

152635

T.C
Niğde Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

VASSİLİEV İNVARİYANTLARI

Fusun Yalçın

Yüksek Lisans Tezi

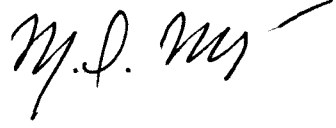
Danışman: Prof. Dr. Mammad Mustafayev

HAZİRAN 2004

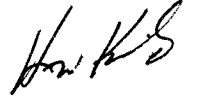
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğüne;

Bu çalışma jürimiz tarafından MATEMATİK ANABİLİM DALI'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Mammad İ. MUSTAFAYEV, Niğde Üniversitesi



Üye: Yrd. Doç. Dr. Hasan KÖSE, Selçuk Üniversitesi



Üye: Yrd. Doç. Dr. İsmet ALTINTAŞ, Niğde Üniversitesi



ONAY:

Bu tez 8/10/2004 tarihinde, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunca belirlenmiş olan yukarıdaki jüri üyeleri tarafından uygun görülmüş ve Enstitü Yönetim Kurulu'nun kararıyla kabul edilmiştir.

8/10/2004



Doç. Dr. Aydın TOPÇU

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ÖZET

VASSİLİEV İNVARYANTLARI

YALÇIN, Füsün

Niğde Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Ana Bilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Mammad MUSTAFAYEV

Haziran 2004, 61 sayfa

Bu çalışmada Vassiliev invaryantları tanıtıldı ve temel özellikleri verildi.

Önce singüler düğümler ve singüler düğümlerin denkliği verildi. Singüler düğümlerin invaryantı olarak Vassiliev invaryantı tanımlandı. Bazı temel özellikleri verildi. Alexander-Conway polinomundan $2m$ -dereceli bir Vassiliev invaryantı oluşturulduğu ve Jones polinomundan da m -dereceli bir Vassiliev invaryantı oluşturulduğu gösterildi. Düğümün işaretinin bir Vassiliev invaryantı olmadığı gösterildi. Sonra Vassiliev invaryantının giriş diyagramı denen bir formülü sağladığı ve bu formül sayesinde düğümlerin Vassiliev invaryantlarının daha kolayca hesaplandığı örneklerle gösterildi.

Vassiliev invaryantları ile ilgili çalışmalar henüz gelişme aşamasındadır ve düğüm teorisinde ki gelişmelerde etkili rol oynayacağı tahmin edilmektedir. Bu yüzden sonuç bölümünde Vassiliev invaryantları ile ilgili bazı tahminler ve bazı çalışmalardan bahsedildi.

Anahtar kelimeler: Vassiliev invaryantı, Jones polinomu, Alexander-Conway polinomu, Singüler düğümler, Düğümün işareti

ABSTRACT

VASSILIEV INVARIANTS

YALÇIN,Füsun

Niğde University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor :Prof. Dr. Mammad MUSTAFAYEV

June 2004, 61 pages

In this study, Vassiliev invariants are introduced and it's fundamental properties are given.

Firstly, singular knots and the equivalency of singular knots are given. Vassiliev invariant is defined as a invariant of a singular knot and it's basic properties are given.

It is shown that Vassiliev invariant with $2m$ -degree is constructed by Alexander-Conway polynomial and with m -degree is constructed by Jones polynomial. It is also shown that the singnature of a knot is not a Vassiliev invariant.

Next, it is shown that Vassiliev invariant satisfies a formula which called Kord diagram and by use this formula Vassiliev invariants of knots are simply calculated by examples.

The studies about Vassiliev invariants are still developing and it conjecture that this studies will big role in the development of the knot theory . Therefore, in chapter finally of this study, it is mentioned from same conjecture and studies about Vassiliev invariants.

Key words: Vassiliev invariant, Jones polynomial, Alexander-Conway polynomial, singular knot, the singnature of a knot.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmada bana her türlü kolaylığı sağlayan ve yardımlarını esirgemeyen Niğde Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü Öğr. Üyesi hocam Prof. Dr. Mammad İ. MUSTAFAYEV'e, Matematik bölüm Başkanı Yrd. Doç. Dr. İsmet ALTINTAŞ'a, bütün Matematik Bölümü öğretim elemanlarına ve değerli eşime teşekkür ederim.



İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	iii
ABSTRACT.....	iv
TEŞEKKÜR.....	v
İÇİNDEKİLER DİZİNİ.....	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	vii
BÖLÜM I. GİRİŞ VE LİTERATÜR ÖZETİ	1
BÖLÜM II. TEMEL KAVRAMLAR	3
2.1. Düğüm ve Halka.....	3
2.2 Bazı Klasik Düğüm İnvaryantları.....	5
2.3 Örgüler.....	8
2.4 Seifert Çemberi.....	9
2.5 Düğümün Polinomları.....	12
2.6. Uzaysal Graf.....	20
BÖLÜM III. SİNGÜLER DÜĞÜMLER	25
BÖLÜM IV. VASSİLİEV İNVARYANTLARI	29
BÖLÜM V. VASSİLİEV İNVARYANTLARINA BAZI ÖRNEKLER	35
BÖLÜM VI. KİRİŞ (KORD) DİYAGRAMLARI	41
BÖLÜM VII. SONUÇ VE ÖNERİLER	50
KAYNAKLAR	53

ŞEKİLLERİN DİZİNİ

Şekil 2.1 (a) Yonca yaprağı düğümü.....	4
Şekil 2.1 (b) (3,2)-Türk düğümü.....	4
Şekil 2.1 (c) Kare düğümü.....	4
Şekil 2.2 Reidemeister hareketleri.....	5
Şekil 2.3 8-şekilli düğüm.....	5
Şekil 2.4 3 İpli bir örgü.....	8
Şekil 2.5 Örgü kapanışı.....	9
Şekil 2.6 (a) (5) düğümünün regüler diyagramı.....	10
Şekil 2.6 (b) (5) düğümünün seifert yüzeyi.....	10
Şekil 2.7 Eğrilerin yükselmesi.....	10
Şekil 2.8 Skein diyagramları.....	13
Şekil 2.9 4'lü skein diyagramı.....	18
Şekil 2.10 1- Reidemeister hareketleri.....	19
Şekil 2.11 Bir uzay grafi ve normal diyagramı.....	21
Şekil 2.12 Bir graf ve dual grafiği.....	21
Şekil 2.13 Bir grafın renklendirilmesi.....	22
Şekil 2.14 Kavşak üzerindeki lokal diyagramlar.....	23
Şekil 2.15 Şekil 2.11 deki grafların mümkün durumları.....	23

Şekil 3.1	Bazı singüler düğüm örnekleri.....	25
Şekil 3.2	(a) Denk singüler düğümler.....	26
Şekil 3.2	(b) Denk olmayan singüler düğümlere örnekler.....	26
Şekil 3.3	Singüler düğüm için 3- Reidemeister hareketi.....	27
Şekil 4.1	Düğüm Kavşakları.....	30
Şekil 4.2	Bir singüler düğüm ağaç diyagramı.....	34
Şekil 5.1	Singüler $K[5,3]$ düğümü.....	36
Şekil 6.1	Kiriş diyagramı.....	41
Şekil 6.2	Kiriş diyagramı.....	41
Şekil 6.3	Kiriş diyagramı.....	42
Şekil 6.4	Kiriş diyagramı.....	42
Şekil 6.5	Yonca yaprağı düğümünün singüler ağaç diyagramı.....	43
Şekil 6.6	Aynı v_2 değerine sahip singüler düğümler.....	45
Şekil 6.7	Kiriş diyagramı.....	45
Şekil 6.8	Kiriş diyagramı.....	46
Şekil 6.9	8-şekli singüler düğümün 3. dereceden giriş diyagramı.....	47
Şekil 6.10	v_3 ün gerçek tablosu.....	48
Şekil 7.1	$K(5,2)$ düğümü.....	50

BÖLÜM I

GİRİŞ VE LİTERATÜR ÖZETİ

Jones devriminin ortasında 1980 nin sonlarına doğru V.A.Vassiliev, Jones devriminin hemen sonrası dönemde düğüm teorisinde çok önemli etki yapan yeni bir kavram ortaya attı (Vassiliev V.A.,1990). “Vassiliev invaryantları” denilen bu kavramın önemi, Jones tipi invaryantlarının daha sistematik bir şekilde çalışabilmek için kullanılmasıdır.

Düğüm teorisi açısından Vassiliev invaryantlarının diğer bir önemi, Jones tipi invaryantlarının kesin topolojik yorum verebilmesi gerçeğidir. Fakat bazı bilim adamları bu topolojik yorumların klasik anlamda invaryant olmadığından endişe etmektedirler. Her ne kadar Vassiliev invaryantları Jones tipi invaryantlara daha ileri bir bakış açısı getirmişse de, Jones tipi invaryantların klasik düğüm teorisiyle; örneğin, örtü uzayları ile ilişkilendirileceği sorusu açıktır.

Bu tezde Vassiliev invaryantlarının tam formunun düğüm teorisinde daha önceden bilinen bütün invaryantlardan farklı olduğunu göstereceğiz. Alexander polinomlarına benzeyen düğüm invaryantları, bir düğümü bir çeşit matematiksel nicelikle birleştirmektedir. Diğer taraftan bir Vassiliev düğüm invaryantı bir dizi şartları sağlayan bir invaryanttır. Bu anlamda Bölüm 2.5 de verilen polinom invaryantların; Jones polinomları, Skein polinomları ve Alexander polinomları hepsinin Vassiliev İnvaryantı oldukları gösterilebilir. Buna rağmen hiçbir sayısal düğüm invaryantı, Vassiliev İnvaryantı değildir. Bu bağlamda bir düğümün işaretinin bir Vassiliev invaryantı olmadığını göreceğiz (bak Önerme 5.8).

Vassiliev invaryantı yeni bir konu olduğundan hala gelişmektedir. Bu tezin amacı bu konuyu takip edebilecek belki de bu kavramı geliştirebilecek, bu yeni kavrama temel bir giriş vermektedir.

Bu tez giriş bölümü dahil yedi bölümden oluşmaktadır. İkinci bölümde diğer bölümlerde kullanılan düğüm teorisinin bazı temel kavramlarından, klasik düğüm invaryantlarından, düğüm polinomlarından ve uzaysal graflardan bahsedildi. Üçüncü bölümde singüler düğümler tanıtıldı. Singüler düğümlerin denkliğinden bahsedildi ve bazı örnekler verildi. Dördüncü bölümde Vassiliev invaryantı anlatıldı. Vassiliev invaryantının özellikleri verildi ve singüler düğümlerin Vassiliev invaryantının hesaplanmasında kullanılan ağaç diyagramı adı verilen bir algoritma örneklerle açıklandı. Beşinci bölümde Vassiliev invaryantına bazı örnekler verildi. Bu kapsamda

Alexander-Conway polinomunun $2m$ -dereceli bir Vassiliev invariantı oluşturduğu ve Jones polinomunun m . dereceden bir Vassiliev invariantı oluşturduğu gösterildi. Ayrıca düğümün işareti ile tanımlanan bir Vassiliev invariantı olmadığı gösterildi. Altıncı bölümde Vassiliev invariantının 4-terimli formül olarak adlandırılan bir lineer denklemi sağladığı gösterildi. Kiriş diagramı dediğimiz bu denklemle bazı düğümlerin Vassiliev invariantları hesaplandı. Sonuç ve öneriler bölümünde Vassiliev invariantları ile ilgili bazı yeni çalışmalardan ve hala açık olan bazı tahminlerden kısaca bahsedildi.



BÖLÜM II

TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Düzüm ve Halka

2.1.1. Yerleştirme. X ve Y iki Hausdorff uzayı olsun. Eğer $f : X \rightarrow f(X)$ bir homeomorfizm ise $f : X \rightarrow Y$ dönüşümüne bir yerleştirme denir (Altıntaş, 1993).

2.1.2. Düzüm ve Halka. $S^1 = \{ (x,y) : x^2 + y^2 = 1 ; x,y \in \mathbb{R} \}$ birim çember olsun. S^1 in $\mathbb{R}^3$ veya $S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ içine yerleştirmesine bir düğüm denir. $n \in \mathbb{N}$ için n tane düğümün ayrık birleşimine bir halka denir (Burde ve Zieschang, 1985. Fox, 1962. Rolfsen, 1976).

2.1.3. Denk Düzümler. K ve L , S^3 içinde yönlendirilmiş iki düğüm olsun. Eğer $h(K) = L$ olacak şekilde yönlendirmeyi koruyan bir $h : S^3 \rightarrow S^3$ homeomorfizmi varsa K düğümü L düğümüne denktir denir (Rolfsen, 1976).

2.1.4. Not. İki düğümün denkliği tanımı; S^3 içindeki düğümler kümesi üzerinde bir denklik bağıntısı verir. Bu bağıntı, söz konusu kümeyi ayrık denklik sınıflarına ayırır. Her denklik sınıfına bir düğüm tipi denir. Denk iki düğüm, aynı düğüm tipindedir.

2.1.5. Düzümlenmemiş (aşıkâr) düğüm, aşıkâr halka. Yönlendirilmiş bir üçgen (veya bir çember) ile aynı tipte olan bir düğüme düzümlenmemiş (aşıkâr) düğüm denir. Halkalanmamış halkaya ise aşıkâr halka denir (Burde ve Zieschang, 1985. Rolfsen, 1976).

2.1.6. İzdüşüm fonksiyonu. $p : S^3 \rightarrow S^3$, $p(x, y, z) = (x, y, 0)$ ile tanımlanan fonksiyona izdüşüm fonksiyonu denir.

Eğer K , S^3 içinde bir düğüm ise, K nın p izdüşüm fonksiyonu altındaki resmi, $p(K)$, K nın xoy- düzlemindeki izdüşümüdür. K poligonal bir düğüm ise, $p(K)$ düzlemsel bir poligondur.

2.1.7. Kavşak noktası. K , S^3 içinde bir düğüm ve p , yukarıda geçen izdüşüm fonksiyonu olsun. $a \in p(K)$ için $p^{-1}(a) \cap K$, n tane ($n > 1$) noktadan ibaret ise, a ya $p(K)$ nın bir n - katlı noktası denir. Eğer $n = 2$ ise, a noktasına kavşak noktası (çift katlı nokta) denir (Fox, 1962).

2.1.8. Alt kavşak noktası, Üst kavşak noktası. Bir kavşak noktası, K ya ait tam iki noktanın resmi olup, bu iki noktadan z koordinatı daha büyük olana üst kavşak noktası ve diğerine alt kavşak noktası denir.

2.1.9. Regüler pozisyon. K bir düğüm ve p izdüşüm fonksiyonu olsun. Eğer,

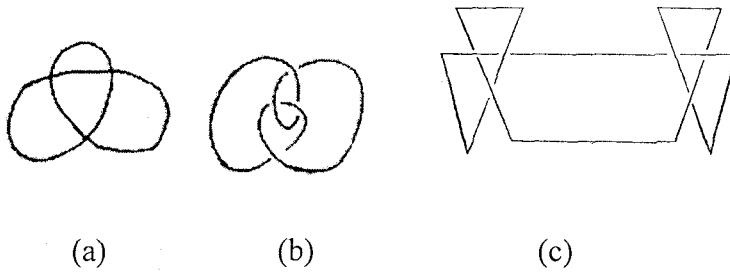
- i. $p(K)$ nın katlı noktaları sadece sonlu sayıda kavşak noktası ise,
- ii. Hiçbir kavşak noktası K ya ait bir köşe noktasının p altında resmi değilse,

$p(K)$ ya K nın regüler izdüşümü denir. Eğer $p(K)$ izdüşümü regüler ise, K düğümüne uzayda regüler pozisyonunda denir (Fox, 1962).

Bir düğümün regüler izdüşümüne, o düğümün regüler diyagramı da denir. Regüler diyagram; düğümün, uzayın yeteri kadar uzak ve uygun bir noktasından çizilen resmi gibidir (Fox, 1962).

2.1.10. Normal diyagram. Regüler pozisyonunda bulunan bir K düğümü ile bir $\varepsilon > 0$ sayısı verilsin. K nın her alt geçit noktasından uzaklığı ε dan küçük olan noktaların kümesi A ise, $p(K-A)$ kümesine K düğümünün normal diyagramı kısaca düğüm diyagramı denir (Burde ve Zieschang, 1985. Fox, 1962).

Böylece K düğümünün normal diyagramı ayırık yay parçalarından (veya doğru parçalarından) oluşur. Şekil 2.1.a, yonca yaprağı düğümünün regüler diyagramını ve Şekil 2.1.b ve 2.1.c sırasıyla (3,2)- Türk düğümü ve kare düğümünün normal diyagramlarını göstermektedir.



Şekil 2.1

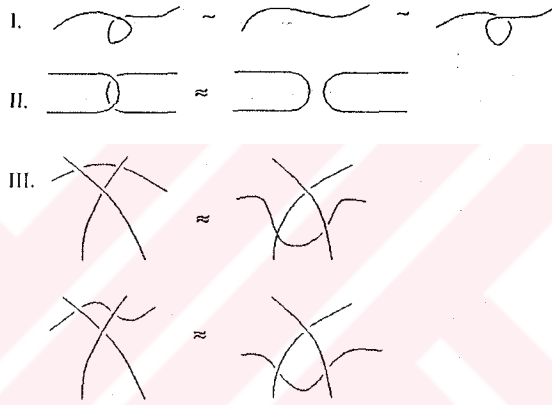
2.1.11. Yönlendirilmiş düğüm. Bir düğüm diyagramı üzerinde hareket yönü belirtilirse, o düğüm yönlendirilmiş olur. Böylece bir düğüm diyagramından yönlendirilmiş iki düğüm diyagramı elde edilir.



2.1.12. Ayna görüntüsü. Bir K düğümünün, $r: S^3 \rightarrow S^3$, $r(x, y, z) = (x, y, -z)$ ile tanımlanan yansıma fonksiyonu altındaki görüntüsüne K nın ayna görüntüsü denir. Yansıma fonksiyonu, uzayın yönlendirmesini tersine çeviren bir homeomorfizmdir (Altın, 1979).

2.2. Bazı Klasik Düğüm İnvaryantları

2.2.1. Reidemeister Hareketleri.

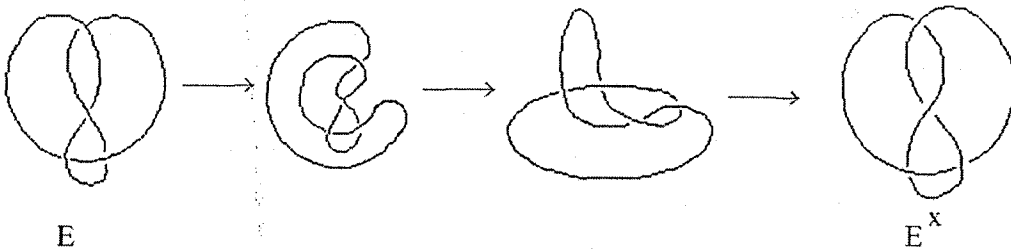


Şekil 2.2

İki poligonal düğümden biri, sonlu sayıda Reidemeister hareketiyle diğerine dönüşebiliyorsa bu düğümler aynı tiptendir. Yani, sonlu sayıda Reidemeister hareketinin uygulanmasıyla diyagramları birbirine dönüşebilen düğümler denktirler.

O halde, Reidemeister hareketleri ile değişmeyen özellikler, düğüm tipinin özellikleridir (Kauffman, 1991).

2.2.2. Örnek. Sekiz şekilli düğüm ayna görüntüsüne denktir.



Şekil 2.3

2.2.3. Regüler izotopi. II. ve III. Reidemeister hareketleri ile doğurulan denklik bağıntısına regüler izotopi denir (Kauffman, 1991).

2.2.4. Kuşatan izotopi. Reidemeister hareketlerinin üçü ile doğurulan diyagramlar üzerindeki denklik bağıntısına kuşatan izotopi denir (Kauffman, 1991).

Böylece II. ve III. hareketler regüler izotopi invaryantı; I. II. III. hareketler kuşatan izotopi invaryantıdır (Kauffman, 1991).

2.2.5. Kavşak sayısı. Bir K düğümünün herhangi bir diyagramındaki kavşakların minimum sayısına K'nın kavşak sayısı denir ve $c(K)$ ile gösterilir.

2.2.6. Halkalanma sayısı. $L = \{\alpha, \beta\}$, α ve β bileşenlerinden oluşan bir halka olsun. $lk(L) = lk(\alpha, \beta)$ halkalanma sayısı

$$lk(\alpha, \beta) = \frac{1}{2} \sum_{p \in \alpha \cap \beta} \varepsilon(p)$$

formülü ile tanımlanır. Burada $\alpha \cap \beta$, α ile β kavşaklarının (kendi kendini kesme hariç) kümesini ve $\varepsilon(p)$ ise kavşağın işaretini gösterir (Kauffman, 1991).



$$\varepsilon = +1$$



$$\varepsilon = -1$$

2.2.7. Burulma sayısı. K herhangi bir yönlendirilmiş halka diyagramı olsun. $C(K)$, K diyagramındaki kavşakların kümesi olmak üzere K'nın burulma sayısı

$$w(K) = \sum_{p \in C(K)} \varepsilon(p)$$

ile tanımlanır (Kauffman, 1991).

Burada p , K'nın bütün kavşakları üzerindendir ve $\varepsilon(p)$ ise kavşağın işaretidir. Dikkat edilirse, $w(K)$ nın bir regüler izotopi (II. , III.) invaryantı olduğu görülür ve

$$\begin{cases} W(\text{positive crossing}) = 1 + W(\text{negative crossing}) \\ W(\text{negative crossing}) = 1 + W(\text{positive crossing}) \\ W(\text{positive crossing}) = -1 + W(\text{negative crossing}) \\ W(\text{negative crossing}) = -1 + W(\text{positive crossing}) \end{cases}$$

olur.

2.2.8. Dügümlememe sayısı. Bir K düğümünün (veya halkasının) bir D regüler diyagramını aşık bir halkaya dönüştürebilmek için herhangi bir kavşak noktasındaki üst ve alt kavşak doğru parçalarının değişimine bir düğümlememe işlemi denir ve $u(D)$ ile gösterilir.

Eğer K bir düğüm (veya halka) ise K nın düğümlememe sayısı

$$u(K) = \min_D u(D)$$

ile tanımlanır. $u(K)$, K düğümünün bir invaryantıdır (Adams, 1999).

2.2.9. Köprü sayısı. D bir K düğümünün (veya halkasının) bir normal diyagramı olsun. D yi $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ ve $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ gibi $2n$ poligonal eğriye bölelim. Yani

$$D = \sigma_1 \cup \sigma_2 \cup \dots \cup \sigma_n \cup \beta_1 \cup \beta_2 \cup \dots \cup \beta_n$$

olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan n sayısına düğümün köprü sayısı denir ve $br(D)$ ile gösterilir. Özel olarak $n = 2$ durumuna 2-köprülü düğümler adı verilir.

- i. $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ karşılıklı olarak ayrık, basit, poligonal eğrilerdir.
- ii. $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ de karşılıklı ayrık, basit eğrilerdir.
- iii. D nin kavşak noktalarında $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ alttan geçen doğru parçaları iken, $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ kavşak noktalarının üstten geçen doğru parçalarıdır.

Eğer $br(D) \leq n$ ama $br(D) \leq n+1$ ise $br(D) = n$ olur.

$$br(K) = \min_D br(D)$$

sayısına köprü indeksi denir. $br(K)$, düğümün bir invaryantıdır (Adams, 1999).

2.2.10. Bir düğümün cinsi. Bir kapalı yönlendirilebilir F yüzeyi α_0 noktalarına, α_1 kenarlarına ve α_2 yüzlerine bölünürse

$$\chi(F) = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2$$

sayısı bu bölünmeden bağımsız olarak sabit kalır. Bu sayıya Euler karakteristiği denir.

$$g(F) = \frac{2 - \chi(F)}{2}$$

sayısına F nin cinsi denir (Burde ve Zieschang, 1985). F nin Euler karakteristiği ile cinsi arasında

$$\chi(F)=2-2g(F)$$

eşitliği vardır.

Eğer F sınırlı ise, sınır sonlu sayıda nokta ve kenardan meydana geldiği için yukarıdaki eşitlik

$$\chi(F)=2-\mu(F)-2g(F)$$

şeklinde olur. Burada $\mu(F)$, F nin sınırını oluşturan kapalı eğrilerin sayısıdır (Adams, 1999).

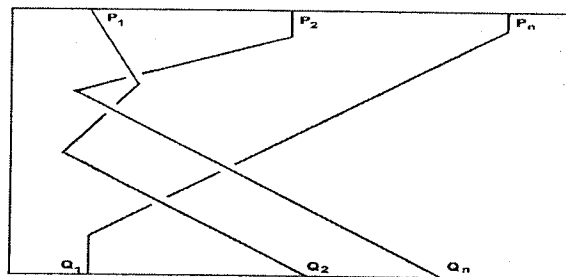
Eğer F sınırı düğüm olan bir yüzey ise, sınır bileşenlerinin sayısı 1 olduğundan yani $\mu(F)=1$ olduğundan

$$\chi(F)=1-2g(F) \text{ veya } g(F)=\frac{1-\chi(E)}{2}$$

olur. Bu eşitliğe kısaca düğümün cinsi adı verilir ve $g(K)$ ile gösterilir. Düğümün cinsi, düğümün bir invaryantıdır (Adams, 1999).

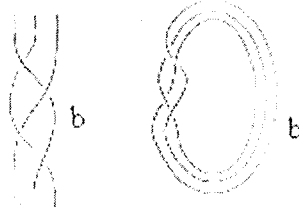
2.3. Örgüler.

2.3.1. Örgü. R^3 uzayında bir D dikdörtgeninin karşılıklı kenarları üzerine P_i , Q_i , $i = 1, \dots, n$ noktaları eşit uzaklıkta yerleştirilsin (şekil 2.4). f_i , P_i de başlayan ve $Q_{\pi(i)}$ de son bulan R^3 içinde n tane ayrık basit poligonal yay olsun. Burada $i \rightarrow \pi(i)$, $\{1, 2, \dots, n\}$ üzerinde bir permütasyondur. f_i lerin tam olarak aşağıya gitmesi istenir. Yani her bir f_i ; dikdörtgenin yan kenarına dik herhangi bir düzlemi en çok bir defa keser. f_i yaylarının hepsine birden n - örgü denir ve b ile gösterilir. Dikdörtgene b nin iskeleti ve $i \rightarrow \pi(i)$ ye örgü permütasyonu denir (Altıntaş, 1993. Rolfsen, 1976).



Şekil 2.4

Aşağıdaki diyagramda görüldüğü gibi 3-ipli bir örgünün kapanışı (kapalı örgü), başlangıç noktalarının paralel iplerinin bir koleksiyonu ile bitiş noktalarını birleştirerek elde edilir (Kauffman, 1991).



Şekil 2.5

2.3.2. Teorem. Her K halkası bir kapalı örgü ile temsil edilebilir (Burde ve Zieschang, 1985).

2.3.3. Örgü İndeksi. K n -ipli bir kapalı örgü ile temsil edilen bir örgü olsun. Bu duruma n sayısına K nin örgü sayısı (indeksi) denir.

2.4. Seifert Çemberi

2.4.1. Teorem. Keyfi yönlendirilmiş bir K düğümü (veya halkası) verilsin. O zaman $\mathbb{R}^3$ de sınırı K olan bir yönlendirilebilir bağlantılı f yüzeyi vardır. Bu yüzeye K nin bir seifert yüzeyi denir (Murasugi, 1996).

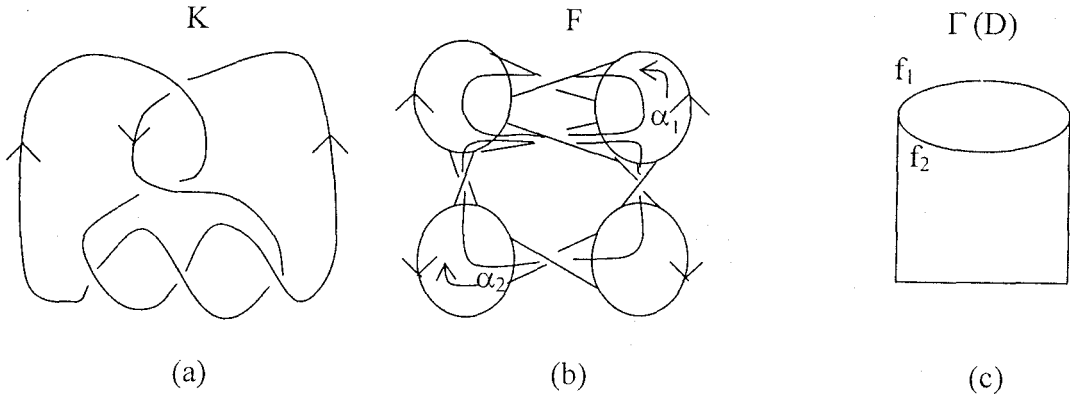
2.4.2. Seifert Çemberi. D bir yönlendirilmiş düğümün regüler diyagramı olsun. D nin kavşaklarını yönlendirmeye bağlı olarak ayrılması ile elde edilen basit kapalı eğrilere seifert eğrileri veya seifert çemberleri denir.

Bu ayırma sonucu D nin kendisi düzlemde bir halkanın kavşak noktası olmayan (aşıkark halka) bir regüler diyagramına dönüşür. Bu kapalı eğrilerin her biri bir disk sınırlar. Bu farklı disklerden bir seifert yüzeyi oluşturmak için diskler tam burulmalı küçük bantlarla birleştirilir.

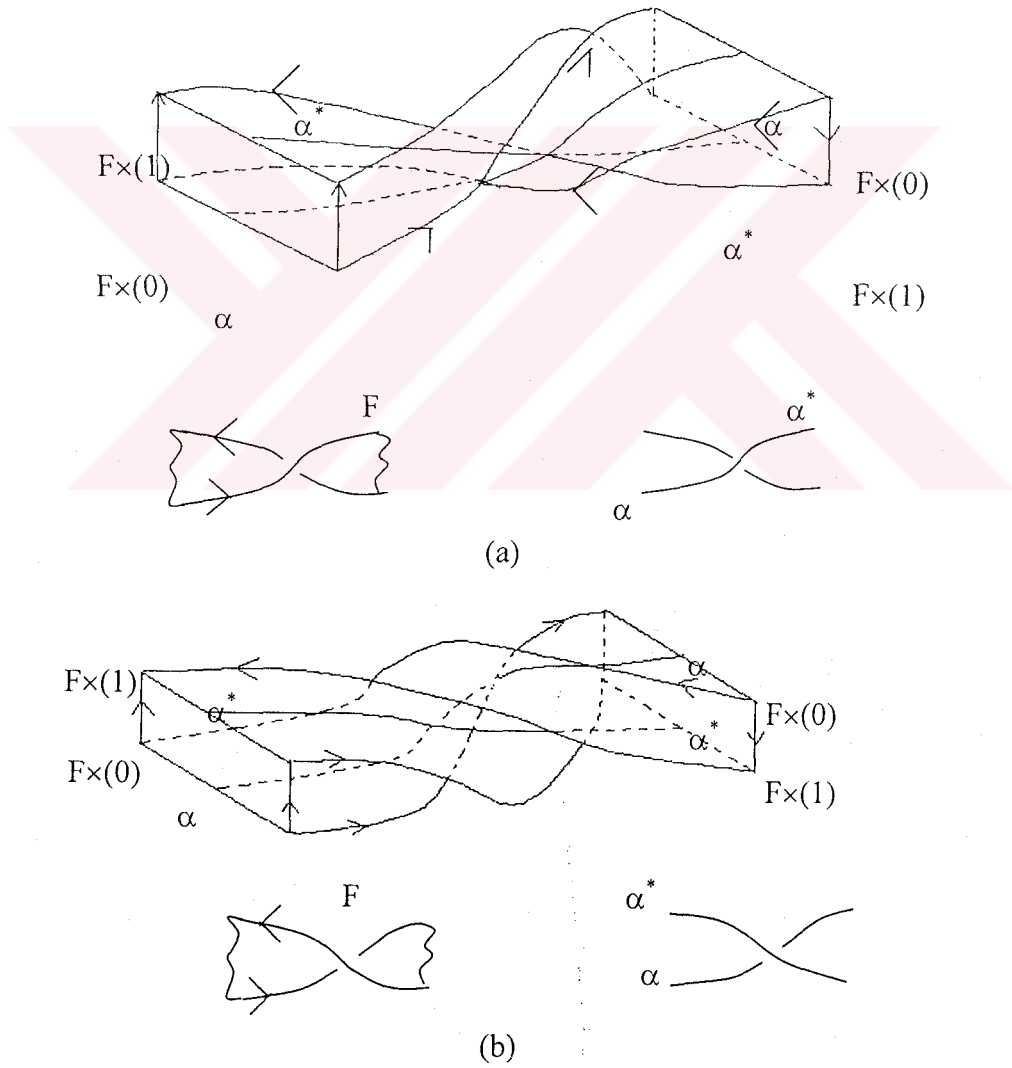
2.4.3. Seifert Grafi. Bir F yüzeyi 2.4.2 de tanımlanan bantlar ve disklerden elde edilmiş bir K düğümünün Seifert yüzeyi olsun. Herbir diskin bir noktaya büzülmesi ve aynı zamanda bantların genişliğini bir eğri parçasına büzülmesi ile bir graf oluşturulur. Böyle graflara düğümün Seifert grafi denir (Kawauchi, 1996).

2.4.4. Seifert Matrisi. F , bir K düğümünün (veya halkasının) regüler D diagramında oluşturulmuş bir Seifert yüzeyi ve $\Gamma(D)$ onun Seifert grafi olsun. Bu durumda $g(F)$, F

nin cinsini $\mu(F)$, sınır bileşenlerinin sayını göstermek üzere F üzerinde $2g(F) + \mu(F) - 1$ kapalı eğriler vardır. (bak şekil 2.6.(b))



Şekil 2.6



Şekil 2.7

Şekil 2.6.(b) de ki α_1 ve α_2 eğrilerinin ortak noktaları olabilir. Eğer F yüzeyi Şekil 2.7 daki gibi $I=[0,1]$ aralığı ile çarpılırsa yani $F \times I$ oluşturulursa α_1 ve α_2 eğrisine paralel α_1^* ve α_2^* eğrileri elde edilir. Bu durumda

$$M = \begin{bmatrix} lk(\alpha_1, \alpha_1^*) & lk(\alpha_1, \alpha_2^*) \\ lk(\alpha_2, \alpha_1^*) & lk(\alpha_2, \alpha_2^*) \end{bmatrix}$$

Matrisine seifert matrisi denir. Genel olarak $m \times m$ boyutlu bir seifert matrisi

$$M = [lk(\alpha_i, \alpha_j^*)]_{i,j=1,2,\dots,m}$$

şeklinde tanımlanır (Murasugi, 1996).

2.4.5. Düğümün İşareti. M düğümün seifert matrisi olsun. $M+M^t$ matrisinin işaretine düğümün işareti denir ve

$$\sigma(K) = \sigma(M + M^t)$$

ile gösterilir.

2.4.6. Tor Düğümü. q ve r aralarında asal olmak üzere bir katı tor üzerine q defa paralel yönünde, r defa meridyen yönünde sarılmış kapalı eğriye (q,r) tipinde bir tor düğümü denir.

2.4.7. Teorem. Farzedelim $q,r>0$ ve $\sigma(K(q,r))$ tor düğümünün işaretini $\sigma(q,r)$ ile tanımlayalım.

i. Farzedelim $2r < q$ olsun

$$(i) \text{ eğer } r \text{ bir tek tamsayı ise } \sigma(q,r) = \sigma(q-2r,r) + r^2 - 1;$$

$$(ii) \text{ eğer } r \text{ bir çift tamsayı ise } \sigma(q,r) = \sigma(q-2r,r) + r^2$$

$$ii. \sigma(2r,r) = r^2 - 1$$

iii. Farzedelim $r \leq q < 2r$ olsun,

$$(i) \text{ eğer } r \text{ bir tek tamsayı ise } \sigma(q,r) + \sigma(2r-q,r) = r^2 - 1;$$

$$(ii) \text{ eğer } r \text{ bir çift tamsayı ise } \sigma(q,r) + \sigma(2r-q,r) = r^2 - 2;$$

$$iv) \sigma(q,r) = \sigma(r,q), \sigma(q,1) = 0, \sigma(q,2) = q - 1 \text{ (Gordon C.McA.,Litherland, 1981)}$$

2.4.8. Örnek. $\sigma(14,5)$ düğümünü hesaplayalım. I .durumdan

$$\sigma(14,5) = \sigma(4,5) + 24 = \sigma(5,4) + 24$$

$$\sigma(5,4) \text{ ü III. durumdan hesaplarsak } \sigma(5,4) + \sigma(3,4) = 14$$

buradan

$$\sigma(4,3) + \sigma(2,3) = 8 \text{ ve } \sigma(4,3) = \sigma(3,4) = 6$$

$$\text{sonuç olarak } \sigma(14,5) = 32$$

2.5. Düğüm Polinomları

2.5.1. Alexander polinomu. Bir K düğümünün M Seifert matrisinin determinanı $\det M$ nin bir düğüm invaryantı değildir (Kawauchi, 1996. Adams, 1999). M, bir K düğümünün (veya halkasının) Seifert matrisi ise o zaman $|M + M^T|$, K düğümünün bir invaryantıdır. Bu invaryanta K'nin determinanı denir. K düğümünün invaryantı K'nin yönlendirmesinden bağımsızdır (Kawauchi, 1996).

Aşık düğümün determinanı 1 olduğundan bazı düğümlerin aşık düğüm olmadığını ispatlamak için determinantına bakılabilir. Ancak determinanı 1 olan fakat aşık düğüme denk olmayan düğümlerde vardır. Böylece bu invaryant düğümleri sınıflandırmada yeterli değildir.

M_1 ve M_2 bir K düğümü (veya halkası) için Seifert matrisleri olsun. Ayrıca r ve s, sırasıyla M_1 ve M_2 nin mertebeleri olsun, o zaman aşağıdaki eşitlik sağlanır.

$$t^{-\frac{r}{2}} \det(M_1 - t M_1^T) = t^{-\frac{s}{2}} \det(M_2 - t M_2^T)$$

Buradan eğer M, K'nin k. mertebeden bir Seifert matrisi ise o zaman $t^{-\frac{k}{2}} \det(M - t M^T)$ K'nin bir invaryantıdır. Bu invaryanta K'nin Alexander polinomu denir ve $\Delta_K(t)$ ile gösterilir

2.5.1.1 Alexander-Conway polinomu. $\nabla_K(z)$ Alexander-Conway polinomu, katsayıları tamsayı olan bir değişkenli Laurent polinomudur. Düğümün (veya halkanın) Alexander-Conway polinomu aşağıdaki bağıntıları sağlar (Kauffman, 1991).

i. Eğer K düğümü K' düğümünü kuşatan izotop ise

$$\nabla_K(z) = \nabla_{K'}(z)$$

$$\text{ii. } \nabla \bigcirc = 1$$

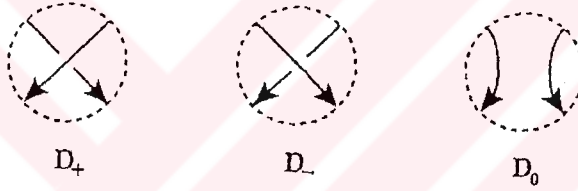
$$\text{iii. } \nabla \times - \nabla \times = z \nabla \times$$

2.5.1.2. Önerme. Bir K düğümünün Alexander polinomu ile Alexander-Conway polinomu

$$\Delta_K(t) = \nabla_K \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}} \right)$$

eşitliğini sağlar (Adams, 1999).

2.5.1.3. Ağaç diyagramı. D_+ , D_- , D_0 sırasıyla K_+ , K_- , K_0 düğümünün (veya halkasının) regüler diyagramları olsun. Bu diyagramlar bir kavşak noktasının bir komşuluğu hariç tamamen birbirinin aynısıdır. Bu komşulukta, diyagramlar şekil 2.8 de gösterildiği gibi farklıdır.



Şekil 2.8

O zaman bu üç düğümün (veya halkanın) Alexander-Conway polinomları yukarıdaki iii özelliğinden aşağıdaki gibi birbiriyle ilişkilidir.

$$\nabla_{K_+}(z) - \nabla_{K_-}(z) = z \nabla_{K_0}(z) \quad (2.1)$$

(2.1) eşitliğinden sırasıyla $\nabla_{K_+}(z)$ yi ve $\nabla_{K_-}(z)$ yi çekerek

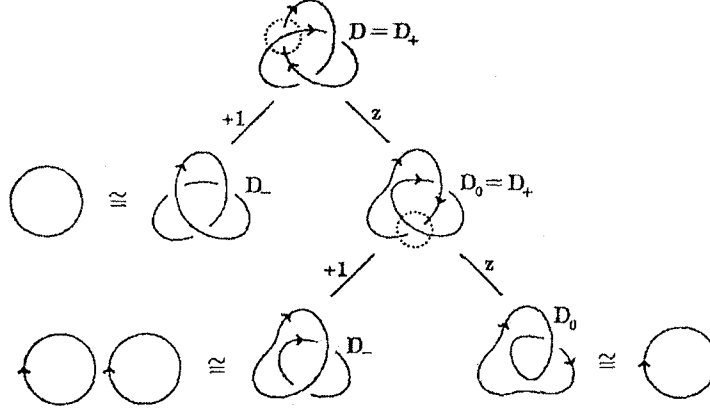
$$\left. \begin{aligned} \nabla_{K_+}(z) &= \nabla_{K_-}(z) + z \nabla_{K_0}(z) \\ \nabla_{K_-}(z) &= \nabla_{K_+}(z) - z \nabla_{K_0}(z) \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

eşitliklerini yazabiliriz.

K_+ , K_- , K_0 düğümleri ve onların D_+ , D_- , D_0 normal diyagramları arasında sınıflandırma yapmaya gerek olmadığından $\nabla_{K_+}(z)$ nin yerine $\nabla_{D_+}(z)$ yi alacağız.

Genellikle Conway polinomunu hesaplamada en etkili yol ağaç diyagramını kullanmaktır. Bu bir hesaplama yardımıyla yapıldığından bunu bir örnekle açıklayalım.

2.5.1.4. Örnek. Sağ –el yonca yaprağı düğümünün Alexander-Conway polinomunu ağaç diyagramı yardımıyla hesaplayalım.



Yukarıdaki ağaç diyagramından sağ-el yonca yaprağının Alexander-Conway polinomu

$$\nabla_D(z) = 1V_O(z) + zV_{O0}(z) + z^2V_O(z)$$

dir. $V_O(z)=1$ ve $V_{O0}(z)=0$ olduğundan

$$\begin{aligned}\nabla_D(z) &= 1 + z^2 = 1 + \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right)^2 \\ &= t^{-1} - 1 + t\end{aligned}$$

olur.

2.5.2. Jones Polinomu. K bir yönlendirilmiş düğüm (veya halka) ve D , K nın bir yönlendirilmiş regüler diyagramı olsun. Aşağıdaki aksiyomları sağlayan $\sqrt{t}$ değişkenli Laurent polinomuna Jones polinomu denir ve $V_K(t)$ ile gösterilir ($(\sqrt{t})^2 = t$).

i. K bir aşık düğüm ise

$$V_K(t) = 1$$

ii. D_+ , D_- , D_0 şekil 2.8 de verilen diyagramlar olsun. Bu durumda

$$\frac{1}{t}V_{D_+}(t) - tV_{D_-}(t) = \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right)V_{D_0}(t)$$

Jones polinomunun, yukarıdaki aksiyomlarla iyi tanımlı olduğunun ispatı için Lickorish, Millet ve Jones kaynaklarına bakılabilir (Lickorish ve Millet, 1987. Jones, 1987).

2.5.2.1. Örnek. Yonca yaprağı düğümünün Jones polinomunu hesaplayalım.



D_+



D_-



D_0

$$t^{-1}V_{D_+}(t) - tV_{D_-}(t) = \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}} \right) V_{D_0}(t)$$

$$t^{-1}V_{D_+}(t) - t \left(\bigcirc \right) = \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}} \right) V \left(\bigcirc \right)$$

$$t^{-1}V_{D_+}(t) - t = \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}} \right) \left(-t^{\frac{5}{2}} - t^{\frac{1}{2}} \right)$$

$$V_{D_+}(t) = t^2 + t \left(t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}} \right) \left(-t^{\frac{5}{2}} - t^{\frac{1}{2}} \right)$$

$$V_{D_+} = t^2 + t \left(-t^3 - t + t^2 + 1 \right)$$

$$= t^2 - t^4 - t^2 + t^3 + t$$

$$= t + t^3 - t^4$$

2.5.3. Skein Polinomu. K bir (yönlendirilmiş) düğüm (veya halka) ve D , K nın bir regüler diyagramı olsun. Bu takdirde aşağıdaki aksiyomlar vasıtasıyla K nın üç değişkenli bir $S_K(x, y, w)$ polinomunu tanımlayabiliriz ki $S_K(x, y, w)$ negatif üslere sahip olabilir.

i. Eğer K aşıkâr O düğümü ise bu takdirde $S_O(x, y, w) = 1$

ii. D_+ , D_- , D_0 Şekil 3.1 de verilen diyagramlar ise o zaman,

$$xS_{D_+}(x, y, w) - yS_{D_-}(x, y, w) = wS_{D_0}(x, y, w)$$

eşitliği sağlanır.

$S_K(x, y, w)$ polinomu K nın bir invaryantıdır.

Önce S_K nın çok basit halini gözönüne alalım. Yukarıdaki tanımdan açıkça görülüyor ki S_K 3-değişkenli bir polinomdur. Bunu göstermek için (2,3) de tanımlanan iki değişkenli $P_K(v, z)$ polinomunu düşünelim

i. Aşıkâr O düğümü için $P_O(v, z) = 1$

ii. D_+ , D_- , D_0 diyagramları için

$$\frac{1}{v} P_{D_+}(v, z) - v P_{D_-}(v, z) = z P_{D_0}(v, z) \quad (2,3)$$

eşitliği sağlanır.

$P_K(v, z)$ ve $S_K(x, y, w)$ lar (2,4) deki eşitlikten doğal olarak ortaya çıkarlar.

2.5.3.1. Önerme.

$$i. S_K\left(\frac{1}{v}, v, z\right) = P_K(v, z)$$

$$ii. P_K\left(\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}, \frac{\omega}{\sqrt{x}\sqrt{y}}\right) = S_K(x, y, \omega) \quad (2,4)$$

olur.

Genellikle D_+ , D_- , D_0 diyagramları arasındaki bağıntılar ile tanımlı bir polinom bir skein polinomu olarak adlandırılır. $P_K(v, z)$, bir skein polinomunun en genel halidir ve genellikle HOMFLY polinom olarak adlandırılır. Bu, bunu bulan matematikçilerin soyadlarının baş harflerinden oluşmuştur ve hepsi bu polinomu beraber bulmuşlardır. Eğer biz Alexander ve Jones polinomlarının skein bağıntı tanımları ve $P_K(v, z)$ nin skein bağıntısını (2,3) ile karşılaştırırsak bu takdirde aşağıdaki sonuç basittir.

2.5.3.2. Önerme. K , bir (yönlendirilmiş) düğüm (veya halka) olsun. Bu takdirde

$$i. V_K(t) = P_K\left(t, \sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right)$$

$$ii. \Delta_K(t) = P_K\left(1, \sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right).$$

Böylece $V_K(t)$ ve $\Delta_K(t)$ ler $P_K(v, z)$ nin özel durumlarıdır denilebilir. Bununla beraber $\Delta_K(t)$, $V_K(t)$ nin özel bir durumu değildir. Daha önce söylediğimiz gibi onlar aslında farklı polinomlardı.

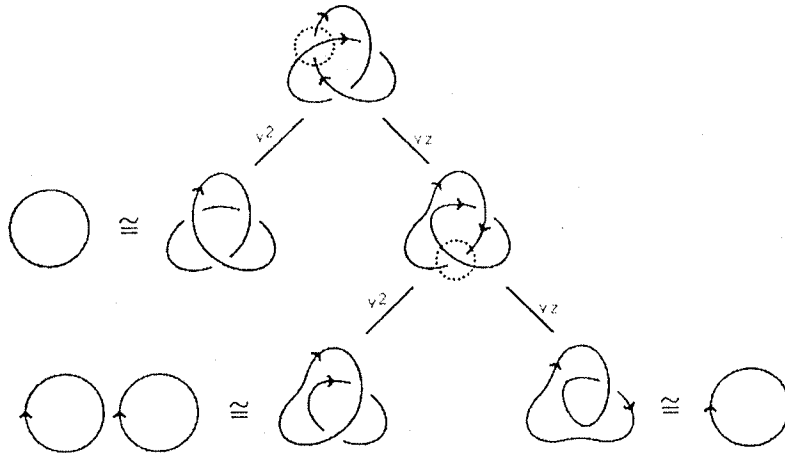
Keyfi bir K düğümü (veya halkası) için $S_K(x, y, \omega)$ ve $P_K(v, z)$ nin hesaplanmasında ağaç diyagramının kullanılması iyi bir yoldur.

2.5.3.3. Önerme. $P_{OO}(v, z) = \frac{1-v^2}{vz}$ (Adams, C.G.,1999).

2.5.3.4. Örnek. Bir ağaç diyagramı kullanarak K sağ el yonca yaprağı düğümünün skein polinomunun

$$P_K(v, z) = 2v^2 - v^4 + v^2 z^2$$

olduğunu gösterelim.



$$P_K(v, z) = v^2 P_O + v^3 z P_{OO} + v^2 z^2 P_O$$

$$= v^2 + v^3 z \left(\frac{1-v^2}{vz} \right) + v^2 z^2$$

$$= v^2 + v^2 - v^4 + v^2 z^2$$

$$= 2v^2 - v^4 + v^2 z^2$$

olur.

2.5.4. Kauffman Polinomu.

2.5.4.1. Kauffman parantez polinomu. D bir K düğümü (veya halkasının) yönlendirilmemiş bir regüler diyagramı olsun. Bu takdirde aşağıdaki dört şartı sağlayan bir tek değerli $P_D(A)$ tamsayı polinomu vardır.

i. $P_D(A)$ regüler izotopi altında invariantdir.

ii Eğer $D = O$ bir aşık diyagram ise bu takdirde

$$P_O(A) = 1,$$

iii. Eğer D, D_1 ve D_2 regüler diyagramlarının ayık birleşimlerinden ibaret ise yani $D = D_1 \amalg D_2$ ise bu takdirde

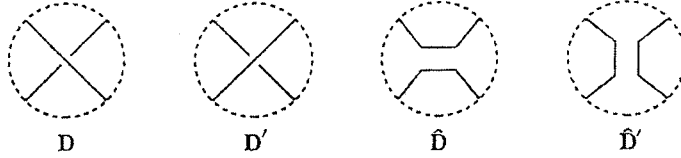
$$P_D(A) = -(A^2 + A^{-2})P_{D_1}(A)P_{D_2}(A),$$

iv. $D, D', \hat{D}, \hat{D}'$ Şekil 2.9 de verilen diyagramlar olsun. Bu takdirde

$$P_D(A) = AP_{\hat{D}}(A) + A^{-1}P_{\hat{D}'}(A)$$

$$P_{D'}(A) = A^{-1}P_{\hat{D}}(A) + AP_{\hat{D}'}(A)$$

eşitlikleri geçerlidir.



Şekil 2.9

2.5.4.2. Teorem. D bir yönlendirilmiş K düğümünün (veya halkasının) yönlendirilmiş bir regüler diyagramı olsun. Eğer $P_D(A)$ yönlendirilmemiş D diyagramının Kauffman parantez polinomu ve $\omega(D)$, D nin burulma sayısı ise bu takdirde

$$\hat{P}_D(A) = (-A^{-3})^{\omega(D)} P_D(A)$$

olur.

Bu halde $\hat{P}_D(A)$, yönlendirilmiş bir düğümün (veya halkanın) bir invariantıdır ve $\hat{P}_K(A)$ ile gösterilir. Bu polinoma normalize edilmiş Kaufmann polinomu denir. (Kaufmann, 1987).

2.5.4.3. Teorem. $\hat{P}_K(t^{-\frac{1}{4}}) = V_K(t)$ dir. Yani eğer $\hat{P}_K(A)$ polinomunda $A = t^{-\frac{1}{4}}$ alınırsa $P_K(A)$, K nın $V_K(t)$ Jones polinomuna dönüşür.

2.5.4.4 Teorem. D, yönlendirilmemiş bir düğümün (veya halkanın) regüler diyagramı olsun. Bu takdirde aşağıdaki üç şartı sağlayan regüler hareket altında invariant kalan iki değişkenli bir $\Lambda_D(a, x)$ polinomu vardır (Kaufmann, 1990).

i. O aşık diyagramı için $\Lambda_O(a, x) = 1$

ii. Düğüm diyagramındaki bir kavşak noktasının komşuluğunda $D, D', \hat{D}, \hat{D}'$ hariç diğer kısımları aynı olsun. Bu komşuluğun içerisinde düğümün (veya

halkanın) regüler diyagramları Şekil 2.9 daki gibidir. Bu takdirde aşağıdaki bağıntı sağlanır.

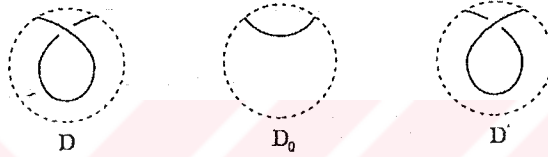
$$\Lambda_D(a, x) + \Lambda_{D'}(a, x) = x \{ \Lambda_{\tilde{D}}(a, x) + \Lambda_{\tilde{D}'}(a, x) \}$$

iii. Düğüm diyagramındaki bir kavşak noktasının komşuluğu hariç D , D^* , D_0 lar aynı olsun. Düğümün (veya halkanın) bu komşuluk içerisindeki normal diyagramları Şekil 2.10 deki gibi verilmiştir. Bu takdirde

$$(1) \Lambda_D(a, x) = a \Lambda_{D_0}(a, x)$$

$$(2) \Lambda_{D'}(a, x) = a^{-1} \Lambda_{D_0}(a, x)$$

formülleri sağlanır.



Şekil 2.10

Bu 2-değişkenli $\Lambda_D(a, x)$ polinomu aynı zamanda tektir (Kauffman, 1990). Kauffman parantez polinomunun durumundaki gibi bu invaryant regüler diyagramdan tanımlanır. Böylece önceki gibi eğer K aşıkâr düğüm ise $\Lambda_K(a, x) = 1$ i tanımlamayacağız. Gerçekten $\Lambda_D(a, x)$, birinci Ω_1 Reidemeister hareketi altında invaryant değildir. Böylece $\Lambda_D(a, x)$ i Ω_1 altındada invaryant bırakmak için yeni bir polinom tanımlamaya ihtiyacımız vardır.

2.5.4.5. Kauffman polinomu. K yönlendirilmiş bir düğüm (veya halka) ve D , K için bir (yönlendirilmiş) regüler diyagram olsun. Ayrıca kabul edelim ki $\omega(D)$, D nin burulma sayısı olsun. Bu takdirde

$$F_D(a, x) = a^{\omega(D)} \Lambda_D(a, x)$$

olur (Kauffmann, 1990). $F_D(a, x)$ yönlendirilmiş bir K düğümünün (veya halkasının) bir invaryantıdır, regüler D diyagramından bağımsızdır. Bu invaryanta (2-değişkenli) Kauffman polinomu denir.

2.5.4.6. Örnek. Bir K sağ - el yonca yaprağı düğümünün Kauffman polinomu

$$F_K(a, x) = a^{-3} \{ x^2 (a + a^{-1}) + x(1 + a^{-2}) + (2a + a^{-1}) \}$$

olur.

Parantez polinomunda olduğu gibi Kauffman ve Jones polinomları da aşağıdaki teoremden gösterildiği gibi birbirleriyle ilişkilidir.

2.5.4.7. Teorem. K (yönlendirilmiş) bir düğüm (veya halka) olsun. Bu takdirde

$$P_K(A) = \Lambda_K(-A^3, A + A^{-1})$$

ve

$$V_K(t) = F_K\left(-t^{-\frac{3}{4}}, t^{\frac{1}{4}} + t^{-\frac{1}{4}}\right)$$

olur.

2.5.4.8. Not. Böylece Kauffman parantez polinomunda olduğu gibi yukarıdaki teorem yardımıyla Kauffman polinomu, Jones polinomunun bir genişlemesi olarak düşünülebilir. Jones polinomunda olduğu gibi iki Kauffman polinomu tam invariantlar değildir. Çünkü Kauffman polinomları ve Kauffman parantez polinomları aynı olan birbirine denk olmayan pek çok düğüm mevcuttur.

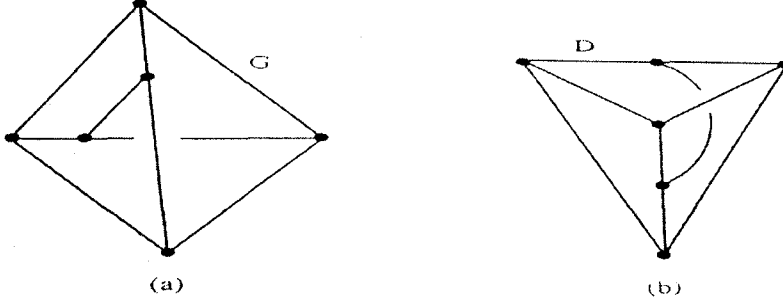
Genelde, skein polinomlarını ne kadar düzenlersek düzenleyelim verilen polinomla, bir düğümü (veya halkayı) asla tam olarak ayırt edemeyeceğiz. Böylece tam bir düğüm invariantı olacak bir skein polinomu bulmak imkansızdır.

2.6. Uzaysal Graf

2.6.1. Graf. Genel olarak bir graf noktalardan ve doğru parçalarından oluşan bir şekil olarak göz önünde tutulabilir. Yani bir (sonlu) G grafi $\{V_G, E_G\}$ kümelerinin bir çiftidir. Burada V_G nin bir elemanı G nin bir köşesidir. E_G nin bir elemanı da G nin bir kenarıdır. Bir e kenarının a ve b gibi iki köşesi vardır. Bu noktalara e nin uç noktaları denir. Eğer $a = b$ ise o zaman e bir ilmek oluşturur.

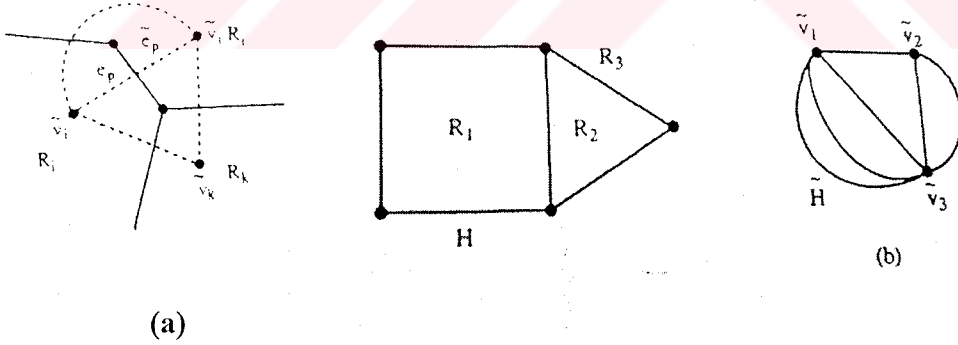
Eğer $G \subset \mathbb{R}^2$ veya $G \subset S^2$ ise G ye bir düzlemsel graf, eğer $G \subset \mathbb{R}^3$ veya $G \subset S^3$ ise G ye bir uzaysal graf denir. Bir uzaysal grafa bir düğümün veya halkanın bir genellemesi gibi bakılabilir. Daha doğrusu düğüm veya halka teorisine graf teorisinin bir parçası gibi bakılabilir. Düğümlerde olduğu gibi G uzay garfını düzleme izdüşürürsek G nin bir D regüler diyagramını elde edebiliriz. Böylece G nin bir köşesi D nin bir kavşak noktasına

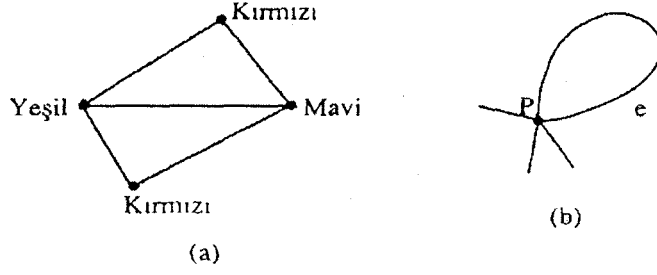
izdişüm yolu ile dönüştürülemez. Aşağıdaki şekil 2.11 bir G uzay grafi ve onun regüler D diyagramı verilmiştir.



Şekil 2.11

G , S^2 üzerinde bir düzlem grafi olsun. S^2 yi $R_1, R_2, \dots, R_m$ sonlu bölgelerine bölecek şekilde G yi çizelim ve her R_i bölgesinden bir $\tilde{v}_i$ noktası seçelim. $\tilde{v}_i$ noktaları köşe noktalar olacak şekilde $\tilde{G}$ grafi çizelim. $\tilde{G}$ grafına G nin dual grafi denir. R_i ve R_j bölgeleri G nin ortak bir e kenarına sahip ise o zaman S^2 üzerinde $\tilde{v}_i$ ve $\tilde{v}_j$ noktaları, e ile bir noktada kesişen basit poligonal bir doğru ile birbirine bağlanır.





Şekil 2.13

$\tilde{\rho}_n(G)$ n renkli G nin mümkün olan renklendirme sayısını versin ve $\rho_n(G) = \frac{1}{n} \tilde{\rho}_n(G)$ alalım. Eğer bir köşenin rengi sabit tutulursa $\rho_n(G)$ n tane renk kullanılarak diğer köşeleri renklendirebileceğimiz yolların sayısıdır. Dolayısıyla bu sayı negatif değildir. Sonlu sayıda n için $\rho_n(G)$ den aşağıdaki anlamda bir $\rho_G(t)$ polinomu tanımlayabiliriz.

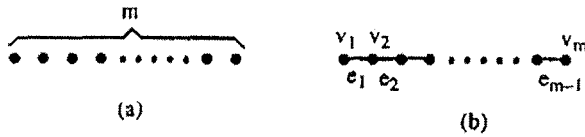
$$\rho_G(t) = \rho_1(G)t + \rho_2(G)t^2 + \dots + \rho_n(G)t^n + \dots$$

$\rho_G(t)$ kuvvet serisine G nin kromatik polinomu denir.

2.6.2.2. Örnek

i. Farz edelim ki G sadece m köşelerinden oluşan bir graftır, yani G 'nin kenarları olmasın. O zaman her bir köşe diğerinden bağımsız olarak renklendirilebilir; böylece, $\tilde{\rho}_n(G) = n^m$. Buradan,

$$\rho_G(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{m-1} t^n$$



ii. Farz edelim ki G , $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$, m köşelerinden ve $\{e_1, e_2, \dots, e_{m-1}\}$, $m-1$ kenarından oluşan bir graftır, öyle ki e_i 'nin uç noktaları v_i ve v_{i+1} ($i = 1, 2, \dots, m-1$) olsun, (yukarıda ki (b) şekli). Biz v_1 köşesini n renkle renklendirebiliriz. Sonraki köşe v_2 , v_1 de kullanılan aynı renk ile renklendirilemez. Mümkün olan $n-1$ renk ile renklendirilebilir.

Benzer şekilde v_3 ü $n-1$ renk ile renklendirmek mümkündür, vesaire. Bu yolu gösterelim.

$$\tilde{\rho}_n(G) = n(n-1)^{m-1}$$

Böylece,

$$\rho_G(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)^{m-1} t^n$$

iii. G bir m kenarlı çokgen olduğu zaman,

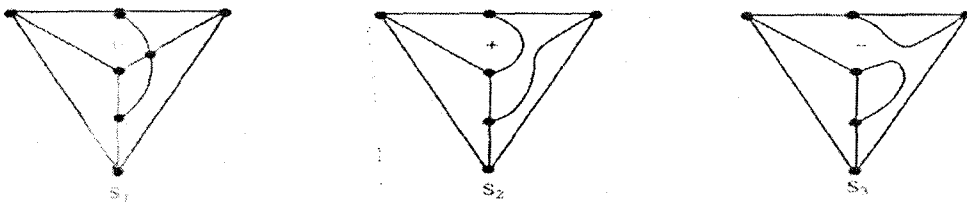
$$\rho_G(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)^{m-1} t^n \text{ olur.}$$

2.6.2.3. Yamado polinomu. D bir regüler graf ve m D 'nin kavşak noktalarının sayısını gösterebilir. Şekil 2.14 de gösterilen üç lokal diyagramın biri ile D regüler diyagramın bir kavşak noktasını yer değiştirerek üç düzlem grafi elde ederiz.



Şekil 2.14

Böylece her kavşak noktasında mümkün olan tüm seçeneklerin içinden 3^m düzlem grafi çizebiliriz. Şekil 2.14 e göre başlangıçta +,- ve 0 lı her bir düzlem grafına D nin bir durumu denir. Şekil 2.15 şekil 2.11 daki D diyagramın mümkün olan 3 durumunu gösterir.



Şekil 2.15

Her bir s durumu için $\langle s \rangle$ ile gösterilen bir tek

$$\langle s \rangle = (-1)^{\ell} \cdot t^k$$

polinomu belirleyebiliriz. Burada ℓ , s'deki sıfırlarının sayısı ve

$$k = (\text{s deki } + \text{ nın sayısı}) - (\text{s deki } - \text{ lerin sayısı})$$

2.6.2.4. Örnek. Şekil 2.15 deki durumlar için $\langle s_1 \rangle = -1$, $\langle s_2 \rangle = t$, $\langle s_3 \rangle = t^{-1}$ olur.

Bir s durumlu bir düzlem grafi için onun dual grafini $\tilde{s}$ ile gösterelim. Bu durumda n renkli $\rho_n(\tilde{s})$ renklendirme sayısıyla bağlantılı olan aşağıdaki polinomu tanımlayalım. G'nin regüler D diyagramı için

$$\langle D \rangle = \sum_s \langle s \rangle \rho_n(\tilde{s})$$

olsun. Burada toplam D'deki bütün s durumları içindir. Bu polinom t nin işareti ve kuvveti farkıyla 3-regüler uzay grafinin bir invaryantıdır ve $\lambda_G(t)$ ile gösterilir. Bu polinoma yamado polinomu denir.

2.6.2.5. Örnek. Örnek 2.6.2.4. den yararlanarak

$$\begin{aligned} \lambda_G(t) &= \sum_s \langle s \rangle \rho_n(\tilde{s}) \\ &= \langle s_1 \rangle \rho_n(\tilde{s}_1) + \langle s_2 \rangle \rho_n(\tilde{s}_2) + \langle s_3 \rangle \rho_n(\tilde{s}_3) \\ &= -1 \rho_n(\tilde{s}_1) + t \rho_n(\tilde{s}_2) + t^{-1} \rho_n(\tilde{s}_3) \end{aligned}$$

BÖLÜM III

SİNGÜLER DÜĞÜMLER

Bir önceki bölüm 2.6 da uzaysal graflardan bahsettik. Özellikle Yamado polinomu denen 3-regüler grafin bir invaryantını tanımladık. (Tanım 2.6.2.3) Vassiliev invaryantı da uzaysal grafla ilişkilidir ve en iyi singüler düğümler denen 4-regüler uzaysal grafin bir invaryantı olarak tanımlanabilir.

En temel anlayışla, bir singüler düğüm kendi kendini kesen bir düğümdür. Daha kesin bir ifadeyle bir K singüler düğümü S^1 üzerinde sonlu sayıda nokta hariç, $f: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

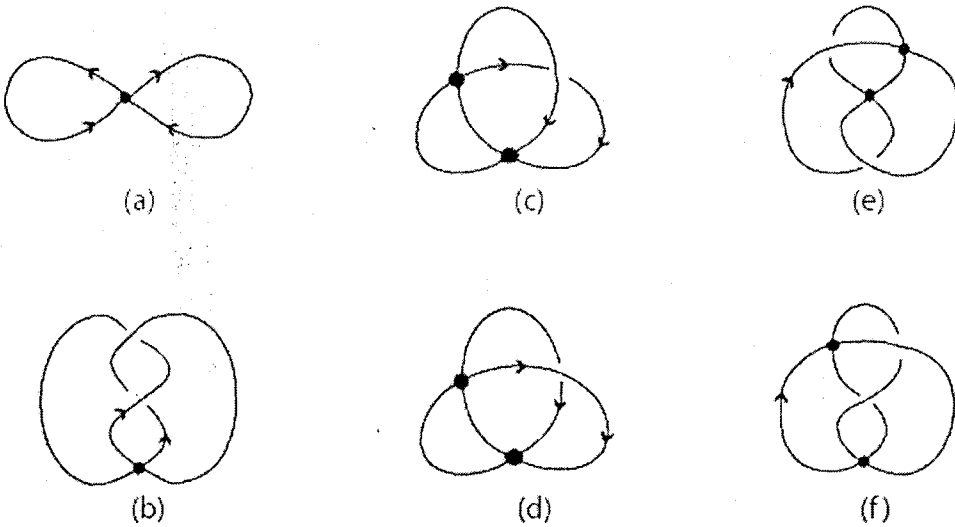
(PL) dönüşümüdür (Dönüşümün görüntüsüdür); Dahası,

i. Eğer S^1 üzerinde iki nokta aynı görüntüye sahipse, $K = f(S^1)$ bu ortak noktada kendisini dik açıyla keser.

ii. S^1 üzerindeki hiçbir üç ve daha fazla nokta aynı görüntüye sahip değildir.

Bu bölüm boyunca bir K singüler düğümünün kendi kendisini kesen noktasına K nın bir köşesi diyeceğiz. Şekil (3.1) (a) ~ (f) de singüler düğümlere birkaç örnek verilmiştir.

Bir singüler düğümün tanımını halkalar durumuna da genişletmek mümkündür. Fakat biz sadece singüler düğümle ilgileneceğiz. Ayrıca normal düğümler ile singüler düğümler arasındaki farkı kesin bir şekilde belirtmeyeceğiz. Bununla birlikte her düğüme singüler düğüm adını vermeyeceğiz.



Şekil 3.1

Yukarıdaki anlamda ve singüler düğümün tanımından da anlaşılacağı gibi bir singüler düğümü bir 4-regüler uzay grafi olarak düşünebiliriz. Bir singüler düğüm, bu kategoriye

tam dahil olmadığından uzaysal graf teorisinin ne anlama geldiğini yeniden ele alacağız. İlk önce S^1 üzerindeki yönlendirmeden hareketle singüler düğüme bir yönlendirme tayin etmenin belirgin bir yolu yoktur. İkinci olarak genelde singüler düğümler için denklik, uzaysal graflar için denklik kavramından daha güçlüdür.

Daha hassas olarak bir K singüler düğümün her bir A köşesinin bir küçük (kapalı) B_A komşuluğu ile $B_A \cap K$, (K nın A komşuluğunda kalan kısmını) ihtiva eden bir E_A düzlemini birleştirelim. Bu durumda $F_A = E_A \cap B_A$ düzlem diskine “ A ile birleştirilmiş bir düz disk” denilir. Herbir A köşesindeki bu düzlem disklerinin bir sınıfı $\mathfrak{I}(K)$ ile gösterilir.

3.1. Tanım. K ve K' iki singüler düğüm olsun. Eğer aşağıdaki şartları sağlayan bir $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ile yönlendirmeyi koruyan otopomorfizm varsa “ K , K' ne denktir” denir ve $K \approx K'$ ile gösterilir.

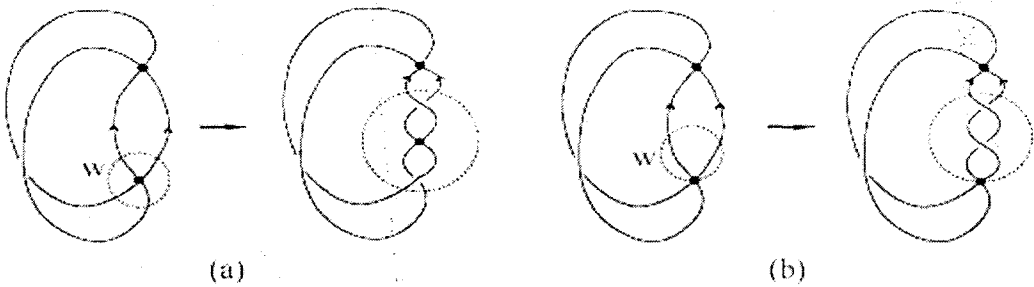
i) $\varphi(K) = K'$

ii) Sırasıyla K ve K' için düz disklerin $\mathfrak{I}(K)$ ve $\mathfrak{I}(K')$ sınıfları vardır, öyle ki;

$\varphi, \mathfrak{I}(K)$ yı $\mathfrak{I}(K')$ ne dönüştürür. Böyle bir dönüşüme “düz dönüşüm” denir.

Sezgisel olarak singüler noktalar hariç o noktalardaki doğru parçaları dik açı oluşturacak şekilde deforme yaparak K yı K' ne sürekli olarak deforme edebilirse K K' ne denktir. Çünkü orada, genelde yukarıdaki tanımın ikinci kısmı önemlidir. Singüler düzlemlerin denkliği uzaysal grafların denkliğinden daha kuvvetli yapan bir kriter vardır.

3.2. Örnek.



Şekil 3.2

Şekil (3.2) (a) ve (b) nin herbirinde W topunun içinde dış kısmı sabit tutularak bir düşey burulma oluşturduk. (a) da bu iki denk singüler düğüm oluşturur. Fakat (b) durumunda bunlara denk değildir. Her iki durumda da uzaysal graf olarak denktirler.

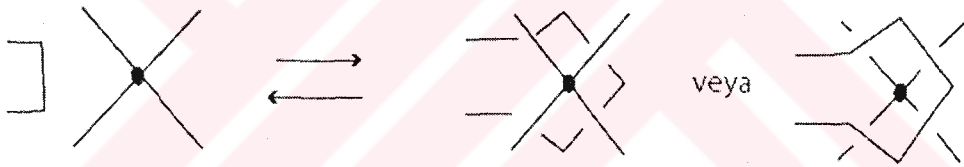
3.3. Örnek. Şekil (3.1) deki iki singüler düğüm (a) ve (b) birbirine denk değildirler. Fakat tekrar etmek gerekirse bunlar uzay grafları olarak denktirler. Benzer şekilde; (c) ve (d) singüler düğüm durumunda aynısı sağlanır.

Buraya kadar anlatılanlardan singüler diyagramları kullanarak singüler düğümlerin denliğini yeniden tanımlayabiliriz.

3.4. Önerme. K ve K' singüler düğümlerin denk olması için gerek ve yeter şart sırasıyla aşağıdaki iki özelliği sonlu sayıda uygulanmasıyla (düzlemsel izotopi) biri diğerine deforme edilebilen D ve D' singüler diyagramlarının var olmasıdır.

i. Herbir köşenin küçük komşuluğu hariç Reidemeister hareketleri veya onların tersleri.

ii. Köşelerin komşuluğundaki aşağıdaki $\tilde{\Omega}$ işlemi.



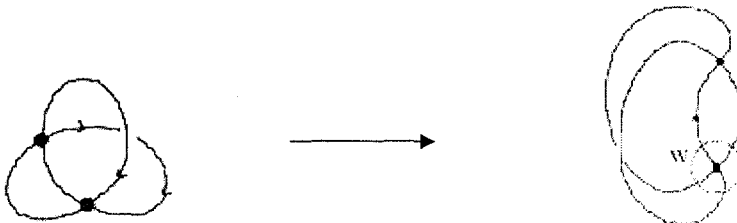
Şekil 3.3

3.5. Örnek.

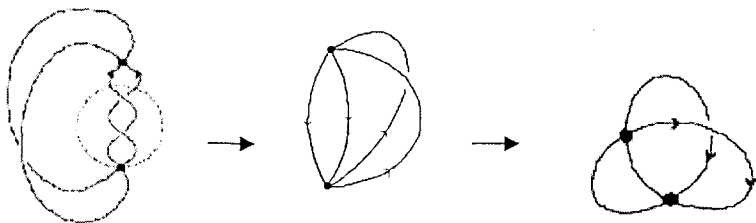
i. Şekil (3.1) deki (e), (f) nin singüler düğümleri açıkça denk düğümlerdir.

ii. Şekil (3.2) (b) deki birinci singüler düğüm Şekil (3.1) deki (c) ye ve ikinci düğüm (d) ye denktir.

Çözüm. (ii) şıkkın birinci kısmı aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi uygun bir döndürme ile hemen görülür.



ikinci kısım aşağıdaki şekilde gösterildi.

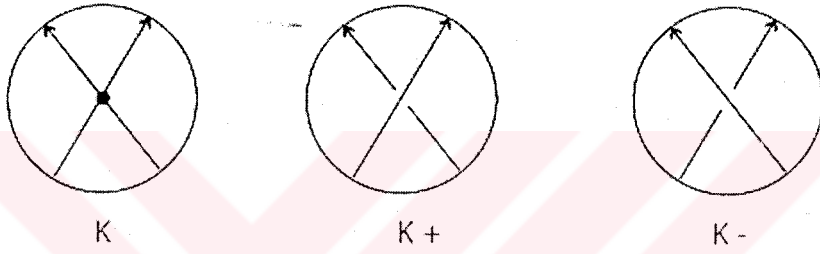


BÖLÜM IV

VASSİLİEV İNVARYANTLARI

v_0 in bir sayısal düğüm invaryant olduğunu kabul edelim. Yani her bir K düğümünü bir v_0 rasyonel sayı ile temsil edelim. Bu durumda v_0 ı singüler düğümler için bir v invaryantına aşağıdaki gibi genişletebiliriz.

v yi en çok $n-1$ köşegeni ile singüler düğümler için tanımlamış olduğumuzu varsayalım. Şimdi K , n köşeli bir singüler düğüm olarak kabul edelim. K , K_+ ve K_- , bir köşenin komşuluğu hariç her yerde aynı olan singüler düğümlerdir (regüler diyagramlardır). Bu komşulukta onlar sadece Şekil (4.1) de gösterildiği gibi farklılık gösterirler.



Şekil 4.1

Bu durumda;

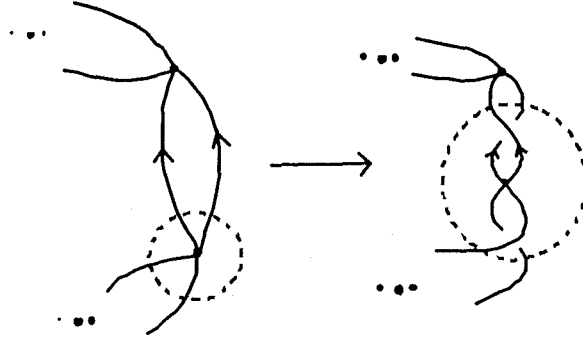
$$v(K) = v(K_+) - v(K_-) \quad (4.1)$$

şeklinde tanımlayalım.

K , n köşeye ve K_+ ve K_- de $n-1$ köşeye sahip olduğundan hipotez ile $v(K)$ değerlendirebiliriz.

4.1. Önerme. Eğer K ve K' denk singüler düğümler ise; $v(K) = v(K')$ dür. Yani v singüler düğümler için bir invaryanttır.

İspat. K ve K' aşağıdaki şekilde gösterildiği gibi n köşeli düğümler olsun.



$$v(K) = v(K+) - v(K-)$$

$$\begin{aligned}
 v(K) &= v \left(\text{diagram 1} \right) - v \left(\text{diagram 2} \right) \\
 v(K') &= v \left(\text{diagram 3} \right) - v \left(\text{diagram 4} \right) \\
 &= v \left(\text{diagram 1} \right) - v \left(\text{diagram 2} \right) \\
 v(K) &= v(K')
 \end{aligned}$$

The diagrams are as follows:
 Diagram 1: A crossing with two strands, one labeled with a minus sign.
 Diagram 2: A crossing with two strands, one labeled with a plus sign.
 Diagram 3: A full twist (two crossings) with two strands, one labeled with a minus sign.
 Diagram 4: A full twist (two crossings) with two strands, one labeled with a plus sign.

Yukarıda v singüler düğüm invaryantı, tümevarım işlemleri ile v_0 düğüm invaryantına dönüşür. Bu sebeple bu v invaryantı v_0 düğüm invaryantı ile oluşturulan singüler düğüm invaryantı olarak adlandırılacaktır. Singüler skein bağlantısı olarak adlandıracağımız (4.1) deki bağıntı diyagram olarak şöyle yazılabilir.

$$v \left(\text{diagram 5} \right) = v \left(\text{diagram 6} \right) - v \left(\text{diagram 7} \right) \quad (4.1.a)$$

The diagrams are as follows:
 Diagram 5: A crossing with two strands, one labeled with a minus sign.
 Diagram 6: A crossing with two strands, one labeled with a plus sign.
 Diagram 7: A crossing with two strands, one labeled with a minus sign.

Böylece şekil (4.1) deki diyagram singüler skein diyagramı diyeceğiz. Ayrıca şekil (4.1) deki bir diyagramı diğer iki skein diyagramları ile yer değiştiren operasyona da singüler skein operasyonu diye adlandıracağız. K_+ (veya K_-) yı K_- (veya K_+) ve K ile yer değiştiren işlemi uyguladığımızda yeni bir köşede sonuçlanan düğümlenme işlemi uyguladığımızı söyleyebiliriz.

4.2. Tanım. (4.1) deki bağıntıyı sağlayan v singüler düğüm invaryantına (en fazla) m dereceli (veya sonlu tipli) bir Vassiliev invaryantı denilir; Eğer, $m + 1$ köşeli herhangi bir singüler düğüm için

$$v(K) = 0 \quad (4.2)$$

ise.

Özel olarak eğer v en çok m dereceli fakat $m-1$ dereceli değilse yani sıfır olmayan tam olarak m köşeli bir singüler düğümü varsa, v ye (tam olarak) m dereceli Vassiliev invaryantı denilir.

Yukarıdaki tanımlardan görüldüğü gibi bir Vassiliev invaryantı esaslı olarak bilinen düğüm invaryantlarından örneğin; Jones polinomu, Alexander polinomu ve köprü sayısından farklıdır. Bu düğüm invaryantları her bir düğümü matematiksel büyüklük ile ilişkilendirir. Ancak bir Vassiliev invaryantı (4.1) ve (4.2) bağıntılarını sağlayan bir singüler düğüm invaryantıdır. Bu nedenle çok sayıda (sonsuz) Vassiliev invaryantı vardır. Bunları Vassiliev tipi invaryant olarak adlandırmak daha doğaldır.

Açıkça görülüyor ki Vassiliev invaryantını içeren çok sayıda düğüm invaryantı vardır; fakat düğüm invaryantlarının hepsi Vassiliev invaryantını içermez. Vassiliev İnvaryantlarını içeren düğüm invaryantlarının örneklerini vermeden önce bir Vassiliev İnvaryantının tanımından yola çıkarak bazı önermeleri ispatlayacağız.

4.3. Önerme. v bir Vassiliev invaryantı olsun. Eğer K singüler düğümü bir "  ilmeğe"

sahipse

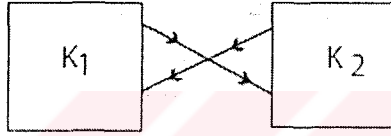
$$v(K) = 0$$

dır.

İspat. Eğer (4.1) bağıntısını ilmeğin parçasını oluşturan köşegene uygularsak derhal aşağıdaki denklemi yazarız.

$$\begin{aligned}
v(K) &= v \left(\text{diagram with square and crossing} \right) = v \left(\text{diagram with square and loop} \right) - v \left(\text{diagram with square and loop} \right) = 0 \\
&= v \left(\text{diagram with square and loop} \right) - v \left(\text{diagram with square and loop} \right) = 0
\end{aligned}$$

4.4. Önerme. Eğer K singüler düğümü aşağıdaki şekildeki gibi köşegeni varsa $v(K) = 0$ dir.



İspat. Önerme 4.3 ün ispatının bir benzeridir.

4.5. Önerme. v sıfır dereceli Vassiliev invaryantı olsun. Bu durumda herhangi bir K singüler düğümü için,

$$v(K) = v \left(\bigcirc \right) .$$

Bu nedenle, esas olarak sadece sıfırdan bir tek Vassiliev invaryantı vardır.

İspat: v sıfırdan dereceden olduğundan $v \left(\text{diagram with crossing} \right) = 0$ çıkar ve dolayısıyla

$v \left(\text{diagram with crossing} \right) = v \left(\text{diagram with crossing} \right)$ singüler skein ilişkisinden olduğu çıkar. Eğer K nın herhangi bir kavşak noktasına bir düğümlenme işlemi uygularsak bu v nin değerini sabit kalacağını gerektirir. Bir düğüm birkaç düğümlenme işlemi uygulanmasıyla bir aşık düğüme dönüştürülebildiği için $v(K) = v \left(\bigcirc \right)$ olduğu çıkar. Bu nedenle herhangi bir singüler düğüm için v bir sabittir.

4.6. Önerme. Birinci dereceden (tam olarak) bir Vassiliev invaryantı yoktur.

İspat: v nin birinci dereceden bir Vassiliev invaryantı olduğunu varsayalım. O zaman tanımdan iki veya daha çok köşeli herhangi bir singüler düğüm için v sıfırdır. Böylece

$v(K_1) \neq 0$ ile bir tek köşeli bir K_1 singüler düğümü vardır. K_1 e düğümlenmeme işlemini uyguladığımızda şekil (3.1.a) daki $\hat{K}$ singüler düğümüne dönüşür.

İki veya daha çok köşeli herhangi bir singüler düğüm için v sıfır olduğundan; (4.1) bağıntısı ve Önerme (4.3) den $v(K_1) = v(\hat{K}) = 0$ olduğu çıkar. Bu orijinal hipotezimizle çelişir.

K köşeleri $1, 2, \dots, m+1$ ile numaralandırılan $m+1$ köşeli bir singüler düğüm olsun. Bu köşeleri yok etmek için her bir köşe bir singüler skein operasyonu uygulayalım. Bu işlemler K dan 2^{m+1} tane $\{K_{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{m+1}}\}$ düğümü oluşturur. Burada $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{m+1}$ ler $+$ veya $-$ olur ve $K_{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{m+1}}$ düğümü eğer $\epsilon_k = +$ ise bir pozitif kavşak noktası ile veya $\epsilon_k = -$ bir negatif kavşak noktası ile k köşesinin ($k=1, 2, \dots, m+1$) yer değiştirilmesi ile K dan elde edilen düğümü gösterir. Singüler skein bağıntısını arka arkaya uygulayarak aşağıdaki formül elde edilir;

$$v(K) = \sum_{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{m+1}} (-1)^\ell v(K_{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{m+1}}), \quad (4.3)$$

Burada toplam 2^{m+1} tane $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{m+1}$ elemanlarının bütün kümesi üzerinden alındı ve ℓ $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{m+1}$ in dizisindeki $-$ lerin sayısıdır. (4.3) bağıntısı kullanılarak (4.2) daha kullanışlı olan aşağıdaki (4.4) bağıntısı ile yer değiştirebilir.

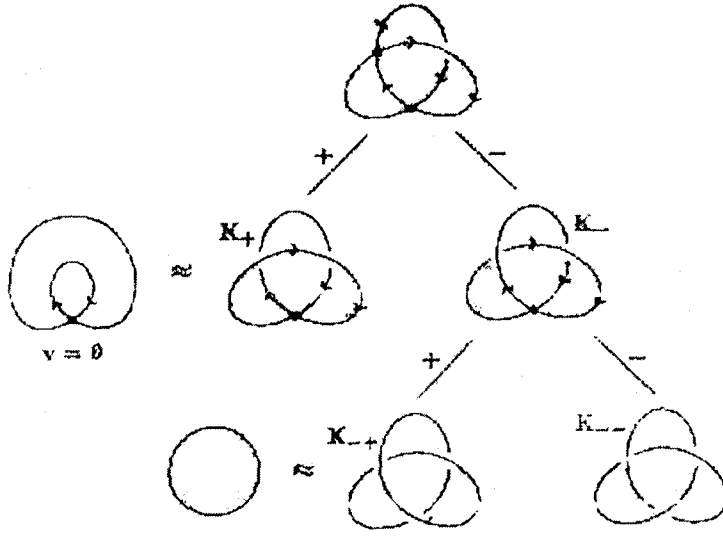
4.7. Önerme. Bir singüler düğüm invaryantının ((4.1) bağıntısını sağlayan) en çok m dereceli vassiliev invaryantı olması için gerek ve yeter şart $m+1$ köşeli herhangi bir singüler düğüm için

$$\sum_{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{m+1}} (-1)^\ell v(K_{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{m+1}}) = 0 \quad (4.4)$$

olmasıdır.

Buradaki toplam (4.3) bağıntısındaki aynı küme üzerinden alınmıştır. Vassiliev invaryantını daha kolay değerlendirmek için düğüm polinomlarında olduğu gibi ağaç diyagramı adı verilen bir algoritmayı verelim. Bu algoritmayı aşağıdaki örneklerle açıklayalım.

4.8. Örnek. Şekil (4.2) te iki köşeli singüler düğüm için Vassiliev invaryantını değerlendiren bir singüler ağaç diyagramı çizilmiştir.

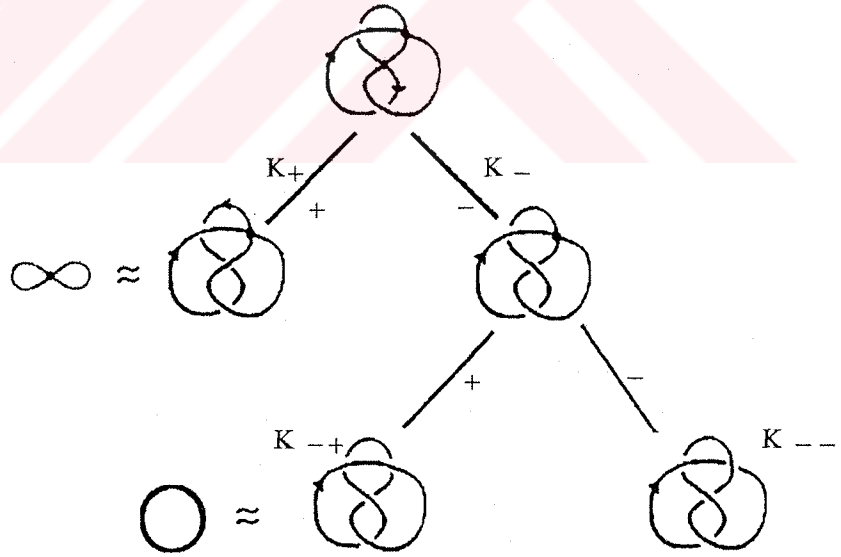


Şekil 4.2

Böylece

$$v(K) = -v(K_{-+}) + v(K_{--}) = -v(\bigcirc) + v(K_{--})$$

4.9. Örnek. Şekil 4.1.(e) deki singüler düğüm için vassiliev invariantını değerlendiren bir singüler skein ağaç diyagramı çizilmiştir.



$$v(K) = v(K_+) - v(K_-)$$

$$= v(\infty) - [v(K_{-+}) - v(K_{--})] = v(\infty) - v(\bigcirc) + v(K_{--})$$

BÖLÜM V

VASSİLİEV İNVARYANTLARINA BAZI ÖRNEKLER

Bu bölümde Vassiliev invaryantlarına bazı örnekler vereceğiz. Aynı zamanda sonlu tipte olmayan ve böylece Vassiliev invaryantı olmayan bazı düğüm invaryantlarının var olduğunu göstereceğiz.

5.1. Önerme. K bir düğüm olsun ve

$$\nabla_K(z) = 1 + a_2 z^2 + a_4 z^4 + \dots + a_{2m} z^{2m} + \dots$$

da K nın bir Alexander-Conway Polinomu olsun. Bu durumda $\nabla_{2m}(K) = a_{2m}$ ($m = 1, 2, \dots$) tam olarak $2m$ tipinde bir Vassiliev invaryantına sebep olur.

İspat: Aşağıdaki iki şartın sağlandığını göstermek yeterlidir.

i) $2m+1$ köşeli bir K singüler düğümü için, $\nabla_{2m}(K) = 0$;

ii) $2m$ köşeli bir K_0 singüler düğümü vardır öyle ki; $\nabla_{2m}(K) \neq 0$

Bir önceki bölümde (4.3) bağıntısını aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\sum (-1)^{\epsilon} \nabla_{2m}(K_{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{m+1}}) = 0 \quad (5.1)$$

Amacımız (4.4) den ziyade (5.1) ifadesini ispatlamaktır. Son $2m+1$ -i kavşak noktalarını



ile değiştirerek $K_{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{2m+1}}$ den elde edilen düğümü $(K_{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_l, 0, \dots, 0})$ ile gösterelim. Şimdi (2.1) ile tanımlanan Conway polinomuna skein bağıntısını uygulayalım ve aşağıdaki formülleri elde edelim.

Herhangi $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{2m+1}$ için

$$\nabla_{K_{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{2m}, +}}(z) - \nabla_{K_{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{2m}, -}}(z) = z \nabla_{K_{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{2m}, 0}}(z)$$

Eğer skein bağıntısını tekrar $K_{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{2m}, 0}$ için uygularsak;

$$\nabla_{K_{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{2m-1}, +, 0}}(z) - \nabla_{K_{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{2m-1}, -, 0}}(z) = z \nabla_{K_{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{2m-1}, 0, 0}}(z)$$

elde edilir.

Aşağıdaki denklemi elde edene dek skein bağıntısını uyguluyoruz.

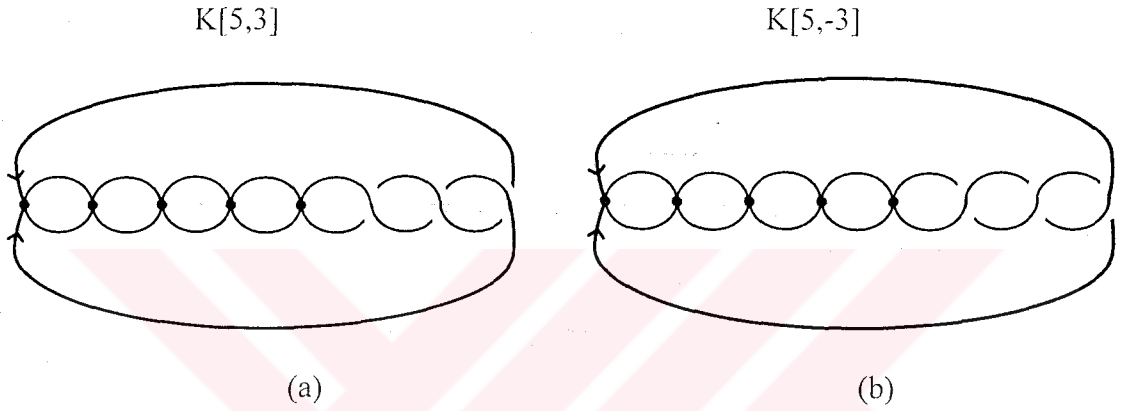
$$\nabla_{K_{+,0,\dots,0}}(z) - \nabla_{K_{-,0,\dots,0}}(z) = z \nabla_{K_{0,0,\dots,0}}(z)$$

Bu terimler toplanarak sonuçta,

$$\sum (-1)^\ell \nabla_{K_{\epsilon_1, \dots, \epsilon_{2m+1}}}(z) = z^{2m+1} \nabla_{K_{0,0,\dots,0}}(z) \quad (5.2)$$

elde edilir.(5.2) bağıntısının sağ tarafı z^{2m} li terim içermediğinden $\nabla_{2m}(K) = 0$ dir.

Şimdi (2) nin ispatına geçelim; şekil (5.1) de verilen $K[p,q]$ singüler düğümünü göz önüne alalım. Burada p köşelerin sayısı ve $|q|$ da kavşak noktalarının sayısıdır.



Şekil 5.1

$K[2m,1]$ özel singüler düğümüne bakalım ve $\nabla_{2m}(K[2m,1])$ i hesaplamak için gerekli formül (5.3) bağıntısında verilmiştir.

$$\nabla_{2m}(K[2m,1]) = \sum (-1)^\ell \nabla_{2m}(K[2m,1]_{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{2m}}) \quad (5.3)$$

Tor düğümlerine ve onların jenerik formunu göz önüne alırsak $K[2m,1]_{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{2m}}$ $(2m-2\ell+1, 2)$ tipinde bir tor düğümü olur (bakınız 2.4.6).

Burada $\ell, \epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{2m}$ dizisindeki “-” işaretinin sayısıdır. Böylece; $\ell = m$ veya $\ell = m+1$ için $\Delta(t)=1$ ve

$$\Delta(t) = t^{-(m-\ell)} + \dots + t^{m-\ell} = 1 + \dots + z^{2(m-\ell)}, \text{ eğer } 0 \leq \ell < m,$$

$$\Delta(t) = t^{-(\ell-m-1)} + \dots + t^{\ell-m-1} = 1 + \dots + z^{2(\ell-m-1)}, \text{ eğer } m+1 < \ell$$

Böylece ,eğer her bir $\epsilon_i, +$ ise ; $\nabla_{2m}(K[2m,1]_{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{2m}}) = 1$ dir. Aksi taktirde sıfırdır. Bu yüzden $\nabla_{2m}(K[2m,1]) = 1$ sonucuna varırız.

Yukarıdaki önerme göstermektedir ki ; ∇_{2m} Alexander-Conway polinomundan oluşan bir Vassiliev invariantı vardır.

5.2. Teorem. $V_k(t)$ K düğümünün Jones Polinomu olsun. $V_k(t)$ de t yerine

$$e^q \left(= 1 + q + \frac{q^2}{2!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{n!} \right)$$

yazılarak $V_k(q)$ sonsuz serisi elde edilir. Böylece;

$$V_k(q) = b_0 + b_1 q + b_2 q^2 + \dots$$

yazılabilir. Bu durumda $J_m(K) = b_m$, en çok m. inci dereceden Jones Polinomu ile oluşturulan bir Vassiliev invariantıdır (Birman, Lin, 1993).

Beklenildiği gibi önerme (5.1) deki aynı düşünce kullanılarak N. inci ($N \geq 2$) dereceli $J_K(N)(t)$ Jones polinomundan oluşan bir $J_m(N)$ Vassiliev invariantı tanımlamak mümkündür. Bununla birlikte Jones polinomundan Vassiliev invariantını elde etmenin başka bir yolunu inceleyeceğiz.

5.3. Önerme. $\Phi_K(t)$, K düğümünün Jones polinomunun $t = 1$ deki Taylor açılımı olsun, bunun şu şekilde yazabiliriz;

$$\Phi_K(t) = c_0 + c(t-1) + c_2(t-1)^2 + \dots + c_m(t-1)^m + \dots,$$

bu seride gerekli hesaplamaları yaparsak,

$$C_m = \frac{1}{m!} \left[\frac{d^m V_k(t)}{dt^m} \right]_{t=1}$$

Böylece; $\Phi_K(t) = C_m$, (en çok) m dereceli bir Vassiliev invariantıdır.

İspat: t-1 yerine t^2 alınır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa Alexander Conway polinomuna benzer bir seri elde edilir. Orada $J_m(K) = c_m$ e karşılık gelen $\nabla_{2m}(K) = a_{2m}$ bir Vassiliev invariantıdır.

5.4. Örnek.

i. Eğer K sağ-el yonca düğümü ise;

$$(1) \nabla_2(K) = 1 \text{ ve } \nabla_i(K) = 0 \quad i \geq 3 \text{ için;}$$

$$(2) J_2(K) = -3 \text{ ve } J_3(K) = -6, \text{ olduğunu gösterelim.}$$

ii. sekiz şekilli düğüm için $i = 2, 3, 4$ için J_i değerini bulalım

Çözüm.

i. (1) Sağ el yonca yaprağı düğümünün Alexander Conway polinomu

$$\nabla(K) = t^{-1} - 1 + t$$

$$\nabla_K(z) = 1 + z^2$$

$$\nabla_{2m}(K) = a_{2m} \text{ olduğundan } \nabla_2(K) = 1, \nabla_i(K) = 0, i \geq 3 \text{ ise}$$

(2) Sağ el yonca yaprağı düğümünün jones polinomu

$$V_K(t) = t + t^3 - t^4$$

$$V_K(e^q) = e^q + e^{3q} - e^{4q}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3q)^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4q)^n}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{q^n}{n!} + \frac{3^n q^n}{n!} - \frac{4^n q^n}{n!} \right)$$

$$= 1 - 3q^2 - 6q^3 + \dots$$

$$J_m(K) = c_m \quad J_2(K) = -3 \quad J_3(K) = -6$$

ii. Sekiz şekilli düğüm için jones polinomu

$$V_K(t) = t^2 - t + 1 - t^{-1} + t^{-2}$$

$$= 1 - t + t^2 - t^3 + t^4$$

$$V_K(e^q) = 1 - e^q + e^{2q} - e^{3q} + e^{4q}$$

$$= 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{q^n}{n!} + \frac{2^n q^n}{n!} - \frac{3^n q^n}{n!} + \frac{4^n q^n}{n!} \right)$$

$$= 1 + 2q + 5q^2 + \frac{22}{3}q^3$$

$$J_2(K) = 2, \quad J_3(K) = 5, \quad J_4(K) = \frac{22}{3}$$

5.5. Örnek. K^* bir K düğümünün ayna görüntüsü ise; (her $m \geq 2$ için)

$J_m(K^*) = (-1)^m J_m(K)$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm. K^* , K nin ayna görüntüsü ise $J_K(t) = J_{K^*}(t^{-1})$ olduğundan $J_m(K^*) = (-1)^m J(K)$ olduğu açıktır. $J_K(t) = J_{K^*}(t^{-1})$ K nin Jones polinomun da t yerine t^{-1} alınırsa K^* in Jones polinomu bulunur.

5.6. Uyarı. Teorem (5.2) de olduğu gibi $t = e^q$ alarak Skein ve Kauffman polinomlarından Vassiliev invariantlarını oluşturmak mümkündür. Her ne kadar bu polinomlar iki değişkenli olmasalar da; 1- değişkenli polinomlara indirgenmesi gerekir (detay için Birman ve Lin ,1993 e bakınız).

Jones polinomlarından Vassiliev invariantı oluşturmanın kısmen kolay olduğunu gördük. Ancak klasik geometrik düğüm invariantlarından Vassiliev invariantları oluşturamayız. Şimdi neden bu durumla karşılaştığımıza biraz daha detaylı bakalım.

5.7. Önerme. Bir “v” singüler düğüm invariantı, sonlu tipte olmayan bir K düğümünün işareti ile tanımlanan bir Vassiliev invariantı değildir.

İspat: v nin en çok n ($n \geq 2$) dereceli olduğunu düşünelim. Amacımız; $v(K[n+1, n]) \neq 0$ olduğunu veya denk olarak;

$$\sum (-1)^{\ell} \sigma(K[n+1, n]_{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{n+1}}) \neq 0 \quad (5.4)$$

olduğunu göstermektir. Şimdi $K[n+1, n]_{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{n+1}}$, $(2n-2\ell+1, 2)$ tipinde bir tor düğümü olduğundan işareti;

$$(i) \quad \text{Eğer } \ell \neq n, n+1, \sigma(K[n+1, n]_{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{n+1}}) = -(2n-2\ell)$$

$$(ii) \quad \text{Eğer } \ell = n \text{ veya } n+1, \sigma(K[n+1, n]_{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{n+1}}) = 0$$

olur. Teorem(2.4.7.(4)) e bakınız. Kolayca görülebilir ki; $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{n+1}$ dizisindeki ℓ

negatif işaretli düğümlerin sayısı; $\binom{n+1}{\ell}$ dir. Böylece (5.4) bağıntısının sol tarafı;

$$\sum (-1)^\ell \sigma(K[n+1, n]_{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{n+1}}) = \sum_{\ell=0}^{n-1} (-1)^{\ell+1} \binom{n+1}{\ell} (2n-2\ell)$$

olur ki, bu değerin sıfırdan farklı olduğu gösterilebilir. Bu v nin en çok n dereceli olması kabulü ile çelişir.

5.8. Önerme. Sonsuz tipli bir K düğümü için aşağıdaki klasik geometrik invariantların hiç biri vassiliev invariantı değildir.

$c(K)$: minimal kavşak sayısı

$u(K)$: düğümlenme sayısı

$br(K)$: köprü sayısı

$b(K)$: örgü indeksi

$g(K)$: düğüm cinsi

İspat. Bunun ispatı $K[n+1, n]$ singüler düğümü dikkate alınarak önerme (5.8) i ispatına benzer şekilde yapılır. Detaylar okuyucuya bırakılmıştır.

BÖLÜM VI

KİRİŞ (KORD) DİYAGRAMLARI

4.3 Önermesindeki eşitlik (önerme (4.5)) ile birlikte göz önüne alınırsa herhangi bir “v” Vassiliev invaryantı , 4-terimli formül olarak adlandırılan daha önemli bir lineer denklemi sağlar.

6.1. Teorem (4-terim formülü) Aşağıdaki eşitlik herhangi bir “v” vassiliev invaryantı için sağlanır.

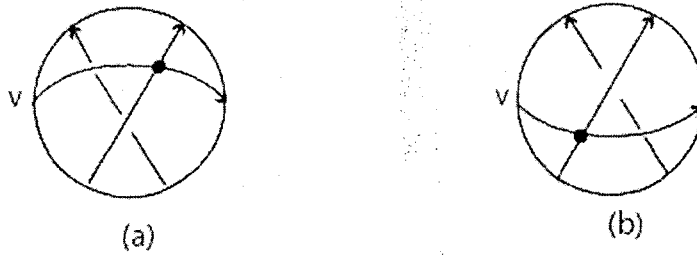
$$v \text{ (Diagram 1)} - v \text{ (Diagram 2)} = v \text{ (Diagram 3)} + v \text{ (Diagram 4)} \quad (6.1)$$

Şekil 6.1

Burada 4-singüler düğüm çemberin dışında özdeşirler.

Yukarıdaki grafiksel formül singüler düğüm için “ Ω_3 Reidemeister hareketi ” denk olarak yorumlanabilir.

İspat: Şimdi K ve K' gibi iki denk singüler düğüm göz önüne alalım. K ve K' şekil (6.2) de gösterilen çemberin içi hariç özdeştir.



Şekil 6.2

Çemberlerdeki (a) ve (b) kavşak noktalarına singüler skein operasyonları uygularsak ; şekil (6.3) deki eşitlikleri elde ederiz.

$$\begin{aligned}
v(K) &= v \left(\text{diagram with label } a \right) = v \left(\text{diagram with label } b \right) + v \left(\text{diagram} \right) \\
&= v \left(\text{diagram} \right) + v \left(\text{diagram} \right) + v \left(\text{diagram} \right) \\
v(K') &= v \left(\text{diagram with label } a \right) = v \left(\text{diagram with label } b \right) + v \left(\text{diagram} \right) \\
&= v \left(\text{diagram} \right) + v \left(\text{diagram} \right) + v \left(\text{diagram} \right)
\end{aligned}$$

Şekil 6.3

$v(K)$ ve $v(K')$ nün son açılımlarının ilk terimleri eşittir. Bu , onların denk singüler düğümün v -değerleri olmasından çıkar. Böylece kalan terimleri yeniden düzenlersek şekil(6.1) deki formülü elde ederiz.

6.2 Sonuç. Herhangi bir v vassiliev invariantı aşağıdaki formülü de sağlar.

$$v \left(\text{diagram} \right) - v \left(\text{diagram} \right) = v \left(\text{diagram} \right) - v \left(\text{diagram} \right)$$

Şekil 6.4

İspat. İki diagrama singüler skein operasyonu uygulanırsa Şekil 6.4 deki bağıntı elde edilir.

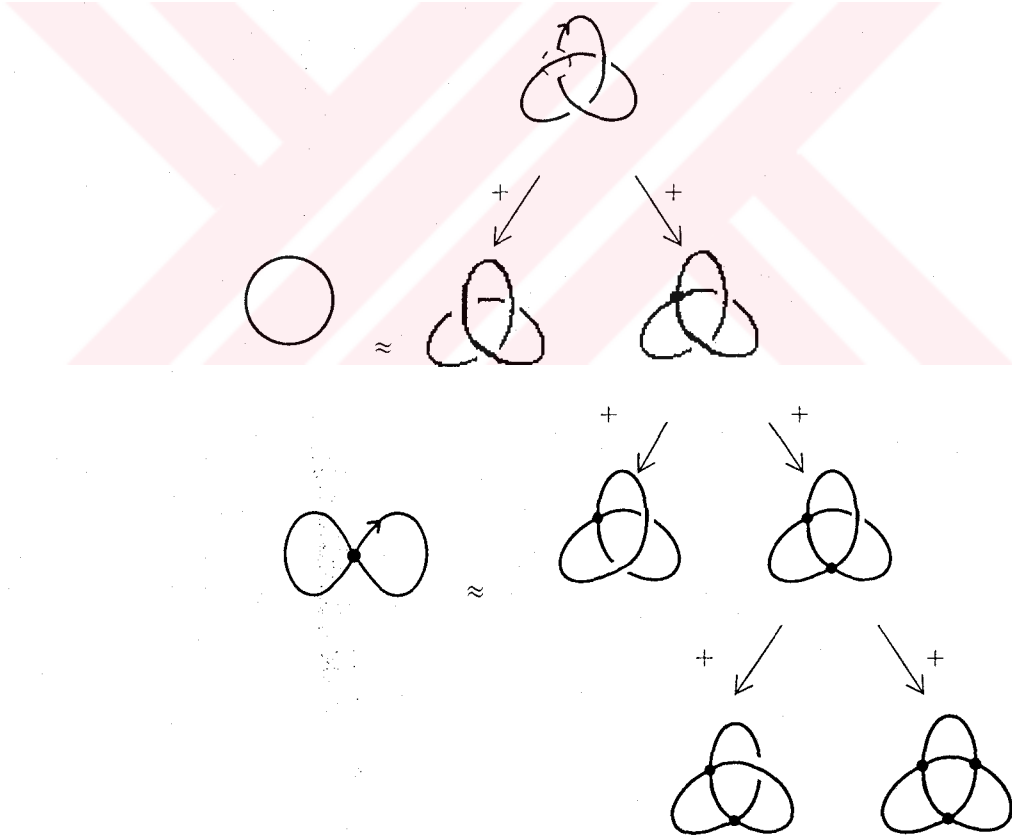
Önerme (4.5) ye göre sıfır dereceli v_0 vassiliev invariantı tektir. Ayrıca önerme (4.6) de 1-dereceli vassiliev invariantının var olmadığını gösterdik. Aynı düşünceyle 2-dereceli vassiliev invariantını belirleyebiliriz.

Bunu sonlandırmak için K singüler düğümüne düğümlenme operasyonlarını uygularsak; bu operasyonlar sonradan gelen singüler düğümlere köşeler eklenmesine ve aşık düğümler oluşmasına neden olacaktır. İki den fazla köşeli singüler düğüm için v_2 sıfır olduğundan aşağıdaki eşitlikleri yazabiliriz.

$$v_2(K) = av_2 \left(\bigcirc \right) + bv_2 \left(\bigcirc \cdot \bigcirc \right) + cv_2 \left(\bigcirc \cdot \bigcirc \cdot \bigcirc \right) + dv_2 \left(\bigcirc \cdot \bigcirc \cdot \bigcirc \right) \quad (6.2)$$

burada a,b,c,d tam sayılardır (Aşağıdaki (6.3) örneğine bakınız).

6.3. Örnek. i. K nin sağ el yonca yaprağı düğümü olduğunu kabul edelim. $v_2(K)$ için (6.2) formunda bir açılım türetmek için skein singüler diyagramını kullanalım (şekil (6.5) e bakınız).

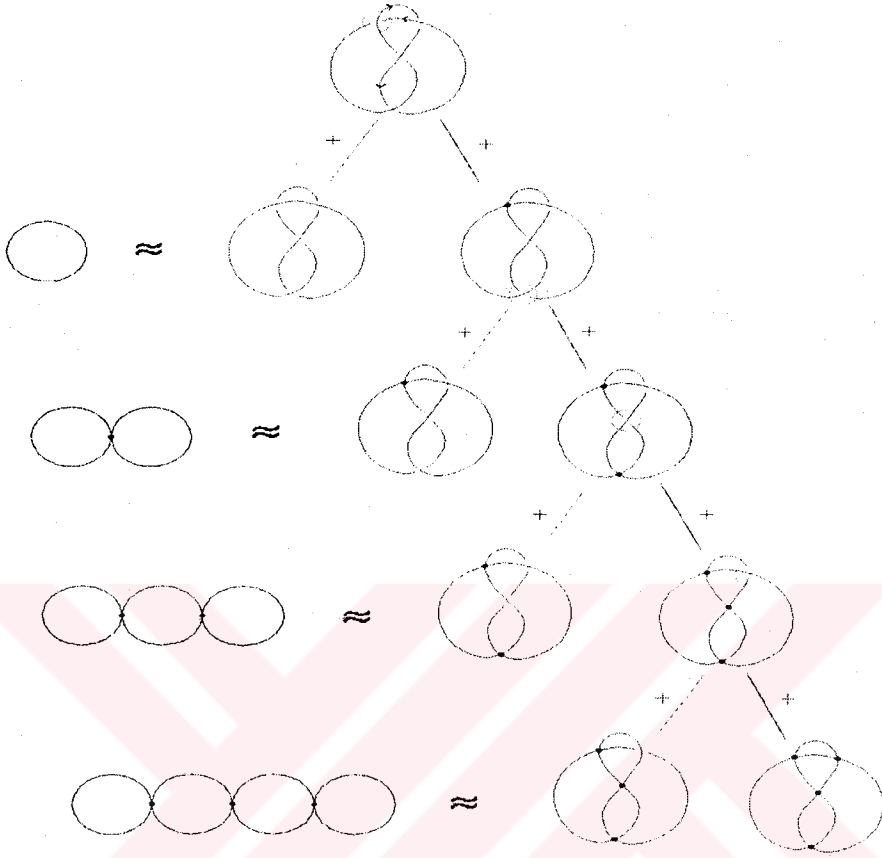


Şekil 6.5

$v_2 \left(\bigcirc \cdot \bigcirc \right) = 0$ olduğundan;

$v_2(K) = v_2 \left(\bigcirc \right) + v_2 \left(\bigcirc \cdot \bigcirc \right) + v_2 \left(\bigcirc \cdot \bigcirc \cdot \bigcirc \right)$ yazabiliriz.

ii. K nın sekiz şekilli düğüm olduğunu kabul edelim. $v_2(K)$ için (6.2) formunda bir açılım türetmek için skein singüler diyagramını kullanalım.



Şimdi $v_2(\bigcirc) = 0$ ve $v_2(\bigcirc \bigcirc) = 0$ olduğundan ; v_2 esas olarak $v_2(\bigcirc)$ $v_2(\bigcirc \bigcirc)$ ve ile belirlenir. $\nabla_2(\bigcirc)$ ve $J_2(\bigcirc)$ için benzer şekilde hesaplanabilir. Herhangi bir $m(m \geq 2)$ dereceli vassiliev invaryantı ;

$$v_m(\bigcirc) = 0 \quad \text{dır.} \quad (6.3)$$

Bu yüzden $v_2(K)$ tamamen $v_2(\bigcirc \bigcirc \bigcirc)$ değeriyle belirlenir. Bundan dolayı v_2 esas olarak tektir. Burdan

$$v_2(\bigcirc \bigcirc \bigcirc) = 1 \quad (6.4)$$

olarak seçebiliriz.

Böylece

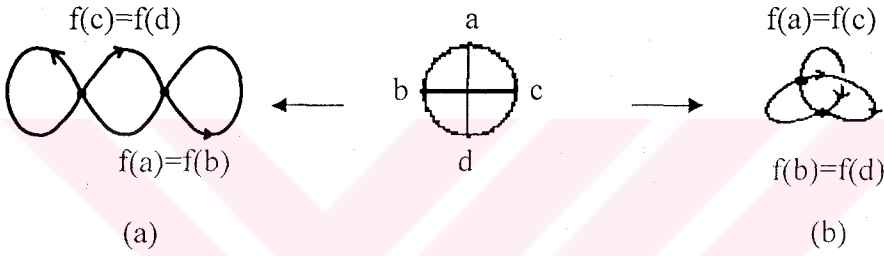
$$v_2(\bigcirc \bigcirc \bigcirc) = v_2(\bigcirc \bigcirc \bigcirc) + v_2(\bigcirc \bigcirc \bigcirc) = v_2(\bigcirc \bigcirc \bigcirc) \quad (6.5)$$

eşitliği gösteriri ki; 2 köşeli bir singüler K düğümünün v_2 -değeri K nın kavşak noktalarının işaretine bağlı değildir. Başka bir ifadeyle ; 2-köşeli singüler düğüm için alt ve üst geçiş noktaları arasındaki fark ihmal edilebilir. Bu yüzden eğer bir singüler K düğümünü bir $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dönüşümü olarak düşünersek K nın v_2 değer durumunda tüm dikkatimizi S^1 üzerinde ki a,b,c ve d noktalarından hangilerinin görüntülerinin aynı olduğu sorusuna yönlendirmeliyiz.

6.4. Örnek. Bir K singüler düğümünün bir $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dönüşümü olarak ele alalım.

Durum (1): $f(a) = f(b)$ ve $f(c) = f(d)$

K ve şekil 6.6.(a) daki singüler düğümler denk olmamalarına rağmen ; aynı v_2 -değerine sahiptirler.



Şekil 6.6

Durum (2): $f(a) = f(c)$ ve $f(b) = f(d)$

Bu durumda şekil (6.6)(b) daki singüler düğüm ile K denk olmamalarına rağmen aynı v_2 -değerine sahiptirler. Bu (6.5) bağıntısından çıkar.

Geriye kalan durum yani $f(a) = f(d)$ ve $f(b) = f(c)$ durum(2) indirgenmesi olarak gösterilebilir.

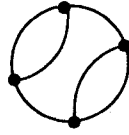
4 noktanın birbiriyle bağlantılarını vurgulamak üzere durum (1) için şekil (6.7) (a) diyagramını ;durum (2) için şekil (6.7) (b) diyagramını gösterebiliriz. [Yukarıda bahsedildiği gibi ; şekil (6.7) (b) daki yayların kesişlerinde hangisinin üst veya alt geçit olduğu önemsizdir].



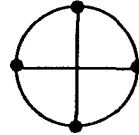
şekil 6.7

şekil (6.7) deki diyagramlar genelde kiriş diyagramları olarak bilinir. Şekil (6.7) deki iki kiriş diyagramına v_2 -değerlerini tayin edersek, herhangi bir singüler düğüm için v_2 yi, değerlendirmek mümkündür. v_2 -değerleri ile birlikte kiriş diyagramlarının tablosuna gerçek tablosu denir.

v_2 gerçek tablosu :



$$v_2 = 0$$



$$v_2 = 1$$

Şekil 6.8

önerme (4.3) den $v_2(\bigcirc) = 0$ olduğundan ; bu kiriş diyagramı genelde gerçek tablosuna dahil edilmez. Esas olarak $v_2(\bigoplus)$ için değerini seçimi sıfır alınmadığı sürece keyfidir. Gerçek tablosunu çoğaltmak mümkündür, ancak bunun için birden çok durum –üç dereceli v_3 vassiliev invariantları –düşünmek gerekir.

(6.2) bağıntısına benzer yolla bir K singüler düğümü için

$$v_3(K) = av_3(\bigcirc) + bv_3(\bigoplus) + cv_3(\bigodot) \quad (6.6)$$

yazabiliriz. Burada a,b,c tamsayılarıdır. Yukarıdaki formülde $(\bigcirc)$ ve $(\bigoplus)$ gibi singüler düğümlerin v_3 değerlerini (6.3) bağıntısı veya önerme (4.3) gereğince “sıfır” olarak ihmal ettik.

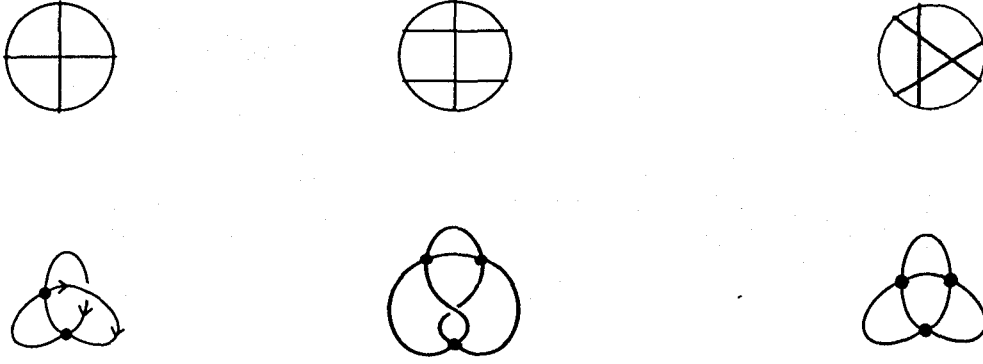
6.5. Örnek. Sekiz şekilli düğüm ve sağ el yonca yaprağı düğümü için ; (6.6) bağıntısındaki a,b,c değerlerini bulunuz.

$v_3(K)$ yı belirlemek için ; (6.6) bağıntısındaki singüler düğümlerini yerine yazmak yeterlidir.

Dikkat edilirse $v_2(\bigodot) = v_2(\bigoplus)$ değerleri gibi aktualite tablosundaki $v_3(\bigodot)$ değerinin aynısının olmasına gerek yoktur. Bunun sebebi 2 köşeli K singüler düğümünün v_3 değeri K'nın kavşak noktasının işaretine bağlı olabilmesidir. Gerçekte , (4.1) bağıntısından

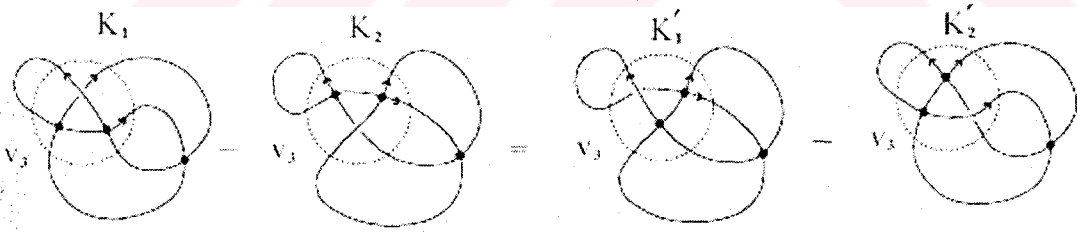
$$v_3 \left(\bigcirc \bigcirc \bigcirc \right) = v_3 \left(\bigcirc \bigcirc \bigcirc \right) + v_3 \left(\bigcirc \bigcirc \bigcirc \right)$$

v_3 ün v_2 ye kıyası için 3 giriş diyagramı vardır. Bunlar aşağıda gösterilmiştir.



v_3 için gerçek tablosunu kurmak için bu üç giriş diyagramlarının v_3 değerlerini bulmamız gerekir.

Bu önceki durum kadar basit bir iş değildir. Bu işin dayanak noktası şudur ; giriş diyagramlarında büyük olmayan keyfi değerler tayin etmeliyiz. Mesela; $v_3 \left(\bigcirc \bigcirc \bigcirc \right)$ ve $v_3 \left(\bigcirc \bigcirc \bigcirc \right)$ bağımsız değillerdir. Gerçekte şekil (6.9) da olduğu gibi her ikisini birbiriyle ilişkilendiren bir denklem vardır.



Şekil 6.9

İyice kontrol edildiğinde , yukarıdaki şekilde daire içindeki dört konfigürasyon Teorem(6.1) in 4-terimli formülünü sağlar. Önerme (4.3) den $v_3(K_2) = 0$ dır. Benzer şekilde $v_3(K'_1)$ de sıfırdır. Böylece $v_3(K_1) = v_3(K'_2)$ olur. (Dikkat edilirse K_1 ve K'_2 nün denk olması gerekmez)

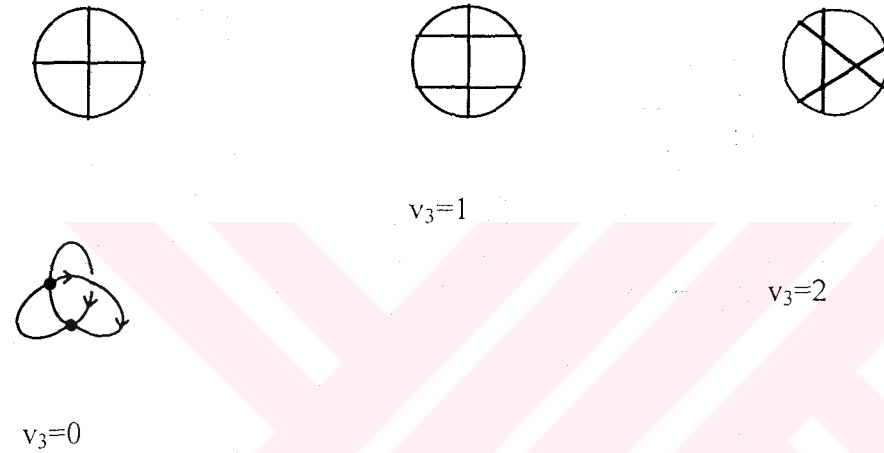
Buradan aşağıdaki eşitliği yazarız.

$$2v_3(\text{⊕}) = v_3(\text{⊗})$$

Bu yolla , kiriş diyagramlarını içeren tüm eşitlikleri bulmalıyız ve bu kiriş diyagramlarına v_3 değerlerini vererek denklemlerin çözülmesini sağlayalım. (Durum görüldüğü kadar karışık değildir.)

Herhangi bir dereceli bu kiriş diyagramları için herhangi bir eşitliğin 4 terimli formül ve bu formülün varyasyonlarını sağladığını biliyoruz. Bu gerçek tablosuna v_3 için öncülük edilmelidir.(Bar – Natan D. , 1995)

V_3 için gerçek tablosu:



Şekil 6.10

Ya $v_3(\text{⊕})$ veya $v_3(\text{⊗})$ için yalnız bir keyfi seçim olduğundan 3-dereceli bir vassilev invaryantı esası olarak tektir.

Yukarıdaki prosedürü takip ederek (4.1) , (4.2) anlamında ve gerçek tablosundan m dereceli “ v_m ” Vassilev invaryantlarını tamamen belirleyebiliriz. Böylece gerçek tablosunu başlangıç verisi ile (4.1),(4.2) ve (6.3) denklemleri ,Aksiom I,II,III olarak v_m i aksiyomlaştırmak mümkündür.Ayrıntılı detay Birman ve Lin de verilmiştir.(Birman J.S. and Lin X-S. , 1993)

Hatta $m=3$ durumunda ile gerçek tablosunu belirlemek kolay bir olay değildir. Gerçekte m değeri büyüdükçe gerçek tablosunu belirlemekte bilgisayar gücüne ihtiyaç duyulur. Mesela $m=8$ için ;40000 den fazla bilinmeyenli; 300000 den fazla lineer denklemi çözmek gerekir. Maceraperst okuyucular için daha fazla detay Bar-Natan da bulunabilir(Bar – Natan D. , 1995).

Not. 1. Herhangi bir K düğümü için $\nabla_2(K)=v_2(K)$ dir. J_2 ve J_3 Vassilev İnvaryantlarını v_2 ve v_3 denk değildir.

2. D giriş diyagramlarının basit bir yayının, D deki diğer yaylardan ayırık olduğunu düşünürsek; herhangi bir v Vassilev invaryantı için $v(D) = 0$



i. $\nabla_{K(n;0)}(Z) = \nabla_{K(n;l)}(Z)$

$$\text{ii. } \nabla_{K(n,0)}(z) = 1 - 2z^n + \dots \text{ eğer } n \text{ çift ise,} \quad (7.1)$$

$$\nabla_{K(n,0)}(z) = 1 - 2z^{n+1} + \dots \text{ eğer } n \text{ tek ise,}$$

$$\text{iii. } V_{K(n,l)}(t) = t^{2l}(V_{K(n,0)}(t) - 1) + 1$$

7.2. Alıştırma.

i. Önerme (7.1) deki (1) ve (3) ü ispatlayın.

ii. Önerme (7.1) de (2) yi $K(5;2)$ için doğrulayın.

iii. $K(n;l) \approx K(n;l')$ eşitliğinin olması için gerek ve yeter şart $l=l'$ olduğunu gösterin.

m dereceli $2 \leq m < n$, ∇_m Vassiliev invaryantı için önerme (7.1) (2) den

$$\nabla_m(K(n;l)) = 0 \quad (7.2)$$

olduğu çıkar.

(7.2) bağıntısının herhangi bir v_m Vassiliev invaryantı için genişletilebilir. Gerçekte, m inci mertebeden $2 \leq m < n$, keyfi bir vassiliev invaryantı için

$$v_m(K(n;l)) = 0 \quad (7.3)$$

olduğu ispatlanmıştır. (Ohyama, Y., 1995)

Böylece (7.3) bağıntısının doğrudan bir sonucu olarak; sonsuz çoklukta $K(n;l)$ düğümleri vardır ki $m(<n)$ dereceli herhangi bir Vassiliev invaryantı ile aşıkardüğümmlerden ayırt edilebilir. n değerini keyfi büyük alabiliriz ancak $K(n;l)$ ile aşıkardüğümmler sonlu çoklukta vassiliev invaryantı ile ayırt edilemez.

$K(n;l)$ yi kullanarak bir sonraki teoremi ispatlayabiliriz.

7.3. Teorem. $n > 2$ ve K düğümü için, $K = K \# K(n;l)$, $l \geq 0$, K ve $K(n;l)$ nin bağlantılı toplamı olsun.

i. $K' = K$ ya denk değildir.

ii. Eğer $m < n$ ise m sıralı bir vassiliev invaryant için;

$$v_m(K') = v_m(K)$$

dır (Ohyama, Y., 1995).

Böylece sonlu çoklukta vassiliev invaryantlarıyla ayırt edilemeyen sonsuz çoklukta ayırık düğümler vardır.

Yukarıdaki örnekte K asal düğüm değildir. Hem K ve hem K nün asal düğüm olacak şekilde yukarıdaki aynı özelliğe sahip bir örnek vardır (Stanford T).

Diğer taraftan eğer biz tüm Vassiliev invaryantlarını ele alırsak durum tamamen farklı olur. Vassiliev invaryantlarını çevreleyen teoremin sağlamlığı polinom invaryantlarının sistematik yolla ele alınmasına imkan tanınmasıdır. Böylece Vassiliev invaryantları ile polinom invaryantları arasında bir ilişki vardır. Özel durumda şaşırtıcı bir sonuç bulunmuştur (Melvin P.M. , Morton H.R., 1995).

7.4. Teorem. K ve K iki düğüm olsun. Eğer her $N \geq 2$ için bu düğümlerin Ninci dereceden Jones Polinomları eşit ise, bunların Alexander Polinomları da eşittir (Bar-Natan D. , Garoufalidis, 1994).

Yukarıdaki teorem şu şekilde açıklanabilir; Ninci dereceden bütün Jones Polinomları

$\left\{ \hat{J}_K^{(N)}(t), N \geq 2 \right\}$ kümesi Alexander Polinomunu belirler. Bu sonuç tamamen ilginçtir.

Gerçekte (7.4) teoreminin önemi şudur: Aşık Jones polinomlu aşık olmayan bir düğüm bulmaktır. $v_K(t)=1$ eşitliği " $\Delta_K(t)=1$ " gerektirmez. Fakat (7.4) teoreminin sonucu olarak diyebiliriz ki;

$$\hat{J}_K^{(N)}(t)=1, \text{ tüm } N \geq 2 \text{ ler için} \quad " \Delta_K(t)=1 " \quad (7.4)$$

Bu aşağıdaki tahmin için , temel teşkil eder. Eğer her $N \geq 2$ için $\hat{J}_K^{(N)}(t)=1$ ise; K bir aşık düğümdür.

Vassiliev invaryantları iki düğümü ayırt edecek kadar kuvvetli olmasada ;düğümlerin aşık düğümlerden ayırt edilmesini sağlar. Daha önce (giriş bölümünde) belirttiğimiz üzere ;vassiliev invaryantları çalışması henüz gelişme aşamasındadır. Fakat mevcut araştırmaların temeli ;vassiliev invaryantlarının düğüm teorisindeki gelişmelerde etkili rol oynayacağını tahmin etmekteyiz.

Vassiliev invaryantları teorisinin daha gelişmiş detayları için okuyucuya (Birman J.S., 1993) önerilir. Hırslı okuyucular (Bar-Natan D., 1995) de bulunan gelişmiş referansları dikkatle inceleyebilirler.

KAYNAKLAR

- Adams, C.G., 1999, The Knot Book, W. H. Freeman and Company, 3. Baskı, New York.
- Altın, Y., 1979, Çoban düğümleri ve Bazı Örtü Uzayları, Doktora Tezi, Atatürk Üniv., Erzurum.
- Altıntaş, İ., 1993, Üç Boyutlu Manifoldların Yapısı Üzerine, Doktora Tezi, Yüzüncü Yıl Üniv., Van.
- Bar-Natan, D., 1995, On the Vassiliev knot invariants, Topology, 34, 423-472
- Bar-Natan, D. and Garoufalidis, S., 1994, On the Melvin-Morton-Rozonsky conjecture, Preprint, Harvard Univ.
- Birman, J.S., 1993, New points of view in knot theory, Bull. Amer. Math. Soc., 28, 253-287.
- Birman, J.S. and Lin, X-S., 1993, Knot polynomials and Vassiliev's invariants, Invent. Math. III, 225-270.
- Burde, G. And Zieschang, H., 1985, Knots, Walter de Gruyter, Berlin- New York.
- Fox, R.H., 1962, A quick trip through knot theory, Topology of 3- manifolds and Related Topics, Prentice- Hall, 120-167.
- Gordon, C.McA., Litherland ,R.A. and Murasugi, K.,1981, Signatures of covering links ,Canad. J.Math., 33, 381-394.
- Kauffman, L.H., 1987, On Knots, Annals of Mathematics Studies Number 115, Princeton University Press.
- Kauffman, L.H., 1990, An Invariant of Regular Isotopy, Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 318, No:2.
- Kauffman, L.H., 1991, Knots and Physics, World Scientific Pub.
- Kawauchi, A., 1996, A Survey of Knot Theory, Birchäuser-Verlag, Boston.

- Lickorish, W B.R. and Millet, K.C., 1987, A polynomial invariant of oriented links, *Topology* 26, 107-141.
- Melvin, P.M. and Morton, H.R., 1995, The adoured jones function, *Comm. Math., Physics*, 169, 501-520.
- Murasugi, K., 1996, *Knot Theory and Its Applicants*, Birkhauser, Boston.
- Ohyama, Y., 1995, Vassiliev invariants and similarity of knots, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 123, 287-291.
- Rolfsen, D., 1976, *Knots and Links*, Math. Lecture series 7, Publish of Perish.
- Stanford, T., Braid commutators and Vassiliev invariants, to appear in *Pacific J. Math.*
- Vassiliev, V.A. ,1990, Cohomolgy of knot spaces, *Theory of Singularities and its Applications*, Amer. Math. Soc., 23-90.

