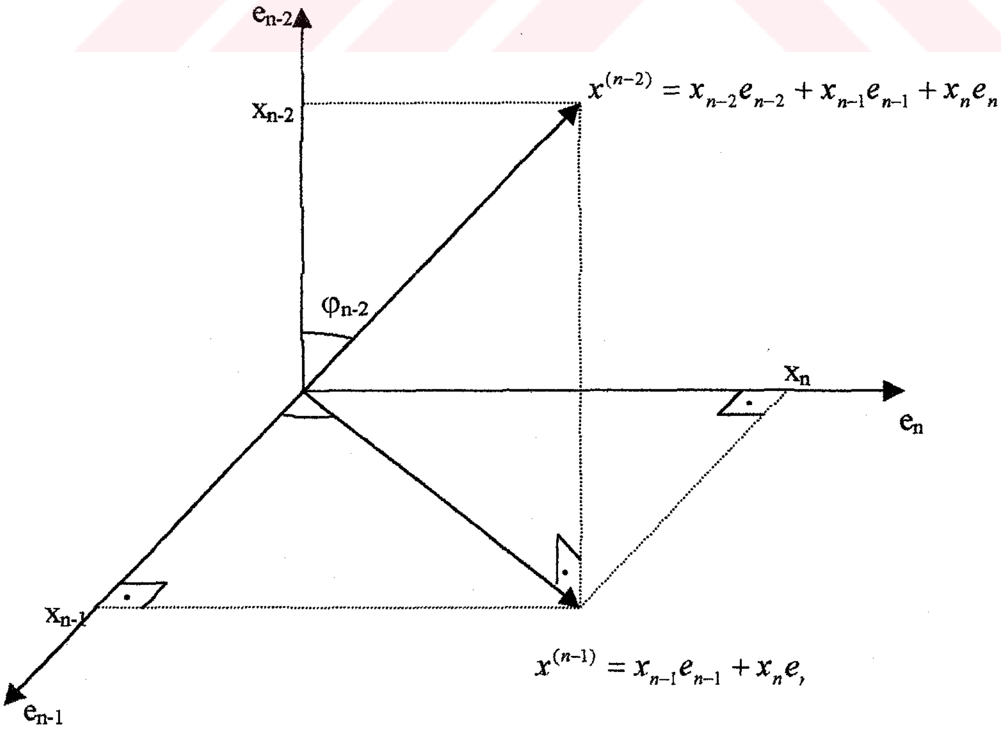
olur. Buradan da $x^{(n-2)}$ vektörü uzay benzeri (space-like)dir. $x^{(n-2)}$ vektörünün normu $\left|x^{(n-2)}\right| = rsh\varphi_0 ch\varphi_1 ch\varphi_2 \ldots ch\varphi_{v-1} \sin\varphi_v \sin\varphi_{v+1} \ldots \sin\varphi_{n-4} \sin\varphi_{n-3}$ şeklinde bulunur. e_{n-2} de uzay benzeri (space-like) olduğundan;

$$< e_{n-2}, x^{(n-2)} > = \left|e_{n-2}\right|\left|x^{(n-2)}\right| \cos\varphi_{n-2}$$
$$= rsh\varphi_0 ch\varphi_1 ch\varphi_2 \ldots ch\varphi_{v-1} \sin\varphi_v \sin\varphi_{v+1} \ldots \sin\varphi_{n-4} \sin\varphi_{n-3} \cos\varphi_{n-2} \qquad [4.31]$$

olur ve [4.30] ve [4.31] den

$$x_{n-2} = rsh\varphi_0 ch\varphi_1 ch\varphi_2 \ldots ch\varphi_{v-1} \sin\varphi_v \sin\varphi_{v+1} \ldots \sin\varphi_{n-4} \sin\varphi_{n-3} \cos\varphi_{n-2} \qquad [4.32]$$

elde edilir.



Şekil 4.1. 3-boyutta küresel koordinat dönüşümü.

$\cos\varphi_{n-1} = \dfrac{x_{n-1}}{\left|x^{(n-1)}\right|}$ ve $\sin\varphi_{n-1} = \dfrac{x_n}{\left|x^{(n-1)}\right|}$ olmak üzere;

$$x^{(n-1)} = x^{(n-2)} - x_{n-2}e_{n-2}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
< x^{(n-1)}, x^{(n-1)} > &= < x^{(n-2)}, x^{(n-2)} > - x_{n-2}^2 \\
&= r^2 sh^2\varphi_0 ch^2\varphi_1 ch^2\varphi_2 \ldots ch^2\varphi_{v-1} \sin^2\varphi_v \sin^2\varphi_{v+1} \ldots \sin^2\varphi_{n-3}\left(1-\cos^2\varphi_{n-2}\right) \\
&= r^2 sh^2\varphi_0 ch^2\varphi_1 ch^2\varphi_2 \ldots ch^2\varphi_{v-1} \sin^2\varphi_v \sin^2\varphi_{v+1} \ldots \sin^2\varphi_{n-3} \sin^2\varphi_{n-2} > 0
\end{aligned}$$

olur ki $x^{(n-1)}$ vektörünün uzay benzeri (space-like)dir. $x^{(n-1)}$ vektörünün normu ise $\left|x^{(n-1)}\right| = rsh\varphi_0 ch\varphi_1 ch\varphi_2 \ldots ch\varphi_{v-1} \sin\varphi_v \sin\varphi_{v+1} \ldots \sin\varphi_{n-3} \sin\varphi_{n-2}$ şeklinde hesaplanır. Buradan da;

$$\begin{aligned}
x_{n-1} &= \left|x^{(n-1)}\right| \cos\varphi_{n-1} \\
&= rsh\varphi_0 ch\varphi_1 ch\varphi_2 \ldots ch\varphi_{v-1} \sin\varphi_v \sin\varphi_{v+1} \ldots \sin\varphi_{n-2} \cos\varphi_{n-1} \qquad [4.33]
\end{aligned}$$

elde edilir. Son olarak;

$$\begin{aligned}
x_n &= \left|x^{(n-1)}\right| \sin\varphi_{n-1} \\
&= rsh\varphi_0 ch\varphi_1 ch\varphi_2 \ldots ch\varphi_{v-1} \sin\varphi_v \sin\varphi_{v+1} \ldots \sin\varphi_{n-2} \sin\varphi_{n-1} \qquad [4.34]
\end{aligned}$$

elde edilir.

<u>2. Durum</u>. $x \in R_v^{n+1}$ bir uzay benzeri (space-like) vektör ise $< x, x > \; > 0$ dır. Açık olarak yazılırsa;

$$< x,x >= -\sum_{i=0}^{\nu-1} x_i^2 + \sum_{i=\nu}^{n} x_i^2 = r^2$$

şeklindedir. $r(x) = \sqrt{|< x,x >|}$ $i = 0,1,...,n-2$ için $\varphi_i \in [0,\pi]$; ve $\varphi_{n-1} \in [0.2\pi]$ olmak üzere; 1.Durum için yapılan işlemler tekrarlanırsa;

$$
\begin{aligned}
x_0 &= rsh\varphi_0 \\
x_1 &= rch\varphi_0 sh\varphi_1 \\
x_2 &= rch\varphi_0 ch\varphi_1 sh\varphi_2 \\
x_3 &= rch\varphi_0 ch\varphi_1 ch\varphi_2 sh\varphi_3 \\
&\vdots \\
x_{\nu-1} &= rch\varphi_0 ch\varphi_1 ch\varphi_2 \ldots ch\varphi_{\nu-2} sh\varphi_{\nu-1} \\
x_\nu &= rch\varphi_0 ch\varphi_1 ch\varphi_2 \ldots ch\varphi_{\nu-1} \cos\varphi_\nu \\
x_{\nu+1} &= rch\varphi_0 ch\varphi_1 ch\varphi_2 \ldots ch\varphi_{\nu-1} \sin\varphi_\nu \cos\varphi_{\nu+1} \\
x_{\nu+2} &= rch\varphi_0 ch\varphi_1 ch\varphi_2 \ldots ch\varphi_{\nu-1} \sin\varphi_\nu \sin\varphi_{\nu+1} \cos\varphi_{\nu+2} \\
&\vdots \\
x_{n-2} &= rch\varphi_0 ch\varphi_1 ch\varphi_2 \ldots ch\varphi_{\nu-1} \sin\varphi_\nu \sin\varphi_{\nu+1} \ldots \sin\varphi_{n-3} \cos\varphi_{n-2} \\
x_{n-1} &= rch\varphi_0 ch\varphi_1 ch\varphi_2 \ldots ch\varphi_{\nu-1} \sin\varphi_\nu \sin\varphi_{\nu+1} \ldots \sin\varphi_{n-2} \cos\varphi_{n-1} \\
x_n &= rch\varphi_0 ch\varphi_1 ch\varphi_2 \ldots ch\varphi_{\nu-1} \sin\varphi_\nu \sin\varphi_{\nu+1} \ldots \sin\varphi_{n-2} \sin\varphi_{n-1}
\end{aligned}
$$

bağıntıları elde edilir.

$(x_0, x_1, ..., x_n)$, $x \in R_\nu^{n+1}$ in $\{e_0, e_1, ..., e_n\}$ ortogonal bazına göre koordinatları ve $r(x) = \sqrt{|< x,x >|}$ şeklinde tanımlı olsun. Yukarıda tanımlanan dönüşümler yardımıyla $x \in R_\nu^{n+1}$ in yeni koordinatları $(r, \varphi_0, \varphi_1, ..., \varphi_{n-1})$ şeklinde olacaktır(2). dR_ν^{n+1} $(x_0, x_1, ..., x_n)$ koordinatlarına göre R_ν^{n+1} in hacim elementi, w_η de

$(r, \varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})$ koordinatlarına göre R_ν^{n+1} in hacim elementi ve $J = \left[\dfrac{\partial x_i}{\partial \eta_j}\right]$ olmak üzere;

$$dR_\nu^{n+1} = |J| w_\eta \qquad [4.35]$$

eşitliği vardır(14,18). C simplektik konisi içinde aşağıdaki bağıntılar sağlanır. Bu bağıntılar elde edilirken R_ν^{n+1} de x in iki farklı durumda olması söz konusudur.

x, bir zaman benzeri (time-like) vektör ise;

$$dR_\nu^{n+1} = r^n sh^{n-1}\varphi_0 ch^{n-2}\varphi_1 \ldots ch^{n-\nu}\varphi_{\nu-1} \sin^{n-\nu-1}\varphi_\nu \sin^{n-\nu-2}\varphi_{\nu+1}, \ldots, \sin\varphi_{n-2} dr d\varphi_0 d\varphi_1 \ldots d\varphi_{n-1} \qquad [4.36]$$

olup, bu eşitlikte;

$$sh^{n-1}\varphi_0 ch^{n-2}\varphi_1 \ldots ch^{n-\nu}\varphi_{\nu-1} \sin^{n-\nu-1}\varphi_\nu \sin^{n-\nu-2}\varphi_{\nu+1}, \ldots, \sin\varphi_{n-2} d\varphi_0 d\varphi_1 \ldots d\varphi_{n-1} \qquad [4.37]$$

çarpanı $S_\nu^n(-1)$ için bir hacim elementidir(1,18). Buna göre;

$$dR_\nu^{n+1} = r^n dr \wedge dS_\nu^n(-1) \qquad [4.38]$$

elde edilir.

x, bir uzay benzeri (space-like) vektör ise

$$dR_\nu^{n+1} = r^n ch^{n-1}\varphi_0 ch^{n-2}\varphi_1 \ldots ch^{n-\nu}\varphi_{\nu-1} \sin^{n-\nu-1}\varphi_\nu \sin^{n-\nu-2}\varphi_{\nu+1} \ldots \sin\varphi_{n-2} dr d\varphi_0 d\varphi_1 \ldots d\varphi_{n-1} \qquad [4.39]$$

eşitliği olup bu eşitlikte de;

$$ch^{n-1}\varphi_0 ch^{n-2}\varphi_1 \ldots ch^{n-\nu}\varphi_{\nu-1} \sin^{n-\nu-1}\varphi_\nu \sin^{n-\nu-2}\varphi_{\nu+1},\ldots,\sin\varphi_{n-2}\, d\varphi_0\, d\varphi_1 \ldots d\varphi_{n-1} \qquad [4.40]$$

çarpanı $S_\nu^n(+1)$ için bir hacim elementidir(1,18). Buna göre;

$$dR_\nu^{n+1} = r^n dr \wedge dS_\nu^n(+1) \qquad [4.41]$$

eşitliği elde edilir. Bu iki durumun incelenmesinden elde edilen sonuç genelleştirilirse;

$$dR_\nu^{n+1} = r^n dr \wedge dS_\nu^n(\varepsilon) \qquad [4.42]$$

eşitliği elde edilir.

5. HACİM DİFERENSİYELİ VE SCHLAFLİ DİFERENSİYEL FORMÜLÜ

5.1. Hacim Diferensiyeli

$\{v_0, v_1, \dots, v_n\}$, R_q^{n+1} un bir bazı ve $C = \{x_0 v_0 + x_1 v_1 + \dots + x_n v_n | x_0 \geq 0, x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0\}$ simplektik koni olmak üzere; $\Delta = C \cap S_q^n(\varepsilon)$ şeklinde bir n-simpleks olsun. Buna göre dR_q^{n+1}; R_q^{n+1} hacim elemanı, $dS_q^n(\varepsilon)$; $S_q^n(\varepsilon)$ hiperkuadriğinin hacim elemanı ve $r(x) = \sqrt{|<x,x>|}$ olmak üzere [4.35] ten;

$$dR_q^{n+1} = r^n dr \wedge dS_q^n(\varepsilon) \qquad [5.1]$$

eşitliği vardır. Bu eşitlikten yararlanarak Δ nın hacmi $V_n(\Delta)$ yı hesaplamak için eşitliğin her iki yanı $e^{-\frac{r^2}{2}}$ ile çarpılıp C üzerinden integral alınırsa;

$$e^{-\frac{r^2}{2}} dR_q^{n+1} = e^{-\frac{r^2}{2}} r^n dr \wedge dS_q^n(\varepsilon)$$

$$\begin{aligned}
\int_C e^{-\frac{r^2}{2}} dR_q^{n+1} &= \int_C \left(e^{-\frac{r^2}{2}} r^n dr \wedge dS_q^n(\varepsilon) \right) \\
&= \int_C e^{-\frac{r^2}{2}} r^n dr . dS_q^n(\varepsilon) \\
&= \int_0^\infty e^{-\frac{r^2}{2}} r^n dr \int_C dS_q^n(\varepsilon) \\
&= \int_0^\infty e^{-\frac{r^2}{2}} r^n dr \int_\Delta dS_q^n(\varepsilon) \\
&= V_n(\Delta) 2^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \qquad [5.2]
\end{aligned}$$

bulunur(2).

R_q^{n+1} nun $\{v_0, v_1, ..., v_n\}$, bazına göre koordinatları $(x_0, x_1, ..., x_n)$ ile gösterilsin ve

$$\Phi(x_0, x_1, ..., x_n) = < x_0 v_0 + x_1 v_1 + ... + x_n v_n, x_0 v_0 + x_1 v_1 + ... + x_n v_n >$$

R_q^{n+1} nun kuadratik formu olsun. Burada C simplektik konisinin içinde $\Phi = \varepsilon r^2$ dır. Diğer taraftan, $v_0, v_1, ..., v_n$ vektörleri tarafından R_q^{n+1} da belirlenen paralelyüzün hacmini $V(v_0, v_1, ..., v_n)$ ile gösterilirse; R_q^{n+1} nun hacim formu;

$$dR_q^{n+1} = V(v_0, v_1, ..., v_n) dx_0 \wedge dx_1 \wedge ... \wedge dx_n \qquad [5.3]$$

şeklindedir(14). [5.3] eşitliği de $e^{-\frac{r^2}{2}}$ ile çarpılıp C üzerinden integral alınırsa;

$$\int_C e^{-\frac{r^2}{2}} dR_q^{n+1} = V(x_0, x_1, ..., x_n) \int_C e^{\frac{-\varepsilon\Phi}{2}} dx_0 dx_1 ... dx_n \qquad [5.4]$$

eşitliği elde edilir. [5.2] ve [5.4] den;

$$2^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) V_n(\Delta) = V(v_0, v_1, ..., v_n) \int_C e^{\frac{-\varepsilon\Phi}{2}} dx_0 dx_1 ... dx_n \qquad [5.5]$$

olur.

S, $S_q^n(\varepsilon)$ da tüm n-simplekslerin uzayı n(n+1) boyutlu doğal bir manifold yapısına sahiptir. Bu manifoldun haritaları $S_q^n(\varepsilon)$ üzerinde (n+1)-tepelerin yeteri kadar küçük komşuluklarının çarpımı ile oluşturulan haritalardan ibarettir. Hacim fonksiyonu $V_n : S \to R$ olmak üzere her bir Δ simpleksinin birleşiminin hacmi $V_n(\Delta)$ bir diferensiyellenebilir fonksiyon olup diferensiyeli aşağıdaki şekilde bulunur:

Δ da S'nin n(n+1) tane lineer bağımsız tanjant vektörü yardımıyla bir özel baz formunu göz önüne alınarak $\Delta \in S$ olacak şekilde keyfi bir nokta arayacağız. Bu tanjant vektörlerin her birine uygulanan dV_n formunun değerini hesaplayacağız. Bu özel baz aşağıdaki gibi tanımlanır;

Δ nın (n+1)–tepelerinin her biri için Δ'da S'nin n-tane lineer bağımsız tanjant vektörünü alabiliriz ki farklı doğrultularda seçilen tepelerin hareketi n-şekilde seçilir ve diğer bütün tepeler sabit bırakılır. Açıkça seçilen tepeden kalan diğer n-tepenin her birine seçilen tepeyi içeren doğru boyunca yapılan hareket aşağıdaki gibidir. Tepelerin sıralaması keyfi olduğundan v_1 den v_0 tepesine doğru hareketi çalışmak yeterli olacaktır. Diğer tepeler sabit tutulursa; $\forall t \in R$ için;

$$v_0(t) = v_0$$
$$v_1(t) = v_1 - tv_0$$
$$v_i(t) = v_i, 2 \le i \le n$$

elde edilir. Bu vektörler tarafından formlandırılan baz göz önüne alınırsa, t nin 0 a yeteri kadar yakın olması durumunda;

$$C_t = \{\lambda_0 v_0(t) + \lambda_1 v_1(t) + \ldots + \lambda_n v_n(t) | \lambda_0 \ge 0, \lambda_1 \ge 0, \ldots, \lambda_n \ge 0\} \qquad [5.6]$$

bir simplektik konidir. Simplektik koninin bu ifadesi [5.5] eşitliğine uygulanırsa;

$$2^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) V_n(\Delta_t) = V(v_0, v_1, \ldots, v_n) \int_{C_t} e^{\frac{-\varepsilon\Phi}{2}} dx_0 dx_1 \ldots dx_n \qquad [5.7]$$

elde edilir. C_t daha açık yazılacak olursa;

$$C_t = \{\lambda_0 v_0(t) + \lambda_1 v_1(t) + \ldots + \lambda_n v_n(t) | \lambda_0 \ge 0, \lambda_1 \ge 0, \ldots, \lambda_n \ge 0\}$$
$$= \{\lambda_0 v_0 + \lambda_1 (v_1 - tv_0) + \ldots + \lambda_n v_n | \lambda_0 \ge 0, \lambda_1 \ge 0, \ldots, \lambda_n \ge 0\}$$

$$= \left\{ (\lambda_0 - \lambda_1 t) v_0 + \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n \middle| \lambda_0 \geq 0, \lambda_1 \geq 0, \ldots, \lambda_n \geq 0 \right\}$$

olup, $\lambda_0 - \lambda_1 t = x_0$ ve $\lambda_i = x_i, i \geq 1$ için

$$\lambda_0 - \lambda_1 t = x_0 \Rightarrow \lambda_0 - x_1 t = x_0$$
$$\Rightarrow \lambda_0 = x_0 + x_1 t$$
$$\Rightarrow x_0 + x_1 t \geq 0$$

olur. Buradan C_t simplektik konisi;

$$C_t = \left\{ x_0 v_0 + x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n \middle| x_0 + x_1 t \geq 0, x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0 \right\} \qquad [5.8]$$

şeklinde yazılır. Öyleyse [5.7] eşitliği;

$$2^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) V_n(\Delta_t) = V(v_0, v_1, \ldots, v_n) \int_{x_1=0}^{\infty} \int_{x_0=-x_1 t}^{\infty} \int_{x_2=0}^{\infty} \ldots \int_{x_n=0}^{\infty} e^{\frac{-\varepsilon\Phi}{2}} dx_0 dx_1 \ldots dx_n \qquad [5.9]$$

olur. Bu eşitliğin her iki tarafından diferensiyel alınırsa;

$$2^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \left. \frac{dV_n(\Delta_t)}{dt} \right|_{t=0} = V(v_0, v_1, \ldots, v_n) \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \left[\int_{x_0=-x_1 t}^{\infty} \int_{x_1=0}^{\infty} \ldots \int_{x_n}^{\infty} e^{\frac{-\varepsilon\Phi}{2}} dx_0 dx_1 \ldots dx_n \right]$$

$$= V(v_0, v_1, \ldots, v_n) \int_{x_1=0}^{\infty} \int_{x_2=0}^{\infty} \ldots \int_{x_n=0}^{\infty} x_1 e^{\frac{-\varepsilon\Phi}{2}} dx_1 dx_2 \ldots dx_n \Bigg|^{x_0=0}$$

[5.10]

bulunur.

Şimdi $\{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$ nin duali olan $\{w_0, w_1, \ldots, w_n\}$ bazı göz önüne alınırsa; $< v_i, w_j >= \delta_{ij}$ olacaktır. Bu w_i vektörleri, $|w_i| = 1$ olacak şekilde seçilsin. $\{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$ bazına göre koordinatları $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ ve $\{w_0, w_1, \ldots, w_n\}$ dual bazına göre koordinatları da $(y_0, y_1, \ldots, y_n)$ ile gösterilirse;

$$x_i = \sum_{j=0}^{n} < w_i, w_j > y_j \quad \text{ve} \quad y_i = \sum_{j=0}^{n} < v_i, v_j > x_j \tag{5.11}$$

olup, R_q^{n+1} nun kuadratik formuda;

$$\Phi(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=0}^{n} < v_i, v_j > x_i x_j \tag{5.12}$$

şeklinde yazılır. Çünkü;

$$\begin{aligned}
\Phi(x_0, x_1, \ldots, x_n) &= \sum_{i,j=0}^{n} < v_i, v_j > x_i x_j \\
&= \sum_{j=0}^{n} \left(< v_0, v_j > x_0 x_j + < v_1, v_j > x_1 x_j + \ldots + < v_n, v_j > x_n x_j \right) \\
&= \left(< v_0, v_0 > x_0^2 + < v_0, v_1 > x_0 x_1 + \ldots + < v_0, v_n > x_0 x_n \right) \\
&\quad + \left(< v_0, v_1 > x_0 x_1 + < v_1, v_1 > x_1^2 + \ldots + < v_1, v_n > x_1 x_n \right) \\
&\quad + \ldots + \left(< v_0, v_n > x_0 x_n + < v_1, v_n > x_1 x_n + \ldots + < v_n, v_n > x_n^2 \right) \\
&= \langle x_0 v_0 + x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n, x_0 v_0 + x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n \rangle
\end{aligned}$$

eşitliği vardır. Bu kuadratik formun x_i değişkenine göre kısmi türevi alınırsa;

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} &= 2\sum_{j=0}^{n} < v_i, v_j > x_j \\
&= 2y_i
\end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitlikten yararlanarak [5.11] ten $x_0 = 0$ hiperdüzlemi içerisinde;

$$x_1 = \sum_{j=0}^{n} < w_1, w_j > y_j \qquad [5.13]$$

ve

$$x_0 =< w_0, w_0 > y_0 + \sum_{i=0}^{n} < w_0, w_i > y_i = 0 \qquad [5.14]$$

olup

$$y_0 = -\sum_{i=1}^{n} \frac{< w_0, w_i >}{< w_0, w_0 >} y_i \qquad [5.15]$$

elde edilir. Buna göre [5.14] de y_0 değeri yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} x_1 &=< w_1, w_0 > \left(-\sum_{i=1}^{n} \frac{< w_0, w_i >}{< w_0, w_0 >} y_i \right) + \sum_{i=1}^{n} < w_1, w_i > y_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} < w_1, w_i > y_i - \sum_{i=1}^{n} \frac{< w_1, w_0 >< w_0, w_i >}{< w_0, w_0 >} y_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(< w_1, w_i > - \frac{< w_0, w_1 >< w_0, w_i >}{< w_0, w_0 >} \right) y_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(< w_1, w_i > - \frac{< w_0, w_1 >< w_0, w_i >}{< w_0, w_0 >} \right) \frac{\partial(\Phi / 2)}{\partial x_i} \end{aligned} \qquad [5.16]$$

bulunur. $\forall t \in R$ için $\{v_0(t), v_1(t), \ldots, v_n(t)\}$ bazının duali $\{w_0(t), w_1(t), \ldots, w_n(t)\}$olup;

$$w_0(t) = w_0 + t w_1$$

$$w_i(t) = w_i, \; 1 \le i \le n$$

şeklinde tanımlanırsa; dual bazlar oldukları;

$$\begin{aligned} < v_0(t), w_0(t) > &= < v_0, w_0 + tw_1 > \\ &= < v_0, w_0 > + t < v_0, w_0 > \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} < v_0(t), w_i(t) > &= < v_0, w_i > \qquad (1 \le i \le n) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} < v_1(t), w_0(t) > &= < v_1 - tv_0, w_0 + tw_1 > \\ &= < v_1, w_0 + tw_1 > - t < v_0, w_0 + tw_1 > \\ &= < v_1, w_0 > + t < v_1, w_1 > - t < v_0, w_0 > - t^2 < v_0, w_1 > \\ &= 0 \end{aligned}$$

bulunur ve $i = 1$ için $< v_1, w_1 >= 1$ ve $i > 1$ için $< v_1, w_i >= 0$ olup, $1 < i, j \le n$ için v_i ve w_j bazları ortogonal olarak tanımlandığından $0 \le i, j \le n$ için;

$$< v_i(t), w_j(t) >= \delta_{ij}$$

olduğu gösterilmiş olur.

Şimdi $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ için;

$$f_{0i}(t) = \frac{< w_0(t), w_i(t) >}{|w_0(t)||w_i(t)|} \qquad [5.17]$$

fonksiyonu tanımlanırsa bütün j ler için $|w_j| = 1$ olduğuna göre; $f_{0i}(t)$

$$f_{0i}(t)=\frac{<w_0(t),w_i(t)>}{|w_0(t)||w_i(t)|}$$

$$=\frac{<w_0,w_i>+t<w_1,w_i>}{|w_0+tw_1||w_i|}$$

$$=\frac{<w_0,w_i>+t<w_1,w_i>}{\sqrt{|<w_0+tw_1,w_0+tw_1>|}}$$

$$=\frac{<w_0,w_i>+t<w_1,w_i>}{\sqrt{|<w_0,w_0>+2t<w_0,w_1>+t^2<w_1,w_1>|}} \qquad [5.18]$$

şeklinde açık olarak yazılır. [5.18] de;

$$\sqrt{|<w_0,w_0>+2t<w_0,w_1>+t^2<w_1,w_1>|}=U(t)$$

şeklinde gösterilip $f_{0i}(t)$ nin diferensiyeli alınırsa;

$$\left.\frac{df_{0i}(t)}{dt}\right|_{t=0}=\left.\frac{<w_1,w_i>U(t)-U'(t)(<w_0,w_i>+<w_1,w_i>)}{U^2(t)}\right|_{t=0}$$

$$=\frac{<w_1,w_i><w_0,w_0>-<w_0,w_1><w_0,w_i>}{<w_0,w_0>}$$

$$=<w_1,w_i>-\frac{<w_0,w_1><w_0,w_i>}{<w_0,w_0>} \qquad [5.19]$$

elde edilir. Buna göre [5.16] ve [5.19] dan

$$x_1=\sum_{i=1}^{n}\left.\frac{df_{0i}(t)}{dt}\right|_{t=0}\frac{\partial(\Phi/2)}{\partial x_i} \qquad [5.20]$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik [5.10] da yerine yazılırsa;

$$2^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\frac{dV_n(\Delta_t)}{dt}\bigg|_{t=0}=V(v_0,v_1,\ldots,v_n)\int_0^\infty\int_0^\infty\ldots\int_0^\infty\sum_{i=1}^{n}\frac{df_{0i}(t)}{dt}\bigg|_{t=0}\frac{\partial(\Phi/2)}{\partial x_i}e^{\frac{-\varepsilon\Phi}{2}}dx_1dx_2\ldots dx_n\Bigg|^{x_0=0}$$

$$=-\varepsilon V(v_0,v_1,\ldots,v_n)\sum_{i=1}^{n}\frac{df_{0i}(t)}{dt}\bigg|_{t=0}\int_0^\infty\int_0^\infty\ldots\int_0^\infty\frac{\partial(e^{\frac{-\varepsilon\Phi}{2}})}{\partial x_i}dx_1dx_2\ldots dx_n\Bigg|^{x_0=0}$$

$$=\varepsilon V(v_0,v_1,\ldots,v_n)\sum_{i=1}^{n}\frac{df_{0i}(t)}{dt}\bigg|_{t=0}\int_0^\infty\int_0^\infty\ldots\int_0^\infty e^{\frac{-\varepsilon\Phi}{2}}dx_1dx_2\ldots dx_n\Bigg|^{x_0=x_i=0}$$

[5.21]

bulunur.

Şimdi Δ nın $F_{0i}=\{x_0v_0+x_1v_1+\ldots+x_nv_n\,|\,x_0\geq 0,x_1\geq 0,\ldots,x_n\geq 0;x_{i_1}=0\}\cap S_q^n(\varepsilon)$ 2-eşboyutlu yüzünün hacmi göz önüne alınırsa; $\{v_1,v_2,\ldots,\hat{v}_i,\ldots,v_n\}$ tarafından gerilen R_q^{n+1} nun (n-1)-boyutlu alt uzayında [5.5] eşitliğinden;

$$2^{\frac{n-3}{2}}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)V_{n-2}(F_{0i})=V(v_1,v_2,\ldots\hat{v}_i,\ldots,v_n)\int_0^\infty\int_0^\infty\ldots\int_0^\infty e^{\frac{-\varepsilon\Phi}{2}}dx_1dx_2\ldots\hat{dx}_i\ldots dx_n\Bigg|^{x_0=x_i=0}$$

[5.22]

elde edilir. [5.21] ve [5.22] den;

$$2^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\frac{dV_n(\Delta_t)}{dt}\bigg|_{t=0}=\varepsilon\sum_{i=1}^{n}\frac{V(v_0,v_1,\ldots,v_n)}{V(v_1,v_2,\ldots\hat{v}_i,\ldots,v_n)}\frac{df_{0i}(t)}{dt}\bigg|_{t=0}2^{\frac{n-3}{2}}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)V_{n-2}(F_{0i})$$

[5.23]

bulunur ve Gamma fonksiyonunun $\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)=\left(\frac{n-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)$ özelliğinden;

$$\frac{dV_n(\Delta_t)}{dt}\bigg|_{t=0}=\frac{\varepsilon}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\frac{V(v_0,v_1,\ldots,v_n)}{V(v_1,v_2,\ldots\hat{v}_i,\ldots,v_n)}\frac{df_{0i}(t)}{dt}\bigg|_{t=0}V_{n-2}(F_{0i}) \qquad [5.24]$$

eşitliği bulunur.

R_q^{n+1} de paralelyüzün hacmi hakkında birkaç elemanter uygulama yapılırsa; en son eşitlikteki $\dfrac{V(v_0, v_1, \dots, v_n)}{V(v_1, v_2, \dots \hat{v}_i, \dots, v_n)}$ ifadesinin sadeleştirilmesinde yardımcı olacaktır:

i) $V(v_0, v_1, \dots, v_n)$ hacmi, $v_0, v_1, \dots, v_n$ vektörleriyle belirlenen R^{n+1} deki paralelyüzün Öklidyen hacmin aynısı gibidir. (Çünkü R_q^{n+1}nun kuadratik formunun J_q matrisinin determinantı ± 1 dir.) Bu nedenle $V(v_0, v_1, \dots, v_n)$, R_q^{n+1} nun standart bazlarına göre $v_0, v_1, \dots, v_n$ vektörlerinin sütuna yazılmasıyla elde edilen matrisin determinantının mutlak değeridir. Yani $\sqrt{\left|\det(< v_i, v_j >)_{ij}\right|}$ dir.

ii) $\{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ nin dual bazı $\{w_0, w_1, \dots, w_n\}$ olmak üzere $v_0, v_1, \dots, v_n$ vektörlerinin sütuna yazılmasıyla elde edilen matris M ve aynı şekilde $w_0, w_1, \dots, w_n$ vektörlerinden elde edilen matris N olsun. Burada $M^t J_q N$ karakteristik matris,ve $|\det N| = |\det M|^{-1}$ olmak üzere;

$$V(w_0, w_1, \dots, w_n) = \frac{1}{V(v_0, v_1, \dots, v_n)} \qquad [5.25]$$

olur.

iii) 0, n-1 arasındaki herhangi bir k için $w_0, w_1, \dots, w_k$ tarafından gerilen altuzay üzerinde $v_0, v_1, \dots, v_n$ vektörlerinin izdüşümü $v_0', v_1', \dots, v_k'$ olsun. Bu taktirde her $i \in \{0,1,\dots,k\}$ için $v_i' - v_i$ vektörü $v_{k+1}, v_{k+2}, \dots, v_n$ vektörlerinin bir lineer kombinasyonudur. Bu nedenle;

$$V(v_0, v_1, \ldots, v_n) = V(v_0', v_1', \ldots, v_k', v_{k+1}, \ldots, v_n)$$
$$= V(v_0', v_1', \ldots, v_k')V(v_{k+1}, \ldots, v_n)$$

olur. Diğer taraftan $\{w_0, w_1, \ldots, w_k\}$ ın $w_0, w_1, \ldots, w_k$ tarafından gerilen altuzay içerisinde $\{v_0', v_1', \ldots, v_k'\}$ nin bir dual bazıdır. Bu nedenle ii) den

$$V(v_0, v_1, \ldots, v_n) = \frac{V(v_{k+1}, v_{k+2}, \ldots, v_n)}{V(w_0, w_1, \ldots, w_n)} \qquad [5.26]$$

elde edilir. Bu sonuçlar [5.24] te uygulanırsa;

$$\left.\frac{dV_n(\Delta_t)}{dt}\right|_{t=0} = \frac{\varepsilon}{n-1}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{V(w_0, w_i)} \left.\frac{df_{0i}(t)}{dt}\right|_{t=0} V_{n-2}(F_{0i})$$

$$= \frac{\varepsilon}{n-1}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\left| < w_0, w_0 >< w_i, w_i > - < w_0, w_i >^2 \right|}} \left.\frac{df_{0i}(t)}{dt}\right|_{t=0} V_{n-2}(F_{0i})$$

[5.27]

bulunur.

5.2. Schlafli Diferensiyel Formülü

5.2.1. Semi-Riemann Geometride Dihedral Açı

Schlafli diferensiyel formülünü vermeden önce semi-Riemann geometride dihedral açının tanımına ihtiyaç vardır. J.M. Schlenker tarafından doğal tanımı verilmiştir. Dihedral açının tanımı kompleks değerli de olabilir. Bu tanım semi-Riemanyan halde Schlafli ve Gauss-Bonnet formüllerinin ispatına, bununla beraber semi-Riemanyan geometride hacim tanımına da uygundur.

Tanım 5.2.1. w_0 ve w_i vektörleri tarafından gerilen R_q^{n+1} nun 2-boyutlu alt vektör uzayı göz önüne alınırsa; bu uzay $v_1, v_2, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_n$ tarafından gerilen $\langle C_{0i} \rangle$ 2-eşboyutlu altuzaya ortogonaldir. R_q^{n+1} nun kuadratik formunun kısıtlaması bu yüzeyde non-dejeneredir. Eğer bu pozitif veya negatif tanımlı bir kuadratik form ise

$$
\begin{aligned}
\alpha_{0i} &= \pi - \arccos\left(\frac{< w_0, w_i >}{|w_0||w_i|} \right) \\
&= \pi - \arccos(f_{0i})
\end{aligned}
\tag{5.28}
$$

açısına F_{0i} yüzündeki dihedral açı denir(17).

Bununla birlikte, bu ortogonal düzlem bir Lorentz metriğine sahip olabilir. Bu durumda Lorentz–Minkowski düzlemi R_1^2 de iki null olmayan vektör arasındaki açının tanımı gerekmektedir. Bu problemin çözümü R_1^2 de birim vektörlerin kümesindedir. w_1, w_2 iki birim vektör ise bunlar arasında ki açı S^1 birim küre üzerindeki uçları arasındaki yay uzunluğu ile tanımlanır.

Tanım 5.2.2. R_1^2 de w_1, w_2 ışık benzeri (null) olmayan iki vektör olmak üzere, w_1, w_2 arasındaki açı;

i) $< w_1, w_1 >< w_2, w_2 > > 0$ ve $< w_1, w_2 > < 0$ ise

$$ang(w_1, w_2) = \arccos h\left(\frac{- < w_1, w_2 >}{|w_1||w_2|} \right)$$

ii) $< w_1, w_1 >< w_2, w_2 > > 0$ ve $< w_1, w_2 > > 0$ ise

$$ang(w_1, w_2) = -\arccos h\left(\frac{< w_1, w_2 >}{|w_1||w_2|} \right)$$

iii) $<w_1,w_1><w_2,w_2> < 0$ ise

$$ang(w_1,w_2) = -\arcsin h\left(\frac{<w_1,w_2>}{|w_1||w_2|}\right)$$

şeklinde üç durumda tanımlıdır(14,16,17).

Teorem 5.2.1: Δ, bir yada daha çok parametreye bağlı diferensiyellenebilir n-simplekslerin ailesi ve Δ nın 1 ve 2 eşboyutlu bütün yüzleri bir non-dejenere metriğe sahip olsun. $V_{n-2}(F)$; 2-eşboyutlu F yüzünün (n-2)-boyutlu hacmi α_F de F yüzündeki dihedral açı olmak üzere;

$$dV_n(\Delta) = \frac{\varepsilon}{n-1}\sum_F V_{n-2}(F)d\alpha_F \qquad [5.29]$$

dır(17).(n-2=0, $V_0(F)=0$)

İspat: Teoremin ispatı için

$$\left.\frac{dV_n(\Delta_t)}{dt}\right|_{t=0} = \frac{\varepsilon}{n-1}\sum_{i=1}^{n} V_{n-2}(F_{0i})\left.\frac{d\alpha_{0i}(t)}{dt}\right|_{t=0}$$

olduğunu göstermek gerekmektedir.[5.27]eşitliğinde $f_{0i}(t) = \dfrac{\langle w_0(t), w_i(t)\rangle}{|w_0(t)||w_i(t)|}$ olmak üzere;

$$\left.\frac{d\alpha_{0i}(t)}{dt}\right|_{t=0} = \frac{1}{\sqrt{|<w_0,w_0><w_i,w_i> - <w_0,w_i>^2|}}\left.\frac{df_{0i}(t)}{dt}\right|_{t=0}$$

olduğunu göstermek yeterli olacaktır. Bunun için dihedral açının farklı durumları incelenmelidir. Öyleyse;

1.Durum. t sıfıra yaklaştıkça $w_0(t)$ ve $w_i(t)$ tarafından gerilen düzlem tanımlı bir metriğe sahip ve

$$<w_0, w_0><w_i, w_i> - <w_0, w_i>^2 > 0$$

ise $F_{0i}(t)$ yüzündeki dihedral açı

$$\alpha_{0i}(t) = \pi - \arccos\left(f_{0i}(t)\right) \qquad [5.30]$$

şeklindedir. Buradan;

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d\alpha_{0i}(t)}{dt}\right|_{t=0} &= \frac{1}{\sqrt{1-f_{0i}^2(0)}}\left.\frac{df_{0i}(t)}{dt}\right|_{t=0} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{<w_0,w_i>^2}{\left|<w_0,w_0>\right|\left|<w_i,w_i>\right|}}}\left.\frac{df_{0i}(t)}{dt}\right|_{t=0} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\dfrac{\left|<w_0,w_0>\right|\left|<w_i,w_i>\right|-<w_0,w_i>^2}{\left|<w_0,w_0>\right|\left|<w_i,w_i>\right|}}}\left.\frac{df_{0i}(t)}{dt}\right|_{t=0} \\
&= \frac{1}{\dfrac{\sqrt{\left|<w_0,w_0>\right|\left|<w_i,w_i>\right|-<w_0,w_i>^2}}{\sqrt{\left|<w_0,w_0>\right|}\sqrt{\left|<w_i,w_i>\right|}}}\left.\frac{df_{0i}(t)}{dt}\right|_{t=0} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\left|<w_0,w_0><w_i,w_i>-<w_0,w_i>^2\right|}}\left.\frac{df_{0i}(t)}{dt}\right|_{t=0}
\end{aligned} \qquad [5.31]$$

olur.

2.Durum. t sıfıra yaklaştıkça $w_0(t)$ ve $w_i(t)$ tarafından gerilen düzlem bir Lorentz metriğine sahip ve

$$<w_0,w_0><w_i,w_i>-<w_0,w_i>^2<0$$

ise üç durum söz konusudur.

i) $<w_0,w_0><w_i,w_i>\ >0$ ve $<w_0,w_i>\ <0$ ise

$$\alpha_{0i}(t)=-\operatorname{arccos}h\big(-f_{0i}(t)\big) \qquad [5.32]$$

ve

$$\left.\frac{d\alpha_{0i}(t)}{dt}\right|_{t=0}=\frac{1}{\sqrt{f_{0i}^2(0)-1}}\left.\frac{df_{0i}(t)}{dt}\right|_{t=0}$$

ii) $<w_0,w_0><w_i,w_i>\ >0$ ve $<w_0,w_i>\ >0$ ise

$$\alpha_{0i}(t)=\operatorname{arccos}h\big(f_{0i}(t)\big) \qquad [5.33]$$

ve

$$\left.\frac{d\alpha_{0i}(t)}{dt}\right|_{t=0}=\frac{1}{\sqrt{f_{0i}^2(0)-1}}\left.\frac{df_{0i}(t)}{dt}\right|_{t=0}$$

iii) $<w_0,w_0><w_i,w_i>\ <0$ ise

$$\alpha_{0i}(t)=\operatorname{arcsin}h\big(f_{0i}(t)\big) \qquad [5.34]$$

ve

$$\left.\frac{d\alpha_{0i}(t)}{dt}\right|_{t=0} = \frac{1}{\sqrt{1+f_{0i}^2(0)}}\left.\frac{df_{0i}(t)}{dt}\right|_{t=0}$$

Bu durumların tamamından;

$$\left.\frac{d\alpha_{0i}(t)}{dt}\right|_{t=0} = \frac{1}{\sqrt{\left|<w_0,w_0><w_i,w_i>-<w_0,w_i>^2\right|}}\left.\frac{df_{0i}(t)}{dt}\right|_{t=0} \qquad [5.35]$$

bulunur. Sonuç olarak her durum için [5.27] de [5.35] kullanılarak

$$\left.\frac{dV_n(\Delta_t)}{dt}\right|_{t=0} = \frac{\varepsilon}{n-1}\sum_{i=1}^{n} V_{n-2}(F_{0i})\left.\frac{d\alpha_{0i}(t)}{dt}\right|_{t=0}$$

eşitliği görülür.

6. POLAR VE TÜMLEYEN DUAL

6.1. Bir Hiperbolik Simpleksin Polar ve Tümleyen Duali

<u>*Tanım 6.1.1.*</u> Δ, H^n hiperbolik uzayında $\Delta = C \cap H^n$ şeklinde bir n-simpleks olsun. $\{w_0, w_1, \ldots, w_n\}$ uzay benzeri (space-like) vektörleri, R_1^{n+1} de $\{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$ bazının duali olmak üzere;

$$\Delta^* = \{x_0 w_0 + x_1 w_1 + \ldots + x_n w_n | x_0 \geq 0, x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0\} \cap S_1^n \qquad [6.1]$$

kümesine Δ nın S_1^n deki polar duali denir(17).

<u>*Tanım 6.1.2.*</u> Δ, H^n hiperbolik uzayında $\Delta = C \cap H^n$ şeklinde bir n-simpleks ve $\{w_0, w_1, \ldots, w_n\}$ uzay benzeri (space-like) vektörleri, R_1^{n+1} de $\{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$ bazının duali olmak üzere;

$$\Delta^p = \{x_0 w_0 + x_1 w_1 + \ldots + x_n w_n | x_0 \geq 0 \text{ ve } x_i \leq 0, \exists i \in \{1, \ldots, n\}\} \cap S_1^n \, [6.2]$$

kümesine Δ nın S_1^n deki tümleyen duali denir. Bu dual S_1^n in bir kompakt alt kümesidir, fakat simpleks değildir(17).

Δ^p tümleyen duali S_1^n in bir kompakt polihedronudur. Bu polihedronun eşboyutu 1 veya 1 den büyük yüzleri Riemannyandır. Δ^* polar duali sınırsızdır ve eşboyutu 1 ve 1 den büyük olan yüzleri küresel simplekslerdir. Ayrıca Δ^* ın eşboyutu 2 ve 2 den büyük olan yüzleri de Δ^p nin bir yüzüdür. Δ^* ın 2- eşboyutlu yüzündeki dihedral açı ile Δ^p nin aynı yüzündeki dihedral açı ters işaretlidir. Yani; Δ^p nin bir yüzündeki dihedral açı $ang(v_i, v_j)$ iken; Δ^* ın 2- eşboyutu olan $F_{ij}^* = \{x_0 v_0 + x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n | x_0 \geq 0, x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0; x_{i_1} = x_j = 0\} \cap S_1^n$ aynı yüzündeki dihedral açı;

$$-ang(v_i,v_j)=-arcch\left(\frac{-<v_i,v_j>}{|v_i||v_j|}\right) \qquad [6.3]$$

şeklindedir(17).

<u>*Lemma 6.1.1*</u>. Δ bir yada daha fazla parametreye göre diferensiyellenebilir hiperbolik n-simplekslerin ailesi olsun. Bu hiperbolik n-simplekslerin tümleyen dualinin diferensiyellenebilir hacmini $V_n(\Delta^P)$ ile Δ^* polar dualinin 2-eşboyutlu yüzlerini F^* ve F^* yüzündeki dihedral açıları da α^* ile belirtirsek, $V_0(F^*)=1$ olmak üzere;

$$dV_n(\Delta^P)=\frac{1}{n-1}\sum_{F^*}V_{n-2}(F^*)d\alpha^* \qquad [6.4]$$

dır.

<u>*İspat*</u>: Δ^P tümleyen dualinin geometrik yapısı göz önünde bulundurulursa; Δ^P her bir w noktasını, w nın ortogonal olduğu H^n nin hiperdüzlemine eşleyen bir dönüşüm tanımlanabilir. Bu dönüşüm; tüm hiperbolik hiperdüzlemlerin arakesiti olan Δ üzerine örtendir. Fakat Δ^P antipodal nokta içerdiğinden dolayı 1-1 değildir. Bu nokta çiftleri Δ^P nin sınırındadır ve bunların oluşturduğu bir alt kümenin ölçümü sıfırdır(19). O halde negatif antipodal noktaları içeren altkümesinin ölçümü sıfır olan Δ^P ile tüm hiperbolik hiperdüzlemlerin arakesiti olan Δ arasında bir bijeksiyon vardır. Öyleyse Δ^P nın elemanları ile Δ^* ın elemanları çakışacaktır. Δ^P bir simpleks olmadığından Schlafli diferensiyel formülünü yazmak için Δ^* polar dualinden yararlanılırsa;

$$dV_n(\Delta^P)=\frac{1}{n-1}\sum_{F^*}V_{n-2}(F^*)d\alpha^* \qquad [6.5]$$

olur.

6.1.1. Üç Boyutlu Hiperbolik Uzayda Bir Dörtyüzlünün Dual Hacmi

Önerme 6.1.1. Δ, H^3 de bir hiperbolik dörtyüzlü ve Δ^p de onun tümleyen duali olsun. Δ nın hacmi ile duali arasında; $V_1(F)$, F ayrıtının uzunluğu ve α_F de F ayrıtını üzerindeki dihedral açı olmak üzere;

$$V_3(\Delta)+V_3(\Delta^p)=\frac{1}{2}\sum_F(\pi-\alpha_F)V_1(F) \qquad [6.6]$$

bağıntısı vardır(12,17).

İspat: $\Delta=\{x_0v_0+x_1v_1+x_2v_2+x_3v_3 \mid x_0\geq 0, x_1\geq 0, x_2\geq 0, x_3\geq 0\}\cap H^3$ ve $\{w_0,w_1,w_2,w_3\}$ vektörleri, $\{v_0,v_1,v_2,v_3\}$ bazının duali olsun. F_{ij}, Δ nın 2-eşboyutlu yüzü (ayrıtı) ve α_{ij} de F_{ij} deki dihedral açı olmak üzere Schlafli diferensiyel formülü;

$$dV_3(\Delta)=-\frac{1}{2}\sum_{0\leq i<j\leq 3}V_1(F_{ij})d\alpha_{ij} \qquad [6.7]$$

şeklindedir. Diğer taraftan Lemma 6.1.1. den F^*_{kl}, Δ^p nin ayrıtı ve $\alpha^*_{kl}=ang(v_k,v_l)$, ayrıt üzerindeki dihedral açı olmak üzere;

$$dV_3(\Delta^p)=\frac{1}{2}\sum_{0\leq k<l\leq 3}V_1(F^*_{kl})d\alpha^*_{kl} \qquad [6.8]$$

olur. $0\leq k<l\leq 3$ ve $0\leq i<j\leq 3$ olduğundan $\{i,j\}$, $\{k,l\}$ den farklı olmak üzere;

$$V_1(F_{kl}^*) = ang(w_k, w_l)$$
$$= \pi - \alpha_{ij}$$

ve

$$V_1(F_{ij}) = ang(v_k, v_l)$$
$$= \alpha_{kl}^*$$

olduğundan bu eşitlikler [6.8] de yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} dV_3(\Delta^P) &= \frac{1}{2}\sum_{0\le i<j\le 3}(\pi - \alpha_{ij})dV_1(F_{ij}) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{0\le i<j\le 3}(\pi - \alpha_{ij})dV_1(F_{ij}) - \frac{1}{2}\sum_{0\le i<j\le 3}V_1(F_{ij})d\alpha_{ij} \\ &\quad + \frac{1}{2}\sum_{0\le i<j\le 3}V_1(F_{ij})d\alpha_{ij} \\ &= \frac{1}{2}d\left(\sum_{0\le i<j\le 3}(\pi - \alpha_{ij})dV_1(F_{ij})\right) - dV_3(\Delta) \end{aligned}$$

olur. Buradan da;

$$dV_3(\Delta) + dV_3(\Delta^P) = d\left(\frac{1}{2}\sum_F(\pi - \alpha_F)V_1(F)\right)$$

ve

$$d(V_3(\Delta) + V_3(\Delta^P)) = d\left(\frac{1}{2}\sum_F(\pi - \alpha_F)V_1(F)\right) \qquad [6.9]$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğin her iki tarafından integrali alındığında;

$$V_3(\Delta)+V_3(\Delta^p)=\frac{1}{2}\sum_F(\pi-\alpha_F)V_1(F)+c \qquad [6.10]$$

bulunur. Burada integral sabitini belirlemek için Δ simpleksi hacmi sıfıra giderken limit alındığında $\frac{1}{2}\sum_F(\pi-\alpha_F)V_1(F)$ toplamı da sıfıra gidecektir. Aynı durumda Δ^p tümleyen duali ve $V_3(\Delta)+V_3(\Delta^p)$ toplamı sıfıra gidecektir. Dolayısıyla integral sabiti sıfır olduğundan;

$$V_3(\Delta)+V_3(\Delta^p)=\frac{1}{2}\sum_F(\pi-\alpha_F)V_1(F) \qquad [6.11]$$

bulunur.

6.2. Bir Küresel Simpleksin Polar ve Tümleyen Duali

<u>*Tanım 6.2.1.*</u> Δ, S_1^n de bütün yüzleri indirgenmiş metriğe sahip $\Delta=C\cap S_1^n$ şeklinde bir n-simpleks olsun. R_1^{n+1} de $\{v_0,v_1,\ldots,v_n\}$ bazının duali $\{w_0,w_1,\ldots,w_n\}$ zaman benzeri(time-like) vektörleri ve $\varepsilon_0,\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n\in\{\pm1\}$ olmak üzere; $\varepsilon_0w_0,\varepsilon_1w_1,\ldots,\varepsilon_nw_n$ vektörleri üst zaman konisin(time-koni)dedir. Buna göre;

$$\Delta^*=\{x_0\varepsilon_0w_0+x_1\varepsilon_1w_1+\ldots+x_n\varepsilon_nw_n \mid x_0\geq0,x_1\geq0,\ldots,x_n\geq0\}\cap H^n \qquad [6.12]$$

kümesine Δ nın polar hiperbolik simpleksi denir(17).

<u>*Tanım 6.2.2.*</u> Δ n-simpleksinin (r+1)-eşboyutlu yüzü, $0\leq r\leq n-1$ olmak üzere;
$F_{i_0\ldots i_r}=\{x_0v_0+x_1v_1+\ldots+x_nv_n \mid x_0\geq0,x_1\geq0,\ldots,x_n\geq0;x_{i_0}=\ldots=x_{i_r}=0\}\cap S_1^n$ şeklinde dir. Buna göre;

$$\Theta_{i_0..i_r} = \{x_{i0}\varepsilon_{i0}w_{i0} + x_{i1}\varepsilon_{i1}w_{i1} + \ldots + x_{ir}\varepsilon_{ir}w_{ir} \mid x_{i0} \geq 0, x_{i1} \geq 0, \ldots, x_{ir} \geq 0\} \cap H^n$$

[6.13]

cümlesine Δ nın $F_{i_0\ldots i_r}$ yüzündeki polar açı denir(18). Bu aynı zamanda Δ^* polar hiperbolik simpleksin bir yüzüdür(17).

Tanım 6.2.3. $\Theta_{i_0..i_r}$ hiperbolik simpleksinin r-boyutlu hacmi $V_r(\Theta_{i_0..i_r})$ olmak üzere;

$$\theta_{i_0..i_r} = \varepsilon_{i_0}\varepsilon_{i_1}\ldots\varepsilon_{i_r}V_r(\Theta_{i_0..i_r}) \qquad [6.14]$$

değerine $\Theta_{i_0..i_r}$ polar açısının cebirsel ölçümü denir. $r = 0$ halinde $\theta_i = \varepsilon_i = \pm 1$ şeklinde tanımlanır(17).

Önerme 6.2.1. Δ, S_1^n de tüm yüzleri Riemannyan ve bir yada daha fazla parametreye göre diferensiyellenebilir n-simplekslerin ailesi olsun. $V_k(F)$ de Δ nın k-boyutlu bir F yüzünün hacmi ve θ_F, F yüzündeki polar açının cebirsel ölçümü olmak üzere;

$$\Gamma\left(\frac{r+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-r-1}{2}\right)\sum_{\dim(F)=r+1}\theta_F dV_{r+1}(F) = \Gamma\left(\frac{r}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-r+1}{2}\right)\sum_{\dim(F)=r-1}V_{r-1}(F)d\theta_F$$

[6.15]

dır.

İspat: F, Δ nın (n-r-1)-eşboyutlu bir yüzü olsun. Burada F, (r+1)-boyutlu küresel simpleks olduğundan küresel Schlafli diferensiyel formülü; L, F nin (r-1)- boyutlu yüzlerini ve $\alpha(L,F)$ de F nin L yüzündeki dihedral açıyı göstermek üzere;

$$dV_{r+1}(F) = \frac{1}{r}\sum_{\substack{L\subset F \\ \dim(L)=r-1}} V_{r-1}(L)d\alpha(L,F) \qquad [6.16]$$

şeklinde yazılır. Diğer taraftan L, Δ nın (n-r+1)-eşboyutlu bir yüzü ve bu yüzdeki polar açı Θ_L olsun. Θ_L bir (n-r)-boyutlu hiperbolik simplekstir ve bu nedenle; $\beta(\Theta_F,\Theta_L)$, Θ_L hiperbolik simpleksinin Θ_F yüzündeki dihedral açı olmak üzere;

$$dV_r(\Theta_L)=\frac{-1}{n-r-1}\sum_{\substack{L\subset F\\ \dim(L)=r+1}}V_{n-r-2}(\Theta_F)d\beta(\Theta_F,\Theta_L) \qquad [6.17]$$

şeklinde hiperbolik Schlafli diferensiyel formülü yazılır. Burada Θ_L nin yüzleri Δ nın L yi içeren yüzlerindeki polar açılara karşılık geldiğinden Θ_L ve Θ_F nin cebirsel ölçümü Tanım 6.2.3. den;

$$\theta_F=\pm V_{n-r-2}(\Theta_F) \text{ ve } \theta_L=\pm V_{n-r}(\Theta_L)$$

olur. Bu ölçümlere bağlı olarak L ve F yüzlerine bağlı işaret $\tau(L,F)=\dfrac{\theta_L V_{n-r-2}(\Theta_F)}{V_{n-r}(\Theta_L)\theta_F}\in\{\pm 1\}$ olmak üzere; [6.16] eşitliğinde bu değerler yerine yazılırsa;

$$d\theta_L=\frac{-1}{n-r-1}\sum_{\substack{L\subset F\\ \dim(L)=r+1}}\theta_F\tau(L,F)d\beta(\Theta_F,\Theta_L) \qquad [6.18]$$

eşitliği elde edilir.

R_1^{n+1} de $\{v_0,v_1,\ldots,v_n\}$ bazının duali $\{w_0,w_1,\ldots,w_n\}$ olmak üzere;

$$F=\{x_0v_0+x_1v_1+\ldots+x_{r+1}v_{r+1}\,|\,x_0\geq 0,x_1\geq 0,\ldots,x_{r+1}\geq 0\}\cap S_1^n$$

ve

$$L=\{x_0v_0+x_1v_1+\ldots+x_{r+1}v_{r+1} \mid x_0\geq 0, x_1\geq 0,\ldots,x_{r+1}\geq 0; x_0=x_1=0\}\cap S_1^n$$

kümeleri de sırasıyla (r+1) ve (r-1)-boyutlu küresel simplekslerdir. w_0', w_1' vektörleri, $i=0,1$ ve $j=0,1,\ldots,r+1$ için $<w_i',v_j>=\delta_{ij}$ olacak şekilde R_1^n nin $\{v_0,v_1,\ldots,v_{r+1}\}$ vektörleri tarafından gerilen alt uzayda iki vektör olsun. $\{v_0,v_1,\ldots,v_{r+1}\}$ tarafından gerilen alt uzay ile $\{w_{r+2},w_{r+3},\ldots,w_n\}$ vektörlerinin gerdiği alt uzay ortogonal olduğundan, w_0', w_1' vektörleri;

$$\begin{array}{ll} <w_i',v_j>=\delta_{ij} & i=0,1 \text{ ve } j=0,1,\ldots,r+1 \\ <w_i',w_k>=0 & k=r+2,r+3,\ldots,n \end{array} \qquad [6.19]$$

koşullarına göre bir tek olarak belirlenir. Buna göre F nin (r-1)-boyutlu L yüzündeki dihedral açı;

$$\alpha(L,F)=\pi-ang(w_0',w_1') \qquad [6.20]$$

şeklindedir.

Diğer taraftan Δ nın sırasıyla F ve L yüzlerindeki polar açılar;

$$\Theta_F=\{x_{r+2}\varepsilon_{r+2}w_{r+2}+x_{r+3}\varepsilon_{r+3}w_{r+3}+\ldots+x_n\varepsilon_n w_n \mid x_{r+2}\geq 0, x_{r+3}\geq 0,\ldots,x_n\geq 0\}\cap H^n$$

ve

$$\Theta_L=\{x_0\varepsilon_0w_0+x_1\varepsilon_1w_1+(x_{r+2}\varepsilon_{r+2}w_{r+2}+\ldots+x_n\varepsilon_n w_n) \mid x_0\geq 0, x_1\geq 0, x_{r+2}\geq 0,\ldots,x_n\geq 0\}\cap H^n$$

şeklinde tanımlıdır. Bu polar açıların cebirsel ölçümü ise sırasıyla $\theta_F=\varepsilon_{r+2}\varepsilon_{r+3}\ldots\varepsilon_n V_{n-r-2}(\Theta_F)$ ve $\theta_L=\varepsilon_0\varepsilon_1\varepsilon_{r+2}\ldots\varepsilon_n V_{n-r}(\Theta_L)$ olur. Buna göre L ve F yüzüne bağlı işaret;

$$\tau(L,F) = \frac{\theta_L V_{n-r-2}(\Theta_F)}{V_{n-r}(\Theta_L)\theta_F}$$

$$= \varepsilon_0 \varepsilon_1$$

bulunur.

v_0', v_1' vektörleri $i = 0,1$ ve $j = 0,1,\ldots,r+1$ için $< v_i', \varepsilon_j w_j >= \delta_{ij}$ olacak şekilde R_1^n in $\{\varepsilon_0 w_0, \varepsilon_1 w_1, \varepsilon_{r+2} w_{r+2} \ldots, \varepsilon_n w_n\}$ vektörleri tarafindan gerilen alt uzayında iki vektör olsun. Aynı şekilde; $\{\varepsilon_0 w_0, \varepsilon_1 w_1, \varepsilon_{r+2} w_{r+2}, \ldots, \varepsilon_n w_n\}$ tarafindan gerilen alt uzay ile $\{v_2, v_3, \ldots, v_{r+1}\}$ tarafindan gerilen alt uzay ortogonal olduğundan, v_0', v_1' vektörleri;

$$\begin{array}{ll} < v_i', w_j >= \delta_{ij} & i = 0,1 \text{ ve } j = 0,1,r+2,r+3,\ldots,n \\ < \varepsilon_i v_i', v_k >= 0 & k = 2,3,\ldots,r+1 \end{array} \qquad [6.21]$$

koşullarına göre bir tek olarak belirlenir.

O halde Θ_L hiperbolik simpleksinin Θ_F yüzündeki dihedral açı;

$$\beta(\Theta_F, \Theta_L) = \pi - ang(v_0', v_1') \qquad [6.22]$$

olur. R_1^n de $\{v_2, v_3, \ldots, v_{r+1}, w_{r+2}, w_{r+3}, \ldots, w_n\}$ vektörleri tarafindan gerilen Π alt uzayı göz önüne alınırsa; bu alt uzay $\{v_2, v_3, \ldots, v_{r+1}\}$ ve $\{w_{r+2}, w_{r+3}, \ldots, w_n\}$ vektörlerinin gerdiği ortogonal alt uzayların direkt toplamıdır. Bu alt uzay 2-eşboyutludur. [6.19] ve [6.21] koşullardan $\{w_0', w_1'\}$ ve $\{\varepsilon_0 v_0', \varepsilon_1 v_1'\}$ kümeleri R_1^n de Π alt uzayının ortogonal tümleyeni $\Pi^{\perp}$ düzleminin dual bazlarıdır. Bundan dolayı;

$$ang(w_0', w_1') = \pi - ang(\varepsilon_0 v_0', \varepsilon_1 v_1') \qquad [6.23]$$

olur. [6.20] ve [6.23] eşitliklerinden;

$$\begin{aligned} d\alpha(L,F) &= -d(ang(w_0', w_1')) \\ &= d(ang(\varepsilon_0 v_0', \varepsilon_1 v_1')) \\ &= \varepsilon_0 \varepsilon_1 d(ang(v_0', v_1')) \\ &= -\tau(L,F) d\beta(\Theta_F, \Theta_L) \end{aligned} \qquad [6.24]$$

bulunur. [6.16] eşitliği θ_F ile çarpılıp (r+1)-boyutlu F yüzleri üzerinden toplam alınırsa;

$$\sum_{\dim(F)=r+1} \theta_F dV_{r+1}(F) = \frac{1}{r} \sum_{\dim(F)=r+1} \sum_{\substack{L\subset F \\ \dim(L)=r-1}} \theta_F V_{r-1}(L) d\alpha(L,F) \qquad [6.25]$$

olur. Bu eşitlikte [6.18] ve [6.24] eşitlikleri yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} \sum_{\dim(F)=r+1} \theta_F dV_{r+1}(F) &= -\frac{1}{r} \sum_{\substack{L\subset F \\ \dim(F)=r+1}} \sum_{\dim(L)=r-1} V_{r-1}(L)\theta_F \tau(L,F) d\beta(\Theta_F, \Theta_L) \\ &= -\frac{1}{r} \sum_{\dim(L)=r-1} \sum_{\substack{L\subset F \\ \dim(F)=r+1}} V_{r-1}(L)\theta_F \tau(L,F) d\beta(\Theta_F, \Theta_L) \\ &= \frac{n-r-1}{r} \sum_{\dim(L)=r-1} V_{r-1}(L) \\ &\quad \left(\frac{1}{n-r-1} \sum_{\substack{L\subset F \\ \dim(F)=r+1}} V_{r-1}(L)\theta_F \tau(L,F) d\beta(\Theta_F, \Theta_L) \right) \end{aligned}$$

olup

$$\sum_{\dim(F)=r+1} \theta_F dV_{r+1}(F) = -\frac{1}{r}\frac{n-r-1}{r} \sum_{\dim(L)=r-1} V_{r-1}(L) d\theta_L \qquad [6.26]$$

bulunur. Gamma fonksiyonunun özelliklerinden;

$$\Gamma(\frac{n-r+1}{2}) = \frac{n-r-1}{2}\Gamma(\frac{n-r-1}{2}) \text{ ve } \Gamma(\frac{r+2}{2}) = \frac{r}{2}\Gamma(\frac{r}{2})$$

olduğundan;

$$\frac{\Gamma(\frac{r}{2})\Gamma(\frac{n-r+1}{2})}{\Gamma(\frac{r+2}{2})\Gamma(\frac{n-r-1}{2})} = \frac{\Gamma(\frac{r}{2})(\frac{n-r-1}{2})\Gamma(\frac{n-r-1}{2})}{\frac{r}{2}\Gamma(\frac{r}{2})\Gamma(\frac{n-r-1}{2})}$$

$$= \frac{n-r-1}{r}$$

bulunur. Böylece [6.15] eşitliği;

$$\sum_{\dim(F)=r+1} \theta_F dV_{r+1}(F) = \frac{\Gamma(\frac{r}{2})\Gamma(\frac{n-r+1}{2})}{\Gamma(\frac{r+2}{2})\Gamma(\frac{n-r-1}{2})} \sum_{\dim(L)=r-1} V_{r-1}(L)d\theta_L \qquad [6.27]$$

şeklinde yazılabileceğinden ispat tamamlanmış olur.

Şimdi $0 \leq i \leq n-1$ olmak üzere [6.15] eşitliğindeki sabiti;

$$c_i = \frac{\Gamma(\frac{i+1}{2})\Gamma(\frac{n-i}{2})}{2\Gamma(\frac{n+1}{2})} = \frac{Vol(S^n)}{Vol(S^i)Vol(S^{n-1-i})}$$

şeklinde tanımlanırsa $1 \leq r \leq n-2$ olmak üzere;

$$c_{r+1} \sum_{\dim(F)=r+1} \theta_F dV_{r+1}(F) - c_{r-1} \sum_{\dim(F)=r-1} V_{r-1}(F)d\theta_F = 0 \qquad [6.28]$$

şeklini alır.

7. SCHLAFLİ DİFERENSİYEL FORMÜLÜ NÜN UYGULAMALARI

7.1. Gauss-Bonnet Formülünde Uygulaması

Önerme 7.1.1. Δ, S_1^n de tüm yüzleri Riemannyan bir n-simpleks olmak üzere $V_{2k}(F)$ ile 2k-boyutlu F yüzünün hacmi, θ_F ile de Δ nın F yüzündeki polar açının cebirsel ölçümü olsun. $0 \le i \le n-1$ için $c_i = \dfrac{\Gamma(\frac{i+1}{2})\Gamma(\frac{n-i}{2})}{2\Gamma(\frac{n+1}{2})}$, c_n=1 ve Δ nın çift boyutlu F yüzleri üzerinde toplam alınmak üzere;

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^k c_{2k} \sum_{\dim(F)=2k} V_{2k}(F)\theta_F = 0 \qquad [7.1]$$

dır. Burada Tanım 6.2.3. e göre 1-eşboyutlu yüzlerde; $k=\frac{n}{2}$ olduğunda θ_Δ polar açısının cebirsel ölçümü 1 e eşit, $k=\frac{n-1}{2}$ ye eşit olduğunda θ_Δ polar açısının cebirsel ölçümü ± 1 e eşit ve k=0 olduğunda bir tepenin hacmi 1 eşit kabul edilmiştir.

Tanım 7.1.1. $\kappa = \pm 1$ sabit eğrilikli semi-öklidyen uzaylar da; [7.1] formülüne konveks polihedralar için genelleştirilmiş Gauss-Bonnet formülü denir(17).

Sonuç 7.1.1 Δ n-simpleksi çift boyutlu olduğunda; n-simpleksin hacmi Gauss-Bonnet formülü yardımıyla daha küçük boyutlu simplekslerin hacmi cinsinden;

$$(-1)^{\frac{n}{2}} V_n(\Delta) = \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} (-1)^k c_{2k} \sum_{\dim(F)=2k} V_{2k}(F)\theta_F \qquad [7.2]$$

şeklinde ifade edilir.

İspat: Δ, S_1^n de çift boyutlu tüm yüzleri Riemannyan bir n-simpleks olsun. de Sitter küresinde Schlafli diferensiyel formülü;

$$dV_n(\Delta) = \frac{1}{n-1}\sum_F V_{n-2}(F)d\alpha_F \qquad [7.3]$$

şeklindedir. Dihedral ve polar açının tanımından Δ nın F yüzündeki polar açı; $\theta_F = -\alpha_F$ dir. O halde $c_{n-2} = \dfrac{\Gamma(\frac{n-1}{2})}{2\Gamma(\frac{n+1}{2})} = \dfrac{1}{n-1}$ olmak üzere;

$$(-1)^{\frac{n}{2}} dV_n(\Delta) = (-1)^{\frac{n-2}{2}} c_{n-2} \sum_{\dim(F)=n-2} V_{n-2}(F)d\theta_F \qquad [7.4]$$

olur. Diğer taraftan [6.28] eşitliğini;

$$(-1)^{\frac{r+1}{2}} c_{r+1} \sum_{\dim(F)=r+1} \theta_F dV_{r+1}(F) + (-1)^{\frac{r-1}{2}} c_{r-1} \sum_{\dim(F)=r-1} V_{r-1}(F)d\theta_F = 0 \quad [7.5]$$

şeklinde yazılırsa [7.4] ve [7.5] den

$$(-1)^{\frac{n-2}{2}} c_{n-2} \sum_{\dim(F)=n-2} V_{n-2}(F)d\theta_F = (-1)^{\frac{n}{2}} dV_n(\Delta)$$

$$(-1)^{\frac{n-2}{2}} c_{n-2} \sum_{\dim(F)=n-2} \theta_F dV_{n-2}(F) + (-1)^{\frac{n-4}{2}} c_{n-4} \sum_{\dim(F)=n-4} V_{n-4}(F)d\theta_F = 0$$

$$(-1)^{\frac{n-4}{2}} c_{n-4} \sum_{\dim(F)=n-4} \theta_F dV_{n-4}(F) + (-1)^{\frac{n-6}{2}} c_{n-6} \sum_{\dim(F)=n-6} V_{n-6}(F)d\theta_F = 0$$

$$\vdots$$

$$c_4 \sum_{\dim(F)=4} \theta_F dV_4(F) - c_2 \sum_{\dim(F)=2} V_2(F) d\theta_F = 0$$

$$-c_2 \sum_{\dim(F)=2} \theta_F dV_2(F) + c_0 \sum_{\dim(F)=0} d\theta_F = 0$$

eşitlikleri yazılıp k=0 için $c_0 = 1$ ve $\theta_F = 1$ olmak üzere $c_0 \sum_{\dim(F)=0} d\theta_F = 0$ olur.

Yukarıdaki eşitlikler taraf tarafa toplanırsa;

$$(-1)^{\frac{n-2}{2}} c_{n-2} \sum_{\dim(F)=n-2} \left(V_{n-2}(F) d\theta_F + \theta_F dV_{n-2}(F)\right) + (-1)^{\frac{n-4}{2}} c_{n-4} \sum_{\dim(F)=n-4} \left(V_{n-4}(F) d\theta_F + \theta_F dV_{n-4}(F)\right)$$
$$+ \ldots + c_4 \sum_{\dim(F)=4} \left(V_4(F) d\theta_F + \theta_F dV_4(F)\right) - c_2 \sum_{\dim(F)=2} \left(V_2(F) d\theta_F + \theta_F dV_2(F)\right)$$
$$= (-1)^{\frac{n}{2}} dV_n(\Delta)$$

olur. Ayrıca bu eşitlik;

$$(-1)^{\frac{n-2}{2}} c_{n-2} d\left(\sum_{\dim(F)=n-2} \theta_F V_{n-2}(F) \right) + (-1)^{\frac{n-4}{2}} c_{n-4} d\left(\sum_{\dim(F)=n-4} \theta_F V_{n-4}(F) \right)$$
$$+ \ldots + c_4 d\left(\sum_{\dim(F)=4} \theta_F V_4(F) \right) - c_2 d\left(\sum_{\dim(F)=2} \theta_F V_2(F) \right) = (-1)^{\frac{n}{2}} dV_n(\Delta) \qquad [7.6]$$

şeklinde de yazılabilir. [7.6] nın integrali alınırsa;

$$(-1)^{\frac{n}{2}} V_n(\Delta) = \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} (-1)^k c_{2k} \sum_{\dim(F)=2k} V_{2k}(F) \theta_F + c \qquad [7.7]$$

bulunur.

Δ^* polar hiperbolik simpleksi sıfıra giderken limit alındığında; bütün polar açılar da sıfıra gidecektir ve Δ nın da sıfıra gitmesinden dolayı da $V_n(\Delta)$ hacmi de sıfıra gidecektir. Dolayısıyla integral sabiti sıfırdır ve

$$(-1)^{\frac{n}{2}} V_n(\Delta) = \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} (-1)^k c_{2k} \sum_{\dim(F)=2k} V_{2k}(F)\theta_F \qquad [7.8]$$

elde edilir.

Sonuç 7.1.2. Δ n-simpleksi tek boyutlu ise Gauss-Bonnet formülü ile simplekslerin hacmi arasında böyle bir ilişki yoktur. Yani $V_n(\Delta)$ hacmini küçük boyutlu simplekslerin hacmine indirgeyemeyiz. Bu durumda sadece;

$$\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} (-1)^k c_{2k} \sum_{\dim(F)=2k} V_{2k}(F)\theta_F = 0 \qquad [7.9]$$

bağıntısı vardır.

İspat: Δ n-simpleksinin boyutu tek ise [6.28] den ifadesinden benzer şekilde;

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}} c_{n-1} \sum_{\dim(F)=n-1} \theta_F dV_{n-1}(F) + (-1)^{\frac{n-3}{2}} c_{n-3} \sum_{\dim(F)=n-3} V_{n-3}(F) d\theta_F = 0$$

$$(-1)^{\frac{n-3}{2}} c_{n-3} \sum_{\dim(F)=n-3} \theta_F dV_{n-3}(F) + (-1)^{\frac{n-5}{2}} c_{n-5} \sum_{\dim(F)=n-5} V_{n-5}(F) d\theta_F = 0$$

$$\vdots$$

$$c_4 \sum_{\dim(F)=4} \theta_F dV_4(F) - c_2 \sum_{\dim(F)=2} V_2(F) d\theta_F = 0$$

$$-c_2 \sum_{\dim(F)=2} \theta_F dV_2(F) + c_0 \sum_{\dim(F)=0} V_0(F) d\theta_F = 0$$

eşitlikleri yazılabilir. Sonuç 7.1.1. in ispatındaki işlemler tekrarlanırsa;

$$\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} (-1)^k c_{2k} \sum_{\dim(F)=2k} V_{2k}(F)\theta_F = 0 \qquad [7.10]$$

sonucu elde edilir.

7.2 Santalo Formülünde Uygulaması

Tanım 7.2.1. $\Delta = C \cap H^n$ olacak şekilde bir hiperbolik n-simpleks ve Δ^* onun polar duali olsun. R_1^n de $\{w_0, w_1, \ldots, w_n\}$ kümesi $\{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$ bazının duali ve $0 \le k \le n-1$ olmak üzere;

$$F = \{x_0 v_0 + x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n | x_0 \ge 0, x_1 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0; x_{i_1} = \ldots = x_{i_k} = 0\} \cap H^n$$

kümesi Δ nın (k+1)-eşboyutlu yüzü şeklinde tanımlanmıştı. Buna göre;

$$F^* = \{x_{i_1} w_{i_1} + x_{i_2} w_{i_2} + \ldots + x_{i_k} w_{i_k} | x_{i_1} \ge 0, x_{i_2} \ge 0, \ldots, x_{i_k} \ge 0\} \cap S_1^n$$

cümlesine Δ^* polar dualinin k-boyutlu yüzü denir. Burada F ve F^* yüzlerini polar yüzler olarak adlandırılır(17).

Tanım 7.2.1. F^* polar yüzünün hacmine; Δ hiperbolik n-simpleksinin F yüzündeki θ_F polar açısı denir. Aynı zamanda F, Δ nın 2-eşboyutlu bir yüzü ve α_F Δ nın F yüzündeki dihedral açı olmak üzere;

$$\theta_F = \pi - \alpha_F \qquad [7.11]$$

olur(17).

Önerme 7.2.1. Δ bir hiperbolik n-simpleks olsun. $V_{2k+1}(F)$ ile k-boyutlu F yüzünün hacmi, θ_F ile de F yüzündeki polar açı gösterilsin. $0 \leq i \leq n-1$ için $c_i = \dfrac{\Gamma(\frac{i+1}{2})\Gamma(\frac{n-i}{2})}{2\Gamma(\frac{n+1}{2})} = \dfrac{Vol(S^n)}{Vol(S^i)Vol(S^{n-1-i})}$, $c_n = 1$ ve Δ nın tek boyutlu yüzleri üzerinden toplam alınmak üzere;

$$V_n(\Delta^p) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} (-1)^k c_{2k+1} \sum_{\dim(F)=2k+1} V_{2k+1}(F)\theta_F \qquad [7.12]$$

bağıntısı vardır. 1-eşboyutlu yüzlerde $k = \dfrac{n-1}{2}$ olduğunda θ_Δ polar açısı 1 e eşit, $k = \dfrac{n-2}{2}$ olduğunda polar açılar da 1 e eşit ve k=0 olduğunda ise bir tepenin hacmi 1 e eşit kabul edilecektir(17).

Tanım 7.2.3. $\kappa = \pm 1$ sabit eğrilikli semi-Öklidyen uzaylar da [7.12] formülüne konveks polihedron için genelleştirilmiş Santalo formülü denir(17).

Sonuç 7.2.1 Δ n-simpleksinin boyutu tek ise Δ^p tümleyen dualinin hacmi ile Δ nın hacmi ve yüzleri arasında;

$$V_n(\Delta^p) + (-1)^{\frac{n+1}{2}} V_n(\Delta) = \sum_{k=0}^{\frac{n-3}{2}} (-1)^k c_{2k+1} \sum_{\dim(F)=2k+1} V_{2k+1}(F)\theta_F \qquad [7.13]$$

bağıntısı vardır.

<u>*İspat:*</u> θ_{F^*}, Δ^* ın F^* yüzündeki polar açının cebirsel ölçümü ve $V_k(F^*)$ ise Δ^* ın k-boyutlu F^* yüzünün hacmi olsun. $c_i = c_{n-i-1}$ ve $2 \le r \le n-1$ olmak üzere [6.28] eşitliği Δ^* için uygulanırsa;

$$c_{r-2} \sum_{\dim(F^*)=n-r+1} \theta_{F^*} dV_{n-r+1}(F^*) - c_r \sum_{\dim(F^*)=n-r-1} V_{n-r-1}(F^*) d\theta_{F^*} = 0 \qquad [7.14]$$

bulunur. $\{w_0, w_1, \ldots, w_n\}$ bazının duali $\{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$ vektörleri üst zaman konisin(time koni)dedir. Bundan dolayı Δ^* ın F^* yüzündeki polar açının cebirsel ölçümü, Δ polar F yüzünün hacmiyle çakışır (Tanım 6.2.3.). Buradan sırasıyla $F \subset \Delta$ ve $F^* \subset \Delta^*$ ise r ve n-r-1 boyutlu polar yüzlerdir ve

$$V_r(F) = \theta_{F^*} \text{ ve } V_{n-r-1}(F^*) = \theta_F$$

olur. Bundan dolayı [7.14] eşitliği sayılabilir çoklukta Δ simpleksinin terimleri için θ_F; Δ ın F yüzündeki polar açı, $V_k(F)$; Δ ın k-boyutlu F yüzünün hacmi ve $1 \le r \le n-r$ olmak üzere;

$$c_{r-2} \sum_{\dim(F)=r-2} V_{r-2}(F) d\theta_F - c_r \sum_{\dim(F)=r} \theta_F dV_r(F) = 0 \qquad [7.15]$$

olur. Diğer taraftan $c_1 = c_{n-2} = \dfrac{1}{n-1}$ ve $\theta_F = \pi - \alpha_F$ eşitliklerinden;

$$dV_n(\Delta) = c_{n-2} \sum_{\dim(F)=n-2} V_{n-2}(F) d\theta_F \qquad [7.16]$$

hiperbolik Schlafli diferensiyel formülü yazılır. Bu formül;

$$(-1)^{\frac{n-3}{2}} c_{n-2} \sum_{\dim(F)=n-2} V_{n-2}(F) d\theta_F = (-1)^{\frac{n-3}{2}} dV_n(\Delta) \qquad [7.17]$$

şeklinde de yazılır. Ayrıca de Sitter küresinde α_{F^*}; Δ^p tümleyen dualinin F^* yüzündeki dihedral açı olmak üzere Schlafli diferensiyel formülü;

$$dV_n(\Delta^p) = c_1 \sum_{\dim(F^*)=n-2} V_{n-2}(F^*) d\alpha_{F^*} \qquad [7.18]$$

olur. $\alpha_{F^*} = V_1(F)$ ve $V_{n-2}(F^*) = \theta_F$ ve F, F^* ın polar yüzü olmak üzere;

$$dV_n(\Delta^p) = c_1 \sum_{\dim(F)=1} \theta_F dV_1(F) \qquad [7.19]$$

elde edilir. Buna göre [7.17], [7.18] ve [7.19], eşitliklerinden;

$$c_1 \sum_{\dim(F)=1} \theta_F dV_1(F) = dV_n(\Delta^p)$$

$$c_1 \sum_{\dim(F)=1} V_1(F) d\theta_F - c_3 \sum_{\dim(F)=3} \theta_F dV_3(F) = 0$$

$$-c_3 \sum_{\dim(F)=3} V_3(F) d\theta_F + c_5 \sum_{\dim(F)=5} \theta_F dV_5(F) = 0$$

$$\vdots$$

$$(-1)^{\frac{n-7}{2}} c_{n-6} \sum_{\dim(F)=n-6} V_{n-6}(F) d\theta_F + (-1)^{\frac{n-5}{2}} c_{n-4} \sum_{\dim(F)=n-4} \theta_F dV_{n-4}(F) = 0$$

$$(-1)^{\frac{n-5}{2}} c_{n-4} \sum_{\dim(F)=n-4} V_{n-4}(F) d\theta_F + (-1)^{\frac{n-3}{2}} c_{n-2} \sum_{\dim(F)=n-2} \theta_F dV_{n-2}(F) = 0$$

$$(-1)^{\frac{n-3}{2}} c_{n-2} \sum_{\dim(F)=n-2} V_{n-2}(F) d\theta_F = (-1)^{\frac{n-3}{2}} dV_n(\Delta)$$

eşitlikleri yazılıp taraf tarafa toplanırsa;

$$c_1 \sum_{\dim(F)=1} \left(\theta_F dV_1(F) + V_1(F) d\theta_F\right) - c_3 \sum_{\dim(F)=3} \left(\theta_F dV_3(F) + V_3(F) d\theta_F\right)$$

$$+ \ldots + (-1)^{\frac{n-5}{2}} c_{n-4} \sum_{\dim(F)=n-4} \left(\theta_F dV_{n-4}(F) + V_{n-4}(F) d\theta_F\right)$$

$$+ (-1)^{\frac{n-3}{2}} c_{n-2} \sum_{\dim(F)=n-2} \left(\theta_F dV_{n-2}(F) + V_{n-2}(F) d\theta_F\right) = dV_n(\Delta^p) + (-1)^{\frac{n-3}{2}} dV_n(\Delta)$$

olur. Bu son eşitlik;

$$c_1 d\left(\sum_{\dim(F)=1} \theta_F V_1(F)\right) - c_3 d\left(\sum_{\dim(F)=3} \theta_F V_3(F)\right) + \ldots + (-1)^{\frac{n-3}{2}} c_{n-2} d\left(\sum_{\dim(F)=n-2} \theta_F V_{n-2}(F)\right)$$

$$= d\left(V_n(\Delta^p) + (-1)^{\frac{n-3}{2}} V_n(\Delta)\right) \qquad [7.20]$$

şeklinde de yazılabilir. [7.20] eşitliğinin integrali alınırsa;

$$V_n(\Delta^p) + (-1)^{\frac{n-3}{2}} V_n(\Delta) = \sum_{k=0}^{\frac{n-3}{2}} (-1)^k c_{2k+1} \sum_{\dim(F)=2k+1} V_{2k+1}(F) \theta_F + c \qquad [7.21]$$

eşitliği bulunur. Δ sıfıra giderken limit alındığında Δ^p ve θ_F de sıfıra gideceğinden c integral sabiti sıfırdır ve

$$V_n(\Delta^p) + (-1)^{\frac{n-3}{2}} V_n(\Delta) = \sum_{k=0}^{\frac{n-3}{2}} (-1)^k c_{2k+1} \sum_{\dim(F)=2k+1} V_{2k+1}(F) \theta_F \qquad [7.22]$$

bulunur.

<u>Sonuç 7.2.2</u>. Δ n-simpleksinin boyutu çift ise $S_{n-1}(\Delta)$ 1-eşboyutlu yüzlerinin alanını göstermek üzere; $S_{n-1}(\Delta)$ ile Δ^p tümleyen dualinin hacmi arasında;

$$V_n(\Delta^p)+(-1)^{\frac{n}{2}}c_{n-1}S_{n-1}(\Delta)=\sum_{k=0}^{\frac{n-4}{2}}(-1)^k c_{2k+1}\sum_{\dim(F)=2k+1}V_{2k+1}(F)\theta_F \qquad [7.23]$$

bağıntısı vardır.

<u>*İspat:*</u> $S_{n-1}(\Delta)$ terimini Δ nın 3-eşboyutlu yüzlerinin hacimleri cinsinden Schlafli diferensiyel formülünden;

$$(-1)^{\frac{n-4}{2}}c_{n-3}\sum_{\dim(F)=n-3}V_{n-3}(F)d\theta_F=(-1)^{\frac{n}{2}}S_{n-1}(\Delta) \qquad [7.24]$$

bağıntısı vardır. Buna göre [6.28], [7.19] ve [7.24] den;

$$c_1\sum_{\dim(F)=1}\theta_F dV_1(F)=dV_n(\Delta^p)$$

$$c_1\sum_{\dim(F)=1}V_1(F)d\theta_F-c_3\sum_{\dim(F)=3}\theta_F dV_3(F)=0$$

$$-c_3\sum_{\dim(F)=3}V_3(F)d\theta_F+c_5\sum_{\dim(F)=5}\theta_F dV_5(F)=0$$

$$\vdots$$

$$(-1)^{\frac{n-8}{2}}c_{n-7}\sum_{\dim(F)=n-7}V_{n-7}(F)d\theta_F+(-1)^{\frac{n-6}{2}}c_{n-5}\sum_{\dim(F)=n-5}\theta_F dV_{n-5}(F)=0$$

$$(-1)^{\frac{n-6}{2}}c_{n-5}\sum_{\dim(F)=n-5}V_{n-5}(F)d\theta_F+(-1)^{\frac{n-4}{2}}c_{n-3}\sum_{\dim(F)=n-3}\theta_F dV_{n-3}(F)=0$$

$$(-1)^{\frac{n-4}{2}}c_{n-3}\sum_{\dim(F)=n-3}V_{n-3}(F)d\theta_F=(-1)^{\frac{n}{2}}S_{n-1}(\Delta)$$

eşitlikleri yazılıp taraf tarafa toplanıp Sonuç 7.2.1 deki işlemler uygulanırsa;

$$V_n(\Delta^p) + (-1)^{\frac{n}{2}} c_{n-1} S_{n-1}(\Delta) = \sum_{k=0}^{\frac{n-4}{2}} (-1)^k c_{2k+1} \sum_{\dim(F)=2k+1} V_{2k+1}(F)\theta_F \qquad [7.25]$$

olduğu gösterilmiş olur.

8. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada ilk defa; semi-Öklidyen uzayda psedo-küresel ve psedo-hiperbolik koordinat dönüşümleri ile Schlafli diferensiyel formülü kullanılarak psedo-küresel ve psedo-hiperbolik n-simplekslerin hacimlerinin diferensiyeli 2-eşboyutlu yüzlerin hacimlerine ve bu yüzlerdeki dihedral açıların diferensiyellerine bağlı olarak ifade edilmiştir.

Bu çalışmanın gelecekteki hedefi; (20) de verilen bir hiperbolik simpleksin Gram matrisi ve ayrıt matrisi arasındaki bağıntıları kullanarak, Schlafli difrensiyel formülünü ve buna bağlı diğer formülleri ayrıt uzunluklarına bağlı olarak ifade etmektir.

KAYNAKLAR

1. Schlafli, L., "On the multiple integral $\int^{n} dxdy...dz$, whose limits are $p_1 = ax_1 + b_1 y + ... + h_1 z > 0 \quad p_2 > 0,...,p_n > 0$ and $x^2 + y^2 + ... + z^2 < 1$" ***Quart. J. Math.*** 2: 269-301 (1858).

2. Kneser, H., "Der Simplexinhalt in der nickteuklidischen Geometrie", ***Deutche Math.***, 1: 337-340 (1936).

3. Milnor, J., "The Schlafli differential equality", ***Publish or Perish, Collected papers***, 1: 234-246 (1994).

4. Hilden, H.M., Lozano, M.T. and Montesinos, J.M., "On a remarkable polyhedron geometrizing the figure eight knot cone manifolds", ***J. Math. Sci. Univ.*** Tokyo, 2: 501-561 (1995).

5. Hilden, H.M., Lozano, M.T. and Montesinos, J.M., "On Volumes and Chern-Simons invariants of geometric 3-manifolds" ***J. Math. Sci. Univ.*** Tokyo, 3: 723-744 (1996).

6. Hilden, H.M., Lozano, M.T. and Montesinos, J.M., "Volumes and Chern-Simons invariants of cyclic coverings over rational knots", ***World Scientific Publishing Co.***, Helsinki, Finland 31-55 (1996).

7. Hodgson, C., "Degeneration and regeneration of geometric structures on 3-manifolds", Ph.D. thesis, ***Princeton University***, Princeton USA 42-43 (1986).

8. Bonahon, F., "A Schlafli-type formula for convex cores of hyperbolic 3-manifolds", ***J. Diff. Geom.***, 50(1): 25-58 (1998).

9. Schlenker, J.M., "Polyedres dans les espaces de Sitter-hyperboliques", ***J. Diff. Geom.*** 49: 267-278 (1997).

10. Schlenker, J.M., "Metriques sur les polyedres hyperboliques convexes", ***J. Diff. Geom.*** 48: 323-405 (1998).

11. Hodgson, C. And Rivin, .,"A characterization of compact convex polyhedra in hyperbolic 3-space", ***Invent. Math.***, 111: 77-111 (1993).

12. Santalo, L., "Integral Geometry and Geometric probability", ***encyclopedia of Mathematics and its applications, Addison-Wesley*** 1: Cambridge 23-45 (1976).

13. Hacısalihoğlu, H.H., "Diferensiyel Geometri", ***Nobel,*** 1-45 Ankara (2004).

14. O'neil, B., "Semi-Riemannian Geometry" , ***Academic Press.*** 20-180 London (1983),

15. Duggal, Krishan L. and Aurel Bejancu, "Light-like submanifolds of semi-Riemannian manifolds and applications", ***Kluwer Academic***, 23-39, Boston, (1996).

16. Ratcliffe, J.G., "Foundations of Hyperbolic Manifolds", ***Springer-Verlag***, Berlin, 75-180 (1994).

17. Eva Suarez-Peiro, "A Schlafli Diffrential Formula For Simplices In Semi-Riemannian Hyperquadrics, Gauss-Bonnet Formulas For Simplices In The De Sitter Sphere And The Dual Volume Of A Hyperbolic Simplex", ***Pas. J. Math***., 194(1):229-255 (2000).

18. Budak, B.M., Fomin, S.V., "Multiple Integrals, Field Theory and Series", ***Mir Publishers*** , Moscow85-103, (1973).

19. Cohn, Donald L., "Measure Theory", ***Birkhauser,*** Boston,180-225 (1980).

20. Karlığa, B., "Edge matrix of Hyperbolic Simplices" , ***Geom. Dedicata*** , Preprint (2004).

ÖZGEÇMİŞ

11.04.1981 yılında Sivas ta doğdu. İlk öğrenimine Sivas ta başlayıp orta öğrenimini Mersin de tamamladı. 2001 yılında Niğde Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden mezun oldu. 2001 yılında Konya Gazi Mustafa Kemal İlköğretim Okuluna matematik öğretmeni, 2002 yılında da Gazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümüne Araştırma Görevlisi olarak atandı. Halen aynı görevi yürütmektedir.