

T.C.
YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

**MUTLAK HEMEN HEMEN YAKINSAKLIK ve MUTLAK HEMEN HEMEN
TOPLANABİLME**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN: Mehmet KAYA
DANIŞMAN: Yrd. Doç. Dr. Hasan KARA

VAN - 2009

T.C.
YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

**MUTLAK HEMEN HEMEN YAKINSAKLIK ve MUTLAK HEMEN HEMEN
TOPLANABİLME**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN: Mehmet KAYA

VAN - 2009

KABUL ve ONAY SAYFASI

Yrd. Doç. Dr. Hasan KARA danışmanlığında, Mehmet KAYA tarafından hazırlanan “*Mutlak Hemen Hemen Yakınsaklık ve Mutlak Hemen Hemen Toplanabilme*” isimli bu çalışma / /2009 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı’nda *Yüksek Lisans Tezi* olarak kabul edilmiştir.

Başkan:..... İmza:

Üye :..... İmza:

Üye :..... İmza:

Üye :..... İmza:

Üye :..... İmza:

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu’nun .././2009 gün ve 2009 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Enstitü Müdürü

ÖZET

MUTLAK HEMEN HEMEN YAKINSAKLIK ve MUTLAK HEMEN HEMEN TOPLANABİLME

KAYA, Mehmet

Yüksek Lisans Tezi , Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Hasan KARA

Ekim 2009, 63 sayfa

Hahn-Banach teoremi, fonksiyonel analizin temel teoremlerinden biri olup reel değerli sınırlı dizilerin uzayına bir uygulaması, Banach limiti kavramının tanımlanmasını sağlamıştır. Banach limitleri çakışan dizileri karakterize etmek üzere çeşitli çalışmalar yapılmıştır. Bir dizi yakınsaksa bu dizinin bütün Banach limitleri çakışır ve dizinin Banach limiti dizinin bilinen limit değerine eşittir. Fakat Banach limitlerinin çakıştığı yakınsak olmayan dizilerde vardır. Bir sınırlı dizinin bütün Banach limitleri çakışıyorsa, bu diziye hemen hemen yakınsaktır denir. Dolayısıyla bir dizi yakınsak ise hemen hemen yakınsaktır ama yakınsak olmayan, hemen hemen yakınsak diziler vardır.

Bu çalışmanın amacı mutlak hemen hemen yakınsaklık ve mutlak hemen hemen toplanabilme ile ilgili bazı çalışmaları incelemek ve hemen hemen süreklilik ve hemen hemen kompaktlık hakkında bilgi vermektir.

Anahtar kelimeler : Banach limiti, Dizi, Mutlak hemen hemen yakınsaklık, Mutlak hemen hemen toplanabilme, Toplanabilme.

ABSTRACT

ABSOLUTE ALMOST CONVERGENCE and ABSOLUTE ALMOST SUMMABILITY

KAYA, Mehmet

Msc, Mathematics Science

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Hasan KARA

October 2009, 63 pages

Hahn-Banach theorem is one fundamental theorem of functional analysis and has provided to discussing of Banach limit concept with its one application over spaces of bounded sequences with real value. It has been made various studies to characterize sequences coinciding Banach limits. If one sequence is convergent then it coincide all Banach limits of its sequence and this sequence Banach limit equal to known limit value its sequence. However there are also non convergence sequences coinciding Banach limits. If one bounded sequence coincides all Banach limits then it called that this sequence is absolute almost convergence. Consequently if one sequence is convergent then this sequence is almost convergent but there are also none convergent almost convergent sequences.

The purpose of this study is to give information with respect to almost convergence and almost compactness to be investigated some studies made concerning absolute almost convergence and absolute almost summability.

Key words: Absolute almost convergence, Absolute almost summability, Banach limit, Sequence, Summability.

ÖN SÖZ

Reel değerli sınırlı dizilerin uzayına bir uygulaması yapılarak Banach limiti kavramının tanımlanmasını sağlayan Hahn-Banach teoremi, fonksiyonel analizin en önemli temel teoremlerinden biridir. Mukayese yapıldığında Banach limitleri çakışan ve çakışmayan diziler için Hahn-Banach teoremi belirleyici olmaktadır. Çakışıyorsa dizi hemen hemen yakınsaktır ama yakınsak olmayan, hemen hemen yakınsak diziler vardır. Bu çalışmanın amacı mutlak hemen hemen yakınsaklık ve mutlak hemen hemen toplanabilme arasındaki ilişkileri incelemek ve bazı uygulamalar yapmaktır.

Bu çalışmanın başında hemen hemen yakınsaklık ve hemen hemen toplanabilme ile ilgili süreç ayrıntılı olarak anlatılmıştır. Daha sonra konuyla ilgili temel tanım ve teoremler verilmiştir. Çalışmanın üçüncü bölümünde mutlak hemen hemen yakınsaklık ve mutlak hemen hemen toplanabilme ile ilgili literatürde bugüne kadar elde edilen bazı sonuçlar ele alınmıştır. Dördüncü bölümde, bir k indeksi ile bu konu ile ilgili yapılan genellemeler incelenmiştir. Son bölümde ise bugüne kadar yapılan çalışmalardan farklı bir çalışma olarak dikkat çeken hemen hemen süreklilik ve hemen hemen kompaktlıkla ilgili bazı sonuçlar ele alınmıştır.

Bu çalışmayı bana veren ve çalışmalarım süresince karşılaştığım güçlüklerde yardımlarını esirgemeyen hocam, Sayın Yrd. Doç. Dr. Hasan KARA'ya teşekkür eder saygılarımı sunarım. Ayrıca değerli hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Hamdullah ŞEVLİ'ye tezim hakkındaki tavsiye ve yönlendirmelerinden dolayı teşekkürü bir borç bilirim.

Mehmet KAYA

İÇİNDEKİLER

	sayfa
ÖZET	i
ABSTRACT	iii
ÖN SÖZ	v
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ	ix
1. GİRİŞ ve KAYNAK BİLDİRİŞLERİ	1
2. ÖN BİLGİLER	5
3. MUTLAK HEMEN HEMEN TOPLANABİLME	16
4. MUTLAK HEMEN HEMEN ve KUVVETLİ HEMEN HEMEN YAKINSAKLIĞIN BİR İNDEKS İLE GENELLEŞTİRİLMESİ	33
5. HEMEN HEMEN SÜREKLİLİK ve HEMEN HEMEN KOMPAKTLIK	47
KAYNAKLAR	53
ÖZ GEÇMİŞ	55

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler

$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar
ω	: Reel veya kompleks değerli diziler uzayı
l_∞	: Reel veya kompleks değerli sınırlı diziler uzayı
c	: Reel veya kompleks değerli yakınsak diziler uzayı
c_0	: Reel veya kompleks değerli sıfıra yakınsak diziler uzayı
$\sum a_n$	: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi
(s_n)	: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin kısmi toplamlar dizisi

1. GİRİŞ ve KAYNAK BİLDİRİŞLERİ

Fonksiyonel Analizin temel teoremlerinden biri olan Hahn-Banach teoreminin reel değerli sınırlı diziler uzayına bir uygulaması, Banach limiti kavramının doğmasına yol açmıştır. Banach limitlerinin çakıştığı dizileri karakterize etmek için çalışmalar yapılmıştır. Bir dizi yakınsak ise bu dizinin bütün Banach limitleri çakışır ve dizinin Banach limiti dizinin bilinen limit değerine eşittir. Fakat Banach limitlerinin çakıştığı yakınsak olmayan dizilerde vardır. Bir sınırlı dizinin bütün Banach limitleri çakışıyorsa, bu diziye hemen hemen yakınsaktır denir. Dolayısıyla bir dizi yakınsak ise hemen hemen yakınsaktır fakat yakınsak olmayan, hemen hemen yakınsak diziler vardır.

Bu çalışmanın amacı mutlak hemen hemen yakınsaklık ve mutlak hemen hemen toplanabilme ile ilgili bazı çalışmaları incelemek ve hemen hemen süreklilik ve hemen hemen kompaktlık hakkında bilgi vermektir.

Tüm reel yada kompleks dizilerin kümesi ω ile gösterilsin. ℓ_∞ ve c ile sırasıyla sınırlı ve yakınsak dizilerin $\|x\| = \sup_{n \geq 0} |x_n|$ normu ile verilen Banach uzayları gösterilsin. D , ω üzerinde şift operatörü yani $D((x_n)) = (x_{n+1})$ olsun. Banach (1932), Banach limiti kavramını aşağıdaki şekilde tanımlamıştır:

ℓ_∞ üzerinde tanımlı bir $L: \ell_\infty \rightarrow \mathbb{R}$ lineer fonksiyoneli aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa L ye bir Banach limiti denir.

(i) Her $n = 0, 1, \dots$ için $x_n \geq 0$ olmak üzere $L(x) \geq 0$,

(ii) $e = (1, 1, \dots)$ olmak üzere $L(e) = 1$,

(iii) $L(x) = L(Dx)$.

Lorentz (1948), Banach limitlerinin çakıştığı dizileri karakterize etmek için bazı çalışmalar yaptı ve hemen hemen yakınsaklığı tanımladı. Eğer tüm Banach limitleri çakışıyorsa, $x \in \ell_\infty$ dizisine hemen hemen yakınsak dizi denir.

f ile tüm hemen hemen yakınsak dizilerin kümesi gösterilmek üzere Lorentz (1948),

$$f = \left\{ x : \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m+1} \sum_{i=0}^m x_{m+i} \text{ limiti } n' \text{ ye göre düzgün olarak var} \right\}$$

olduğunu ispatladı.

Mutlak hemen hemen yakınsaklık kavramı ise aşağıdaki gibi Das ve ark. (1984), tarafından verildi.

Herhangi bir x dizisi için,

$$d_{mn} = d_{mn}(x) = \frac{1}{m+1} \sum_{i=0}^m x_{m+i}$$

olsun. a ile sonsuz bir $\sum a_n$ serisi gösterisin ve $x_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$ olsun.

$d_{-1,n} = d_{-1n}(x) = x_{n-1}$ olarak tanımlanırsa

$$\varphi_{mn} = \varphi_{mn}(a) = d_{mn} - d_{m-1,n}$$

yazılabilir. Buradan,;

$$\varphi_{0n} = a_n ,$$

$$\varphi_{mn} = \frac{1}{m(m+1)} \sum_{i=0}^m i a_{n+i} \quad (m \geq 1)$$

olduğu görülür.

Eğer n 'ye göre düzgün olarak

$$\sum_m |\varphi_{mn}| = \sum_m |d_{mn} - d_{m-1,n}|$$

yakınsak ise a serisine veya x dizisine mutlak hemen hemen yakınsaktır denir.

$p = (p_m)$, pozitif sayıların sınırlı bir dizisi olsun. Das ve ark. (1984) tarafından

$$\hat{\ell}(p) = \left\{ a : \sum_m |\varphi_{mn}|^{p_m}, n' \text{ ye göre düzgün yakınsak} \right\} ,$$

$$\hat{\ell}(p) = \left\{ a : \sup_n \sum_m |\varphi_{mn}|^{p_m} < \infty \right\}$$

uzayları tanımlanmıştır.

Eğer her m için $p_m = p$ alınırsa $\hat{\ell}(p)$ ve $\hat{\ell}(p)$ yerine sırasıyla $\hat{\ell}_p$ ve $\hat{\ell}_p$ yazılır. Eğer $p = 1$ ise $\hat{\ell}_p$ yerine $\hat{\ell}$ yazılır ve bu tüm mutlak hemen hemen yakınsak dizilerin uzayını gösterir.

$A = (a_{nk})$ reel yada kompleks sayıların sonsuz bir matrisi olsun. Her n için

$A_n(x) = \sum_k a_{nk} x_k$ yakınsak ise $Ax = (A_n(x))$ yazılır.

X ve Y , ω 'nin boştan farklı herhangi iki alt kümesi olsunlar. $x = (x_k) \in X$ olması $Ax = (A_n(x)) \in Y$ olmasını gerektiriyorsa; A , X 'den Y 'ye bir matris dönüşümü tanımlar denir ve $A: X \rightarrow Y$ şeklinde gösterilir. (X, Y) ile X 'den Y içine olan bütün matrislerin sınıfı gösterilir.

Hemen hemen toplanabilen diziler King (1966) tarafından tanımlandı ve daha sonraları Schaefer (1969) tarafından çalışıldı.

Bu çalışmada Nanda (1984; 1985) tarafından verilen mutlak hemen hemen toplanabilme tanımı verilecektir. Mutlak hemen hemen yakınsak dizilerin uzayı ile ilgili matris dönüşümleri karakterize edilecektir. Hemen hemen yakınsaklık ve hemen hemen toplanabilme Savaş (1990) tarafından da çalışılmıştır. Ayrıca bu çalışmada mutlak hemen hemen yakınsaklık ve kuvvetli hemen hemen yakınsaklığın Das ve Mishra (1988) tarafından verilen $k \geq 1$ indeksi ile genelleştirilmesi ele alınacaktır.

Modülüs fonksiyon tanımı ilk kez Nakano (1953) tarafından verilmiştir. Ruckle (1973), modülüs fonksiyonu yardımıyla

$$\ell = \left\{ x = (x_i) : \sum_i |x_i| < \infty \right\}$$

dizi uzayını

$$L(f) = \left\{ x = (x_i) : \sum_i f(|x_i|) < \infty \right\}$$

dizi uzayına genelleştirdi ve bu dizi uzayının çeşitli özelliklerini inceledi. Nanda (1998) tarafından modülüs fonksiyonu yardımıyla ve bir k indeksi ile Das ve Mishra (1988) de tanımlanan dizi uzayları genelleştirilmiştir. Bu çalışmada modülüs fonksiyonu yardımıyla ve bir k indeksi ile mutlak hemen hemen ve kuvvetli hemen hemen yakınsaklığın genelleştirilmesi incelenecektir.

Farklı bir çalışma türü olarak Kurtz (1972) tarafından Banach uzaylarında hemen hemen yakınsaklık kavramı ele alınarak King'in (1966) sonuçları genelleştirilmiştir. Tıpkı yakınsaklığın, süreklilik ve kompaktlık ile ilgili olması gibi, hemen hemen yakınsaklığın, hemen hemen süreklilik ve hemen hemen kompaktlık kavramları ile ilgili olması gerektiğini düşünmek doğaldır. Nanda (2004), normlu lineer uzaylarda hemen hemen yakınsaklık kavramını kullanarak herhangi bir normlu

lineer uzayda hemen hemen sürekli­lik ve hemen hemen kompaktlık kavramlarını tanımlamıştır. Bu çalışmanın son bölümünde Nanda (2004) gereğince hemen hemen sürekli­lik ve hemen hemen kompaktlık kavramları ele alınacaktır.

Bu konuda son zamanlarda yapılan Temel (1996) ve Şevli (1999) tez çalışmaları mevcuttur fakat burada bunlara değinilmeyecektir.

Hemen hemen yakınsaklık ile ilgili son zamanlarda Das ve Nanda (1992), Jalal (2004), Mishra ve Jaiswal (2004/05), Tateoka (2006), Shaw ve Lin (2007) çalışmaları da mevcuttur. Fakat bu tezde bu çalışmalara değinilmeyecektir.

2. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde konuyla ilgili daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan temel tanım ve teoremler verilecektir.

Tanım 2.1 (Lineer Uzay)

X boş olmayan bir küme ve $\mathbb{K}$ reel veya kompleks sayıların bir cismi olsun.

$$+ : X \times X \rightarrow X$$

$$\bullet : \mathbb{K} \times X \rightarrow X$$

fonksiyonları aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa X kümesine $\mathbb{K}$ cismi üzerinde bir lineer uzay denir. Her $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ ve $x, y, z \in X$ için,

$$(L1) \quad x + y = y + x$$

$$(L2) \quad (x + y) + z = x + (y + z)$$

$$(L4) \quad x + \theta = x \text{ olacak şekilde bir } \theta \in X \text{ vardır.}$$

$$(L3) \quad \text{Her } x \in X \text{ için } x + (-x) = \theta \text{ olacak şekilde bir } (-x) \in X \text{ vardır.}$$

$$(L5) \quad 1.x = x$$

$$(L6) \quad \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$$

$$(L7) \quad (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$$

$$(L8) \quad \lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$$

Tanım 2.2 (Lineer Alt Uzay)

X , $\mathbb{K}$ cismi üzerinde bir lineer uzay ve M , X in boş olmayan bir alt kümesi olsun. Eğer her $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ ve $x, y \in M$ için $\lambda x + \mu y \in M$ oluyorsa M 'ye X 'in bir lineer alt uzayı denir.

Tanım 2.3 (Normlu Lineer Uzay)

X , $\mathbb{K}$ cismi üzerinde bir lineer uzay olsun.

$$\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}$$

dönüşümü $\forall x, y \in X$ ve $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ için

$$(N1) \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$$

$$(N2) \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$$

$$(N3) \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad (\text{üçgen eşitsizliği})$$

özelliklerini sağlıyorsa X üzerinde norm adını alır ve bu durumda $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine normlu lineer uzay veya kısaca normlu uzay denir.

Tanım 2.4.

(i) $x: N \rightarrow R$, $x(n) = x_n$ dizisi verilmiş olsun. $k: N \rightarrow N$, $k(n) = k_n$ fonksiyonu (dizisi) artan bir dizi olmak üzere $(x \circ k)(n): N \rightarrow R$ bileşke fonksiyonuna x dizisinin bir alt dizisi denir ve x_{k_n} ile gösterilir. Mesela $\frac{1}{n}$ dizisinin $\frac{1}{2n}$ alt dizisi vardır.

(ii) (x_n) reel dizisi verilsin. $\forall \varepsilon > 0$ için (x_n) dizisinin sonlu sayıdaki terimleri hariç diğer tüm terimleri bir x reel sayısının ε komşuluğunda bulunuyorsa (x_n) dizisi x e yakınsaktır denir ve $x_n \rightarrow x$ ile gösterilir.

(x_n) dizisi verilsin. Genel terimi $s_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ şeklinde tanımlı (s_n) dizisini alalım. $((x_n), (s_n))$ ikilisine seri denir. x_n serinin genel terimidir, (s_n) dizisi serinin kısmi toplamlar dizisidir. Eğer $s_n \rightarrow s$ ise seri yakınsaktır denir.

Bir (f_n) fonksiyonlar dizisi bir f fonksiyonuna R de düzgün yakınsaktır $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ için $\exists n_0$ öyle ki $\forall n > n_0$ ve $\forall x \in R$ için $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ olmasıdır.

(iii) $X \subset R$, $f: X \rightarrow R$ bir fonksiyon ve $x_0 \in X$ verilsin. f fonksiyonu x_0 noktasında süreklidir $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ için en az bir $\delta > 0$ vardır öyle ki $|x - x_0| < \delta$ iken

$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ olmasıdır. $\forall x_1, x_2 \in X$ için $|x_1 - x_2| < \delta$ iken $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta(\varepsilon) > 0$ varsa f ye düzgün süreklidir denir.

(iv) $X \neq \emptyset$ bir küme ve τ da X in alt kümelerinin bir sınıfı olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa τ sınıfına X üzerinde bir topoloji ve (X, τ) ikilisine de bir topolojik uzay denir.

$$(T1) \quad X, \emptyset \in \tau$$

$$(T2) \quad G_{k_1}, G_{k_2}, \dots, G_{k_n} \in \tau \text{ için } \bigcap_{i=1}^n G_{k_i} \in \tau$$

$$(T3) \quad \forall i \in I \text{ için } G_{k_i} \in \tau \text{ için } \bigcup_{i \in I} G_{k_i} \in \tau.$$

(v) (X, τ) topolojik uzayı verilsin. Eğer metrik topolojisi τ olacak şekilde X üzerinde bir metrik varsa bu τ topolojisine metriklenebilirdir denir.

(vi) Bir (X, d) metrik uzayındaki her Cauchy dizisi uzayın bir noktasına yakınsıyorsa bu uzaya tam metrik uzay denir.

Tanım 2.5 (Dizi Uzayları)

$$\omega := \{x = (x_k) \mid x : \mathbb{N}^0 \rightarrow \mathbb{K}, k \rightarrow x_k := x(k)\}$$

kümesi

$$((x_k), (y_k)) \rightarrow (x_k + y_k) \quad \text{ve} \quad (\lambda, (x_k)) \rightarrow (\lambda x_k)$$

ile tanımlı toplama ve skalerle çarpma işlemleri ile birlikte $\mathbb{K}$ üzerinde bir lineer uzaydır. ω lineer uzayı ve ω 'nin her bir lineer alt uzayı dizi uzayı olarak adlandırılır. c_0 , c ve ℓ_∞ sırasıyla sıfır dizileri dizi uzayı, yakınsak diziler dizi uzayı ve sınırlı diziler dizi uzayı olarak adlandırılırlar. c_0 , c ve ℓ_∞ dizi uzayları $\|x\| = \sup_k |x_k|$ normu ile birlikte birer normlu uzay oluştururlar.

Çalışmamızda kullanacağımız diğer bazı dizi uzayları aşağıda verilmiştir:

$$\ell := \ell_1 := \left\{ x = (x_k) \in \omega : \sum_{k=0}^{\infty} |x_k| < \infty \right\},$$

mutlak yakınsak seri teşkil eden bütün dizilerin dizi uzayıdır.

$$\ell_p := \left\{ x = (x_k) \in \omega : \sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^p < \infty \right\},$$

dizi uzayı $1 \leq p < \infty$ için $\|x\|_p := \left(\sum |x_k|^p \right)^{1/p}$ normu ile birlikte bir normlu uzaydır.

Bu dizi uzayları arasında, $\ell_1 \subset c_0 \subset c \subset \ell_\infty \subset \omega$ kapsam bağıntıları vardır.

Tanım 2.6.

X ve Y lineer uzaylar ve $T : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olmak üzere her $x_1, x_2 \in X$ ve her $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ için

$$T(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda T(x_1) + \mu T(x_2)$$

şartı sağlanırsa T ye bir lineer operatör veya lineer dönüşüm denir. $Y = \mathbb{R}$ veya $Y = \mathbb{C}$ olması durumunda ise T ye bir lineer fonksiyonel denir.

Eğer $T : X \rightarrow Y$ operatörü sınırlı kümeleri sınırlı kümelere dönüştürüyorsa sınırlı lineer operatör diye adlandırılır.

Tanım 2.7 (Kompakt küme)

(i) (X, τ) topolojik uzay, $A \subset X$ ve G de X in alt kümelerinin bir sınıfı olsun. Eğer $A \subset \bigcup_{G_i \in G} G_i$ ise G sınıfına A nın bir örtüsü denir. Kuvvet kümesinin bir

G sınıfı A nın bir örtüsü olmak üzere eğer G örtüsünün bir G' alt sınıfı da aynı zamanda A nın bir örtüsü ise bu G' alt sınıfına A nın bir alt örtüsü denir.

(ii) (X, τ) topolojik uzayında $A \subset X$ in her açık örtüsünden sonlu bir açık alt örtü elde etmek mümkün ise A kümesine kompakt küme denir.

Tanım 2.8.

Bir kompakt operatör X in her hangi sınırlı alt kümesinin L altındaki görüntüsü Y nin kısmi kompakt bir alt kümesi olacak biçimde bir X Banach uzayından başka bir Y Banach uzayına bir L lineer operatördür. Bir kompakt operatör sınırlı ve süreklidir.

Tanım 2.9 (Banach uzayı)

Bir Banach uzayı tam normlu bir lineer uzaydır. Buradaki tamlık $x_n \in X$ için $\|x_m - x_n\| \rightarrow 0$ ($m, n \rightarrow \infty$) olduğunda bir $x \in X$ mevcuttur öyle ki, $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) olur.

Tanım 2.10 (Matris Dönüşümü)

$X \neq \emptyset$, $Y \neq \emptyset$, ω uzayının herhangi iki alt kümesi ve $A = (a_{nk})$; ($n, k = 0, 1, 2, \dots$) kompleks sayılardan oluşan bir sonsuz matris olsun. Bir $x = (x_k) \in X$ dizisinin Ax dönüşüm dizisi her $n \in \mathbb{N}^0$ için $A_n(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} x_k$ yakınsak serisi ile verilen $(A_n(x)) \in Y$ dizisidir. A 'ya X 'den Y içine bir matris dönüşümü ve Ax 'e de x 'in A -dönüşüm dizisi denir. (X, Y) ile X 'den Y içine olan bütün matrislerin sınıfı, (X, Y, P) ile de X 'den Y içine limiti koruyan, yani $\lim A_n(x) = \lim x_n$, olan bütün A matrislerinin sınıfı gösterilir. Burada $(X, Y, P) \subset (X, Y)$ dir.

Tanım 2.11 (Konservatif Matris)

$A = (a_{nk})$ sonsuz bir matris olsun. Eğer A matrisi yakınsak her diziyi yakınsak diziye dönüştürüyorsa, A matrisine konservatif matris denir ve $A \in (c, c)$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.12 (Regüler Matris)

$A = (a_{nk})$ sonsuz matrisi verilmiş olsun. Eğer A matrisi yakınsak her diziyi yakınsak diziye limiti koruyarak dönüştürüyorsa, A matrisine regüler matris denir ve $A \in (c, c, P)$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.13.

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, sonsuz bir seri ve bu serinin kısmi toplamlar dizisi (s_n) olsun. Ayrıca $A = (a_{nk})_{n,k=0}^{\infty}$ sonsuz matrisi verilsin. (s_n) dizisinin A -dönüşüm dizisini (t_n) ile gösterelim. Yani, $t_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} s_k$ olsun. Bu durumda A , diziden-diziye bir dönüşüm tanımlar. Eğer (t_n) , bir s limitine yaklaşıyorsa o zaman (s_n) dizisi veya $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisi s 'ye A toplanabilirdir denir.

Tanım 2.14.

$k, n \in \mathbb{N}^0$ olmak üzere $k > n$ için $a_{nk} = 0$ elemanları ile tanımlanan $A = (a_{nk})$ sonsuz matrisine alt üçgensel matris denir.

Tanım 2.15 (Cesaro Toplanabilme Metodu)

$$c_{nk} := \begin{cases} \frac{1}{n+1} & , \quad k \leq n \\ 0 & , \quad k > n \end{cases}$$

elemanları ile tanımlı alt üçgensel sonsuz matrise Cesaro matrisi denir ve $(C,1)$ ile gösterilir. $\sum a_n$, (s_n) kısmi toplamlar dizisi ile verilen sonsuz bir seri olsun.

$\sigma_n = \frac{1}{n+1} \sum_{v=0}^n s_v$ ile tanımlanan diziden-diziye dönüşüme, (s_n) dizisinin Cesaro ortalaması denir. Eğer $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = s$ ise, $\sum a_n$ serisi s değerine $(C,1)$ toplanabilirdir denir.

Tanım 2.16 (Banach limiti)

ℓ_∞ üzerinde tanımlı bir $L: \ell_\infty \rightarrow \mathbb{R}$ lineer fonksiyoneli aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa L 'ye bir Banach limiti denir. α , bütün Banach limitlerinin kümesini gösterebilir.

B.1 Her $n = 0, 1, \dots$ için $x_n \geq 0$ olmak üzere $L(x) \geq 0$

B.2 $L(x) = LD(x)$, burada $Dx = D((x_n)) = (x_{n+1})$ 'dir.

B.3 $L(e) = 1$, $e = (1, 1, \dots)$

Tanım 2.17 (Hemen hemen yakınsak dizi)

Bir $x \in \ell_\infty$ dizisinin bütün Banach limitleri çakışıyorsa, x 'e hemen hemen yakınsak dizi denir. f , hemen hemen yakınsak dizilerin kümesini gösterebilir. Hemen hemen yakınsak dizilerin uzayı f ile, sıfıra yakınsayan hemen hemen yakınsak dizilerin uzayı f_0 ile gösterilecektir. Lorentz (1948) bir x dizisinin bir s sayısına hemen hemen yakınsak olması için gerek ve yeter şartın n 'ye göre düzgün olarak, $n = 1, 2, \dots$ olmak üzere

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{x_n + x_{n+1} + \dots + x_{n+m}}{m+1} = s$$

olduğunu ispatladı. Eğer $x \in c$ ise $L(x) = l(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ dir.

Herhangi bir $x = (x_n)$ dizisi için

$$d_{mn} = d_{mn}(x) = \frac{1}{m+1} \sum_{i=0}^m x_{n+i} \quad (2.1)$$

yazalım. Lorentz'den (1948), f tüm hemen hemen yakınsak dizilerin kümesini göstermek üzere

$x \in f \Leftrightarrow n$ ye göre düzgün olarak $m \rightarrow \infty$ iken $d_{mn} \rightarrow s$ olduğu bilinmektedir. Bu durumda $f - \lim x = s$ yazılır.

$\sum a_n$ sonsuz serisi verilsin. Bu seri kısaca a ile gösterilecektir.

$$x_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n \quad (2.2)$$

olsun. a ile x arasındaki bağıntı (2.2) ile verilecektir.

$$d_{-1,n} = d_{-1,n}(x) = x_{n-1}$$

olarak tanımlansın. $m, n \geq 0$ için

$$\Phi_{mn} = \Phi_{mn}(a) = d_{mn} - d_{m-1,n}$$

yazılsın. Buradan,

$$\Phi_{0,n} = d_{0,n} - d_{-1,n} = x_n - x_{n-1} = a_n$$

ve

$$\Phi_{mn} = \frac{1}{m(m+1)} \sum_{\nu=1}^m \nu a_{n+\nu} \quad (2.3)$$

olduğu elde edilir.

Eğer n ye göre düzgün olarak $\sum_m |\Phi_{mn}|$ yakınsak ise a serisine veya x dizisine mutlak hemen hemen yakınsaktır denir (Das ve ark., 1984).

Bu tanım Das ve Mishra (1988) tarafından aşağıdaki şekilde genelleştirilmiştir.

Eğer $k \geq 1$ olmak üzere n ye göre düzgün olarak

$$\sum_{m=1}^{\infty} m^{k-1} |\Phi_{mn}|^k < \infty \quad (2.4)$$

ise a serisine veya x dizisine $k \geq 1$ indeksi ile mutlak hemen hemen yakınsaktır denir (Das ve Mishra, 1988).

$x \in \ell_{\infty}$ ve $d_{mn}(x) = \frac{1}{m+1} \sum_{i=0}^m x_{n+i}$ olsun. Eğer $m \rightarrow \infty$ iken n ye göre düzgün

olarak $d_{mn}(|x-s|) = \frac{1}{m+1} \sum_{i=0}^m |x_{n+i} - s| \rightarrow 0$ olacak şekilde $s \in \mathbb{C}$ varsa $x = (x_n)$

dizisine s değerine kuvvetli hemen hemen yakınsaktır denir ve bu durum $[f]-\lim x = s$ şeklinde yazılır. Ayrıca $c \subset [f] \subset f \subset \ell_{\infty}$ dır.

Das ve Mishra (1988), bu tanımı $k \geq 1$ olmak üzere bir k indeksi ile aşağıdaki şekilde genelleştirdiler.

Eğer $m \rightarrow \infty$ iken n ye göre düzgün olarak

$$d_{mn}(|x-s|^k) = \frac{1}{m+1} \sum_{i=0}^m |x_{n+i} - s|^k \rightarrow 0$$

olacak şekilde bir $s \in \mathbb{C}$ sayısı varsa $x = (x_n)$ dizisine s ye $k \geq 1$ indeksi ile kuvvetli hemen hemen toplanabilir denir. Bu durumda $[f]_k - \lim x = s$ yazılır.

Das ve Mishra (1988), $\hat{\ell} \subset [f]_k$ olduğunu ve $x \in [f]$ ise,

$$[f] - \lim x = f - \lim x = s$$

olduğunu ispatladılar. Bu sonuç Das ve Mishra (1988) tarafından aşağıdaki şekilde genelleştirildi.

Örnek 2.1.

$x = (1,0,1,0,...)$ dizisi alınsın.

$$L(x) = \frac{1}{2} (L(x) + L(Dx)) = \frac{1}{2} (L((1,0,1,0,1,...) + (0,1,0,1,...)))$$

$$= \frac{1}{2} (L(1,1,1,...)) = \frac{1}{2} (L(e)) = \frac{1}{2} (1) = \frac{1}{2}$$

Daha sonraları; hemen hemen yakınsak diziler uzayı King(1966), Duran (1972) ve Savaş (1990) tarafından incelenmiştir. Maddox (1978) kuvvetli hemen hemen yakınsak dizi tanımını verdi ve

$$[f] = \left\{ x : \lim_m \frac{1}{m+1} \sum_{i=1}^m |x_{i+n} - s| < 0, \text{ n'ye göre düzgün} \right\}$$

şeklinde tanımladı. Das ve ark. (1984) mutlak hemen hemen yakınsaklık kavramını aşağıdaki gibi tanımlayarak çalıştılar.

$$\varphi_{mn}(x) = \frac{1}{m+1} \sum_{v=1}^m v a_{n+v}$$

olmak üzere,

$$\hat{\ell} = \left\{ x : \sum_m |\varphi_m(x)|, \text{ n 'ye göre düzgün} \right\},$$

$$\hat{\ell} = \left\{ x : \sup_n \sum_m |\varphi_m(x)| < \infty \right\}.$$

Tanım 2.18 (FK ve BK – uzayı)

X bir lineer topolojik uzay ve s bütün kompleks dizilerin uzayı olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa X e bir FK -uzayı denir.

- (i) X metriklenebilirdir.
- (ii) X tamdır.
- (iii) X in koordinat izdüşümleri süreklidir.

Kısaca FK -uzayına Frechet koordinat uzayı da denir. Normlu bir FK -uzayına bir BK –uzayı denir. FK ve BK –uzaylarının topolojilerine FK ve BK –topolojisi denir.

Tanım 2.19 (Modülüs Fonksiyonu)

$f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan f fonksiyonuna bir modülüs fonksiyonu denir.

- i) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- ii) Her $x, y > 0$ için $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$,
- iii) f , artan,
- iv) f , 0 da sağdan süreklidir.

Teorem 2.1 (Hölder Eşitsizliği)

$p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$ ve $b_1, b_2, \dots, b_n \geq 0$ olsun. Bu takdirde

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n b_k^q \right)^{1/q}$$

olur.

Teorem 2.2 (Kojima-Schur)

$A = (a_{nk})$ matrisinin konservatif olması için gerek ve yeter şartlar

(i) $\sup_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| < \infty$

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{nk} = \alpha_k$

(iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = \alpha$

olmasıdır.

Teorem 2.3 (Teopltz-Silverman)

$A = (a_{nk})$ sonsuz matrisinin regüler olması için gerek ve yeter şartlar

(i) $\sup_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| < \infty$

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = 1$

(iii) Her k için $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{nk} = 0$

olmasıdır.

Teorem 2.4 (Schur)

$A \in (\ell_{\infty}, c)$ olması için gerek ve yeter şartlar

(i) n ye göre düzgün olarak $\sum_k |a_{nk}|$ nın yakınsak olması

(ii) k sabit iken $\lim_n a_{nk}$ nın var olmasıdır.

3. MUTLAK HEMEN HEMEN TOPLANABİLME

Bu bölümde Lorentz (1948), Hardy (1949), King (1966), Schaefer (1969), Eizen ve Laush (1969), Maddox (1971), Das ve ark. (1984), Nanda (1984; 1985) ve Savaş (1990) çalışmaları dikkate alınarak mutlak hemen hemen toplanabilme süreci ele alınmaktadır.

Reel yada kompleks dizilerin sonsuz matrisler ile toplanabilme metotları Maddox'da (1971) verildiği şekilde üç tiptir. Bunlar;

1) Toplanabilme

2) Mutlak Toplanabilme

ve

3) Kuvvetli Toplanabilme

metotlarıdır.

Aynı anlamda hemen hemen yakınsaklık kavramında üç tip toplanabilme metodu vereceği akla gelmektedir. Bu metotlar;

1) Hemen Hemen Toplanabilme

2) Mutlak Hemen Hemen Toplanabilme

ve

3) Kuvvetli Hemen Hemen Toplanabilme

dir.

Bu bölümde bu metotlar sırasıyla verilecektir.

3. 1. Hemen Hemen Toplanabilme

Lorentz (1948), F-toplanabilme metodunu tanımladı ve çeşitli toplanabilme metotları ile ilişkilerini araştırdı.

ℓ_∞ , $\|x\| = \sup_n |x_n|$ normu ile tüm sınırlı reel dizilerin Banach uzayını gösterebilir.

ℓ_∞ üzerinde Banach limitleri olarak adlandırılan sürekli lineer fonksiyoneller vardır. x in herhangi bir Banach limiti $\liminf x_n$ ve $\limsup x_n$ arasındadır. ℓ_∞ un bir x

elemanına, x in bütün Banach limitleri eşit oluyorsa hemen hemen yakınsaktır veya F-toplanabilirdir denir. Tüm hemen hemen yakınsak dizilerin kümesi f ile gösterilir ve x in tüm Banach limitlerinin değeri s ise $f - \lim x = s$ yazılır.

Lorentz (1948), aşağıdaki teoremi ispatladı:

Teorem 3.1.1.

$f - \lim x = s$ olması için gerek ve yeter şart n ye göre düzgün olarak

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{x_n + x_{n+1} + \dots + x_{n+p+1}}{p} = s \quad (3.1)$$

olmasıdır.

(3.1) şartı ile f -limitleri sınırlı kompleks dizilere genişletilmiştir. (3.1) ile verilen metot $(C,1)$ metodu ile ilişkili görülmektedir. (3.1) ile verilen metot, F metodu diye ifade edilir.

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, sonsuz bir seri ve bu serinin kısmi toplamlar dizisi (x_n) olsun. Ayrıca $A = (a_{nk})_{n,k=0}^{\infty}$ sonsuz matrisi verilsin. (x_n) dizisinin A -dönüşüm dizisini (t_n) ile gösterelim. Yani,

$$t_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} x_k$$

olsun. Bu durumda A , diziden-diziye bir dönüşüm tanımlar. Eğer (t_n) , bir s limitine yaklaşıyorsa, o zaman (x_n) dizisi veya $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisi s 'ye A toplanabilirdir denir.

Toplanabilme teorisinde regüler, konservatif ve coercive matrislerin incelenmesi önemlidir.

Eğer A matrisi yakınsak dizileri yakınsak dizilere limiti koruyarak dönüştürüyorsa A ya regülerdir denir ve $A \in (c,c,P)$ ile gösterilir. Bir matrisin regüler olması için gerek ve yeter şartlar Teorem 2.3 de verilmiştir. Bu şartlara Toeplitz şartları ve (c,c,P) sınıfından olan matrislere ise Toeplitz matrisleri veya regüler matrisler denir. (c,c) sınıfının karakterizasyonu ise Kojima-Schur teoremi (Teorem 2.2) olarak bilinir ve (c,c,P) sınıfından olan matrislere yakınsaklığı koruyan

matrisler yada konservatif matrisler denir. Sınırlı dizileri yakınsak dizilere dönüştüren bir A matrisine Schur matrisi denir ve $A \in (\ell_\infty, c)$ ile gösterilir. Bu sınıfın matris karakterizasyonu ise Teorem 2.4 de verilmiştir.

$A = (a_{nk})_{n,k=0}^\infty$ sonsuz bir matris ve $x = (x_n)$ sınırlı bir dizi olsun. x dizisinin A -hemen hemen dönüşümü $A(x)$, $p = 0, 1, 2, \dots$ olmak üzere,

$$y_{np} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} x_{k+p} \quad (3.2)$$

ile tanımlanır. Eğer $p = 0, 1, 2, \dots$ olmak üzere $n \rightarrow \infty$ iken p ye göre düzgün olarak $y_{np} \rightarrow s$ oluyorsa x dizisi s ye hemen hemen A -toplanabilirdir veya F_A -toplanabilirdir denir.

Teorem 3.1.2.

A metodu regüler ise yani $A \in (c, c, P)$ ise ve bir $x = (x_n)$ dizisi s değerine F_A -toplanabilir ise aynı zamanda s ye F -toplanabilirdir.

Teorem 3.1.3.

$A = (a_{nk})$ regüler matris metodu ($A \in (c, c, P)$) olsun. A nın bütün hemen hemen yakınsak dizileri toplayabilmesi yani $A \in (f, c)$ olması için gerek ve yeter şart,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk} - a_{n,k+1}| = 0 \quad (3.3)$$

olmasıdır.

Eğer (3.3) şartı gerçekleşirse, hemen hemen yakınsak her $x = (x_n)$ dizisi için $\lim A(x) = f - \lim x$ dir.

Örnek 3.1.1.

$$k, n \in N^0, E_n^\alpha = \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n)}{n!}, \quad E_0^\alpha = 1 \quad \text{ve} \quad \alpha > -1 \quad \text{olmak üzere}$$

$$c_{nv}^{(\alpha)} := \begin{cases} \frac{E_{n-v}^{\alpha-1}}{E_n^\alpha} & , \quad v \leq n \\ 0 & , \quad v > n \end{cases}$$

elemanları ile tanımlanan matrise α -ıncı mertebeden Cesaro matrisi denir ve (C, α) ile gösterilir. (C, α) Cesaro matrisi $\alpha > 0$ ise regülerdir ve (3.3) şartını sağlar. Her hemen hemen yakınsak dizi $\alpha > 0$ için f -limit değerine (C, α) toplanabiliridir.

Örnek 3.1.2.

$q > 0$ için

$$a_m^{(q)} = \frac{1}{(q+1)^{m+1}} \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} q^{m-n} a_n$$

olmak üzere, eğer

$$\sum a_m^{(q)} = A$$

ise $\sum a_n$ serisi A değerine (E, q) toplanabiliridir denir.

$q=1$ için $(E,1)$ ve $q=0$ için bilinen yakınsaklık kavramı elde edilir. Ayrıca (E, q) metodu regülerdir.

(E, q) (3.3) şartını sağladığından her (x_n) hemen hemen yakınsak dizisi $f - \lim x_n$ değerine (E, q) Euler metodu ile toplanabiliridir.

Teorem 3.1.4.

A metodu regüler yani $A \in (c, c, P)$ ise ve (3.3) sağlanır ise F ve F_A metotları denktir.

Hemen hemen yakınsaklık kavramını kullanarak King (1966), hemen hemen regüler ve hemen hemen konservatif matrisleri aşağıdaki şekilde tanımlamıştır.

Eğer A sonsuz matrisi yakınsak dizileri hemen hemen yakınsak dizilere limiti koruyarak dönüştürüyorsa A matrisine hemen hemen regülerdir denir ve $A \in (c, f, P)$ ile gösterilir. $A \in (c, f)$ ise yani A matrisi yakınsak dizileri hemen hemen yakınsak dizilere dönüştürüyorsa A ya hemen hemen konservatif matris denir.

Hemen hemen yakınsak dizilerin f uzayı ile ilgili olarak matris dönüşümü tanımlamak için

$$a(n, k, p) = \frac{1}{P+1} \sum_{i=0}^P a_{n+i, k} \quad (3.4)$$

yazalım.

Teorem 3.1.5.

$A = (a_{nk})$ matrisinin hemen hemen konservatif ($A \in (c, f)$) olması için gerek ve yeter şartlar

$$(i) \sup_P \sum_{k=0}^{\infty} |a(n, k, P)| < \infty, \quad n = 0, 1, \dots$$

$$(ii) \quad n \text{ ye göre düzgün olarak } \lim_{P \rightarrow \infty} a(n, k, P) = \alpha_k \text{ olacak şekilde bir } \alpha_k \in \mathbb{C} \text{ nin}$$

mevcut

$$(iii) \quad n \text{ ye göre düzgün olarak } \lim_{P \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} a(n, k, P) = \alpha \text{ olacak şekilde bir } \alpha_k \in \mathbb{C}$$

nin var olmasıdır.

Teorem 3.1.6.

$A = (a_{nk})$ matrisinin hemen hemen regüler ($A \in (c, f, P)$) olması için gerek ve yeter şartlar

$$(i) \sup_P \sum_{k=0}^{\infty} |a(n, k, P)| < \infty, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$(ii) \quad n \text{ ye göre düzgün olarak } \lim_{P \rightarrow \infty} a(n, k, P) = 0$$

$$(iii) \quad n \text{ ye göre düzgün olarak } \lim_{P \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} a(n, k, P) = 1$$

olmasıdır.

Her regüler matris aynı zamanda hemen hemen regülerdir, fakat bunun tersinin genelde doğru olmadığı

$$a_{nk} = \begin{cases} \frac{1}{n+1} (1 + (-1)^n) & , \quad 0 \leq k \leq n \\ 0 & , \quad n < k \end{cases}$$

ile tanımlanan $A = (a_{nk})$ matrisi alınarak görülebilir. Yani $(c, c, P) \subset (c, f, P)$ dir.

Schaefer (1969), Teorem 3.1.2 nin hemen hemen regüler matrisler içinde doğru olduğunu aşağıdaki teoremi ispatlayarak gösterdi.

Teorem 3.1.7.

A hemen hemen regüler ($A \in (c, f, P)$) ve x , s ye F_A -toplanabilir ise bu taktirde x , s ye F -toplanabilirdir.

Aşağıdaki teorem Teorem 3.1.3 ün bir genelleştirmesidir.

Teorem 3.1.8.

A hemen hemen regüler matris olsun.

$$f - \lim \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk} - a_{n,k+1}| \right\} = 0 \quad (3.5)$$

ise A tüm hemen hemen yakınsak dizileri hemen hemen toplar. Bu durumda her $x \in f$ için $f - \lim A(x) = f - \lim x$ dir.

Teorem 3.1.3 de bir $A = (a_{nk})$ regüler matrisi ile tüm hemen hemen yakınsak dizilerin toplanabilir olması için verilen (3.3) şartı hem gerek hem de yeter şarttır. Fakat Teorem 3.1.8 de hemen hemen regüler matrisler için verilen (3.5) şartı yeter şart olmasına rağmen gerek şart değildir. Bu durum elemanları

$$a_{nk} = \begin{cases} a_{k-n} & , \quad k \geq n \\ 0 & , \quad \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $A = (a_{nk})$ Lorentz matrisi kullanılarak gösterilebilir.

Her sınırlı diziyi hemen hemen yakınsak diziye dönüştüren sonsuz A matrisine coercive matrisi denir ve $A \in (\ell_\infty, f)$ ile gösterilir.

Teorem 3.1.9.

$A \in (\ell_\infty, f)$ olması için gerek ve yeter şartlar

- (i) $\sup_P \sum_{k=0}^{\infty} |a(n, k, P)| < \infty$, $n = 0, 1, \dots$,
- (ii) n ye göre düzgün olarak $\lim_{P \rightarrow \infty} a(n, k, P) = \alpha_k$ olacak şekilde $\alpha_k \in \mathbb{C}$ var,
- (iii) n ye göre düzgün olarak $\lim_{P \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} |a(n, k, P) - \alpha_k| = 0$

olmasıdır.

Eizen ve Laush (1969) tarafından $(\ell_\infty, f) \cap (c, f, P) = \emptyset$ olduğu gösterilmiştir.

Teorem 3.1.10.

$A \in (\ell_\infty, f)$, $1 < p < \infty$ olması için gerek ve yeter şartlar

- (i) $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere $\sup_P \sum_{k=0}^{\infty} |a(n, k, P)|^q < \infty$
- (ii) n ye göre düzgün olarak $\lim_{P \rightarrow \infty} a(n, k, P) = \alpha_k$ olacak şekilde $\alpha_k \in \mathbb{C}$ vardır.

$p = (p_m)$ pozitif ve sınırlı bir reel dizi olmak üzere $\bar{\ell}(p)$ ve $\overline{\bar{\ell}}(p)$ uzayları

Nanda (1984) tarafından

$$d_{mn} = d_{mn}(x) = \frac{1}{m+1} \sum_{i=1}^m x_{n+i}$$

olmak üzere

$$\bar{\ell}(p) = \left\{ x : \sum_m |d_{mn}|^{p_m}, n' \text{ ye göre düzgün yakınsak} \right\}$$

$$\bar{\bar{\ell}}(p) = \left\{ x : \sup_n \sum_m |d_{mn}|^{p_m} < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Her m için $p_m = p$ alınırsa $\bar{\ell}(p)$ ve $\bar{\bar{\ell}}(p)$ yerine sırasıyla $\bar{\ell}_p$ ve $\bar{\bar{\ell}}_p$ yazılır. Eğer $p = 1$ ise $\bar{\ell}_p$ ve $\bar{\bar{\ell}}_p$ yerine $\bar{\ell}_1$ ve $\bar{\bar{\ell}}_1$ yazılır.

$A = (a_{nk})$ reel veya kompleks terimli sonsuz bir matris olsun. Eğer her n için

$$A_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k \text{ yakınsak ise } Ax = (A_n(x)) \text{ yazılır.}$$

$$(A, p) = \left\{ x : \sum_n |A_n(x)|^{p_n} < \infty \right\}$$

$$(A, p)_{\infty} = \left\{ x : \sup_n \sum_n |A_n(x)|^{p_n} < \infty \right\}$$

$$(\bar{A}, p) = \left\{ x : \sum_m |d_{mn}(Ax)|^{p_m}, n' \text{ ye göre düzgün yakınsak} \right\}$$

ve

$$(\bar{\bar{A}}, p) = \left\{ x : \sup_n \sum_m |d_{mn}(Ax)|^{p_m} < \infty \right\}$$

olsun. Eğer her n için $p_n = n$ alınırsa (A, p) ve $(A, p)_{\infty}$ için sırasıyla $(A)_p$ ve $(A)_p^{\infty}$ yazılır. Eğer $p = 1$ alınırsa $(A)_p$ yerine (A) yazılır. (A) tüm mutlak toplanabilir dizilerin kümesidir. Burada

$$a(n, k, m) = \frac{1}{m+1} \sum_{i=0}^m a_{n+i, k}$$

olmak üzere

$$d_{mn}(Ax) = \sum_k a(n, k, m)x_k$$

ile tanımlıdır.

Savaş (1990), $(\bar{A}, p) \subset (\bar{\bar{A}}, p)$ ve $(\bar{\bar{A}})_p \subset (A)_\infty$ olduğunu ispatlamıştır. Yine Savaş (1990) tarafından aşağıdaki matris dönüşümleri karakterize edilmiştir.

Teorem 3.1.11.

$b_{nk} > 0$ olsun. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere

$$\sup_n \sum_k |a_{nk}| (b_{nk})^{1/p} < \infty$$

ve

$$\sup_n \sum_m |a(n, k, m)| (b_{nk})^{-1/q} < \infty$$

ise $A \in (\ell_p, \bar{\bar{\ell}}_p)$ dir.

Teorem 3.1.12.

$1 \leq p < \infty$ olsun. $A \in (\ell_\infty, \bar{\ell}_p)$ olması için gerek ve yeter şart n ye göre düzgün olarak

$$\sum_m \left(\sum_k |a(n, k, m)| \right)^p < \infty$$

olmasıdır.

3.2. Mutlak Hemen Hemen Toplanabilme

$\sum a_n$ sonsuz serisi verilsin. Bu seri kısaca a ile gösterilecektir.

$$x_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n \quad (3.6)$$

olsun. a ile x arasındaki bağıntı (3.6) ile verilecektir.

$$d_{-1,n} = d_{-1,n}(x) = x_{n-1}$$

olarak tanımlansın. $m, n \geq 0$ için

$$\Phi_{mn} = \Phi_{mn}(a) = d_{mn} - d_{m-1,n}$$

yazılsın. Buradan,

$$\Phi_{0,n} = d_{0,n} - d_{-1,n} = x_n - x_{n-1} = a_n$$

ve

$$\Phi_{mn} = \frac{1}{m(m+1)} \sum_{v=1}^m v a_{n+v}, \quad (m \geq 1) \quad (3.7)$$

olduğu elde edilir. Yani,

$$\begin{aligned} \Phi_{mn}(a) &= \Phi_{mn}(x) - \Phi_{m-1,n}(x) = \frac{x_n + x_{n+1} + \dots + x_{n+m}}{m+1} - \frac{x_n + x_{n+1} + \dots + x_{n+m-1}}{m} \\ &= \frac{1}{m(m+1)} (m(x_n + x_{n+1} + \dots + x_{n+m}) - (m+1)(x_n + x_{n+1} + \dots + x_{n+m-1})) \\ &= \frac{1}{m(m+1)} (mx_{n+m} - (x_n + x_{n+1} + \dots + x_{n+m-1})) \\ &= \frac{1}{m(m+1)} [(x_{n+m} - x_n) + (x_{n+m} - x_{n+1}) + \dots + (x_{n+m} - x_{n+m-1})] \\ &= \frac{1}{m(m+1)} [(a_{n+m} + \dots + a_{n+1}) + (a_{n+m} + \dots + a_{n+2}) + \dots + (a_{n+m} + \dots + a_{n+m-1}) + a_{n+m}] \\ &= \frac{1}{m(m+1)} [ma_{n+m} + (m-1)a_{n+m-1} + \dots + a_{n+1}] \\ &= \frac{1}{m(m+1)} \sum_{v=1}^m v a_{n+v} \end{aligned}$$

bulunur.

Eğer n ye göre düzgün olarak $\sum_m |\Phi_{mn}|$ yakınsak ise a serisine veya x dizisine mutlak hemen hemen yakınsaktır denir ve mutlak hemen hemen yakınsak dizilerin uzayı $\hat{\ell}$ ile gösterilir.

Eğer x , mutlak hemen hemen yakınsak ise hemen hemen yakınsaktır. Yani $\hat{\ell} \subset f$ dir. Bunun tersi doğru değildir. x yakınsak olsa bile bu mutlak hemen hemen yakınsak olması için yeterli değildir. Çünkü mutlak hemen hemen yakınsaklığın tanımından mutlak hemen hemen yakınsaklık $|C,1|$ mutlak toplanabilmeyi gerektirir. (s_n) dizisinin Cesáro ortalaması

$$\sigma_n = \frac{1}{n+1} \sum_{v=0}^n s_v$$

ile tanımlıdır. Eğer (σ_n) sınırlı salınımlı bir dizi $((\sigma_n) \in bv)$ ise yani

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\sigma_n - \sigma_{n-1}| = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{v=1}^n v a_v < \infty$$

ise, $\sum a_n$ serisi mutlak Cesáro toplanabilirdir veya kısaca $|C,1|$ toplanabilirdir. Ancak yakınsak olup $|C,1|$ toplanabilir olmayan dizilerin var olduğu bilinmektedir.

ℓ_1 in $\ell(p)$ ye genişletildiği gibi Das ve ark. (1984) tarafından $\hat{\ell}$ nın tanımı daha genel olan $\hat{\ell}(p)$ ye genişletilmiştir.

$p = (p_m)$ pozitif sınırlı dizisi verilsin.

$$\psi_n = \psi_n(a) = \sum_m |\Phi_{mn}(a)|^{p_m}$$

yazalım ve bu seri her bir n için yakınsak olsun.

$$\hat{\ell}(p) = \{a : n \text{ 'ye göre düğün olarak } \psi_n(a) \text{ yakınsak}\}$$

şeklinde tanımlanır.

p sabit olmak üzere her m için $p_m = p$ alınırsa, $\hat{\ell}(p)$ yerine $\hat{\ell}$ yazılır.

$\hat{\ell}(p)$ uzayı ile ilişkili olarak $\hat{\ell}(p)$ uzayı da

$$\hat{\ell}(p) = \left\{ a : \sup_n \psi_n(a) < \infty \right\}$$

ile tanımlıdır. Yine her m için $p_m = p$ ise $\hat{\ell}(p)$ yerine $\hat{\ell}_p$ yazılır. Özel olarak $p = 1$

yazılırsa $\hat{\ell}(p)$ ve $\hat{\ell}_p$, $\hat{\ell}$ ve $\hat{\ell}$ halini alır.

Teorem 3.2.1.

$\hat{\ell}(p) \subset \hat{\ell}(p)$ dir. Özel olarak $\hat{\ell}_p \subset \hat{\ell}_p$ ve $\hat{\ell} \subset \hat{\ell}$ dir.

Teorem 3.2.2.

(i) $p \geq 1$ ise $\ell_p \subset \hat{\ell}_p$ dir ve ilave olarak $a \in \ell_p$ ise $\|a\|_{\hat{\ell}_p} \leq \|a\|_p$ dir.

(ii) $p < 1$ ise $\ell_p \subset \hat{\ell}_p$ olması yanlıştır.

$\ell_p \subset \hat{\ell}_p$ kapsam bağıntısı kesindir. Gerçekten,

$$a_n = \begin{cases} (-1)^n n^{-1/p} & , \quad n \geq 1 \\ 0 & , \quad n = 0 \end{cases}$$

alınırsa $a \notin \ell_p$ fakat $a \in \hat{\ell}_p$ olduğu görülür.

Teorem 3.2.2 (i) den $p = 1$ özel durumunda $\ell \subset \hat{\ell}$ dir. Yani mutlak yakınsak olan herhangi bir dizi mutlak hemen hemen yakınsaktır, fakat bunun tersi yanlıştır.

Teorem 3.2.3.

Her m için $q_m \leq p_m$ olsun. Bu taktirde $\hat{\ell}(q) \subset \hat{\ell}(p)$ dir.

Teorem 3.2.4.

Her m için $p_m \leq q_m$ ise $\hat{\ell}(p) \subset \hat{\ell}(q)$ dur.

Teorem 3.2.5.

Eğer n ve r ye göre düzgün olarak $\sum_{m=0}^n \Phi_{mn} = O(1)$ ve $a \in \hat{\ell}$ ise x sınırlıdır.

Bir hemen hemen yakınsak dizinin sınırlı olması gereklidir. Dolayısıyla $a \in \hat{\ell}$ ise x sınırlıdır. Fakat sadece $a \in \hat{\ell}$ olduğu kabul edilirse x in hemen hemen yakınsak olduğu bilinemez.

Dikkat edilmelidir ki, $p > 1$ olmak üzere $a \in \hat{\ell}_p$ ise veya daha kuvvetli bir şart olarak $a \in \ell_p$ olsa bile bu x in sınırlı olması sonucunu vermez. $a_n = \frac{1}{n+1}$ ile aksi örnek bu durumu gösterir.

Mutlak hemen hemen toplanabilir dizilerin uzayları Nanda (1985) tarafından

$$\begin{aligned} |A, p| &= \left\{ x : \sum_n |A_n(x)|^{p_n} < \infty \right\} \\ (A, p)_\infty &= \left\{ x : \sup_n \sum_n |A_n(x)|^{p_n} < \infty \right\} \\ (\hat{A}, p) &= \left\{ x : \sum_m |\Phi_{mn}(Ax)|^{p_m} < \infty \right\} \end{aligned}$$

ve

$$(\hat{\hat{A}}, p) = \left\{ x : \sup_n \sum_m |\Phi_{mn}(Ax)|^{p_m} < \infty \right\}$$

ile tanımlanmışlardır. Burada

$$b(n, k, m) = \begin{cases} a_{nk} & , \quad m = 0 \\ \frac{1}{m(m+1)} \sum_{v=1}^m v a_{n+v, k} & , \quad m \geq 1 \end{cases} \quad (3.8)$$

olmak üzere

$$\Phi_{mn}(Ax) = \sum_k b(n, k, m) x_k$$

ile tanımlıdır. Her n için $p_n = p$ ise $|A, p|$ için $|A|_p$ yazılır. Eğer $p = 1$ ise $|A|_p$ yerine $|A|$ yazılır ve $|A|$, tüm mutlak toplanabilir dizilerin uzayını gösterir.

Nanda (1985) tarafından $|\hat{A}, p| \subset |\hat{\hat{A}}, p|$, $p \geq 1$ için $|A|_p \subset |\hat{A}|_p$ ve $|\hat{\hat{A}}|_p \subset (A)_\infty$

olduğu ispatlanmıştır.

Mutlak hemen hemen yakınsaklık ile ilgili olarak bazı matris dönüşümlerinin karakterizasyonlarını aşağıdaki teoremlerde verilmiştir.

$A \in (\ell_1, \ell_p)$ olması için gerek ve yeter şartın $\sup_k \sum_n |a_{nk}|^p < \infty$ ve $A \in (\ell_\infty, \ell_\infty)$

olması için gerek ve yeter şartın $\sup_k \sum_n |a_{nk}| < \infty$ olduğu bilinmektedir.

Teorem 3.2.6.

$p \geq 1$ olsun. $A \in (\ell_1, \hat{\ell}_p)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\sup_{n,k} \sum_m |b(n,k,m)|^p < \infty$$

olmasıdır.

Teorem 3.2.7.

$p \geq 1$ olsun. $A \in (\ell_1, \hat{\ell}_p, P)$ olması için gerek ve yeter şartlar

(i) $\sup_{n,k} \sum_m |b(n,k,m)| < \infty$

ve

(ii) Her n ve k için $\sum_m |b(n,k,m)| = 1$

olmasıdır.

(ℓ_p, ℓ_p) sınıfındaki matrisle için gerek ve yeter şartlar bilinmemektedir. Ancak $A \in (\ell_1, \ell_1) \cap (\ell_\infty, \ell_\infty)$ ise $A \in (\ell_p, \ell_p)$ olduğu bilinmektedir. Bununla ilgili Nanda (1985) tarafından ispatlanan matris karakterizasyonlarını verelim.

Lemma 3.2.1.

$\sup_k \sum_n |a_{nk}|^p < \infty \Rightarrow \sup_{n,k} \sum_m |b(n,k,m)|^p < \infty$ dur fakat tersi genelde doğru değildir.

İspat: $m \geq 1$ için

$$|b(n,k,m)|^p \leq \frac{1}{m(m+1)^p} \sum_{v=1}^m v^p |a_{n+v,k}|^p$$

olduğundan

$$\sum_{m=1}^{\infty} |b(n,k,m)|^p \leq \sum_{v=1}^m v^p |a_{n+v,k}|^p \sum_{m=v}^{\infty} \frac{1}{m(m+1)^p} \leq \sum_{v=1}^m |a_{n+v,k}|^p$$

elde edilir. Ayrıca, $b(n,k,0) = a_{nk}$ olduğundan

$$\sum_m |b(n,k,m)|^p \leq \sum_{v=n+1}^m |a_{vk}|^p$$

olur. Dolayısıyla $\sup_k \sum_n |a_{nk}|^p < \infty \Rightarrow \sup_{n,k} \sum_m |b(n,k,m)|^p < \infty$ olduğu ispatlanır.

Tersinin genel olarak doğru olmadığını göstermek için

$$a_{nk} = \begin{cases} (-1)^n n^{-1/p} & , \quad 0 < n \leq k \\ 0 & , \quad n = 0 \text{ ve } n > k \end{cases}$$

alalım. Böylece

$$\sup_{n,k} \sum_m |b(n,k,m)|^p < \infty$$

olduğu gösterilebilir. Fakat $\sup_k \sum_n |a_{nk}|^p < \infty$ sağlanmaz.

Lemma 3.2.2.

$$\sup_n \sum_k |a_{nk}| < \infty \Leftrightarrow \sup_{n,m} \sum_m |b(n,k,m)| < \infty .$$

İspat: $\sup_{m,n} \sum_k |b(n,k,m)| \geq \sup_n \sum_k |b(n,k,0)| = \sup_n \sum_k |a_{nk}|$ olur. Ayrıca

$$\begin{aligned} \sup_{m,n} \sum_k |b(n,k,m)| &\leq \sup_{v,n} |a_{n+v,k}| \sup_m \frac{1}{m(m+1)} \sum_{v=1}^m v \\ &= \frac{1}{2} \sup_n \sum_k |a_{nk}| \end{aligned}$$

olur. Böylece denklik ispatlanır.

Teorem 3.2.8.

$$p > 1 \text{ olsun. } A \in \left(\ell_1, \hat{\ell}_1 \right) \cap (\ell_\infty, \ell_\infty) \text{ ise } A \in \left(\ell_p, \hat{\ell}_p \right) \text{ dir.}$$

İspat: Hölder eşitsizliğinden

$$|\Phi_{mn}(Ax)|^p \leq \sum_k |b(n,k,m)|^{p-1} \sum_k |b(n,k,m)| |x_k|^p$$

yazılabilir. Böylece

$$\sum_m |\Phi_{mn}(Ax)|^p \leq \sum_k |b(n,k,m)|^{p-1} \sum_k |x_k|^p \sum_m |b(n,k,m)|$$

elde edilir. Hipotezden ve Lemma 3.2.2 den $A \in \left(\ell_p, \hat{\ell}_p \right)$ olduğu elde edilir.

Teorem 3.2.9.

$$c_{nk} > 0 \text{ olsun. } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \text{ olmak üzere}$$

$$\sup_n \sum_k |a_{nk}| (c_{nk})^{1/p} < \infty \quad (3.9)$$

ve

$$\sup_k \sum_m |b(n,k,m)| (c_{nk})^{-1/q} < \infty \quad (3.10)$$

ise $A \in \left(\ell_p, \hat{\ell}_p \right)$ dir.

İspat: Hölder eşitsizliğinden

$$|\Phi_{mn}(Ax)|^p \leq \left(\sum_k |b(n,k,m)| (c_{nk})^{1/p} \right)^{p-1}$$

$$\times \sum_k |b(n, k, m)| (c_{nk})^{-1/q} |x_k|^p$$

yazılabilir. Böylece,

$$\begin{aligned} \sum_m |\Phi_{mn}(Ax)|^p &\leq \sum_k |b(n, k, m)| (c_{nk})^{1/p(p-1)} \\ &\times \sum_k |x_k|^p \sum_m |b(n, k, m)| (c_{nk})^{-1/q} \end{aligned}$$

elde edilir. Lemma 3.2.2 den (3.9),

$$\sup_{n,m} \sum_k |b(n, k, m)| (c_{nk})^{1/p} < \infty \quad (3.11)$$

olmasına denktir. Böylece ispat (3.9), (3.10) ve (3.11) den çıkar.

3.3. Kuvvetli Hemen Hemen Toplanabilme

Kuvvetli hemen hemen yakınsaklık kavramı ilk kez Maddox (1979) tarafından çalışılmış ve aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

$x = (x_n)$ kompleks bir dizi olsun. Eğer $k \rightarrow \infty$ iken, m ye göre düzgün olarak

$$\frac{1}{n} \sum_{k=i+1}^{i+n} |x_k - s| \rightarrow 0$$

ise x , s ye kuvvetli hemen hemen yakınsaktır denir. Kuvvetli hemen hemen yakınsak dizilerin uzayı $[f]$ ile gösterilir. Eğer x , s ye kuvvetli hemen hemen yakınsak ise $[f] - \lim x = s$ yazılır. $[f] \subset f \subset \ell_\infty$ dur.

Nanda (1987) tarafından aşağıdaki şekilde kuvvetli hemen hemen toplanabilirlik tanımlanmıştır. $A = (a_{nk})$ negatif olmayan sonsuz bir matris ve $p = (p_k)$ pozitif reel sayıların bir dizisi olsun.

$$A_n(x) = \sum_k a_{nk} |x_k|^{p_k} \text{ ve } A_{m,n}(x) = \sum_k a_{mk} |x_{k+n}|^{p_k} \text{ olmak üzere}$$

$$[\hat{A}, p]_0 = \{x : A_{mn}(x) \rightarrow 0, m \rightarrow \infty \text{ ve } n' \text{ ye göre düzgün}\}$$

$$[\hat{A}, p] = \{x : A_{mn}(x - \ell e) \rightarrow 0, m \rightarrow \infty \text{ bazı } \ell \text{ için ve } n' \text{ ye göre düzgün}\}$$

$$[\hat{A}, p]_\infty = \left\{ x : \sup_{m,n} A_{mn}(x) < \infty \right\}$$

dizi uzaylarına sırasıyla sıfıra kuvvetli hemen hemen toplanabilir, kuvvetli hemen hemen toplanabilir ve kuvvetli hemen hemen sınırlı uzaylar denir.

$A = (C, 1)$ ve her k için $p_k = 1$ alınırsa $[\hat{A}, p] = [f]$ ve $[\hat{A}, p]_\infty = \ell_\infty$ olur.

Ayrıca Nanda (1987), bu uzayların $p \in \ell_\infty$ ise $\mathbb{C}$ üzerinde lineer uzaylar olduğunu ispatladı.

4. MUTLAK HEMEN HEMEN ve KUVVETLİ HEMEN HEMEN YAKINSAKLIĞIN BİR İNDEKS İLE GENELLEŞTİRİLMESİ

Bu bölümde mutlak hemen hemen ve kuvvetli hemen hemen yakınsaklığın Das ve Mishra (1988) tarafından bir indeks ile elde ettikleri genelleştirmesi verilecektir.

4.1. Bir k indeksi ile Mutlak Hemen Hemen Yakınsaklığın Genelleştirilmesi

Das ve Mishra (1988), bu uzayı genelleştirerek $k \geq 1$ indeksi ile mutlak hemen hemen yakınsak dizilerin uzayını tanımladılar.

Mutlak hemen hemen yakınsak dizilerin uzayı $\hat{\ell}$ ile gösterilir. Eğer x , mutlak hemen hemen yakınsak ise hemen hemen yakınsaktır. Yani $\hat{\ell} \subset f$ dir. Bunun tersi doğru değildir.

Mutlak hemen hemen yakınsak dizilerin uzayı

$$\hat{\ell} = \left\{ a : \sum_{m=1}^{\infty} |\Phi_{mn}(a)|, n'ye \text{ göre düzgün olarak yakınsak} \right\}$$

şeklinde ifade edilir. Bununla ilişkili $\hat{\ell}$ uzayı Das ve ark. (1984) tarafından aşağıdaki şekilde verilmiştir:

$$\hat{\ell} = \left\{ a : \sup_n \sum_{m=1}^{\infty} |\Phi_{mn}(a)| < \infty \right\}$$

$\hat{\ell} \subset \hat{\ell}$ olduğu yine Das ve ark. (1984) tarafından ispatlanmıştır.

G_k ile tüm k indeksi ile mutlak hemen hemen yakınsak olan dizilerin kümesi gösterilsin. Yani,

$$G_k = \left\{ a : \sum_{m=1}^{\infty} m^{k-1} |\Phi_{mn}(a)|^k < \infty, n'ye \text{ göre düzgün} \right\}$$

olsun. Bununla ilişkili olarak

$$H_k = \left\{ a : \sup_n \sum_{m=1}^{\infty} m^{k-1} |\Phi_{mn}|^k < \infty \right\}$$

kümesi tanımlansın.

Burada ilk olarak G_k ile H_k nin eşit olup olmadığı sorusuna cevap aranacaktır.

α_{mn} , m ve n ye bağlı iki değişkenli reel değerli negatif olmayan fonksiyonlar olsun.

(i) $\sum_m \alpha_{mn}$ n ye göre düzgün olarak yakınsak;

(ii) $\sum_m \alpha_{mn}$ her n için yakınsak ve toplamı sınırlı

şeklinde (i) ve (ii) yazılırsa bu iki iddia arasında bir ilişki yoktur. Örneğin,

$$\alpha_{mn} = \begin{cases} 1 & (m = n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases}$$

alalım. Bu durumda (ii) sağlanır fakat (i) sağlanmaz.

Eğer

$$\alpha_{mn} = \begin{cases} n & (m = 0) \\ 0 & (m > 0) \end{cases}$$

ise bu taktirde (i) sağlanır fakat (ii) sağlanmaz.

Fakat Φ_{mn} keyfi olarak seçilemez. Onun tanımını n nin bir değeri ve onların diğer değerleri için Φ_{mn} nin değerleri arasında belirli ilişkiler olmasını gerektirir. Dolayısıyla G_k ve H_k arasında bir kapsama bağıntısı olabilmesi mümkündür. Aşağıdaki teorem bu gerçeği doğrular.

Teorem 4.1.1.

$$G_k \subset H_k \text{ dır.}$$

İspat: Kabul edelim ki $a \in G_k$ olsun. G_k nin tanımından n ye göre düzgün olarak

$$\sum_{m=1}^{\infty} m^{k-1} |\Phi_{mn}|^k < \infty$$

olur. Buradan, $\forall n$ için

$$\sum_{m \geq M} m^{k-1} |\Phi_{mn}|^k \leq 1 \tag{4.1}$$

olacak şekilde $M > 0$ sayısı vardır. (4.1) de, $m \geq M$ için

$$|\Phi_{mn}|^k \leq \frac{1}{m^{k-1}} \leq 1$$

olduğu ve buradan da $m \geq M$ ve $\forall n$ için

$$|\Phi_{mn}| \leq 1 \quad (4.2)$$

olarak elde edilir. Ayrıca

$$a_{m+n} = (m+1)\Phi_{mn} - (m-1)\Phi_{m-1,n}$$

olduğundan ve (4.2) den herhangi bir sabit $m \geq M$ için ve $\forall n$ için

$$|a_{m+n}| = O(1)$$

olur. Dolayısıyla $|a_n|$ sınırlıdır. Böylece $\forall m$ ve $\forall n$ için

$$\begin{aligned} |\Phi_{mn}| &\leq \frac{1}{m(m+1)} \sum_{\nu=1}^m |a_{n+\nu}| \\ &= O(1) \frac{1}{m(m+1)} \sum_{\nu=1}^m \nu = O(1) \end{aligned}$$

olduğu elde edilir. Sonuç olarak $\forall n$ için

$$\sum_{m=1}^{M-1} m^{k-1} |\Phi_{mn}|^k = O(1)$$

elde ederiz ki bu da teoremin ispatı için yeterlidir.

Şimdi mutlak yakınsak serilerin ℓ uzayının bir genelleştirmesi

$$Z_k = \left\{ a : \sum_{m=1}^{\infty} m^{k-1} |a_m|^k < \infty ; k \geq 1 \right\}$$

şeklinde yazılabilir. Z_1 , mutlak yakınsak serilerinin ℓ uzayıdır.

Teorem 4.1.2.

$$Z_k \subset G_k \text{ dir.}$$

İspat: $a \in Z_k$ olsun. Hölder eşitsizliğini $k > 1$ için uygularsak ($k = 1$ için aşıkardır),

$$\begin{aligned}
|\Phi_{mn}|^k &\leq \left| \frac{1}{m(m+1)^k} \sum_{\nu=1}^m \nu a_{n+\nu} \right|^k \\
&\leq \frac{1}{m^k (m+1)^k} \left(\sum_{\nu=1}^m \nu^k |a_{n+\nu}| \right)^k \\
&\leq \frac{1}{m^k (m+1)^k} \sum_{\nu=1}^m \nu^k |a_{n+\nu}|^k \left(\sum_{\nu=1}^m 1 \right)^{k-1} \\
&\leq \frac{1}{m(m+1)^k} \sum_{\nu=1}^m \nu^k |a_{n+\nu}|^k
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{\infty} m^{k-1} |\Phi_{mn}|^k &\leq \sum_{m=1}^{\infty} m^{k-1} \frac{1}{m(m+1)^k} \sum_{\nu=1}^m \nu^k |a_{n+\nu}|^k \\
&\leq \sum_{\nu=1}^m \nu^k |a_{n+\nu}|^k \sum_{m=\nu}^{\infty} m^{k-1} \frac{1}{m(m+1)} \\
&\leq \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{k-1} |a_{n+\nu}|^k \leq \sum_{\nu=n}^{\infty} \nu^{k-1} |a_{\nu}|^k
\end{aligned}$$

olur. Buradan $\sum_{m=1}^{\infty} m^{k-1} |\Phi_{mn}|^k$ nın düzgün yakınsaklığı elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Şimdi G_k , H_k , Z_k kümelerinin bazı topolojik özelliklerini inceleyelim.

$a \in G_k$ veya H_k için

$$\|a\| = \sup_n \left(\sum_{m=1}^{\infty} m^{k-1} |\Phi_{mn}(a)|^k \right)^{1/k}, \quad k \geq 1 \quad (4.3)$$

ve $a \in Z_k$ için

$$\|a\|_Z = \left(\sum m^{k-1} |a_m|^k \right)^{1/k}, \quad k \geq 1 \quad (4.4)$$

normlarını tanımlayalım.

Teorem 4.1.3.

G_k , H_k ile Z_k Banach uzayıdır ve

$$\|a\|_Z \leq \|a\|$$

olur.

İspat: G_k , H_k ve Z_k kümelerinin birer normlu lineer uzay olduklarını görmek kolaydır. Bu uzayların yukarıda belirtilen normlara göre tam olduklarını gösterelim.

G_k da herhangi bir (a^i) Cauchy dizisi verilsin. Cauchy dizisinin tanımından $s, t \rightarrow \infty$ iken $\|a^s - a^t\| \rightarrow 0$ yazarız.

$$\Phi_{1,n}(a) = \frac{1}{2} a_{n+1}$$

olduğundan, $s, t \rightarrow \infty$ iken

$$\left| \Phi_{1,n}(a^s - a^t) \right| = \frac{1}{2} (a_{n+1}^s - a_{n+1}^t) \|a^s - a^t\| \rightarrow 0$$

elde edilir. Böylece her bir sabit n için (a_n^s) dizisinin $\mathbb{C}$ de bir Cauchy dizisi olduğu çıkar. $\mathbb{C}$ tam olduğundan her bir sabit n için $s \rightarrow \infty$ iken $a_n^s \rightarrow a_n$ olacak şekilde $a_n \in \mathbb{C}$ dizisi vardır.

Şimdi $a = \sum_n a_n$ serisini göz önüne alalım. Her bir sabit N için

$$\left(\sum_{m=1}^N m^{k-1} \left| \Phi_{mn}(a^s - a^t) \right|^k \right) \leq \|a^s - a^t\|^k$$

olduğundan $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde $s, t > s_0$ ve her n için

$$\sum_{m=1}^N m^{k-1} \left| \Phi_{mn}(a^s - a^t) \right|^k < \varepsilon$$

olacak şekilde s_0 sayısı vardır. Yukarıdaki ifade de $t \rightarrow \infty$ alınırsa $s > s_0$ ve her n için

$$\sum_{m=1}^N m^{k-1} \left| \Phi_{mn}(a^s - a) \right|^k \leq \varepsilon$$

elde edilir. N keyfi olduğundan $N \rightarrow \infty$ alınırsa, $s > s_0$ ve her n için

$$\sum_{m=1}^{\infty} m^{k-1} \left| \Phi_{mn}(a^s - a) \right|^k \leq \varepsilon$$

olduğu elde edilir. n ye göre supremum alınırsa $s > s_0$ için $\|a^s - a\| \leq \varepsilon$ olduğu çıkar

ve böylece $a^s \rightarrow a$, $a \in G_k$ elde edilir. Bu G_k nın tam olduğunu ispatlar.

H_k ve Z_k nin da tam olduğu benzer yolla ispatlanabilir.

$$\sum_{m=1}^{\infty} m^{k-1} |\Phi_{mn}|^k \leq \sum_{v=1}^{\infty} v^{k-1} |a_{n+v}|^k \leq \sum_{v=n}^{\infty} v^{k-1} |a_v|^k$$

olduğundan $\|a\|_Z \leq \|a\|$ elde edilir.

4.2. Bir k indeksi ile Kuvvetli Hemen Hemen Yakınsaklığın Genelleştirilmesi

Bu kısımda Das ve Mishra (1988) tarafından tanımlanan bir k indeksi ile kuvvetli hemen hemen yakınsaklığın tanımı verilerek bazı özellikleri incelenecektir.

Maddox (1978), kuvvetli hemen hemen yakınsaklığı aşağıdaki şekilde tanımladı:

Teorem 4.2.1.

$k \geq 1$ olmak üzere $G_k \subset [f]_k$ dır. $x \in G_k$ ise $[f]_k - \lim x = s$ olacak şekilde $s \in \mathbb{C}$ sayısı vardır. Bu teoremin ispatı için aşağıdaki lemmaya gereksinim vardır.

Lemma 4.2.1.

$k \geq 1$ olsun. $[f]_k - \lim x = s$ olması için gerek ve yeter şart

$$(i) \quad f - \lim x = s$$

ve $m \rightarrow \infty$ iken n ye göre düzgün olarak

$$(ii) \quad \frac{1}{m+1} \sum_{r=0}^m |x_{r+n} - d_{r,n}(x)|^k \rightarrow 0$$

olmasıdır.

İspat: Hölder eşitsizliğinden

$$\left| \frac{1}{m+1} \sum_{r=0}^m x_{r+n} - s \right| \leq \frac{1}{m+1} \sum_{r=0}^m |x_{r+n} - s|$$

$$\leq \frac{1}{m+1} \left(\sum_{r=0}^m |x_{r+n} - s|^k \right)^{1/k} (m+1)^{1-1/k}$$

$$= \left(\frac{1}{m+1} \sum_{r=0}^m |x_{r+n} - s|^k \right)^{1/k}$$

elde edilir. Böylece $k \geq 1$ olmak üzere

$$[f]_k - \lim x = s \Rightarrow [f] - \lim x = s \Rightarrow f - \lim x = s$$

olur. Minkowski eşitsizliğinden

$$\left(\frac{1}{m+1} \sum_{r=0}^m |x_{r+n} - d_{r,n}|^k \right)^{1/k} \leq \left(\frac{1}{m+1} \sum_{r=0}^m |x_{n+r} - s|^k \right)^{1/k} + \left(\frac{1}{m+1} \sum_{r=0}^m |d_{r,n} - s|^k \right)^{1/k}$$

$$\leq \sum_1 + \sum_2$$

diyelim.

$$[f]_k - \lim x = s \text{ olduğundan } m \rightarrow \infty \text{ iken } n \text{ ye göre düzgün olarak } \sum_1 = O(1)$$

olur.

$f - \lim x = s$ olduğundan $r \rightarrow \infty$ iken n ye göre düzgün olarak $d_{r,n} \rightarrow s$ olduğu çıkar. Buradan b unların aritmetik ortalaması da yani $m \rightarrow \infty$ iken n ye göre düzgün olarak $\sum_2 \rightarrow 0$ olur.

Karşıt ispatı, $k \geq 1$ için

$$\left(\frac{1}{m+1} \sum_{r=0}^m |x_{n+r} - s|^k \right)^{1/k} \leq \left(\frac{1}{m+1} \sum_{r=0}^m |x_{n+r} - d_{r,n}|^k \right)^{1/k}$$

$$+ \left(\frac{1}{m+1} \sum_{r=0}^m |d_{r,n} - s|^k \right)^{1/k}$$

elde edilir.

Teorem 4.2.1'in İspatı:

$x \in G_k$ olduğunu kabul edelim. Böylece

$$V_m(x) = \sum_{m=r}^{\infty} m^{k-1} |d_{mn} - d_{m-1,n}|^k$$

her bir $r \geq 0$ için var ve $r \rightarrow \infty$ iken n ye göre düzgün olarak $V_m(x) \rightarrow 0$ dır. Lemma

4.2.1 den teoremin ispatı için $m \rightarrow \infty$ iken n ye göre düzgün olarak

$$\frac{1}{m+1} \sum_{r=0}^m |x_{r+n} - d_{r,n}|^k = o(1)$$

olduğunu göstermek yeterlidir.

$$x_{n+r} - d_{r,n} = r(d_{r,n} - d_{r-1,n})$$

olduğu için $m \rightarrow \infty$ iken n ye göre düzgün olarak

$$\begin{aligned} \frac{1}{m+1} \sum_{r=0}^m |x_{n+r} - d_{r,n}|^k &= \frac{1}{m+1} \sum_{r=0}^m r^k |d_{r,n} - d_{r-1,n}|^k \\ &= \frac{1}{m+1} \sum_{r=0}^m r(V_{r,n} - V_{r+1,n}) = \frac{V_{1,n}}{m+1} - V_{m+1,n} + \frac{1}{m+1} \sum_{r=0}^m V_{r+1,n} = o(1) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 4.2.2.

$k' > k \geq 1$ olmak üzere $[f]_{k'} \subset [f]_k$ dır.

İspat: $r_1 = \frac{k'}{k} > 1$ olsun ve r_2 , $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = 1$ olarak tanımlansın. Hölder

eşitsizliğinden

$$\frac{1}{m+1} \sum_{r=0}^m |x_{r+n} - s|^k \leq \frac{1}{m+1} \left(\sum_{r=0}^m (|x_{r+n} - s|^{r_1})^{1/r_1} \right)^{1/r_1} (m+1)^{1/r_2}$$

$$= \left(\frac{1}{m+1} \sum_{r=0}^m |x_{r+n} - s|^{k'} \right)^{1/k'}$$

elde edilir. Buradan $[f]_{k'} - \lim x = s$ ise $[f]_k - \lim x = s$ bulunur. Bu da ispatı tamamlar.

4.3. Bir Modülüs fonksiyonu tarafından tanımlanan bir k indeksli Mutlak Hemen Hemen ve Kuvvetli Hemen Hemen Yakınsaklık

Bir f modülüs fonksiyonu sınırlı ve sınırsız olabilir. (ii) den $|f(x) - f(y)| \leq f(x - y)$ ve (iv) den f nin $[0, \infty)$ üzerinde her yerde sürekli olduğu görülür.

$f(x) = \frac{x}{x+1}$ fonksiyonu sınırlı bir modülüs fonksiyonudur. Çünkü,

$$i) f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{x+1} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$ii) f(x+y) = \frac{x+y}{x+y+1} = \frac{x}{x+y+1} + \frac{y}{x+y+1} \leq \frac{x}{x+1} + \frac{y}{y+1} = f(x) + f(y)$$

$$iii) f(x) = \frac{x}{x+1} \text{ fonksiyonun türevi olan } f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} > 0 \text{ olduğundan } f \text{ artandır.}$$

$$iv) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x+1} = 0 = f(0) \text{ olduğundan } f \text{ sıfırda süreklidir.}$$

Ayrıca, $f(x) = \log(x+1)$ fonksiyonu sınırsız bir modülüstür. Çünkü,

$$i) f(x) = 0 \Leftrightarrow \log(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$ii) f(x+y) \leq f(x) + f(y) \text{ olduğunu göstermek için}$$

$$1+x+y \leq (1+x)(1+y)$$

eşitsizliği ve logaritma özelliği kullanılarak

$$\log(1+x+y) \leq \log(1+x) + \log(1+y)$$

olduğu görülür.

$$iii) f(x) = \log(x+1) \text{ türevinden } f'(x) = \frac{1}{x+1} > 0 \text{ olduğundan } f \text{ fonksiyon}$$

artandır.

iv) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log(x+1) = 0 = f(0)$ olduğundan fonksiyon sıfırda sağdan süreklidir.

Ruckle (1973), modülüs fonksiyonunu kullanarak

$$L(f) = \left\{ x = (x_i) : \sum_i f(|x_i|) < \infty \right\}$$

dizi uzayını tanımlamış ve bu dizi uzayının çeşitli özelliklerini incelemiştir. Eğer $f(x) = x^p$ alınırsa $L(f)$, ℓ_p uzayına dönüşür. Özel olarak $f(x) = x$ alınırsa $L(f) = \ell_1$ olur.

Nanda (1998) tarafından modülüs fonksiyonu yardımıyla ve bir k indeksi ile tanımlanan dizi uzayları aşağıdaki şekilde genelleştirilmiştir.

$$L(f) = \left\{ a : \sum_m m^{p-1} f(|a_m|) < \infty \right\},$$

$$\hat{L}(f) = \left\{ a : \sum_m m^{p-1} f(|\Phi_m|), n \text{ de düzgün yakınsak} \right\},$$

$$\hat{\hat{L}}(f) = \left\{ a : \sup_n \sum_m m^{p-1} f(|\Phi_m|) < \infty \right\},$$

$$\hat{w}(f) = \left\{ x : \frac{1}{m+1} \sum_{i=0}^m m^{p-1} f(|x_{n+i} - s|) \rightarrow 0, m \rightarrow \infty \text{ iken } n \text{ de düzgün} \right\}$$

Dikkat edileceği üzere eğer $f(x) = x^p$ ise o zaman $L(f) = \ell_p^p$, $\hat{L}(f) = \hat{\ell}_p^p$, $\hat{\hat{L}}(f) = \hat{\hat{\ell}}_p^p$, $\hat{w}(f) = \hat{w}_p^p$ dir. Burada ℓ_p^p , $\hat{\ell}_p^p$, $\hat{\hat{\ell}}_p^p$, $\hat{w}_p^p$ sırasıyla p indeksli ℓ_p , $\hat{\ell}_p$, $\hat{\hat{\ell}}_p$, $\hat{w}_p$ uzaylarını gösterir. Eğer $p = 1$ ise o zaman sırasıyla ℓ , $\hat{\ell}$, $\hat{\hat{\ell}}$, $\hat{w}$ uzayları elde edilir.

Teorem 4.3.1.

Eğer f mutlak homojen ise o zaman $\hat{L}(f) \subset \hat{\hat{L}}(f)$ dir.

İspat: $a \in L(f)$ olsun. O zaman her n için

$$\sum_{m \geq M} m^{p-1} f(|\Phi_{mn}|) \leq 1 \quad (4.5)$$

olacak şekilde bir $M > 0$ sabiti vardır. Bu sebeple her n için

$$\sum_{m=1}^{M-1} m^{p-1} f(|\Phi_{mn}|) = O(1),$$

yani her sınırlı m ve her n için $f(|\Phi_{mn}|)$ nin sınırlı olduğunu göstermek yeterlidir.

(4.5) den görülür ki, her $m \geq M$ ve her n için

$$f(|\Phi_{mn}|) \leq \frac{1}{m^{p-1}} \leq 1 \quad (4.6)$$

olur. Fakat eğer $m \geq 1$ ise $a_{m+n} = (m+1)\Phi_{mn} - (m-1)\Phi_{m-1,n}$ dir. Böylece

$$\begin{aligned} f(|a_{m+n}|) &= f(|(m+1)\Phi_{mn} - (m-1)\Phi_{m-1,n}|) \\ &\leq f(|(m+1)\Phi_{mn}|) + f(|(m-1)\Phi_{m-1,n}|) \\ &\leq (m+1)f(|\Phi_{mn}|) + (m-1)f(|\Phi_{m-1,n}|) \end{aligned}$$

yazılır. Herhangi $m \geq M+1$ sabiti ile bunu uygulanarak anlaşılır ki, $f(|a_{m+n}|)$ sınırlı

yani $f(|a_v|)$ sınırlıdır.

Şimdi

$$f(|\Phi_{mn}|) \leq \frac{1}{m(m+1)} \sum_{i=1}^m f(|a_{n+i}|) = \frac{1}{m(m+1)} O(1) \sum_{i=1}^m 1 = O(1)$$

olur ve böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.3.2.

Eğer f mutlak homojen ise o zaman $L(f) \subset \hat{L}(f)$ dir.

İspat: $a \in \hat{L}(f)$ iken

$$\begin{aligned} f(|\Phi_{mn}|) &= f\left(\left|\frac{1}{m(m+1)} \sum_{i=1}^m ia_{n+i}\right|\right) \\ &\leq \frac{1}{m(m+1)} \sum_{i=1}^m if(|a_{n+i}|) \end{aligned}$$

olur ve böylece

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} m^{p-1} f(|\Phi_{mn}|) \\ \leq \sum_{i=1}^{\infty} i^{p-1} f(|a_{n+i}|) \sum_{m=i}^{\infty} \frac{1}{m(m+1)} \\ \leq \sum_{i=1}^{\infty} i^{p-1} f(|a_{n+i}|) = \sum_{i=n+1}^{\infty} i^{p-1} f(|a_i|) \end{aligned}$$

elde edilir. Görülür ki, yukarıdaki eşitsizliğin sağ tarafı her n için sonlu ve $n \rightarrow \infty$ iken $\rightarrow 0$ dır. Buradan sol taraf n de düzgün yakınsar. O halde $a \in \hat{L}(f)$ dir ve ispat tamamlanır.

Teorem 4.3.3.

Eğer f mutlak homojen ise o zaman $\hat{L}(f) \subset \hat{w}(f)$ dir.

Bu teoremi ispatlamak için aşağıdaki lemma gereklidir.

Lemma 4.3.1.

$$\hat{w}(f) - \lim x = s \Leftrightarrow (i) \quad f - \lim x = s$$

$$(ii) \frac{1}{m+1} \sum_{r=0}^m f(|x_{r+n} - d_{r,n}(x)|) \rightarrow 0 \text{ ifadesi } m \rightarrow \infty \text{ iken } n$$

de düzgün olur.

Lemma 4.3.1 in ispatı: (i) ve (ii) sağlansın.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{m+1} \sum_{i=0}^m m^{p-1} f(|x_{n+i} - s|) \\ & \leq \frac{1}{m+1} \sum_{i=0}^m m^{p-1} f(|x_{n+i} - d_{i,n}|) + \frac{1}{m+1} \sum_{i=0}^m m^{p-1} f(|d_{i,n} - s|) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

ifadesi $m \rightarrow \infty$ iken n de düzgün ve böylece $x \in \hat{w}(f)$ dir.

Aksine $x \in \hat{w}(f)$ olsun. Buradan

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{m+1} \sum_{i=0}^m m^{p-1} f(|x_{i+n} - s|) \right| \\ & \leq \frac{1}{m+1} \sum_{i=0}^m m^{p-1} f(|x_{i+n} - s|) + \frac{1}{m+1} \sum_{i=0}^m m^{p-1} f(|x_{i+n} - s|) \end{aligned}$$

elde edilir. f sürekli olduğundan $x \in f$ ve $f - \lim x = s$ dir. Dahası

$$\begin{aligned} & \frac{1}{m+1} \sum_{i=0}^m m^{p-1} f(|x_{i+n} - d_{i,n}|) \\ & = \frac{1}{m+1} \sum_{i=0}^m m^{p-1} f(|(x_{i+n} - s) + (s - d_{i,n})|) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{m+1} \sum_{i=0}^m m^{p-1} f(|x_{n+i} - d_{i,n}|) + \frac{1}{m+1} \sum_{i=0}^m m^{p-1} f(|d_{i,n} - s|) \\
&= \sum_1 + \sum_2
\end{aligned}$$

yazılır.

$x \in \hat{w}(f)$ olduğundan, $\sum_1 = O(1)$ ifadesi $m \rightarrow \infty$ iken n de düzgün olur. Tekrar $f - \lim x = s$ iken görülür ki, $d_{i,n} \rightarrow s$ ifadesi $i \rightarrow \infty$ iken n de düzgün ve böylece onun ağırlıklı aritmetik ortalaması olan $\sum_2 \rightarrow 0$ ifadesi $m \rightarrow \infty$ iken n de düzgün olur. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.3.3 ün ispatı: $x \in \hat{L}(f)$ varsayalım. Buradan her $r \geq 0$ için

$$V_{r,n}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} m^{p-1} f(|d_{mn} - d_{m-1,n}|)$$

ve $V_{r,n}(x) \rightarrow 0$ ifadesi $r \rightarrow \infty$ iken n de düzgün olur.

Şimdi teoremi ispatlamak için, Lemma 4.3.1 gereğince

$$\frac{1}{m+1} \sum_{r=0}^m m^{p-1} f(|x_{n+r} - d_{r,n}|) \rightarrow 0$$

ifadesinin $m \rightarrow \infty$ iken n de düzgün olduğunu göstermek yeterlidir. Ayrıca

$$x_{n+r} - d_{r,n} = r(d_{r,n} - d_{r-1,n})$$

olduğundan

$$\frac{1}{m+1} \sum_{r=0}^m m^{p-1} f(|x_{n+r} - d_{r,n}|)$$

$$= \frac{1}{m+1} \sum_{r=0}^m m^{p-1} f(r|d_{r,n} - d_{r-1,n}|)$$

$$= \frac{1}{m+1} \sum_{r=0}^m m^{p-1} r f(|d_{r,n} - d_{r-1,n}|)$$

$$= \frac{1}{m+1} \sum_{r=0}^m m^{p-1} r f(|V_{r,n} - V_{r+1,n}|)$$

$$= \frac{V_{1,p}}{m+1} - V_{m+1,n} + \frac{1}{m+1} \sum_{r=0}^m V_{r+1,n}$$

$$= O(1)$$

ifadesi $m \rightarrow \infty$ iken n de düzgün olur ve böylece ispat tamamlanır.

5. HEMEN HEMEN SÜREKLİLİK ve HEMEN HEMEN KOMPAKTLIK

Son bölümde, Nanda (2004) gereğince Banach uzaylarında hemen hemen sürekli dönüşüm ve hemen hemen kompaktlık kavramları incelenecektir.

Reel yada kompleks sayı dizileri için hemen hemen yakınsaklık Lorentz (1948) tarafından tanımlandı ve Banach uzayında hemen hemen yakınsaklık Kurtz (1972) tarafından çalışıldı.

Kurtz (1972) normlu lineer uzayda diziler için hemen hemen yakınsaklık kavramını inceledi. Buna göre, X reel yada kompleks bir normlu lineer uzay olsun. $f(X)$, X deki bütün hemen hemen yakınsak dizilerin kümesini gösterebilir.

$$f(X) = \left\{ (x_n) : \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{\sum_{i=0}^{n-1} x_{i+k}}{n} - x \right\| = 0, k \text{ da düzgün} \right\}$$

olur. Eğer (x_n) , x e hemen hemen yakınsak (kısaca hhy) ise $x_n \xrightarrow{hhy} x$ yazılır.

Tıpkı yakınsaklığın, süreklilik ve kompaktlık ile ilgili olması gibi, hemen hemen yakınsaklığın, hemen hemen süreklilik ve hemen hemen kompaktlık kavramları ile ilgili olması gerektiğini düşünmek doğaldır.

İşte bu bölümde, herhangi bir normlu lineer uzayda hemen hemen süreklilik ve hemen hemen kompaktlık kavramları incelenecektir. Choudhary ve Nanda (1989) gereğince hemen hemen sürekli fonksiyon kavramını ele almak mümkündür.

X ve Y , aynı reel yada kompleks sayı cismi üzerinde normlu lineer uzaylar olsun. $f : X \rightarrow Y$ bir dönüşüm verilsin. Eğer f , $x \in X$ noktasında $x_n \xrightarrow{hhy} x$ iken $f(x_n) \xrightarrow{hhy} f(x)$ oluyorsa hemen hemen sürekli olarak ifade edilir.

Eğer f ve g , hemen hemen sürekli ise o zaman $f + g$ nin hemen hemen sürekli olduğunu görmek kolaydır. Ayrıca eğer k reel ve f hemen hemen sürekli ise kf hemen hemen sürekli dir. Böylece bütün hemen hemen sürekli fonksiyonların kümesi bir vektör uzayıdır. Yine hemen hemen sürekli dönüşümlerin bileşkesinin de hemen hemen sürekli olduğunu görmek mümkündür.

Aslında sürekliliğin dört tipinden bahsedilebilir:

Tip I: $x_n \rightarrow x \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(x)$

Tip II: $x_n \rightarrow x \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow{hhy} f(x)$

Tip III: $x_n \xrightarrow{hhy} x \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(x)$

Tip IV: $x_n \xrightarrow{hhy} x \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow{hhy} f(x)$

Tip I sürekli ve Tip IV hemen hemen sürekli.

Tip III $\Rightarrow$ Tip I $\Rightarrow$ Tip II

Tip III $\Rightarrow$ Tip IV $\Rightarrow$ Tip II

elde edilir.

Fakat genel de süreklilik ve hemen hemen süreklilik arasında bir ilgi yoktur. Bağıntı, belli koşullar altında anlaşılır. Açıkça, bu aşağıdaki iki teoremdedir.

Teorem 5.1.

Eğer f lineer bir dönüşüm ise o zaman süreklilik hemen hemen sürekliliği gerektirir fakat lineer olmayan dönüşümler için bu geçerli olmaz.

İspat: Sürekliliğin hemen hemen sürekliliği gerektirdiği lineer dönüşümler için açıktır.

$$[fx](s) = \int_0^1 x^2(t) dt$$

ile tanımlı $f : L^2[0,1] \rightarrow [0,1]$ lineer olmayan dönüşümü düşünelim. (x_n) , $L^2[0,1]$ de x e yakınsayan bir dizi olsun. $N = \sup_n \|x_n - x\|^2$ iken

$$\begin{aligned} \|fx_n - fx\|^2 &= \int_0^1 \left(\int_0^1 (x_n^2(t) - x^2(t)) dt \right)^2 ds \\ &\leq \int_0^1 \left(\int_0^1 (x_n(t) - x(t))^2 dt \right) \left(\int_0^1 (x_n(t) - x(t))^2 dt \right) ds \\ &\leq N \|x_n - x\|^2 \end{aligned}$$

elde edilir.

f nin sürekliliği yukarıdaki eşitsizlikten görülür.

Dikkat edilirse, eğer $x_n = \sin n\pi t$ ise o zaman $x_n \xrightarrow{hly} 0$ dır fakat tüm n ler için $\|fx_n\| = \frac{1}{2}$ ve böylece $f(x_n) \not\rightarrow 0$ dır.

Buradan f hemen hemen sürekli değildir ve bu teoremin ispatını tamamlar. Ayrıca görülebilir ki, hemen hemen süreklilik sürekliliği gerektirmez. Bu sebeple süreklilik ve hemen hemen sürekliliğin hangi koşullar altında denk olduğu sorusu akla gelmektedir. Bu sorunun yanıtı aşağıdaki teoremdedir verilmiştir.

Teorem 5.2.

$f : X \rightarrow Y$ olsun. Süreklilik ve hemen hemen süreklilik, k da düzgün olan

$$\left\| \frac{f(x_k) + f(x_{k+1}) + \dots + f(x_{k+n-1})}{n} - f(x_n) \right\| \rightarrow 0$$

koşulu altında denktir.

İspat: Gerek şart: f koşulu sağlamasının yanı sıra sürekli de olsun. $x_n \rightarrow x$ verilsin. O zaman $\|fx_n - fx\| \rightarrow 0$ ve k da düzgün iken

$$\left\| \frac{\sum_{i=0}^n f(x_{i+k})}{n} - f(x_n) \right\| \rightarrow 0$$

olur.

Şimdi k da düzgün iken

$$\left\| \frac{\sum_{i=0}^{k-1} f(x_{i+k})}{n} - f(x) \right\| \leq \left\| \frac{\sum_{i=0}^{k-1} f(x_{i+k})}{n} - f(x_n) \right\| + \|f(x_n) - f(x)\| \rightarrow 0$$

yazılır ve böylece f hemen hemen sürekli olur.

Yeter şart: $x_n \rightarrow x$ ve f , $x \in X$ de hemen hemen sürekli olsun ve koşul sağlansın. O zaman, k da düzgün ve $n \rightarrow \infty$ iken

$$\left\| \frac{\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+k})}{n} - f(x_n) \right\| \rightarrow 0$$

olur. Ayrıca

$$\|fx_n - fx\| \leq \left\| \frac{\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+k})}{n} - f(x_n) \right\| + \left\| \frac{\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+k})}{n} - f(x_n) \right\| \rightarrow 0$$

ve böylece f süreklidir.

Tıpkı hemen hemen süreklilik kavramındaki gibi aşağıdaki biçimde hemen hemen sınırlılık tanımlanabilir.

Eğer tüm n , k lar için

$$\left\| \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{k+i}) \right\| \leq M$$

olacak şekilde sabit bir $M > 0$ sayısı varsa $f : X \rightarrow Y$ dönüşümü hemen hemen sınırlı olarak ifade edilir.

Şimdi aşağıdaki teorem elde edilebilir.

Teorem 5.3.

Hemen hemen sınırlılık ile bilinen fonksiyonların sınırlılığı denktir.

İspat: Görülür ki,

$$\|f(x_k)\| = \sup_{i,k} \left\| \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{k+i}) \right\| \leq \sup_{n,k} \left\| \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{k+i}) \right\|$$

ve

$$\sup_{n,k} \left\| \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{k+i}) \right\| \leq \sup_n \frac{\sup_k \|f(x_k)\|}{n} \sum_{i=0}^{n-1} 1 = \sup_k \|f(x_k)\|$$

yazılır.

Sonuç, yukarıdaki iki eşitsizlikten çıkar.

Tıpkı yakınsak dizilerin Cauchy ile ilgili olması gibi, hemen hemen yakınsaklığın hemen hemen Cauchy ile ilgili olduğunu düşünmek doğaldır.

Şimdi bu kavram ifade edilebilir.

X bir normlu lineer uzay olsun. Eğer k da düzgün ve $m, n \rightarrow \infty$ iken

$$\left\| \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} x_{k+i} - \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} x_{k+i} \right\| \rightarrow 0$$

oluyorsa X deki bir (x_n) dizisi hemen hemen Cauchy olarak ifade edilir.

Teorem 5.4.

k da düzgün olan $\left\| \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} x_{k+i} - x_n \right\| \rightarrow 0$ koşulu altında; (x_n) hemen hemen

Cauchy olsun. O zaman (x_n) Cauchydir ve tersi doğrudur.

İspat: (x_n) hemen hemen Cauchy olsun ve koşul sağlansın. Bu durumda

$$\|x_m - x_n\| \leq \left\| \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} x_{k+i} - x_n \right\| + \left\| \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} x_{k+i} - \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} x_{k+i} \right\| + \left\| \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} x_{k+i} - x_m \right\|$$

elde edilir. Böylece (x_n) Cauchydir.

(x_n) Cauchy olsun ve koşul sağlansın. O zaman

$$\left\| \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} x_{k+i} - \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} x_{k+i} \right\| \leq \left\| \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} x_{k+i} - x_n \right\| + \|x_n - x_m\| + \left\| \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} x_{k+i} - x_m \right\|$$

bulunur. Buradan (x_n) hemen hemen Cauchydir. İspat tamamlanır.

Teorem 5.5.

Hemen hemen yakınsak dizi, hemen hemen Cauchydir.

İspat: (x_n) hemen hemen yakınsak olsun. O zaman aşağıdaki eşitsizlikten sonuç çıkar:

$$\left\| \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} x_{k+i} - \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} x_{k+i} \right\| \leq \left\| \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} x_{k+i} - x \right\| + \left\| \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} x_{k+i} - x \right\|$$

Şimdi şu tanımı vermek mümkündür:

Eğer X deki her dizi hemen hemen yakınsak bir alt diziye sahip ise bir X Banach uzayı hemen hemen kompakttır diye ifade edilir.

Bu ispatı tamamlar.

Teorem 5.6.

Bir hemen hemen kompakt uzayın hemen hemen sürekli görüntüsü hemen hemen kompakttır.

İspat: X ve Y normlu lineer uzaylar olsun. K , X in hemen hemen kompakt bir alt uzayı ve $f : X \rightarrow Y$ hemen hemen sürekli olsun. $f(K) = \{f(x) : x \in K\}$ nın da kompakt olduğunu göstermek gereklidir. $f(x_n)$, $f(K)$ da bir dizi olsun. O zaman (x_n) , K da bir dizidir. K hemen hemen kompakt olduğundan $x \in X$ e hemen hemen yakınsayan bir (x_{n_k}) alt dizisi vardır. Dikkat edilirse $(f(x_{n_k}))$, $f(x_n)$ nin bir alt dizisidir. f hemen hemen sürekli ve $x_{n_k} \xrightarrow{hhy} x$ olduğundan $f(x_{n_k}) \xrightarrow{hhy} f(x)$ elde edilir.

Böylece $f(K)$ hemen hemen kompakt olur ve bu ispatı tamamlar.

KAYNAKLAR

- Banach, S., 1932. *Théorie Des Opérations Linéaires*. Warsaw. 254.
- Buck, R.C., 1953. Generalized asymptotic density. *Amer. J. Math.*, **75**:335-346.
- Choudhary, B., Nanda, S., 1989. *Fuctional Analysis with Applications*, Wiley Eastern Ltd&New Age International, New Delhi.
- Das, G., Kuttner, B., Nanda, S., 1984. Some sequence spaces and absolute almost convergence, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **283**(2): 729-739.
- Das, G., Kuttner, B., Nanda, S., 1991. On absolute almost convergence. *J. Math. Anal. Appl.*, **162**(1): 50-56.
- Das, G., Mishra, S. K., 1988. Absolute almost convergence with an index. *Rend. Mat. Appl. (7)*, **8**(4): 501-510.
- Das, G., Nanda, S., 1992. Absolute almost convergence, *Indian Journal of Mathematics*, **34**: 99-110.
- Duran, D., 1972. Infinite matrices and Almost Convergence. *Math. Zeit.*, **128** :75-83.
- Eizen, C., Laush, G., 1969. Infinite matrices and almost convergence. *Math. Japonicae*, **14**: 137-143.
- Fekete, M., 1911. Zur theorie der divergenten reihen. *Math. ès Termezs Èrtesitö (Budapest)*, **29**, 719-726.
- Hardy, G. H., 1949. *Divergens Series*. Oxford University Press, London.
- Jalal, T., 2004. Absolute σ -almost convergence with an index. *Pure Appl. Math. Sci.*, **59**(1-2): 63-70.
- King, J. P., 1966. Almost summable sequneces, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **17**(6): 1219-1225.
- Kurtz, J. C., 1972. Almost convergence in Banach space. *Tohoku Math. J.*, **24**(3): 389-399
- Lorentz, G. G., 1948. A contribution to the theory of divergent sequences. *Acta Math.*, **80**: 167-190.
- Mishra, B. P., Jaiswal, M. R., 2004/05. Some generalizations on sequence spaces and absolute almost convergence. *J. Orissa Math. Soc.*, **23/24**: 40-52.
- Maddox, I. J., 1970. *Elements of Functional Analysis*, Cambridge Universtiy Press, London.

- Maddox, I. J., 1978. A New Type of Convergence. *Math. Proc. Camb. Philos. Soc.* , **83**: 61-64.
- Maddox, I. J., 1979. On strong almost convergence. *Math. Proc. Camb. Philos. Soc.* , **85**: 345-348.
- Maddox, I. J., 1983. FK spaces which include strongly summable sequences. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, **93**: 131-135.
- Nakano, H., 1953. Concave modulars. *J. Math. Soc. Japan*, **5**:29-49.
- Nanda, S., 1984. Some paranormed sequence spaces, *Rendiconti di Matematica* **7**, **4**(1): 11-19.
- Nanda, S., 1985. Absolute almost convergence and absolute almost summability, *Rend. Mat. (7)*, **5**(1-2). 41-49.
- Nanda, S., 1987. Strongly almost summable and strongly almost convergent sequences. *Acta Math.*, **49**: 71-76.
- Nanda, S., 1998. Absolute and strong almost convergence with indices defined by moduli, *Journal of the Indian Math. Soc.*, **65**(1-4): 191-196.
- Nanda, S., 2004. Almost continuity and almost compactness, *Journal and Indian Math. Soc.*, **71**(1-4): 227-232.
- Ruckle, W. H., 1973. FK spaces in which the sequence of coordinate vectors is bounded. *Canad. J. Math.*, **25**:973-978.
- Savaş, E., 1990. Almost convergence and Almost summability, *Tamkang J. Math.*, **21**(4): 327-332.
- Schaefer, P., 1969. Almost convergent and almost summable sequences, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **20**: 51-54.
- Shaw, Sen-Yen, Lin, Su-Hui, 2007. Strong and absolute almost-convergence of vector functions and related Tauberian theorems. *J. Math. Anal. Appl.*, **334**(2): 1073-1087.
- Şevli, H., 1999. *Kuvvetli ve Mutlak Hemen Hemen Yakınsaklığın Bazı Genelleştirilmesi*, Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yüksek Lisans Tezi, Van.
- Tateoka, J, 2006. Absolute convergence of double Walsh-Fourier series. *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **72**(1-2): 101-115.

Thorpe, B., 1981. An extension of Kuttner's theorem, *Bull. London Math. Soc.*, **13**: 301-302.

Temel, C., 1996. *Mutlak Hemen Hemen Yakınsaklık Yardımıyla Tanımlanan Dizi Uzayları*, Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yüksek Lisans Tezi, Van.

ÖZ GEÇMİŞ

1980 yılında Van'da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Van'da tamamladı. 1999 yılında Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü kazandı ve 2003 yılında da mezun oldu. 2005 yılında Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nde Yüksek Lisans eğitimine başladı. Evli olup halen bir kamu kuruluşunda görev yapmaktadır.