

**ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**LOKAL İNTEGRALLENEBİLİR FONKSİYON UZAYLARINDA
KOROVKİN TİPİ YAKLAŞIMLAR**

Nilay ŞAHİN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**ANKARA
2011**

Her hakkı saklıdır

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

LOKAL İNTEGRALLENEBİLİR FONKSİYON UZAYLARINDA KOROVKİN TİPİ YAKLAŞIMLAR

Nilay ŞAHİN

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Cihan ORHAN

Bu yüksek lisans tezi dört bölümden oluşmaktadır.

İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde, pozitif lineer operatör ve P.P Korovkin Teoremi hakkında genel bilgilere yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde, öncelikle $L_p[a, b]$ uzayı tanıtılıp, $L_p[a, b]$ uzayında klasik Korovkin teoremi incelenmiştir. Daha sonra istatistiksel yakınsaklık kavramı hatırlatılıp, L_p uzayındaki Korovkin tipi yaklaşım teoremlerinin istatistiksel versiyonu verilmiştir.

Son bölümde ise, ilk olarak lokal integrallenebilir fonksiyonların tanımı verilip, daha sonra lokal integrallenebilir fonksiyonların ağırlıklı uzayında Korovkin tipi bazı yaklaşım teoremleri incelenmiştir. Korovkin Teoreminin tüm lokal integrallenebilir fonksiyonların uzayında gerçekleşmeyip, lokal integrallenebilir fonksiyonların bir alt uzayında gerçekleştiği gösterilmiştir. Ayrıca A -istatistiksel yakınsaklık kavramı tanıtılıp, Korovkin tipi yaklaşım teoremlerinin A -istatistiksel yakınsaklık versiyonu incelenmiştir. Bu bölümün son kısmında ise A -istatistiksel yakınsaklık oran kavramı tanımlanmıştır ve A -istatistiksel yakınsaklık oranına ilişkin bazı teoremler ve sonuçlar verilmiştir. Ayrıca bu sonuçlardan yakınsaklık oranı elde edilmiştir.

Temmuz 2011, 56 sayfa

Anahtar Kelimeler : Pozitif lineer operatör dizisi, Korovkin Tipi Teorem, lokal integrallenebilir fonksiyon, istatistiksel yakınsaklık

ABSTRACT

Master Thesis

KOROVKIN TYPE APPROXIMATIONS IN THE SPACE OF LOCALLY INTEGRABLE FUNCTION

Nilay ŞAHİN

Ankara University

Graduate School of Natural And Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Cihan ORHAN

This master thesis consists of four chapters. The first chapter is devoted to the introduction. In chapter two, some basic information about Korovkin type theorem and positive linear operators has been given.

In the third chapter, firstly, the space $L_p[a, b]$ has been considered and the classical Korovkin type convergence theorems have been studied. Then, the concept of statistical convergence has been recalled and some Korovkin type approximation theorems on $L_p[a, b]$ spaces has been studied via statistical convergence.

In the last chapter the concept of locally integrable function has been given and then some Korovkin type approximation theorems in weighted space of locally integrable functions have been studied. It has been shown that a Korovkin type theorem for a sequence of linear positive operators acting in weighted space $L_{p,q}(loc)$ does not hold in all of this space and it is satisfied only on some subspace. Furthermore the concept of A - statistical convergence has been considered and the Korovkin type approximation theorems on $L_{p,q}(loc)$ have been studied via A - statistical convergence. In final section of this chapter, the concept of A - statistical convergence has been given and some theorems and results have been examined. Moreover the classical rates of convergence of the sequence of positive linear operators on $L_{p,q}(loc)$ have also been deduced.

July 2011, 56 pages

Key Words: Sequence of positive linear operators, the Korovkin Type Theorem, locally integrable function, statistical convergence

TEŞEKKÜR

Bu çalışma konusunu bana vererek değerli bilgi ve önerileriyle beni yönlendiren danışman hocam, Sayın Prof. Dr. Cihan ORHAN (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi)'a en içten saygı ve minnetlerimi sunarım. Bana sağladığı çalışma ortamı, desteği ve anlayışı için de ayrıca teşekkür ederim.

Yüksek lisans eğitimime başladığım andan itibaren benden desteğini esirgemeyen Sayın Doç. Dr. Şeyhmus YARDIMCI'ya ve haftalık seminerlerimizde benimle birlikte olan arkadaşlarıma ve Çağla CAN'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Hayatımın her aşamasında beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan ve her zaman destekleyen aileme sonsuz teşekkürler...

Nilay ŞAHİN

Ankara, Temmuz 2011.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
SİMGELER DİZİNİ	v
1. GİRİŞ	1
2. GENEL BİLGİLER	2
2.1 P. P Korovkin Teoremleri	3
3. L_p UZAYINDA KOROVKİN TEOREMİ	5
3.1 L_p Uzayında Korovkin Teoremi'nin İstatistiksel Versiyonu ..	8
3.1.1 İstatistiksel Yakınsaklık	8
4. LOKAL İNTEGRALLENEBİLİR FONKSİYON UZAYLARI	12
4.1 Lokal İntegrallenebilir Fonksiyonlar	12
4.2 Lokal İntegrallenebilir Fonksiyon Uzaylarında Korovkin Tipi Teoremler	13
4.3 Lokal İntegrallenebilir Fonksiyon Uzaylarında Korovkin Tipi Teoremlerin A–İstatistiksel Versiyonu	34
4.3.1 A–İstatistiksel Yakınsaklık	35
4.4 Lokal İntegrallenebilir Fonksiyon Uzayında A–İstatistiksel Yaklaşım Oranı	45
KAYNAKLAR	54
ÖZGEÇMİŞ	56

SİMGELER DİZİNİ

st	İstatistiksel yakınsak diziler uzayı
st_A	A -istatistiksel yakınsak diziler uzayı
$\delta(E)$	E kümesinin asimptotik yoğunluğu
$ E $	E kümesinin eleman sayısı
χ_E	E kümesinin karakteristik fonksiyonu
C_1	Cesàro matrisi
$\{(Ax)_n\}$	x dizisinin A matrisi altındaki dönüşüm dizisi
$T(f; x)$	Pozitif lineer operatör
$\{T_n\}$	Pozitif lineer operatör dizisi
$C[a, b]$	$[a, b]$ aralığı üzerinde sürekli fonksiyonların uzayı
q	Ağırlık fonksiyonu
$L_p[a, b]$	$[a, b]$ aralığında p -inci kuvvetten Lebesgue anlamında integrallenebilen fonksiyonların uzayı
$L_{p,q}(loc)$	Lokal integrallenebilir fonksiyonların ağırlıklı uzayı
$L_{p,q}^k(loc)$	Lokal integrallenebilir fonksiyonların ağırlıklı uzayının alt uzayı
$(L_{p,q}(loc) \rightarrow L_{p,q}(loc))^+$	Ağırlıklı lokal uzayda tanımlı pozitif lineer operatör dizilerinin kümesi
$\ \cdot\ _{p,q}$	$L_{p,q}$ uzayındaki norm
$\ \cdot\ _p$	L_p uzayındaki norm
$\omega_q(f, \delta)$	Ağırlıklı süreklilik modülü
$st_A - o(a_n)$	$o(a_n)$ oranında A – istatistiksel yakınsak
$st_A - O(a_n)$	$O(a_n)$ oranında A – istatistiksel yakınsak
$st_A - o_\mu(a_n)$	$o_\mu(a_n)$ oranında A – istatistiksel yakınsak
$st_A - O_\mu(a_n)$	$O_\mu(a_n)$ oranında A – istatistiksel yakınsak

1. GİRİŞ

İstatistiksel yakınsaklığın kullanıldığı önemli bir alan olan Yaklaşım Teorisi, polinomların yaklaşımında, Fonksiyonel Analizin çeşitli alanlarında, diferensiyel ve integral denklemlerin nümerik çözümlerinde önemli uygulamalara sahiptir. Korovkin tipi teoremler yaklaşımlar teorisinde temel oluşturmaktadır (Korovkin 1960 DeVore 1972 Altomare ve Campiti, 1994 Cheney, 2000). $C[a, b]$ uzayı sonlu $[a, b]$ aralığında tanımlanmış ve bu aralıkta sürekli olan tüm fonksiyonların uzayını, ayrıca $B[a, b]$ uzayı da $[a, b]$ aralığı üzerindeki tüm sınırlı fonksiyonların uzayını göstermek üzere $\{T_n\}$ dizisi, $C[a, b]$ uzayını $B[a, b]$ uzayı içine dönüştüren pozitif lineer operatörlerin bir dizisi olmak üzere Korovkin $e_i(x) = x^i$ ($i = 0, 1, 2$) ile tanımlı e_i test fonksiyonlarını kullanarak $\{T_n(f)\}$ dizisinin bir f fonksiyonuna düzgün yakınsaması için gerek ve yeter koşulları inceledi (Korovkin, 1960). Bir $[a, b]$ aralığı üzerindeki p -inci kuvvetten Lebesgue integrallenebilen fonksiyon uzaylarında Korovkin tipi yaklaşım ilk defa Dzyadik (1966) tarafından incelendi. Daha sonra bu doğrultuda başka sonuçlar Bernau (1974), Donner (1981), Svetits ve Wood (1996) tarafından ele alındı. Bu çalışmalarda tüm sonuçlar sonlu $[a, b]$ aralığında verildi. Bu sonuçları tüm reel ekseninde verebilmek için belli bir ağırlık fonksiyonuna göre lokal integrallenebilen fonksiyon uzayları göz önüne alınmış ve bu uzaylarda Korovkin tipi yaklaşımlar Gadjiev vd. (2003) tarafından incelenmiştir.

Şüphesiz ki Korovkin tipi yaklaşımlarda pozitif lineer operatör dizisi göz önüne alınmaktadır. Bu operatör dizisinin yakınsak olmaması durumunda istatistiksel yakınsaklık metodunun işe yarayabileceği ilk defa Gadjiev ve Orhan (2002) tarafından gösterilmiştir. Bu düşünce lokal integrallenebilen fonksiyon uzaylarında da kullanılmıştır. Bu konudaki çalışmalar Duman ve Orhan (2003-2008) tarafından yapılmıştır.

Bu tezin amacı lokal integrallenebilir fonksiyon uzaylarında Korovkin tipi yaklaşımı, istatistiksel yaklaşımı ve yakınsaklık oranlarını incelemektir.

2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde tezin içeriğinde kullanılacak olan önemli tanımlar, teoremler ve semboller tanıtılacaktır.

İlk olarak bize gerekli olan bazı fonksiyon uzaylarını tanıtalım.

$C[a, b]$, sonlu $[a, b]$ aralığı üzerinde sürekli tüm fonksiyonların uzayıdır. $f \in C[a, b]$ için $\|f\|_{C[a,b]} = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$ olacak şekildeki alışılmış supremum normu ile birlikte $C[a, b]$ bir Banach uzayı (yani, tam normlu uzay) olur.

$D \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $B(D)$, D üzerindeki tüm sınırlı fonksiyonların uzayıdır. Bu uzay üzerindeki alışılmış supremum normu

$$\|f\|_{B(D)} = \sup_{x \in D} |f(x)|$$

şeklinde ve bu norma göre $B(D)$ uzayı bir Banach uzayı olup bu norma göre yakınsaklık düzgün yakınsaklıktır. Bir (f_n) fonksiyon dizisinin bir g fonksiyonuna düzgün yakınsaması $f_n \rightrightarrows g$ ile gösterilir.

Tanım 2.1 X ve Y reel değerli fonksiyonların iki uzayı olsun. Eğer X uzayından alınmış herhangi bir f fonksiyonuna Y uzayında bir ve yalnız bir g fonksiyonu karşılık getiren bir T kuralı varsa; bu takdirde X uzayında bir operatör tanımlanmıştır, denir ve bu durum $g(x) = T(f; x)$ şeklinde gösterilir. X uzayına T operatörünün tanım kümesi denir ve $X = D(T)$ ile gösterilir. Bu durumda $T(f; x) = g(x)$, Y uzayının bir elemanı olup, g fonksiyonlarının kümesine T operatörünün değer kümesi denir ve bu küme $R(T)$ ile gösterilir. $R(T) \subset Y$ olduğu açıktır.

X uzayı lineer olduğunda lineer operatör tanımını verebiliriz.

Tanım 2.2 f_1 ve f_2 , X fonksiyon uzayında herhangi iki fonksiyon ve her $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ için T operatörü;

$$T(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2; x) = \alpha_1 T(f_1; x) + \alpha_2 T(f_2; x)$$

koşulunu sağlıyorsa bu takdirde T operatörüne “lineer operatör” denir.

Bu tanımdan da açıkça görüleceği gibi $T(0; x) = 0$ olur.

Lineer operatörler kümesi içinde önemli bir alt sınıf pozitif lineer operatörlerdir.

Tanım 2.3 $X^+ = \{f \in X : f(x) \geq 0\}$ ve $Y^+ = \{g \in Y : g(x) \geq 0\}$ olsun. Eğer, X uzayında tanımlanmış T lineer operatörü X^+ kümesindeki herhangi bir f fonksiyonunu pozitif fonksiyona dönüştürüyor ise T operatörüne “pozitif lineer operatör” denir.

T pozitif lineer operatörü için $TX^+ \subset Y^+$ sağlamır. Yani; $f(x) \geq 0$ olduğunda $T(f; x) \geq 0$ olur. O halde, her x için $f(x) \leq g(x)$ olduğunda, $T(f; x) \leq T(g; x)$ olup, böylece pozitif lineer operatör monotondur.

2.1 P.P. Korovkin Teoremleri

1951 yılında H. Bohman, toplam şeklindeki pozitif lineer operatörler dizisinin sürekli bir f fonksiyonuna yaklaşması problemini incelemiştir. H. Bohman, $x \in [0, 1]$ için $0 \leq \alpha_{k,n} \leq 1$ olduğunda

$$T_n(f; x) = \sum_{k=0}^n f(\alpha_{k,n}) P_{k,n}(x) \quad P_{k,n}(x) \geq 0$$

pozitif lineer operatör dizisinin $[0, 1]$ aralığında f fonksiyonuna düzgün yakınsak olabilmesi için yani, $T_n(f; x) \Rightarrow f(x)$ olması için gerek ve yeter koşul

$$T_n(1; x) \Rightarrow 1 \tag{2.1}$$

$$T_n(t; x) \Rightarrow x \tag{2.2}$$

$$T_n(t^2; x) \Rightarrow x^2 \tag{2.3}$$

olduğunu göstermiştir. 1953 yılında P.P. Korovkin genel bir teorem ispatlamış ve göstermiştir ki Bohman’ın koşulları genel durumda da gerçekleşir.

Teorem 2.1.1 $T_n : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ ile tanımlı $\{T_n\}$ pozitif lineer operatör dizisi olmak üzere yukarıdaki (2.1),(2.2) ve (2.3) koşullarını gerçekleştiriyor ise o takdirde $C[a, b]$ uzayındaki her f fonksiyonu için $n \rightarrow \infty$ iken

$$T_n(f; x) \Rightarrow f(x) \quad , a \leq x \leq b$$

olur (Korovkin 1953).

Sonuç 2.1.1 Eğer $\{T_n\}$ pozitif lineer operatörler dizisi, $[a, b]$ aralığında

$$\begin{aligned} T_n(1; x) &\Rightarrow 1 \\ T_n((t-x)^2; x) &\Rightarrow 0 \end{aligned}$$

koşullarını sağlıyor ise bu takdirde $C[a, b]$ uzayındaki f fonksiyonu için $n \rightarrow \infty$ iken

$$T_n(f; x) \Rightarrow f(x) \quad , a \leq x \leq b$$

olur (Korovkin 1960).

Aşağıdaki örnek Bernstein polinom dizisinin yukarıdaki teoremi gerçeklediğini gösterir.

Örnek 2.1.1 $f \in C(0, 1)$ olmak üzere,

$$B_n(f; x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \quad , n \in \mathbb{N}$$

ile tanımlanan Bernstein polinomları için

$$B_n(1; x) = 1, B_n(t; x) = x \text{ ve } B_n(t^2; x) = x^2 + \frac{x-x^2}{n}$$

(Lorentz 1986) olduğundan, $\{B_n\}$ pozitif operatörler dizisi için Teorem 2.1.1 gerçekleştirilir.

3. L_p UZAYINDA KOROVKİN TEOREMİ

Bu bölümde önce L_p uzayının tanımı verilir, L_p uzayındaki Korovkin Teoremi incelenecektir. Daha sonra istatistiksel yakınsaklık kavramı ele alınıp, L_p uzayındaki Korovkin Teoreminin istatistiksel versiyonu verilecektir.

Tanım 3.1 $L_p[a, b]$ uzayının elemanları, ölçülebilir fonksiyonlar olup modülleri p -inci kuvvetten ($p \geq 1$) Lebesgue anlamında integrallenebilen fonksiyonlardır. O halde bir $f \in L_p[a, b]$ için

$$\int_a^b |f(x)|^p dx < \infty$$

olur. Bu uzaydaki norm,

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

şeklinde tanımlanır.

Şimdi ileride sıkça kullanacağımız bir lemmayı inceleyelim.

Lemma 3.1 (Luzin Teoremi) $f \in L_p[a, b]$ ise her $\varepsilon > 0$ için $\|f - g\|_p < \varepsilon$ olacak şekilde $C[a, b]$ uzayında sürekli, bir g fonksiyonu vardır yani; $C[a, b]$ uzayı $L_p[a, b]$ uzayında yoğundur (Royden 1968).

Teorem 3.1 $T_n : L_p[a, b] \rightarrow L_p[a, b]$ ile tanımlı $\{T_n\}$ pozitif lineer operatör dizisi olsun. Eğer,

(i) $\|T_n\|$ düzgün sınırlı, yani; her $n \in \mathbb{N}$ için $\|T_n\| \leq C$ olacak biçimde bir $C > 0$ mevcut ise

(ii) $\nu = 0, 1, 2$ için

$$\|T_n(t^\nu; x) - x^\nu\|_p \rightarrow 0 \quad , (n \rightarrow \infty)$$

sağlanıyorsa, bu takdirde her $f \in L_p[a, b]$ için;

$$\|T_n(f; x) - f(x)\|_p \rightarrow 0$$

gerçeklenir (Dzyadik 1966).

İspat Lemma 3.1' den her $f \in L_p[a, b]$ için $\|f - g\|_p < \varepsilon$ olacak şekilde $C[a, b]$ de sürekli bir g fonksiyonu alalım.

$g \in C[a, b]$ olduğundan; her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $\delta > 0$ bulabiliriz ki her $x, t \in [a, b]$ için $|t - x| < \delta$ olduğunda,

$$|g(t) - g(x)| < \varepsilon \quad (3.1)$$

sağlanır.

Ayrıca g fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli olduğundan sınırlıdır. O halde öyle bir $C > 0$ sayısı bulabiliriz ki, her $x \in [a, b]$ için $|g(x)| \leq C$ sağlanır.

$|t - x| \geq \delta$ olduğunda ise $\frac{(t-x)^2}{\delta^2} \geq 1$ olduğundan,

$$|g(t) - g(x)| \leq |g(t)| + |g(x)| \leq C + C \leq 2C \frac{(t-x)^2}{\delta^2} \quad (3.2)$$

elde edilir. Dolayısıyla, (3.1) ve (3.2) eşitsizliklerinden her $x, t \in [a, b]$ için;

$$|g(t) - g(x)| \leq \varepsilon + 2C \frac{(t-x)^2}{\delta^2}$$

yazabiliriz.

Diğer taraftan; pozitif lineer operatörlerin monotonluğunu ve lineerliği kullanarak;

$$\begin{aligned} \|T_n(f; x) - f(x)\|_p &= \|T_n(f - g + g; x) - f(x) - g(x) + g(x)\|_p \\ &\leq \|T_n(f - g; x)\|_p + \|T_n(g; x) - g(x)\|_p + \|f - g\|_p \\ &\leq \|T_n(|f - g|; x)\|_p + \|T_n(g; x) - g(x)\|_p + \|f - g\|_p \\ &\leq \|f - g\|_p \|T_n(1; x)\|_p + \|T_n(g; x) - g(x)\|_p + \|f - g\|_p \\ &\leq \varepsilon M + \|T_n(g; x) - g(x)\|_p + \varepsilon \end{aligned}$$

yazabiliriz.

g fonksiyonu sürekli olduğundan; (3.1) eşitsizliğinden;

$$\begin{aligned}
\|T_n(g; x) - g(x)\|_p &= \|T_n(g(t) - g(x) + g(x); x) - g(x)\|_p \\
&\leq \|T_n(g(t) - g(x); x)\|_p + \|T_n(g(x); x) - g(x)\|_p \\
&\leq \|T_n(|g(t) - g(x)|; x)\|_p + |g(x)| \|T_n(1; x) - 1\|_p \\
&\leq \|T_n(|g(t) - g(x)|; x)\|_p + C \|T_n(1; x) - 1\|_p
\end{aligned}$$

olup, (3.2) eşitsizliğini ve operatörün lineerliğini kullanarak;

$$\begin{aligned}
\|T_n(|g(t) - g(x)|; x)\|_p &\leq \left\| T_n\left(\varepsilon + 2C \frac{(t-x)^2}{\delta^2}; x\right) \right\|_p \\
&= \left\| \varepsilon T_n(1; x) + \frac{2C}{\delta^2} T_n((t-x)^2; x) \right\|_p \\
&= \left\| \varepsilon T_n(1; x) + \varepsilon - \varepsilon + \frac{2C}{\delta^2} T_n((t-x)^2; x) \right\|_p \\
&= \left\| \varepsilon (T_n(1; x) - 1) + \varepsilon + \frac{2C}{\delta^2} T_n((t-x)^2; x) \right\|_p \\
&\leq \varepsilon \|T_n(1; x) - 1\|_p + \varepsilon + \left\| \frac{2C}{\delta^2} T_n((t-x)^2; x) \right\|_p
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
\|T_n((t-x)^2, x)\|_p &= \|T_n(t^2; x) - 2xT_n(1; x) + x^2T_n(1; x)\|_p \\
&= \|[T_n(t^2; x) - x^2] - 2x[T_n(1; x) - x] \\
&\quad + x^2[T_n(1; x) - 1]\|_p
\end{aligned}$$

olduğundan son durumda $a < b$ için,

$$\begin{aligned}
\|T_n f - f\|_p &\leq \varepsilon \left(\|T_n(1; x) - 1\|_p + 1 \right) \\
&\quad + \frac{2M}{\delta^2} \left(\|[T_n(t^2; x) - x^2] - 2b[T_n(1; x) - x] \right. \\
&\quad \left. + b^2[T_n(1; x) - 1]\|_p \right) + C \|T_n(1; x) - 1\|_p
\end{aligned}$$

elde edilir. Korovkin koşullarından dolayı; $n \rightarrow \infty$ için eşitsizliğin sağ tarafı 0'a yakınsar. Böylece istenilen sonuç elde edilir.

3.1 $L_p [a, b]$ Uzayında Korovkin Teoreminin İstatistiksel Versiyonu

Bu bölümde önce istatistiksel yakınsaklık kavramı incelenip, daha sonra L_p uzayında Korovkin teoreminin istatistiksel versiyonu verilecektir.

3.1.1 İstatistiksel Yakınsaklık

Bu kısımda bir dizinin istatistiksel yakınsaklığı incelenecektir.

Tanım 3.1.1 $K \subset \mathbb{N}$ kümesini alalım. $\delta(K) = \lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : k \in K\}|$ limiti mevcut ise bu limite K kümesinin asimptotik yoğunluğu denir (Niven and Zuckerman 1980). Burada $E \subseteq \mathbb{N}$ olmak üzere $|E|$ ile E kümesinin kardinal sayısı gösterilmektedir.

Tanım 3.1.2 $x = (x_k)$ bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için,

$$\lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa x dizisi L sayısına istatistiksel yakınsaktır denir ve $st - \lim x = L$ ile gösterilir (Fast 1951, Steinhaus 1951).

Şimdi bir $\varepsilon > 0$ için $E_\varepsilon = \{k : |x_k - L| \geq \varepsilon\}$ dersek χ_{E_ε} bu kümenin karakteristik fonksiyonu olmak üzere $st - \lim x = L$ olması için gerek ve yeter koşul her $\varepsilon > 0$ için $\lim_n (C_1 \chi_{E_\varepsilon}(k))_n = 0$ olmasıdır. Burada $C_1 = (c_{nk})$ Cesáro matrisi olup;

$$c_{nk} = \begin{cases} \frac{1}{n}, & 1 \leq k \leq n \\ 0, & k > n \end{cases}$$

ile tanımlanır.

Örnek 3.1.1

$$x_k = \begin{cases} \sqrt{k} & , \quad k = m^2 \\ 5 & , \quad k \neq m^2 \end{cases} \quad (m = 1, 2, \dots)$$

şeklinde tanımlanan $x = (x_k)$ dizisini inceleyelim. Her $\varepsilon > 0$ için,

$$\lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - 5| \geq \varepsilon\}| \leq \lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : x_k \neq 5\}| \leq \lim_n \frac{1}{n} \sqrt{n} = 0$$

elde edilir. O halde, $st - \lim x = 5$ bulunur.

Önerme 3.1.2 Bir $x = (x_k)$ dizisinin bir L sayısına istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter koşul $\delta(K) = 1$ olacak biçimde bir $K \subseteq \mathbb{N}$ için $\lim_{k \in K} x_k = L$ olmasıdır (Šalát 1980, Fridy 1985, Connor 1988).

x ve y iki istatistiksel yakınsak dizi ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere $xy = (x_k y_k)$ ve $\lambda x = (\lambda x_k)$ dizileri de istatistiksel yakınsak dizilerdir. x dizisinin bir L sayısına yakınsak olması aynı L sayısına istatistiksel yakınsak olmasını gerektirdiği açıktır. O halde istatistiksel yakınsaklık, yakınsaklığın bir genişletilmesidir. Yani; alışılmış anlamda yakınsak olan her dizi istatistiksel yakınsaktır. Fakat Örnek 3.1.1'den görülebileceği gibi sınırsız iraksak bazı diziler de istatistiksel yakınsak olabilmektedir.

Şimdi, $L_p[a, b]$ uzayındaki pozitif lineer operatör dizisinin Korovkin tipi yaklaşım teoreminin istatistiksel versiyonunu inceleyelim.

Teorem 3.1.1 $T_n : L_p[a, b] \rightarrow L_p[a, b]$ ile tanımlı $\{T_n\}$ pozitif lineer operatör dizisi olsun. Eğer;

(i) $\|T_n\|$ düzgün sınırlı, yani; her n için $\|T_n\| \leq C$ olacak biçimde bir $C > 0$ mevcut ise

(ii) $\nu = 0, 1, 2$ için

$$st - \lim \|T_n(t^\nu; x) - x^\nu\|_p = 0$$

şartları sağlanıyorsa, bu takdirde her $f \in L_p[a, b]$ için;

$$st - \lim \|T_n(f; x) - f(x)\|_p = 0$$

elde edilir (Gadjiev ve Orhan 2002).

İspat (ii) şartından $\varepsilon > 0$ verildiğinde $\nu = 0, 1, 2$ için $n_\nu(\varepsilon)$ mevcuttur ve K_ν ($\nu = 0, 1, 2$), 1 yoğunluklu alt küme olmak üzere her $n \in K_\nu$ ve $n > n_\nu$ ($\nu = 0, 1, 2$) için

$$\|T_n(t^\nu; x) - x^\nu\|_p < \varepsilon \quad (3.3)$$

gerçeklenir.

$\delta(K_0 \cap K_1 \cap K_2) = 1$ olduğundan $n > \max\{n_0, n_1, n_2\}$ olmak üzere (3.3) eşitsizliği $n \in K := K_0 \cap K_1 \cap K_2$ için de sağlanır. Hipotezden, $C > 0$ olmak üzere $\|T_n\| \leq C$ ($n = 1, 2, \dots$) koşulunu sağlayan bir C sabiti mevcuttur. Luzin Teoreminden; $f \in L_p[a, b]$ verildiğinde $\|f - g\|_p < \varepsilon$ olacak biçimde $g \in C[a, b]$ mevcuttur. Buradan T_n operatörünün lineerliğini ve monotonluğunu kullanarak;

$$\begin{aligned} \|T_n(f; x) - f(x)\|_p &\leq \|T_n(f - g; x)\|_p + \|T_n(g; x) - g(x)\|_p + \|f - g\|_p \\ &\leq \varepsilon(C + 1) + \|T_n(g; x) - g(x)\|_p \end{aligned} \quad (3.4)$$

elde edilir. g fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli olduğundan; her $x \in [a, b]$ ve bir $M > 0$ için $|g(x)| \leq M$ yazabiliriz. Böylece;

$$\begin{aligned} \|T_n(g; x) - g(x)\|_p &\leq \|T_n(g(t) - g(x) + g(x); x) - g(x)\|_p \\ &\leq \|T_n(|g(t) - g(x)|; x)\|_p + |g(x)| \|T_n(1; x) - 1\|_p \\ &\leq \|T_n(|g(t) - g(x)|; x)\|_p + M \|T_n(1; x) - 1\|_p \end{aligned}$$

elde edilir. $g \in C[a, b]$ olduğundan; her $t, x \in [a, b]$ için M ve δ pozitif bir sabit olmak üzere

$$|g(t) - g(x)| < \varepsilon + 2M \frac{(t - x)^2}{\delta^2}$$

yazabiliriz. Bu durumda; $a < b$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\|T_n(|g(t) - g(x)|; x)\|_p &\leq \left\| T_n\left(\varepsilon + \frac{2M}{\delta^2}(t-x)^2; x\right) \right\|_p \\
&= \left\| \varepsilon(T_n(1; x) - 1) + \frac{2M}{\delta^2}T_n((t-x)^2; x) \right\|_p \\
&\leq \varepsilon(\|T_n(1; x) - 1\| + 1) \\
&\quad + \frac{2M}{\delta^2}(\|T_n(t^2; x) - x^2\|_p \\
&\quad + 2b\|T_n(t; x) - x\|_p + b^2\|T_n(1; x) - 1\|_p)
\end{aligned} \tag{3.5}$$

(3.3)'dan $n \in K$ ve $n > \max\{n_o, n_1, n_2\}$ için (3.5)'deki son eşitsizlik (3.4)'de yerine yazıldığında $n \rightarrow \infty$ için;

$$st - \lim \|T_n(f; x) - f(x)\|_p = 0$$

elde edilir.

4. LOKAL İNTEGRALLENEBİLİR FONKSİYON UZAYLARI

Bu bölümde önce lokal integrallenebilir fonksiyonların tanımı yapıp daha sonra lokal integrallenebilir fonksiyonların ağırlıklı uzayında Korovkin tipi bazı yaklaşım teoremleri incelenecektir.

Her $x \in \mathbb{R}$ için $q(x) = 1 + x^2$ ağırlıklı fonksiyonu olmak üzere; lokal integrallenebilir fonksiyonların ağırlıklı uzayı $L_{p,q}(loc)$ ile gösterilecektir.

4.1 Lokal İntegrallenebilir Fonksiyonlar

Bu kısımda lokal integrallenebilir fonksiyonlar tanıtılıp, ilerideki ispatlarımızda kullanılacağımız bazı notasyonlar verilecektir.

Tanım 4.1.1 $-\infty < x < \infty$ için $q(x) = 1 + x^2$ ağırlık fonksiyonu olmak üzere, $h > 0$ ve f ölçülebilir bir fonksiyon olsun. M_f , f fonksiyonuna bağlı bir sabit ve $p \geq 1$ olmak üzere,

$$\left(\frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq M_f q(x) \quad (4.1)$$

koşulunu sağlayan f fonksiyonlarının uzayına lokal integrallenebilir fonksiyonların ağırlıklı uzayı denir ve $L_{p,q}(loc)$ ile gösterilir.

$L_{p,q}(loc)$ uzayı,

$$\|f\|_{p,q} = \sup_{-\infty < x < \infty} \frac{\left(\frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}}{q(x)} \quad (4.2)$$

normu ile tanımlı lineer normlu bir uzaydır. $L_{p,q}(loc)$ uzayını kendi içine dönüştüren tüm lineer pozitif operatörlerin uzayını $(L_{p,q}(loc) \rightarrow L_{p,q}(loc))^+$ ile göstereceğiz.

Şimdi sıkça kullanacağımız bazı notasyonları ifade edelim. Her $a, b \in \mathbb{R}$ için;

$$\|f; L_p(a, b)\| = \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \quad (4.3)$$

$$\|f; L_{p,q}(a, b)\| = \sup_{a \leq x \leq b} \frac{\|f; L_p(x-h, x+h)\|}{q(x)} \quad (4.4)$$

$$\|f; L_{p,q}(|x| \geq a)\| = \sup_{|x| \geq a} \frac{\|f; L_p(x-h, x+h)\|}{q(x)} \quad (4.5)$$

tanımlayabiliriz. Bu doğrultuda $L_{p,q}(loc)$ uzayındaki norm

$$\|f\|_{p,q} = \sup_{-\infty < x < \infty} \frac{\|f; L_p(x-h, x+h)\|}{q(x)} \quad (4.6)$$

ile ifade edilir (Gadjiev vd. 2003).

Tanım 4.1.2 k_f, f fonksiyonuna bağlı pozitif bir sabit olmak üzere;

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{\|f - k_f q; L_p(x-h, x+h)\|}{q(x)} = 0 \quad (4.7)$$

koşulunu sağlayan f fonksiyonlarının uzayını $L_{p,q}^k(loc)$ ile göstereceğiz. Burada $L_{p,q}^k(loc)$ uzayı $L_{p,q}(loc)$ uzayının bir alt uzayıdır. $k_f = 0$ olduğunda $L_{p,q}^k(loc)$ yerine $L_{p,q}^0(loc)$ yazılır (Gadjiev vd. 2003).

4.2 Lokal İntegrallenebilir Fonksiyon Uzaylarında Korovkin Tipi

Teoremler

Bu bölümde lokal integrallenebilir fonksiyon uzaylarında Korovkin tipi teoremler incelenip, Korovkin şartlarının tüm lokal uzayda gerçekleşmeyip, lokal uzayın bir alt uzayında sağlanacağı incelenecektir.

$T_n : L_{p,q}(loc) \rightarrow L_{p,q}(loc)$ ile tanımlı pozitif lineer operatör dizisi olmak üzere;

- (i) $\|T_n\|$ düzgün sınırlı yani; her n için $\|T_n\| \leq C$ olacak biçimde bir $C > 0$ mevcut olsun.
- (ii) $m = 0, 1, 2$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n(t^m; x) - x^m\|_{p,q} = 0$$

şartlarını sağlasın. Bu durumda; her bir $f \in L_{p,q}(loc)$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n f - f\|_{p,q} = 0$$

gerçekleşip gerçekleşmeyeceği sorulabilir. Şimdi bu sorunun cevabının negatif olduğunu gösterelim.

Teorem 4.2.1 $T_n : L_{p,q}(loc) \rightarrow L_{p,q}(loc)$ ile tanımlı pozitif lineer operatörlerin bir dizisi $\{T_n\}$ olmak üzere, yukarıdaki (i) ve (ii) şartlarını sağlasın. Bu durumda

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|T_n f^* - f^*\| \geq 2^{1-\frac{1}{p}} \quad (4.8)$$

eşitsizliği gerçekleşecek biçimde bir $f^* \in L_{p,q}(loc)$ bulabiliriz (Gadjiev ve İbikli 2002).

İspat T_n operatörünü aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$T_n(f; x) = \begin{cases} \frac{x^2}{(x+\frac{1}{2})^2} f(x + \frac{1}{2}), & n - \frac{1}{2} \leq x \leq n + \frac{1}{2} \\ f(x), & d.d \end{cases}$$

T_n operatörünün pozitif lineer operatör olduğu açıktır.

$$\begin{aligned}
\|T_n f\|_{p,q} &= \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{\left(\int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} |T_n f|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}}{q(x)} \\
&\leq \sup_{n-\frac{1}{2} \leq x \leq n} \frac{\left(\int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} \left| \frac{t^2}{(t+\frac{1}{2})^2} f(t+\frac{1}{2}) \right|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}}{q(x)} + \sup_{x < n-\frac{1}{2}} \frac{\left(\int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}}{q(x)} \\
&\quad + \sup_{x > n} \frac{\left(\int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}}{q(x)} \\
&\leq \sup_{n-\frac{1}{2} \leq x \leq n} \frac{\left(\int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} |f(t+\frac{1}{2})|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}}{q(x)} + \sup_{x < n-\frac{1}{2}} \frac{\left(\int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}}{q(x)} \\
&\quad + \sup_{x > n} \frac{\left(\int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}}{q(x)}, \left(\frac{t^2}{(t+\frac{1}{2})^2} < 1 \right) \\
&\leq \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{\left(\int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} |f(t+\frac{1}{2})|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}}{q(x)} + \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{\left(\int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}}{q(x)} \\
&\quad + \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{\left(\int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}}{q(x)} \\
&\leq 3 \|f\|_{p,q}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda (i) şartı sağlanır. Şimdi (ii) şartının sağlandığını gösterelim.

$\|T_n(t^m; x) - x^m\|_{p,q}$ normunu göz önüne alıp,

$m = 0$ için;

$$|T_n(1; x) - 1| = \left| \frac{x^2}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2} - 1 \right| < 1$$

yazabiliriz. $L_{p,q}$ (*loc*) tanımından,

$$\|T_n(1; x) - 1\|_{p,q} = \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{\left(\int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} |T_n(1; t) - 1|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}}{1 + x^2}$$

elde edilir. Supremum ve T_n operatörünün tanımından;

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{\left(\int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} |T_n(1; t) - 1|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}}{1 + x^2} &= \sup_{x \in [n-\frac{1}{2}, n]} \frac{\left(\int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} |T_n(1; t) - 1|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}}{1 + x^2} \\ &\quad + \sup_{x \notin [n-\frac{1}{2}, n]} \frac{\left(\int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} |T_n(1; t) - 1|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}}{1 + x^2} \\ &= \sup_{x \in [n-\frac{1}{2}, n]} \frac{\left(\int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} \left| \frac{t^2}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2} - 1 \right|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}}{1 + x^2} \\ &\quad + \sup_{x \notin [n-\frac{1}{2}, n]} \frac{\left(\int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} |1 - 1|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}}{1 + x^2} \\ &= \sup_{x \in [n-\frac{1}{2}, n]} \frac{\left(\int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} \left| \frac{t^2}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2} - 1 \right|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}}{1 + x^2} \end{aligned}$$

yazabiliriz. Şimdi

$$0 < \frac{t^2}{(t+\frac{1}{2})^2} < 1 \Rightarrow -1 < \frac{t^2}{(t+\frac{1}{2})^2} - 1 < 0$$

$$\Rightarrow 0 < \left| \frac{t^2}{(t+\frac{1}{2})^2} - 1 \right| < 1$$

olduğunu kullanarak,

$$\|T_n(1; x) - 1\|_{p,q} = \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{\left(\int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} |T_n(1; t) - 1|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}}{1+x^2}$$

$$\leq \sup_{x \in [n-\frac{1}{2}, n]} \frac{\left(\int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} \left| \frac{t^2}{(t+\frac{1}{2})^2} - 1 \right|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}}{1+x^2}$$

$$< \sup_{x \in [n-\frac{1}{2}, n]} \frac{1}{1+x^2}$$

$$\leq \frac{1}{1+(n-\frac{1}{2})^2} \rightarrow 0, \quad (n \rightarrow \infty)$$

elde ederiz. $m = 1$ için,

$$T_n(t; x) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{x^2}{(x+\frac{1}{2})^2} (x + \frac{1}{2}) & , x \in [n - \frac{1}{2}, n] \\ x & , x \notin [n - \frac{1}{2}, n] \end{array} \right\}$$

elde edilir. $t > 0$ için

$$\left| \frac{t^2}{(t+\frac{1}{2})} - t \right| = t \left| \frac{t}{(t+\frac{1}{2})} - 1 \right| \leq t$$

yazabiliriz. Böylece

$$\begin{aligned}
\|T_n(t; x) - x\|_{p,q} &= \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{\left(\int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} |T_n(\xi; t) - t|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}}{1+x^2} \\
&\leq \sup_{x \in [n-\frac{1}{2}, n]} \frac{\left(\int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} \left| \frac{t^2}{(t+\frac{1}{2})} - t \right|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}}{1+x^2} + \sup_{x \notin [n-\frac{1}{2}, n]} \frac{\left(\int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} |t - t|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}}{1+x^2} \\
&= \sup_{x \in [n-\frac{1}{2}, n]} \frac{\left(\int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} \left| \frac{t^2}{(t+\frac{1}{2})} - t \right|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}}{1+x^2} \\
&\leq \sup_{x \in [n-\frac{1}{2}, n]} \frac{\left(\int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} |t|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}}{1+x^2} ; \left(t \leq x + \frac{1}{2} \right) \\
&\leq \sup_{x \in [n-\frac{1}{2}, n]} \frac{\left((x + \frac{1}{2})^2 \int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} dt \right)^{\frac{1}{p}}}{1+x^2} \\
&= \sup_{x \in [n-\frac{1}{2}, n]} \frac{x + \frac{1}{2}}{1+x^2} \\
&\leq \frac{n + \frac{1}{2}}{1 + (n - \frac{1}{2})^2}
\end{aligned}$$

elde edilir. Eşitsizliğin sağ tarafı sifıra yakınsar. Böylece sol tarafı da sifıra yakınsar.

Son olarak $m = 2$ için;

$$T_n(t^2; x) = \begin{cases} \frac{x^2}{(x+\frac{1}{2})^2} (x + \frac{1}{2})^2 & , x \in [n - \frac{1}{2}, n] \\ x^2 & , x \notin [n - \frac{1}{2}, n] \end{cases}$$

olacaktır. Buradan,

$$\|T_n(t^2; x) - x^2\| = \|x^2 - x^2\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

elde edilir. Böylece (ii) şartı sağlanır. Şimdi

$$\|T_n f^* - f^*\|_{p,q} > 0$$

gerçeklenecek şekilde bir f^* fonksiyonu bulacağız. Bunun için

$$f^*(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \bigcup_{k=1}^{\infty} (k - \frac{1}{2}, k] \\ -x^2, & x \in \bigcup_{k=0}^{\infty} (k, k + \frac{1}{2}] \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

olacak şekilde bir $f^* \in L_{p,q}$ (*loc*) fonksiyonu tanımlayalım.

$$\|T_n(f^*; x) - f^*(x)\|_{p,q} = \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{\left(\int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} |T_n(f^*; t) - f^*(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}}{1 + x^2}$$

eşitliğinde T_n operatörü ve supremum tanımından;

$$\begin{aligned} \|T_n(f^*; x) - f^*(x)\|_{p,q} &= \sup_{x \in [n-\frac{1}{2}, n]} \frac{\left(\int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} \left| \frac{t^2}{(t+\frac{1}{2})^2} f^*(t+h) - f^*(t) \right|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}}{1 + x^2} \\ &\geq \frac{\left(\int_{n-\frac{1}{2}}^n \left| \frac{t^2}{(t+\frac{1}{2})^2} f^*(t+\frac{1}{2}) - f^*(t) \right|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}}{1 + n^2} \end{aligned}$$

elde edilir. İntegrasyon aralığından;

$$n - \frac{1}{2} \leq t \leq n \Rightarrow n \leq t + \frac{1}{2} \leq n + \frac{1}{2}$$

yazabiliriz. Bu durumda f^* fonksiyonunun tanımını kullanarak; $f^*(t + \frac{1}{2}) = -(t + \frac{1}{2})^2$ ve $f^*(t) = t^2$ olduğu son eşitsizlikte yerine yazılırsa; $(n - \frac{1}{2} \leq t \leq n)$ için

$$\begin{aligned} \|T_n(f^*; x) - f^*(x)\|_{p,q} &\geq \frac{\left(\int_{n-\frac{1}{2}}^n 2^p t^{2p} dt \right)^{\frac{1}{p}}}{1+n^2} \\ &\geq \frac{\left(2^p \left(n - \frac{1}{2}\right)^{2p} \int_{n-\frac{1}{2}}^n dt \right)^{\frac{1}{p}}}{1+n^2} \\ &\geq \frac{2 \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 2^{-\frac{1}{p}}}{1+n^2} \\ &= \frac{\left(n - \frac{1}{2}\right)^2 2^{1-\frac{1}{p}}}{1+n^2} \rightarrow 2^{1-\frac{1}{p}} \quad , (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 4.2.1'den görüldüğü gibi Korovkin şartları tüm $L_{p,q}(loc)$ uzayında gerçekleşmez.

Şimdi Korovkin şartlarının $L_{p,q}(loc)$ uzayının bir alt uzayı olan $L_{p,q}^k(loc)$ uzayında gerçekleşebileceğini gösterelim. Öncelikle ilgili teoremin ispatında kullanacağımız bir lemmayı inceleyelim.

Lemma 4.2.1 $T_n : L_{p,q}(loc) \rightarrow L_{p,q}(loc)$ ile tanımlı pozitif lineer operatörlerin bir dizisi $\{T_n\}$ olmak üzere ;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n(t^m; x) - x^m\|_{p,q} = 0 \quad , (m = 0, 1, 2)$$

sağlansın. Bu durumda reel ekseninde sürekli, sınırlı bir f fonksiyonu ve $a < b$ için;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n f - f; L_{p,q}[a, b]\|_{p,q} = 0 \quad (4.9)$$

sağlanır (Gadjiev vd. 2003).

İspat f , kapalı aralıkta düzgün sürekli bir fonksiyon olduğundan, her $\varepsilon > 0$ için en azından bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ vardır öyle ki $|t - x| < \delta$ koşulunu sağlayan her $x \in [a, b]$, $t \in \mathbb{R}$ için $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$ gerçekleşir.

Ayrıca f reel ekseninde sınırlı olduğundan, öyle bir $M > 0$ sayısı bulabiliriz ki her $x \in [a, b]$ için $|f(x)| \leq M$ yazılabilir.

$|t - x| \geq \delta$ olduğunda ise $\frac{(t-x)^2}{\delta^2} \geq 1$ olacağından;

$$|f(t) - f(x)| < |f(t)| + |f(x)| \leq 2M \leq 2M \frac{(t-x)^2}{\delta^2}$$

elde edilir. Böylece her $x \in [a, b]$ ve $t \in \mathbb{R}$ için;

$$|f(t) - f(x)| < \varepsilon + 2M \frac{(t-x)^2}{\delta^2} \quad (4.10)$$

elde edilir.

Diğer taraftan T_n operatörünün lineerliği ve monotonluğunu kullanarak;

$$\begin{aligned} \|T_n f - f\|_{p,q} &= \|T_n (f(t) - f(x) + f(x); x) - f(x)\|_{p,q} \\ &\leq \|T_n (f(t) - f(x); x)\|_{p,q} + \|T_n (f(x); x) - f(x)\|_{p,q} \\ &\leq \|T_n (|f(t) - f(x)|; x)\|_{p,q} + M \|T_n (1; x) - 1\|_{p,q} \end{aligned} \quad (4.11)$$

yazılır. (4.10) eşitsizliğinden;

$$\begin{aligned}
\|T_n(|f(t) - f(x)|; x)\|_{p,q} &\leq \left\| T_n \left(\varepsilon + 2M \frac{(t-x)^2}{\delta^2}; x \right) \right\|_{p,q} \\
&= \left\| \varepsilon T_n(1, x) + \frac{2M}{\delta^2} (T_n((t-x)^2, x)) \right\|_{p,q} \\
&= \left\| \varepsilon T_n(1, x) + \varepsilon - \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2} (T_n((t-x)^2, x)) \right\|_{p,q} \\
&\leq \varepsilon + \varepsilon \|T_n(1; x) - 1\|_{p,q} + \frac{2M}{\delta^2} \|T_n((t-x)^2, x)\|_{p,q}
\end{aligned} \tag{4.12}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned}
\|T_n((t-x)^2, x)\|_{p,q} &= \|T_n(t^2; x) - 2xT_n(1; x) + x^2T_n(1; x)\|_{p,q} \\
&= \|[T_n(t^2; x) - x^2] - 2x[T_n(1; x) - x] \\
&\quad + x^2[T_n(1; x) - 1]\|_{p,q}
\end{aligned}$$

olduğundan (4.11) ve (4.12) eşitsizliğinden, $a < b$ için;

$$\begin{aligned}
\|T_n f - f\|_{p,q} &\leq \varepsilon \left(\|T_n(1; x) - 1\|_{p,q} + 1 \right) \\
&\quad + \frac{2M}{\delta^2} \left(\|[T_n(t^2; x) - x^2] - 2b[T_n(1; x) - x] \right. \\
&\quad \left. + b^2[T_n(1; x) - 1]\|_{p,q} \right) + M \|T_n(1; x) - 1\|_{p,q}
\end{aligned}$$

bulunur. Hipotezden eşitsizliğinden sağ tarafı sıfıra yakınsayacağından sol tarafı da sıfıra yakınsar, yani

$$\|T_n(f; x) - f(x)\|_{p,q} \rightarrow 0$$

elde edilir.

Şimdi $L_{p,q}^k$ (*loc*) uzayında Korovkin şartlarının gerçekleştiğini gösterelim.

Teorem 4.2.2 $T_n : L_{p,q}(loc) \rightarrow L_{p,q}(loc)$ ile tanımlı pozitif lineer operatör dizisi $\{T_n\}$ olmak üzere;

- (i) $\|T_n\|$ düzgün sınırlı yani; her n için $\|T_n\| \leq C$ olacak biçimde bir $C > 0$ mevcut olsun.
- (ii) $m = 0, 1, 2$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n(t^m; x) - x^m\|_{p,q} = 0$$

şartlarını sağlasın. Bu durumda, her $f \in L_{p,q}^k(loc)$ için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n f - f\|_{p,q} = 0 \quad (4.13)$$

gerçeklenir (Gadjiev vd. 2003).

İspat $L_{p,q}^k(loc) \subset L_{p,q}(loc)$ ve k_f pozitif bir sabit olmak üzere;

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{\|f - k_f q, L_p(x-h, x+h)\|}{q(x)} = 0$$

elde edilir. Bu durumda. $f \in L_{p,q}^k(loc)$ ise $F = f - k_f q \in L_{p,q}(loc)$ yazabiliriz. Eğer, F fonksiyonu için (4.13) sağlanırsa (ii)'den

$$\begin{aligned} \|T_n f - f\|_{p,q} &\leq \|T_n F - F\|_{p,q} + k_f \|T_n q - q\|_{p,q} \\ &\leq \|T_n F - F\|_{p,q} + k_f \|T_n 1 - 1\|_{p,q} + k_f \|T_n x^2 - x^2\|_{p,q} \end{aligned}$$

yazılabilir. Böylece $f \in L_{p,q}^0(loc)$ için teoremi ispatlamak yeterlidir.

Keyfi bir $\varepsilon > 0$ verilsin. O halde $|x| \geq x_0$ eşitsizliğini gerçekleyen her x için

$$\left(\frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon q(x) \quad (4.14)$$

eşitsizliği gerçekleşecek biçimde bir x_0 noktası bulabiliriz.

Luzin teoreminden bilindiği üzere $[-x_0 - h, x_0 + h]$ sonlu aralığında sürekli bir φ

fonksiyonu mevcuttur ve

$$\|f - \varphi; L_p(-x_0, x_0)\| < \varepsilon \quad (4.15)$$

eşitsizliği sağlanır. Şimdi

$$M(x_0) = \max\left\{\max_{|x| < x_0+h} |\varphi(x)|, 1\right\}$$

olsun.

$$\delta < \min\left\{\frac{2h\varepsilon^p}{M^p(x_0)}, h\right\} \quad (4.16)$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ alalım. Böylece

$$g(x) = \begin{cases} \varphi(x) & , \quad |x| \leq x_0 + h \\ 0 & , \quad |x| \leq x_0 + h \\ \text{lineer} & , \quad d.d. \end{cases}$$

olacak biçimde sürekli bir g fonksiyonu tanımlayabiliriz. (i),(4.14),(4.15),(4.16) ve Minkowski eşitsizliğini kullanarak, Luzin teoremi yardımıyla;

$$\begin{aligned} \|f - g\|_{p,q} &\leq \|f - g; L_{p,q}(-x_0, x_0)\| + \|f - g; L_{p,q}(|x_0| \geq x_0 + h + \delta)\| \\ &\quad + \|f - g; L_{p,q}(x_0, x_0 + h + \delta)\| + \|f - g; L_{p,q}(-x_0 - h - \delta, -x_0)\| \\ &\leq 2\varepsilon + \|f - g; L_{p,q}(x_0 - h, x_0 + 2h + \delta)\| \\ &\quad + \|f - g; L_{p,q}(-x_0 - 2h - \delta, -x_0 + h)\| \\ &\leq 2\varepsilon + \|f - \varphi; L_{p,q}(x_0 - h, x_0 + h)\| + \|f; L_{p,q}(x_0 + h, x_0 + 2h + \delta)\| \\ &\quad + \|g; L_{p,q}(x_0 + h, x_0 + h + \delta)\| + \|f; L_{p,q}(-x_0 - 2h - \delta, -x_0 - h)\| \\ &\quad + \|g; L_{p,q}(-x_0 - h - \delta, -x_0 - h)\| \\ &\quad + \|f - \varphi; L_{p,q}(-x_0 - h, -x_0 + h)\| \end{aligned}$$

yazabiliriz.

$|g(x)| \leq M(x_0)$ ve $\delta < h$ olduğu son eşitsizlikte dikkate alınırsa;

$$\begin{aligned} \|f - g\|_{p,q} &\leq 4\varepsilon + 2M(x_0) \left(\frac{\delta}{h}\right)^{\frac{1}{p}} + \|f; L_{p,q}(x_0 + h, x_0 + 3h)\| \\ &\quad + \|f; L_{p,q}(-x_0 - 3h, -x_0 - h)\| \\ &\leq 6\varepsilon + 2\varepsilon(q(x_0 + 2h)) = \varepsilon(6 + 2(q(x_0 + 2h))) = C_1\varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir; burada $C_1 = 6 + 2q(x_0 + 2h)$ alınmıştır.

Yani, $f \in L_{p,q}^0(\text{loc})$ ve $\varepsilon > 0$ olduğunda;

$$\|f - g\|_{p,q} < C_1\varepsilon \tag{4.17}$$

eşitsizliğini sağlayan $[a, b]$ aralığında sürekli bir g fonksiyonu bulabiliriz. $q(x) = 1 + x^2$ olduğundan $M(x_0)$ 'in tanımlı olduğu yerde $|x| > x_1$ için,

$$\frac{M(x_0)}{q(x_1)} < \varepsilon \quad \text{ve} \quad g(x) = 0 \tag{4.18}$$

olacak şekilde bir $x_1 > x_0$ noktası alalım. Şimdi (ii), (4.17), (4.18) ve Lemma 4.2.1' i kullanarak;

$$\begin{aligned} \|T_n f - f\|_{p,q} &\leq \|T_n(f - g)\|_{p,q} + \|T_n g - g\|_{p,q} + \|f - g\|_{p,q} \\ &\leq C \|f - g\|_{p,q} + \|f - g\|_{p,q} + \|T_n g - g\|_{p,q} \\ &\leq (C + 1) \|f - g\|_{p,q} + \|T_n g - g; L_{p,q}(-x_1, x_1)\| \\ &\quad + \|T_n g - g; L_{p,q}(|x| \geq x_1)\| \\ &\leq (C + 1) \varepsilon + \|T_n g - g; L_{p,q}(-x_1, x_1)\| \\ &\quad + \|T_n g - g; L_{p,q}(|x| \geq x_1)\| \\ &\leq (C + 2) \varepsilon + \|T_n g - g; L_{p,q}(|x| \geq x_1)\| \\ &\leq (C + 2) \varepsilon + \|T_n g; L_{p,q}(|x| \geq x_1)\| \end{aligned}$$

elde edilir. Her $x \in \mathbb{R}$ için $|g(x)| \leq M(x_0)$ olduğundan;

$$\begin{aligned} \|T_n g; L_{p,q}(|x| \geq x_1)\| &\leq M(x_0) \|T_n 1; L_{p,q}(|x| \geq x_1)\| \\ &\leq M(x_0) \|T_n 1 - 1\|_{p,q} + M(x_0) \|1; L_{p,q}(|x| \geq x_1)\| \end{aligned}$$

yazabiliriz. Böylece,

$$\|T_n f - f\|_{p,q} \leq (C + 2)\varepsilon + M(x_0) \|T_n 1 - 1\|_{p,q} + \frac{M(x_0)}{q(x_1)}$$

elde edilir. $\frac{M(x_0)}{q(x_1)} < \varepsilon$ ve $\|T_n 1 - 1\|_{p,q} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) olduğundan;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n f - f\|_{p,q} = 0$$

elde edilir.

Teorem 4.2.3 $T_n : L_{p,q}(loc) \rightarrow L_{p,q}(loc)$ ile tanımlı pozitif lineer operatör dizisi $\{T_n\}$ olmak üzere;

- (i) $\|T_n\|$ düzgün sınırlı yani; her $n \in \mathbb{N}$ için $\|T_n\| \leq C$ olacak biçimde bir $C > 0$ mevcut olsun.
- (ii) $m = 0, 1, 2$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n(t^m; x) - x^m\|_{p,q} = 0$$

şartlarını sağlasın. Bu durumda, bir $\varepsilon > 0$ ve $q^*(x) = 1 + |x|^{2+\varepsilon}$, $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{1+x^2}{q^*(x)} = 0$ olmak üzere her $f \in L_{p,q}(loc)$ için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{\|T_n f - f; L_p(x-h, x+h)\|}{1 + |x|^{2+\varepsilon}} = 0$$

gerçeklenir (Gadjiev vd. 2003).

İspat Sabit bir $x_0 \in \mathbb{R}$ noktası için $f \in L_{p,q}(\text{loc})$ olmak üzere

$$a_n = \sup_{|x| > x_0} \frac{\|T_n f - f; L_p(x-h, x+h)\|}{1+x^2}$$

olsun. O halde (ii)'den (a_n) dizisi sınırlıdır. Lemma 4.2.1'den sabit bir x_0 noktası için;

$$b_n = \sup_{|x| \leq x_0} \frac{\|T_n f - f; L_p(x-h, x+h)\|}{1+x^2}$$

dersek $b_n \rightarrow 0, (n \rightarrow \infty)$, gerçeklendiğini göstereceğiz. Luzin teoreminden $[-x_0 - h, x_0 + h]$ aralığında

$$\|f - \varphi_1; L_p(-x_0 - h, x_0 + h)\| < \varepsilon \quad (4.19)$$

eşitsizliğini sağlayan sürekli bir φ_1 fonksiyonu mevcuttur. Şimdi

$$G(x) = \begin{cases} \varphi_1(-x_0 - h) & , x \leq -x_0 - h \\ \varphi_1(x) & , |x| \leq x_0 + h \\ \varphi_1(x_0 + h) & , x \geq x_0 + h \end{cases}$$

olacak şekilde tüm reel ekseninde sürekli bir G fonksiyonu tanımlayalım. Teoremin hipotezinden ve (4.19)'dan

$$\begin{aligned} b_n &= \|T_n f - f; L_{p,q}(-x_0, x_0)\| \\ &\leq \|T_n(f - G); L_{p,q}(-x_0, x_0)\| \\ &\quad + \|T_n G - G; L_{p,q}(-x_0, x_0)\| + \|f - G; L_{p,q}(-x_0, x_0)\| \\ &\leq \|T_n\| \|(f - \varphi_1); L_{p,q}(-x_0 - h, x_0 + h)\| \\ &\quad + \|f - \varphi_1; L_{p,q}(-x_0 - h, x_0 + h)\| \\ &\quad + \|T_n \varphi_1 - \varphi_1; L_{p,q}(-x_0 - h, x_0 + h)\| \\ &= (\|T_n\| + 1) \|(f - \varphi_1); L_{p,q}(-x_0 - h, x_0 + h)\| \\ &\quad + \|T_n \varphi_1 - \varphi_1; L_{p,q}(-x_0 - h, x_0 + h)\| \end{aligned}$$

yazabiliriz. Teoremin (ii) şartı, Lemma 4.2.1 ve Luzin teoreminden;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0 \quad (4.20)$$

elde edilir. Tüm bu sonuçlardan;

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{\|T_n f - f; L_p(x-h, x+h)\|}{1 + |x|^{2+\varepsilon}} &= \sup_{-\infty < x < \infty} \frac{\|T_n f - f; L_p(x-h, x+h)\|}{1 + |x|^{2+\varepsilon}} \frac{q(x)}{q(x)} \\ &\leq \sup_{|x| < x_0} \frac{\|T_n f - f; L_p(x-h, x+h)\|}{1 + |x|^{2+\varepsilon}} \frac{q(x)}{q(x)} \\ &\quad + \sup_{|x| \geq x_0} \frac{\|T_n f - f; L_p(x-h, x+h)\|}{1 + |x|^{2+\varepsilon}} \frac{q(x)}{q(x)} \\ &= b_n \sup_{|x| < x_0} \frac{1 + x^2}{1 + |x|^{2+\varepsilon}} + a_n \sup_{|x| \geq x_0} \frac{1 + x^2}{1 + |x|^{2+\varepsilon}} \\ &\leq b_n \sup_{|x| < x_0} (1 + x^2) + a_n \sup_{|x| \geq x_0} \frac{1 + x^2}{1 + |x|^{2+\varepsilon}} \\ &= b_n (1 + x_0^2) + a_n \sup_{|x| \geq x_0} \frac{1 + x^2}{1 + |x|^{2+\varepsilon}} \end{aligned}$$

elde edilir. Hipotezden ve (4.20)'den istenilen sonuç gerçekleşir. Böylece ispat tamamlanır.

Şimdi, $\alpha > 0$ için $q_\alpha(x) = 1 + |x|^{2+\alpha}$ ağırlık fonksiyonunu tanımlayalım. f ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere $L_{p, q_\alpha}(loc)$ uzayı

$$\|f\|_{p, q_\alpha} = \sup_{-\infty < x < \infty} \frac{1}{q_\alpha(x)} \left(\int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

sonlu normu ile tanımlı bir uzaydır.

Böylece $a, b \in \mathbb{R}$ için ($a < b$)

$$L_p(-\infty, \infty) \subset L_{p, q_\alpha}(loc) \subset L_{p, q}(loc) \subset L_p(a, b)$$

olduğu kolayca görülebilir. $CB(-\infty, \infty)$ uzayı

$$\|f\|_{CB} = \sup_{-\infty < x < \infty} |f(x)|$$

normu ile tanımlı, reel eksenindeki tüm sürekli ve sınırlı f fonksiyonlarının uzayıdır.

Şimdi ilerideki teoremlerimizde sıkça kullanacağımız ve önemli bir teorem olan Luzin teoreminin $L_{p,q}(loc)$ uzayındaki versiyonunu inceleyelim.

Lemma 4.2.2 $f \in L_{p,q}(loc)$ olmak üzere; $\varepsilon > 0$ verildiğinde $\alpha > 0$ için

$$\|f - g\|_{p,q_\alpha} < \varepsilon$$

koşulunu sağlayan $CB(-\infty, \infty)$ uzayında bir g fonksiyonu mevcuttur (Gadjiev ve İbikli 2002).

İspat $\|f - g\|_{p,q_\alpha} = \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{\left(\frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} |f-g|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}}{q_\alpha(x)}$ olduğunu biliyoruz. $h = \frac{1}{2}$ seçip;

$$\|f - g\|_{p,q_\alpha} = \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{\left(\int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} |f - g|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}}{q_\alpha(x)}$$

eşitliğini kullanalım. Supremum tanımını kullanarak;

$$\sup_{|x| \leq x_0} \frac{1}{q_\alpha(x)} \left(\int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_{x_0-\frac{1}{2}}^{x_0+\frac{1}{2}} |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \quad (4.21)$$

yazabiliriz. (4.21) eşitsizliğinin sağında Luzin teoremini kullanırsak; her $\varepsilon > 0$ için,

$$\sup_{|x| \leq x_0} \frac{1}{q_\alpha(x)} \left(\int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} |f(t) - g_1(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_{-x_0-\frac{1}{2}}^{x_0+\frac{1}{2}} |f(t) - g_1(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$$

olacak biçimde sürekli g_1 fonksiyonu bulabiliriz. Böylece;

$$\sup_{|x| \leq x_0} \frac{1}{q_\alpha(x)} \left(\int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon \quad (4.22)$$

elde edilir. $L_{p,q}$ (*loc*) uzayındaki fonksiyonların tanımından;

$$\left(\int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq M_f q(x)$$

yazabiliriz. Bu durumda;

$$\sup_{|x| > x_0} \frac{1}{q_\alpha(x)} \left(\int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq M_f \sup_{|x| > x_0} \frac{q(x)}{q_\alpha(x)} \quad (4.23)$$

elde edilir. Her $\varepsilon > 0$ için;

$$\sup_{|x| > x_0} \frac{q(x)}{q_\alpha(x)} < \varepsilon \quad (4.24)$$

gerçeklenecek biçimde bir $x_0 > 0$ noktası seçebiliriz. Bununla birlikte tüm reel ekseninde sürekli bir g fonksiyonunu

$$\begin{cases} g_1(x) & , \text{ her } x \in \left(-x_0 - \frac{1}{2}, x_0 + \frac{1}{2}\right) \\ g_1\left(x_0 + \frac{1}{2}\right) & , \text{ her } x \geq x_0 + \frac{1}{2} \\ g_1\left(-x_0 - \frac{1}{2}\right) & , \text{ her } x \leq -x_0 - \frac{1}{2} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Tanımladığımız g fonksiyonu $\left(-x_0 - \frac{1}{2}, x_0 + \frac{1}{2}\right)$ aralığında g_1 ile çakışır. Dolayısıyla; (4.22), (4.23) ve (4.24) eşitsizliklerinden;

$$\begin{aligned}
\|f - g\|_{p,q_\alpha} &\leq \sup_{|x| \leq x_0} \frac{\left(\int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} |f - g_1|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}}{q_\alpha(x)} + \sup_{|x| > x_0} \frac{\left(\int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} |f - g_1|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}}{q_\alpha(x)} \\
&\leq \sup_{|x| \leq x_0} \frac{\left(\int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} |f - g_1|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}}{q_\alpha(x)} + \sup_{|x| > x_0} \frac{\left(\int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} |f|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}}{q_\alpha(x)} \\
&\quad + \sup_{|x| > x_0} \frac{\left(\int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} |g_1|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}}{q_\alpha(x)} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Lemma 4.2.3 $T_n : L_{p,q}(loc) \rightarrow L_{p,q}(loc)$ ile tanımlı pozitif lineer operatör $\{T_n\}$ dizisi olmak üzere;

- (i) $\|T_n\|$ düzgün sınırlı yani; her n için $\|T_n\| \leq C$ olacak biçimde bir $C > 0$ mevcut olsun.
- (ii) $m = 0, 1, 2$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n(t^m; x) - x^m\|_{p,q} = 0$$

şartlarını sağlasın. Bu durumda, her $f \in CB(-\infty, \infty)$ için;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n f - f\|_{p,q_\alpha} = 0$$

sağlanır (Gadjiev ve İbikli 2002).

İspat $\|f\|_{CB} = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$ olup; f sürekli bir fonksiyon olduğundan; her $\varepsilon > 0$ için en azından bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ vardır öyle ki $|t - x| < \delta$ koşulunu sağlayan her $x, t \in \mathbb{R}$ için $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$ gerçekleşir. $|t - x| \geq \delta$ olduğunda ise $\frac{(t-x)^2}{\delta^2} \geq 1$ olduğundan;

$$|f(t) - f(x)| < |f(t)| + |f(x)| \leq 2 \|f\|_{CB} \leq \frac{2 \|f\|_{CB}}{\delta^2} (t - x)^2$$

elde edilir. Böylece her $x, t \in \mathbb{R}$ için;

$$|f(t) - f(x)| < \varepsilon + 2 \|f\|_{CB} \frac{(t - x)^2}{\delta^2} \quad (4.25)$$

elde edilir.

Diğer taraftan T_n operatörünün lineerliği ve monotonluğunu kullanarak;

$$\begin{aligned} \|T_n f - f\|_{p, q_\alpha} &= \|T_n (f(t) - f(x) + f(x); t) - f(x)\|_{p, q_\alpha} \\ &\leq \|T_n (f(t) - f(x); t)\|_{p, q_\alpha} + \|T_n f(x) - f(x)\|_{p, q_\alpha} \\ &\leq \|T_n (|f(t) - f(x)|; t)\|_{p, q_\alpha} + \|f\|_{CB} \|T_n (1; x) - 1\|_{p, q_\alpha} \end{aligned} \quad (4.26)$$

yazılır. (4.25) eşitsizliğinden;

$$\begin{aligned} \|T_n (|f(t) - f(x)|; t)\|_{p, q_\alpha} &\leq \left\| T_n \left(\varepsilon + 2 \|f\|_{CB} \frac{(t - x)^2}{\delta^2}; t \right) \right\|_{p, q_\alpha} \\ &= \left\| \varepsilon T_n (1, t) + \frac{2 \|f\|_{CB}}{\delta^2} (T_n ((t - x)^2, t)) \right\|_{p, q_\alpha} \\ &\leq \varepsilon \|T_n 1\|_{p, q_\alpha} + \frac{2 \|f\|_{CB}}{\delta^2} \|T_n ((t - x)^2, t)\|_{p, q_\alpha} \\ &\leq \varepsilon \|T_n 1\|_{p, q_\alpha} \\ &\quad + \frac{2 \|f\|_{CB}}{\delta^2} \sup_{|x| \leq x_0} \frac{\left(\int_{x^{-\frac{1}{2}}}^{x+\frac{1}{2}} |T_n ((t - x)^2; t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}}{q_\alpha(x)} \end{aligned}$$

$$+ \frac{2 \|f\|_{CB}}{\delta^2} \sup_{|x| > x_0} \frac{\left(\int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} |T_n((t-x)^2; t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}}{q_\alpha(x)}$$

yazabiliriz. $q(x) < q_\alpha(x)$ iken $\frac{1}{q(x)} > \frac{1}{q_\alpha(x)}$ ve $\frac{(t-x)^2}{\delta^2} < 1$ iken $(t-x)^2 < \delta^2$ olduğunu kullanarak;

$$\begin{aligned} \|T_n(|f(t) - f(x)|; t)\|_{p, q_\alpha} &< \varepsilon \|T_n 1\|_{p, q_\alpha} \\ &+ \frac{2 \|f\|_{CB}}{\delta^2} \sup_{|x| \leq x_0} \frac{1}{q(x)} \left(\int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} |T_n((t-x)^2; t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ &+ \frac{2 \|f\|_{CB}}{\delta^2} \sup_{|x| > x_0} \frac{\left(\int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} |T_n(\delta^2; t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}}{q_\alpha(x)} \\ &< \varepsilon \|T_n 1\|_{p, q_\alpha} \\ &+ \frac{2 \|f\|_{CB}}{\delta^2} \sup_{|x| \leq x_0} \frac{1}{q(x)} \left(\int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} |T_n((t-x)^2; t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ &+ \frac{2 \|f\|_{CB}}{\delta^2} \delta^2 \sup_{|x| > x_0} \frac{\left(\int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} |T_n(1; t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}}{q_\alpha(x)} \frac{q(x)}{q(x)} \\ &< \varepsilon \|T_n 1\|_{p, q_\alpha} \\ &+ \frac{2 \|f\|_{CB}}{\delta^2} \sup_{|x| \leq x_0} \frac{1}{q(x)} \left(\int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} |T_n((t-x)^2; t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ &+ 2 \|f\|_{CB} \|T_n 1\|_{p, q} \sup_{|x| > x_0} \frac{q(x)}{q_\alpha(x)} \end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitsizlik (4.26) eşitsizliğinde yerine yazılıp; Lemma 4.2.2'den

$\sup_{|x| > x_0} \frac{q(x)}{q_\alpha(x)} < \varepsilon$ olduğu kullanılırsa, $n \rightarrow \infty$ için eşitsizliğin sağ tarafı sıfıra yakınsar. Böylece istenilen sonuç elde edilir.

Teorem 4.2.4 $T_n : L_{p,q}(loc) \rightarrow L_{p,q}(loc)$ ile tanımlı pozitif lineer operatör dizisi $\{T_n\}$ olmak üzere;

- (i) $\|T_n\|$ düzgün sınırlı yani; her $n \in \mathbb{N}$ için $\|T_n\| \leq C$ olacak biçimde bir $C > 0$ mevcut olsun.
- (ii) $m = 0, 1, 2$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n(t^m; x) - x^m\|_{p,q} = 0$$

şartlarını sağlasın. Bu durumda, her $f \in L_{p,q}(loc)$ için;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n f - f\|_{p,q_\alpha} = 0$$

gerçeklenir (Gadjiev ve İbikli 2002).

İspat (i) şartından dolayı her $n \in \mathbb{N}$ için $\|T_n\| \leq C$, Lemma 4.2.2 olduğunu kullanarak;

$$\begin{aligned} \|T_n f - f\|_{p,q_\alpha} &\leq \|T_n f - g; t\|_{p,q_\alpha} + \|T_n g - g\|_{p,q_\alpha} + \|f - g\|_{p,q_\alpha} \\ &\leq (C + 1) \|f - g\|_{p,q_\alpha} + \|T_n g - g\|_{p,q_\alpha} \end{aligned}$$

$g \in CB(-\infty, \infty)$ fonksiyonu bulabiliriz. Lemma 4.2.2 ve Lemma 4.2.3'ü kullanarak $n \rightarrow \infty$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n f - f\|_{p,q_\alpha} = 0$$

elde edilir.

4.3 Lokal İntegrallenebilir Fonksiyon Uzaylarında Korovkin Tipi Teoremlerin A-İstatistiksel Versiyonu

Bu kısımda önce A -istatistiksel yakınsaklık kavramı tanıtılıp; A -istatistiksel yakınsaklık kullanılarak ağırlıklı fonksiyon uzayları üzerinde tanımlı pozitif lineer operatör dizisi için Korovkin tipi yaklaşım teoremleri incelenecektir.

4.3.1 A-İstatistiksel Yakınsaklık

Bu kısımda bir dizinin A -istatistiksel yakınsaklığı incelenecektir.

Tanım 4.3.1 $A = (a_{nk})$ negatif olmayan regüler bir matris olmak üzere; her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k: |x_k - L| \geq \varepsilon} a_{nk} = 0$$

olacak biçimde bir L sayısı varsa $x = (x_k)$ dizisi L sayısına A -istatistiksel yakınsaktır denir ve $st_A - \lim x = L$ ile gösterilir (Connor 1989, Kolk 1993, Miller 1995).

st_A ile tüm A -istatistiksel yakınsak dizilerin uzayını göstereceğiz.

Şimdi bir $\varepsilon > 0$ için $E_\varepsilon = \{k \in \mathbb{N} : |x_k - L| \geq \varepsilon\}$ dersek χ_{E_ε} bu kümenin karakteristik fonksiyonu olmak üzere $st_A - \lim x = L$ olması için gerek ve yeter koşul

her $\varepsilon > 0$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} (A\chi_{E_\varepsilon}(k))_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_k a_{nk} \chi_{E_\varepsilon}(k) = 0$ olmasıdır.

Açıkça görülüyor ki A -istatistiksel yakınsaklık tanımında A matrisi yerine C_1 Cesàro matrisi alınırsa, istatistiksel yakınsaklık elde edilir. Böylece yoğunluk tanımı da A -yoğunluk tanımına genişletilebilir. Dolayısıyla $\delta_A(E) = \lim_n \sum_{k \in E} a_{nk}$ mevcut ise E kümesi A -yoğunluğa sahiptir diyeceğiz (Freedman ve Sember 1981). O halde $st_A - \lim x = L$ olması için gerek ve yeter koşul her $\varepsilon > 0$ için $\delta_A(E_\varepsilon) = 0$ olmasıdır.

Lemma 4.3.1 $A = (a_{nk})$ negatif olmayan regüler toplanabilme matrisi için $\lim_n \max_k \{a_{nk}\} = 0$ gerçekleşiyorsa; A -istatistiksel yakınsaklık klasik anlamdaki yakınsaklıktan daha kuvvetlidir (Kolk 1991).

A -istatistiksel yakınsaklık normlu uzaylar için de verilebilir.

Tanım 4.3.2 $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay ve $u = (u_k)$ dizisi X 'de bir dizi olsun. Eğer; her $\varepsilon > 0$ için $\delta_A\{k \in \mathbb{N} : \|u_k - u_0\| \geq \varepsilon\} = 0$ oluyorsa; (u_k) dizisi $u_0 \in X$ elemanına A -istatistiksel yakınsaktır denir (Kolk 1991).

Şimdi Korovkin Teoremini A -istatistiksel yakınsaklık yardımıyla bir benzerini inceleyelim.

Lemma 4.3.2 $A = (a_{nk})$ negatif olmayan regüler toplanabilme matrisi olsun. $T_n : L_{p,q}(loc) \rightarrow L_{p,q}(loc)$ ile tanımlı $\{T_n\}$ pozitif lineer operatör dizisi olsun. T_n operatörü $f_\nu(y) = y^\nu$ ($\nu = 0, 1, 2$) için

$$st_A - \lim_n \|T_n f_\nu - f_\nu\|_{p,q} = 0 \quad (4.27)$$

koşulunu sağlasın. Bu durumda reel ekseninde sürekli bir f fonksiyonu için

$$st_A - \lim_n \|T_n f - f; L_{p,q}(a, b)\| = 0$$

gerçeklenir (Duman ve Orhan 2003).

İspat f , kapalı aralıkta düzgün sürekli bir fonksiyon olduğundan, her $\varepsilon > 0$ için en azından bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ vardır öyle ki $|t - x| < \delta$ koşulunu sağlayan her $x \in [a, b]$, $t \in \mathbb{R}$ için $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$ gerçekleşir.

Ayrıca f reel ekseninde sınırlı olduğundan, öyle bir $M > 0$ sayısı bulabiliriz ki her $x \in [a, b]$ için $|f(x)| \leq M$ yazılabilir.

$|t - x| \geq \delta$ olduğunda ise $\frac{(t-x)^2}{\delta^2} \geq 1$ olacağından;

$$|f(t) - f(x)| < |f(t)| + |f(x)| \leq 2M \leq 2M \frac{(t-x)^2}{\delta^2}$$

elde edilir. Böylece her $x \in [a, b]$ ve $t \in \mathbb{R}$ için;

$$|f(t) - f(x)| < \varepsilon + 2M \frac{(t-x)^2}{\delta^2} \quad (4.28)$$

elde edilir.

Diğer taraftan T_n operatörünün lineerliği ve monotonluğunu kullanarak;

$$\begin{aligned}\|T_n f - f\|_{p,q} &= \|T_n (f(t) - f(x) + f(x); x) - f(x)\|_{p,q} \\ &\leq \|T_n (f(t) - f(x); x)\|_{p,q} + \|T_n (f(x); x) - f(x)\|_{p,q} \\ &\leq \|T_n (|f(t) - f(x)|; x)\|_{p,q} + M \|T_n (f_0; x) - f_0\|_{p,q}\end{aligned}$$

yazılır. (4.28) eşitsizliğinden;

$$\begin{aligned}\|T_n (|f(t) - f(x)|; x)\|_{p,q} &\leq \left\| T_n \left(\varepsilon + 2M \frac{(t-x)^2}{\delta^2}; x \right) \right\|_{p,q} \\ &= \left\| \varepsilon T_n (f_0, x) + \frac{2M}{\delta^2} (T_n ((t-x)^2, x)) \right\|_{p,q} \\ &= \left\| \varepsilon T_n (f_0, x) + \varepsilon - \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2} (T_n ((t-x)^2, x)) \right\|_{p,q} \\ &\leq \varepsilon + \varepsilon \|T_n (f_0; x) - f_0\|_{p,q} \\ &\quad + \frac{2M}{\delta^2} \|T_n ((t-x)^2, x)\|_{p,q}\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}\|T_n ((t-x)^2, x)\|_{p,q} &= \|T_n (t^2; x) - 2x T_n (1; x) + x^2 T_n (1; x)\|_{p,q} \\ &= \|[T_n (t^2; x) - x^2] - 2x [T_n (1; x) - x] \\ &\quad + x^2 [T_n (1; x) - 1]\|_{p,q}\end{aligned}$$

yazabiliriz. $C = \max\{|a|, |b|\}$ olmak üzere;

$$\begin{aligned}\|T_n f - f\|_{p,q} &\leq \varepsilon + (\varepsilon + M) \|T_n f_0 - f_0\|_{p,q} \\ &\quad + \frac{2M}{\delta^2} \left(\|T_n f_2 - f_2\|_{p,q} + 2C \|T_n f_1 - f_1\|_{p,q} \right. \\ &\quad \left. + C^2 \|T_n f_0 - f_0\|_{p,q} \right)\end{aligned}$$

elde edilir.

$$H = \max \left\{ \frac{2M}{\delta^2}, \frac{2C^2 M}{\delta^2} + \varepsilon + M, \frac{4CM}{\delta^2} \right\}$$

alınırsa; her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\|T_n f - f; L_{p,q}(a,b)\|_{p,q} < \varepsilon + H \left\{ \|T_n f_2 - f_2\|_{p,q} + \|T_n f_1 - f_1\|_{p,q} + \|T_n f_0 - f_0\|_{p,q} \right\} \quad (4.29)$$

yazabiliriz. $r > 0$ verildiğinde $\varepsilon < r$ olacak biçimde bir $\varepsilon > 0$ seçelim ve

$$\begin{aligned} D &= \left\{ n : \|T_n f_2 - f_2\|_{p,q} + \|T_n f_1 - f_1\|_{p,q} + \|T_n f_0 - f_0\|_{p,q} \geq \frac{r-\varepsilon}{H} \right\} \\ D_1 &= \left\{ n : \|T_n f_2 - f_2\|_{p,q} \geq \frac{r-\varepsilon}{3H} \right\} \\ D_2 &= \left\{ n : \|T_n f_1 - f_1\|_{p,q} \geq \frac{r-\varepsilon}{3H} \right\} \\ D_3 &= \left\{ n : \|T_n f_0 - f_0\|_{p,q} \geq \frac{r-\varepsilon}{3H} \right\} \end{aligned}$$

kümelerini tanımlayalım. $D \subseteq D_1 \cup D_2 \cup D_3$ olduğu açıktır. Dolayısıyla (4.29)'ü kullanarak;

$$\sum_{k: \|T_k f - f; L_{p,q}(a,b)\| \geq r} a_{nk} \leq \sum_{k \in D} a_{nk} \leq \sum_{k \in D_1} a_{nk} + \sum_{k \in D_2} a_{nk} + \sum_{k \in D_3} a_{nk} \quad (4.30)$$

yazabiliriz. (4.27) ve (4.30)'dan istenilen sonuç elde edilir.

Teorem 4.3.2 $A = (a_{nk})$ negatif olmayan regüler toplanabilme bir matris olsun.

$T_n : L_{p,q}(loc) \rightarrow L_{p,q}(loc)$ ile tanımlı pozitif lineer operatör dizisi $\{T_n\}$ olmak üzere,

- (i) $\delta_A \{n \in \mathbb{N} : \|T_n\| \geq H\} = 0$ olacak biçimde bir $H > 0$ mevcut olsun.
- (ii) $\nu = 0, 1, 2$, için $f_\nu(t) = t^\nu$ olmak üzere, $st_A - \lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n f_\nu - f_\nu\|_{p,q} = 0$

gerçeklensin. Bu durumda her $f \in L_{p,q}^k(loc)$ için;

$$st_A - \lim_n \|T_n f - f\|_{p,q} = 0 \quad (4.31)$$

gerçeklenir (Duman ve Orhan 2003).

İspat $f \in L_{p,q}^k(loc)$ ise $F = f - k_f$ $q \in L_{p,q}(loc)$ yazabiliriz. F fonksiyonu için

(4.31) eşitliği sağlanırsa (ii)'den

$$\begin{aligned} \|T_n f - f\|_{p,q} &\leq \|T_n F - F\|_{p,q} + k_f \|T_n q - q\|_{p,q} \\ &\leq \|T_n F - F\|_{p,q} + k_f \|T_n f_0 - f_0\|_{p,q} + k_f \|T_n f_2 - f_2\|_{p,q} \end{aligned}$$

gerçeklenir. Dolayısıyla, f fonksiyonu için de sağlanır. Yani, teoremi $f \in L_{p,q}^0$ (*loc*) için ispatlamak yeterlidir.

Keyfi bir $\varepsilon > 0$ verilsin. O halde $|x| \geq x_0$ eşitsizliğini gerçekleyen her x için

$$\left(\frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} |f(t)| dt \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon q(x) \quad (4.32)$$

eşitsizliği gerçekleşecek biçimde bir x_0 noktası bulabiliriz. Bu durumda $[-x_0 - h, x_0 + h]$ sonlu aralıkta sürekli bir φ fonksiyonu için Luzin teoreminden,

$$\|f - \varphi; L_p(-x_0 - h, x_0 + h)\| < \varepsilon \quad (4.33)$$

eşitsizliği sağlanır. Şimdi

$$M(x_0) = \max\left\{ \max_{|x| < x_0 + h} |\varphi(x)|, 1 \right\}$$

olsun.

$$\delta < \min \left\{ \frac{2h\varepsilon^p}{M^p(x_0)}, h \right\} \quad (4.34)$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ alalım. Böylece,

$$g(x) = \begin{cases} \varphi(x) & ; |x| \leq x_0 + h \\ 0 & ; |x| \leq x_0 + h \\ \text{lineer} & ; d.d. \end{cases}$$

olacak biçimde tüm reel ekseninde sürekli bir g fonksiyonu tanımlayabiliriz. (4.32), (4.33), (4.34) ve Minkowski eşitsizliğini kullanarak, Luzin teoremi yardımıyla;

$$\begin{aligned}
\|f - g\|_{p,q} &\leq \|f - g; L_{p,q}(-x_0, x_0)\| + \|f - g; L_{p,q}(|x_0| \geq x_0 + h + \delta)\| \\
&\quad + \|f - g; L_{p,q}(x_0, x_0 + h + \delta)\| + \|f - g; L_{p,q}(-x_0 - h - \delta, -x_0)\| \\
&\leq 2\varepsilon + \|f - g; L_{p,q}(x_0 - h, x_0 + 2h + \delta)\| \\
&\quad + \|f - g; L_{p,q}(-x_0 - 2h - \delta, -x_0 + h)\| \\
&\leq 2\varepsilon + \|f - \varphi; L_{p,q}(x_0 - h, x_0 + h)\| + \|f; L_{p,q}(x_0 + h, x_0 + 2h + \delta)\| \\
&\quad + \|g; L_{p,q}(x_0 + h, x_0 + h + \delta)\| + \|f; L_{p,q}(-x_0 - 2h - \delta, -x_0 - h)\| \\
&\quad + \|g; L_{p,q}(-x_0 - h - \delta, -x_0 - h)\| + \|f - \varphi; L_{p,q}(-x_0 - h, -x_0 + h)\|
\end{aligned}$$

yazabiliriz. $|g(x)| \leq M(x_0)$ ve $\delta < h$ olduğu son eşitsizlikte dikkate alınrsa;

$$\begin{aligned}
\|f - g\|_{p,q} &\leq 4\varepsilon + 2M(x_0) \left(\frac{\delta}{h}\right)^{\frac{1}{p}} + \|f; L_{p,q}(x_0 + h, x_0 + 3h)\| \\
&\quad + \|f; L_{p,q}(-x_0 - 3h, -x_0 - h)\| \\
&\leq 6\varepsilon + 2\varepsilon (q(x_0 + 2h)) \\
&= \varepsilon (6 + 2(q(x_0 + 2h))) = C_1\varepsilon
\end{aligned} \tag{4.35}$$

elde edilir, burada $C_1 = 6 + 2q(x_0 + 2h)$ alınmıştır.

$q(x) = 1 + x^2$ olduğundan $M(x_0)$ 'in tanımlı olduğu yerde $|x| > x_1$ için,

$$\frac{M(x_0)}{q(x_1)} < \varepsilon \quad \text{ve} \quad g(x) = 0 \tag{4.36}$$

olacak şekilde bir $x_1 > x_0$ noktası alalım. Şimdi,

$$E := \{n \in \mathbb{N} : \|T_n\| \leq H\}$$

kümesini alalım. (i)'den $\delta_A(E) = 1$ elde edilir. Böylece $\varepsilon > 0$ verildiğinde, (4.35) ve (4.36) eşitsizliklerini kullanarak $n \in E$ için,

$$\begin{aligned}
\|T_n f - f\|_{p,q} &\leq \|T_n(f - g)\|_{p,q} + \|T_n g - g\|_{p,q} + \|f - g\|_{p,q} \\
&\leq \|T_n\| \|f - g\|_{p,q} + \|f - g\|_{p,q} + \|T_n g - g\|_{p,q} \\
&< (H + 1) \|f - g\|_{p,q} + \|T_n g - g; L_{p,q}(-x_1, x_1)\| \\
&\quad + \|T_n g - g; L_{p,q}(|x| \geq x_1)\| \\
&< (H + 1) C_1 \varepsilon + \|T_n g - g; L_{p,q}(-x_1, x_1)\| \\
&\quad + \|T_n g - g; L_{p,q}(|x| \geq x_1)\|
\end{aligned}$$

elde edilir. $|g(x)| \leq M(x_0)$ olduğundan;

$$\begin{aligned}
\|T_n f - f\|_{p,q} &< (H + 1) C_1 \varepsilon + \|T_n g - g; L_{p,q}(-x_1, x_1)\| + \frac{M(x_0)}{q(x_1)} \\
&< K \varepsilon + \|T_n g - g; L_{p,q}(-x_1, x_1)\|
\end{aligned}$$

yazabiliriz. Burada $K = (H + 1) C_1 + 1$ olarak alınmıştır.

Şimdi, keyfi bir $r > 0$ verildiğinde $K \varepsilon < r$ olacak biçimde bir $\varepsilon > 0$ seçelim. Böylece;

$$\sum_{k \in E: \|T_k f - f\|_{p,q} \geq r} a_{nk} \leq \sum_{k \in E: \|T_k g - g; L_{p,q}(-x_1, x_1)\| \geq r - K \varepsilon} a_{nk}$$

elde edilir. Böylece; her $f \in L_{p,q}^0(\text{loc})$ için Lemma 4.3.2'den

$$st_A - \lim_n \|T_n f - f\|_{p,q} = 0$$

gerçeklenir.

Teorem 4.3.3 $A = (a_{nk})$ negatif olmayan regüler toplanabilir bir matris olsun.

$T_n : L_{p,q}(\text{loc}) \rightarrow L_{p,q}(\text{loc})$ ile tanımlı pozitif lineer operatör dizisi olmak üzere;

Teorem 4.3.2'deki (i) ve (ii) şartlarını sağlasın. O halde q^* ağırlık fonksiyonu için,

$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{1+x^2}{q^*(x)} = 0$ olmak üzere her $f \in L_{p,q}(\text{loc})$ için

$$st_A - \lim_n \left(\sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{\|T_n f - f; L_p(x-h, x+h)\|}{q^*(x)} \right) = 0$$

gerçeklenir (Duman ve Orhan 2003).

İspat Hipotezden bir $\varepsilon > 0$ verildiğinde $|x| \geq x_0$ şartını sağlayan her x için $\frac{1+x^2}{q^*(x)} < \varepsilon$ olacak biçimde bir x_0 noktası alalım. $f \in L_{p,q}(\text{loc})$ alalım.

$a_n := \|T_n f - f; L_{p,q}(|x| > x_0)\|$ olsun. (i) şartından, $E := \{n \in \mathbb{N} : \|T_n\| \leq H\}$ kümesinin her A yoğunluğu 1'dir. Her $n \in E$ için $a_n \leq M$ olacak biçimde bir $M > 0$ vardır. Gerçekten

$$\begin{aligned} a_n &= \sup_{|x| > x_0} \frac{\left(\frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} |T_n f - f|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}}{1+x^2} \\ &\leq \sup_{|x| > x_0} \frac{\left(\frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} |T_n f|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} |f|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}}{1+x^2} \\ &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{\left(\frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} |T_n f|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}}{1+x^2} + \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{\left(\frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} |f|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}}{1+x^2} \\ &= \|T_n f\|_{p,q} + \|f\|_{p,q} \\ &\leq \|f\|_{p,q} (\|T_n\|_{p,q} + 1) \quad , (\|T_n\| \leq H) \\ &\leq M \end{aligned}$$

sağlanır. Luzin teoreminden; $[-x_0 - h, x_0 + h]$ aralığında

$$\|f - \varphi; L_p(-x_0 - h, x_0 + h)\| < \varepsilon \quad (4.37)$$

eşitsizliğini sağlayan sürekli bir φ fonksiyonu mevcuttur.

Şimdi reel ekseninde sürekli bir G fonksiyonunu şöyle tanımlayalım:

$$G(x) = \begin{cases} \varphi(-x_0 - h) & , x \leq -x_0 - h \\ \varphi(x) & , |x| < x_0 + h \\ \varphi(x_0 + h) & , x \geq x_0 + h \end{cases} .$$

$n \in E$ ve $f \in L_{p,q}$ (*loc*) alalım. Hipotezden ve (4.37) eşitsizliğinden;

$$\begin{aligned} b_n &= \|T_n f - f; L_{p,q}(-x_0, x_0)\| \\ &\leq \|T_n(f - G); L_{p,q}(-x_0, x_0)\| + \|T_n G - G; L_{p,q}(-x_0, x_0)\| \\ &\quad + \|f - G; L_{p,q}(-x_0, x_0)\| \\ &\leq \|T_n\| \|f - G; L_{p,q}(-x_0 - h, x_0 + h)\| + \|T_n G - G; L_{p,q}(-x_0, x_0)\| \\ &\quad + \|f - G; L_{p,q}(-x_0, x_0)\| \\ &= (\|T_n\| + 1) \|f - \varphi; L_p(-x_0 - h, x_0 + h)\| + \|T_n G - G; L_{p,q}(-x_0, x_0)\| \end{aligned} \tag{4.38}$$

elde edilir. Diğer yandan; her $n \in E$ için

$$\begin{aligned} u_n &= \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{\|T_n f - f; L_p(x - h, x + h)\|}{q^*(x)} \frac{q(x)}{q(x)} \\ &\leq \sup_{|x| < x_0} \frac{\|T_n f - f; L_p(x - h, x + h)\|}{q^*(x)} \frac{q(x)}{q(x)} \\ &\quad + \sup_{|x| \geq x_0} \frac{\|T_n f - f; L_p(x - h, x + h)\|}{q^*(x)} \frac{q(x)}{q(x)} \\ &= b_n \sup_{|x| < x_0} \frac{1 + x^2}{q^*(x)} + a_n \sup_{|x| \geq x_0} \frac{1 + x^2}{q^*(x)} \\ &\leq b_n (1 + x_0^2) + a_n \sup_{|x| \geq x_0} \frac{1 + x^2}{q^*(x)} \end{aligned} \tag{4.39}$$

elde edilir. Dolayısıyla; (4.37), (4.38), (4.39)'den $n \in E$ ve $f \in L_{p,q}$ (*loc*) için;

$$\begin{aligned} u_n &< (H + 1) q(x_0 + 1) \varepsilon + q(x_0 + 1) \|T_n G - G; L_{p,q}(-x_0, x_0)\| + M \varepsilon \\ &= K \varepsilon + q(x_0 + 1) \|T_n G - G; L_{p,q}(-x_0, x_0)\| \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $K = (H + 1)q(x_0 + 1) + H$ alınmıştır.

$r > 0$ verildiğinde $K\varepsilon < r$ olacak biçimde bir $\varepsilon > 0$ seçelim. Böylece;

$$\sum_{k \in E: u_k \geq r} a_{nk} \leq \sum_{k \in E: \|T_k G - G; L_{p,q}(-x_0, x_0)\| \geq \frac{r - K\varepsilon}{q(x_0 + 1)}} a_{nk}$$

yazabiliriz.

Lemma 4.3.2'den,

$$st_A - \lim_n u_n = 0$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Şimdi Korovkin teoreminin klasik versiyonunu sağlamayan ancak Teorem 4.3.2'yi sağlayan bir pozitif lineer operatör dizisi örneği vereceğiz.

Örnek 4.3.1 $P_n : L_{p,q}(loc) \rightarrow L_{p,q}(loc)$ olmak üzere $h > 0$ için;

$$P_n(f; x) = \begin{cases} \frac{x^2}{(x+h)^2} f(x+h), & (2n-2) \leq x \leq 2n+1 \\ f(x) & , \quad d.d \end{cases} \quad (4.40)$$

şeklinde tanımlı düzgün sınırlı ve pozitif lineer operatör dizisi olan (P_n) dizisini alalım. $\nu = 0, 1, 2$ olmak üzere; $f_\nu(y) = y^\nu$ için;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|P_n f_\nu - f_\nu\|_{p,q} = 0$$

olmasına rağmen öyle bir $f \in L_{p,q}(loc)$ vardır ki

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|P_n f - f\|_{p,q} = 0$$

koşulu sağlanmaz. Ancak; her $f \in L_{p,q}^k(loc)$ için sağlanır (Gadjiev vd. 2003).

Şimdi; (u_n) dizisi sıfıra A -istatistiksel yakınsak olan ancak yakınsak olmayan bir reel sayı dizisi ve (P_n) dizisi de (4.40) ile tanımlı olmak üzere, $T_n : L_{p,q}(loc) \rightarrow L_{p,q}(loc)$

operatör dizisini

$$T_n(f; x) = (1 + u_n) P_n(f; x)$$

ile tanımlayalım.

Dikkat edelim ki A , $\lim_{n \rightarrow \infty} \max_k \{a_{nk}\} = 0$ olacak biçimde negatif olmayan regüler bir matris ise A istatistiksel yakınsaklık klasik anlamdaki yakınsaklıktan daha kuvvetlidir (Kolk 1991). Bu yüzden böyle bir (u_n) dizisi kurmak mümkündür. Genelliği bozmaksızın (u_n) dizisinin negatif olmadığını kabul edebiliriz ve (T_n) Teorem 4.3.2'deki tüm şartları sağlar. Dolayısıyla; her $f \in L_{p,q}^k(\text{loc})$ için,

$$\begin{aligned} \|T_n f_\nu - f_\nu\|_{p,q} &= \|(1 + u_n) P_n f_\nu - f_\nu\|_{p,q} \\ &= \|P_n f_\nu + u_n P_n f_\nu - f_\nu\|_{p,q} \\ &\leq \|P_n f_\nu - f_\nu\|_{p,q} + u_n \|P_n f_\nu\|_{p,q} \end{aligned}$$

yazabiliriz. Buradan Lemma 4.3.2'i ve $st_A - \lim_n u_n = 0$ olduğunu kullanarak, her $f \in L_{p,q}^k(\text{loc})$ için,

$$st_A - \lim_n \|T_n f - f\|_{p,q} = 0$$

gerçeklenir.

4.4 Lokal İntegrallenebilen Fonksiyon Uzaylarında A -İstatistiksel Yaklaşım Oranı

Bu bölümde lokal integrallenebilen fonksiyon uzayında tanımlı pozitif lineer operatörlerin A -istatistiksel yakınsaklık oranıyla yaklaşım yöntemini incelenecektir. Daha öncesinde “ A -istatistiksel yakınsaklık oranı” ve “ A -istatistiksel sınırlılık oranı” kavramları tanıtarak bu kavramlara ilişkin bir takım sonuçlar elde edilecektir.

Tanım 4.4.1 $A = (a_{jn})$ negatif olmayan regüler bir matris, (a_n) pozitif reel sayıların artmayan bir dizisi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_j \frac{1}{a_j} \sum_{n:|x_n-L|\geq\varepsilon} a_{jn} = 0$$

koşulunu sağlıyorsa $x = (x_n)$ dizisi L sayısına “ $o(a_n)$ oranında $A - istatistiksel yakınsaktır$ ” denir ve $x_n - L = st_A - o(a_n)$ ($n \rightarrow \infty$) biçiminde gösterilir.

Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_j \sum_{n:|x_n-L|\geq\varepsilon a_n} a_{jn} = 0$$

koşulu sağlanıyorsa $x = (x_n)$ dizisi L sayısına “ $o_\mu(a_n)$ oranında $A - istatistiksel yakınsaktır$ ” denir ve $x_n - L = st_A - o_\mu(a_n)$ ($n \rightarrow \infty$) biçiminde gösterilir (Duman vd. 2003).

Tanım 4.4.2 $A = (a_{jn})$ negatif olmayan regüler bir matris (a_n) pozitif reel sayıların artmayan bir dizisi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için

$$\sup_j \frac{1}{a_j} \sum_{n:|x_n|\geq\varepsilon} a_{jn} < \infty$$

koşulu sağlanıyorsa $x = (x_n)$ dizisi “ $O(a_n)$ oranında $A - istatistiksel sınırlıdır$ ” denir ve $x_n = st_A - O(a_n)$ ($n \rightarrow \infty$) biçiminde gösterilir.

Eğer

$$\lim_j \sum_{n:|x_n-L|\geq M a_n} a_{jn} = 0$$

olacak biçimde bir pozitif M sayısı varsa $x = (x_n)$ dizisi “ $O_\mu(a_n)$ oranında $A - istatistiksel sınırlıdır$ ” denir ve $x_n = st_A - O_\mu(a_n)$ ($n \rightarrow \infty$) biçiminde gösterilir (Duman vd. 2003).

\mathbb{R} üzerinde tanımlı $q(x) = 1 + x^2$ bir ağırlık fonksiyonu ve $\delta > 0$ ve $f \in L_p(\text{loc})$ için “ağırlıklı süreklilik modülü”

$$\omega_q(f, \delta) = \sup_{|x-t|\leq\delta} \frac{|f(x) - f(t)|}{q(x)}$$

biçiminde tanımlıdır (Duman ve Orhan 2008).

Şimdi ağırlıklı süreklilik modülünün bazı özelliklerini verelim:

- a) $f \in L_p(loc)$ için $\omega_q(f, \delta) \geq 0$
- b) $f \in L_p(loc)$ $\delta_1 \leq \delta_2 \Rightarrow \omega_q(f, \delta_1) \leq \omega_q(f, \delta_2)$
- c) $c > 0$ ve $f \in L_p(loc)$ için $\omega_q(f, c\delta) \leq c \omega_q(f, \delta)$
- d) $[c]$, c 'nin tam değerini göstermek üzere bir $c > 0$ ve $f \in L_p(loc)$ için

$$\omega_q(f, c\delta) \leq (1 + [c]) \omega_q(f, \delta)$$

- e) $x, t \in \mathbb{R}$ olmak üzere her $L_p(loc)$ için

$$|f(t) - f(x)| \leq q(x) \omega_q(f, |t - x|)$$

özellikleri sağlanır.

Şimdi bu bölümdeki ispatlarımızda sıkça kullanacağımız bir lemmayı inceleyelim.

Lemma 4.4.1 $T_n : L_{p,q}(loc) \rightarrow L_{p,q}(loc)$ ile tanımlı pozitif lineer operatör dizisi olsun. Tüm reel ekseninde sınırlı ve sürekli her f fonksiyonu için ve $f_0(t) = 1, \varphi(x) = (t - x)^2, C_1 = \sup_{a \leq x \leq b} q(x)$ ve $C_2 = \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)|$ olmak üzere; her $n \in \mathbb{N}$ ve bir $\delta > 0$ için,

$$\begin{aligned} \|T_n f - f; L_{p,q}(a, b)\| &\leq C_1 \omega_q(f, \delta) \|T_n f_0 - f_0\|_{p,q} + C_1 \omega_q(f, \delta) \\ &\quad + \frac{C_1}{\delta^2} \omega_q(f, \delta) \|T_n \varphi_x\|_{p,q} + C_2 \|T_n f_0 - f_0\|_{p,q} \end{aligned}$$

gerçeklenir (Duman ve Orhan 2008).

İspat Tüm reel ekseninde sınırlı sürekli bir f fonksiyonu ve $x \in [a, b]$ alalım. T_n operatörünün lineerliğini ve monotonluğunu kullanarak, her $n \in \mathbb{N}$ ve $\delta > 0$ için

$$\begin{aligned} |T_n(f; x) - f(x)| &\leq |T_n(f(t) - f(x) + f(x); x) - f(x)| \\ &\leq |T_n(f(t) - f(x); x) + T_n(f(x); x) - f(x)| \\ &\leq |T_n(f(t) - f(x); x)| + |f(x)| |T_n(f_0; x) - f_0(x)| \end{aligned}$$

yazılabilir.

$q(x) = 1 + x^2 \geq 1$ olduğundan; T_n operatörü ve süreklilik modülünün özelliğini kullanarak;

$$\begin{aligned}
|T_n(f; x) - f(x)| &\leq T_n(|f(t) - f(x)|; x) + |f(x)| |T_n(f_0; x) - f_0(x)| \\
&\leq q(x) T_n(\omega_q(f; |t-x|); x) + |f(x)| |T_n(f_0; x) - f_0(x)| \\
&= q(x) T_n\left(\omega_q\left(f; \frac{|t-x|}{\delta}\right); x\right) + |f(x)| |T_n(f_0; x) - f_0(x)| \\
&= q(x) T_n(\omega_q(f; c\delta); x) + |f(x)| |T_n(f_0; x) - f_0(x)| \\
&\leq q(x) \{T_n((1 + [c])\omega_q(f, \delta); x)\} + |f(x)| |T_n(f_0; x) - f_0(x)| \\
&= q(x) \left\{T_n\left(\left(1 + \left[\frac{|t-x|}{\delta}\right]\right) \omega_q(f, \delta); x\right)\right\} \\
&\quad + |f(x)| |T_n(f_0; x) - f_0(x)| \\
&\leq q(x) \omega_q(f, \delta) T_n(f_0; x) + q(x) \omega_q(f, \delta) T_n\left(\left[\frac{|t-x|}{\delta}\right]; x\right) \\
&\quad + |f(x)| |T_n(f_0; x) - f_0(x)| \\
&= q(x) \omega_q(f, \delta) \{T_n(f_0; x) + f_0(x) - f_0(x)\} \\
&\quad + q(x) \omega_q(f, \delta) T_n\left(\left[\frac{|t-x|}{\delta}\right]; x\right) + |f(x)| |T_n(f_0; x) - f_0(x)| \\
&\leq q(x) \omega_q(f, \delta) \{T_n(f_0; x) - f_0(x)\} + q(x) \omega_q(f, \delta) f_0(x) \\
&\quad + q(x) \omega_q(f, \delta) T_n\left(\frac{|t-x|^2}{\delta^2}; x\right) + |f(x)| |T_n(f_0; x) - f_0(x)| \\
&\leq q(x) \omega_q(f, \delta) |T_n(f_0; x) - f_0(x)| + q(x) \omega_q(f, \delta) \\
&\quad + \frac{q(x) \omega_q(f, \delta)}{\delta^2} T_n(\varphi(x); x) + |f(x)| |T_n(f_0; x) - f_0(x)|
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $c = \frac{|t-x|}{\delta}$ alınmıştır. Böylece

$$\begin{aligned}
\|T_n f - f, L_{p,q}(a, b)\|_{p,q} &\leq \omega_q(f, \delta) \sup_{x \in [a,b]} q(x) \|T_n f_0 - f_0\|_{p,q} + \omega_q(f, \delta) \sup_{x \in [a,b]} q(x) \\
&\quad + \frac{\omega_q(f, \delta)}{\delta^2} \sup_{x \in [a,b]} \|T_n \varphi_x\|_{p,q} + \sup_{x \in [a,b]} |f(x)| \|T_n f_0 - f_0\|_{p,q}
\end{aligned}$$

bulunur. Sonuç olarak;

$$\begin{aligned}
\|T_n f - f, L_{p,q}(a, b)\|_{p,q} &\leq C_1 \omega_q(f, \delta) \|T_n f_0 - f_0\|_{p,q} + C_1 \omega_q(f, \delta) \\
&\quad + \frac{C_1}{\delta^2} \omega_q(f, \delta) \|T_n \varphi_x\|_{p,q} + C_2 \|T_n f_0 - f_0\|_{p,q}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.4.1 $A = (a_{jn})$ negatif olmayan regüler bir toplanabilme matrisi ve (a_n) ve (b_n) pozitif artmayan iki dizi olsun. $T_n : L_{p,q}(loc) \rightarrow L_{p,q}(loc)$ ile tanımlı pozitif lineer operatör dizisi alalım. f tüm reel ekseninde sınırlı, sürekli bir fonksiyon olmak üzere,

$$(i) \quad \|T_n f_0 - f_0\|_{p,q} = st_A - o(a_n) \quad ; (n \rightarrow \infty)$$

$$(ii) \quad \omega_q(f; \alpha_n) = st_A - o(b_n) \quad ; (n \rightarrow \infty) \quad , \quad \alpha_n = \sqrt{\|T_n \varphi_x\|_{p,q}}$$

şartlarını sağlar. Böylece $C_n = \max\{a_n, b_n\}$ için

$$\|T_n f - f; L_{p,q}(a, b)\|_{p,q} = st_A - o(c_n) \quad , \quad (n \rightarrow \infty)$$

elde edilir (Duman ve Orhan 2008).

Benzer sonuç “o” yerine “O” alındığında da sağlanır.

İspat Lemma 4.4.1’den her $n \in \mathbb{N}$ için; $\delta = \alpha_n = \sqrt{\|T_n \varphi_x\|_{p,q}}$ seçilirse;

$$\begin{aligned} \|T_n f - f; L_{p,q}(a, b)\|_{p,q} &\leq C_1 \omega_q(f, \alpha_n) \|T_n f_0 - f_0\|_{p,q} + C_1 \omega_q(f, \alpha_n) \\ &\quad + \frac{C_1}{\left(\sqrt{\|T_n \varphi_x\|_{p,q}}\right)^2} \omega_q(f, \alpha_n) \|T_n \varphi_x\|_{p,q} \\ &\quad + C_2 \|T_n f_0 - f_0\|_{p,q} \\ &= C_1 \omega_q(f, \alpha_n) \|T_n f_0 - f_0\|_{p,q} + 2C_1 \omega_q(f, \alpha_n) \\ &\quad + C_2 \|T_n f_0 - f_0\|_{p,q} \end{aligned} \quad (4.41)$$

elde edilir. Şimdi $\varepsilon > 0$ verildiğinde;

$$\begin{aligned} D &= \left\{ n \in \mathbb{N} : \|T_n f - f; L_{p,q}(a, b)\|_{p,q} \geq \varepsilon \right\} \\ D_1 &= \left\{ n \in \mathbb{N} : \omega_q(f, \alpha_n) \|T_n f_0 - f_0\|_{p,q} \geq \frac{\varepsilon}{3C_1} \right\} \\ D_2 &= \left\{ n \in \mathbb{N} : \omega_q(f, \alpha_n) \geq \frac{\varepsilon}{6C_1} \right\} \end{aligned}$$

$$D_3 = \left\{ n \in \mathbb{N} : \|T_n f_0 - f_0\|_{p,q} \geq \frac{\varepsilon}{3C_2} \right\}$$

kümelerini tanımlarsak (4.41) eşitsizliğinden $D \subseteq D_1 \cup D_2 \cup D_3$ sağlanır. Bu doğrultuda;

$$\begin{aligned} D'_1 &= \left\{ n \in \mathbb{N} : \omega_q(f, \alpha_n) \geq \sqrt{\frac{\varepsilon}{3C_1}} \right\} \\ D''_1 &= \left\{ n \in \mathbb{N} : \|T_n f_0 - f_0\|_{p,q} \geq \sqrt{\frac{\varepsilon}{3C_1}} \right\} \end{aligned}$$

tanımlayalım. $D_1 \subseteq D'_1 \cup D''_1$ elde edilir. Dolayısıyla; $D \subseteq D'_1 \cup D''_1 \cup D_2 \cup D_3$ yazılabilir. Şimdi, $c_j = \max\{a_j, b_j\}$ olduğundan; her $j \in \mathbb{N}$ için,

$$\frac{1}{c_j} \sum_{n \in D} a_{jn} \leq \frac{1}{b_j} \sum_{n \in D'_1} a_{jn} + \frac{1}{a_j} \sum_{n \in D''_1} a_{jn} + \frac{1}{b_j} \sum_{n \in D_2} a_{jn} + \frac{1}{a_j} \sum_{n \in D_3} a_{jn} \quad (4.42)$$

elde edilir. (i) ve (ii) şartlarını kullanarak; (4.42) eşitsizliğinden

$$\lim_j \frac{1}{c_j} \sum_{n \in D} a_{jn} = 0$$

elde edilir. Böylece,

$$\|T_n f - f; L_{p,q}(a, b)\|_{p,q} = st_A - o(c_n) \quad , (n \rightarrow \infty)$$

sonucu bulunur.

Yukarıdaki teoremden yola çıkarak, aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz.

Teorem 4.4.2 $A = (a_{jn})$, (a_n) , (b_n) , (c_n) , (α_n) ve $\{T_n\}$ Teorem 4.4.1'deki gibi tanımlansın. Tüm reel ekseninde sürekli ve sınırlı bir f fonksiyonu

$$\begin{aligned} (i) \quad & \|T_n f_0 - f_0\|_{p,q} = st_A - o_\mu(a_n) \quad , n \rightarrow \infty \\ (ii) \quad & \omega_q(f, \alpha_n) = st_A - o_\mu(b_n) \quad , n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

şartlarını sağlasın. Bu durumda; $d_n = \max\{a_n b_n, a_n, b_n\}$ olmak üzere $n \rightarrow \infty$ için;

$$\|T_n f - f; L_{p,q}(a, b)\| = st_A - o_\mu(d_n)$$

elde edilir (Duman ve Orhan 2008).

Benzer sonuç “ o_μ ” yerine “ O_μ ” alındığında da gerçekleşir.

Şimdi lokal integrallenebilir fonksiyon uzaylarında A -istatistiksel yaklaşım hızını inceleyelim.

Teorem 4.4.3 $A = (a_{jn})$ negatif olmayan regüler bir toplanabilme matrisi, (a_n) ve (b_n) pozitif artmayan diziler olsun. $T_n : L_{p,q}(loc) \rightarrow L_{p,q}(loc)$ ile tanımlı pozitif lineer operatör dizisi olmak üzere $\{\|T_n\|\}$ dizisi A - istatistiksel sınırlı ve $H > 0$ için $E = \{n \in \mathbb{N} : \|T_n\| \leq H\}$ olmak üzere $\delta_A(E) = 1$ olsun. Ayrıca $f \in L_{p,q}(loc)$ için

$$(i) \quad \|T_n f - f\|_{p,q} = st_A - o(a_n) \quad , \quad n \rightarrow \infty$$

$$(ii) \quad \omega_q(f, \alpha_n) = st_A - o(b_n) \quad , \quad n \rightarrow \infty$$

sağlansın. Bu durumda $c_n := \max\{a_n, b_n\}$ ve $\varepsilon > 0$ için $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{q(x)}{q^*(x)} = 0$, $q^*(x) = 1 + |x|^{2+\varepsilon}$ olmak üzere $h > 0$ ve $n \rightarrow \infty$ için;

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left(\frac{\|T_n f - f; L_p(x-h, x+h)\|}{q^*(x)} \right) = st_A - o(c_n)$$

sağlanır (Duman ve Orhan 2008).

Benzer sonuçlar “ o ” yerine “ O ” alındığında da sağlanır.

İspat Hipotezden bir $\varepsilon > 0$ verildiğinde $|x| \geq x_0$ şartını sağlayan her x için $\frac{q(x)}{q^*(x)} < \varepsilon$ olacak biçimde bir x_0 noktası alalım. $f \in L_{p,q}(loc)$ olsun. Luzin teoreminden $[-x_0 - h, x_0 + h]$ aralığında ;

$$\|f - \varphi; L_p(-x_0 - h, x_0 + h)\| < \varepsilon$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde sürekli bir φ fonksiyonu bulabiliriz. Şimdi,

$$u_n = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left(\frac{\|T_n f - f; L_p(x-h, x+h)\|}{q^*(x)} \right)$$

tanımlayalım. Teorem 4.3.3'den her $n \in E$ için;

$$u_n \leq K\varepsilon + q(x_0 + 1) \|T_n G - G; L_{p,\omega}(-x_0, x_0)\| \quad (4.43)$$

yazılır. Burada $K = (H + 1) q(x_0 + 1) + H$ alınmıştır. Şimdi reel ekseninde sürekli bir G fonksiyonu tanımlayalım:

$$G(x) = \begin{cases} \varphi(-x_0 - h) & , x \leq -x_0 - h \\ \varphi(x) & , |x| < x_0 + h \\ \varphi(x_0 + h) & , x \geq x_0 + h \end{cases}$$

Lemma 4.4.1'den $\delta = \alpha_n = \sqrt{\|T_n \varphi_x\|_{p,q}}$ yazılırsa, (4.43) eşitsizliğinden her $n \in E$ için

$$\begin{aligned} u_n \leq & K\varepsilon + C'_1 q(x_0 + 1) \omega_q(f, \alpha_n) \|T_n f_0 - f_0\|_{p,q} + 2C'_1 q(x_0 + 1) \omega_q(f, \alpha_n) \\ & + C'_2 q(x_0 + 1) \|T_n f_0 - f_0\|_{p,q} \end{aligned} \quad (4.44)$$

elde edilir. Burada $C'_1 = \sup_{x \in (-x_0, x_0)} |q(x)|$, $C'_2 = \sup_{x \in (-x_0, x_0)} |f(x)|$ alınmıştır.

$r > 0$ verildiğinde $K\varepsilon < r$ olacak biçimde bir $\varepsilon > 0$ seçelim. Teorem 4.4.1'in ispatında olduğu gibi

$$\begin{aligned} U &= \{n \in E : u_n \geq \varepsilon\} \\ U_1 &= \left\{ n \in E : \omega_q(f, \alpha_n) \|T_n f_0 - f_0\|_{p,q} \geq \frac{r - K\varepsilon}{3 C'_1 q(x_0 + 1) \omega_q(f, \alpha_n)} \right\} \\ U_2 &= \left\{ n \in E : \omega_q(f, \alpha_n) \geq \frac{r - K\varepsilon}{6 C'_1 q(x_0 + 1)} \right\} \\ U_3 &= \left\{ n \in E : \|T_n f_0 - f_0\|_{p,q} \geq \frac{r - K\varepsilon}{3 C'_2 q(x_0 + 1)} \right\} \end{aligned}$$

kümelerini tanımlayalım. (4.44) eşitsizliğinden $U \subseteq U_1 \cup U_2 \cup U_3$ sağlanır. Ayrıca,

$$U'_1 = \left\{ n \in E : \omega_q(f, \alpha_n) \geq \sqrt{\frac{r - K\varepsilon}{3 C'_1 q(x_0 + 1) \omega_q(f, \alpha_n)}} \right\}$$

$$U''_1 = \left\{ n \in E : \|T_n f_0 - f_0\|_{p,q} \geq \sqrt{\frac{r - K\varepsilon}{3 C'_1 q(x_0 + 1) \omega_q(f, \alpha_n)}} \right\}$$

alalım. $U \subseteq U'_1 \cup U''_1$ sağlanır. Böylece $U \subseteq U'_1 \cup U''_1 \cup U_2 \cup U_3$ yazabiliriz.

$c_j := \max\{a_j, b_j\}$ olduğundan; her $j \in \mathbb{N}$ için

$$\frac{1}{c_j} \sum_{n \in U} a_{jn} \leq \frac{1}{b_j} \sum_{n \in U'_1} a_{jn} + \frac{1}{a_j} \sum_{n \in U''_1} a_{jn} + \frac{1}{b_j} \sum_{n \in U_2} a_{jn} + \frac{1}{a_j} \sum_{n \in U_3} a_{jn}$$

elde edilir. Hipotezi kullanarak, (i) ve (ii)'den

$$\lim_j \frac{1}{c_j} \sum_{n \in U} a_{jn} = 0$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

“ o ” yerine “ o_μ ” yazılırsa aşağıdaki sonucu elde edebiliriz.

Teorem 4.4.4 $A = (a_{jn}), (a_n), (b_n), (\alpha_n), q^*(x)$ ve $\{T_n\}$ Teorem 4.4.3'deki gibi tanımlansın. Her $f \in L_{p,q}(loc)$ için

$$(i) \quad \|T_n f_0 - f_0\|_{p,q} = st_A - o_\mu(a_n) \quad , \quad (n \rightarrow \infty)$$

$$(ii) \quad \omega_q(f, \alpha_n) = st_A - o_\mu(b_n) \quad , \quad (n \rightarrow \infty)$$

sağlansın. Bu durumda; $h > 0$ için $d_n := \{a_n, b_n, a_n b_n\}$ olmak üzere,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left(\frac{\|T_n f - f; L_p(x-h, x+h)\|}{q^*(x)} \right) = st_A - o_\mu(d_n) \quad , \quad (n \rightarrow \infty)$$

elde edilir (Duman ve Orhan 2008).

Benzer sonuç “ o_μ ” yerine “ O_μ ” alındığında da sağlanır.

KAYNAKLAR

- Altomare, F. 2010. Korovkin type Theorems and Approximation by Positive Linear Operators, Surveys in Approximation Theory 5; pp.92-174
- Altomare, F. and Campiti, M 1994. Korovkin type Approximation Theory and its Application,. Walter de Gruyter Publ. Berlin.
- Bernau, S. J. 1974. Theorems of Korovkin type for L_p spaces, Pacific J. Math. Vol.53; pp. 11-19.
- Donner, K. 1981. Korovkin theorems in L_p spaces, J. Functional Analysis 42;Vol. pp. 12-28.
- Duman, O., Khan, M. K. and Orhan, C. 2003. A -statistical convergence of approximating operators, Math. Inequal. Appl. Vol. 6 (4); pp. 689-699.
- Duman, O. and Orhan, C. 2003. Statistical approximation in the space of locally integrable functions, Publicationes Mathematicae, Debrecen Vol. 63; pp.134-144.
- Duman, O. and Orhan, C. 2008. Rates of A -statistical convergence of operators in the space of locally integrable functions, Applied Math. Letters Vol.21;pp. 431-435.
- Dzyadik, V. K. 1966. On the approximation of functions by linear positive operators and singular integrals, Mat. Sbornik Vol. 70; pp. 508-517 (in Russian).
- Gadjiev, A. D. 1976. On P. P. Korovkin type theorems, Math. Zametki 20; 781-786.
- Gadjiev, A. D. , Efendiyev, R. O. and İbikli, E. 2003. On Korovkin's type theorem in the space of locally integrable functions, Czech. Math. J. Vol. 20; pp.781-786.
- Gadjiev, A. D. and Orhan, C. 2002. Some approximation theorems via statistical convergence, Rocky Mountain J. Math. Vol. 32 (1); pp. 129-138.
- Gadjiev, A. D. and İbikli, E. 2002. On Non-Existence of Korovkin's Theorem in the Space of L_p -Locally Integrable Functions, Turk J. Math. Vol. 26; pp. 207-214.
- Hacıyev, A. ve Hacısalihoğlu, H. H. 1995. Lineer Pozitif Operatör Dizilerinin Yakınsaklığı, Ankara Üniversitesi Yayınları.

- Kolk, E. 1991. The statistical convergence in Banach spaces, Acta Et Commentationes Tartuensis Vol. 928, pp. 41-52. Kolk, E. 1993. Matrix summability of statistically convergent sequences, Analysis 13; 77-83.
- Korovkin, P. P. 1960. Linear Operators and Approximation Theory, Hindustan Publ. Co., Delhi.
- Lorentz, G. G. 1986. Approximation of Functions, 2nd. Ed., Chelsea Publ. Comp. New York.
- Lorentz, G. G., Chui C.K. and Schumaker, L. L., 1976. Approximation Theory II, Academic Press Inc. Newyork.
- Royden, H. L. 1968. Real Analysis Second Edition, 118 p., New York.
- Swetits, J. J. and Wood, B. 1996. On degree of L_p approximation with positive linear operators, Journal of Approximation Theory 87; 239-241.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Nilay ŞAHİN
Doğum Yeri : Ankara
Doğum Tarihi : 21.04.1987
Medeni Hali : Bekar
Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Anıttepe Lisesi (YDA) (2005)
Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü (2009)
Yüksek Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik
Anabilimdalı (Şubat 2010-Temmuz 2011)