

**ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

DOKTORA TEZİ

**ÜÇ PARAMETREYE BAĞLI İKİ KATLI SİNGÜLER İNTEGRALLERİN
YAKINSAKLIĞI**

Mine MENEKŞE YILMAZ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**ANKARA
2011**

Her hakkı saklıdır

ÖZET

Doktora Tezi

ÜÇ PARAMETREYE BAĞLI İKİ KATLI SİNGÜLER İNTEGRALLERİN YAKINSAKLIĞI

Mine MENEKŞE YILMAZ

Ankara Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof.Dr. Ertan İBİKLİ

Bu tez üç bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde, tezde gerekli olan bazı kavramlar, tanımlar ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, üç parametreye bağlı konvolüsyon tipli singüler integral operatör ailesinin $L^1_{2\pi}$ uzayında sürekli olduğu ispatlandıktan sonra bu operatör yardımıyla $L^1_{2\pi}$ uzayındaki f fonksiyonunun karakteristik noktalardaki yakınsaklıkları incelenmiştir.

Mart 2011, 78 sayfa

Anahtar Kelimeler : İntegral operatör ailesi, genelleştirilmiş Lebesgue noktası, d-noktası, iki değişkenli Lebesgue-süreklilik modülü, radyal fonksiyon.

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

THE CONVERGENCE OF TWO DIMENSIONAL SINGULAR INTEGRAL DEPENDING ON THREE PARAMETERS

Mine MENEKŞE YILMAZ

Ankara University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Prof.Dr. Ertan İBİKLİ

This thesis consists of three chapters.

The first chapter is devoted to the introduction.

The second chapter contains some notions, definitions and theorems which are needed in the thesis.

In the third chapter, after proving the continuity of the convolution type singular integral operators family depending on three parameters in the space $L^1_{2\pi}$, by means of these operators, the convergences on the characteristic points of f function in the space $L^1_{2\pi}$ are investigated.

March 2011, 78 pages

Key Words: Family of integral operators, generalized Lebesgue points, d-points, two variable Lebesgue modulus of continuity, radial function.

TEŞEKKÜR

Bu alıőmanın oluőmasında beni yönlendiren, araőtırmaların her aőamasında bilgi, öneri ve yardımlarımı esirgemeyerek çalıőmanın ilerlemesinde katkıda bulunan danışman hocam sayın Prof. Dr. Ertan İBİKLİ (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü)' ye , çalıőmalarım süresince maddi manevi desteklerini esirgemeyen sevgili annem, babam ve sevgili kardeőim Muhsin'e, çalıőmalarım boyunca birçok fedakarlık gösteren ve en büyük destekçim olan eőim Berkan'a en derin duygularla teşekkür ederim.

Mine MENEKŞE YILMAZ

Ankara, Mart 2011

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
SİMGELER DİZİNİ	v
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIM ve TEOREMLER	6
2.1 İntegral Operatör Ailesi	6
3. $L^1_{2\pi}$ UZAYINDA RADYAL ÇEKİRDEKLİ KONVOLÜSYON TİPLİ SİNGÜLER İNTEGRAL OPERATÖR AİLESİNİN KARAKTERİSTİK NOKTALARDA YAKINSAKLIĞI	24
3.1 Operatörün Varlığı	24
3.2 Karakteristik Noktalarda Yakınsaklık	26
KAYNAKLAR	75
ÖZGEÇMİŞ	78

SİMGELER DİZİNİ

Λ	İndis kümesi
$\langle -\pi, \pi \rangle$	Reel sayıların yarı açık, açık veya kapalı bir aralığı
$\langle -\pi, \pi \rangle \times \langle -\pi, \pi \rangle$	\mathbb{R}^2 de bir alt küme
$\langle -\pi, \pi; -\pi, \pi \rangle$	$\langle -\pi, \pi \rangle \times \langle -\pi, \pi \rangle = D$
$L(f; x, y, \lambda)$	λ parametresine bağlı iki değişkenli lineer integral operatör
$\omega(f, \delta)$	f fonksiyonunun Lebesgue süreklilik modülü
$ x $	$x \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere \mathbb{R}^2 de Öklid uzaklığı
\mathbb{R}_0^+	$\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$
$K_t(t, s, \lambda)$	K fonksiyonunun t değişkenine göre diferansiyeli

1. GİRİŞ

Yaklaşım teorininin temel problemlerinden birisi, verilen bir f fonksiyonunu kendisinden daha iyi özelliklere sahip olan fonksiyonlar dizisinin limiti biçiminde gösterebilmektir. Burada iyi özellikleri olan fonksiyonlardan kasıt; polinomlar, tam fonksiyonlar, türevlenebilen fonksiyonlardır.

1885 yılında Weierstrass iki temel teorem ispatlamıştır.

İlkinde, kapalı ve sınırlı bir aralık üzerinde tanımlı, sürekli bir fonksiyonun, polinomlar dizisinin limiti biçiminde gösterilebileceğini ispatlamıştır; yani,

$$f \in C[a, b] \iff \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) = f(x)$$

olacak biçimde bir (P_n) polinom dizisinin varlığını göstermiştir.

İkincisinde de f fonksiyonu, 2π periyodlu, sürekli bir fonksiyon ise f fonksiyonunu trigonometrik bir polinom dizisinin limiti biçiminde ifade edilebileceğini ispatlamıştır, yani,

$$f \in C[-\pi, \pi] \iff \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x) = f(x)$$

olacak biçimde bir (T_n) trigonometrik polinom dizisinin var olduğunu göstermiştir.

Bu teoremler daha sonraki yıllarda Yaklaşım Teorisinin temel teoremlerini oluşturmuştur.

Yaklaşım problemi, integrallenebilen fonksiyonlar sınıfında düşünüldüğünde Lebesgue ölçülebilir fonksiyonların, integralleri, Lebesgue ölçüsü sıfır olan kümenin dışında göz önüne alındığında, bu sınıftan alınan bir fonksiyona yakınsayan aileleri veya dizileri, bir integral ailesi veya dizisi biçiminde almak daha uygun olmaktadır.

İntegrallenebilen fonksiyonlar sınıfı üzerinde dönüşüm yapan lineer bir integral operatör;

$$L(f; x) = \int_D f(t) K(t, x) dt, \quad x \in D \quad (1.1)$$

olarak verilebilir. Burada $K(t, x)$ fonksiyonuna integral operatörün çekirdeği denir.

(1.1) denkleminde Λ indis kümesi olmak üzere $\lambda \in \Lambda$ iken $K(t, x, \lambda)$ çekirdekler ailesi ele alınırsa,

$$L_\lambda(f; x) = \int_D f(t) K(t, x, \lambda) dt, \quad x \in D \quad (1.2)$$

biçiminde integral operatör ailesi elde edilir.

(1.2) denklemi özel olarak $K(t, x, \lambda) = H(t - x, \lambda)$ seçilmesi ile

$$L_\lambda(f; x) = \int_D f(t) H(t - x, \lambda) dt, \quad x \in D \quad (1.3)$$

biçiminde konvolüsyon tipli integral operatör ailesi elde edilir.

Matematiğin ve fiziğin birçok dalında bu tip operatörlerle karşılaşılır.

Konvolüsyon tipli integraller, yaklaşımlar teorisinde büyük öneme sahiptir. Çünkü konvolüsyon tipli integraller, H çekirdek fonksiyonunun iyi özelliklerini, konvolüsyon işlemi sonunda elde edilen fonksiyona (kaıtsal) olarak taşırlar. Bu özellik çeşitli alanlarda karşılaşılan problemlerin konvolüsyon tipli integrallerin ve yaklaşımlar teorisinin yardımıyla çözülebileceği fikrini ortaya çıkarmıştır. Hilbert dönüşümü, Cauchy integrali, Riesz integrali, konvolüsyon tipli singüler integrallere örnek olarak verilebilir. (Stein, 1970, Stein-Weiss, 1971).

Uygulama alanlarında karşılaşılan pozitif çekirdekli konvolüsyon tipli integral operatör aileleri aşağıdaki gibidir:

1) Tanım bölgesi $D = (-\pi, \pi)$, indis kümesi $\Lambda = (0, 1)$ ve λ_0 limit noktası 0,

$H_\lambda(t-x)$ fonksiyonu,

$$H_\lambda(t-x) = \frac{1-\lambda^2}{1-2\lambda\cos(t-x)+\lambda^2}$$

şeklinde seçilmesi ile elde edilen integral (Poisson integrali), birim dairedeki Dirichlet probleminin çözümünü vermektedir.

2) Tanım bölgesi $D = (-\infty, \infty)$, indis kümesi $\Lambda = (0, \infty)$ ve λ_0 limit noktası 0, $H_\lambda(t-x)$ fonksiyonunun

$$H_\lambda(t-x) = \frac{\lambda}{\pi} \frac{1}{\lambda^2 + (t-x)^2}$$

olarak seçilirse Abel-Poisson integrali elde edilir. Bu integral üst yarı düzlemdeki Dirichlet probleminin çözümüdür.

3) Tanım bölgesi $D = (-\infty, \infty)$, indis kümesi $\Lambda = (0, \infty)$ ve limit noktasının $\lambda_0 = 0$, $H_\lambda(t-x)$ fonksiyonunun

$$H_\lambda(t-x) = \frac{\lambda}{\sqrt{\pi}} e^{-\lambda^2(t-x)^2}$$

olarak seçilmesi ile elde edilen Gauss-Weierstrass integrali, tüm reel ekseninde ısı denkleminin çözümüdür.

4) Tanım bölgesi $D = (-\pi, \pi)$, indis kümesi $\Lambda = \mathbb{N}$ ve $H_\lambda(t-x)$ fonksiyonunun

$$H_\lambda(t-x) = \frac{1}{2n\pi} \left[\frac{\sin \frac{n}{\pi}(t-x)}{\sin \frac{1}{2}(t-x)} \right]^2$$

seçilmesi ile elde edilen Fejer integrali, f fonksiyonunun Fourier serisinin kısmi toplamalarının aritmetik ortalamasını vermektedir.

Yukarıdaki örneklerden de görüldüğü gibi matematiğin ve fiziğin çeşitli alanlarında karşılaşılan problemlerin çözümleri, pozitif çekirdekli konvolüsyon tipli integrallerin ve yaklaşımlar teorisinin yardımıyla da elde edilir.

Yaklaşımlar teorisinde (1.3) tipindeki operatörleri ilk kullanan matematikçiler Fejer

(1900), Lebesgue (1900) ve Fatou (1906) dır. Bu matematikçiler D bölgesini, Λ indis kümesini ve $H(t - x, \lambda)$ çekirdek fonksiyonunu özel olarak seçerek (1.3) tipindeki operatörleri birer integral olarak göz önüne alıp hem integrallerin özelliklerini incelemişler hem de bazı yaklaşım problemlerinin çözümleri için yeterli koşullar elde etmişlerdir (Zygmund, 1959).

(1.3) tipindeki operatörlerin, parametreye bağlı operatörler dizisi olarak seçilmesi ilk olarak Romanovskiĭ ile başlamıştır. Daha sonra Faddeev (1936), Tandori (1954), Butzer (1960), Mamedov (1961), Sikkema (1983) ve Bardaro (1984) ile devam eden çekirdek fonksiyonunun bazı şartları sağlayan bir dizi olarak alınması ile ispatlanmış olan yakınsaklık teoremleri ile bu teorinin uygulama alanı genişlemiştir. Taberski (1962a), integrallenebilen fonksiyonlar sınıfındaki yaklaşım problemini iki parametreye bağlı olarak aileye genişlettikten sonra Gadjev (1963, 1968), Ryzewska (1973) ve Karlı (2006), iki parametreye bağlı singüler integrallerin ve türevlerinin yakınsaklık özellikleri için ve eğer bir yaklaşım varsa, bu yaklaşımın hızı için ispatlar vermişlerdir.

Taberski (1962b, 1964), $D = [a, b; c, d]$ dikdörtgeni üzerinde Lebesgue integrallenebilen tüm reel değerli fonksiyonların sınıfı üzerindeki yaklaşım problemini

$$L(f; x, y, \lambda) = \iint_D f(t, s) K(t - x, s - y; \lambda) dt ds, \quad (x, y) \in D \quad (1.4)$$

şeklinde üç parametreye bağlı, iki değişkenli bir singüler integral operatör ailesi yardımı ile vermiştir. Bu tip integraller çift katlı Fourier serilerinin yakınsaklık teorisinde temel rol oynamaktadır. Bu çalışmadan sonra Siudut (1988, 1989), (1.4) integral operatörünü kullanarak çift katlı singüler integrallerin yakınsaklığı ile ilgili ispatlar vermiştir.

(1.4) denklemi özel olarak

$$K(t - x, s - y; \lambda) = H\left(\sqrt{(t - x)^2 + (s - y)^2}; \lambda\right)$$

olacak şekilde seçilirse, bu formdaki çekirdeğe radyal çekirdek denir. Radyal çekirdekli singüler integral operatörler, matematiksel fizikte pek çok uygulama alanına sahip-

tir. Matematiksel fiziğin birçok denklemini için konulmuş başlangıç değeri veya sınır değeri probleminin çözümleri bu tür integrallerin yardımıyla verilmektedir.

Bu tezde, $K\left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda\right)$ radyal çekirdek fonksiyonuna sahip

$$L(f; x, y, \lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t, s) K\left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda\right) dt ds, (x, y) \in \langle -\pi, \pi; -\pi, \pi \rangle$$

biçiminde tanımlı üç parametreye bağlı, iki değişkenli konvolüsyon tipli singüler integral operatörler ailesi incelenmiştir. İlk olarak, bu singüler integraller ailesinin ürettiği operatörler ailesinin $L_{2\pi}^1$ uzayından $L_{2\pi}^1$ uzayına sınırlı bir dönüşüm olduğu gösterilmiştir. Daha sonra bu operatör ailesi yardımıyla $L_{2\pi}^1$ uzayındaki, Lebesgue anlamında integrallenebilen 2π periyodlu fonksiyonların, karakteristik noktalar denen, süreklilik noktası, Lebesgue noktası, d-noktası ve genelleştirilmiş Lebesgue noktasındaki yakınsaklıkları elde edilmiştir.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Tanım 2.1 $1 \leq p < \infty$ olsun. $(-\pi, \pi; -\pi, \pi) \subset \mathbb{R}^2$ üzerinde ölçülebilir,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x, y)|^p dx dy < \infty$$

koşulunu sağlayan ve sırası ile her bir değişkenine göre 2π periyodlu, tüm reel değerli fonksiyonlar uzayına, $(-\pi, \pi; -\pi, \pi)$ üzerinde p -inci kuvvetten Lebesgue integrallenebilir fonksiyonlar uzayı denir ve $L_{2\pi}^p$ ile gösterilir. Bu uzayda norm

$$\|f\|_{L_{2\pi}^p} = \left(\int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x, y)|^p dx dy \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 2.1 (Fubini Teoremi) $x, y \in (-\pi, \pi)$ ve $f(x, y)$, $(-\pi, \pi; -\pi, \pi) \subset \mathbb{R}^2$ uzayı üzerinde iki değişkenli ve ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Eğer

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x, y)| dy \right) dx$$

integralinin değeri sonlu bir sayı ise f fonksiyonu $(-\pi, \pi; -\pi, \pi)$ üzerinde Lebesgue anlamında integrallenebilirdir ve

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x, y)| dx dy = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x, y)| dy \right) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x, y)| dx \right) dy$$

eşitlikleri sağlanır.

(Butzer and Nessel 1971).

2.1 İntegral Operatör Ailesi

$D = \langle -\pi, \pi; -\pi, \pi \rangle$ ile \mathbb{R}^2 de açık, yarı açık veya kapalı bir kümeyi göstermek üzere; D üzerinde tanımlı, 2π periyodlu, Lebesgue anlamında integrallenebilen fonksiyonlar uzayı $L_{2\pi}^1$ ile gösterilsin. Bu uzay üzerinde dönüşüm yapan lineer bir integral operatör

$$L(f; x, y) = \iint_D f(t, s) H(t, s; x, y) dt ds, \quad (x, y) \in D \quad (2.1)$$

biçiminde verilebilir. Burada $H(t, s; x, y)$, $D \times D$ üzerinde tanımlı, özellikleri önceden bilinen bir fonksiyondur.

Eğer integral operatörün içindeki $H(t, s; x, y)$ fonksiyonu

$$H(t, s; x, y) = K\left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}\right)$$

şeklinde seçilirse,

$$L(f; x, y) = \iint_D f(t, s) K\left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}\right) dt ds, \quad (x, y) \in D \quad (2.2)$$

biçimindeki integral operatör elde edilir. Bu operatöre konvolüsyon tipli lineer integral operatör denir.

Tanım 2.2 $K \in L_{2\pi}^1$ olsun. Eğer $0 \leq \sqrt{x^2 + y^2} < \infty$ olmak üzere hemen hemen her yerde $K(x, y) = \Psi\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$ olacak biçimde bir $\Psi\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$ fonksiyonu varsa K fonksiyonuna radyaldır denir.

(Bochner 1949, Nessel, 1966).

Örnek 2.1 $\sqrt{x^2 + y^2}$, $e^{\sqrt{x^2 + y^2}}$ fonksiyonları radyal fonksiyonlardır.

Tanım 2.3 $\Lambda \subset \mathbb{R}_0^+$ bir indis kümesi olsun. $\lambda \in \Lambda$ olmak üzere,

$$L(f; x, y, \lambda) = \iint_D f(t, s) K\left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda\right) dt ds, \quad (x, y) \in D \quad (2.3)$$

biçimindeki integrale (x, y, λ) parametrelerine bağlı radyal çekirdekli konvolüsyon tipli singüler integral operatörler ailesi denir.

Butzer ve Nessel (1971) tarafından verilen bazı temel tanımları verelim:

Tanım 2.4 $\Lambda \subset \mathbb{R}_0^+$ indis kümesi ve λ_0 bu kümenin bir yığılma noktası olsun. $\lambda \in \Lambda$ olmak üzere $\{K(t; \lambda)\}$ fonksiyonlar kümesinin her bir elemanı

a) Her $\lambda \in \Lambda$ için $\int_{-\pi}^{\pi} |K(t; \lambda)| dt \leq M < \infty$ olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı var;

b) $\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \int_{-\pi}^{\pi} K(t; \lambda) dt = 1$

koşullarını sağlarsa bu kümeye (periyodik) çekirdek denir.

Tanım 2.5 $\{K(t; \lambda)\}$ çekirdek ailesi ilave olarak

a) Her $\lambda \in \Lambda$ için $\int_{-\pi}^{\pi} |K(t; \lambda)| dt \leq M < \infty$ olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı var;

b) $\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \left[\sup_{\delta \leq |t| \leq \pi} |K(t; \lambda)| \right] = 0$, ($0 < \delta < \pi$)

koşullarını da sağlarsa bu aileye yaklaşık birim (approximate identity) denir.

Şimdi Butzer ve Nessel (1971)' den faydalanarak aşağıdaki tanımları verelim:

Tanım 2.6 $\Lambda \subset \mathbb{R}_0^+$ indis kümesi ve $\lambda \in \Lambda$ olmak üzere, λ_0 bu kümenin bir yığılma noktası olsun. $\{K(\sqrt{t^2 + s^2}; \lambda)\}$ fonksiyon sınıfına

a) Her $\lambda \in \Lambda$ için $\iint_D |K(\sqrt{t^2 + s^2}; \lambda)| dt ds \leq M < \infty$ olacak şekilde bir M sayısı var;

b) Her $\lambda \in \Lambda$ için

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \iint_D K(\sqrt{t^2 + s^2}; \lambda) dt ds = 1$$

şartlarını sağlandığı takdirde çekirdek adı verilir.

Tanım 2.7 $\{K(\sqrt{t^2 + s^2}; \lambda)\}$ çekirdek ailesi, belirli bir (t_0, s_0) noktasında

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} K(\sqrt{t_0^2 + s_0^2}; \lambda) = \infty$$

özelliğini sağlarsa $\{K(\sqrt{t^2 + s^2}; \lambda)\}$ çekirdeği singüler çekirdek ve

$$L(f; x, y, \lambda) = \iint_D f(t, s) K(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda) dt ds, \quad (x, y) \in D$$

integral operatör ailesi ise konvolüsyon tipli iki değişkenli singüler integral operatör ailesi adını alır.

Tanım 2.8 $\{K(\sqrt{t^2 + s^2}; \lambda)\}$ singüler çekirdek ailesi, belirlenmiş her $\delta > 0$ sayısı için

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \left[\sup_{\delta \leq \sqrt{t^2 + s^2} \leq \pi} K(\sqrt{t^2 + s^2}; \lambda) \right] = 0$$

şartını sağlarsa yaklaşık birim (approximate identity) adını alır.

Tanım 2.9 $f \in L^1_{2\pi}$ olmak üzere $\delta > 0$ için

$$\omega_L(f, \delta) := \sup_{\sqrt{x^2+y^2} < \delta} \left\{ \iint_D |f(t+x, s+y) - f(t, s)| dt ds \right\}$$

ifadesine, f fonksiyonunun iki değişkenli Lebesgue süreklilik modülü denir.

D üzerinde süreklilik modülünün özelliklerini aşağıdaki üç teoremle ifade edebiliriz:

Teorem 2.2 $f \in L^1_{2\pi}$ ise

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega_L(f, \delta) = 0 \quad (2.3)$$

olur.

İspat. $f(t, s)$, D üzerinde Lebesgue anlamında integrallenebilir ise her pozitif ε sayısı için,

$$\int_{-\pi-\pi}^{\pi} \int_{-\pi-\pi}^{\pi} |f(t, s) - \Phi(t, s)| dt ds < \varepsilon$$

olacak şekilde 2π periyodlu, sürekli bir $\Phi(t, s)$ fonksiyonu vardır. (Taberski, 1970).

Buradan

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi-\pi}^{\pi} \int_{-\pi-\pi}^{\pi} |f(t+x, s+y) - f(t, s)| dt ds \\ & \leq \int_{-\pi-\pi}^{\pi} \int_{-\pi-\pi}^{\pi} |f(t+x, s+y) - \Phi(t+x, s+y)| dt ds \\ & \quad + \int_{-\pi-\pi}^{\pi} \int_{-\pi-\pi}^{\pi} |\Phi(t+x, s+y) - \Phi(t, s)| dt ds \\ & \quad + \int_{-\pi-\pi}^{\pi} \int_{-\pi-\pi}^{\pi} |f(t, s) - \Phi(t, s)| dt ds \\ & = \int_{-\pi+x-\pi+y}^{\pi+x} \int_{-\pi+y}^{\pi+y} |f(t, s) - \Phi(t, s)| dt ds \\ & \quad + \int_{-\pi-\pi}^{\pi} \int_{-\pi-\pi}^{\pi} |\Phi(t+x, s+y) - \Phi(t, s)| dt ds \\ & \quad + \int_{-\pi-\pi}^{\pi} \int_{-\pi-\pi}^{\pi} |f(t, s) - \Phi(t, s)| dt ds \end{aligned}$$

eşitsizliği yazılabilir.

Ayrıca Φ sürekli olduğundan

$$\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} < \delta \text{ iken } |\Phi(t+x, s+y) - \Phi(t, s)| < \frac{\varepsilon}{4\pi^2}$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon)$ sayısı seçilebilir.

Buna göre

$$\sup_{\sqrt{x^2+y^2} < \delta} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\Phi(t+x, s+y) - \Phi(t, s)| dt ds < \varepsilon$$

yazılabilir. Bu eşitsizlikleri göz önüne alırsak

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t+x, s+y) - f(t, s)| dt ds \\ & \leq \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t, s) - \Phi(t, s)| dt ds \\ & \quad + \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\Phi(t+x, s+y) - \Phi(t, s)| dt ds \\ & \quad + \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t, s) - \Phi(t, s)| dt ds \\ & \leq \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\sup_{\sqrt{x^2+y^2} < \delta} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t+x, s+y) - f(t, s)| dt ds \leq 3\varepsilon$$

bulunur. ■

Teorem 2.3 $f \in L_{2\pi}^1$ ve m bir doğal sayı olmak üzere

$$\omega_L(f, m\delta) \leq m\omega_L(f, \delta)$$

olur.

İspat. Süreklilik modülünün tanımını göz önüne alırsak

$$\omega_L(f, m\delta) = \sup_{\sqrt{x^2+y^2} \leq m\delta} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t+x, s+y) - f(t, s)| dt ds$$

şeklinde yazabiliriz. $x = mh$ ve $y = mk$ alınırsa

$$\begin{aligned} \omega_L(f, m\delta) &= \sup_{m\sqrt{h^2+k^2} \leq m\delta} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t+mh, s+mk) - f(t, s)| dt ds \\ &= \sup_{\sqrt{h^2+k^2} \leq \delta} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t+mh, s+mk) - f(t+(m-1)h, s+(m-1)k) \\ &\quad + f(t+(m-1)h, s+(m-1)k) - \dots + f(t+h, s+k) - f(t, s)| dt ds \\ &= \sup_{\sqrt{h^2+k^2} \leq \delta} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{r=1}^m [f(t+rh, s+rk) - f(t+(r-1)h, s+(r-1)k)] \right| dt ds \end{aligned}$$

olup buradan

$$\omega_L(f, m\delta) \leq \sup_{\sqrt{h^2+k^2} \leq \delta} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{r=1}^m |f(t+rh, s+rk) - f(t+(r-1)h, s+(r-1)k)| dt ds$$

elde edilir.

Burada $t+(r-1)h = z$ denir ve sonra z, t ile; h, x ile değiştirilir ve aynı şekilde $s+(r-1)k = \hat{z}$ denir ve \hat{z}, s ile h, y ile değiştirilirse,

$$\begin{aligned} \omega_L(f, m\delta) &\leq \sup_{\sqrt{x^2+y^2} \leq \delta} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{r=1}^m |f(t+x, s+y) - f(t, s)| dt ds \\ &\leq m \sup_{\sqrt{x^2+y^2} \leq \delta} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t+x, s+y) - f(t, s)| dt ds \\ &\leq m\omega_L(f, \delta) \end{aligned}$$

elde edilir. ■

Teorem 2.4 $f \in L_{2\pi}^1$ ve λ keyfi bir sayı olsun. Bu durumda

$$\omega_L(f, \lambda\delta) \leq (\lambda + 1)\omega_L(f, \delta)$$

olur.

İspat. $[\lambda]$ sayısı ile λ sayısının tam kısmı gösterilsin. Bu durumda $\lambda < [\lambda] + 1$ özelliğinden ve $\omega_L(f, \delta)$ fonksiyonunun artan bir fonksiyon olmasından

$$\omega_L(f, \lambda\delta) \leq \omega_L(f, ([\lambda] + 1)\delta)$$

eşitsizliği mevcuttur. Ayrıca $[\lambda] < \lambda$ ve $[\lambda] + 1$, bir tam sayı olması gözönüne alınırsa Teorem 2.3 den

$$\begin{aligned} \omega_L(f, \lambda\delta) &\leq \omega_L(f, ([\lambda] + 1)\delta) \\ &\leq ([\lambda] + 1)\omega_L(f, \delta) \end{aligned}$$

olduğu görülür. ■

Yaklaşımlar teorisinde integrallenebilen fonksiyonlara yaklaşım, bazı özel noktalarda araştırılır. Şimdi $D \subset \mathbb{R}^2$ üzerinde yaklaşımın araştırıldığı, **karakteristik noktalar** olarak da adlandırılan bu özel noktaların tanımlarını verelim.

Tanım 2.10 $f \in L^1_{2\pi}$ olmak üzere

$$\lim_{(h,r) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{hr} \int_{x_0}^{x_0+h} \int_{y_0}^{y_0+r} |f(t, s) - f(x_0, y_0)| dt ds = 0 \quad (2.4)$$

eşitliğinin sağlandığı (x_0, y_0) noktasına f fonksiyonunun *Lebesgue noktası* denir.

(2.4) eşitliğinde h yerine $-h$ alınırsa eşitlik

$$\lim_{(h,r) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{hr} \int_{x_0-h}^{x_0} \int_{y_0}^{y_0+r} |f(t, s) - f(x_0, y_0)| dt ds = 0$$

şekline gelir.

Yine (2.4) de r yerine $-r$ alınırsa eşitlik

$$\lim_{(h,r) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{hr} \int_{x_0}^{x_0+h} \int_{y_0-r}^{y_0} |f(t, s) - f(x_0, y_0)| dt ds = 0$$

şeklinde olacaktır.

Tekrar (2.4) de h ve r yerine, sırasıyla, $-h$ ve $-r$ alınırsa eşitlik

$$\lim_{(h,r) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{hr} \int_{x_0-h}^{x_0} \int_{y_0-r}^{y_0} |f(t, s) - f(x_0, y_0)| dt ds = 0$$

haline gelir. Bulunanları düzenlersek

$$\lim_{(h,r) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{hr} \int_{x_0-hy_0-r}^{x_0+hy_0+r} \int |f(t,s) - f(x_0,y_0)| dt ds = 0$$

ifadesi elde edilir.

Buradan açıktır ki her bir Lebesgue noktası için

$$\lim_{(h,r) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{hr} \int_{x_0-hy_0-r}^{x_0+hy_0+r} \int |f(t,s) - f(x_0,y_0)| dt ds = 0 \quad (2.5)$$

eşitliği geçerlidir. $f \in L^1_{2\pi}$ olmak üzere D bölgesinin hemen hemen her noktası f fonksiyonunun Lebesgue noktasıdır.

Bunu göstermek için

$$\Phi(x,y;h,r) = \frac{1}{hr} \int_0^h \int_0^r |f(x+t,y+s) - f(x,y)| dt ds$$

eşitliğini ele alalım.

$f \in L^1_{2\pi}$ olduğundan $\Phi \in L^1_{2\pi}$ dir. $\delta > 0$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \|\Phi\|_{L^1_{2\pi}} &= \frac{1}{hr} \int_{-\pi-\pi}^{\pi} \int_{-\pi-\pi}^{\pi} \left| \int_0^h \int_0^r |f(x+t,y+s) - f(x,y)| dt ds \right| dx dy \\ &= \frac{1}{hr} \int_0^h \int_0^r \left[\int_{-\pi-\pi}^{\pi} \int_{-\pi-\pi}^{\pi} |f(x+t,y+s) - f(x,y)| dx dy \right] dt ds \\ &\leq \frac{1}{hr} \int_0^h \int_0^r \left[\sup_{\sqrt{t^2+s^2} \leq \delta} \int_{-\pi-\pi}^{\pi} \int_{-\pi-\pi}^{\pi} |f(x+t,y+s) - f(x,y)| dx dy \right] dt ds \\ &= \frac{1}{hr} \int_0^h \int_0^r \omega_L(f,\delta) dt ds = \omega_L(f,\delta) \end{aligned}$$

ve

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega_L(f,\delta) = 0$$

olduğundan

$$\lim_{(h,r) \rightarrow (0,0)} \|\Phi(x, y; h, r)\|_{L^1_{2\pi}} = 0$$

elde edilir.

Bu da hemen hemen her (x, y) için

$$\lim_{(h,r) \rightarrow (0,0)} \Phi(x, y; h, r) = 0$$

olduğunu gösterir. $\Phi(x, y; h, r)$ fonksiyonunun tanımından D bölgesinin hemen hemen her noktasının Lebesgue noktası olduğu görülür.

Şimdi iki değişkenli fonksiyonlar için genelleştirilmiş Lebesgue noktası ve d-noktasının tanımını verelim:

Tanım 2.11 $f \in L^1_{2\pi}$ olsun. $0 \leq \alpha < 1$ için

$$\lim_{(h,r) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{h^{\alpha+1}r^{\alpha+1}} \int_0^h \int_0^r |f(t+x_0, s+y_0) - f(x_0, y_0)| dt ds = 0 \quad (2.6)$$

eşitliğinin sağlandığı (x_0, y_0) noktasına f fonksiyonunun genelleştirilmiş Lebesgue noktası denir.

Tanım 2.12 $f \in L^1_{2\pi}$ olmak üzere

$$\lim_{(h,r) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{hr} \int_0^h \int_0^r [f(t+x_0, s+y_0) - f(x_0, y_0)] dt ds = 0 \quad (2.7)$$

eşitliğinin sağlandığı (x_0, y_0) noktasına f fonksiyonunun d-noktası denir.

$f \in L^1_{2\pi}$ fonksiyonunun tüm Lebesgue noktalarının kümesi $L(f)$, tüm d- noktalarının kümesi de $D(f)$ ile gösterilirse, $h, r > 0$, bu durumda

$$\left| \frac{1}{hr} \int_{x_0}^{x_0+hy_0+r} \int_{y_0}^{x_0+hy_0+r} [f(t, s) - f(x_0, y_0)] dt ds \right| \leq \frac{1}{hr} \int_{x_0}^{x_0+hy_0+r} \int_{y_0}^{x_0+hy_0+r} |f(t, s) - f(x_0, y_0)| dt ds$$

eşitsizliği, her bir Lebesgue noktasının aynı zamanda d-noktası olduğunu gösterir.

Yani,

$$L(f) \subset D(f)$$

sağlanır.

$f \in L^1_{2\pi}$ fonksiyonu $(x, y) \in \langle -\pi, \pi; -\pi, \pi \rangle$ noktasında sürekli olsun. Bu takdirde $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ için $|t - x| < \delta$ ve $|s - y| < \delta$ olduğunda $|f(t, s) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$ sağlanır.

$h, r < \delta$ alınırsa,

$$\frac{1}{hr} \int_{x_0}^{x_0+hy_0+r} \int_{y_0}^{y_0+r} |f(t, s) - f(x_0, y_0)| dt ds < \varepsilon$$

elde edilir. Bu ise

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ r \rightarrow 0}} \frac{1}{hr} \int_{x_0}^{x_0+hy_0+r} \int_{y_0}^{y_0+r} |f(t, s) - f(x_0, y_0)| dt ds = 0$$

olduğunu gösterir. Yani $L^1_{2\pi}$ uzayında olan her f fonksiyonunun süreklilik noktası aynı zamanda onun Lebesgue noktasıdır. $f \in L^1_{2\pi}$ fonksiyonunun tüm süreklilik noktalarının kümesi $C(f)$ ile gösterilirse

$$C(f) \subset L(f) \subset D(f)$$

şeklinde bir ilişki olduğu görülür.

Taberski (1964) ve Lenze (1989), iki değişkenli fonksiyonlar için sınırlı salımlılık, monotonluk ve Stieltjes integrallenebilirlik kavramlarını aşağıdaki şekilde vermişlerdir:

$\varphi(x, y)$ fonksiyonu $D = [-\pi, \pi; -\pi, \pi]$ karesi üzerinde tanımlı ve sınırlı bir fonksiyon olsun. D nin bir parçalanması

$$P := \left\{ \begin{array}{l} -\pi = x_1 < x_2 < \dots < x_i < \dots < x_m < x_{m+1} = \pi \\ -\pi = y_1 < y_2 < \dots < y_j < \dots < y_n < y_{n+1} = \pi \end{array} \right\}$$

olsun.

$$\Delta\varphi(x_i, y_j) = \varphi(x_i, y_j) - \varphi(x_{i+1}, y_j) - \varphi(x_i, y_{j+1}) + \varphi(x_{i+1}, y_{j+1})$$

ifadesini göz önüne alalım.

$$V_P = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |\Delta\varphi(x_i, y_j)|$$

toplam formunu oluşturalım.

Tanım 2.13 P , D karesinin mümkün olan tüm parçalanmalarının kümesi olsun.

$$V_D(\varphi) = \sup_{p \in P} \left\{ \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |\Delta\varphi(x_i, y_j)| \right\}$$

genişletilmiş reel sayısına, $\varphi(x, y)$ fonksiyonunun D üzerinde toplam salınımı denir ve

$$V = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |d\varphi(x, y)|$$

ile gösterilir. Eğer $V_D(\varphi)$ toplamı, D karesinin mümkün olan her P parçalanması için düzgün sınırlı ise φ , D üzerinde sınırlı salınımlıdır denir. D üzerinde sınırlı salınımlı fonksiyonlar sınıfı $BV(D)$ ile gösterilir.

Eğer P nin herhangi bir parçalanması için

$$\Delta\varphi(x_i, y_j) \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n)$$

oluyorsa φ fonksiyonu D içinde monoton artandır denir. Bu durumda φ fonksiyonu sınırlı salınımlıdır ve

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |d\varphi(x, y)| = \varphi(-\pi, -\pi) - \varphi(\pi, -\pi) - \varphi(-\pi, \pi) + \varphi(\pi, \pi)$$

eşitliği sağlanır.

Bu eşitliğin sağlandığını göstermeden önce Stieltjes integralinin tanımını verelim.

$f(x, y)$ ve $\varphi(x, y)$ D üzerinde tanımlı iki fonksiyon olsun. D üzerindeki parçalanmaların bir dizisi P_k

$$P_k := \left\{ \begin{array}{l} -\pi = x_1^{(k)} < x_2^{(k)} < \dots < x_i^{(k)} < \dots < x_{m_k}^{(k)} < x_{m_k+1}^{(k)} = \pi \\ -\pi = y_1^{(k)} < y_2^{(k)} < \dots < y_j^{(k)} < \dots < y_{n_k}^{(k)} < y_{n_k+1}^{(k)} = \pi \end{array} \right\}$$

ve (ξ_i, η_j) , $[x_k, x_{k+1}; y_k, y_{k+1}]$ ($i = 1, 2, \dots, m_k$; $j = 1, 2, \dots, n_k$) dikdörtgenleri içinden bir nokta olsun.

$$S(P_k) = \sum_{i=1}^{m_k} \sum_{j=1}^{n_k} f(\xi_i^{(k)}, \eta_j^{(k)}) \Delta\varphi(x_i^{(k)}, y_j^{(k)})$$

toplamını yazalım.

Eğer herhangi bir P_k dizisi ve keyfi bir (ξ_i, η_j) için

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S(P_k) = I$$

sonlu limiti var ise f fonksiyonu φ fonksiyonuna göre D üzerinde Stieltjes integralenebilir denir ve I sayısı f nin Stieltjes integrali denir. Bu integral

$$(\mathbf{S}) \int_{-\pi-\pi}^{\pi} \int_{-\pi-\pi}^{\pi} f(x, y) d\varphi(x, y)$$

şeklinde gösterilir.

İspata dönecek olursak, burada $f(\xi_{i,j}^{(k)}, \eta_{i,j}^{(k)}) = 1$ sabit fonksiyon olsun ve bir P parçalanması için $\Delta\varphi(x_i, y_j) \geq 0$ olduğunu göz önüne alarak toplamları açarsak

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m_k} \sum_{j=1}^{n_k} 1 |\Delta\varphi(x_i, y_j)| &= \sum_{i=1}^{m_k} \sum_{j=1}^{n_k} \Delta\varphi(x_i, y_j) \\ &= \sum_{i=1}^{m_k} \Delta\varphi(x_i, y_1) + \Delta\varphi(x_i, y_2) + \dots + \Delta\varphi(x_i, y_{n_k}) \\ &= \Delta\varphi(x_1, y_1) + \Delta\varphi(x_1, y_2) + \dots + \Delta\varphi(x_1, y_{n_k}) \\ &\quad + \Delta\varphi(x_2, y_1) + \Delta\varphi(x_2, y_2) + \dots + \Delta\varphi(x_2, y_{n_k}) \\ &\quad + \dots \\ &\quad + \Delta\varphi(x_{m_k-1}, y_1) + \Delta\varphi(x_{m_k-1}, y_2) + \dots + \Delta\varphi(x_{m_k-1}, y_{n_k}) \\ &\quad + \Delta\varphi(x_{m_k}, y_1) + \Delta\varphi(x_{m_k}, y_2) + \dots + \Delta\varphi(x_{m_k}, y_{n_k}) \end{aligned}$$

olur.

Ayrıca $\Delta\varphi(x_i, y_j) = \varphi(x_i, y_j) - \varphi(x_{i+1}, y_j) - \varphi(x_i, y_{j+1}) + \varphi(x_{i+1}, y_{j+1})$ olduğunu

göz önüne aldığımızda

$$\begin{aligned}
& [\varphi(x_1, y_1) - \varphi(x_2, y_1) - \varphi(x_1, y_2) + \varphi(x_2, y_2)] \\
& + [\varphi(x_1, y_2) - \varphi(x_2, y_2) - \varphi(x_1, y_3) + \varphi(x_2, y_3)] \\
& + \dots \\
& + [\varphi(x_1, y_{n_k}) - \varphi(x_2, y_{n_k}) - \varphi(x_1, y_{n_k+1}) + \varphi(x_2, y_{n_k+1})] \\
& \\
& + [\varphi(x_2, y_1) - \varphi(x_3, y_1) - \varphi(x_2, y_2) + \varphi(x_3, y_2)] \\
& + [\varphi(x_2, y_2) - \varphi(x_3, y_2) - \varphi(x_2, y_3) + \varphi(x_3, y_3)] \\
& + \dots \\
& + [\varphi(x_2, y_{n_k}) - \varphi(x_3, y_{n_k+1}) - \varphi(x_2, y_{n_k+1}) + \varphi(x_3, y_{n_k+1})] \\
& + \dots \\
& \\
& + [\varphi(x_{m_k-1}, y_1) - \varphi(x_{m_k}, y_1) - \varphi(x_{m_k-1}, y_2) + \varphi(x_{m_k}, y_2)] \\
& + [\varphi(x_{m_k-1}, y_2) - \varphi(x_{m_k+1}, y_2) - \varphi(x_{m_k-1}, y_3) + \varphi(x_{m_k}, y_3)] \\
& + \dots \\
& + [\varphi(x_{m_k-1}, y_n) - \varphi(x_{m_k}, y_{n_k}) - \varphi(x_{m_k-1}, y_{n_k+1}) + \varphi(x_{m_k}, y_{n_k+1})] \\
& \\
& + [\varphi(x_{m_k}, y_1) - \varphi(x_{m_k+1}, y_1) - \varphi(x_{m_k}, y_2) + \varphi(x_{m_k+1}, y_2)] \\
& + \dots \\
& + [\varphi(x_{m_k}, y_{n_k}) - \varphi(x_{m_k+1}, y_n) - \varphi(x_{m_k}, y_{n_k+1}) + \varphi(x_{m_k+1}, y_{n_k+1})]
\end{aligned}$$

olup gerekli sadeleştirmelerden sonra

$$\sum_{i=1}^{m_k} \sum_{j=1}^{n_k} |\Delta\varphi(x_i, y_j)| = \varphi(x_1, y_1) - \varphi(x_{m_k+1}, y_1) - \varphi(x_1, y_{n_k+1}) + \varphi(x_{m_k+1}, y_{n_k+1})$$

bulunur.

$\Delta\varphi(x_i, y_j)$ sınırlı salınımlı olduğundan

$$\sum_{i=1}^{m_k} \sum_{j=1}^{n_k} |\Delta\varphi(x_i, y_j)| < \infty$$

olduğu açıktır.

Stieltjes integrali gereği

$$\int_{x_1^{(k)}}^{x_{m_k+1}^{(k)}} \int_{y_1^{(k)}}^{y_{n_k+1}^{(k)}} |d\varphi(x_i, y_j)| = \varphi(x_1, y_1) - \varphi(x_{m_k+1}, y_1) - \varphi(x_1, y_{n_k+1}) + \varphi(x_{m_k+1}, y_{n_k+1})$$

olduğu görülür. Burada sınırlar düzenlenirse

$$\int_{-\pi-\pi}^{\pi} \int_{-\pi-\pi}^{\pi} |d\varphi(x, y)| = \varphi(-\pi, -\pi) - \varphi(\pi, -\pi) - \varphi(-\pi, \pi) + \varphi(\pi, \pi)$$

elde edilir.

Teorem 2.5 (Natanson Lemması) f fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde tanımlı, integralenebilir olsun ve

$$M = \sup_{0 < h \leq b-a} \left\{ \left| \frac{1}{h} \int_a^{a+h} f(t) dt \right| \right\} < \infty$$

eşitsizliği sağlansın. Ayrıca g fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde tanımlı, negatif olmayan, integrali mevcut ve azalan bir fonksiyon olsun. Bu durumda,

$$\int_a^b f(t) g(t) dt$$

integrali mevcuttur ve

$$\left| \int_a^b f(t) g(t) dt \right| \leq M \int_a^b g(t) dt$$

eşitsizliği geçerlidir.

Taberski (1962a), yukarıdaki şekilde verdiği Natanson Lemması'nın iki değişkenli fonksiyonlar için bir genellemesini (Taberski, 1964) de aşağıdaki şekilde vermiştir:

Lemma 2.1 $\varphi(x, y; \sigma)$ fonksiyonu, $D = [a, b; c, d]$ üzerinde negatif olmayan, x ve y değişkenlerine göre ayrı ayrı artmayan ve sınırlı olsun. Ayrıca $\Delta\varphi(x, y) \geq 0$ şartı sağlansın. Eğer $f(x, y)$, D üzerinde Lebesgue anlamında integrallenebilirse

$$K = \sup_{\substack{a < x \leq b \\ c < y \leq d}} \left| \frac{1}{(x-a)(y-c)} \int_a^x \int_c^y f(t, s) dt ds \right| < \infty$$

olmak üzere

$$\left| \iint_D f(x, y) \varphi(x, y) dx dy \right| \leq K \iint_D \varphi(x, y) dx dy$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 2.6 (P.I. Romanovski) $K_n(t, x)$ pozitif bir çekirdek ve belirlenmiş her n ve x için $K_n(t, x)$, t nin fonksiyonu olarak $[a, x]$ aralığında t ye göre artan ve $[x, b]$ aralığında azalan bir fonksiyon olsun. $\frac{d}{dx} \left[\int_a^x f(t) dt \right] = f(x)$ olmak üzere Lebesgue integrallenebilir bir $f(t)$ fonksiyonu için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) K_n(t, x) dt = f(x)$$

olur.

(Natanson, 1964).

Tanım 2.14 Eğer $|\Phi(t, x)| \leq \Psi(t, x)$ eşitsizliği var ve belirlenmiş x için $\Psi(t, x)$, $[a, x]$ aralığında artan ve $[x, b]$ aralığında azalan ise $\Psi(t, x)$ fonksiyonuna, $\Phi(t, x)$ fonksiyonunun konveks majorantıdır denir.

Teorem 2.7 (D. K. Faddeev) $K_n(t, x)$ çekirdeği her n için

$$\int_a^b \Psi_n(t, x) dt < M(x) < \infty \quad (M(x) \text{ yalnızca } x \text{ e bağlı})$$

olacak şekilde $\Psi_n(t, x)$ konveks majorant fonksiyonuna sahip olsun. Bu durumda x noktası f nin Lebesgue noktası ise bu noktada

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) K_n(t, x) dt = f(x)$$

eşitliği geçerlidir.

(Natanson, 1964).

Taberski 1964 yılında iki değişkenli fonksiyonlar için tanımladığı

$$J(f; \sigma) = \int_a^b \int_c^d f(x, y) \varphi(x, y; \sigma) dx dy$$

biçimindeki singüler integral operatör ailesi için (a, c) noktasının d -noktası olması durumunda yakınsaması ile ilgili Romanovskiî tipi; (a, c) noktasının Lebesgue noktası olması durumundaki yakınsaması halinde de Faddeev tipinde olan aşağıdaki teoremleri vermiştir:

Teorem 2.8 $\varphi(x, y; \sigma)$ fonksiyonu, negatif olmayan, $D = [a, b; c, d]$ üzerinde x ve y e göre ayrı ayrı artmayan ve $\Delta\varphi(x, y) \geq 0$ olsun.

$$\lim_{\sigma \rightarrow \sigma_0} \int_a^\alpha \int_c^\gamma \varphi(x, y; \sigma) dx dy = 1 \quad (\sigma \in \Lambda)$$

ve belirlenmiş α, γ ($a < \alpha \leq b; c < \gamma \leq d$) için

$$\overline{\lim}_{\sigma \rightarrow \sigma_0} \varphi(\alpha, c; \sigma) < \infty, \quad \overline{\lim}_{\sigma \rightarrow \sigma_0} \varphi(a, \gamma; \sigma) < \infty \quad (\sigma \in \Lambda)$$

koşulları sağlansın. Bu durumda her $f \in L^1(D)$ için

$$\lim_{(h,r) \rightarrow (0^+, 0^+)} \frac{1}{hr} \int_a^{a+hc+r} \int_c^c f(x, y) dx dy = f(a, c)$$

eşitliğinin sağladığı (a, c) noktasında

$$\lim_{\sigma \rightarrow \sigma_0} J(f; \sigma) = f(a, c)$$

olur.

Burada Λ düzlemde bir küme ve σ_0 bu kümenin bir yığılma noktası olmak üzere $\sigma = (\xi, \eta)$ ve $\sigma_0 = (\xi_0, \eta_0)$ dır.

Aynı makalede

$$J(f; \sigma) = \iint_D f(x, y) \Psi(x, y; \sigma) dx dy$$

singüler integral operatörler ailesinin (a, c) noktasının Lebesgue noktası olması halinde Faddeev tipi bir teorem verilmiştir.

Teorem 2.9 ($a < \alpha \leq b; c < \gamma \leq d$) olmak üzere $\Psi(x, y; \sigma)$ fonksiyonu belirlenmiş α, γ için $\sigma \in \Lambda$ olmak üzere $[a, b; c, d] - [a, \alpha; c, \gamma]$ üzerinde düzgün sınırlı ve

$$\lim_{\sigma \rightarrow \sigma_0} \int_a^\alpha \int_c^\gamma \Psi(x, y; \sigma) dx dy = 1 \quad (\sigma \in \Lambda)$$

olsun.

Eğer D üzerinde negatif olmayan; x ve y değişkenlerine göre ayrı ayrı artmayan; D de $\Delta\mu(x, y) \geq 0$ şartını sağlayan; her $(x, y) \in D$ için

$$|\Psi(x, y; \sigma)| \leq \mu(x, y; \sigma)$$

olacak şekilde bir $\mu(x, y; \sigma)$ fonksiyonu varsa ve ayrıca

$$\overline{\lim}_{\sigma \rightarrow \sigma_0} \iint_D \mu(x, y; \sigma) dx dy < \infty \quad (\sigma \in \Lambda)$$

ise

$$\lim_{\sigma \rightarrow \sigma_0} J(f; \sigma) = f(a, c)$$

olur.

Hobson (1921), tarafından verilen iki katlı integraller için kısmi integrasyonun bir benzerini Taberski (1964) aşağıdaki şekilde vermiştir:

Teorem 2.10 $D = [a, b; c, d]$ bir dikdörtgen olmak üzere $f(x, y)$ fonksiyonu, $\langle a, b \rangle$ aralığı içinde $y = c$ ve $y = d$ için ve $\langle c, d \rangle$ aralığı içinde de $x = a$ ve $x = b$ için $g(x, y)$ fonksiyonuna göre Stieltjes integrallenebilir olsun.

Bu durumda D üzerinde $g(x, y)$ fonksiyonu, $f(x, y)$ fonksiyonuna göre Stieltjes integrallenebilirdir ve

$$\begin{aligned} \iint_D g(x, y) df(x, y) &= (\mathbf{S}) \int_a^b \int_c^d f(x, y) dg(x, y) + \int_a^b f(x, c) dg(x, c) \\ &\quad - \int_a^b f(x, d) dg(x, d) + \int_c^d f(a, y) dg(a, y) \\ &\quad - \int_c^d f(b, y) dg(b, y) + C \end{aligned}$$

eşitliği sağlanır.

Burada $C = f(a, c)g(a, c) - f(b, c)g(b, c) - f(a, d)g(a, d) + f(b, d)g(b, d)$ dir.

Teorem 2.11 $f(x, y)$ fonksiyonu, $D = [a, b; c, d]$ dikdörtgeni üzerinde Lebesgue anlamında integrallenebilir ve $g(x, y)$ sınırlı salınımli olsun. Ayrıca $g(x, c)$ (veya $g(x, d)$) ve $g(a, y)$ (veya $g(b, y)$), sırası ile $\langle a, b \rangle$ ve $\langle c, d \rangle$ aralıkları içinde sınırlı salınımli olsun.

Bu durumda $g(x, y)$ fonksiyonu D üzerinde

$$F(x, y) = (\mathbf{L}) \int_a^x \int_c^y f(s, t) ds dt, \quad fg \in L^1(D)$$

fonksiyonuna göre Stieltjes integrallenebilirdir ve

$$(\mathbf{S}) \iint_D g(x, y) dF(x, y) = (\mathbf{L}) \iint_D g(x, y) f(x, y) dx dy$$

olur.

(Taberski 1964).

3. $L^1_{2\pi}$ UZAYINDA RADYAL ÇEKİRDEKLİ KONVOLÜSYON TIPLİ SİNGÜLER İNTEGRAL OPERATÖR AİLESİNİN KARAKTERİSTİK NOKTALARDA YAKINSAKLIĞI

Bu bölümde, $D = \langle -\pi, \pi; -\pi, \pi \rangle$ kümesi üzerinde A sınıfı olarak adlandırdığımız yeni bir çekirdek sınıfı tanımlayacağız, bu sınıftan yararlanarak Bölüm 3.1 de çekirdek fonksiyonlarının A sınıfından seçilmesi durumunda radyal çekirdekli konvolüsyon tipli singüler integral operatör ailesinin varlığını ispatlayacağız; Bölüm 3.2 de $f \in L^1_{2\pi}$ nin karakteristik noktalarındaki yani süreklilik noktası, d-noktası, Lebesgue noktası ve genelleştirilmiş Lebesgue noktasındaki yakınsaklığını inceleyeceğiz.

Tanım 3.1 $\Lambda \subset \mathbb{R}_0^+$ bir indis kümesi, λ_0 bu kümenin bir yığılma noktası ve D üzerinde $K(\sqrt{t^2 + s^2}; \lambda)$ fonksiyonu, negatif olmayan, 2π periyodlu, ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Eğer $K(\sqrt{t^2 + s^2}; \lambda)$ fonksiyonu;

a) her $\lambda \in \Lambda$ için $\|K(\cdot; \lambda)\|_{L^1_{2\pi}} \leq M < \infty$ olacak şekilde bir M sayısı var;

b) $\lim_{(x,y,\lambda) \rightarrow (x_0,y,\lambda_0)} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K\left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda\right) dt ds = 1$;

c) $\delta > 0$ sayısı için $\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \left[\sup_{\delta \leq \sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \leq \pi} K\left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda\right) \right] = 0$

koşullarını sağlarsa K fonksiyonuna A sınıfındandır denir.

3.1 Operatörün Varlığı

Bu bölümde radyal çekirdekli konvolüsyon tipli bir singüler integral operatör ailesinin, çekirdek fonksiyonlarının A sınıfından olması durumunda, $L^1_{2\pi}$ uzayından $L^1_{2\pi}$ uzayına sınırlı bir dönüşüm olduğunu göstereceğiz.

Teorem 3.1 $f \in L^1_{2\pi}$ olsun. Eğer $K(\sqrt{t^2 + s^2}; \lambda)$ fonksiyonu A sınıfından ise bu durumda

$$L(f; x, y, \lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t, s) K\left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda\right) dt ds, \quad (x, y) \in D$$

radyal çekirdekli konvolüsyon tipli singüler integral operatörler ailesi $L_{2\pi}^1$ uzayından $L_{2\pi}^1$ uzayına sürekli bir dönüşümdür.

İspat. $L(f; x, y, \lambda)$ operatörü lineer olduğundan $L_{2\pi}^1$ uzayından $L_{2\pi}^1$ uzayına dönüşüm yapan sınırlı operatör olduğunu göstermek yeterlidir. Bunun için

$$\|L(\lambda)\| = \sup_{f \neq 0} \frac{\|L(f; x, y, \lambda)\|_{L_{2\pi}^1}}{\|f\|_{L_{2\pi}^1}}$$

normunun sınırlı olduğunun gösterilmesi gerekmektedir. Fubini Teoreminden faydalanarak integrali

$$\begin{aligned} \|L(f; x, y, \lambda)\|_{L_{2\pi}^1} &= \int_{-\pi-\pi}^{\pi} \int_{-\pi-\pi}^{\pi} \left| \int_{-\pi-\pi}^{\pi} \int_{-\pi-\pi}^{\pi} f(t, s) K\left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda\right) dt ds \right| dx dy \\ &\leq \int_{-\pi-\pi}^{\pi} \int_{-\pi-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi-\pi}^{\pi} \int_{-\pi-\pi}^{\pi} |f(t, s)| \left| K\left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda\right) \right| dt ds \right) dx dy \\ &= \int_{-\pi-\pi}^{\pi} \int_{-\pi-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi-\pi}^{\pi} \int_{-\pi-\pi}^{\pi} |f(t, s)| \left| K\left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda\right) \right| dx dy \right) dt ds \\ &= \int_{-\pi-\pi}^{\pi} \int_{-\pi-\pi}^{\pi} |f(t, s)| \left(\int_{-\pi-\pi}^{\pi} \int_{-\pi-\pi}^{\pi} \left| K\left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda\right) \right| dx dy \right) dt ds \end{aligned}$$

şeklinde yazabiliriz.

Burada $t - x = u \Rightarrow -dx = du$ ve $s - y = v \Rightarrow -dy = dv$ değişken değiştirmesi ile $K \in L_{2\pi}^1$ olduğu göz önüne alınarak

$$\begin{aligned} \int_{-\pi-\pi}^{\pi} \int_{-\pi-\pi}^{\pi} \left| K\left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda\right) \right| dx dy &= \int_{\pi+s}^{-\pi+s-\pi+t} \int_{\pi+t}^{\pi+t} \left| K\left(\sqrt{u^2 + v^2}; \lambda\right) \right| du dv \\ &= \int_{-\pi-\pi}^{\pi} \int_{-\pi-\pi}^{\pi} \left| K\left(\sqrt{u^2 + v^2}; \lambda\right) \right| du dv \end{aligned}$$

elde ederiz. Burada elde ettiğimiz sonucu yerine yazarsak

$$\begin{aligned} \|L(f; x, y, \lambda)\|_{L_{2\pi}^1} &\leq \int_{-\pi-\pi}^{\pi} \int_{-\pi-\pi}^{\pi} |f(t, s)| \left(\int_{-\pi-\pi}^{\pi} \int_{-\pi-\pi}^{\pi} \left| K\left(\sqrt{u^2 + v^2}; \lambda\right) \right| du dv \right) dt ds \\ &= \|f\|_{L_{2\pi}^1} \|K\|_{L_{2\pi}^1} \end{aligned}$$

şeklinde düzenleyebiliriz.

Buradan (a) koşulu göz önüne alındığında

$$\|L(\lambda)\| = \sup_{f \neq 0} \frac{\|L(f; x, y, \lambda)\|_{L^1_{2\pi}}}{\|f\|_{L^1_{2\pi}}} \leq M < \infty$$

olduğu görülür. Yani $L(f; x, y, \lambda)$ operatörü $L^1_{2\pi}$ uzayı üzerinde sürekli bir döntüştür.

Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur. ■

3.2 Karakteristik Noktalarda Yakınsaklık

Bu kısımda $f \in L^1_{2\pi}$ nin süreklilik noktası, d-noktası, Lebesgue noktası ve genelleştirilmiş Lebesgue noktasındaki yakınsaklığını inceleyeceğiz.

Teorem 3.2 $K(\sqrt{t^2 + s^2}; \lambda)$ fonksiyonu A sınıfından olsun. Bu durumda eğer (x_0, y_0) noktası $f \in L^1_{2\pi}$ fonksiyonunun süreklilik noktası ise o zaman (x, y, λ) noktası, (x_0, y_0, λ_0) noktasına istenilen yolla yaklaştığı takdirde

$$\lim_{(x,y,\lambda) \rightarrow (x_0,y_0,\lambda_0)} L(f; x, y, \lambda) = f(x_0, y_0)$$

sağlanır.

İspat. $(x_0, y_0) \in D$ keyfi bir nokta olsun. $I(x, y, \lambda) := L(f; x, y, \lambda) - f(x_0, y_0)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} I(x, y, \lambda) &= \iint_D f(t, s) K\left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda\right) dt ds - f(x_0, y_0) \\ &= \iint_D f(t, s) K\left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda\right) dt ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &- f(x_0, y_0) \iint_D K\left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda\right) dt ds \\ &+ f(x_0, y_0) \iint_D K\left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda\right) dt ds - f(x_0, y_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \iint_D |f(t, s) - f(x_0, y_0)| K\left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda\right) dt ds \\
&\quad + |f(x_0, y_0)| \left| \iint_D K\left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda\right) dt ds - 1 \right| \\
&= I_1(x, y, \lambda) + I_2(x, y, \lambda)
\end{aligned}$$

yazılabilir.

$$B_\delta = \{(t, s) : (t-x_0)^2 + (s-y_0)^2 \leq \delta^2, (x_0, y_0) \in D\} \text{ olsun.}$$

$I_1(x, y, \lambda)$ integralini

$$\begin{aligned}
I_1(x, y, \lambda) &= \left\{ \iint_{D \setminus B_\delta} + \iint_{D \cap B_\delta} \right\} |f(t, s) - f(x_0, y_0)| K\left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda\right) dt ds \\
&= I_{11}(x, y, \lambda) + I_{12}(x, y, \lambda)
\end{aligned}$$

olacak şekilde $D \setminus B_\delta$ ve $D \cap B_\delta$ kümeleri üzerinde inceleyelim.

Öncelikle $I_{11}(x, y, \lambda)$ integralini ele alırsak

$$\begin{aligned}
&\iint_{D \setminus B_\delta} |f(t, s) - f(x_0, y_0)| K\left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda\right) dt ds \\
&\leq \sup_{\delta \leq \sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \leq \pi} K\left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda\right) \iint_{D \setminus B_\delta} |f(t, s) - f(x_0, y_0)| dt ds \\
&\leq \sup_{\delta \leq \sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \leq \pi} K\left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda\right) \left\{ \|f\|_{L^1_{2\pi}} + 4\pi^2 |f(x_0, y_0)| \right\}
\end{aligned}$$

yazabiliriz. Ayrıca (c) şartı göz önüne alındığında yani,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \left[\sup_{\pi \geq \sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \geq \delta} K\left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda\right) \right] = 0$$

buradan

$$\lim_{(x, y, \lambda) \rightarrow (x_0, y_0, \lambda_0)} I_{11}(x, y, \lambda) = 0$$

olarak bulunur.

Şimdi $I_{12}(x, y, \lambda)$ integralini ele alalım. f fonksiyonu (x_0, y_0) noktasında sürekli olduğundan her $\varepsilon > 0$ için $(t - x_0)^2 + (s - y_0)^2 < \delta^2$ olduğunda

$$|f(t, s) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$$

olacak şekilde $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı vardır. (a) şartını göz önüne alarak $I_{12}(x, y, \lambda)$ integralini,

$$\begin{aligned} I_{12}(x, y, \lambda) &= \iint_{D \cap B_\delta} |f(t, s) - f(x_0, y_0)| \left| K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) \right| dt ds \\ &< \varepsilon \iint_{D \cap B_\delta} K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) dt ds \\ &< \varepsilon \int_{-\pi-\pi}^{\pi} \int_{-\pi-\pi}^{\pi} \left| K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) \right| dt ds \\ &\leq \varepsilon \|K\|_{L^1_{2\pi}} \leq \varepsilon M \end{aligned}$$

şeklinde yazabiliriz.

Yeteri kadar küçük her $\varepsilon > 0$ için $I_{12}(x, y, \lambda) \rightarrow 0$ olacağından

$$\lim_{(x,y,\lambda) \rightarrow (x_0,y_0,\lambda_0)} I_1(x, y, \lambda) = 0$$

olduğu görülür.

Şimdi $I_2(x, y, \lambda)$ integralini inceleyelim. (b) koşulundan

$$\lim_{(x,y,\lambda) \rightarrow (x_0,y_0,\lambda_0)} |f(x_0, y_0)| \left| \int_{-\pi-\pi}^{\pi} \int_{-\pi-\pi}^{\pi} K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) dt ds - 1 \right| = 0$$

olduğu açıktır.

Bulduklarımızı düzenlersek

$$(x, y, \lambda) \rightarrow (x_0, y_0, \lambda_0) \text{ iken } I_1(x, y, \lambda) + I_2(x, y, \lambda) \rightarrow 0$$

olduğundan dolayı teorem ispatlanmış olur.

Görüldüğü gibi $(x, y, \lambda) \rightarrow (x_0, y_0, \lambda_0)$ yakınsaklığı istenilen yolla olabilir. ■

Teorem 3.3 $K(\sqrt{t^2 + s^2}; \lambda)$ fonksiyonu $\langle x_0, \pi; y_0, \pi \rangle$ kümesi üzerinde her bir değişkenine göre monoton azalan ve A sınıfından olsun.

Ayrıca $\langle x_0, \pi; y_0, \pi \rangle$ ve $\langle -\pi, x_0; -\pi, y_0 \rangle$ üzerinde $\Delta K(\sqrt{t^2 + s^2}; \lambda) \geq 0$ ve

$\langle x_0, \pi; -\pi, y_0 \rangle$ ve $\langle -\pi, x_0; y_0, \pi \rangle$ üzerinde $\Delta K(\sqrt{t^2 + s^2}; \lambda) \leq 0$ sağlansın.

Eğer (x_0, y_0) noktası $f \in L^1_{2\pi}$ fonksiyonunun Lebesgue noktası ise

$$\int_{x_0 - \delta y_0 - \delta}^{x_0 + \delta y_0 + \delta} \int K\left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda\right) d(t-x)(s-y) \quad (3.1)$$

fonksiyonunun sınırlı kaldığı (x, y, λ) noktalar kümesi üzerinde

$$\lim_{(x,y,\lambda) \rightarrow (x_0,y_0,\lambda_0)} L(f; x, y, \lambda) = f(x_0, y_0)$$

eşitliği sağlanır.

İspat. $(x_0, y_0) \in D$ noktası, f nin Lebesgue noktası olsun. Lebesgue noktasının tanımından

$$\lim_{(h,r) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{hr} \int_{-h}^0 \int_{-r}^0 |f(t+x_0, s+y_0) - f(x_0, y_0)| dt ds = 0$$

$$\lim_{(h,r) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{hr} \int_0^h \int_{-r}^0 |f(t+x_0, s+y_0) - f(x_0, y_0)| dt ds = 0$$

$$\lim_{(h,r) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{hr} \int_{-h}^0 \int_0^r |f(t+x_0, s+y_0) - f(x_0, y_0)| dt ds = 0$$

$$\lim_{(h,r) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{hr} \int_0^h \int_0^r |f(t+x_0, s+y_0) - f(x_0, y_0)| dt ds = 0$$

eşitlikleri vardır.

Bu eşitliklerden görüldüğü gibi her $\varepsilon > 0$ sayısı için $0 < h, k \leq \delta$ olduğunda

$$\int_{x_0 - \delta y_0 - \delta}^{x_0} \int_{y_0}^{y_0} |f(t, s) - f(x_0, y_0)| dt ds \leq \varepsilon hr \quad (3.2)$$

$$\int_{x_0}^{x_0+\delta} \int_{y_0-\delta}^{y_0} |f(t, s) - f(x_0, y_0)| dt ds \leq \varepsilon h r \quad (3.3)$$

$$\int_{x_0-\delta}^{x_0} \int_{y_0}^{y_0+\delta} |f(t, s) - f(x_0, y_0)| dt ds \leq \varepsilon h r \quad (3.4)$$

$$\int_{x_0}^{x_0+\delta} \int_{y_0}^{y_0+\delta} |f(t, s) - f(x_0, y_0)| dt ds \leq \varepsilon h r \quad (3.5)$$

eşitsizlikleri sağlanacak şekilde en az bir $\delta > 0$ sayısı vardır.

Diğer taraftan $I(x, y, \lambda) = L(f; x, y, \lambda) - f(x_0, y_0)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} I(x, y, \lambda) &= \int_{-\pi-\pi}^{\pi} \int_{-\pi-\pi}^{\pi} f(t, s) K\left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda\right) dt ds - f(x_0, y_0) \\ &= \int_{-\pi-\pi}^{\pi} \int_{-\pi-\pi}^{\pi} f(t, s) K\left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda\right) dt ds \\ &\quad + f(x_0, y_0) \int_{-\pi-\pi}^{\pi} \int_{-\pi-\pi}^{\pi} K\left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda\right) dt ds \\ &\quad - f(x_0, y_0) \int_{-\pi-\pi}^{\pi} \int_{-\pi-\pi}^{\pi} K\left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda\right) dt ds - f(x_0, y_0) \\ &\leq \int_{-\pi-\pi}^{\pi} \int_{-\pi-\pi}^{\pi} |f(t, s) - f(x_0, y_0)| K\left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda\right) dt ds \\ &\quad + |f(x_0, y_0)| \left| \int_{-\pi-\pi}^{\pi} \int_{-\pi-\pi}^{\pi} K\left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda\right) dt ds - 1 \right| \\ &= I_1(x, y, \lambda) + I_2(x, y, \lambda) \end{aligned}$$

elde ederiz.

$B_\delta = \{(t, s) : (t-x_0)^2 + (s-y_0)^2 \leq \delta^2, (x_0, y_0) \in D\}$ olsun. $I_1(x, y, \lambda)$ integralini

$$\begin{aligned} I_1(x, y, \lambda) &= \left\{ \iint_{D \setminus B_\delta} + \iint_{D \cap B_\delta} \right\} |f(t, s) - f(x_0, y_0)| K\left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda\right) dt ds \\ &= I_{11}(x, y, \lambda) + I_{12}(x, y, \lambda) \end{aligned}$$

şeklinde yazarak $D \setminus B_\delta$ ve $D \cap B_\delta$ kümeleri üzerinde inceleyelim.

$I_{11}(x, y, \lambda)$ integralini ele alalım.

$$\begin{aligned}
& \iint_{D \setminus B_\delta} |f(t, s) - f(x_0, y_0)| K\left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda\right) dt ds \\
& \leq \sup_{\delta \leq \sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \leq \pi} K\left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda\right) \iint_{D \setminus B_\delta} |f(t, s) - f(x_0, y_0)| dt ds \\
& \leq \sup_{\delta \leq \sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \leq \pi} K\left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda\right) \left\{ \|f\|_{L^1_{2\pi}} + 4\pi^2 |f(x_0, y_0)| \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir.

(c) koşulundan biliyoruz ki her $\delta > 0$ için

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \left[\sup_{\delta \leq \sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \leq \pi} K\left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda\right) \right] = 0$$

olur. Buradan

$$\lim_{(x, y, \lambda) \rightarrow (x_0, y_0, \lambda_0)} I_{11}(x, y, \lambda) = 0$$

sağlanır.

$I_{12}(x, y, \lambda)$ integrali için

$$\begin{aligned}
I_{12}(x, y, \lambda) &= \iint_{D \cap B_\delta} |f(t, s) - f(x_0, y_0)| K\left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda\right) dt ds \\
&\leq \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} \int_{y_0 - \delta}^{y_0 + \delta} |f(t, s) - f(x_0, y_0)| K\left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda\right) dt ds \\
&= \left\{ \int_{x_0 - \delta}^{x_0} \int_{y_0 - \delta}^{y_0} + \int_{x_0}^{x_0 + \delta} \int_{y_0 - \delta}^{y_0} \right\} |f(t, s) - f(x_0, y_0)| K\left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda\right) dt ds \\
&\quad + \left\{ \int_{x_0 - \delta}^{x_0} \int_{y_0}^{y_0 + \delta} + \int_{x_0}^{x_0 + \delta} \int_{y_0}^{y_0 + \delta} \right\} |f(t, s) - f(x_0, y_0)| K\left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda\right) dt ds \\
&= I_{121}(x, y, \lambda) + I_{122}(x, y, \lambda) + I_{123}(x, y, \lambda) + I_{124}(x, y, \lambda)
\end{aligned}$$

şeklinde bir düzenleme yapalım.

Öncelikle $I_{121}(x, y, \lambda)$ integralini ele alalım. (3.2) eşitsizliğinin sağlandığı göz önüne alınarak

$$F(t, s) = \int_t^{x_0} \int_s^{y_0} |f(u, v) - f(x_0, y_0)| \, dudv$$

şeklinde bir F fonksiyonu tanımlayalım. Burada $x_0 - t \leq \delta$ ve $y_0 - s \leq \delta$ iken

$$|F(t, s)| \leq \varepsilon (x_0 - t) (y_0 - s) \quad (3.6)$$

eşitsizliği sağlanır.

Gerçekten

$$\frac{F(t, s)}{(x_0 - t)(y_0 - s)} = \frac{1}{(x_0 - t)(y_0 - s)} \int_t^{x_0} \int_s^{y_0} |f(u, v) - f(x_0, y_0)| \, dudv$$

eşitliğini yazarsak, $x_0 - t \leq \delta$ ve $y_0 - s \leq \delta$ olduğunda (3.2) koşulundan (3.6) eşitsizliğinin sağlandığı görülür.

Teorem 2.11 e göre, $f(t, s) \in L_{2\pi}^1$ olmak üzere K fonksiyonu monoton bir fonksiyon olduğunda K fonksiyonu $F(t, s)$ fonksiyonuna göre Stieltjes integrallenebilir ve

$$\begin{aligned} \text{(S)} \quad & \int_{x_0 - \delta}^{x_0} \int_{y_0 - \delta}^{y_0} K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) dF(t, s) \\ & = \int_{x_0 - \delta}^{x_0} \int_{y_0 - \delta}^{y_0} |f(t, s) - f(x_0, y_0)| K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) dt ds \end{aligned}$$

sağlanır.

Şimdi bu eşitlikteki Stieltjes integraline kısmi integrasyon uygularsak

$$\begin{aligned}
& \int_{x_0-\delta}^{x_0} \int_{y_0-\delta}^{y_0} K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) dF(t, s) \\
= & \int_{x_0-\delta}^{x_0} \int_{y_0-\delta}^{y_0} F(t, s) dK \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) \\
& + \int_{x_0-\delta}^{x_0} F(t, y_0 - \delta) d_t K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (y_0 - \delta - y)^2}; \lambda \right) \\
& + \int_{y_0-\delta}^{y_0} F(x_0 - \delta, s) d_s K \left(\sqrt{(x_0 - \delta - x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) \\
& + F(x_0 - \delta, y_0 - \delta) K \left(\sqrt{(x_0 - \delta - x)^2 + (y_0 - \delta - y)^2}; \lambda \right)
\end{aligned}$$

elde ederiz. Ardından (3.6) dan

$$\begin{aligned}
& \leq \int_{x_0-\delta}^{x_0} \int_{y_0-\delta}^{y_0} \varepsilon (x_0 - t) (y_0 - s) \left| dK \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) \right| \\
& + \int_{x_0-\delta}^{x_0} \varepsilon \delta (x_0 - t) \left| d_t K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (y_0 - \delta - y)^2}; \lambda \right) \right| \\
& + \int_{y_0-\delta}^{y_0} \varepsilon \delta (y_0 - s) \left| d_s K \left(\sqrt{(x_0 - \delta - x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) \right| \\
& + \varepsilon \delta^2 K \left(\sqrt{(x_0 - \delta - x)^2 + (y_0 - \delta - y)^2}; \lambda \right) \\
= & i_1 + i_2 + i_3 + i_4
\end{aligned}$$

elde edilir. Sırası ile i_1 , i_2 ve i_3 integrallerine kısmi integrasyon uygulayalım.

$dK \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) \geq 0$ olmak üzere i_1 integraline kısmi integrasyon

uygularsak

$$\begin{aligned}
i_1 &= \varepsilon \int_{x_0-\delta}^{x_0} \int_{y_0-\delta}^{y_0} K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) d(x_0-t)(y_0-s) \\
&\quad + \varepsilon \delta \int_{x_0-\delta}^{x_0} K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (y_0-\delta-y)^2}; \lambda \right) d(-t) \\
&\quad + \varepsilon \delta \int_{y_0-\delta}^{y_0} K \left(\sqrt{(x_0-\delta-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) d(-s) \\
&\quad + \varepsilon \delta^2 K \left(\sqrt{(x_0-\delta-x)^2 + (y_0-\delta-y)^2}; \lambda \right)
\end{aligned}$$

elde ederiz.

i_2 integralini ele alalım. $K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (y_0-\delta-y)^2}; \lambda \right)$ fonksiyonu, $\langle x_0-\delta, x_0 \rangle$ üzerinde t değişkenine göre artan bir fonksiyondur yani

$$d_t K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (y_0-\delta-y)^2}; \lambda \right) \geq 0$$

yazabiliriz.

Buna göre i_2 integrale kısmi integrasyon uygularsak

$$\begin{aligned}
i_2 &= -\varepsilon \delta^2 K \left(\sqrt{(x_0-\delta-x)^2 + (y_0-\delta-y)^2}; \lambda \right) \\
&\quad + \varepsilon \delta \int_{x_0-\delta}^{x_0} K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (y_0-\delta-y)^2}; \lambda \right) dt
\end{aligned}$$

elde ederiz.

i_3 integralini ele alalım. $K \left(\sqrt{(x_0-\delta-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right)$ fonksiyonu, $\langle y_0-\delta, y_0 \rangle$ aralığı üzerinde s değişkenine göre artan bir fonksiyondur yani;

$$d_s K \left(\sqrt{(x_0-\delta-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) \geq 0$$

yazabiliriz.

Buna göre i_3 integraline kısmi integrasyon uygularsak

$$i_3 = -\varepsilon\delta^2 K \left(\sqrt{(x_0 - \delta - x)^2 + (y_0 - \delta - y)^2}; \lambda \right) \\ + \varepsilon\delta \int_{y_0 - \delta}^{y_0} K \left(\sqrt{(x_0 - \delta - x)^2 + (s - y)^2}; \lambda \right) ds$$

elde ederiz.

i_1, i_2 ve i_3 için elde ettiğimiz bu sonuçları düzenlersek

$$I_{121}(x, y, \lambda) \leq \varepsilon \int_{x_0 - \delta}^{x_0} \int_{y_0 - \delta}^{y_0} K \left(\sqrt{(t - x)^2 + (s - y)^2}; \lambda \right) d(x_0 - t)(y_0 - s)$$

bulunur.

Şimdi $I_{122}(x, y, \lambda)$ integrali için (3.3) eşitsizliğini göz önüne alarak bir

$$G(t, s) = \int_{x_0}^t \int_s^{y_0} |f(u, v) - f(x_0, y_0)| dudv$$

fonksiyonu tanımlayalım. Burada $t - x_0 \leq \delta$ ve $y_0 - s \leq \delta$ iken

$$|G(t, s)| \leq \varepsilon (t - x_0)(y_0 - s) \quad (3.7)$$

olduğu açıktır.

$f \in L_{2\pi}^1$ olmak üzere K fonksiyonu $\langle x_0, x_0 + \delta; y_0 - \delta, y_0 \rangle$ üzerinde monoton olduğundan $G(t, s)$ fonksiyonuna göre Stieltjes integrallenebilirdir ve

$$\int_{x_0}^{x_0 + \delta} \int_{y_0 - \delta}^{y_0} |f(t, s) - f(x_0, y_0)| K \left(\sqrt{(t - x)^2 + (s - y)^2}; \lambda \right) dt ds \\ = (\mathbf{S}) \int_{x_0}^{x_0 + \delta} \int_{y_0 - \delta}^{y_0} K \left(\sqrt{(t - x)^2 + (s - y)^2}; \lambda \right) dG(t, s)$$

olur. Burada Stieltjes integraline kısmi integrasyon uygulayıp ardından ifadeyi (3.7) eşitsizliğini kullanarak büyütürsek

$$\begin{aligned}
& \int_{x_0}^{x_0+\delta} \int_{y_0-\delta}^{y_0} K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) dG(t, s) \\
= & \int_{x_0}^{x_0+\delta} \int_{y_0-\delta}^{y_0} G(t, s) dK \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) \\
& + \int_{x_0}^{x_0+\delta} G(t, y_0 - \delta) dK \left(\sqrt{(t-x)^2 + (y_0 - \delta - y)^2}; \lambda \right) \\
& - \int_{y_0-\delta}^{y_0} G(x_0 + \delta, s) dK \left(\sqrt{(x_0 + \delta - x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) \\
& - G(x_0 + \delta, y_0 - \delta) K \left(\sqrt{(x_0 + \delta - x)^2 + (y_0 - \delta - y)^2}; \lambda \right) \\
\leq & \varepsilon \int_{x_0}^{x_0+\delta} \int_{y_0-\delta}^{y_0} (t-x_0)(y_0-s) \left| dK \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) \right| \\
& + \varepsilon \delta \int_{x_0}^{x_0+\delta} (t-x_0) \left| d_t K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (y_0 - \delta - y)^2}; \lambda \right) \right| \\
& + \varepsilon \delta \int_{y_0-\delta}^{y_0} (y_0-s) \left| d_s K \left(\sqrt{(x_0 + \delta - x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) \right| \\
& + \varepsilon \delta^2 K \left(\sqrt{(x_0 + \delta - x)^2 + (y_0 - \delta - y)^2}; \lambda \right) \\
= & i_1 + i_2 + i_3 + i_4
\end{aligned}$$

elde ederiz.

Şimdi sırasıyla i_1 , i_2 ve i_3 integrallerine sırası ile kısmi integrasyon uygulayalım.

$dK \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) \leq 0$ olmak üzere i_1 integraline kısmi integrasyon

uygularsak

$$\begin{aligned}
i_1 &= -\varepsilon \int_{x_0}^{x_0+\delta} \int_{y_0-\delta}^{y_0} K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) d(t-x_0)(y_0-s) \\
&\quad -\varepsilon\delta \int_{x_0}^{x_0+\delta} K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (y_0-y-\delta)^2}; \lambda \right) dt \\
&\quad +\varepsilon\delta \int_{y_0-\delta}^{y_0} K \left(\sqrt{(x_0-x+\delta)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) d(-s) \\
&\quad +\varepsilon\delta^2 K \left(\sqrt{(x_0-x+\delta)^2 + (y_0-y-\delta)^2}; \lambda \right)
\end{aligned}$$

elde ederiz.

$\langle x_0, x_0 + \delta \rangle$ üzerinde K fonksiyonu t değişkenine göre azalan bir fonksiyon olduğundan

$$d_t K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (y_0-\delta-y)^2}; \lambda \right) \leq 0$$

yazabiliriz.

Buna göre i_2 integraline kısmi integrasyon uygularsak

$$\begin{aligned}
i_2 &= -\varepsilon\delta^2 K \left(\sqrt{(x_0-x+\delta)^2 + (y_0-\delta-y)^2}; \lambda \right) \\
&\quad +\varepsilon\delta \int_{x_0}^{x_0+\delta} K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (y_0-\delta-y)^2}; \lambda \right) dt
\end{aligned}$$

elde ederiz.

$\langle y_0 - \delta, y_0 \rangle$ üzerinde K fonksiyonu s değişkenine göre artan bir fonksiyon olduğundan

$$d_s K \left(\sqrt{(x_0+\delta-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) \geq 0$$

yazılabilir. Buna göre i_3 integraline kısmi integrasyon uygularsak

$$\begin{aligned}
i_3 &= -\varepsilon\delta^2 K \left(\sqrt{(x_0-x+\delta)^2 + (y_0-\delta-y)^2}; \lambda \right) \\
&\quad +\varepsilon\delta \int_{y_0-\delta}^{y_0} K \left(\sqrt{(x_0+\delta-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) ds
\end{aligned}$$

elde ederiz.

i_1, i_2 ve i_3 için elde edilen sonuçları $I_{122}(x, y, \lambda)$ integralinde yerine yazarsak

$$I_{122}(x, y, \lambda) \leq -\varepsilon \int_{x_0}^{x_0+\delta} \int_{y_0-\delta}^{y_0} K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) d(t-x_0)(y_0-s)$$

bulunur.

$I_{123}(x, y, \lambda)$ integralini için (3.4) eşitsizliğini göz önüne alarak bir

$$H(t, s) = \int_t^{x_0} \int_{y_0}^s |f(u, v) - f(x_0, y_0)| dudv$$

fonksiyonu tanımlayalım.

Yine (3.4) den $x_0 - t \leq \delta$ ve $s - y_0 \leq \delta$ iken

$$|H(t, s)| \leq \varepsilon (x_0 - t) (s - y_0) \quad (3.8)$$

olduğu açıktır.

$\langle x_0 - \delta, x_0; y_0, y_0 + \delta \rangle$ üzerinde K fonksiyonu monoton olduğundan H fonksiyonuna göre Stieltjes integrallenebilirdir ve

$$\begin{aligned} & \int_{x_0-\delta}^{x_0} \int_{y_0}^{y_0+\delta} |f(t, s) - f(x_0, y_0)| K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) dt ds \\ &= (\mathbf{S}) \int_{x_0-\delta}^{x_0} \int_{y_0}^{y_0+\delta} K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) dH(t, s) \end{aligned}$$

eşitliği vardır.

Bu eşitlikte Stieltjes integraline kısmi integrasyon metodu uygulanırsa

$$\begin{aligned}
& \int_{x_0-\delta}^{x_0} \int_{y_0}^{y_0+\delta} K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) dH(t, s) \\
= & \int_{x_0-\delta}^{x_0} \int_{y_0}^{y_0+\delta} H(t, s) dK \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) \\
& - \int_{x_0-\delta}^{x_0} H(t, y_0 + \delta) d_t K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (y_0 - y + \delta)^2}; \lambda \right) \\
& + \int_{y_0}^{y_0+\delta} H(x_0 - \delta, s) d_s K \left(\sqrt{(x_0 - x - \delta)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) \\
& - H(x_0 - \delta, y_0 + \delta) K \left(\sqrt{(x_0 - x - \delta)^2 + (y_0 - y + \delta)^2}; \lambda \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi de (3.8) eşitsizliğinden yararlanılırsa

$$\begin{aligned}
& \leq \varepsilon \int_{x_0-\delta}^{x_0} \int_{y_0}^{y_0+\delta} (x_0 - t)(s - y_0) \left| dK \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) \right| \\
& + \varepsilon \delta \int_{x_0-\delta}^{x_0} (x_0 - t) \left| d_t K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (y_0 + \delta - y)^2}; \lambda \right) \right| \\
& + \varepsilon \delta \int_{y_0}^{y_0+\delta} (s - y_0) \left| d_s K \left(\sqrt{(x_0 + \delta - x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) \right| \\
& + \varepsilon \delta^2 K \left(\sqrt{(x_0 - \delta - x)^2 + (y_0 + \delta - y)^2}; \lambda \right) \\
= & i_1 + i_2 + i_3 + i_4
\end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi i_1 , i_2 ve i_3 integrallerine sırası ile kısmi integrasyon uygulayalım.

Öncelikle i_1 integraline $dK \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) \leq 0$ olmak üzere kısmi integrasyon

uygularsak

$$\begin{aligned}
i_1 &= - \int_{x_0-\delta}^{x_0} \int_{y_0}^{y_0+\delta} K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) d(x_0-t)(s-y_0) \\
&\quad + \varepsilon \delta \int_{x_0-\delta}^{x_0} K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (y_0+\delta-y)^2}; \lambda \right) d(-t) \\
&\quad - \varepsilon \delta \int_{y_0}^{y_0+\delta} K \left(\sqrt{(x_0-\delta-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) ds \\
&\quad + \varepsilon \delta^2 K \left(\sqrt{(x_0-\delta-x)^2 + (y_0+\delta-y)^2}; \lambda \right)
\end{aligned}$$

elde ederiz.

i_2 integraline $d_t K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (y_0+\delta-y)^2}; \lambda \right) \geq 0$ olmak üzere kısmi integrasyon uygularsak

$$\begin{aligned}
i_2 &= -\varepsilon \delta^2 K \left(\sqrt{(x_0-\delta-x)^2 + (y_0+\delta-y)^2}; \lambda \right) \\
&\quad - \varepsilon \delta \int_{x_0-\delta}^{x_0} K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (y_0+\delta-y)^2}; \lambda \right) d(-t)
\end{aligned}$$

ve

i_3 integraline $d_s K \left(\sqrt{(x_0-\delta-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) \leq 0$ olmak üzere kısmi integrasyon uygularsak

$$\begin{aligned}
i_3 &= -\varepsilon \delta^2 K \left(\sqrt{(x_0-\delta-x)^2 + (y_0+\delta-y)^2}; \lambda \right) \\
&\quad + \varepsilon \delta \int_{y_0}^{y_0+\delta} K \left(\sqrt{(x_0-\delta-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) ds
\end{aligned}$$

elde ederiz.

i_1 , i_2 ve i_3 için bulunan sonuçlar düzenlendiğinde

$$I_{123}(x, y, \lambda) \leq -\varepsilon \int_{x_0-\delta}^{x_0} \int_{y_0}^{y_0+\delta} K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) d(x_0-t)(s-y_0)$$

eşitsizliğine ulaşılır.

Son olarak benzer işlemleri $I_{124}(x, y, \lambda)$ integraline uygulayalım. (3.5) eşitsizliğini gözönüne alarak bir

$$T(t, s) = \int_{x_0}^t \int_{y_0}^s |f(u, v) - f(x_0, y_0)| du dv$$

fonksiyonu tanımlayalım. Yine (3.5) den $t - x_0 \leq \delta$ ve $s - y_0 \leq \delta$ iken

$$|T(t, s)| \leq \varepsilon (t - x_0) (s - y_0) \quad (3.9)$$

olduğu açıktır.

$\langle x_0, x_0 + \delta; y_0, y_0 + \delta \rangle$ üzerinde K fonksiyonu monoton olduğundan T fonksiyonuna göre Stieltjes integrallenebilir ve

$$\begin{aligned} & \int_{x_0}^{x_0+\delta} \int_{y_0}^{y_0+\delta} |f(t, s) - f(x_0, y_0)| K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) dt ds \\ &= (\mathbf{S}) \int_{x_0}^{x_0+\delta} \int_{y_0}^{y_0+\delta} K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) dT(t, s) \end{aligned}$$

sağlanır.

Eşitliğin sağındaki Stieltjes integraline kısmi integrasyon uygularsak

$$\begin{aligned} & \int_{x_0}^{x_0+\delta} \int_{y_0}^{y_0+\delta} T(t, s) dK \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) \\ & - \int_{x_0}^{x_0+\delta} T(t, y_0 + \delta) d_t K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (y_0 + \delta - y)^2}; \lambda \right) \\ & - \int_{y_0}^{y_0+\delta} T(x_0 + \delta, s) d_s K \left(\sqrt{(x_0 + \delta - x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) \\ & + T(x_0 + \delta, y_0 + \delta) K \left(\sqrt{(x_0 + \delta - x)^2 + (y_0 + \delta - y)^2}; \lambda \right) \end{aligned}$$

ardından (3.9) dan faydalanıp ifadeyi büyütürsek

$$\begin{aligned}
&\leq \varepsilon \int_{x_0}^{x_0+\delta} \int_{y_0}^{y_0+\delta} (t-x_0)(s-y_0) \left| dK \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) \right| \\
&\quad + \varepsilon \delta \int_{x_0}^{x_0+\delta} (t-x_0) \left| d_t K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (y_0+\delta-y)^2}; \lambda \right) \right| \\
&\quad + \varepsilon \delta \int_{y_0}^{y_0+\delta} (s-y_0) \left| d_s K \left(\sqrt{(x_0+\delta-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) \right| \\
&\quad + \varepsilon \delta^2 K \left(\sqrt{(x_0+\delta-x)^2 + (y_0+\delta-y)^2}; \lambda \right) \\
&= i_1 + i_2 + i_3 + i_4
\end{aligned}$$

elde ederiz. Şimdi i_1 , i_2 ve i_3 integrallerine kısmi integrasyon uygulayalım.

i_1 integralinde $dK \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) \geq 0$ olduğu göz önüne alınıp kısmi integrasyon uygularsak

$$\begin{aligned}
i_1 &= \varepsilon \int_{x_0}^{x_0+\delta} \int_{y_0}^{y_0+\delta} K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) d(t-x_0)(s-y_0) \\
&\quad - \varepsilon \delta \int_{x_0}^{x_0+\delta} K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (y_0+\delta-y)^2}; \lambda \right) dt \\
&\quad - \varepsilon \delta \int_{y_0}^{y_0+\delta} K \left(\sqrt{(x_0+\delta-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) ds \\
&\quad + \varepsilon \delta^2 K \left(\sqrt{(x_0-x+\delta)^2 + (y_0-y+\delta)^2}; \lambda \right)
\end{aligned}$$

elde ederiz.

i_2 ve i_3 integrallerinde K fonksiyonu sırasıyla t ve s değişkenlerine göre azalan olduğundan

$$d_t K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (y_0+\delta-y)^2}; \lambda \right) \leq 0$$

ve

$$d_s K \left(\sqrt{(x_0+\delta-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) \leq 0$$

yazılabilir.

Şimdi bu integrallere sırası ile kısmi integrasyon uygularsak

$$i_2 = -\varepsilon\delta^2 K \left(\sqrt{(x_0 + \delta - x)^2 + (y_0 + \delta - y)^2}; \lambda \right) \\ + \varepsilon\delta \int_{x_0}^{x_0+\delta} K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (y_0 + \delta - y)^2}; \lambda \right) dt$$

ve

$$i_3 = -\varepsilon\delta^2 K \left(\sqrt{(x_0 + \delta - x)^2 + (y_0 + \delta - y)^2}; \lambda \right) \\ + \varepsilon\delta \int_{y_0}^{y_0+\delta} K \left(\sqrt{(x_0 + \delta - x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) ds$$

elde edilir.

Bulduğumuz bu sonuçları düzenlersek

$$I_{124}(x, y, \lambda) \leq \varepsilon \int_{x_0}^{x_0+\delta} \int_{y_0}^{y_0+\delta} K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) d(t-x_0)(s-y_0)$$

elde edilir.

$I_{121}(x, y, \lambda)$, $I_{122}(x, y, \lambda)$, $I_{123}(x, y, \lambda)$ ve $I_{124}(x, y, \lambda)$ için bulunan sonuçlar,

$$I_{121}(x, y, \lambda) \leq \varepsilon \int_{x_0-\delta}^{x_0} \int_{y_0-\delta}^{y_0} K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) d(x_0-t)(y_0-s)$$

$$I_{122}(x, y, \lambda) \leq \varepsilon \int_{x_0}^{x_0+\delta} \int_{y_0-\delta}^{y_0} K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) d(t-x_0)(s-y_0)$$

$$I_{123}(x, y, \lambda) \leq \varepsilon \int_{x_0-\delta}^{x_0} \int_{y_0}^{y_0+\delta} K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) d(t-x_0)(s-y_0)$$

$$I_{124}(x, y, \lambda) \leq \varepsilon \int_{x_0}^{x_0+\delta} \int_{y_0}^{y_0+\delta} K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) d(t-x_0)(s-y_0)$$

şeklindedir.

Bulunan bu ifadeleri toplarsak $I_{12}(x, y, \lambda)$ için aşağıdaki sonuca ulaşırız:

$$I_{12}(x, y, \lambda) \leq \varepsilon \int_{x_0 - \delta y_0 - \delta}^{x_0 + \delta y_0 + \delta} \int K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) d(t-x_0)(s-y_0)$$

Hipotez gereği (3.1) ifadesinin sınırlı olduğu noktalar kümesi üzerinde

$$(x, y, \lambda) \rightarrow (x_0, y_0, \lambda_0) \text{ olduğunda } I_{12}(x, y, \lambda) \rightarrow 0$$

olduğu açıktır. Buradan

$$\lim_{(x,y,\lambda) \rightarrow (x_0,y_0,\lambda_0)} I_1(x, y, \lambda) = 0$$

bulunur.

Son olarak $I_2(x, y, \lambda)$ integralini hesaplayalım. (b) koşulundan

$$\lim_{(x,y,\lambda) \rightarrow (x_0,y_0,\lambda_0)} |f(x_0, y_0)| \left| \int_{-\pi-\pi}^{\pi} \int_{-\pi-\pi}^{\pi} K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) dt ds - 1 \right| = 0$$

bulunur.

Bulduklarımızı düzenlersek

$$(x, y, \lambda) \rightarrow (x_0, y_0, \lambda_0) \text{ iken } I_1(x, y, \lambda) + I_2(x, y, \lambda) \rightarrow 0$$

olduğundan dolayı teorem ispatlanmış olur. ■

Teorem 3.4 $K(\sqrt{t^2 + s^2}; \lambda)$ fonksiyonu $\langle x_0, \pi; y_0, \pi \rangle$ kümesi üzerinde her bir değişkine göre monoton azalan ve A sınıfından olsun.

Ayrıca $\langle x_0, \pi; y_0, \pi \rangle$ ve $\langle -\pi, x_0; -\pi, y_0 \rangle$ üzerinde $\Delta K(\sqrt{t^2 + s^2}; \lambda) \geq 0$ ve

$\langle x_0, \pi; -\pi, y_0 \rangle$ ve $\langle -\pi, x_0; y_0, \pi \rangle$ üzerinde $\Delta K(\sqrt{t^2 + s^2}; \lambda) \leq 0$ sağlansın.

Eğer (x_0, y_0) noktası $f \in L_{2\pi}^1$ fonksiyonunun d -noktası ise

$$\int_{x_0 - \delta y_0 - \delta}^{x_0 + \delta y_0 + \delta} \int K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) d(t-x_0)(s-y_0) \leq C < \infty$$

şartının sağlandığı (x, y, λ) noktalar kümesi üzerinde

$$\lim_{(x,y,\lambda) \rightarrow (x_0,y_0,\lambda_0)} L(f; x, y, \lambda) = f(x_0, y_0)$$

eşitliği sağlanır.

İspat. $(x_0, y_0) \in D$ noktası f nin d -noktası olsun. d -noktasının tanımı gereği

$$\lim_{(h,r) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{hr} \int_{-h}^0 \int_{-r}^0 [f(t+x_0, s+y_0) - f(x_0, y_0)] dt ds = 0$$

$$\lim_{(h,r) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{hr} \int_0^h \int_{-r}^0 [f(t+x_0, s+y_0) - f(x_0, y_0)] dt ds = 0$$

$$\lim_{(h,r) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{hr} \int_{-h}^0 \int_0^r [f(t+x_0, s+y_0) - f(x_0, y_0)] dt ds = 0$$

$$\lim_{(h,r) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{hr} \int_0^h \int_0^r [f(t+x_0, s+y_0) - f(x_0, y_0)] dt ds = 0$$

eşitlikleri vardır. Yukarıdaki eşitliklerden görüldüğü gibi her $\varepsilon > 0$ için $0 < h, r \leq \delta$ olduğunda

$$\left| \int_{x_0-\delta}^{x_0} \int_{y_0-\delta}^{y_0} [f(t, s) - f(x_0, y_0)] dt ds \right| \leq \varepsilon hr \quad (3.10)$$

$$\left| \int_{x_0}^{x_0+\delta} \int_{y_0-\delta}^{y_0} [f(t, s) - f(x_0, y_0)] dt ds \right| \leq \varepsilon hr \quad (3.11)$$

$$\left| \int_{x_0-\delta}^{x_0} \int_{y_0}^{y_0+\delta} [f(t, s) - f(x_0, y_0)] dt ds \right| \leq \varepsilon hr \quad (3.12)$$

$$\left| \int_{x_0}^{x_0+\delta} \int_{y_0}^{y_0+\delta} [f(t, s) - f(x_0, y_0)] dt ds \right| \leq \varepsilon hr \quad (3.13)$$

eşitsizliklerini sağlayacak en az bir $\delta > 0$ sayısı vardır.

Diğer taraftan $I(x, y, \lambda) := L(f, x, y; \lambda) - f(x_0, y_0)$ ise

$$I(x, y, \lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t, s) K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) dt ds - f(x_0, y_0)$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\pi-\pi}^{\pi} \int_{-\pi-\pi}^{\pi} [f(t, s) - f(x_0, y_0)] K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) dt ds \\
&\quad + f(x_0, y_0) \left\{ \int_{-\pi-\pi}^{\pi} \int_{-\pi-\pi}^{\pi} K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) dt ds - 1 \right\} \\
&= I_1(x, y, \lambda) + I_2(x, y, \lambda)
\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir.

$B_\delta := \{(t, s) : (t-x_0)^2 + (s-y_0)^2 \leq \delta^2, (x_0, y_0) \in D\}$ olsun. $I_1(x, y, \lambda)$ integralini

$$\begin{aligned}
I_1(x, y, \lambda) &= \left\{ \iint_{D \setminus B_\delta} + \iint_{D \cap B_\delta} \right\} [f(t, s) - f(x_0, y_0)] K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) dt ds \\
&= I_{11}(x, y, \lambda) + I_{12}(x, y, \lambda)
\end{aligned}$$

şeklinde yazarak $D \setminus B_\delta$ ve $D \cap B_\delta$ kümeleri üzerinde inceleyelim.

İlk olarak $I_{11}(x, y, \lambda)$ integralini ele alırsak,

$$\begin{aligned}
&\iint_{D \setminus B_\delta} [f(t, s) - f(x_0, y_0)] K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) dt ds \\
&\leq \sup_{\delta \leq \sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \leq \pi} K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) \iint_{D \setminus B_\delta} |f(t, s) - f(x_0, y_0)| dt ds \\
&\leq \sup_{\delta \leq \sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \leq \pi} K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) \left\{ \|f\|_{L^1_{2\pi}} + 4\pi^2 |f(x_0, y_0)| \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Ayrıca (c) şartı gereği

$$\lim_{(x, y, \lambda) \rightarrow (x_0, y_0, \lambda_0)} I_{11}(x, y, \lambda) = 0$$

olarak bulunur.

$I_{12}(x, y, \lambda)$ integraline geçersek

$$\begin{aligned}
I_{12}(x, y, \lambda) &= \iint_{D \cap B_\delta} [f(t, s) - f(x_0, y_0)] K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) dt ds \\
&< \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} \int_{y_0 - \delta}^{y_0 + \delta} [f(t, s) - f(x_0, y_0)] K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) dt ds \\
&= \left\{ \int_{x_0 - \delta}^{x_0} \int_{y_0 - \delta}^{y_0} + \int_{x_0}^{x_0 + \delta} \int_{y_0 - \delta}^{y_0} \right\} [f(t, s) - f(x_0, y_0)] K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) dt ds \\
&\quad + \left\{ \int_{x_0 - \delta}^{x_0} \int_{y_0}^{y_0 + \delta} + \int_{x_0}^{x_0 + \delta} \int_{y_0}^{y_0 + \delta} \right\} [f(t, s) - f(x_0, y_0)] K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) dt ds \\
&= I_{121}(x, y, \lambda) + I_{122}(x, y, \lambda) + I_{123}(x, y, \lambda) + I_{124}(x, y, \lambda)
\end{aligned}$$

şeklinde yazabiliriz.

$I_{121}(x, y, \lambda)$ integralini ele alalım. (3.10) eşitsizliğini göz önüne alarak

$$F(t, s) = \int_t^{x_0} \int_s^{y_0} [f(u, v) - f(x_0, y_0)] du dv$$

şeklinde bir fonksiyon tanımlayabiliriz. Yine (3.10) dan $x_0 - t \leq \delta$ ve $y_0 - s \leq \delta$ iken

$$|F(t, s)| \leq \varepsilon (x_0 - t) (y_0 - s) \quad (3.14)$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 2.11 den $f(t, s) \in L_{2\pi}^1$ olmak üzere K fonksiyonu $\langle x_0 - \delta, x_0; y_0 - \delta, y_0 \rangle$ üzerinde monoton bir fonksiyon olduğundan K fonksiyonu

$$F(t, s) = \int_t^{x_0} \int_s^{y_0} [f(u, v) - f(x_0, y_0)] du dv$$

fonksiyonuna göre Stieltjes integrallenebilir ve

$$\begin{aligned}
&\int_{x_0 - \delta}^{x_0} \int_{y_0 - \delta}^{y_0} [f(t, s) - f(x_0, y_0)] K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) dt ds \\
&= (\mathbf{S}) \int_{x_0 - \delta}^{x_0} \int_{y_0 - \delta}^{y_0} K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) dF(t, s).
\end{aligned}$$

Burada Stieltjes integraline kısmi integrasyon uygulayalım;

$$\begin{aligned}
& \int_{x_0-\delta}^{x_0} \int_{y_0-\delta}^{y_0} F(t, s) dK \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) \\
& + \int_{x_0-\delta}^{x_0} F(t, y_0 - \delta) d_t K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (y_0 - \delta - y)^2}; \lambda \right) \\
& + \int_{y_0-\delta}^{y_0} F(x_0 - \delta, s) d_s K \left(\sqrt{(x_0 - \delta - x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) \\
& + F(x_0 - \delta, y_0 - \delta) K \left(\sqrt{(x_0 - \delta - x)^2 + (y_0 - \delta - y)^2}; \lambda \right)
\end{aligned}$$

ardından (3.14) eşitsizliği ile de ifadeyi büyütürsek

$$\begin{aligned}
& \leq \int_{x_0-\delta}^{x_0} \int_{y_0-\delta}^{y_0} \varepsilon (x_0 - t) (y_0 - s) \left| dK \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) \right| \\
& + \int_{x_0-\delta}^{x_0} \varepsilon \delta (x_0 - t) \left| d_t K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (y_0 - \delta - y)^2}; \lambda \right) \right| \\
& + \int_{y_0-\delta}^{y_0} \varepsilon \delta (y_0 - s) \left| d_s K \left(\sqrt{(x_0 - \delta - x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) \right| \\
& + \varepsilon \delta^2 K \left(\sqrt{(x_0 - \delta - x)^2 + (y_0 - \delta - y)^2}; \lambda \right) \\
& = i_1 + i_2 + i_3 + i_4
\end{aligned}$$

elde ederiz. Buradaki üç integrale sırası ile kısmi integrasyon uygulayalım.

i_1 integrali için $dK \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) \geq 0$ olması göz önüne alınarak kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\begin{aligned}
i_1 & = \varepsilon \int_{x_0-\delta}^{x_0} \int_{y_0-\delta}^{y_0} K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) d(x_0 - t) (y_0 - s) \\
& + \int_{x_0-\delta}^{x_0} \varepsilon \delta K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (y_0 - \delta - y)^2}; \lambda \right) d(x_0 - t) \\
& + \int_{y_0-\delta}^{y_0} \varepsilon \delta K \left(\sqrt{(x_0 - \delta - x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) d(y_0 - s) \\
& + \varepsilon \delta^2 K \left(\sqrt{(x_0 - \delta - x)^2 + (y_0 - \delta - y)^2}; \lambda \right)
\end{aligned}$$

elde edilir.

i_2 integralini ele alalım. $\langle x_0 - \delta, x_0 \rangle$ üzerinde K fonksiyonu t değişkenine göre artan bir fonksiyondur. Yani

$$d_t K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (y_0 - \delta - y)^2}; \lambda \right) \geq 0$$

yazılabilir. Buradan i_2 integraline kısmi integrasyon uygularsak

$$\begin{aligned} i_2 &= -\varepsilon \delta^2 K \left(\sqrt{(x_0 - \delta - x)^2 + (y_0 - \delta - y)^2}; \lambda \right) \\ &\quad - \varepsilon \delta \int_{x_0 - \delta}^{x_0} K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (y_0 - \delta - y)^2}; \lambda \right) d(-t) \end{aligned}$$

elde ederiz.

Benzer şekilde $d_s K \left(\sqrt{(x_0 - \delta - x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) \geq 0$ olması göz önünde bulundurularak i_3 integraline kısmi integrasyon uygularsak

$$\begin{aligned} i_3 &= -\varepsilon \delta^2 K \left(\sqrt{(x_0 - \delta - x)^2 + (y_0 - \delta - y)^2}; \lambda \right) \\ &\quad - \varepsilon \delta \int_{y_0 - \delta}^{y_0} K \left(\sqrt{(x_0 - \delta - x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) d(-s) \end{aligned}$$

elde ederiz.

Bulduğumuz bu sonuçları toplayıp $I_{121}(x, y, \lambda)$ integralinde yerine yazarsak

$$I_{121}(x, y, \lambda) \leq \varepsilon \int_{x_0 - \delta}^{x_0} \int_{y_0 - \delta}^{y_0} K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) d(x_0 - t)(y_0 - s)$$

eşitsizliğini elde ederiz.

$I_{122}(x, y, \lambda)$ integraline geçelim.

$$I_{122}(x, y, \lambda) = \int_{x_0}^{x_0 + \delta} \int_{y_0 - \delta}^{y_0} [f(t, s) - f(x_0, y_0)] K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) dt ds$$

integrali için (3.11) eşitsizliğini gözönüne alarak

$$G(t, s) = \int_{x_0}^t \int_s^{y_0} [f(u, v) - f(x_0, y_0)] dudv$$

şeklinde bir fonksiyon tanımlayalım. Yine (3.11) den $t - x_0 \leq \delta$ ve $y_0 - s \leq \delta$ iken

$$|G(t, s)| \leq \varepsilon (t - x_0) (y_0 - s) \quad (3.15)$$

olduğu açıktır.

K fonksiyonu, $\langle x_0, x_0 + \delta; y_0 - \delta, y_0 \rangle$ üzerinde monoton olduğundan $G(t, s)$ fonksiyonuna göre Stieltjes integrallenebilir ve

$$\begin{aligned} & \int_{x_0}^{x_0+\delta} \int_{y_0-\delta}^{y_0} [f(t, s) - f(x_0, y_0)] K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) dt ds \\ &= (\mathbf{S}) \int_{x_0}^{x_0+\delta} \int_{y_0-\delta}^{y_0} K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) dG(t, s) \end{aligned}$$

eşitliği geçerlidir.

Bu eşitlikte Stieltjes integraline kısmi integrasyon metodu uygularsak

$$\begin{aligned} & \int_{x_0}^{x_0+\delta} \int_{y_0-\delta}^{y_0} K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) dG(t, s) \\ &\leq \int_{x_0}^{x_0+\delta} \int_{y_0-\delta}^{y_0} G(t, s) dK \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) \\ &\quad + \int_{x_0}^{x_0+\delta} G(t, y_0 - \delta) d_t K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (y_0 - \delta - y)^2}; \lambda \right) \\ &\quad - \int_{y_0-\delta}^{y_0} G(x_0 + \delta, s) d_s K \left(\sqrt{(x_0 + \delta - x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) \\ &\quad - G(x_0 + \delta, y_0 - \delta) K \left(\sqrt{(x_0 + \delta - x)^2 + (y_0 - \delta - y)^2}; \lambda \right) \end{aligned}$$

elde ederiz. Şimdi de (3.15) den yararlanarak ifadeleri büyütürsek

$$\begin{aligned}
&\leq \int_{x_0}^{x_0+\delta} \int_{y_0-\delta}^{y_0} \varepsilon (t-x_0)(y_0-s) \left| dK \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) \right| \\
&\quad + \int_{x_0}^{x_0+\delta} \varepsilon \delta (t-x_0) \left| d_t K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (y_0-\delta-y)^2}; \lambda \right) \right| \\
&\quad + \int_{y_0-\delta}^{y_0} \varepsilon \delta (y_0-s) \left| d_s K \left(\sqrt{(x_0+\delta-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) \right| \\
&\quad + \varepsilon \delta^2 K \left(\sqrt{(x_0+\delta-x)^2 + (y_0-\delta-y)^2}; \lambda \right) \\
&= i_1 + i_2 + i_3 + i_4
\end{aligned}$$

elde ederiz.

Burada elde edilen üç integrale sırası ile kısmi integrasyon uygulayalım.

i_1 integrali için $dK \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) \leq 0$ olması göz önüne alınarak kısmi integrasyon uygularsak

$$\begin{aligned}
i_1 &= -\varepsilon \int_{x_0}^{x_0+\delta} \int_{y_0-\delta}^{y_0} K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) d(t-x_0)(y_0-s) \\
&\quad -\varepsilon \delta \int_{x_0}^{x_0+\delta} K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (y_0-\delta-y)^2}; \lambda \right) dt \\
&\quad +\varepsilon \delta \int_{y_0-\delta}^{y_0} K \left(\sqrt{(x_0+\delta-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) d(-s) \\
&\quad +\varepsilon \delta^2 K \left(\sqrt{(x_0+\delta-x)^2 + (y_0-\delta-y)^2}; \lambda \right)
\end{aligned}$$

elde ederiz.

i_2 integrali için $d_t K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (y_0-\delta-y)^2}; \lambda \right) \leq 0$ olması göz önüne alınarak

kısmi integrasyon uygulanırsa

$$i_2 = -\varepsilon\delta^2 K \left(\sqrt{(x_0 + \delta - x)^2 + (y_0 - \delta - y)^2}; \lambda \right) \\ + \varepsilon \int_{x_0}^{x_0+\delta} \delta K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (y_0 - \delta - y)^2}; \lambda \right) dt$$

elde edilir.

i_3 integralinde $d_s K \left(\sqrt{(x_0 + \delta - x)^2 + (s - y)^2}; \lambda \right) \geq 0$ olması göz önüne alınarak kısmi integrasyon uygulanırsa

$$i_3 = -\varepsilon\delta^2 K \left(\sqrt{(x_0 + \delta - x)^2 + (y_0 - \delta - y)^2}; \lambda \right) \\ - \varepsilon\delta \int_{y_0-\delta}^{y_0} K \left(\sqrt{(x_0 + \delta - x)^2 + (s - y)^2}; \lambda \right) d(-s)$$

elde ederiz.

Bulunan sonuçlar $I_{122}(x, y, \lambda)$ integralinde yerine yazıldığında

$$I_{122}(x, y, \lambda) \leq -\varepsilon \int_{x_0}^{x_0+\delta} \int_{y_0-\delta}^{y_0} K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) d(t-x_0)(y_0-s)$$

eşitsizliği elde edilir.

Şimdi $I_{123}(x, y, \lambda)$ integralini inceleyelim.

$$I_{123}(x, y, \lambda) = \int_{x_0-\delta}^{x_0} \int_{y_0}^{y_0+\delta} [f(t, s) - f(x_0, y_0)] K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) dt ds$$

integrali için (3.12) eşitsizliğini gözönüne alarak

$$H(t, s) = \int_t^{x_0} \int_{y_0}^s [f(u, v) - f(x_0, y_0)] dudv$$

bir fonksiyon tanımlayalım. Yine (3.12) den $x_0 - t \leq \delta$ ve $s - y_0 \leq \delta$ iken

$$|H(t, s)| \leq \varepsilon (x_0 - t) (s - y_0) \quad (3.16)$$

olduğu açıktır.

K fonksiyonu, $\langle x_0 - \delta, x_0; y_0, y_0 + \delta \rangle$ üzerinde monoton olduğundan $H(t, s)$ fonksiyonuna göre Stieltjes integrallenebilir ve

$$\begin{aligned} & \int_{x_0-\delta}^{x_0} \int_{y_0}^{y_0+\delta} [f(t, s) - f(x_0, y_0)] K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) dt ds \\ &= (\mathbf{S}) \int_{x_0-\delta}^{x_0} \int_{y_0}^{y_0+\delta} K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) dH(t, s) \end{aligned}$$

eşitliği geçerlidir.

Bu eşitlikte Stieltjes integraline kısmi integrasyon metodu uygularsak

$$\begin{aligned} & \int_{x_0-\delta}^{x_0} \int_{y_0}^{y_0+\delta} H(t, s) dK \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) \\ & - \int_{x_0-\delta}^{x_0} H(t, y_0 + \delta) d_t K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (y_0 + \delta - y)^2}; \lambda \right) \\ & + \int_{y_0}^{y_0+\delta} H(x_0 - \delta, s) d_s K \left(\sqrt{(x_0 - \delta - x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) \\ & - H(x_0 - \delta, y_0 + \delta) K \left(\sqrt{(x_0 - \delta - x)^2 + (y_0 + \delta - y)^2}; \lambda \right) \end{aligned}$$

elde ederiz; ardından (3.16) eşitsizliğinden yararlanarak aşağıdaki gibi ifadeleri bütütürsek

$$\begin{aligned} & \leq \varepsilon \int_{x_0-\delta}^{x_0} \int_{y_0}^{y_0+\delta} (x_0 - t)(s - y_0) \left| dK \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) \right| \\ & + \varepsilon \delta \int_{x_0-\delta}^{x_0} (x_0 - t) \left| d_t K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (y_0 + \delta - y)^2}; \lambda \right) \right| \\ & + \varepsilon \delta \int_{y_0}^{y_0+\delta} (s - y_0) \left| d_s K \left(\sqrt{(x_0 - \delta - x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) \right| \\ & + \varepsilon \delta^2 K \left(\sqrt{(x_0 - \delta - x)^2 + (y_0 + \delta - y)^2}; \lambda \right) \\ & = i_1 + i_2 + i_3 + i_4 \end{aligned}$$

elde ederiz.

$dK \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) \leq 0$ olmak üzere i_1 integraline kısmi integrasyon uygularsak

$$\begin{aligned}
i_1 &= -\varepsilon \int_{x_0-\delta}^{x_0} \int_{y_0}^{y_0+\delta} K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) d(x_0-t)(s-y_0) \\
&+ \varepsilon \delta \int_{x_0-\delta}^{x_0} K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (y_0+\delta-y)^2}; \lambda \right) d(-t) \\
&- \varepsilon \delta \int_{y_0}^{y_0+\delta} K \left(\sqrt{(x_0-\delta-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) ds \\
&+ \varepsilon \delta^2 K \left(\sqrt{(x_0-\delta-x)^2 + (y_0+\delta-y)^2}; \lambda \right)
\end{aligned}$$

elde ederiz.

i_2 integralinde $d_t K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (y_0+\delta-y)^2}; \lambda \right) \geq 0$ olması göz önünde bulundurularak kısmi integrasyon alırsak

$$\begin{aligned}
i_2 &= -\varepsilon \delta^2 K \left(\sqrt{(x_0-\delta-x)^2 + (y_0+\delta-y)^2}; \lambda \right) \\
&- \varepsilon \delta \int_{x_0-\delta}^{x_0} K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (y_0+\delta-y)^2}; \lambda \right) d(-t)
\end{aligned}$$

elde ederiz.

i_3 integrali için $d_s K \left(\sqrt{(x_0-\delta-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) \leq 0$ olması göz önünde bulundurularak kısmi integrasyon alırsak

$$\begin{aligned}
i_3 &= -\varepsilon \delta^2 K \left(\sqrt{(x_0-\delta-x)^2 + (y_0+\delta-y)^2}; \lambda \right) \\
&+ \varepsilon \delta \int_{y_0}^{y_0+\delta} K \left(\sqrt{(x_0-x-\delta)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) ds
\end{aligned}$$

elde ederiz.

Bulunan ifadeler düzenlenip $I_{123}(x, y, \lambda)$ integralinde yerlerine yazılırsa

$$I_{123}(x, y, \lambda) \leq -\varepsilon \int_{x_0-\delta}^{x_0} \int_{y_0}^{y_0+\delta} K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) d(x_0-t)(s-y_0)$$

bulunur.

Son olarak benzer işlemleri $I_{124}(x, y, \lambda)$ için yapalım. (3.13) eşitsizliğini göz önüne alarak

$$T(t, s) = \int_{x_0}^t \int_{y_0}^s [f(u, v) - f(x_0, y_0)] dudv \quad (3.17)$$

şeklinde bir $T(t, s)$ fonksiyonu tanımlayalım. Yine (3.13) den $t-x_0 \leq \delta$ ve $s-y_0 \leq \delta$ iken

$$|T(t, s)| \leq \varepsilon (t-x_0)(s-y_0) \quad (3.18)$$

olduğu açıktır.

K fonksiyonu $\langle x_0, x_0 + \delta; y_0, y_0 + \delta \rangle$ üzerinde her bir değişkenine göre azalan olduğundan $T(t, s)$ fonksiyonuna göre Stieltjes integrallenebilirdir ve

$$\begin{aligned} & \int_{x_0}^{x_0+\delta} \int_{y_0}^{y_0+\delta} [f(t, s) - f(x_0, y_0)] K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) dt ds \\ &= (\mathbf{S}) \int_{x_0}^{x_0+\delta} \int_{y_0}^{y_0+\delta} K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) dT(t, s) \end{aligned}$$

eşitliği vardır.

Şimdi Stieltjes integraline kısmi integrasyon uygularsak

$$\begin{aligned}
& \int_{x_0}^{x_0+\delta} \int_{y_0}^{y_0+\delta} K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) dT(t, s) \\
= & \int_{x_0}^{x_0+\delta} \int_{y_0}^{y_0+\delta} T(t, s) dK \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) \\
& - \int_{x_0}^{x_0+\delta} T(t, s) d_t K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (y_0 + \delta - y)^2}; \lambda \right) \\
& - \int_{y_0}^{y_0+\delta} T(t, s) d_s K \left(\sqrt{(x_0 + \delta - x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) \\
& + \varepsilon \delta^2 K \left(\sqrt{(x_0 + \delta - x)^2 + (y_0 + \delta - y)^2}; \lambda \right)
\end{aligned}$$

elde ederiz. Şimdi de (3.18) eşitsizliği ile elde edilen ifadeleri büyütürsek

$$\begin{aligned}
\leq & \int_{x_0}^{x_0+\delta} \int_{y_0}^{y_0+\delta} \varepsilon (t-x_0)(s-y_0) \left| dK \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) \right| \\
& + \int_{x_0}^{x_0+\delta} \varepsilon \delta (t-x_0) \left| d_t K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (y_0 + \delta - y)^2}; \lambda \right) \right| \\
& + \int_{y_0}^{y_0+\delta} \varepsilon \delta (s-y_0) \left| d_s K \left(\sqrt{(x_0 + \delta - x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) \right| \\
& + \varepsilon \delta^2 K \left(\sqrt{(x_0 + \delta - x)^2 + (y_0 + \delta - y)^2}; \lambda \right) \\
= & i_1 + i_2 + i_3 + i_4
\end{aligned}$$

elde ederiz. Bulduğumuz bu üç integrale kısmi integrasyon uygulayalım.

$dK \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) \geq 0$ olmak üzere i_1 integraline kısmi integrasyon

uygularsak

$$\begin{aligned}
i_1 &= \int_{x_0}^{x_0+\delta} \int_{y_0}^{y_0+\delta} \varepsilon K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) d(t-x_0)(s-y_0) \\
&\quad - \varepsilon \int_{x_0}^{x_0+\delta} K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (y_0+\delta-y)^2}; \lambda \right) dt \\
&\quad - \varepsilon \int_{y_0}^{y_0+\delta} K \left(\sqrt{(x_0+\delta-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) ds \\
&\quad + \varepsilon \delta^2 K \left(\sqrt{(x_0+\delta-x)^2 + (y_0+\delta-y)^2}; \lambda \right)
\end{aligned}$$

elde ederiz.

$\langle x_0, x_0 + \delta \rangle$ üzerinde K fonksiyonu t değişkenine göre azalan bir fonksiyon olduğundan

$$d_t K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (y_0+\delta-y)^2}; \lambda \right) \leq 0$$

yazılabilir.

Buna göre i_2 integraline kısmi integrasyon uygularsak

$$\begin{aligned}
i_2 &= -\varepsilon \delta^2 K \left(\sqrt{(x_0+\delta-x)^2 + (y_0+\delta-y)^2}; \lambda \right) \\
&\quad + \varepsilon \delta \int_{x_0}^{x_0+\delta} K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (y_0+\delta-y)^2}; \lambda \right) dt
\end{aligned}$$

elde ederiz.

$\langle y_0, y_0 + \delta \rangle$ üzerinde K fonksiyonu s değişkenine göre azalan bir fonksiyon olduğundan

$$d_s K \left(\sqrt{(x_0+\delta-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) \leq 0$$

yazılabilir.

Buna göre i_3 integraline kısmi integrasyon uygularsak

$$i_3 = -\varepsilon\delta^2 K \left(\sqrt{(x_0 + \delta - x)^2 + (y_0 + \delta - y)^2}; \lambda \right) \\ + \varepsilon\delta \int_{y_0}^{y_0+\delta} K \left(\sqrt{(x_0 + \delta - x)^2 + (s - y)^2}; \lambda \right) ds$$

elde ederiz.

Bulunan bu sonuçları $I_{124}(x, y, \lambda)$ integralinde yerine yazdığımızda

$$I_{124}(x, y, \lambda) \leq \int_{x_0}^{x_0+\delta} \int_{y_0}^{y_0+\delta} \varepsilon K \left(\sqrt{(t - x)^2 + (s - y)^2}; \lambda \right) d(t - x_0)(s - y_0)$$

elde ederiz.

Öncelikle $I_{121}(x, y, \lambda)$, $I_{122}(x, y, \lambda)$, $I_{123}(x, y, \lambda)$ ve $I_{124}(x, y, \lambda)$ için bulunan sonuçları yazarsak

$$I_{121}(x, y, \lambda) \leq \varepsilon \int_{x_0-\delta}^{x_0} \int_{y_0-\delta}^{y_0} K \left(\sqrt{(t - x)^2 + (s - y)^2}; \lambda \right) d(x_0 - t)(y_0 - s)$$

$$I_{122}(x, y, \lambda) \leq \varepsilon \int_{x_0}^{x_0+\delta} \int_{y_0-\delta}^{y_0} K \left(\sqrt{(t - x)^2 + (s - y)^2}; \lambda \right) d(t - x_0)(s - y_0)$$

$$I_{123}(x, y, \lambda) \leq \varepsilon \int_{x_0-\delta}^{x_0} \int_{y_0}^{y_0+\delta} K \left(\sqrt{(t - x)^2 + (s - y)^2}; \lambda \right) d(t - x_0)(s - y_0)$$

$$I_{124}(x, y, \lambda) \leq \int_{x_0}^{x_0+\delta} \int_{y_0}^{y_0+\delta} \varepsilon K \left(\sqrt{(t - x)^2 + (s - y)^2}; \lambda \right) d(t - x_0)(s - y_0)$$

elde ederiz. Bu ifadeleri toplarsak

$$I_{12}(x, y, \lambda) \leq \varepsilon \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta} K \left(\sqrt{(t - x)^2 + (s - y)^2}; \lambda \right) d(t - x_0)(s - y_0)$$

sonucuna ulaşılır.

$$\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta} K \left(\sqrt{(t - x)^2 + (s - y)^2}; \lambda \right) d(t - x_0)(s - y_0) \leq C < \infty$$

durumunun sağlandığı noktalar kümesi üzerinde

$$\varepsilon \rightarrow 0 \text{ olduğunda } I_{12}(x, y, \lambda) \rightarrow 0$$

olacaktır.

$I_1(x, y, \lambda) = I_{11}(x, y, \lambda) + I_{12}(x, y, \lambda)$ olduğundan

$$\lim_{(x,y,\lambda) \rightarrow (x_0,y_0,\lambda_0)} I_1(x, y, \lambda) = 0$$

olur.

Son olarak (b) koşulu göz önüne alındığında

$$\lim_{(x,y,\lambda) \rightarrow (x_0,y_0,\lambda_0)} I_2(x, y, \lambda) = 0$$

sonucuna ulaşırız. Sonuç olarak

$$(x, y, \lambda) \rightarrow (x_0, y_0, \lambda_0) \text{ iken } I_1(x, y, \lambda) + I_2(x, y, \lambda) \rightarrow 0$$

Böylece teoremin ispatı tamamlanmış oldu. ■

Teorem 3.5 $K(\sqrt{t^2 + s^2}; \lambda)$ fonksiyonu $\langle x_0, \pi; y_0, \pi \rangle$ kümesi üzerinde herbir değişkenine göre monoton azalan ve A sınıfından olsun.

Ayrıca $\langle x_0, \pi; y_0, \pi \rangle$ ve $\langle -\pi, x_0; -\pi, y_0 \rangle$ üzerinde $\Delta K(\sqrt{t^2 + s^2}; \lambda) \geq 0$ ve

$\langle x_0, \pi; -\pi, y_0 \rangle$ ve $\langle -\pi, x_0; y_0, \pi \rangle$ üzerinde $\Delta K(\sqrt{t^2 + s^2}; \lambda) \leq 0$ sağlansın.

Eğer (x_0, y_0) noktası $f \in L_{2\pi}^1$ fonksiyonunun genelleştirilmiş Lebesgue noktası ise $(0 \leq \alpha < 1)$ olmak üzere

$$\int_{x_0 - \delta y_0 - \delta}^{x_0 + \delta y_0 + \delta} \int K\left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda\right) \left|d(t-x)^{(\alpha+1)}(s-y)^{(\alpha+1)}\right| \quad (3.19)$$

fonksiyonunun sınırlı kaldığı (x, y, λ) noktaları kümesi üzerinde

$$\lim_{(x,y,\lambda) \rightarrow (x_0,y_0,\lambda_0)} L(f; x, y, \lambda) = f(x_0, y_0)$$

eşitliği doğrudur.

İspat. $(x_0, y_0) \in D$ noktası, f nin genelleştirilmiş Lebesgue noktası olsun.

$0 \leq \alpha < 1$ olmak üzere genelleştirilmiş Lebesgue noktası tanımı gereği

$$\lim_{(h,r) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{h^{\alpha+1}r^{\alpha+1}} \int_{-h-r}^0 \int_{-h-r}^0 |f(t+x_0, s+y_0) - f(x_0, y_0)| dt ds = 0$$

$$\lim_{(h,r) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{h^{\alpha+1}r^{\alpha+1}} \int_0^h \int_{-r}^0 |f(t+x_0, s+y_0) - f(x_0, y_0)| dt ds = 0$$

$$\lim_{(h,r) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{h^{\alpha+1}r^{\alpha+1}} \int_{-h}^0 \int_0^r |f(t+x_0, s+y_0) - f(x_0, y_0)| dt ds = 0$$

$$\lim_{(h,r) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{h^{\alpha+1}r^{\alpha+1}} \int_0^h \int_0^r |f(t+x_0, s+y_0) - f(x_0, y_0)| dt ds = 0$$

eşitliklerini yazabiliriz.

Yukarıdaki eşitliklerden görüldüğü gibi her $\varepsilon > 0$ için $0 < h, r \leq \delta$ olduğunda

$$\int_{x_0-\delta}^{x_0} \int_{y_0-\delta}^{y_0} |f(t, s) - f(x_0, y_0)| dt ds \leq \varepsilon h^{\alpha+1} r^{\alpha+1} \quad (3.20)$$

$$\int_{x_0}^{x_0+\delta} \int_{y_0-\delta}^{y_0} |f(t, s) - f(x_0, y_0)| dt ds \leq \varepsilon h^{\alpha+1} r^{\alpha+1} \quad (3.21)$$

$$\int_{x_0-\delta}^{x_0} \int_{y_0}^{y_0+\delta} |f(t, s) - f(x_0, y_0)| dt ds \leq \varepsilon h^{\alpha+1} r^{\alpha+1} \quad (3.22)$$

$$\int_{x_0}^{x_0+\delta} \int_{y_0}^{y_0+\delta} |f(t, s) - f(x_0, y_0)| dt ds \leq \varepsilon h^{\alpha+1} r^{\alpha+1} \quad (3.23)$$

eşitsizlikleri sağlanacak şekilde en az bir $\delta > 0$ sayısı vardır.

$I(x, y; \lambda) := L(f; x, y, \lambda) - f(x_0, y_0)$ olmak üzere

$$|I(x, y; \lambda)| = \left| \int_{-\pi-\pi}^{\pi} \int_{-\pi-\pi}^{\pi} f(t, s) K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) dt ds - f(x_0, y_0) \right|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_{-\pi-\pi}^{\pi} \int_{-\pi-\pi}^{\pi} |f(t, s) - f(x_0, y_0)| \left| K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) \right| dt ds \\
&\quad + |f(x_0, y_0)| \left| \int_{-\pi-\pi}^{\pi} \int_{-\pi-\pi}^{\pi} K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) dt ds - 1 \right| \\
&: = I_1(x, y, \lambda) + I_2(x, y, \lambda)
\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir.

$I_1(x, y, \lambda)$ integralini,

$$B_\delta = \{(t, s) : (t-x_0)^2 + (s-y_0)^2 \leq \delta^2, (x_0, y_0) \in D\}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
I_1(x, y, \lambda) &= \left\{ \iint_{D \setminus B_\delta} + \iint_{D \cap B_\delta} \right\} |f(t, s) - f(x_0, y_0)| K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) dt ds \\
&= I_{11}(x, y, \lambda) + I_{12}(x, y, \lambda)
\end{aligned}$$

şeklinde $D \setminus B_\delta$ ve $D \cap B_\delta$ kümeleri üzerinde inceleyelim.

$I_{11}(x, y, \lambda)$ integralini ele alalım.

$$\begin{aligned}
&\iint_{D \setminus B_\delta} |f(t, s) - f(x_0, y_0)| K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) dt ds \\
&\leq \sup_{\delta \leq \sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \leq \pi} K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) \iint_{D \setminus B_\delta} |f(t, s) - f(x_0, y_0)| dt ds \\
&\leq \sup_{\delta \leq \sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \leq \pi} K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) \left\{ \|f\|_{L^1_{2\pi}} + 4\pi^2 |f(x_0, y_0)| \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca (c) şartı gereği

$$\lim_{(x,y,\lambda) \rightarrow (x_0,y_0,\lambda_0)} I_{11}(x, y, \lambda) = 0$$

olarak bulunur.

$I_{12}(x, y, \lambda)$ integraline geçersek

$$\begin{aligned}
I_{12}(x, y, \lambda) &= \iint_{D \cap B_\delta} |f(t, s) - f(x_0, y_0)| K\left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda\right) dt ds \\
&< \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} \int_{y_0 - \delta}^{y_0 + \delta} |f(t, s) - f(x_0, y_0)| K\left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda\right) dt ds \\
&= \left\{ \int_{x_0 - \delta}^{x_0} \int_{y_0 - \delta}^{y_0} + \int_{x_0}^{x_0 + \delta} \int_{y_0 - \delta}^{y_0} \right\} |f(t, s) - f(x_0, y_0)| K\left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda\right) dt ds \\
&\quad + \left\{ \int_{x_0 - \delta}^{x_0} \int_{y_0}^{y_0 + \delta} + \int_{x_0}^{x_0 + \delta} \int_{y_0}^{y_0 + \delta} \right\} |f(t, s) - f(x_0, y_0)| K\left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda\right) dt ds \\
&= I_{121}(x, y, \lambda) + I_{122}(x, y, \lambda) + I_{123}(x, y, \lambda) + I_{124}(x, y, \lambda)
\end{aligned}$$

yazabiliriz.

(3.20) eşitsizliğini göz önüne alarak

$$F(t, s) = \int_t^{x_0} \int_s^{y_0} |f(u, v) - f(x_0, y_0)| du dv$$

şeklinde bir $F(t, s)$ fonksiyonu tanımlayalım. $x_0 - t \leq \delta$ ve $y_0 - s \leq \delta$ iken

$$|F(t, s)| \leq \varepsilon (x_0 - t)^{\alpha+1} (y_0 - s)^{\alpha+1} \quad (3.24)$$

eşitsizliği (3.20) den sağlanır.

K fonksiyonu, $\langle x_0 - \delta, x_0; y_0 - \delta, y_0 \rangle$ üzerinde $F(t, s)$ fonksiyonuna göre Stieltjes integrallenebilir ve

$$\begin{aligned}
&\int_{x_0 - \delta}^{x_0} \int_{y_0 - \delta}^{y_0} |f(t, s) - f(x_0, y_0)| K\left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda\right) dt ds \\
&= (\mathbf{S}) \int_{x_0 - \delta}^{x_0} \int_{y_0 - \delta}^{y_0} K\left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda\right) dF(t, s)
\end{aligned}$$

olur. Burada Stieltjes integraline kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\begin{aligned}
& \int_{x_0-\delta}^{x_0} \int_{y_0-\delta}^{y_0} K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) dF(t, s) \\
= & \int_{x_0-\delta}^{x_0} \int_{y_0-\delta}^{y_0} F(t, s) dK \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) \\
& + \int_{x_0-\delta}^{x_0} F(t, y_0 - \delta) d_t K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (y_0 - y - \delta)^2}; \lambda \right) \\
& + \int_{y_0-\delta}^{y_0} F(x_0 - \delta, s) d_s K \left(\sqrt{(x_0 - x - \delta)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) \\
& + F(x_0 - \delta, y_0 - \delta) K \left(\sqrt{(x_0 - x - \delta)^2 + (y_0 - y - \delta)^2}; \lambda \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Ardından (3.24) eşitsizliği de göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
& \leq \varepsilon \int_{x_0-\delta}^{x_0} \int_{y_0-\delta}^{y_0} (x_0 - t)^{\alpha+1} (y_0 - s)^{\alpha+1} \left| dK \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) \right| \\
& + \varepsilon \delta^{\alpha+1} \int_{x_0-\delta}^{x_0} (x_0 - t)^{\alpha+1} \left| d_t K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (y_0 - \delta - y)^2}; \lambda \right) \right| \\
& + \varepsilon \delta^{\alpha+1} \int_{y_0-\delta}^{y_0} (y_0 - s)^{\alpha+1} \left| d_s K \left(\sqrt{(x_0 - \delta - x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) \right| \\
& + \varepsilon \delta^{2(\alpha+1)} K \left(\sqrt{(x_0 - \delta - x)^2 + (y_0 - \delta - y)^2}; \lambda \right) \\
= & i_1 + i_2 + i_3 + i_4
\end{aligned}$$

elde edilir.

Sırası ile elde ettiğimiz integrallere kısmi integrasyon uygulayalım.

i_1 integrali için $dK \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) \geq 0$ olmak üzere i_1 integraline kısmi

integrasyon uyguladığımızda

$$\begin{aligned}
i_1 &= \varepsilon \int_{x_0-\delta}^{x_0} \int_{y_0-\delta}^{y_0} K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) d(x_0-t)^{\alpha+1} (y_0-s)^{\alpha+1} \\
&\quad + \varepsilon \delta^{\alpha+1} \int_{x_0-\delta}^{x_0} K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (y_0-\delta-y)^2}; \lambda \right) d(x_0-t)^{\alpha+1} \\
&\quad + \varepsilon \delta^{\alpha+1} \int_{y_0-\delta}^{y_0} K \left(\sqrt{(x_0-\delta-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) d(y_0-s)^{\alpha+1} \\
&\quad + \varepsilon \delta^{\alpha+1} K \left(\sqrt{(x_0-\delta-x)^2 + (y_0-\delta-y)^2}; \lambda \right)
\end{aligned}$$

elde edilir.

i_2 integrali için $d_t K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (y_0-\delta-y)^2}; \lambda \right) \geq 0$ olmak üzere kısmi integrasyon uygularsak

$$\begin{aligned}
i_2 &= -\varepsilon \delta^{2(\alpha+1)} K \left(\sqrt{(x_0-\delta-x)^2 + (y_0-\delta-y)^2}; \lambda \right) \\
&\quad - \varepsilon \delta^{\alpha+1} \int_{x_0-\delta}^{x_0} K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (y_0-\delta-y)^2}; \lambda \right) d(x_0-t)^{\alpha+1}
\end{aligned}$$

elde ederiz.

i_3 integrali için $d_s K \left(\sqrt{(x_0-\delta-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) \geq 0$ olmak üzere i_3 integraline kısmi integrasyon uygularsak

$$\begin{aligned}
i_3 &= -\varepsilon \delta^{2(\alpha+1)} K \left(\sqrt{(x_0-\delta-x)^2 + (y_0-\delta-y)^2}; \lambda \right) \\
&\quad - \varepsilon \delta^{\alpha+1} \int_{y_0-\delta}^{y_0} K \left(\sqrt{(x_0-\delta-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) d(y_0-s)^{\alpha+1}
\end{aligned}$$

elde ederiz.

Şimdi bulduğumuz bu ifadeleri toplarsak

$$i_1 + i_2 + i_3 + i_4 = \varepsilon \int_{x_0-\delta}^{x_0} \int_{y_0-\delta}^{y_0} K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) d(x_0-t)^{\alpha+1} (y_0-s)^{\alpha+1}$$

sonucunu elde ederiz. Yani

$$I_{121}(x, y, \lambda) \leq \varepsilon \int_{x_0 - \delta}^{x_0} \int_{y_0 - \delta}^{y_0} K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) d(x_0 - t)^{\alpha+1} (y_0 - s)^{\alpha+1}$$

olur.

$I_{122}(x, y, \lambda)$ integralini benzer işlemler ile inceleyelim.

Aşağıdaki gibi bir $G(t, s)$ fonksiyon tanımlayalım:

$$G(t, s) = \int_{x_0}^t \int_s^{y_0} |f(u, v) - f(x_0, y_0)| dudv$$

$t - x_0 \leq \delta$ ve $y_0 - s \leq \delta$ iken $|G(t, s)| \leq \varepsilon (t - x_0)^{(\alpha+1)} (y_0 - s)^{(\alpha+1)}$ olduğu açıktır.

K fonksiyonu $\langle x_0, x_0 + \delta; y_0 - \delta, y_0 \rangle$ üzerinde $G(t, s)$ fonksiyonuna göre Stieltjes integralenebilir ve

$$\begin{aligned} & \int_{x_0}^{x_0 + \delta} \int_{y_0 - \delta}^{y_0} |f(t, s) - f(x_0, y_0)| K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) dt ds \\ &= (\mathbf{S}) \int_{x_0}^{x_0 + \delta} \int_{y_0 - \delta}^{y_0} K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) dG(t, s) \end{aligned}$$

Burada Stieltjes integraline kısmi integrasyon uygularsak

$$\begin{aligned} & (\mathbf{S}) \int_{x_0}^{x_0 + \delta} \int_{y_0 - \delta}^{y_0} K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) dG(t, s) \\ &= \int_{x_0}^{x_0 + \delta} \int_{y_0 - \delta}^{y_0} G(t, s) dK \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) \\ & \quad + \int_{x_0}^{x_0 + \delta} G(t, y_0 - \delta) d_t K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (y_0 - \delta - y)^2}; \lambda \right) \\ & \quad - \int_{y_0 - \delta}^{y_0} G(x_0 + \delta, s) d_s K \left(\sqrt{(x_0 + \delta - x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) \\ & \quad - G(x_0 + \delta, y_0 - \delta) K \left(\sqrt{(x_0 + \delta - x)^2 + (y_0 - \delta - y)^2}; \lambda \right) \end{aligned}$$

elde edilir ardından $|G(t, s)| \leq \varepsilon (t - x_0)^{(\alpha+1)} (y_0 - s)^{(\alpha+1)}$ eşitsizliği ile

$$\begin{aligned}
&\leq \int_{x_0}^{x_0+\delta} \int_{y_0-\delta}^{y_0} \varepsilon (t - x_0)^{(\alpha+1)} (y_0 - s)^{(\alpha+1)} \left| dK \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) \right| \\
&\quad + \int_{x_0}^{x_0+\delta} \varepsilon (t - x_0)^{(\alpha+1)} \delta^{(\alpha+1)} \left| d_t K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (y_0 - \delta - y)^2}; \lambda \right) \right| \\
&\quad + \int_{y_0-\delta}^{y_0} \varepsilon \delta^{(\alpha+1)} (y_0 - s)^{(\alpha+1)} \left| d_s K \left(\sqrt{(x_0 + \delta - x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) \right| \\
&\quad + \varepsilon \delta^{2(\alpha+1)} K \left(\sqrt{(x_0 + \delta - x)^2 + (y_0 - \delta - y)^2}; \lambda \right) \\
&= i_1 + i_2 + i_3 + i_4
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır.

i_1, i_2, i_3 integrallerine sırasıyla kısmi integrasyon uygulayalım.

i_1 integrali için $dK \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) \leq 0$ olması göz önüne alınarak kısmi integrasyon uygulayalım

$$\begin{aligned}
&\int_{x_0}^{x_0+\delta} \int_{y_0-\delta}^{y_0} \varepsilon (t - x_0)^{(\alpha+1)} (y_0 - s)^{(\alpha+1)} \left| dK \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) \right| \\
&= -\varepsilon \int_{x_0}^{x_0+\delta} \int_{y_0-\delta}^{y_0} K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) d(t - x_0)^{(\alpha+1)} (y_0 - s)^{(\alpha+1)} \\
&\quad - \varepsilon \int_{x_0}^{x_0+\delta} \delta^{(\alpha+1)} K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (y_0 - \delta - y)^2}; \lambda \right) d(t - x_0)^{(\alpha+1)} \\
&\quad + \varepsilon \int_{y_0-\delta}^{y_0} \delta^{(\alpha+1)} K \left(\sqrt{(x_0 + \delta - x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) d(y_0 - s)^{(\alpha+1)} \\
&\quad + \varepsilon \delta^{2(\alpha+1)} K \left(\sqrt{(x_0 + \delta - x)^2 + (y_0 - \delta - y)^2}; \lambda \right)
\end{aligned}$$

elde edilir.

i_2 integralini ele alırsak K fonksiyonu t değişkenine göre azalan bir fonksiyon olduğun-

dan

$$d_t K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (y_0 - \delta - y)^2}; \lambda \right) \leq 0$$

dır.

Buna göre i_2 integraline kısmi integrasyon uygulandığında

$$\begin{aligned} i_2 &= -\varepsilon \delta^{2(\alpha+1)} K \left(\sqrt{(x_0 + \delta - x)^2 + (y_0 - \delta - y)^2}; \lambda \right) \\ &\quad + \varepsilon \delta^{(\alpha+1)} \int_{x_0}^{x_0 + \delta} K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (y_0 - \delta - y)^2}; \lambda \right) d(t-x_0)^{(\alpha+1)} \end{aligned}$$

elde edilir.

i_3 integrali için K fonksiyonu s değişkenine göre artan bir fonksiyon olduğundan

$$d_s K \left(\sqrt{(x_0 + \delta - x)^2 + (s - y)^2}; \lambda \right) \geq 0$$

yazılabilir. Buna göre i_3 integraline kısmi integrasyon uygursak

$$\begin{aligned} i_3 &= -\varepsilon \delta^{2(\alpha+1)} K \left(\sqrt{(x_0 + \delta - x)^2 + (y_0 - \delta - y)^2}; \lambda \right) \\ &\quad - \varepsilon \delta^{\alpha+1} \int_{y_0 - \delta}^{y_0} K \left(\sqrt{(x_0 + \delta - x)^2 + (s - y)^2}; \lambda \right) d(y_0 - s)^{(\alpha+1)} \end{aligned}$$

elde ederiz.

Bulduğumuz sonuçları $I_{122}(x, y, \lambda)$ integralinde yerine yazalım;

$$I_{122}(x, y, \lambda) \leq -\varepsilon \int_{x_0}^{x_0 + \delta} \int_{y_0 - \delta}^{y_0} K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) d(t-x_0)^{\alpha+1} (y_0 - s)^{\alpha+1}$$

sonucuna ulaşırız.

Şimdi $I_{123}(x, y, \lambda)$ integralini inceleyelim.

(3.21) eşitsizliği göz önüne alarak bir $H(t, s)$ fonksiyonu tanımlayalım:

$$H(t, s) = \int_t^{x_0} \int_{y_0}^s |f(u, v) - f(x_0, y_0)| dudv.$$

$x_0 - t \leq \delta$ ve $s - y_0 \leq \delta$ iken

$$|H(t, s)| \leq \varepsilon (x_0 - t)^{(\alpha+1)} (s - y_0)^{(\alpha+1)} \quad (3.25)$$

olduğu açıktır.

K fonksiyonu $\langle x_0 - \delta, x_0; y_0, y_0 + \delta \rangle$ üzerinde $H(t, s)$ fonksiyonuna göre Stieltjes integrallenebilir ve aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$\begin{aligned} & \int_{x_0-\delta}^{x_0} \int_{y_0}^{y_0+\delta} |f(t, s) - f(x_0, y_0)| K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) dt ds \\ &= (\mathbf{S}) \int_{x_0-\delta}^{x_0} \int_{y_0}^{y_0+\delta} K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) dH(t, s) \end{aligned}$$

Burada Stieltjes integraline kısmi integrasyon uygularsak

$$\begin{aligned} & \int_{x_0-\delta}^{x_0} \int_{y_0}^{y_0+\delta} H(t, s) dK \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) \\ & - \int_{x_0-\delta}^{x_0} H(t, y_0 + \delta) d_t K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (y_0 - y + \delta)^2}; \lambda \right) \\ & + \int_{y_0}^{y_0+\delta} H(x_0 - \delta, s) d_s K \left(\sqrt{(x_0 - x - \delta)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) \\ & - H(x_0 - \delta, y_0 + \delta) K \left(\sqrt{(x_0 - x - \delta)^2 + (y_0 - y + \delta)^2}; \lambda \right) \end{aligned}$$

elde ederiz. Ardından ifadeyi (3.25) yardımı ile aşağıdaki gibi büyütürsek

$$\begin{aligned} & \leq \varepsilon \int_{x_0-\delta}^{x_0} \int_{y_0}^{y_0+\delta} (x_0 - t)^{(\alpha+1)} (s - y_0)^{(\alpha+1)} \left| dK \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) \right| \\ & + \varepsilon \delta^{(\alpha+1)} \int_{x_0-\delta}^{x_0} (x_0 - t)^{(\alpha+1)} \left| d_t K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (y_0 - y + \delta)^2}; \lambda \right) \right| \\ & + \varepsilon \delta^{(\alpha+1)} \int_{y_0}^{y_0+\delta} (s - y_0)^{(\alpha+1)} \left| d_s K \left(\sqrt{(x_0 - x + \delta)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) \right| \\ & + \varepsilon \delta^{2(\alpha+1)} K \left(\sqrt{(x_0 - x - \delta)^2 + (y_0 - y + \delta)^2}; \lambda \right) \\ & = i_1 + i_2 + i_3 + i_4 \end{aligned}$$

elde ederiz.

Sırasıyla i_1 , i_2 ve i_3 integrallerine kısmi integrasyon uygulayalım.

i_1 integralini ele alalım. $dK \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) \leq 0$ olması göz önünde bulundurarak kısmi integrasyon uygulayalım.

Bu durumda

$$\begin{aligned}
i_1 &= -\varepsilon \int_{x_0-\delta}^{x_0} \int_{y_0}^{y_0+\delta} K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) d(x_0-t)^{(\alpha+1)} (s-y_0)^{(\alpha+1)} \\
&\quad + \varepsilon \delta^{(\alpha+1)} \int_{x_0-\delta}^{x_0} K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (y_0-y+\delta)^2}; \lambda \right) d(x_0-t)^{(\alpha+1)} \\
&\quad - \varepsilon \delta^{(\alpha+1)} \int_{y_0}^{y_0+\delta} K \left(\sqrt{(x_0-x-\delta)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) d(s-y_0)^{(\alpha+1)} \\
&\quad + \varepsilon \delta^{2(\alpha+1)} K \left(\sqrt{(x_0-\delta-x)^2 + (y_0+\delta-y)^2}; \lambda \right)
\end{aligned}$$

elde edilir.

i_2 integralini ele alalım. $\langle x_0-\delta, x_0 \rangle$ aralığında K fonksiyonu t değişkenine göre artan bir fonksiyondur. Yani

$$d_t K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (y_0-y+\delta)^2}; \lambda \right) \geq 0$$

sağlanır.

Buna göre i_2 integraline kısmi integrasyon uygularsak

$$\begin{aligned}
i_2 &= -\varepsilon \delta^{2(\alpha+1)} K \left(\sqrt{(x_0-\delta-x)^2 + (y_0+\delta-y)^2}; \lambda \right) \\
&\quad - \varepsilon \delta^{(\alpha+1)} \int_{x_0-\delta}^{x_0} K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (y_0+\delta-y)^2}; \lambda \right) d(x_0-t)^{(\alpha+1)}
\end{aligned}$$

elde ederiz.

i_3 integralini ele alırsak $\langle y_0, y_0 + \delta \rangle$ aralığında K fonksiyonu s değişkenine göre azalan bir fonksiyondur. Yani

$$d_s K \left(\sqrt{(x_0 - x + \delta)^2 + (s - y)^2}; \lambda \right) \leq 0$$

sağlanır. Buna göre i_3 integraline kısmi integrasyon uyguladığımızda

$$\begin{aligned} i_3 &= -\varepsilon \delta^{2(\alpha+1)} K \left(\sqrt{(x_0 - \delta - x)^2 + (y_0 + \delta - y)^2}; \lambda \right) \\ &\quad + \varepsilon \delta^{(\alpha+1)} \int_{y_0}^{y_0+\delta} K \left(\sqrt{(x_0 - \delta - x)^2 + (s - y)^2}; \lambda \right) d(s - y_0)^{(\alpha+1)} \end{aligned}$$

elde ederiz.

Bulduklarımızı $I_{123}(x, y, \lambda)$ integralinde yerine yazarsak

$$I_{123}(x, y, \lambda) \leq -\varepsilon \int_{x_0-\delta}^{x_0} \int_{y_0}^{y_0+\delta} K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) d(x_0 - t)^{(\alpha+1)} (s - y_0)^{(\alpha+1)}$$

eşitsizliğini elde ederiz.

$I_{124}(x, y, \lambda)$ integrali benzer bir metodla hesaplayalım.

(3.23) eşitsizliğini göz önüne alarak

$$T(t, s) = \int_{x_0}^t \int_{y_0}^s |f(u, v) - f(x_0, y_0)| dudv$$

şeklinde bir $T(t, s)$ fonksiyonu tanımlayalım. $t - x_0 \leq \delta$ ve $s - y_0 \leq \delta$ iken

$$|T(t, s)| \leq \varepsilon (t - x_0)^{\alpha+1} (s - y_0)^{\alpha+1} \quad (3.26)$$

eşitsizliği (3.23) den sağlanır.

K fonksiyonu, $\langle x_0, x_0 + \delta; y_0, y_0 + \delta \rangle$ üzerinde $T(t, s)$ fonksiyonuna göre Stieltjes in-

tegrallenebiliridir ve

$$\begin{aligned} & \int_{x_0}^{x_0+\delta} \int_{y_0}^{y_0+\delta} |f(t, s) - f(x_0, y_0)| K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) dt ds \\ &= (\mathbf{S}) \int_{x_0}^{x_0+\delta} \int_{y_0}^{y_0+\delta} K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) dT(t, s). \end{aligned}$$

Burada Stieltjes integraline kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\begin{aligned} & \int_{x_0}^{x_0+\delta} \int_{y_0}^{y_0+\delta} K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) dT(t, s) \\ &= \int_{x_0}^{x_0+\delta} \int_{y_0}^{y_0+\delta} T(t, s) dK \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) \\ & \quad - \int_{x_0}^{x_0+\delta} T(t, y_0 + \delta) d_t K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (y_0 + \delta - y)^2}; \lambda \right) \\ & \quad - \int_{y_0}^{y_0+\delta} T(x_0 + \delta, s) d_s K \left(\sqrt{(x_0 + \delta - x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) \\ & \quad + T(x_0 + \delta, y_0 + \delta) K \left(\sqrt{(x_0 + \delta - x)^2 + (y_0 + \delta - y)^2}; \lambda \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi (3.26) göz önüne alındığında

$$\begin{aligned} & \leq \int_{x_0}^{x_0+\delta} \int_{y_0}^{y_0+\delta} \varepsilon (t-x_0)^{\alpha+1} (s-y_0)^{\alpha+1} \left| dK \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) \right| \\ & \quad + \int_{x_0}^{x_0+\delta} \varepsilon \delta^{\alpha+1} (t-x_0)^{\alpha+1} \left| d_t K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (y_0 + \delta - y)^2}; \lambda \right) \right| \\ & \quad + \int_{y_0}^{y_0+\delta} \varepsilon \delta^{\alpha+1} (s-y_0)^{\alpha+1} \left| d_s K \left(\sqrt{(x_0 + \delta - x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) \right| \\ & \quad + T(x_0 + \delta, y_0 + \delta) K \left(\sqrt{(x_0 + \delta - x)^2 + (y_0 + \delta - y)^2}; \lambda \right) \\ &= i_1 + i_2 + i_3 + i_4 \end{aligned}$$

elde edilir.

Burada elde edilen integrallere kısmi integrasyon uygulayalım.

Öncelikle i_1 integralini ele alalım. $\langle x_0, x_0 + \delta; y_0, y_0 + \delta \rangle$ kümesi üzerinde

$$dK \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) \geq 0$$

olduğunu biliyoruz.

Bunu göz önüne alarak i_1 integraline kısmi integral uygularsak

$$\begin{aligned} i_1 &= \int_{x_0}^{x_0+\delta} \int_{y_0}^{y_0+\delta} \varepsilon K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) d(t-x)^{\alpha+1} (s-y)^{\alpha+1} \\ &\quad - \varepsilon \delta^{\alpha+1} \int_{x_0}^{x_0+\delta} K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (y_0 + \delta - y)^2}; \lambda \right) d(t-x)^{\alpha+1} \\ &\quad - \varepsilon \delta^{\alpha+1} \int_{y_0}^{y_0+\delta} K \left(\sqrt{(x_0 + \delta - x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) d(s-y)^{\alpha+1} \\ &\quad + \varepsilon \delta^{2(\alpha+1)} K \left(\sqrt{(x_0 + \delta - x)^2 + (y_0 + \delta - y)^2}; \lambda \right) \end{aligned}$$

elde ederiz.

i_2 integralini ele alalım.

$$d_t K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (y_0 + \delta - y)^2}; \lambda \right) \leq 0$$

olmak üzere i_2 integraline kısmi integrasyon uygularsak

$$\begin{aligned} i_2 &= -\varepsilon \delta^{2(\alpha+1)} K \left(\sqrt{(x_0 + \delta - x)^2 + (y_0 + \delta - y)^2}; \lambda \right) \\ &\quad + \varepsilon \delta^{\alpha+1} \int_{x_0}^{x_0+\delta} K \left(\sqrt{(t-x)^2 + (y_0 + \delta - y)^2}; \lambda \right) d(t-x)^{\alpha+1} \end{aligned}$$

elde ederiz.

i_3 integrali için $d_s K \left(\sqrt{(x_0 + \delta - x)^2 + (s-y)^2}; \lambda \right) \leq 0$ olmak üzere kısmi integrasyon

uygularsak

$$i_3 = -\varepsilon\delta^{2(\alpha+1)}K\left(\sqrt{(x_0+\delta-x)^2+(y_0+\delta-y)^2};\lambda\right) \\ +\varepsilon\delta^{\alpha+1}\int_{y_0}^{y_0+\delta}K\left(\sqrt{(x_0+\delta-x)^2+(s-y)^2};\lambda\right)d(s-y_0)^{\alpha+1}$$

elde ederiz.

i_1 , i_2 ve i_3 integralleri için elde ettiğimiz sonuçları düzenlersek

$$I_{124}(x,y,\lambda)\leq\varepsilon\int_{x_0}^{x_0+\delta}\int_{y_0}^{y_0+\delta}K\left(\sqrt{(t-x)^2+(s-y)^2};\lambda\right)d(t-x_0)^{(\alpha+1)}(s-y_0)^{(\alpha+1)}$$

eşitsizliğine ulaşırız.

$I_{121}(x,y,\lambda)$, $I_{122}(x,y,\lambda)$, $I_{123}(x,y,\lambda)$ ve $I_{124}(x,y,\lambda)$ integralleri için elde ettiğimiz sonuçlar;

$$I_{121}(x,y,\lambda)\leq\varepsilon\int_{x_0-\delta}^{x_0}\int_{y_0-\delta}^{y_0}K\left(\sqrt{(t-x)^2+(s-y)^2};\lambda\right)d(x_0-t)^{\alpha+1}(y_0-s)^{\alpha+1}$$

$$I_{122}(x,y,\lambda)\leq-\varepsilon\int_{x_0}^{x_0+\delta}\int_{y_0-\delta}^{y_0}K\left(\sqrt{(t-x)^2+(s-y)^2};\lambda\right)d(t-x_0)^{\alpha+1}(y_0-s)^{\alpha+1}$$

$$I_{123}(x,y,\lambda)\leq-\varepsilon\int_{x_0-\delta}^{x_0}\int_{y_0}^{y_0+\delta}K\left(\sqrt{(t-x)^2+(s-y)^2};\lambda\right)d(x_0-t)^{(\alpha+1)}(s-y_0)^{(\alpha+1)}$$

$$I_{124}(x,y,\lambda)\leq\varepsilon\int_{x_0}^{x_0+\delta}\int_{y_0}^{y_0+\delta}K\left(\sqrt{(t-x)^2+(s-y)^2};\lambda\right)d(t-x_0)^{(\alpha+1)}(s-y_0)^{(\alpha+1)}$$

şeklindedir.

Bu ifadeleri toplarsak yani $I_{12}(x,y,\lambda)$ integralinde yerine yazarsak

$$I_{12}(x,y,\lambda)\leq\varepsilon\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}K\left(\sqrt{(t-x)^2+(s-y)^2};\lambda\right)\left|d(t-x_0)^{(\alpha+1)}(s-y_0)^{(\alpha+1)}\right|$$

elde ederiz.

Hipotez gereği eşitsizliğin sağ tarafındaki ifadenin sınırlı olduğu noktalar kümesi üzerinde yeteri kadar küçük bir $\varepsilon > 0$ için

$$(x, y, \lambda) \rightarrow (x_0, y_0, \lambda_0) \text{ iken } I_{12}(x, y, \lambda) \rightarrow 0$$

olacağı açıktır.

Ayrıca

$$I_1(x, y, \lambda) = I_{11}(x, y, \lambda) + I_{12}(x, y, \lambda)$$

olduğundan

$$\lim_{(x,y,\lambda) \rightarrow (x_0,y_0,\lambda_0)} I_1(x, y, \lambda) = 0$$

olur.

Son olarak (b) şartını dikkate alındığında

$$\lim_{(x,y,\lambda) \rightarrow (x_0,y_0,\lambda_0)} I_2(x, y, \lambda) = 0$$

olur.

Tüm bunlar düzenlendiğinde

$$(x, y, \lambda) \rightarrow (x_0, y_0, \lambda_0) \text{ iken } I_1(x, y, \lambda) + I_2(x, y, \lambda) \rightarrow 0$$

bulunur.

Böylece teoremin ispatı tamamlanmış oldu. ■

KAYNAKLAR

- Bardaro, C. 1984. On approximation properties for some classes of linear operators of convolution type. *Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena*, 33, 329-356.
- Butzer, P.L. and Nessel, R.J. 1971. *Fourier Analysis and Approximation, Vol.I.* Academic Press, Newyork, London.
- Bochner, S. and Chanprasekharan, K. 1949. *Fourier Transforms*, Princeton.
- Faddeev, D.K. 1936. On the representation of summable functions by means of singular integrals at Lebesgue points. *Mat. Sbornik*, Vol 1 (43), no.3, pp. 351-368.
- Fatou, P. 1906. Séries trigonometriques et séries de Taylor. *AM.*, 30, 335-400.
- Fejer, L. 1900. Sur les singularités de la série de Fourier des fonctions continues. *AEN.*, 28, 63-103.
- Gadjiev, A.D. 1968. The order of convergence of singular integrals which depend on two parameters. *Special Problems of Functional Analysis and their Appl. to the Theory of Diff. Eq. and the Theory of Func.*, Izdat. Akad. Nauk Azerbaïdžan. SSR., pp. 40-44.
- Gadjiev, A.D. 1963. On the speed of convergence of a class of singular integrals. *Izv. Akad. Nauk Azerbaïdžan. SSR.*, no. 6, 27-31.
- Hobson, E.W. 1921. *The Theory of Functions of a Real Variable and The Theory of Fourier Series. I.* Cambridge, 671, England.
- Mamedov, R. G. 1967. *Fonksiyonların Lineer Operatörlerle Yaklaşması.* Azərbaycan Devlet Neşriyatı, 216 s., Bakü.

- Mamedov, R. G. 1961. On the order and asymptotic value of the approximation of functions by positive linear operators. *Izv. Akad. Nauk. Azerbaïdžan., SSR., Ser. Fiz.-Mat. Teh. Nauk.*, No. 2, 27–39.
- Natanson, I. P. 1964. *Theory of Functions of a Real Variable*. Translated from the Russian by Leo F. Boron, Frederick Ungar Pub. Co., 542 p., New York.
- Nessel, R.J. 1966. Contributions to the theory of saturation for singular integrals in several variables, III, radial kernels. *Indag. Math.*, 29. Ser. A., 65-73.
- Rydzewska, B. 1973. Approximation des fonctions par des intégrales singulières ordinaires. *Fasc. Math.* No. 7, 71–81.
- Karlı, H. 2006. İki parametreye bağlı singüler integrallerin ve türevlerinin yakınsaklık özellikleri. Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü. Doktora tezi, 75 s.
- Lebesgue, H. 1900. Sur les intégrales singulières. *Math.* 19, no.3., 331-337.
- Lenze, B. 1989. On multidimensional Lebesgue-Stieltjes convolution operators. *Int. Series of Numeical Math.*, Vol. 90, 225-232.
- Sikkema, P.C. 1983. Approximation with convolution operators depending on two parameters. *Approximation Theory, IV* (College St., Tex.), 679-684, Academic Press, New York.
- Stein, E. M. 1970. *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*. Princeton University Press, 287 p., New Jersey.
- Stein, E. M. and Weiss, G. 1971. *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*. Princeton University Press, 334 p., New Jersey
- Siudut, S. 1988. On the convergence of double singular integrals. *Comment. Math.* 28, no. 1., 143-146.
- Siudut, S. 1989. A theorem of Romanovski type for double singular integrals. *Comment. Math.*, 28, no.2., 355-359.

- Taberski, R. 1962a. Singular integrals depending on two parameters. *Prace Math.*, no. 7, 173-179.
- Taberski, R. 1962b. Some theorems on double integrals over rectangles. *Ann. Pol. Math.*, 11, 209-216.
- Taberski, R. 1970. Abel summability of double Fourier series. *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys.*, 18, 307-314.
- Taberski, R. 1964. On double integrals and Fourier Series. *Ann. Pol. Math.*, 97-115.
- Tandori, K. 1954. Über die konvergenz singularer integrale. *Acta Sci. Math.* XV, Szeged, 223-230.
- Zygmund, A. 1959. *Trigonometric Series, I*. Cambridge University Press., 747 p., London.
- Weierstrass, K. 1885. Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Functionen einer reellen veränderlichen. *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, 633-639 and 789-805.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı: Mine MENEKŞE YILMAZ

Doğum Yeri: Gaziantep

Doğum Tarihi: 17/03/1978

Medeni Hali: Evli

Yabancı Dili: İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl):

Lise: Fitnat Nuri Tekerekoğlu Anadolu Lisesi (1996)

Lisans: Gaziantep Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü (2000)

Yüksek Lisans: Gaziantep Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı (2004)

Yayınları:

Menekşe Yılmaz, M. 2010. On convergence of Singular Integral Operators Depending on Three Parameters with Radial Kernel. Int. Journal of Math. An., Vol. 4, no. 39, 1923-1928.

Kırcı Serenbay, S., Menekşe Yılmaz, M., İbikli, E. 2010. The Convergence of Family of Integral Operators with Positive Kernel. Journal of Computational and Applied Mathematics, (baskıda), doi:10.1016/j.cam.2010.03.016.