

T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LORENTZIAN HEMEN HEMEN PARAKONTAKT MANİFOLDLARIN
ALTMANİFOLDLARI VE BİHARMONİKLİKLERİ

Selcen YÜKSEL PERKTAŞ

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

MALATYA
TEMMUZ 2011

Tezin Başlığı: **Lorentzian Hemen Hemen Parakontakt Manifoldların
Altmanifoldları ve Biharmoniklikleri**

Tezi Hazırlayan: **Selcen YÜKSEL PERKTAŞ**

Sınav Tarihi: 19 Temmuz 2011

Yukarıda adı geçen tez, Jürimizce değerlendirilerek Matematik Anabilim Dalında
Doktora Tezi olarak kabul edilmiřtir.

Sınav Jüri Üyeleri (ilk isim jüri başkanı, ikinci isim tez danışmanı)

Prof.Dr. Mehmet BEKTAŞ (Fırat Üniv.) _____

Prof.Dr. Sadık KELEŞ (İnönü Üniv.) _____

Doç.Dr. Erol KILIÇ (İnönü Üniv.) _____

Doç.Dr. Yılmaz YILMAZ (İnönü Üniv.) _____

Doç.Dr. Hacı Bayram KARADAĞ (İnönü Üniv.) _____

Doç.Dr. Erol KILIÇ

Tez İkinci Danışmanı

İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Onayı

Prof.Dr. Asım KÜNKÜL
Enstitü Müdürü

Onur Sözü

Doktora Tezi olarak sunduğum “Lorentzian Hemen Hemen Parakontakt Manifoldların Altmanifoldları ve Biharmoniklikleri” başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığını ve yararlandığım bütün kaynakların, hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Selcen YÜKSEL PERKTAŞ

Sevgili Eşime ve Biricik Kızıma

ÖZET

Doktora Tezi

LORENTZIAN HEMEN HEMEN PARAKONTAKT MANİFOLDLARIN ALTMANİFOLDLARI VE BİHARMONİKLİKLERİ

Selcen YÜKSEL PERKTAŞ

İnönü Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

179+X sayfa

2011

Danışmanlar : Prof. Dr. Sadık KELEŞ

Doç. Dr. Erol KILIÇ

Doktora tezi olarak hazırlanan bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm diğer bölümlerin daha iyi anlaşılabilmesi için bazı temel kavramlara ayrıldı. Diğer bölümler ise tezin orjinal kısımlarıdır. Birinci bölümde manifoldlar arasındaki harmonik ve biharmonik dönüşümler, biharmonik altmanifoldlar, biharmonik eğriler, semi-Riemann manifoldlar, Lorentzian hemen hemen parakontakt manifoldlar ve altmanifoldlar ile ilgili temel tanım ve teoremler ele alındı.

İkinci bölüm Lorentzian para-Sasakian manifoldlar üzerindeki biharmonik eğriler çalışıldı. Bu bölümde öncelikle n -boyutlu ($n \geq 4$) konformal flat, kuasi-konformal flat ve konformal simetrik Lorentzian para-Sasakian manifoldların $S_1^n(1)$ birim Lorentzian küresine lokal olarak izometrik olduğu ifade edilerek 4-boyutlu Lorentzian para-Sasakian manifoldlar üzerindeki spacelike ve timelike eğriler için Frenet formülleri verildi. Daha sonra 4-boyutlu konformal flat, kuasi-konformal flat

ve konformal simetrik Lorentzian para-Sasakian manifoldların sırasıyla, spacelike ve timelike eğrileri için biharmonik denklemler elde edildi. Son olarak $S_1^4(1)$ Lorentzian birim küresi üzerindeki spacelike ve timelike eğrilerin biharmonik olması için gerek ve yeter şartlar incelenerek elde edilen biharmonik denklemlerin bazı özel durumlar için çözümleri irdelendi ve bu tip eğrilerin varlığı araştırıldı.

Üçüncü bölümde Lorentzian hemen hemen parakontakt manifoldların invaryant, non-invaryant hiperyüzeyleri ve Lorentzian para-Sasakian manifoldların biharmonik hiperyüzeyleri incelendi. Bu bölümde ilk olarak hemen hemen parakontakt manifoldların, karakteristik vektör alanının hiperyüzeye ait olmaması durumunda non-invaryant hiperyüzeyleri ele alınarak bu tip hiperyüzeylerin hemen hemen parakontakt yapıdan indirgenen bir hemen hemen çarpım yapısına sahip olduğu gösterildi. Daha sonra afin kosimplektik ve normal hemen hemen parakontakt manifoldların invaryant ve non-invaryant hiperyüzeyleri için bazı karakterizasyonlar verildi. Ayrıca Lorentzian hemen hemen parakontakt manifoldların, karakteristik vektör alanının hiperyüzeye ait olmaması durumunda non-invaryant hiperyüzeylerinin bir hemen hemen çarpım metrik manifoldu olduğu gösterildi ve Lorentzian para-Sasakian manifoldların, bu tip hiperyüzeylerinin ise bir lokal çarpım manifoldu olması için gerek ve yeter şartlar elde edildi. Bu bölümde incelenen hiperyüzeylere örnekler verildikten sonra Lorentz para-Sasakian manifoldların spacelike ve timelike hiperyüzeylerinin biharmonik olması için gerek ve yeter şartlar araştırıldı.

Dördüncü bölümde Lorentzian hemen hemen parakontakt manifoldların slant ve semi-slant altmanifoldları tanıtılarak bu altmanifoldlara örnekler verildi. Özel olarak manifoldun Lorentzian parakosimplektik ve Lorentzian para-Sasakian olması durumunda semi-slant altmanifoldların tanımında yer alan distribüsyonların integral-lenebilirlik şartları incelendi. Ayrıca Lorentzian parakosimplektik manifoldların warped çarpım, warped çarpım semi-slant ve warped çarpım anti-slant altmanifoldları ele alınarak bazı özel durumlarda bu altmanifoldların yokluğu ile ilgili sonuçlar elde edildi. Bu bölümde son olarak Lorentzian para-Sasakian uzay formların biharmonik altmanifoldları incelendi.

ANAHTAR KELİMELEER: Harmonik dönüşüm, Biharmonik dönüşüm, Biharmo-

nik altmanifold, Lorentzian hemen hemen parakontakt manifold, Lorentzian parakosimplektik manifold, Lorentzian para-Sasakian manifold, İnvaryant hiperyüzey, Non-invaryant hiperyüzey, İnvaryant altmanifold, Anti-invaryant altmanifold, Slant altmanifold, Semi-slant altmanifold, Semi-invaryant altmanifold, Warped çarpım, Warped çarpım semi-slant altmanifold, Warped çarpım anti-slant altmanifold.

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

SUBMANIFOLDS OF LORENTZIAN ALMOST PARACONTACT MANIFOLDS AND THEIR BIHARMONICITIES

Selcen YÜKSEL PERKTAŞ

İnönü University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

179+X pages

2011

Supervisors : Prof. Dr. Sadık KELEŞ

Assoc. Prof. Dr. Erol KILIÇ

This study which is designed as a philosophy doctoral thesis covers four chapter. In the first chapter we give some basic concepts such as harmonic and biharmonic maps between Riemannian manifolds, nonexistence theorems for biharmonic submanifolds, biharmonic curves, semi-Riemannian manifolds, Lorentzian almost paracontact manifolds and their submanifolds for the rest of the thesis that readers can easily understand. The other chapters are the original parts of this thesis.

The second chapter is devoted to the biharmonic curves in Lorentzian para-Sasakian manifolds. In this chapter firstly by expressing the fact that n -dimensional ($n \geq 4$) conformal flat, quasi-conformal flat and conformal symmetric Lorentzian para-Sasakian manifolds are locally isometric to Lorentzian unit sphere $S_1^n(1)$, we give Frenet formulas for spacelike and timelike curves in 4-dimensional Lorentzian para-Sasakian manifolds. After then we obtain biharmonic equations for spacelike

and timelike curves in 4-dimensional conformal flat, quasi-conformal flat and conformal symmetric Lorentzian para-Sasakian manifolds. Moreover, by investigating the necessary and sufficient conditions for spacelike and timelike curves in a Lorentzian sphere $S_1^4(1)$ to be biharmonic, we examine the solutions of the obtained biharmonic equations in some special cases. So we show the existence of such curves.

In the third chapter we study the invariant and non-invariant hypersurfaces of Lorentzian paracontact manifolds and biharmonic hypersurfaces of Lorentzian para-Sasakian manifolds. We firstly investigate the non-invariant hypersurfaces of almost paracontact manifolds when the characteristic vector field of the manifold does not belong to the hypersurface and show that such hypersurfaces admit an almost product structure induced by the almost paracontact structure of the ambient manifold. After then some characterizations on the invariant and non-invariant hypersurfaces of affinely cosymplectic and normal almost paracontact manifolds are given. We prove that a non-invariant hypersurface of a Lorentzian almost paracontact manifold with the characteristic vector field nowhere tangent to the hypersurface is an almost product metric manifold. We also investigate the necessary and sufficient conditions for a non-invariant hypersurface of a Lorentzian para-Sasakian manifold with the characteristic vector field nowhere tangent to the hypersurface to be locally product manifold. Moreover we give some examples for the hypersurfaces which are studied in this chapter and study the biharmonic spacelike and timelike hypersurfaces of Lorentzian para-Sasakian manifolds.

In the fourth chapter we introduce the slant and semi-slant submanifolds of Lorentzian paracontact manifolds and give examples. In special we investigate the integrability conditions for the distributions involved in the definition of a semi-slant submanifold when the ambient manifold is a Lorentzian paracosymplectic manifold and a Lorentzian para-Sasakian manifold, respectively. We also study the warped product, warped product semi-slant and warped product anti-slant submanifolds of Lorentzian paracosymplectic manifolds and give some nonexistence theorems for such submanifolds in some special cases. In this chapter we finally investigate the biharmonic submanifolds of Lorentzian para-Sasakian space forms.

KEY WORDS: Harmonic map, Biharmonic map, Biharmonic submanifold, Lorentzian almost paracontact manifold, Lorentzian paracosymplectic manifold, Lorentzian para-Sasakian manifold, Invariant hypersurface, Non-invariant hypersurface, Invariant submanifold, Anti-invariant submanifold, Slant submanifold, Semi - slant submanifold, Semi-invariant submanifold, Warped product, Warped product semi-slant submanifold, Warped product anti-slant submanifold.

TEŞEKKÜR

Beni bu konuda çalışmaya teşvik ederek, lisansüstü öğrenimim boyunca bilgi ve tecrübeleriyle beni yönlendiren tez danışmanlarım Sayın Prof. Dr. Sadık Keleş' e ve Sayın Doç. Dr. Erol Kılıç' a, zaman zaman karşılaştığım problemleri tartışmak için bana değerli zamanlarını sunan Matematik Bölümü Geometri Anabilim Dalı Öğretim Üyelerine, Sevgili arkadaşlarım Arş. Gör. Bilge İnan' a ve Arş.Gör. Sema Bulut' a, en sıkıntılı anlarımda her zaman yanımda olan Sevgili arkadaşım Nermin Özkaya' ya ve manevi desteklerini hiç bir zaman esirgemeyen anneme, babama ve Sevgili eşim Erkan' a teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	iv
TEŞEKKÜR	vii
İÇİNDEKİLER	viii
GİRİŞ	1
1 TEMEL KAVRAMLAR	12
1.1 Biharmonik Dönüşümler	12
1.1.1 Riemann manifoldları arasındaki harmonik ve biharmonik dönüşümler	12
1.1.2 Yokluk teoremleri	24
1.1.3 Biharmonik eğriler	26
1.2 Semi-Riemann Manifoldlar	27
1.3 Lorentzian Hemen Hemen Parakontakt Manifoldlar ve Altmanifoldları	35
2 LORENTZIAN PARA-SASAKIAN MANİFOLDLARIN BİHARMONİK EĞRİLERİ	49
2.1 Konformal Flat, Quasi-Konformal Flat ve Konformal Simetrik Lorentzian Para-Sasakian Manifoldlar	49
2.2 4-boyutlu Lorentzian Para-Sasakian Manifoldlar Üzerindeki Spacelike ve Timelike Eğriler	57
2.3 4-boyutlu Konformal Flat, Quasi-Konformal Flat ve Konformal Simetrik Lorentzian Para-Sasakian Manifoldlar Üzerindeki Biharmonik Eğriler	60
2.4 $S_1^4(1)$ Lorentz Birim Küresi Üzerindeki Biharmonik Eğriler	71

3	LORENTZIAN HEMEN HEMEN PARAKONTAKT	
	MANİFOLDLARIN HİPERYÜZEYLERİ	84
3.1	Hemen Hemen Parakontakt Manifoldların Non-İnvariant Hiperyüzeyleri	84
3.2	Afin Kosimplektik ve Normal Hemen Hemen Parakontakt Manifoldların İnvariant ve Non-İnvariant Hiperyüzeyleri	89
3.3	Lorentzian Hemen Hemen Parakontakt Manifoldların İnvariant ve Non-İnvariant Hiperyüzeyleri	93
3.4	Örnekler	100
3.5	Lorentzian Para-Sasakian Manifoldların Biharmonik Hiperyüzeyleri	105
3.5.1	Lorentzian para-Sasakian manifoldların biharmonik spacelike hiperyüzeyleri	106
3.5.2	Lorentzian para-Sasakian manifoldların biharmonik timelike hiperyüzeyleri	112
4	LORENTZIAN HEMEN HEMEN PARAKONTAKT	
	MANİFOLDLARIN ALTMANİFOLDLARI	121
4.1	Lorentzian Hemen Hemen Parakontakt Manifoldların Slant Altmanifoldları	121
4.2	Lorentzian Hemen Hemen Parakontakt Manifoldların Semi-Slant Altmanifoldları	128
4.3	Lorentzian Parakosimplektik Manifoldların Warped Çarpım Altmanifoldları	148
4.3.1	Lorentzian parakosimplektik manifoldların semi-slant warped çarpım altmanifoldları	158
4.3.2	Lorentzian parakosimplektik manifoldların anti-slant warped çarpım altmanifoldları	162
4.4	Lorentzian Para-Sasakian Manifoldların biharmonik Altmanifoldları	167

KAYNAKLAR

172

ÖZGEÇMİŞ

179

GİRİŞ

Biharmonik fonksiyonlar teorisi, yüz elli yıla yakındır, matematiğin ve fiziğin farklı alanlarında çalışılan kapsamlı bir konudur. Biharmonik fonksiyonlar, 1862 de Maxwell ve Airy tarafından fizikteki elastikiyet (elasticity) teorisinin bir matematiksel modelini tanımlamak amacıyla çalışılmaya başlandı. Çok harmonik (Poly-harmonic) fonksiyonlar teorisi ise daha sonraları E. Almansi, T. Levi-Civita ve M. Nicolescu tarafından geliştirildi. Son zamanlarda R. Caddeo, L. Vanhecke ([1], [2]), L.Sario ve daha pek çok araştırmacı [3] Riemann manifoldları üzerindeki biharmonik fonksiyonları inceleyerek konuyu diferansiyel geometri alanında geliştirdi ve tartışmaya açtı.

Temel olarak iki farklı araştırma alanına ayrılabilen biharmonik dönüşümler teorisine olan ilgi son on yılda giderek arttı. Bir taraftan diferansiyel geometri bakış açısıyla örnekler ve sınıflandırmalar inşa edilmesi dikkat çekerken; diğer taraftan biharmonik dönüşümler dördüncü mertebeden güçlü bir eliptik semi-lineer kısmi diferansiyel denklemin çözümleri olduğundan kısmi diferansiyel denklemler açısından da analitik yönüyle incelenmektedir.

Riemann manifoldları arasında tanımlanan diferansiyellenebilir bir $\varphi : M \rightarrow N$ dönüşümü eğer $E(\varphi) = \frac{1}{2} \int_M |d\varphi|^2 v_g$ ile verilen enerji fonksiyonelinin kritik noktası ise harmonik dönüşüm olarak adlandırılır. Enerji için Euler-Lagrange denklemi $\tau(\varphi) = iz \nabla d\varphi$ ile tanımlanan tensiyon alanının sıfır olması ile karakterize edilir [4].

Benzer bakış açısıyla bir (N, h) Riemann manifolduna tanımlanan Riemann immersiyonların uzayı $Imm(M, N)$ ile gösterilecek olursa, eğer bir $\varphi : (M, \varphi^*h) \rightarrow (N, h) \in Imm(M, N)$ Riemann immersiyonu $V(\varphi) = \frac{1}{2} \int v_{\varphi^*h}$ hacim fonksiyonelinin bir kritik noktası ise φ ye minimal dönüşüm denir. Hacim ile birleşen Euler-Lagrange denklemi H ortalama eğrilik vektör alanının sıfır olması ile karakterize edilir [5]. Bir Riemann immersiyonun tensiyon alanı, ortalama eğrilik vektör alanına denktir.

Dolayısıyla bir Riemann immersiyonun harmonik olması için gerek ve yeter şart minimal olmasıdır [6]. Böylece minimal immersiyonları araştırmak için harmonik Riemann immersiyonlar incelemek yeterlidir. Biharmonik dönüşümler ise harmonik dönüşümlerin bir genelleştirmesi olarak J. Eells ve J. H. Sampson [6] tarafından tanımlandı.

Harmonik dönüşümler ve minimal immersiyonlar için sırasıyla tensiyon alanının ve ortalama eğrilik vektör alanının normlarının karelerinin integrali ile elde edilen fonksiyoneller göz önüne alınarak aşağıdaki genellemeler yapılabilir [7]:

- Biharmonik dönüşümler, $E_2(\varphi) = \frac{1}{2} \int_M |\tau(\varphi)|^2 v_g$ ile tanımlanan bienerji fonksiyonelinin kritik noktalarıdır.
- Willmore immersiyonları ise $W(\varphi) = \int_{M^2} (|H|^2 + K) v_{\varphi^*h}$ ile tanımlanan Willmore fonksiyonelinin kritik noktalarıdır. Burada K, N Riemann manifoldunun M^2 altmanifolduna kısıtlanmış kesit eğriliğidir.

Yukarıda verilen varyasyonel problemler harmonik dönüşümlerin ve minimal immersiyonların doğal genelleştirmeleri olsalar da biharmonik Riemann immersiyonları, Willmore immersiyonlarını kapsamaz. Böylece yapılan bu iki genelleme farklı varyasyonel problemlerin ortaya çıkmasına yol açtı.

Biharmonik altmanifoldlar biharmonik dönüşümlerin özel bir halidir. Genel olarak, eğer $i : (M, \varphi^*h) \rightarrow (N, h)$ izometrik immersiyonu biharmonik dönüşüm ise M altmanifoldu N nin biharmonik altmanifoldu olarak adlandırılır. Farklı bir bakış açısıyla B. Y. Chen [8], Öklidyen uzayın harmonik ortalama eğrilik vektör alanına sahip altmanifoldlarını biharmonik altmanifoldlar olarak tanımladı ve Öklidyen uzayın bütün biharmonik altmanifoldlarını sınıflandırmayı hedefledi. B. Y. Chen Öklidyen uzayın biharmonik altmanifoldlarının minimal olduğunu ispatladı. Eğer biharmonik dönüşümler tanımı, Öklidyen uzaya tanımlanan Riemann immersiyonlarına uygulanır ise Chen'in biharmonik altmanifoldlar tanımına ulaşılır. Böylece biharmonik Riemann immersiyonları Chen'in tanımladığı biharmonik altmanifoldların bir genellemesi olarak düşünülebilir.

Riemann manifoldları arasındaki bir diferensiyellenebilir $\varphi : M \rightarrow N$ dönüşümünün bienerji fonksiyoneli için Euler-Lagrange denklemi 1986 yılında G. Y. Jiang ([4], [9]) tarafından $\tau_2(\varphi) = -\Delta\tau(\varphi) - R^N(d\varphi, \tau(\varphi))d\varphi = 0$ şeklinde tanımlandı.

Bu denklemden her harmonik dönüşümün biharmonik olacağı açıktır. Dolayısıyla harmonik olmayan (özgün) biharmonik dönüşümler daha fazla ilgi çekmektedir.

Harmonik dönüşümler biharmonik olduğundan biharmonik dönüşümler teorisinin en temel sorusu hangi şartlar altında biharmonik dönüşümlerin harmonik olacağıdır. Bu probleme ilk genel cevap G. Y. Jiang tarafından verildi. G. Y. Jiang ([4], [9]), bir $\varphi : M \rightarrow N$ biharmonik dönüşümü için eğer M kompakt, yönlendirilebilir ve N nin Riemann eğriliği $Riem^N \leq 0$ ise φ dönüşümünün harmonik olacağını gösterdi. C. Oniciuc [10], eğer M kompakt değilse G. Y. Jiang tarafından ortaya konulan bu şartın φ nin bir Riemann immersiyon ve $\tau(\varphi)$ nin sabit olması ek şartlarıyla da sağlanabileceğini ispatladı. Aynı çalışmada C. Oniciuc, boyut farkı 1 olduğu zaman yani $boy M = boy N - 1$ iken yukarıdaki ifadelerde yer alan $Riem^N \leq 0$ eğrilik şartının $Ricc^N \leq 0$ olacak şekilde hafifletilebileceğini gösterdi.

Sabit c kesit eğriliğine sahip bir $N(c)$ manifoldunun bir M altmanifoldu için inclusion dönüşümünün tensiyon alanı $\tau(i) = mH$ ve bitensiyon alanı $\tau_2(i) = -m(\Delta H - mcH)$ şeklinde karakterize edilir [7]. Eğer $c \leq 0$ ise $N(c)$ manifoldunda harmonik olmayan (özgün) biharmonik altmanifoldların varlığı ile ilgili ciddi kısıtlamalar sözkonusudur. Eğer M kompakt ise M den $N(c)$ ye tanımlı harmonik olmayan (özgün) biharmonik Riemann immersiyonu yoktur. Bu durumda eğer M biharmonik ise minimaldir ([4], [9]). Eğer M kompakt değil ve $i : M \rightarrow N(c)$ inclusion dönüşümü harmonik olmayan (özgün) biharmonik dönüşüm ise $|H|$ sabit olamaz [10]. $c > 0$ olması durumunda harmonik olmayan (özgün) kompakt biharmonik altmanifold örnekleri mevcuttur.

$N(c)$ Riemann manifoldunun biharmonik altmanifoldları çalışılırken izlenen en önemli yol bitensiyon alanının normal ve teğet bileşenlerine ayrıştırılmasıdır. Bu gerçekten hareketle 2001 yılında R. Caddeo, S. Montaldo ve C. Oniciuc ([11], [12]) $i : M \rightarrow N(c)$ inclusion dönüşümünün biharmonik denkleminde ulaşıldı. $c = 0$ için B. Y. Chen ([8], [13]) ve $c < 0$ için R. Caddeo, S. Montaldo ve C. Oniciuc [12] tarafından 3-boyutlu bir manifoldun biharmonik M^2 yüzeyinin minimal olduğu ispatlandı.

$N(c) = R^n$ için bazı kısmi sonuçlara ulaşılmış olsa da $boy N > 3$ ve $c \leq 0$ için harmonik olmayan (özgün) biharmonik altmanifoldların var olup olmayacağı

bilinmemektedir. $N(c) = R^n$ için elde edilen bazı sonuçlar aşağıdaki gibidir:

- R^n deki her biharmonik eğri bir doğrunun açık bir parçasıdır [14].
- R^n deki sonlu tipli biharmonik altmanifoldlar minimaldir [14].
- M^m, R^n de bir pseudo-umbilik altmanifold olmak üzere eğer $m \neq 4$ ise M^m nin biharmonik olması için gerek ve yeter şart minimal olmasıdır [14].
- R^4 ün bir hiperyüzeyinin biharmonik olması için gerek ve yeter şart minimal olmasıdır [15].
- S^n küresinin R^{n+1} de biharmonik olan altmanifoldu yoktur [8].
- $M^m, N(-1)$ de bir pseudo umbilik altmanifold olmak üzere $m \neq 4$ ise M nin bir biharmonik altmanifold olması için gerek ve yeter şart minimal olmasıdır [12].

Bu sonuçlar “Genelleştirilmiş Chen varsayımı” olarak adlandırılan “ $Riem^N \leq 0$ olacak şekilde bir N manifoldunun biharmonik altmanifoldları minimaldir” ifadesi nin doğru olduğunu göstermektedir.

C. Oniciuc, 2002 yılında Riemann submersiyonlarının bitensiyon alanını hesapladı ve Riemann immersiyonlar için elde edilen bazı yokluk teoremlerine benzer teoremleri ispatladı [10].

Biharmonik dönüşümler ile ilgili ilk ve en kolay örnekler Riemann manifoldları üzerinde tanımlı diferensiyellenebilir eğrilerin biharmonikliği incelenerek verildi. Geodeziklerin biharmonik eğriler olduğu açıktır. Dolayısıyla geodezik olmayan biharmonik eğriler özgün biharmonik eğriler olarak adlandırılır. B. Y. Chen ve I. Ishikawa [16] 3-boyutlu Öklidyen uzayda özgün biharmonik eğrilerin yokluğunu ispatladılar ve 3-boyutlu Minkowski uzayın (özgün) biharmonik eğrilerini sınıflandırdılar. 3-boyutlu Minkowski uzayın biharmonik eğrileri ile ilgili bir diğer çalışma da J. Inoguchi [17] tarafından yapıldı. R. Caddeo, S. Montaldo ve P. Piu [18], bir yüzey üzerindeki biharmonik eğrileri inceleyerek Gauss eğriliği pozitif olmayan bir yüzey üzerindeki biharmonik eğrilerin yüzeyin geodezikleri olduğu sonucuna ulaştılar. [11] de ise 3-boyutlu birim küre S^3 üzerindeki özgün biharmonik eğrilerin ya geodezik eğriliği 1 olan çemberler ya da Clifford minimal torsunun jeodezikleri olan helisler olduğu ispatlandı. Daha sonra R. Caddeo, C. Oniciuc ve P. Piu [19], H_3 Heisenberg grubunun harmonik olmayan (özgün) biharmonik eğrisinin bir helis olduğunu göster-

diler. Genelleştirilmiş Heisenberg grubunun harmonik olmayan (özgün) biharmonik eğrilerinin sınıflandırılması ise D. Fetcu [20] tarafından yapıldı. A. Balmuş [21] ise S^3_ϵ Berger küresi üzerindeki biharmonik eğrilerin parametrik denklemini ifade etti.

Eğriliği sıfırdan küçük ve sıfır olan manifoldların harmonik olmayan (özgün) biharmonik altmanifoldlarının yokluğu, bu alandaki çalışmaların eğriliği sıfırdan büyük olan manifoldlar üzerinde yoğunlaşmasına sebep olmaktadır. Bu bağlamda 2001 yılında R. Caddeo, S. Montaldo ve C. Oniciuc S^3 küresinin biharmonik altmanifoldları için tam bir sınıflandırma yaptılar [11]. Bu çalışmadan sonra yine aynı yazarlar tarafından S^n küresinin biharmonik altmanifoldları sınıflandırıldı [12]. Aslında S^n küresinin harmonik olmayan (özgün) biharmonik altmanifoldlarına ilk örnek; $S^{n_1}(\frac{1}{\sqrt{2}}) \times S^{n_2}(\frac{1}{\sqrt{2}})$, $n_1 + n_2 = n - 1$, $n_1 \neq n_2$, genelleştirilmiş Clifford torsudur ([4], [9]). S^n küresinin harmonik olmayan (özgün) biharmonik hiperyüzeyi için bilinen yegane örnekler $S^{n-1}(\frac{1}{\sqrt{2}})$ küresi ve genelleştirilmiş Clifford torsudur. Boyut farkının 1 den büyük olduğu durumlar örnek açısından daha zengindir. S^4 ün kapalı, yönlendirilebilir harmonik olmayan (özgün) biharmonik yüzeylerinin varlığı [12] de ispatlandı. Bu durum S^3 küresinin aksine S^4 de pek çok harmonik olmayan (özgün) biharmonik yüzeylerin varlığını gösterir. Buradan hareketle A. Balmuş ve C. Oniciuc [22] S^4 küresinin bir sabit ortalama eğrilikli yüzeyinin özgün biharmonik olması için bu yüzeyin $S^3(\frac{1}{\sqrt{2}})$ hiperküresinde minimal olmasının gerek ve yeter şart olduğu sonucuna ulaştılar. [23] de generic Riemann manifoldlarının biharmonik hiperyüzeyleri incelenerek genelleştirilmiş Chen varsayımının bir Einstein uzayın total umbilik hiperyüzeyleri için de geçerli olduğu gösterildi. R. Caddeo, S. Montaldo ve C. Oniciuc [24] tarafından 4-boyutlu uzay formların özgün biharmonik hiperyüzeyleri ile ilgili tam bir sınıflandırma elde edildi.

Y. L. Ou [25] konformal biharmonik immersiyonları inceleyerek konformal biharmonik altmanifoldlar için bazı sonuçlar elde etti. Hiperbolik uzayların biharmonik altmanifoldları ise [11], [12] ve [26] de ele alındı ve bazı karakterizasyonlara ulaşıldı.

Bilindiği gibi Sasakian uzay formlar, sabit kesit eğriliğine sahip Riemann manifoldların bir genelleştirmesi olarak göz önüne alınabilir. 3-boyutlu, basit bağlantılı bir Sasakian uzay formu; $SU(2)$ özel üniter grubuna, H_3 Heisenberg grubuna veya $SL(2)$ nin evrensel örtü grubuna izomorftur [27]. Özel olarak sabit holomorfik kesit

eğriliği 1 olan bir basit bağlantılı, 3-Sasakian uzay form S^3 küresine izometriktir. Bu nedenle Sasakian uzay formun biharmonik eğrileri ve altmanifoldlarının araştırılması ilgi çekici hale geldi. J. Inoguchi [28], 3-boyutlu Sasakian uzay form üzerindeki harmonik olmayan (özgün) biharmonik Legendre eğrilerini ve Hopf silindirlerini sınıflandırdı. T. Sasahara ise Sasakian uzay formun harmonik olmayan (özgün) biharmonik Legendre yüzeylerini sınıflandırarak esas uzayın 5-boyutlu birim küre olması halinde bu Legendre yüzeyleri için tam gösterimler elde etti [29]. Ayrıca C. Özgür ve M. M. Tripathi [30] tarafından bir α -Sasakian manifold üzerindeki bir Legendre eğrisinin biharmonik olması için gerek ve yeter şartlar araştırıldı.

K. Arslan, R. Ezentaş, C. Murathan ve T. Sasahara ([31], [32]), kontakt manifoldların bir genelleştirilmesi olarak bilinen (κ, μ) -manifoldlarını ele alarak 3-boyutlu (κ, μ) -manifoldlarının biharmonik altmanifoldlarını ve Sasakian uzay formların biharmonik anti-invariant altmanifoldlarını incelediler. [33] de ise Sasakian olmayan (κ, μ) -manifoldların invariant altmanifoldlarının total geodezik olduğu ispatlandı. Buradan Sasakian olmayan (κ, μ) -manifoldların biharmonik invariant altmanifoldlarının özgün olmayacağı sonucuna ulaşılır.

İyi bilinir ki bir (φ, ξ, η) hemen hemen kontakt yapısına sahip bir N^{2n+1} hemen hemen kontakt manifoldu için $N^{2n+1} \times R$ üzerinde $J(X, f \frac{d}{dt}) = (\varphi X - f\xi, \eta(X) \frac{d}{dt})$ ile verilen bir hemen hemen kompleks J yapısı tanımlanabilir. Eğer J integrallenebilir ise (φ, ξ, η) hemen hemen kontakt yapısına normaldir denir. Normal kontakt metrik manifoldlar ise Sasakian manifoldlar olarak adlandırılır [34]. Böylece Sasakian manifoldlar, aslında Kaehler manifoldların boyutu tek olan manifoldlardaki bir benzeri olarak göz önüne alınabilir. Dolayısıyla Sasakian manifoldlar üzerinde, biharmonik altmanifoldlar için yapılan çalışmalar biharmonik altmanifoldlar teorisinin kompleks manifoldlar üzerinde de çalışılabileceğini göstermektedir. Nitekim T. Sasahara [35] de sabit ortalama eğrilikli kompleks uzay formlardaki biharmonik Lagrange yüzeyleri sınıflandırdı. Özel olarak yine aynı çalışmada belirsiz kompleks Öklidyen düzlemin ortalama eğrilik vektör alanı lightlike (null) olan Lorentz yüzeylerine yeni örnekler verilerek, B. Y. Chen ve I. Ishikawa' nın semi-Öklidyen uzayların lightlike ortalama eğrilik vektör alanına sahip biharmonik yüzeyleri için yaptıkları sınıflandırma genişletildi. Diğer taraftan W. Zhang [36] Hopf fibrasyonunu kullanarak kompleks projektif

uzayda biharmonik reel hiperyüzeyleri ve Clifford torsu tipindeki biharmonik Lagrange altmanifoldları inceleyerek S^{2n+1} 'in biharmonik altmanifoldları için yeni örnekler verdi.

Öklidyen uzaylar üzerinde harmonik olmayan (özgün) biharmonik altmanifoldların yokluğu ile ilgili elde edilen sonuçlara rağmen B. Y. Chen ve I. Ishikawa [13] tarafından E_t^4 ($t = 1, 2$) semi-Öklidyen uzaylarında, sabit ortalama eğrilikli özgün biharmonik spacelike yüzey örnekleri verildi. Yine aynı çalışmada semi-Öklidyen uzayların lightlike (null) ortalama eğrilik vektör alanına sahip biharmonik yüzeyleri ile sabit Gauss eğrilikli biharmonik yüzeyleri incelendi. I. Ishikawa ise [37] de E_t^4 ($t = 1, 2$) semi-Öklidyen uzaylarında W -yüzeylerini tanıtarak düzlemsel normal konneksiyona sahip biharmonik W -yüzeyleri için bir sınıflandırmaya ulaştı.

Semi-Öklidyen uzaylarda ise bazı durumlarda biharmoniklik harmonikliği yani minimalliği gerektirmektedir. Örneğin [13] de E_t^3 ($t = 1, 2$) semi-Öklidyen uzaylarının biharmonik yüzeylerinin minimal olduğu ispatlandı. Ayrıca F. Defever, G. Kaimakamis ve V. Papantoniou tarafından 4-boyutlu semi-Öklidyen uzayın köşegenleştirilebilir şekil operatörüne sahip bir nondejenere biharmonik hiperyüzeyinin minimal olduğu sonucuna ulaşıldı [38].

Semi-Riemann uzaylar özellikle de sabit eğrilikli olan de Sitter, Minkowski ve anti de Sitter uzaylar genel görecelilik teorisinde önemli bir rol oynarlar. C. Ouyang [39] ve H. Sun [40] semi-Riemann uzaylarda biharmonik altmanifoldları incelediler. W. Zhang ise [41] de anti de Sitter uzayın özgün biharmonik hiperyüzeyleri ile ilgili örnekler verdi.

Hemen hemen kontakt manifoldlara benzer şekilde hemen hemen parakontakt manifoldlar I. Sato tarafından [42] da tanıtıldı. I. Sato tarafından verilen tanıma göre hemen hemen parakontakt metrik yapıyı oluşturan metrik bir Riemann metriktir. T. Adati ve K. Matsumoto [43], I. Sato tarafından tanımlanan hemen hemen parakontakt manifoldların özel durumları olarak göz önüne alınabilecek olan para-Sasakian ve özel para-Sasakian manifoldları tanımladılar ve bu manifoldların geometrisini çalıştılar. 1989 yılında ise K. Matsumoto [44], Lorentzian hemen hemen parakontakt manifoldlar ve bu manifoldların özel bir sınıfı olan Lorentzian para-Sasakian manifold tanımını verdi. Hemen hemen parakontakt metrik manifoldları Lorentzian hemen

hemen parakontakt manifoldlardan ayıran en temel özellik Lorentzian hemen hemen parakontakt yapıyı oluşturan metriğin bir Lorentzian metrik ve bu yapının karakteristik vektör alanının ise bir timelike vektör alanı olmasıdır. Yine K. Matsumoto tarafından [44] de bir Lorentzian manifoldun bir Lorentzian parakontakt yapıya sahip olması için gerekli bazı şartlar araştırıldı. I. Mihai ve R. Rosca [45] da K. Matsumoto'dan bağımsız olarak Lorentzian para-Sasakian manifoldları tanımladılar ve bu manifoldların pek çok özelliğini incelediler. Lorentzian hemen hemen parakontakt manifoldların bir diğer özel sınıfı olan Lorentzian parakosimplektik manifoldlar ise [46] da tanıtıldı ve diferensiyellenebilir bir manifold üzerinde Lorentzian hemen hemen parakontakt yapının bir tek olmadığı gösterildi.

Hemen hemen kontakt manifoldların hiperyüzeyleri D. E. Blair, G. D. Ludden [47]; S. S. Eum [48]; S. I. Goldberg, K. Yano [49]; G. D. Ludden [50] ve daha birçok matematikçi tarafından çalışıldı. Hemen hemen kontakt manifoldların non-invariant hiperyüzeyleri [49] da tanıtılarak hemen hemen kontakt manifoldların non-invariant hiperyüzeylerinin bir hemen hemen kompleks yapıya ve manifoldun kontakt formundan indirgenen bir ayrık 1-forma sahip olduğu gösterildi. Yine aynı çalışmada hemen hemen kontakt metrik manifoldların non-invariant hiperyüzeyleri de araştırıldı.

T. Adati [51], I. Sato tarafından tanımlanan hemen hemen parakontakt manifoldların hiperyüzeylerini inceledi. Hemen hemen r -parakontakt Riemann manifoldların hiperyüzeyleri ve özel olarak invariant hiperyüzeyleri sırasıyla [52] ve [53] de ele alındı. H. Gill ve K. K. Dube [54] hemen hemen r -parakontakt manifoldların invariant ve non-invariant hiperyüzeylerini çalışarak bu hiperyüzeyler için bazı karakterizasyonlar elde ettiler. Lorentzian hemen hemen parakontakt manifoldların transversal hiperyüzeyleri [55] de ele alındı.

Lorentzian hemen hemen parakontakt manifoldların altmanifoldları pek çok matematikçi tarafından çalışıldı. U. C. De ve A. K. Sengupta [56] Lorentzian hemen hemen para-Sasakian manifoldların CR-altmanifoldlarını inceledi. Lorentzian para-Sasakian manifoldların özgün semi-invariant altmanifoldlarının yokluğu U. C. De ve A. A. Shaikh [57] tarafından ispatlandı. B. Prasad [58] Lorentzian para-Sasakian manifoldların semi-invariant altmanifoldları üzerindeki distribüsyonların integrallenebilirlik şartlarını araştırdı. Lorentzian hemen hemen parakontakt ve Lorentzian

parakosimplektik manifoldların semi-invaryant altmanifoldları ise sırasıyla [59] ve [60] de M. M. Tripathi tarafından çalışıldı.

Kompleks diferensiyel geometride, bir altmanifold kompleks manifoldun kompleks yapısı ile karakterize edilir. Eğer altmanifoldun tanjant uzayı kompleks yapı altında invaryant ise bu altmanifold holomorfik (invaryant) altmanifold olarak adlandırılır. Eğer altmanifoldun tanjant uzayının kompleks yapı altındaki görüntüsü normal uzaya taşıyorsa bu durumda altmanifolda tamamen reel (anti-invaryant) altmanifold denir. 1978 yılında A. Bejancu [61] bir hemen hemen Hermityen manifoldun invaryant ve anti-invaryant altmanifoldlarını içeren CR-altmanifoldlarını tanımladı. Daha sonra bu kavram A. Bejancu ve N. Papaghiuc [62] tarafından hemen hemen kontakt metrik manifoldlara genişletildi ve semi-invaryant altmanifoldlar olarak adlandırılan yeni bir altmanifold sınıfı tanımlandı .

Diğer taraftan slant altmanifoldlar teorisi son yirmi yılda önemli bir gelişme gösterdi. Kompleks geometride slant immersiyonlar 1990 yılında B. Y. Chen tarafından ([63], [64]) holomorfik ve tamamen reel altmanifoldların bir genelleştirmesi olarak tanıtıldı. 1996 yılında A. Lotta [65] hemen hemen kontakt manifoldların slant altmanifoldları kavramını ortaya attı. K -Kontakt ve Sasakian manifoldların slant altmanifoldları J. L. Cabrerizo, A. Carriazo, L.M. Fernandez ve M. Fernandez ([66], [67]) tarafından çalışıldı. Kenmotsu manifoldların slant altmanifoldları da [68] ve [69] da incelendi. N. Papaghiuc [70] ise özgün CR-altmanifoldları ve slant altmanifoldları özel bir alt sınıf olarak kabul eden semi-slant altmanifoldlar sınıfını tanıttı ve Kaehler manifoldların semi-slant altmanifoldlarını inceledi. Lokal Riemann çarpım manifoldların semi-slant altmanifoldları H. Li ve X. Li [71] tarafından çalışıldı. Semi-slant manifoldların kontakt versiyonu [72] da çalışıldı. M. Atçeken [73] hemen hemen parakontakt Riemann manifoldların semi-slant altmanifoldlarını inceleyerek bazı karakterizasyonlar elde etti.

Warped çarpım manifoldları 1969 yılında R. L. Bishop ve B. O'Neill [74] tarafından tanıtıldı ve daha sonra pek çok matematikçi ve fizikçi tarafından çalışıldı. Bu manifoldlar Riemann çarpım manifoldlarının bir genelleştirmesi olarak göz önüne alınabilir. B. Y. Chen ([75], [76]) Kaehler manifoldların warped çarpım CR-altmanifoldlarını araştırarak CR-warped çarpım kavramını ortaya attı. Daha sonra I. Hasega-

wa ve I. Mihai [77] Sasakian manifoldların kontakt CR-warped çarpım altmanifoldlarını inceledi. Semi-slant altmanifoldlar CR-altmanifoldların bir genelleştirmesi olarak düşünülebileceğinden warped çarpım semi-slant altmanifoldlar sınıfı daha genel ve geometrik açıdan oldukça önemli bir sınıftır. Çünkü manifoldlar üzerinde tanımlı her yapı warped çarpım semi-slant altmanifold tanımlamaya izin vermeyebilir. B. Şahin [78] Kahler manifoldların warped çarpım semi-slant altmanifoldlarının yokluğunu gösterdi. M. Atçeken [79] de lokal Riemann çarpım manifoldların warped çarpım semi-slant altmanifoldlarını inceledi. Ayrıca Kenmotsu manifoldlarda özgün warped çarpım semi-slant altmanifoldların yokluğu yine M. Atçeken [80] tarafından ispatlandı. Kosimplektik manifoldların bazı tipteki warped çarpım semi-slant altmanifoldlarının yokluğu da [81] de gösterildi.

Doktora tezi olarak hazırlanan bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, sonraki bölümlerin daha iyi bir şekilde anlaşılabilmesi için biharmonik dönüşümler, semi-Riemann manifoldlar ve Lorentzian hemen hemen parakontakt manifoldlar ile ilgili tanım ve teoremler sunuldu.

Tezin orjinal bölümleri ikinci, üçüncü ve dördüncü bölümlerdir. İkinci bölümde 4-boyutlu Lorentzian para-Sasakian manifoldlar üzerindeki özgün biharmonik spacelike ve özgün biharmonik timelike eğriler çalışıldı. Bu bölüm dört kısımdan oluşmaktadır. İkinci bölümün ilk kısmı M. Tarafdar ve A. Bhattacharyya [82] tarafından ispatlanan ve konformal flat, quasi konformal flat, konformal simetrik n -boyutlu Lorentzian para-Sasakian manifoldların $S_1^n(1)$ Lorentzian birim küresine lokal olarak izometrik olduğunu ifade eden bazı teoremlere ayrıldı. İkinci kısımda Minkowski uzaylarda tanımlı eğriler için J. Walrave [83] tarafından verilen Frenet formüllerine benzer şekilde 4-boyutlu Lorentzian para-Sasakian manifoldlar üzerinde yay-parametresi ile parametrelendirilmiş nondejenere eğriler için Frenet formüllerine yer verildi. İkinci bölümün orjinal olan kısmının başladığı üçüncü kısımda konformal flat, quasi konformal flat ve konformal simetrik 4-boyutlu Lorentzian para-Sasakian manifoldların sabit 1 eğrilğine sahip olduğu gerçeğinden hareketle bu manifoldların spacelike ve timelike eğrileri için biharmonik denklemler elde edildi. Dördüncü kısımda ise konformal flat, quasi konformal flat ve konformal simetrik 4-boyutlu Lorentzian para-Sasakian manifoldların $S_1^4(1)$ Lorentzian birim küresine lokal olarak izometrik

olduğu göz önüne alınarak $S_1^4(1)$ Lorentzian birim küresinin özgün biharmonik eğrileri incelenerek bazı karakterizasyonlar elde edildi.

Üçüncü bölümde hemen hemen parakontakt manifoldların, Lorentzian hemen hemen parakontakt manifoldların ve Lorentzian para-Sasakian manifoldların hiperyüzeyleri çalışıldı. Bu bölüm beş kısımdan oluşmaktadır. Üçüncü bölümün ilk kısmında karakteristik vektör alanı hiperyüzeye ait değil iken hemen hemen parakontakt manifoldların non-invariant hiperyüzeyleri incelenerek bu hiperyüzeylerin bir hemen hemen çarpım yapısına sahip oldukları gösterildi. İkinci kısımda afin kosimplektik ve normal hemen hemen parakontakt manifoldların hiperyüzeyleri çalışıldı. Üçüncü kısımda Lorentzian para-Sasakian manifoldların non-invariant ve invariant hiperyüzeyleri incelendi. Dördüncü kısımda önceki kısımlarda tanıtılan hiperyüzeylere örnekler verildi. Son kısımda ise Lorentzian para-Sasakian manifoldların sırasıyla biharmonik spacelike ve biharmonik timelike hiperyüzeyleri incelenerek bu hiperyüzeylerin özgün biharmonik olması için gerek ve yeter şartlar araştırıldı.

Dördüncü bölümde Lorentzian hemen hemen parakontakt manifoldların, Lorentzian parakosimplektik manifoldların ve Lorentzian para-Sasakian manifoldların altmanifoldları çalışıldı. Bu bölüm dört kısıma ayrıldı. Dördüncü bölümün ilk kısmında Lorentzian hemen hemen parakontakt manifoldların slant altmanifoldları tanıtılarak örnekler verildi. İkinci kısımda Lorentzian hemen hemen parakontakt manifoldların semi-slant altmanifoldları incelendi ve özel olarak Lorentzian parakosimplektik ve Lorentzian para-Sasakian manifoldların semi-slant altmanifoldları ile ilgili bazı karakterizasyonlar elde edildi. Üçüncü kısımda Lorentzian parakosimplektik manifoldların warped çarpım, warped çarpım semi-invariant , warped çarpım semi-slant ve warped çarpım anti-slant alt manifoldları çalışıldı. Dördüncü kısım ise Lorentzian para-Sasakian uzay formların biharmonik altmanifoldlarına ayrıldı.

BÖLÜM 1

TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölüm üç kısımdan oluşmaktadır. İlk kısımda biharmonik dönüşümler, ikinci kısımda semi-Riemann manifoldlar ve son kısımda ise Lorentzian hemen hemen parakontakt manifoldlar ile ilgili temel tanım ve teoremlere yer verildi.

1.1 Biharmonik Dönüşümler

Bu kısımda ilk önce Riemann manifoldları arasındaki harmonik ve biharmonik dönüşümler için temel tanımlar verilerek bazı özellikleri incelenecektir. Daha sonra özgün (harmonik olmayan) biharmonik dönüşümlerin yokluğu ile ilgili teoremlere ve biharmonik eğrilere yer verilecektir.

1.1.1 Riemann manifoldları arasındaki harmonik ve biharmonik dönüşümler

Tanım 1.1.1. W , M ve N , C^∞ manifoldlar olmak üzere

$$\varphi : M \rightarrow N$$

bir C^∞ dönüşüm olsun. Bir $W \rightarrow N$ vektör demetinin pull-back demeti

$$\varphi^{-1}W \rightarrow M$$

ile gösterilir ve $x \in M$ için bu demet

$$(\varphi^{-1}W)_x = W_{\varphi(x)} \quad (1.1.1)$$

ile tanımlanan liflere sahiptir. $W \rightarrow N$ vektör demeti üzerindeki konneksiyon ∇^W ise $\varphi^{-1}W \rightarrow M$ pull-back demeti üzerindeki konneksiyon ∇^φ ile gösterilen ve

$$\begin{aligned} \nabla^\varphi : \Gamma(TM) \times \Gamma(\varphi^{-1}W) &\rightarrow \Gamma(\varphi^{-1}W) \\ (X, \varphi^*\sigma) &\rightarrow \nabla_X^\varphi(\varphi^*\sigma) = \nabla_{d\varphi(X)}^W \sigma \end{aligned} \quad (1.1.2)$$

ile tanımlanan tek lineer konneksiyondur. ∇^φ konneksiyonuna pull-back konneksiyon denir. Burada

$$\varphi^*\sigma = \sigma \circ \varphi$$

dir [84].

$M = (M, g)$ ve $N = (N, h)$ Riemann manifoldları ve

$$\varphi : M \rightarrow N$$

bir C^∞ dönüşüm olsun. φ nin türev dönüşümü $d\varphi$,

$$T^*M \otimes \varphi^{-1}TN = \text{Hom}(TM, \varphi^{-1}TN) \rightarrow M$$

vektör demetinin bir kesiti olarak düşünülebilir. $\text{Hom}(TM, \varphi^{-1}TN) \rightarrow M$ vektör demeti, M manifoldu üzerindeki ∇^M Levi-Civita konneksiyonu ve ∇^φ pull-back konneksiyonundan indirgenen ∇ konneksiyonuna sahiptir. ∇ konneksiyonunun $d\varphi \in \Gamma(T^*M \otimes \varphi^{-1}TN)$ kesitine uygulanmasıyla φ dönüşümünün

$$T^*M \otimes T^*M \otimes \varphi^{-1}TN \rightarrow M$$

vektör demetinin bir kesiti olan ikinci temel formuna ulaşılır [84].

Tanım 1.1.2. (M, g) ve (N, h) Riemann manifoldları ve

$$\varphi : M \rightarrow N$$

bir C^∞ dönüşüm olsun. Bu durumda φ dönüşümünün ikinci temel formu, $d\varphi \in \Gamma(T^*M \otimes \varphi^{-1}TN)$ olmak üzere $\nabla d\varphi$ ile gösterilir ve $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned} \nabla d\varphi : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) &\rightarrow \Gamma(\varphi^{-1}TN) \\ (X, Y) &\rightarrow \nabla d\varphi(X, Y) \end{aligned}$$

$$\nabla d\varphi(X, Y) = (\nabla_X d\varphi)(Y) = \nabla_X^\varphi d\varphi(Y) - d\varphi(\nabla_X^M Y) \quad (1.1.3)$$

şeklinde tanımlanır [84].

$\{x^1, \dots, x^m\}$ ve $\{y^1, \dots, y^n\}$, sırasıyla, (M, g) ve (N, h) Riemann manifoldları üzerindeki lokal koordinat sistemleri olsun. Bu durumda

$$(\nabla d\varphi)_{ij} = \nabla d\varphi\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \varphi_{;ij}^\gamma \frac{\partial}{\partial y^\gamma} \quad (1.1.4)$$

yazılabilir. Burada

$$\varphi_{;ij}^\gamma = \left(\frac{\partial^2 \varphi^\gamma}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial \varphi^\gamma}{\partial x^k} + L_{\alpha\beta}^\gamma \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi^\beta}{\partial x^j} \right)$$

olup Γ_{ij}^k ve $L_{\alpha\beta}^\gamma$, sırasıyla M ve N deki Christoffel sembollerini ve “;” de ikinci mertebeden kovaryant kısmı türevi göstermektedir [84].

Önerme 1.1.1. M, N Riemann manifoldları ve $\varphi : (M, g) \rightarrow (N, h)$ bir C^∞ dönüşüm olsun. Bu durumda φ nin ikinci temel formu simetriktir [84].

Örnek 1.1.1. (Altmanifoldlar) $(M, g), (N, h)$ Riemann manifoldları ve

$$\varphi : M \rightarrow N$$

bir izometrik immersiyon olsun. $\varphi^{-1}TN$ pull-back demeti teğet ve normal demetinin direkt toplamı olarak

$$\varphi^{-1}TN = \tau M \oplus \mathcal{V}M \quad , \quad X = X^T + X^\perp \quad (1.1.5)$$

biçiminde yazılabilir. $d\varphi$ türev dönüşümünün, TM ile TM nin $d\varphi$ altında $\varphi^{-1}TN$ pull-back demetindeki görüntüsü olan τM yi özdeşleştirdiği düşünülürse $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\nabla_X^\varphi(d\varphi(Y)) = \nabla_X^N Y$$

eşitliğine ulaşılır. Bu durumda $d\varphi(\nabla_X^M Y)$, $\nabla_X^N Y$ nin tanjant bileşeni ve $\nabla d\varphi(X, Y)$ ise $\nabla_X^N Y$ nin normal bileşenidir. Böylece $\nabla d\varphi(X, Y)$, N deki $\varphi(M)$ immersed altmanifoldunun $B(X, Y)$ ile gösterilen ikinci temel formu olur. Dolayısıyla bir φ izometrik immersiyonun ikinci temel formunun, N deki $\varphi(M)$ immersed altmanifoldunun ikinci temel formuna eşit olduğu görülür [84].

Tanım 1.1.3. (M^m, g) , (N^n, h) Riemann manifoldları ve

$$\varphi : M^m \rightarrow N^n$$

bir C^∞ dönüşüm olsun. φ nin tensiyon alanı $\tau(\varphi) \in \Gamma(\varphi^{-1}TN)$ ile gösterilir ve

$$\tau(\varphi) = \text{div } d\varphi = -d^*d\varphi = iz \nabla d\varphi = \sum_{i=1}^m \nabla d\varphi(e_i, e_i) \quad (1.1.6)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\{e_1, \dots, e_m\}$, M üzerinde bir ortonormal bazdır [84].

Önerme 1.1.2. (M, g) , (N, h) Riemann manifoldları, $\{x^1, \dots, x^m\}$ ve $\{y^1, \dots, y^n\}$ sırasıyla M ve N üzerinde lokal koordinat sistemleri olsun. Bu durumda bir $\varphi : M \rightarrow N$, C^∞ dönüşümünün tensiyon alanının lokal koordinatlardaki ifadesi

$$\begin{aligned} \tau(\varphi)^\gamma &= g^{ij} \varphi_{;ij}^\gamma \\ &= g^{ij} \left(\frac{\partial^2 \varphi^\gamma}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial \varphi^\gamma}{\partial x^k} + L_{\alpha\beta}^\gamma \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi^\beta}{\partial x^j} \right) \end{aligned} \quad (1.1.7)$$

$$= \Delta^M \varphi^\gamma + g(\text{grad } \varphi^\alpha, \text{grad } \varphi^\alpha) L_{\alpha\beta}^\gamma \quad (1.1.8)$$

olmak üzere

$$\tau(\varphi) = \tau(\varphi)^\gamma \left(\frac{\partial}{\partial y^\gamma} \right)$$

biçimindedir. Burada Δ^M , M üzerindeki Laplasyan ve Γ_{ij}^k ve $L_{\alpha\beta}^\gamma$, sırasıyla M ve N deki Christoffel sembolleridir [84].

Eğer $\{x^1, \dots, x^m\}$ ve $\{y^1, \dots, y^n\}$ sırasıyla $x \in M$ ve $\varphi(x) \in N$ noktalarındaki normal koordinatlar ise x noktasında M nin Christoffel sembolleri, $\varphi(x)$ noktasında da N nin Christoffel sembolleri sıfır olacağından φ dönüşümünün x noktasındaki tensiyon alanı

$$\tau(\varphi)_x^\gamma = \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 \varphi^\gamma}{(\partial x^i)^2} = (\Delta \varphi^\gamma)(x) \quad (1.1.9)$$

ile ifade edilir.

Tanım 1.1.4. M ve N sırasıyla m ve n boyutlu Riemann manifoldları, $x \in M$ ve

$$\varphi : M \rightarrow N$$

bir C^∞ dönüşüm olsun. φ nin enerji yoğunluğu $e(\varphi)$ ile gösterilen ve

$$\begin{aligned} e(\varphi) : M &\rightarrow [0, \infty) \\ x &\rightarrow e(\varphi)_x = \frac{1}{2} |d\varphi_x|^2 \end{aligned} \quad (1.1.10)$$

şeklinde tanımlanan bir C^∞ fonksiyondur. Burada $\{e_1, \dots, e_m\}$, $T_x M$ tanjant uzayı için bir ortonormal baz ve $|d\varphi_x|^2$,

$$|d\varphi_x|^2 = \sum_{i=1}^m h(d\varphi_x(e_i), d\varphi_x(e_i)) \quad (1.1.11)$$

ile tanımlanan Hilbert-Schmidt normudur [84].

Tanım 1.1.5. (M, g) ve (N, h) Riemann manifoldları; D , M de bir kompakt bölge ve

$$\varphi : M \rightarrow N$$

bir C^∞ dönüşüm olsun. φ nin enerji integrali, φ nin enerji yoğunluğunun integrali olarak tanımlanır ve $E(\varphi; D)$ ile gösterilir. Yani

$$E(\varphi; D) = \int_D e(\varphi) v_g = \frac{1}{2} \int_D |d\varphi|^2 v_g \quad (1.1.12)$$

dir [84].

$E(\varphi; D) \geq 0$ dır ve $E(\varphi; D) = 0$ olması için gerek ve yeter şart φ nin D üzerinde sabit olmasıdır. Eğer M manifoldu kompakt ise $E(\varphi; M)$ yerine $E(\varphi)$ gösterimi kullanılır. Enerji integrali sadece g ve h metriklerine bağlıdır.

Tanım 1.1.6. (M, g) ve (N, h) Riemann manifoldları ve

$$C^\infty(M, N) = \{\varphi | \varphi : M \rightarrow N, \varphi \text{ bir } C^\infty \text{ dönüşüm}\}$$

kümesini gözönüne alalım. $\varphi \in C^\infty(M, N)$ dönüşümü kompakt bir D bölgesi üzerinde

$$E(\cdot; D) : C^\infty(M, N) \rightarrow \mathbb{R}$$

ile tanımlanan enerji fonksiyonelinin kritik noktası ise φ ye harmoniktir denir [84].

Tanım 1.1.7. M, N Riemann manifoldları ve

$$\varphi : M \rightarrow N$$

bir C^∞ dönüşüm olsun. φ nin bir C^∞ varyasyonu, $\varepsilon > 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \varphi : M \times (-\varepsilon, \varepsilon) &\rightarrow N \\ (x, t) &\rightarrow \varphi_t(x) \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanır öyle ki $\varphi_0 = \varphi$ dir [84].

$\{\varphi_t\}$, C^∞ olarak sadece bir $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ parametresine bağılı C^∞ dönüşümlerin bir ailesi olarak düşünülebilir [84].

Tanım 1.1.8. M, N Riemann manifoldları

$$\varphi : M \rightarrow N$$

bir C^∞ dönüşüm ve $x \in M$ olsun. $\forall x \in M$ için $t \rightarrow \varphi_t(x)$ dönüşümü $\varphi(x) \in N$ noktasından geçen bir C^∞ eğri tanımlar. Bu eğrinin

$$v(x) = \frac{\partial \varphi_t(x)}{\partial t} \Big|_{t=0} \in T_{\varphi(x)}N \quad (1.1.13)$$

ile tanımlanan ve $\varphi^{-1}TN$ pull-back demetinin bir kesiti olan hız vektörüne φ_t nin varyasyon vektör alanı denir [84].

Tersine $\varphi^{-1}TN$ pull-back demetinin bir kesiti olan v için φ nin

$$\varphi_t(x) = \exp_{\varphi(x)}(tv(x))$$

ile tanımlı bir tek olmayan $\{\varphi_t\}$ ailesi vardır [84].

Tanım 1.1.9. M, N Riemann manifoldları ve D, M nin kompakt bir altkümesi olsun. Bu durumda $\varphi : M \rightarrow N$, C^∞ dönüşümünün bir C^∞ $\{\varphi_t\}$ varyasyonu $\forall t$ için $M \setminus \mathring{D}$ üzerinde $\varphi_t = \varphi$ şartını sağlıyorsa $\{\varphi_t\}$ varyasyonu D içinde desteklenir denir. Burada $\mathring{D}$ ile D nin içi gösterilmektedir [84].

Tanım (1.1.6) yı bir başka şekilde aşağıdaki gibi vermek mümkündür:

Tanım 1.1.10. (M, g) ve (N, h) Riemann manifoldları olsun. Bu durumda

$$\varphi : M \rightarrow N$$

C^∞ dönüşümü M nin bütün D kompakt bölgeleri ve D içinde desteklenen bütün C^∞ $\{\varphi_t\}$ varyasyonları için

$$\frac{d}{dt}E(\varphi_t; D) \Big|_{t=0} = 0 \quad (1.1.14)$$

şartını sağlıyorsa φ ye bir harmonik dönüşüm denir [84].

Tanım 1.1.11. $(M, g), (N, h)$ Riemann manifoldları , $x \in M$ ve

$$\varphi : M \rightarrow N$$

bir C^∞ dönüşüm olsun. $\varphi^{-1}TN$ pull-back demeti üzerindeki pull-back metrik $\langle , \rangle$ ile gösterilir ve $v, w \in \Gamma(\varphi^{-1}TN)$ olmak üzere $x \in M$ noktasında

$$\langle v, w \rangle_x = h_{\varphi(x)}(v(x), w(x))$$

şeklinde tanımlanır [84].

Önerme 1.1.3. (Enerjinin Birinci Varyasyonu) $\varphi : M \rightarrow N$, Riemann manifoldları arasında tanımlanan bir C^∞ dönüşüm ve $\{\varphi_t\}$, φ nin $D \subset M$ kompakt bölgesi içinde desteklenen bir C^∞ varyasyonu olsun. Bu durumda $\langle , \rangle$, $\varphi^{-1}TN$ pull-back demeti üzerindeki pull-back metrik olmak üzere

$$\frac{d}{dt}E(\varphi_t; D)|_{t=0} = - \int_D \langle v, \tau(\varphi) \rangle v_g \quad (1.1.15)$$

dir. Burada $x \in D$ ve $v(x)$, $\{\varphi_t\}$ nin

$$v(x) = \frac{\partial \varphi_t(x)}{\partial t}|_{t=0}$$

ile tanımlanan varyasyon vektör alanıdır [84].

Teorem 1.1.1. M, N Riemann manifoldları, $\varphi : M \rightarrow N$ bir C^∞ dönüşüm ve D , M nin bir kompakt altkümesi olsun. Bu durumda φ nin harmonik olması için gerek ve yeter şart $\tau(\varphi) = 0$ olmasıdır [84].

Tanım 1.1.12. M, N Riemann manifoldları ve $\varphi : M \rightarrow N$ bir harmonik dönüşüm olsun. Bu durumda $\tau(\varphi) = 0$ denklemi harmonik denklem veya tensiyon alanı denklemi olarak adlandırılır [84].

Tanım 1.1.13. M, N Riemann manifoldları ve

$$\varphi : M \rightarrow N$$

bir izometrik immersiyon olsun. φ nin ortalama eğriliği (veya N deki $\varphi(M)$ immersed altmanifoldunun ortalama eğriliği) μ^M ile gösterilir ve

$$\mu^M = \frac{1}{m} \text{tr} B = \sum_{i=1}^m B(e_i, e_i) \quad (1.1.16)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\{e_1, \dots, e_m\}$, M de bir ortonormal baz ve B , $\varphi(M)$ altmanifoldunun ikinci temel formudur [84].

Önerme 1.1.4. M, N Riemann manifoldları ve

$$\varphi : M \rightarrow N$$

bir izometrik immersiyon olsun. Bu durumda

$$\tau(\varphi) = iz B = (\text{boy } M) \mu^M \quad (1.1.17)$$

dir. Öyleyse bir izometrik immersiyonun harmonik olması için gerek ve yeter şart bu izometrik immersiyonun minimal olmasıdır [84].

Örnek 1.1.2. (Geodezikler)

M , 1-boyutlu ve N , n -boyutlu Riemann manifoldları olsun. Bu durumda

$$\varphi : M \rightarrow N^n$$

C^∞ dönüşümü bir parametrik eğri olarak düşünülebilir. N üzerindeki $\{y^1, \dots, y^n\}$ koordinat dönüşümleri için $\gamma = 1, \dots, n$ olmak üzere (1.1.7) eşitliğinden

$$\begin{aligned} \tau(\varphi) &= \tau(\varphi)^\gamma \frac{\partial}{\partial y^\gamma} \\ &= \left(\frac{d^2 \varphi^\gamma}{dt^2} + L_{\alpha\beta}^\gamma \frac{d\varphi^\alpha}{dt} \frac{d\varphi^\beta}{dt} \right) \frac{\partial}{\partial y^\gamma} \end{aligned}$$

bulunur. Böylece R nin bir açık altkümesinden veya S^1 den keyfi bir Riemann manifolduna tanımlanan bir C^∞ dönüşümün harmonik olması için gerek ve yeter şart bu dönüşümün yay uzunluğunun bir katı ile parametrelendirilmiş bir geodezik olmasıdır sonucuna ulaşılır [84].

Tanım 1.1.14. M, N Riemann manifoldları ve

$$\varphi : M \rightarrow N$$

bir C^∞ dönüşüm olsun. φ nin tensiyon alanı

$$\tau(\varphi) = iz \nabla d\varphi$$

olmak üzere $D \subseteq M$ kompakt bölgesi için φ nin bienerji integrali

$$E_2(\varphi) = \frac{1}{2} \int_D |\tau(\varphi)|^2 v_g \quad (1.1.18)$$

ile tanımlanır [7].

Önerme 1.1.5. (Bienerjinin Birinci Varyasyonu) M, N Riemann manifoldları, $\varphi : (M, g) \rightarrow (N, h)$ bir C^∞ dönüşüm ve $\{\varphi_t\}$, φ nin $D \subset M$ kompakt altkümesi içinde desteklenen bir C^∞ varyasyonu olsun. Bu durumda $<, >, \varphi^{-1}TN$ pull-back demeti üzerindeki pull-back metrik ve $\Delta^\varphi = -iz(\nabla^\varphi \nabla^\varphi - \nabla_\nabla^\varphi)$, $\varphi^{-1}(TN)$ pull-back demetinin kesitleri üzerindeki Laplasyan olmak üzere

$$\frac{d}{dt} E_2(\varphi_t; D)|_{t=0} = \int_D < \tau_2(\varphi), v > v_g \quad (1.1.19)$$

dir. Burada $x \in D$ için $v(x)$, $\{\varphi_t\}$ nin varyasyon vektör alanı; R^N , N manifoldu üzerinde $R^N(X, Y) = [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X, Y]}$ ile tanımlı eğrilik operatörü ve

$$\tau_2(\varphi) = -\Delta^\varphi(\tau(\varphi)) - iz R^N(d\varphi(-), \tau(\varphi))d\varphi(-)$$

dir [7].

İspat. D , M nin kompakt bir altkümesi; $\{\varphi_t\}$, φ nin D içinde desteklenen bir C^∞ varyasyonu ve $v \in \Gamma(\varphi^{-1}TN)$ bir varyasyon vektör alanı olsun. M üzerindeki $\{e_1, \dots, e_m\}$ lokal ortonormal çatısını gözönüne alalım.

$$\begin{aligned} \phi : M \times (-\varepsilon, \varepsilon) &\rightarrow N \\ (x, t) &\rightarrow \phi(x, t) = \varphi_t(x) \end{aligned}$$

fonksiyonunu ve

$$E = \phi^{-1}TN \rightarrow M \times (-\varepsilon, \varepsilon)$$

vektör demetini tanımlayalım. E demeti üzerindeki pull-back konneksiyon ∇^ϕ ile gösterilsin. M manifoldu üzerindeki bir X vektör alanı $M \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ üzerinde bir vektör alanı olarak düşünülebileceğinden

$$[\frac{\partial}{\partial t}, X] = 0 \quad (1.1.20)$$

olur. $e_i, \frac{\partial}{\partial t} \in \Gamma(TM)$ için Önerme 1.1.1 ve (1.1.20) eşitliğinden

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^\phi d\phi(e_i) - \nabla_{e_i}^\phi d\phi(\frac{\partial}{\partial t}) - d\phi([\frac{\partial}{\partial t}, e_i]) = 0$$

ve

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^\phi d\phi(e_i) = \nabla_{e_i}^\phi d\phi(\frac{\partial}{\partial t}) \quad (1.1.21)$$

yazılabilir. (1.1.21) eşitliğinin her iki tarafının e_i yönündeki türevi alınırsa

$$\nabla_{e_i}^\phi \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^\phi d\phi(e_i) = \nabla_{e_i}^\phi \nabla_{e_i}^\phi d\phi(\frac{\partial}{\partial t}) \quad (1.1.22)$$

elde edilir. Ayrıca yine (1.1.21) eşitliğinden

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^\phi d\phi(\nabla_{e_i}^M e_i) = \nabla_{\nabla_{e_i}^M e_i}^\phi \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (1.1.23)$$

yazılabilir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E_2(\varphi_t; D)|_{t=0} &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_D \langle \tau(\varphi_t), \tau(\varphi_t) \rangle v_g|_{t=0} \\ &= \int_D \langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^\phi \tau(\varphi_t), \tau(\varphi_t) \rangle v_g|_{t=0} \\ &= \int_D \langle \sum_{i=1}^m \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^\phi \{ \nabla_{e_i}^\phi (d\varphi_t(e_i)) - d\varphi_t(\nabla_{e_i}^M e_i) \}, \tau(\varphi_t) \rangle v_g|_{t=0} \\ &= \int_D \langle \sum_{i=1}^m \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^\phi \nabla_{e_i}^\phi (d\varphi_t(e_i)), \tau(\varphi_t) \rangle v_g|_{t=0} \\ &\quad - \int_D \langle \sum_{i=1}^m \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^\phi d\varphi_t(\nabla_{e_i}^M e_i), \tau(\varphi_t) \rangle v_g|_{t=0} \end{aligned} \quad (1.1.24)$$

dir.

$$\begin{aligned} R^N(\frac{\partial \phi}{\partial t}, d\phi(e_i))d\phi(e_i) &= \nabla_{\frac{\partial \phi}{\partial t}}^N \nabla_{d\phi(e_i)}^N d\phi(e_i) - \nabla_{d\phi(e_i)}^N \nabla_{\frac{\partial \phi}{\partial t}}^N d\phi(e_i) - \nabla_{[\frac{\partial \phi}{\partial t}, d\phi(e_i)]}^N d\phi(e_i) \\ &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^\phi \nabla_{e_i}^\phi d\phi(e_i) - \nabla_{e_i}^\phi \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^\phi d\phi(e_i) \end{aligned}$$

olduğundan

$$R^N(\frac{\partial \phi}{\partial t}, d\phi(e_i))d\phi(e_i) + \nabla_{e_i}^\phi \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^\phi d\phi(e_i) = \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^\phi \nabla_{e_i}^\phi d\phi(e_i) \quad (1.1.25)$$

eşitliğine ulaşılır. Böylece (1.1.22), (1.1.23), (1.1.25) eşitlikleri (1.1.24) denkleminde

yerine yazılacak olursa

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}E_2(\varphi_t; D)|_{t=0} &= \int_D \left\{ \left\langle \sum_{i=1}^m \left\{ \nabla_{e_i}^\phi \nabla_{e_i}^\phi d\phi\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) - \nabla_{\nabla_{e_i}^M e_i}^\phi \frac{\partial \phi}{\partial t} \right\}, \tau(\varphi_t) \right\rangle \right. \\
&\quad \left. + \left\langle \sum_{i=1}^m R^N\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}, d\phi(e_i)\right) d\phi(e_i), \tau(\varphi_t) \right\rangle \right\} v_g|_{t=0} \\
&= \int_D \left\langle \sum_{i=1}^m \left\{ (\nabla^\phi)^2(e_i, e_i) \frac{\partial \phi}{\partial t} + R^N\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}, d\phi(e_i)\right) d\phi(e_i) \right\}, \tau(\varphi_t) \right\rangle v_g|_{t=0} \\
&= \int_D \left\langle -\Delta \tau(\varphi) - iz R^N(d\varphi(-), \tau(\varphi)) d\varphi(-), v \right\rangle v_g \\
&= \int_D \left\langle \tau_2(\varphi), v \right\rangle v_g
\end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır. $\square$

Tanım 1.1.15. (*Bitensiyon Alanı*)

M ve N Riemann manifoldları, $\varphi : (M, g) \rightarrow (N, h)$ bir C^∞ dönüşüm olsun. φ nin bitensiyon alanı $\tau_2(\varphi)$ ile gösterilir ve

$$\tau_2(\varphi) = -\Delta^\varphi(\tau(\varphi)) - iz R^N(d\varphi(-), \tau(\varphi)) d\varphi(-) \quad (1.1.26)$$

şeklinde tanımlanır [7].

Tanım 1.1.16. (*Biharmonik Denklem ve Biharmonik Dönüşüm*)

M, N Riemann manifoldları ve $\varphi : (M, g) \rightarrow (N, h)$ bir C^∞ dönüşüm olsun. Bu durumda

$$\tau_2(\varphi) = -\Delta^\varphi(\tau(\varphi)) - iz R^N(d\varphi(-), \tau(\varphi)) d\varphi(-) = 0 \quad (1.1.27)$$

eşitliğine φ dönüşümünün biharmonik denklemi ve $\tau_2(\varphi) = 0$ denklemini sağlayan φ dönüşümüne de biharmonik dönüşüm denir [7].

Böylece her harmonik dönüşümün biharmonik olacağı açıktır. Ancak tersi her zaman doğru değildir. Dolayısıyla harmonik olmayan (non-harmonik) biharmonik dönüşümler özel bir öneme sahiptir. Böyle dönüşümleri özgün biharmonik dönüşümler olarak adlandıracamız. (N, h) manifoldunun bir semi-Riemannian manifold olması durumunda da $\varphi : (M, g) \rightarrow (N, h)$ dönüşümünün bienerjisi ve biharmonik denklemi yukarıda verilen şekilde tanımlanır [84].

M kompakt manifold olmak üzere $\varphi : (M^m, g) \rightarrow R^n$ dönüşümünü gözönüne alalım. Bu durumda $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ ve $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ sırasıyla M ve R^n üzerindeki koordinat sistemleri olmak üzere φ nin tensiyon alanı

$$\begin{aligned}
\tau(\varphi) &= \tau(\varphi)^\gamma \frac{\partial}{\partial y^\gamma} \\
&= g^{ij} \left(\frac{\partial^2 \varphi^\gamma}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial \varphi^\gamma}{\partial x^k} \right) \frac{\partial}{\partial y^\gamma} \\
&= \Delta^M(\varphi^\gamma) \frac{\partial}{\partial y^\gamma} \\
&= \Delta^M(\varphi)
\end{aligned} \tag{1.1.28}$$

dir. Buradan

$$\begin{aligned}
E_2(\varphi) &= \frac{1}{2} \int_M |\tau(\varphi)|^2 v_g = \frac{1}{2} \int_M \langle \tau(\varphi), \tau(\varphi) \rangle v_g \\
&= \frac{1}{2} \int_M \langle \Delta^M(\varphi), \Delta^M(\varphi) \rangle v_g = \frac{1}{2} \int_M |\Delta^M(\varphi)|^2 v_g
\end{aligned} \tag{1.1.29}$$

elde edilir. φ dönüşümünün bir $X \in \chi(R^n)$ vektör alanı yönündeki 1-parametrelili $\varphi_t = \varphi + tX$ varyasyonunu gözönüne alırsak

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} E_2(\varphi_t)|_{t=0} &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_M \langle \Delta^M(\varphi_t), \Delta^M(\varphi_t) \rangle v_g|_{t=0} \\
&= \int_M \langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \Delta^M(\varphi_t), \Delta^M(\varphi_t) \rangle v_g|_{t=0} \\
&= \int_M \langle \Delta X, \Delta^M(\varphi) \rangle v_g \\
&= \int_M \langle X, \Delta^2(\varphi) \rangle v_g
\end{aligned} \tag{1.1.30}$$

olur. Böylece $\varphi : (M^m, g) \rightarrow R^n$ dönüşümünün biharmonik olması için gerek ve yeter şart $\Delta^2(\varphi) = 0$ eşitliğinin sağlanmasıdır. Ek olarak $\varphi : (M^m, g) \rightarrow R^n$ dönüşümü bir izometrik immersiyon ise H ortalama eğrilik vektörü olmak üzere

$$\Delta(\varphi) = -mH \tag{1.1.31}$$

Beltrami denklemi kullanılırsa “ $\varphi : (M, g) \rightarrow R^n$ dönüşümünün biharmonik olması için gerek ve yeter şart $\Delta H = 0$ olmasıdır ” sonucuna ulaşılır. $\Delta H = 0$ ise M ye biharmonik altmanifold denir [7].

$i : M \rightarrow R^n$ kanonik izdüşüm dönüşümünü göz önüne alalım. H , M nin ortalama eğrilik vektörü olmak üzere

$$\Delta H = \Delta\left(-\frac{1}{m}\Delta i\right) = -\frac{1}{m}\Delta^2 i = -\frac{1}{m}\tau_2(i) \quad (1.1.32)$$

olduğundan M nin R^n Öklidyen uzayının bir biharmonik altmanifoldu olması için gerek ve yeter şart $\tau_2(i) = 0$ yani $i : M \rightarrow R^n$ izometrik immersiyonun biharmonik dönüşüm olmasıdır. Bir izometrik immersiyonun minimal olması için gerek ve yeter şart bu dönüşümün harmonik olmasıdır [84]. Dolayısıyla aşıkarak minimal altmanifoldlar biharmoniktir.

1.1.2 Yokluk teoremleri

Bu kısımda biharmonik dönüşümlerin harmonik olduğu yani özgün (harmonik olmayan) biharmonik dönüşümlerin tanımlanamadığı durumlar incelenecektir.

Teorem 1.1.2. $\varphi : (M, g) \rightarrow (N, h)$ bir C^∞ dönüşüm olsun. Eğer M kompakt, yönlendirilebilir ve $Riem^N \leq 0$ ise φ nin biharmonik olması için gerek ve yeter şart harmonik olmasıdır [10].

İspat. $\varphi : (M, g) \rightarrow (N, h)$ dönüşümünün tensiyon alanı $\tau(\varphi)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Delta|\tau(\varphi)|^2 &= \frac{1}{2}\Delta \langle \tau(\varphi), \tau(\varphi) \rangle \\ &= -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^m \nabla d(\langle \tau(\varphi), \tau(\varphi) \rangle)(e_i, e_i) \\ &= -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^m \{ \nabla_{e_i}^\varphi d(\langle \tau(\varphi), \tau(\varphi) \rangle)(e_i) - d(\langle \tau(\varphi), \tau(\varphi) \rangle)(\nabla_{e_i}^M e_i) \} \\ &= -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^m \{ \nabla_{e_i}^\varphi (e_i(\langle \tau(\varphi), \tau(\varphi) \rangle)) - (\nabla_{e_i}^M e_i)(\langle \tau(\varphi), \tau(\varphi) \rangle) \} \end{aligned}$$

yazılır. Buradan

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Delta|\tau(\varphi)|^2 &= -\sum_{i=1}^m \{ \nabla_{e_i}^\varphi (\langle \nabla_{e_i}^\varphi \tau(\varphi), \tau(\varphi) \rangle) - \langle \nabla_{\nabla_{e_i}^M e_i}^\varphi \tau(\varphi), \tau(\varphi) \rangle \} \\ &= -\sum_{i=1}^m \{ \langle \nabla_{e_i}^\varphi \nabla_{e_i}^\varphi \tau(\varphi), \tau(\varphi) \rangle - \langle \nabla_{\nabla_{e_i}^M e_i}^\varphi \tau(\varphi), \tau(\varphi) \rangle \} \\ &\quad - \sum_{i=1}^m \langle \nabla_{e_i}^\varphi \tau(\varphi), \nabla_{e_i}^\varphi \tau(\varphi) \rangle \\ &= \langle \Delta \tau(\varphi), \tau(\varphi) \rangle - |d\tau(\varphi)|^2 \end{aligned} \quad (1.1.33)$$

elde edilir. φ biharmonik ise

$$\Delta\tau(\varphi) = izR^N(\tau(\varphi), d\varphi(-))d\varphi(-) \quad (1.1.34)$$

yazılabilir. Böylece (1.1.34) eşitliği (1.1.33) de yerine yazılırsa

$$\frac{1}{2}\Delta|\tau(\varphi)|^2 = \langle izR^N(\tau(\varphi), d\varphi(-))d\varphi(-), \tau(\varphi) \rangle - |d\tau(\varphi)|^2 \leq 0 \quad (1.1.35)$$

elde edilir. M kompakt olduğundan maksimum prensibine göre $|\tau(\varphi)|^2$ sabittir. Dolayısıyla (1.1.35) eşitliğinden $d\tau(\varphi) = 0$ bulunur. Ayrıca

$$\operatorname{div} \langle d\varphi, \tau(\varphi) \rangle = |\tau(\varphi)|^2 + \langle d\varphi, d\tau(\varphi) \rangle \quad (1.1.36)$$

özdeşliği ve Divergens Teoremi gözönüne alınırsa $\tau(\varphi) = 0$ bulunur. Bu da φ nin bir harmonik dönüşüm olduğunu gösterir ve ispat tamamlanmış olur. $\square$

M manifoldu kompakt ve yönlendirilebilir değil ise aşağıdaki önerme verilebilir:

Önerme 1.1.6. $\varphi : (M, g) \rightarrow (N, h)$ dönüşümü $|\tau(\varphi)|$ sabit olacak şekilde bir Riemann immersiyon ve $\operatorname{Riem}^N \leq 0$ olsun. Bu durumda φ nin biharmonik olması için gerek ve yeter şart harmonik olmasıdır [10].

İspat. φ bir biharmonik dönüşüm olsun. $|\tau(\varphi)| = \text{sbt.}$ ve $\operatorname{Riem}^N \leq 0$ olduğundan

$$\frac{1}{2}\Delta|\tau(\varphi)|^2 = \langle izR^N(\tau(\varphi), d\varphi(-))d\varphi(-), \tau(\varphi) \rangle - |d\tau(\varphi)|^2 \leq 0$$

yazılabilir. Böylece $d\tau(\varphi) = 0$ olur. Riemann immersiyonlar için geçerli olan

$$-|\tau(\varphi)|^2 = \langle d\varphi, d\tau(\varphi) \rangle \quad (1.1.37)$$

eşitliği kullanılırsa φ bir harmonik dönüşüm olur. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

Önerme 1.1.6 daki $\operatorname{Riem}^N \leq 0$ eğrilik şartı yerine ek boyut 1 olduğunda $\operatorname{Ricc}^N \leq 0$ şartı alınabilir:

Teorem 1.1.3. M kompakt, yönlendirilebilir bir Riemann manifoldu olmak üzere $\varphi : (M^m, g) \rightarrow (N^n, h)$ dönüşümü bir Riemann immersiyon, $\operatorname{Ricc}^N \leq 0$ ve $m = n-1$ olsun. Bu durumda φ nin biharmonik olması için gerek ve yeter şart harmonik olmasıdır [10].

İspat. φ bir Riemann immersiyon ve $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$, M nin bir ortonormal bazı olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} izR^N(d\varphi(-), \tau(\varphi))d\varphi(-) &= \sum_{i=1}^m R^N(d\varphi(e_i), \tau(\varphi))d\varphi(e_i) \\ &= -Ric^N(\tau(\varphi)) \end{aligned} \quad (1.1.38)$$

dir. φ bir biharmonik dönüşüm olsun. Böylece

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Delta|\tau(\varphi)|^2 &= \langle izR^N(\tau(\varphi), d\varphi(-))d\varphi(-), \tau(\varphi) \rangle - |d\tau(\varphi)|^2 \\ &= \langle \sum_{i=1}^m (-R^N(d\varphi(e_i), \tau(\varphi))d\varphi(e_i)), \tau(\varphi) \rangle - |d\tau(\varphi)|^2 \\ &= \langle Ric^N(\tau(\varphi)), \tau(\varphi) \rangle - |d\tau(\varphi)|^2 \leq 0 \end{aligned} \quad (1.1.39)$$

olduğundan ve maksimum prensibinden $d\tau(\varphi) = 0$ elde edilir. φ bir Riemann immersiyon olduğundan

$$-|\tau(\varphi)|^2 = \langle d\varphi, d\tau(\varphi) \rangle$$

eşitliği kullanılarak ispat tamamlanır. $\square$

Önerme 1.1.7. $\varphi : (M^m, g) \rightarrow (N^n, h)$ dönüşümü $|\tau(\varphi)| = s.b.t.$ olacak şekilde bir Riemann immersiyon olsun. $Ric^N \leq 0$ ve $m = n - 1$ ise φ nin biharmonik olması için gerek ve yeter şart harmonik olmasıdır [10].

1.1.3 Biharmonik eğriler

Bu kısımda Riemann manifoldları üzerinde tanımlı bir eğrinin biharmonik denklemi verilecektir.

$I \subseteq R$ olmak üzere $\gamma : I \rightarrow (M, g)$ bir izometrik immersiyon olsun. $\gamma(I)$ görüntü kümesi M de bir eğrinin görüntüsüdür. γ eğrisi yay parametresi ile verilsin. Bu durumda γ eğrisinin tensiyon alanı $\dot{\gamma} = \frac{d\gamma}{ds} = T$ olmak üzere

$$\tau(\gamma) = \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} \quad (1.1.40)$$

dır. Böylece bitensiyon alanı

$$\begin{aligned} \tau_2(\gamma) &= -\Delta\tau(\gamma) - izR^M(d\gamma, \tau(\gamma))d\gamma \\ &= iz(\nabla^\gamma \nabla^\gamma - \nabla_{\frac{\gamma}{\nabla}}^\gamma)\tau(\gamma) - izR^M(d\gamma, \tau(\gamma))d\gamma \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned}
\tau_2(\gamma) &= \nabla_{\frac{d}{dt}}^\gamma \nabla_{\frac{d}{dt}}^\gamma \tau(\gamma) + \nabla_{\nabla_{\frac{d}{dt}}^\gamma \frac{d}{dt}}^\gamma \tau(\gamma) - izR^M(d\gamma, \tau(\gamma))d\gamma \\
&= \nabla_{d\gamma(\frac{d}{dt})}^M \nabla_{d\gamma(\frac{d}{dt})}^M \tau(\gamma) + \nabla_{d\gamma(\nabla_{\frac{d}{dt}}^\gamma \frac{d}{dt})}^M \tau(\gamma) - izR^M(d\gamma, \tau(\gamma))d\gamma \\
&= \nabla_{\frac{d\gamma}{dt}}^M \nabla_{\frac{d\gamma}{dt}}^M \tau(\gamma) - izR^M(d\gamma, \tau(\gamma))d\gamma \\
&= \nabla_{\dot{\gamma}}^2 \tau(\gamma) - izR^M(d\gamma, \tau(\gamma))d\gamma
\end{aligned} \tag{1.1.41}$$

olur ve γ eğrisinin biharmonik denklemi

$$\nabla_{\dot{\gamma}}^2 \tau(\gamma) - izR^M(d\gamma, \tau(\gamma))d\gamma = 0 \tag{1.1.42}$$

şeklinde [18]. (1.1.42) denkleminde her harmonik eğrinin biharmonik olacağı açıkça görülmektedir. Ancak bunun tersi her zaman doğru değildir. Ayrıca R nin bir açık aralığında veya S^1 den tanımlanan bir dönüşümün harmonik olması için gerek ve yeter şart bu dönüşümün yay uzunluğunun bir katı ile parametrelendirilmiş bir geodezik olmasıdır [84]. Böylece geodezikler biharmonik eğrilerin bir alt sınıfını oluşturur. Bu durum biharmonik eğrilerin sınıfını geodeziklerden daha geniş hale getirir. Dolayısıyla özgün (geodezik olmayan) biharmonik eğriler oldukça önemlidir.

1.2 Semi-Riemann Manifoldlar

Bu kısımda semi-Riemann manifoldlar için temel tanımlar ve örnekler verilerek warped çarpım manifoldları ve doubly warped çarpım manifoldları sunulacaktır.

Tanım 1.2.1. V bir sonlu boyutlu vektör uzayı olsun. V üzerinde tanımlanan bir simetrik bilinear $b : V \times V \rightarrow R$ fonksiyonuna bilinear form denir [85].

Tanım 1.2.2. V sonlu boyutlu bir vektör uzayı ve b de V üzerinde bir bilinear form olsun. Eğer

- (i) her $v \neq 0$ vektörü için $b(v, v) < 0$ (≤ 0) ise b ye negatif tanımlıdır (negatif yarı-tanımlıdır)
- (ii) her $v \neq 0$ vektörü için $b(v, v) > 0$ (≥ 0) ise b ye pozitif tanımlıdır (pozitif yarı-tanımlıdır)

(iii) $v \in V$ ve her $w \in V$ için $b(v, w) = 0 \Leftrightarrow v = 0$ ise b ye nondejenere

denir [86].

b , V üzerinde bir bilinear form ise $W \subset V$ alt uzayı için b nin W ye kısıtlanmış olan $b|_W$ de bir bilinear formdur [86].

Tanım 1.2.3. V sonlu boyutlu vektör uzayı üzerinde simetrik, nondejenere olan bir g bilinear formuna skaler çarpım ve (V, g) ikilisine de skaler çarpım uzayı denir [86].

g bilinear formu nondejenere ise $v \in V$ için $q(v) = g(v, v)$ şeklinde tanımlanan q kuadratik formuna indefinit (belirsizdir) denir [86].

Örnek 1.2.1. R^2 de $u = (u_1, u_2), v = (v_1, v_2)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} g : R^2 \times R^2 &\rightarrow R \\ (u, v) &\rightarrow g(u, v) = -u_1v_1 + u_2v_2 \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm bir skaler çarpımdır. Böylece $q(u) = -u_1^2 + u_2^2$ kuadratik formu da indefinit (belirsiz) olur [86].

Tanım 1.2.4. V üzerinde bir simetrik bilinear form verildiğinde boy $V = m$ olmak üzere V nin bir $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ bazı vardır öyleki $p, q \geq 0$ tamsayıları için

$$g(e_i, e_j) = 0, \quad (i \neq j)$$

ve

$$g(e_i, e_j) = \begin{cases} -1, & (1 \leq i \leq p) \\ 1, & (p+1 \leq i \leq p+q) \\ 0, & (p+q+1 \leq i \leq m) \end{cases}$$

dir. Bu durumda g bilinear formuna (p, q) işaretlidir denir [84].

g bilinear formunun nondejenere olması için gerek ve yeter şart

$$p + q = \text{boy } V$$

olmasıdır. Pozitif ve negatif tanımlı iç çarpımlar nondejenere ve sırasıyla $(0, m)$ ve $(m, 0)$ işaretlidirler [84].

Tanım 1.2.5. $\overline{M}$ bir C^∞ manifold ve boy $\overline{M} = n$ olsun. $\overline{M}$ üzerinde C^∞ , (p, q) tipinde, simetrik, 2-kovaryant tensör alanına bir semi-Riemann metrik denir ve g ile gösterilir. Yani g ,

$$\odot^2 T^*M \equiv Sp\{v \odot w \equiv \frac{1}{2}(v \otimes w + w \otimes v) : v, w \in \Gamma(TM)\}$$

ile tanımlanan ve simetrik kare olarak adlandırılan vektör demetinin bir C^∞ kesitidir öyle ki g , $\overline{M}$ nin her noktasındaki tanjant uzayı üzerinde sabit (p, q) işaretli bir nondejenere iç çarpım tanımlar. Böylece $q = n - p$ olur.

$(0, n)$ işaretli bir semi-Riemann metrik bir Riemann metriğidir. $(1, n-1)$ işaretli bir semi-Riemann metrik ise bir Lorentz metrik olarak adlandırılır [84].

$(p, n-p)$ işaretli bir n -boyutlu semi-Riemann manifoldu $\overline{M}_p^n$ ile göstereceğiz.

Örnek 1.2.2. (Semi-Öklidyen Uzaylar)

R^n , n -boyutlu bir Öklidyen uzay olsun. $(p, n-p)$ işaretli

$$g = g_x = -dx_1^2 - dx_2^2 - \dots - dx_p^2 + dx_{p+1}^2 + \dots + dx_n^2$$

semi-Riemann metriğine sahip R^n Öklidyen uzayına semi-Öklidyen uzay denir ve R_p^n ile gösterilir. Böylece $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ ve $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ olmak üzere

$$g(v, w) = -v_1w_1 - v_2w_2 - \dots - v_pw_p + v_{p+1}w_{p+1} + \dots + v_nw_n$$

şeklindedir. $p = 1$ ise R_1^n uzayı n -boyutlu Lorentz uzay olarak adlandırılır [84].

Örnek 1.2.3. (Pseudo-Küreler)

$n \geq 2$ ve $0 \leq p \leq n-1$ için

$$S_p^{n-1} = \{x \in R_p^n : -x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_p^2 + x_{p+1}^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$$

C^∞ hiperyüzeyini gözönüne alalım. $\forall x \in S_p^{n-1}$ için S_p^{n-1} hiperyüzeyinin $T_x S_p^{n-1}$ tanjant uzayı

$$\{v \in R^n : \langle x, v \rangle = 0\}$$

kümesi ile tanımlanır. Böylece x , g metriğine göre $T_x S_p^{n-1}$ tanjant uzayına diktir.

$\langle x, x \rangle = 1 > 0$ olduğundan g nin S_p^{n-1} e kısıtlanmış olan metrik S_p^{n-1} hiperyüzeyine

$(p, n - p - 1)$ işaretli bir semi-Riemann manifold yapısı kazandırır. $n \geq 3$ için S_p^{n-1} semi-Riemann manifolduna pseudo-küre denir. Özel olarak (S_1^4, g) pseudo-küresi deSitter space-time olarak adlandırılır [84].

Örnek 1.2.4. (Pseudo-hiperbolik Uzay)

$$H_{p-1}^{n-1} = \{x \in R_p^n : -x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_p^2 + x_{p+1}^2 + \dots + x_n^2 = -1\}$$

bir C^∞ hiperyüzey olsun. S_p^{n-1} de olduğu gibi $x \in H_{p-1}^{n-1}$, g metriğine göre $T_x H_{p-1}^{n-1}$ tanjant uzayına diktir. $\langle x, x \rangle = -1 < 0$ olduğundan g nin H_{p-1}^{n-1} e kısıtlanmış olan metrik H_{p-1}^{n-1} hiperyüzeyine $(p - 1, n - p)$ işaretli bir semi-Riemann manifold yapısı kazandırır. $n \geq 3$ ve $1 \leq p \leq n$ için H_{p-1}^{n-1} semi-Riemann manifolduna pseudo-hiperbolik küre denir. (H_1^4, g) pseudo-küresi anti de Sitter space-time olarak adlandırılır [84].

Örnek 1.2.5.

$$C_p^{n-1} = \{x \in R_p^n : -x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_p^2 + x_{p+1}^2 + \dots + x_n^2 = 0\}$$

bir C^∞ hiperyüzey olsun. Bu durumda $C_{p,*}^{n-1} = C_p^{n-1} \setminus \{0\}$ olmak üzere R_p^n üzerindeki g metriğinin $T_x C_{p,*}^{n-1}$ tanjant uzaylarına kısıtlanmışı dejeneredir [84].

Tanım 1.2.6. $(\overline{M}^n, g)$ bir semi-Riemann manifold olsun. $v \in T_x \overline{M}$ olmak üzere

- (i) $g(v, v) < 0$ ise v ye timelike vektör
- (ii) $g(v, v) > 0$ ise v ye spacelike vektör
- (iii) $0 \neq v$ için $g(v, v) = 0$ ise v ye null (lightlike) vektör

denir. Sıfır vektörü spacelike vektör olarak kabul edilir. $x \in \overline{M}$ noktasında $T_x \overline{M}$ tanjant uzayının null vektörlerinin oluşturduğu küme null (light) koni olarak adlandırılır [86].

Örnek 1.2.6. (Minkowski Uzay)

4-boyutlu Minkowski uzayı önemli bir Lorentz manifoldudur. $\overline{M}$, 4-boyutlu Minkowski uzay olsun. $v \in \Gamma(T\overline{M}^4)$ olsun. v nin ilk bileşeni pozitif ise future pointing, negatif

ise past pointing olarak adlandırılır. $T_0\overline{M}^4$ tanjant uzayını $\overline{M}^4$ ile özdeşleştirecek olursak timelike vektörlerin H_0^3 de, spacelike vektörlerin S_1^3 de ve null vektörlerin de $C_{1,*}^3$ de bulunduğu görülür [84].

Örnek 1.2.7. (Schwarzschild Space-time)

$n > 0$ ve $R_1 = (R, dt^2)$ olsun. g^{S^2} , S^2 küresi üzerindeki standart metrik ve $(t, r) \in R \times (2n, \infty)$ olmak üzere

$$g = -(1 - \frac{2n}{r})dt^2 + (1 - \frac{2n}{r})dr^2 + r^2g^{S^2}$$

metriğine sahip manifolda Schwarzschild space-time denir. Böylece Schwarzschild space-time $(R_1 \times (2n, \infty)) \times_{r^2} S^2$ warped çarpımıdır [84].

Tanım 1.2.7. (Einstein Manifold) $(\overline{M}^n, g)$ bir semi-Riemann manifold olsun. Eğer

$$Ric^{\overline{M}} = (\frac{Scal^{\overline{M}}}{n})g$$

ise $\overline{M}$ ye bir Einstein manifold ve g ye de bir Einstein metrik denir. Burada $Ric^{\overline{M}}$, $\overline{M}$ nin Ricci eğriliğini ve $Scal^{\overline{M}}$ de M nin skaler eğriliğini göstermektedir [84].

Sabit kesit eğriliğine sahip bir (semi-)Riemann manifold bir Einstein manifoldudur [84].

Tanım 1.2.8. $\overline{M}$ bir semi-Riemann manifold ve $p \in \overline{M}$ olsun. Bu durumda $p \in M$ noktasında $T_p\overline{M}$ nin bir altuzayı W olmak üzere $\forall w \in W$ için $g(v, w) = 0$ olacak şekilde bir $0 \neq v \in W$ vektörü var ise W ye dejenere alt uzay denir [86].

Sıfır alt uzayı nondejenere dir. $T_p\overline{M}$ nin bir W altuzayının nondejenere olması için gerek ve yeter şart $g|_W$ indirgenmiş metrik tensörünün nondejenere olmasıdır [86].

Önerme 1.2.1. Bir V Lorentz uzayının W alt uzayının nondejenere olması için gerek ve yeter şart $V = W \oplus W^\perp$ yazılabilmektedir [86].

Özel olarak $(W^\perp)^\perp = W$ olduğundan W nin dejenere olması için gerek ve yeter şart $W^\perp$ alt uzayının dejenere olmasıdır.

Örnek 1.2.8. $(\overline{M}^4, g)$ 4-boyutlu Minkowski uzay olsun. $p \in \overline{M}$ için

$$W = Sp\{v_1 = (1, 1, 0, 0), v_2 = (0, 0, 1, 1)\} \subset T_p \overline{M}$$

alt uzayını gözönüne alalım. W bir dejenere alt uzaydır. Ayrıca

$$W^\perp = Sp\{v'_1 = (1, 1, 0, 0), v'_2 = (0, 0, 1, -1)\}$$

olduğundan $W \cap W^\perp \neq \{0\}$ dir. Böylece $V = W \oplus W^\perp$ şeklinde yazılamaz [84].

Tanım 1.2.9. V n -boyutlu bir vektör uzayı ve V nin bir bazı $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ olsun. V üzerinde tanımlı 2-kovaryant metrik tensörü için $g(e_i, e_i) = -1$ olacak şekildeki e_i ($1 \leq i \leq n$) ortonormal baz vektörlerinin sayısına g metrik tensörünün indeksi denir [86].

Önerme 1.2.2. V n -boyutlu bir vektör uzayı ve g de V üzerinde tanımlı 2-kovaryant metrik tensör olsun. Bu durumda g nin indeksi V nin ortonormal baz seçiminden bağımsızdır ve $g|_W$, negatif tanımlı olacak şekildeki V nin en büyük W alt uzayının boyutuna eşittir [86].

Örnek 1.2.9. $x = (x_1, x_2, x_3)$ ve $y = (y_1, y_2, y_3)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} g : R^3 \times R^3 &\rightarrow R \\ (x, y) &\rightarrow g(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_3 y_3 \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan g metrik tensörünün indeksi 1 dir. R^3 de g nin negatif tanımlı olduğu en büyük alt uzay $W = Sp\{(0, 0, 1)\}$ dir ve W nondejenere dir. Böylece $W^\perp = Sp\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$ de nondejenere ve $R_1^3 = W \oplus W^\perp$ olur .

Tanım 1.2.10. $\overline{M}_p^n$ ve M_ν^m sırasıyla p indeksli ve ν indeksli semi-Riemann manifoldlar olsun. Bu durumda

$$f : M_\nu^m \rightarrow \overline{M}_p^n$$

dönüşümü bir izometrik immersiyon ($\text{rank } f = m$) ise M_ν^m manifolduna $\overline{M}_p^n$ nin bir semi-Riemann altmanifoldu denir. Özel olarak $\nu = 1$ ise M_ν^m manifolduna $\overline{M}_p^n$ nin bir Lorentz altmanifoldu denir [86].

Tanım 1.2.11. $\overline{M}$ bir semi-Riemann manifold ve $p \in \overline{M}$ olsun. W , $T_p\overline{M}$ tanjant uzayının bir alt uzayı olmak üzere $\forall v, w \in W$ için $g(v, w) = 0$ ise W ye total null veya total izotropik uzay denir. 1-boyutlu null alt uzay bir null veya karakteristik doğrultu olarak adlandırılır [84].

Sıfır uzayından farklı tüm null uzaylar dejeneredir. Dejenere olma özelliği alt uzayın dik tümleyeni için de korunur. Ancak bir null uzayın dik tümleyeni null olmak zorunda değildir.

Örnek 1.2.10. $\overline{M}$ 3-boyutlu Minkowski uzay olsun. $p \in \overline{M}$ için $W = Sp\{(1, 1, 0)\} \subset T_p\overline{M}$ alt uzayı nulldur ve dolayısıyla dejeneredir. Ancak $W^\perp = Sp\{(1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ dejenere olmasına karşın null değildir [84].

(p, q) işaretli bir semi-Riemann manifold için bir null alt uzayın maksimum boyutu $\min\{p, q\}$ dur [84].

Tanım 1.2.12. M bir semi-Riemann manifold olsun. M üzerindeki bir eğrinin veya M nin bir altmanifoldunun bütün teğet uzayları null ise eğriye null eğri, alt manifoldda da null altmanifold denir [84].

Tanım 1.2.13. (B, g_B) ve (F, g_F) semi-Riemann manifoldlar ve $f > 0$, (B, g_B) üzerinde bir diferensiyellenebilir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$g = \pi^*(g_B) + (f \circ \pi)^2 \sigma^*(g_F) \quad (1.2.1)$$

ile tanımlanan g metriğine sahip $B \times F$ çarpım manifolduna warped çarpım manifoldu denir ve $B \times_f F$ ile gösterilir. Burada

$$\pi : B \times F \rightarrow B \text{ ve } \sigma : B \times F \rightarrow F$$

dönüşümleri sırasıyla (B, g_B) ve (F, g_F) semi-Riemann manifoldları üzerine kanonik izdüşümlerdir [86].

Açık olarak (1.2.1) den bir $(p, q) \in B \times_f F$ noktasındaki her $X, Y \in \Gamma(T(B \times_f F))$ için

$$g(X, Y) = g_B(\pi_* X, \pi_* Y) + f^2(\pi(x)) g_F(\sigma_* X, \sigma_* Y),$$

yazılabilir. Eğer f fonksiyonu sabit değil ise $B \times_f F$ warped çarpım manifolduna özgün (proper) warped çarpım manifoldu denir [86].

Lemma 1.2.1. $M = B \times_f F$ bir warped çarpım manifoldu olsun. Eğer $X, Y \in \Gamma(TB)$ ve $U, V \in \Gamma(TF)$ ise bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır :

- (i) $\nabla_X Y \in \Gamma(TB)$,
- (ii) $\nabla_X U = \nabla_U X = X(\ln f)U$,
- (iii) $\nabla_U V = \nabla_U^F V - \frac{g(U, V)}{f} \text{grad} f$.

Burada ∇ ve ∇^F , sırasıyla M ve F üzerindeki Levi-Civita konneksiyonlarıdır [86].

Sonuç 1.2.1. $M = B \times_f F$ bir warped çarpım manifoldu olsun. Bu durumda B , M de bir total geodezik altmanifold ve F , M de bir total umbilik altmanifolddur [86].

Bu sonuca göre bir warped çarpım manifoldu, birinci çarpanın total geodezik ikinci çarpanın total umbilik olması ile karakterize edilir.

Sonuç 1.2.2. (B, g_B) ve (F, g_F) semi-Riemann manifoldlar olsun. b ve f , sırasıyla (B, g_B) ve (F, g_F) üzerinde pozitif, diferensiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere

$$g = (f \circ \sigma)^2 \pi^*(g_B) + (b \circ \pi)^2 \sigma^*(g_F) \quad (1.2.2)$$

ile tanımlanan g metriğine sahip $B \times F$ çarpım manifolduna doubly warped çarpım manifoldu denir ve ${}_f B \times_b F$ ile gösterilir. Burada $\pi : B \times F \rightarrow B$ ve $\sigma : B \times F \rightarrow F$ dönüşümleri sırasıyla (B, g_B) ve (F, g_F) semi-Riemann manifoldları üzerine kanonik izdüşümlerdir [87].

Doubly warped çarpım manifoldları, warped çarpım manifoldlarının bir genelleştirmesi olarak tanımlanmıştır.

Eğer b ve f fonksiyonu sabit değil ise ${}_f B \times_b F$ doubly warped çarpım manifolduna özgün (proper) doubly warped çarpım manifoldu denir [87].

Lemma 1.2.2. $M = {}_f B \times_b F$ bir doubly warped çarpım manifoldu olsun. Bu durumda $X \in \Gamma(TB)$ ve $U \in \Gamma(TF)$ için

$$\nabla_X U = U(\ln f)X + X(\ln b)U \quad (1.2.3)$$

dur [87].

Sonuç 1.2.3. $M = {}_f B \times_b F$ bir doubly warped çarpım manifoldu olsun. Bu durumda B ve F , M de total umbilik altmanifoldlardır [87].

1.3 Lorentzian Hemen Hemen Parakontakt Manifoldlar ve Altmanifoldları

Bu kısımda Lorentzian hemen hemen parakontakt manifoldlar tanıtılarak en temel özellikleri verilecektir.

Tanım 1.3.1. *M bir n-boyutlu diferensiyellenebilir manifold olsun. Eğer M üzerinde φ (1,1) tipinde bir tensör alanı, ξ bir vektör alanı ve η bir 1-form olmak üzere*

$$\eta(\xi) = -1, \quad (1.3.1)$$

$$\varphi^2 = I + \eta \otimes \xi \quad (1.3.2)$$

şartlarını sağlayan bir (φ, ξ, η) üçlüsü varsa M ye bir hemen hemen parakontakt manifold ve (φ, ξ, η) üçlüsüne de M üzerinde bir hemen hemen parakontakt yapı denir. Burada I, TM üzerindeki birim dönüşüm ve $\otimes$ tensör çarpımıdır [44].

Önerme 1.3.1. *M, bir (φ, ξ, η) hemen hemen parakontakt yapısına sahip n-boyutlu hemen hemen parakontakt manifold olsun. Bu durumda*

$$\varphi\xi = 0, \quad (1.3.3)$$

$$\eta \circ \varphi = 0, \quad (1.3.4)$$

$$\text{rank}(\varphi) = n - 1 \quad (1.3.5)$$

dir [44].

İspat. (1.3.1) ve (1.3.2) den

$$\begin{aligned} \varphi^2\xi &= \xi + \eta(\xi)\xi \\ &= \xi - \xi \\ &= 0 \end{aligned} \quad (1.3.6)$$

olur. Böylece ya $\varphi\xi = 0$ veya $\varphi\xi, \varphi$ nin 0 karakteristik değerine karşılık gelen aşıkır olmayan karakteristik vektördür. (1.3.2) ve (1.3.6) dan

$$0 = \varphi^2\varphi\xi = \varphi\xi + \eta(\varphi\xi)\xi$$

yani

$$\varphi\xi = -\eta(\varphi\xi)\xi \quad (1.3.7)$$

elde edilir. Eğer $\varphi\xi$, φ nin 0 karakteristik değerine karşılık gelen aşıkâr olmayan karakteristik vektör ise

$$\eta(\varphi\xi) \neq 0$$

dır. (1.3.7) eşitliğinin her iki tarafına φ uygulanırsa

$$0 = \varphi^2\xi = -\eta(\varphi\xi)\varphi\xi = (\eta(\varphi\xi))^2\xi \neq 0$$

bulunur ki bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $\varphi\xi = 0$ olmak zorundadır. $\varphi\xi = 0$ olduğu için (1.3.2) den herhangi bir $X \in \Gamma(TM)$ vektör alanı için

$$\begin{aligned} \eta(\varphi X)\xi &= -\varphi^2\varphi X + \varphi X \\ &= -\varphi(\varphi^2 X) + \varphi X \\ &= -\varphi(X + \eta(X)\xi) + \varphi X \\ &= -\eta(X)\varphi\xi \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $\eta \circ \varphi = 0$ olduğu görülür. Sonuç olarak M üzerinde $\varphi\xi = 0$ ve $\xi \neq 0$ olduğundan $rank(\varphi) < n$ dir. Eğer bir ξ' vektör alanı $\varphi\xi' = 0$ şartını sağlayan bir diğer vektör alanı ise (1.3.2) den

$$0 = \xi' + \eta(\xi')\xi$$

dir. Böylece $\xi' = -\eta(\xi')\xi$ olarak yazılır. Yani ξ' , ξ doğrultusundadır. Dolayısıyla $rank(\varphi) = n - 1$ olur. Bu ise ispatı tamamlar. $\square$

Lemma 1.3.1. *M bir diferensiyellenebilir manifold, ξ ve η da $\eta(\xi) = -1$ şartını sağlayan sırasıyla bir kontravaryant ve bir kovaryant vektör alanı olsun. Eğer M üzerinde ξ vektör alanını timelike yapacak bir Lorentz metrik varsa bu durumda*

$$\eta(X) = h(X, \xi) \quad (1.3.8)$$

olacak şekilde bir h Lorentz metriği vardır [44].

İspat. Bir M diferensiyellenebilir manifoldu üzerinde $\eta(\xi) = -1$ olacak şekilde ξ vektör alanını ve η 1 -formunu alalım. f nin $f(\xi, \xi) = -1$ şartını sağlayan Lorentz metriği olduğunu düşünelim. Bu metriği kullanarak herhangi $X, Y \in \Gamma(TM)$ vektör alanları için

$$h(Y, X) = f(Y + \eta(Y)\xi, X + \eta(X)\xi) - \eta(X)\eta(Y) \quad (1.3.9)$$

şeklinde yeni bir h metriği tanımlayalım. Bu durumda eğer X ve Y vektör alanları f metriğine göre ξ ye dik ise X ve Y vektör alanları f metriğine göre spacelike vektörlerdir. Böylece $h(Y, X) = f(Y, X)$ olur. Bu da (1.3.9) ile tanımlanan h metriğinin (1.3.8) şartını sağlayan bir Lorentz metrik olduğunu gösterir. $\square$

Lemma 1.3.1 kullanılarak aşağıdaki önerme verilebilir:

Önerme 1.3.2. M , bir (φ, ξ, η) hemen hemen parakontakt yapısına sahip n -boyutlu bir manifold olsun. Bu durumda M hemen hemen parakontakt manifoldu her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\eta(X) = g(X, \xi)$$

ve

$$g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y) + \eta(X)\eta(Y)$$

olacak şekilde bir g Lorentz metriğine sahiptir [44] .

İspat. Lemma 1.3.1 deki h metriğini kullanarak M manifoldu üzerinde yeni bir g metriğini

$$g(X, Y) = \frac{1}{2} \{h(X, Y) + h(\varphi X, \varphi Y) - \eta(X)\eta(Y)\}, \quad X, Y \in \Gamma(TM)$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda g bir Lorentz metriktir ve

$$\begin{aligned} g(\varphi X, \varphi Y) &= \frac{1}{2} \{h(\varphi X, \varphi Y) + h(\varphi^2 X, \varphi^2 Y) - \eta(\varphi X)\eta(\varphi Y)\} \\ &= \frac{1}{2} \{h(\varphi X, \varphi Y) + h(X + \eta(X)\xi, Y + \eta(Y)\xi)\} \\ &= \frac{1}{2} \{h(\varphi X, \varphi Y) + h(X, Y) + 2\eta(X)\eta(Y) + \eta(X)\eta(Y)h(\xi, \xi)\} \\ &= \frac{1}{2} \{h(\varphi X, \varphi Y) + h(X, Y) + \eta(X)\eta(Y)\} \\ &= g(X, Y) + \eta(X)\eta(Y) \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

Önerme 1.3.2 de iddia edilen g Lorentz metriği bir tek olmak zorunda değildir.

Tanım 1.3.2. M , bir (φ, ξ, η) hemen hemen parakontakt yapısı ile birlikte n -boyutlu bir hemen hemen parakontakt manifold olsun. Eğer M herhangi $X, Y \in \Gamma(TM)$ vektör alanları için

$$g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y) + \eta(X)\eta(Y) \quad (1.3.10)$$

olacak şekilde bir g Lorentz metriğine sahip ise M ye bir Lorentzian hemen hemen parakontakt manifold ve (φ, ξ, η, g) dörtlüsüne de M üzerinde bir Lorentzian hemen hemen parakontakt yapı denir [44].

Eğer (1.3.10) eşitliğinde Y yerine ξ alınırsa

$$0 = g(\varphi X, \varphi \xi) = g(X, \xi) + \eta(X)\eta(\xi)$$

yazılır. Buradan (1.3.1) ve (1.3.3) göz önüne alınarak

$$g(X, \xi) = \eta(X) \quad (1.3.11)$$

elde edilir. (1.3.1) ve (1.3.11) dan karakteristik vektör alanı olarak adlandırılan ξ vektör alanının bir timelike vektör olduğu açıkça görülmektedir.

Tanım 1.3.3. M , (φ, ξ, η, g) Lorentzian hemen hemen parakontakt yapısına sahip n -boyutlu bir manifold olsun. Bu durumda M üzerinde

$$\Phi(X, Y) = g(X, \varphi Y), \quad \forall X, Y \in \Gamma(TM) \quad (1.3.12)$$

şeklinde tanımlanan Φ , 2-formuna (φ, ξ, η, g) Lorentzian hemen hemen parakontakt yapısının temel 2-formu denir ([44], [88]).

(1.3.10) eşitliğinde Y yerine φY yazılırsa (1.3.4) den

$$g(\varphi X, \varphi^2 Y) = g(X, \varphi Y)$$

elde edilir. (1.3.2), son eşitlikte kullanılırsa

$$\begin{aligned} g(\varphi X, Y + \eta(Y)\xi) &= g(X, \varphi Y) \\ g(\varphi X, Y) + \eta(Y)g(\varphi X, \xi) &= g(X, \varphi Y) \end{aligned} \quad (1.3.13)$$

olur. Böylece (1.3.11) dan

$$g(\varphi X, Y) = g(X, \varphi Y), \quad \forall X, Y \in \Gamma(TM) \quad (1.3.14)$$

elde edilir ki bu da Φ temel 2-formunun simetrik olduğunu verir. Ayrıca

$$\Phi(X, Y) = (\nabla_X \eta) Y, \quad \forall X, Y \in \Gamma(TM) \quad (1.3.15)$$

dir.

Önerme 1.3.3. *$(M, \varphi, \xi, \eta, g)$, n -boyutlu bir Lorentzian hemen hemen parakontakt manifold ve ∇ da M üzerinde Levi-Civita konneksiyon olsun. Bu durumda $\forall X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ vektör alanları için*

$$(\nabla_X \Phi)(Y, Z) = g(Y, (\nabla_X \varphi) Z) = (\nabla_X \Phi)(Z, Y) \quad (1.3.16)$$

dir [44].

İspat. $\forall X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ vektör alanları için

$$(\nabla_X \Phi)(Y, Z) = \nabla_X \Phi(Y, Z) - \Phi(\nabla_X Y, Z) - \Phi(Y, \nabla_X Z)$$

eşitliğinden faydalananarak

$$\begin{aligned} (\nabla_X \Phi)(Y, Z) &= Xg(Y, \varphi Z) - g(\nabla_X Y, \varphi Z) - g(Y, \varphi(\nabla_X Z)) \\ &= g(\nabla_X Y, \varphi Z) + g(Y, \nabla_X \varphi Z) - g(\nabla_X Y, \varphi Z) - g(Y, \varphi(\nabla_X Z)) \\ &= g(Y, \nabla_X \varphi Z - \varphi(\nabla_X Z)) \\ &= g(Y, (\nabla_X \varphi) Z) \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca Φ nin simetrik olduğu göz önüne alınarak $(\nabla_X \Phi)(Y, Z) = (\nabla_X \Phi)(Z, Y)$ olduğu kolayca görülür. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

Teorem 1.3.1. *M bir n -boyutlu Lorentzian hemen hemen parakontakt manifold olsun. Bu durumda M üzerindeki Lorentzian hemen hemen parakontakt yapı bir tek değildir [46].*

İspat. $M, (\varphi, \xi, \eta, g)$ Lorentzian hemen hemen parakontakt yapısı ile birlikte bir Lorentzian hemen hemen parakontakt manifold olsun. ξ' , M üzerinde ξ doğrultusunda

olmayan sıfırdan farklı bir vektör alanı olsun. Bu durumda singüler olmayan $(1, 1)$ tipinde bir μ tensör alanı vardır öyle ki

$$\mu\xi' = \xi$$

dir. Eğer

$$\mu\varphi'X = \varphi\mu X \quad \text{ve} \quad \eta'(X) = \eta(\mu X)$$

olacak şekilde bir φ' tensör alanı ve η' 1-formu tanımlanırsa

$$\mu(\varphi')^2 X = \varphi\mu\varphi'X = \varphi^2\mu X = \mu X + \eta(\mu X)\xi = \mu(X + \eta'(X)\xi')$$

yani

$$(\varphi')^2 X = X + \eta'(X)\xi'$$

elde edilir. Şimdi

$$g'(X, Y) = g(\mu X, \mu Y)$$

olacak şekilde bir g' metrik tensörünü tanımlayalım. Bu durumda

$$g'(\varphi'X, \varphi'Y) = g(\mu\varphi'X, \mu\varphi'Y) = g'(X, Y) + \eta'(X)\eta'(Y)$$

ve

$$g'(X, \xi') = g(\mu X, \mu\xi') = g(\mu X, \xi) = \eta(\mu X) = \eta'(X)$$

olur. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

Tanım 1.3.4. $M, (\varphi, \xi, \eta, g)$ Lorentzian hemen hemen parakontakt yapısına sahip n -boyutlu bir Lorentzian hemen hemen parakontakt manifold olsun. Eğer $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\Phi(X, Y) = \frac{1}{2} ((\nabla_X \eta) Y + (\nabla_Y \eta) X) \tag{1.3.17}$$

şartı sağlanıyorsa M ye Lorentzian parakontakt manifold (kısaca, LP-manifold) denir [44].

Lemma 1.3.2. $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir Lorentzian parakontakt manifold olsun. Eğer η 1-formu kapalı ise $\forall X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için

$$(\nabla_X \Phi)(\xi, \xi) = 0$$

ve

$$\begin{aligned} (\nabla_Z \Phi)(\varphi Y, \varphi X) &= -[(\nabla_Z \Phi)(Y, X) - \{g(Y, Z) + \eta(Z)\eta(Y)\}\eta(X) \\ &\quad - \{g(X, Z) + \eta(Z)\eta(X)\}\eta(Y)] \end{aligned}$$

dir.

Tanım 1.3.5. $M, (\varphi, \xi, \eta, g)$ Lorentzian hemen hemen parakontakt yapısına sahip n -boyutlu bir Lorentzian hemen hemen parakontakt manifold olsun. Eğer $\forall X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için

$$(\nabla_X \varphi)Y = g(\varphi X, \varphi Y)\xi + \eta(Y)\varphi^2 X \quad (1.3.18)$$

veya denk olarak

$$(\nabla_X \varphi)Y = \eta(Y)X + g(X, Y)\xi + 2\eta(X)\eta(Y)\xi \quad (1.3.19)$$

veya denk olarak

$$(\nabla_X \Phi)(Y, Z) = g(X, Y)\eta(Z) + g(X, Z)\eta(Y) + 2\eta(X)\eta(Y)\eta(Z) \quad (1.3.20)$$

şartı sağlanıyor ise M ye Lorentzian para-Sasakian manifold (kısaca, LP-Sasakian manifold) denir [44].

$(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir Lorentzian para-Sasakian manifold ise η 1-formu kapalıdır ve $\forall X \in \Gamma(TM)$ için

$$\nabla_X \xi = \varphi X \quad (1.3.21)$$

dir [44].

Önerme 1.3.4. (M, g) bir Lorentzian manifold; ξ , M üzerinde bir birim timelike vektör alanı ve η da M üzerinde ξ ile birleşen bir 1-form olsun. Bu durumda η 1-formu kapalı ve

$$(\nabla_X \nabla_Y \eta)Z = g(X, Y)\eta(Z) + g(X, Z)\eta(Y) + 2\eta(X)\eta(Y)\eta(Z) \quad (1.3.22)$$

şartı sağlanıyor ise M üzerinde bir Lorentzian para-Sasakian yapı vardır [44].

Tanım 1.3.6. (M, g) bir Lorentzian manifold olsun. Eğer M üzerinde

$$\Phi(X, Y) = (\nabla_X \eta)Y = \varepsilon(g(X, Y) + \eta(X)\eta(Y)), \quad \varepsilon^2 = 1 \quad (1.3.23)$$

olacak şekilde bir ξ timelike vektör alanı ve ξ ile birleşen bir η 1-formu var ise M ye Lorentzian özel para-Sasakian manifold denir [44].

Açıktır ki bir Lorentzian özel para-Sasakian manifold aynı zamanda bir Lorentzian para-Sasakian manifolddur. Ancak tersi her zaman doğru değildir. Diğer taraftan $(1, 1)$ -tensör alanı φ nın karakteristik değerleri -1, 0 ve 1 dir. (1.3.3) den 0 karakteristik değerine karşılık gelen karakteristik vektör sayısı 1 dir. k ve l sırasıyla -1 ve 1 karakteristik değerlerine karşılık gelen karakteristik vektör sayılarını göstermek üzere $iz(\varphi) = l - k$ olur. Böylece, eğer $(iz(\varphi))^2 = (n - 1)^2$ ise ya $l = 0$ ya da $k = 0$ dir. Bu durumda, (φ, ξ, η, g) yapısına aşikar Lorentzian para-Sasakian yapı denir [89].

Tanım 1.3.7. $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir Lorentzian para-Sasakian manifold olsun. S , M nin Ricci tensör alanı olmak üzere eğer

$$S(X, Y) = ag(X, Y) + b\eta(X)\eta(Y), \quad \forall X, Y \in \Gamma(TM) \quad (1.3.24)$$

ise M ye η -Einstein manifold denir. Burada; a ve b M üzerinde fonksiyonlardır [90].

$(M, \varphi, \xi, \eta, g)$, n -boyutlu bir η -Einstein Lorentzian para-Sasakian manifold ise M nin Ricci tensör alanı $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$S(X, Y) = \left(\frac{r}{n-1} - 1\right)g(X, Y) + \left(\frac{r}{n-1} - n\right)\eta(X)\eta(Y) \quad (1.3.25)$$

ile verilir. Burada r , M manifoldunun skaler eğriliğidir [90].

Lemma 1.3.3. $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir Lorentzian para-Sasakian manifold ve boy $M = n$ olsun. Bu durumda herhangi $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ vektör alanları için aşağıdakiler

sağlanır ([91], [90]):

$$g(R(X, Y)Z, \xi) = \eta(R(X, Y)Z) = g(Y, Z)\eta(X) - g(X, Z)\eta(Y) \quad (1.3.26)$$

$$R(\xi, X)Y = g(X, Y)\xi - \eta(Y)X \quad (1.3.27)$$

$$R(\xi, X)\xi = X + \eta(X)\xi \quad (1.3.28)$$

$$R(X, Y)\xi = \eta(Y)X - \eta(X)Y \quad (1.3.29)$$

$$S(X, \xi) = (n - 1)\eta(X) \quad (1.3.30)$$

$$S(\varphi X, \varphi Y) = S(X, Y) + (n - 1)\eta(X)\eta(Y) \quad (1.3.31)$$

dir. Burada; R ve S sırasıyla M üzerindeki Riemann eğrilik tensör alanı ve Ricci tensör alanını göstermektedir.

(M, g) , n -boyutlu bir Lorentzian manifold olsun. $p \in M$ olmak üzere $T_p M$ tanjant uzayının 2-boyutlu lineer alt uzayı bir düzlem kesiti olarak adlandırılır. Düzlem kesiti E olmak üzere eğer her $V \in E$ için $g(U, V) \neq 0$ olacak şekilde bir $U \in E$ vektörü varsa E düzlem kesiti non-dejeneredir denir. Eğer U ve V non-dejenere E düzlem kesiti için bir baz ise

$$g(U, U)g(V, V) - (g(U, V))^2 \neq 0$$

dır. $\{U, V\}$ bazına sahip, $p \in M$ noktasındaki bir non-dejenere düzlem kesiti E nin kesit eğriliği $K(p, E)$ ile gösterilir ve

$$K(p, E) = - \frac{g(R(V, U)V, U)}{g(U, U)g(V, V) - (g(U, V))^2} \quad (1.3.32)$$

şeklinde tanımlanır. Burada R , Riemann eğrilik tensör alanıdır [86]. Diğer taraftan eğer non-dejenere düzlem kesiti E bir spacelike ve bir timelike vektör tarafından geriliyor ise E bir timelike düzlem kesiti olarak adlandırılır [92].

Teorem 1.3.2. $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$, $\text{boy} M = n$, bir Lorentzian para-Sasakian manifold olsun. Bu durumda M nin ξ karakteristik vektör alanı ve bir V spacelike vektör alanı tarafından gerilen 2-boyutlu her lineer alt uzayının kesit eğriliği 1 dir [44].

İspat. n -boyutlu bir $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ Lorentzian para-Sasakian manifoldunu göz önüne alalım. M nin ξ karakteristik vektör alanı ve bir V spacelike vektör alanı tarafından

gerilen 2-boyutlu bir lineer alt uzayı E olsun. Bu durumda E timelikedir ve E nin $K(p, E)$ kesit eğriliği

$$\begin{aligned} K(p, E) &= -\frac{g(R(\xi, V)\xi, V)}{g(\xi, \xi)g(V, V) - (g(\xi, V))^2} \\ &= \frac{g(R(\xi, V)\xi, V)}{g(V, V) + (\eta(V))^2} \end{aligned} \quad (1.3.33)$$

olur. (1.3.28), (1.3.33) de yerine yazılırsa

$$K(p, E) = 1$$

bulunur ve ispat tamamlanır. $\square$

Teorem 1.3.3. (M, g) n -boyutlu bir Lorentzian manifold olsun. Eğer [44]:

- (i) M üzerinde bir ξ timelike vektör alanı vardır.
- (ii) ξ karakteristik vektör alanı ile birleşen η 1-formu kapalıdır.
- (iii) $\mathcal{L}_\xi \nabla \xi = 0$ dir. (Burada $\mathcal{L}_\xi$, ξ vektör alanına göre Lie türevini göstermektedir.)
- (iv) ξ karakteristik vektör alanını ihtiva eden timelike d üzlemler için M nin her noktasında kesit eğriliği 1 dir.

şartları sağlanıyorsa bu durumda M bir Lorentzian parakontakt yapıya sahiptir .

Tanım 1.3.8. $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir Lorentzian para-Sasakian manifold olsun. Eğer M sabit eğrilikli ise M ye Lorentzian para-Sasakian uzay form denir [93].

Önerme 1.3.5. $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir Lorentzian para-Sasakian uzay form olsun. Bu durumda M nin eğriliği 1 dir [93].

İspat. $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$, sabit κ eğrilikli bir Lorentzian para-Sasakian uzay form olsun. Bu durumda her $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için M nin Riemann eğrilik tensörü

$$R(X, Y)Z = \kappa\{g(Y, Z)X - g(X, Z)Y\} \quad (1.3.34)$$

şeklinde yazılır. Bu son eşitlikte $Y = \xi$ alınır ve (1.3.27), (1.3.29) kullanılırsa

$$-g(X, Z)\xi + \eta(Z)X = \kappa\{\eta(Z)X - g(X, Z)\xi\}$$

elde edilir ki bu $\kappa = 1$ olduğunu verir. $\square$

Teorem 1.3.4. *Her Lorentzian para-Sasakian uzay form bir aşikar Lorentzian özel para-Sasakian uzay formudur [93].*

Tanım 1.3.9. *$M, (\varphi, \xi, \eta, g)$ Lorentzian hemen hemen parakontakt yapısına sahip n -boyutlu bir Lorentzian hemen hemen parakontakt manifold olsun. Eğer*

$$\nabla\varphi = 0 \quad (1.3.35)$$

ise M ye Lorentzian parakosimplektik manifold denir [46].

Tanım 1.3.10. *$M, (\varphi, \xi, \eta, g)$ Lorentzian hemen hemen parakontakt yapısına sahip n -boyutlu bir Lorentzian hemen hemen parakontakt manifold olsun. Eğer*

$$(\nabla_X\varphi)X = 0, \quad \forall X \in \Gamma(TM) \quad (1.3.36)$$

ise M ye Lorentzian nearly parakosimplektik manifold denir [46].

$(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir Lorentzian parakosimplektik manifold ise $\forall X \in \Gamma(TM)$ için $\nabla_X\xi = 0$ olduğu kolaylıkla görülebilir.

Teorem 1.3.5. *$(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir Lorentzian nearly parakosimplektik manifold olsun. Bu durumda*

$$\nabla_X\xi = 0, \quad \forall X \in \Gamma(TM) \quad (1.3.37)$$

dir [46].

İspat. $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir Lorentzian nearly parakosimplektik manifold olsun. Bu durumda (1.3.36) den

$$(\nabla_X\Phi)(Y, Z) = (\nabla_Y\Phi)(X, Z) = 0 \quad (1.3.38)$$

olur. (1.3.12) ve (1.3.38) göz önüne alınırsa

$$(\nabla_X\eta)(\varphi Y) + (\nabla_Y\eta)(\varphi X) = 0 \quad (1.3.39)$$

elde edilir. (1.3.38) eşitliğinde X yerine ξ yazılır ve (1.3.39) kullanılırsa ispat tamamlanır. $\square$

$\overline{M}, (\varphi, \xi, \eta)$ hemen hemen parakontakt yapısına sahip n -boyutlu bir hemen hemen parakontakt manifold olsun. $\overline{M} \times R$ çarpım manifoldunu gözönüne alalım. Bu durumda $\overline{M} \times R$ de bir vektör alanı $(X, f \frac{d}{dt})$ ile verilir. Burada $X \in \Gamma(T\overline{M})$; t, R nin koordinatı ve f de $\overline{M} \times R$ üzerinde bir fonksiyondur. $\overline{M} \times R$ nin tanjant uzayı üzerinde

$$J(X, f \frac{d}{dt}) = \left(\varphi X - f\xi, \eta(X) \frac{d}{dt} \right) \quad (1.3.40)$$

olacak şekilde bir J lineer dönüşümünü tanımlayalım. (1.3.1), (1.3.2) ve (1.3.3) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} J^2(X, f \frac{d}{dt}) &= J \left(\varphi X - f\xi, \eta(X) \frac{d}{dt} \right) \\ &= \left(\varphi(\varphi X - f\xi) - \eta(X)\xi, \eta(\varphi X - f\xi) \frac{d}{dt} \right) \\ &= \left(\varphi^2 X - f\varphi\xi - \eta(X)\xi, (\eta(\varphi X) - f\eta(\xi)) \frac{d}{dt} \right) \\ &= \left(X, f \frac{d}{dt} \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda $J^2 = I$ olduğundan $J, \overline{M} \times R$ üzerinde bir hemen hemen çarpım yapısıdır. Eğer J hemen hemen çarpım yapısı $\overline{M} \times R$ üzerinde integrallenebilir ise (φ, ξ, η) hemen hemen parakontakt yapısına normaldir denir [94]. J nin Nijenhuis tensör alanı $[J, J]$ ile gösterilir ve her $X, Y \in \Gamma(T\overline{M})$ için

$$[J, J](X, Y) = [JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY] + J^2[X, Y], \quad X, Y \in \Gamma(T\overline{M})$$

ile tanımlanır. J nin integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart J nin Nijenhuis tensör alanının sıfır olmasıdır. Böylece (φ, ξ, η) hemen hemen parakontakt yapısının normal olması için gerek ve yeter şart

$$[\varphi, \varphi] + d\eta \otimes \xi = 0$$

şartının sağlanmasıdır. Burada $[\varphi, \varphi]$, φ nin Nijenhuis tensör alanını göstermektedir ve her $X, Y \in \Gamma(T\overline{M})$ için

$$[\varphi, \varphi](X, Y) = [\varphi X, \varphi Y] - \varphi[\varphi X, Y] - \varphi[X, \varphi Y] + \varphi^2[X, Y]$$

dir [94].

$(\overline{M}, \varphi, \xi, \eta, g)$, $\dim \overline{M} = n$, bir Lorentzian hemen hemen parakontakt manifold ve M de $\overline{M}$ nin bir non-dejenere altmanifoldu olsun. $\overline{M}$ manifoldundan M altmanifolduna $i : M \rightarrow \overline{M}$ immersiyonu yardımıyla indirgenen metriği de g ile gösterelim. $\overline{\nabla}$, $\overline{M}$ üzerindeki Levi-Civita konneksiyonu ve ∇ da M üzerindeki indirgenmiş konneksiyon olmak üzere $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + B(X, Y) \quad (1.3.41)$$

dir. Burada B

$$B : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(T^\perp M)$$

ile tanımlı normal demet değerli simetrik bilineer formdur. (1.3.41) denkleminde Gauss formülü ve B ya M nin ikinci temel formu denir. Şimdi $X \in \Gamma(TM)$ ve $N \in \Gamma(T^\perp M)$ için $\overline{\nabla}_X N$ nin teğet ve normal kısımlarını sırasıyla $-A_N X$ ve $\nabla_X^\perp N$ ile gösterelim. Bu durumda

$$\overline{\nabla}_X N = -A_N X + \nabla_X^\perp N \quad (1.3.42)$$

yazılabilir. Burada A_N lineer operatörüne normal kesite göre Weingarten temel tensörü ve (1.3.42) denkleminde de Weingarten formülü denir. (1.3.41) ve (1.3.42) denklemleri kullanılarak $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$, $N \in \Gamma(T^\perp M)$ için

$$g(B(X, Y), N) = g(A_N X, Y) \quad (1.3.43)$$

elde edilir. Böylece B simetrik ve lineer olduğundan A_N de simetrik ve lineerdir. B tensörünün kovaryant türevi

$$(\nabla_X B)(Y, Z) = \nabla_X^\perp B(Y, Z) - B(\nabla_X Y, Z) - B(Y, \nabla_X Z) \quad (1.3.44)$$

dir [86].

Teorem 1.3.6. $(\overline{M}, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir Lorentzian hemen hemen parakontakt manifold ve M de $\overline{M}$ nin bir non-dejenere altmanifoldu olsun. R ve $\overline{R}$ sırasıyla M ve $\overline{M}$ nin Riemann eğrilik tensör alanları olmak üzere $\forall X, Y, Z, W \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned} g(\overline{R}(X, Y)Z, W) &= g(R(X, Y)Z, W) - g(B(X, W), B(Y, Z)) \\ &\quad + g(B(Y, W), B(X, Z)) \end{aligned} \quad (1.3.45)$$

dir. (1.3.45) denkleminde Gauss denklemi denir [86].

Her $\forall X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için $\bar{R}(X, Y)Z$ nin normal bileşeni $(\bar{R}(X, Y)Z)^\perp$ olmak üzere

$$(\bar{R}(X, Y)Z)^\perp = (\nabla_X B)(Y, Z) - (\nabla_Y B)(X, Z) \quad (1.3.46)$$

dir. (1.3.46) denkleminde Codazzi denklemi denir [86].

Sonuç 1.3.1. $M, (\bar{M}, \varphi, \xi, \eta, g)$ Lorentzian hemen hemen parakontakt manifoldunun bir non-dejenere altmanifoldu olsun. Eğer U ve V vektörleri M nin bir non-dejenere teğet düzlemi için bir baz oluşturuyor ise

$$\bar{K}(U, V) = K(U, V) + \frac{g(B(U, U), B(V, V)) - g(B(U, V), B(U, V))}{g(U, U)g(V, V) - (g(U, V))^2}$$

dir. Burada K ve $\bar{K}$ sırasıyla M ve $\bar{M}$ nin kesit eğrilikleridir [86].

Tanım 1.3.11. $(\bar{M}, \varphi, \xi, \eta, g)$, n -boyutlu bir Lorentzian hemen hemen parakontakt manifold ve M de $\bar{M}$ nin m -boyutlu bir non-dejenere altmanifoldu olsun. Herhangi bir $p \in M$ noktasında $T_p M$ nin bir ortonormal baz $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ olmak üzere

$$\mu_p = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \varepsilon_i B(e_i, e_i)$$

şeklinde tanımlı μ_p vektörüne $p \in M$ noktasında M nin ortalama eğrilik vektörü denir. Eğer $\mu = 0$ ise M ye minimal altmanifold denir [86].

Tanım 1.3.12. $(\bar{M}, \varphi, \xi, \eta, g)$, n -boyutlu bir Lorentzian hemen hemen parakontakt manifold ve M de $\bar{M}$ nin bir non-dejenere altmanifoldu olsun. Eğer $B = 0$ ise M ye total geodezik altmanifold denir [86].

Tanım 1.3.13. $(\bar{M}, \varphi, \xi, \eta, g)$, n -boyutlu bir Lorentzian hemen hemen parakontakt manifold ve M de $\bar{M}$ nin bir non-dejenere altmanifoldu olsun. Her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$B(X, Y) = g(X, Y)\mu$$

ise M ye total umbilik altmanifold denir [86].

BÖLÜM 2

LORENTZIAN PARA-SASAKIAN

MANİFOLDLARIN

BİHARMONİK EĞRİLERİ

4-boyutlu konformal flat, quasi-konformal flat ve konformal simetrik Lorentzian para-Sasakian manifoldlardaki spacelike ve timelike eğrilerin özgün biharmonik eğri olmaları için gerek ve yeter şartların araştırıldığı bu bölüm dört kısımdan oluşmaktadır. İlk kısımda konformal flat, quasi-konformal flat ve konformal simetrik Lorentzian para-Sasakian manifoldlar tanıtılarak bu manifoldların bazı özelliklerine yer verildi. İkinci kısımda 4-boyutlu bir Lorentzian manifoldu üzerinde spacelike ve timelike eğrilerin Frenet çatıları incelendi. Üçüncü kısımda, 4-boyutlu konformal flat, quasi-konformal flat ve konformal simetrik Lorentzian para-Sasakian manifoldlar üzerinde tanımlanan spacelike ve timelike eğrilerin biharmonik denklemleri elde edilerek özgün biharmonik eğri olmaları için gerek ve yeter şartlar araştırıldı. Son kısımda ise, $S_1^4(1)$ Lorentzian küresi üzerindeki özgün biharmonik eğriler tanıtıldı ve bu eğrilerin bazı karakterizasyonlarına yer verildi.

2.1 Konformal Flat, Quasi-Konformal Flat ve Konformal Simetrik Lorentzian Para-Sasakian Manifoldlar

Bu kısımda konformal flat, quasi-konformal flat ve konformal simetrik Lorentzian para-Sasakian manifoldların tanımları ve bazı özellikleri verilecektir.

Tanım 2.1.1. *M bir Lorentzian para-Sasakian manifold olsun. M üzerinde konformal eğrilik tensörü C ile gösterilir ve $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için*

$$\begin{aligned} C(X, Y)Z &= R(X, Y)Z - \frac{1}{(n-2)}\{g(Y, Z)QX - g(X, Z)QY + S(Y, Z)X \\ &\quad - S(X, Z)Y\} + \frac{r}{(n-1)(n-2)}\{g(Y, Z)X - g(X, Z)Y\}, \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

şeklinde tanımlanır. Burada R , Riemann eğrilik tensörünü; S , Ricci tensör alanını; Q , Ricci operatörünü ve r de skaler eğriliği göstermektedir [95].

Tanım 2.1.2. M bir Lorentzian para-Sasakian manifold ve C de M üzerinde konformal eğrilik tensörü olsun. Eğer $C = 0$ ise M ye konformal flat manifold denir [95].

Tanım 2.1.3. M bir Lorentzian para-Sasakian manifold ve C de M üzerinde konformal eğrilik tensörü olsun. Eğer $\nabla C = 0$ ise M ye konformal simetrik manifold denir [96].

Teorem 2.1.1. M bir konformal flat Lorentzian para-Sasakian manifold olsun. Bu durumda M , $S_1^n(1)$ Lorentzian küresi ile lokal olarak izometriktir [82].

İspat. M bir konformal flat Lorentzian para-Sasakian manifold olsun. Bu durumda $C = 0$ dir. Riemann Christoffel eğrilik tensörü

$$\text{'}R(X, Y, Z, W) = g(R(X, Y)Z, W), \quad \forall X, Y, Z, W \in \Gamma(TM)$$

olmak üzere (2.1.1) eşitliğinden

$$\begin{aligned} \text{'}R(X, Y, Z, W) &= \frac{1}{(n-2)} \{g(Y, Z)S(X, W) - g(X, Z)S(Y, W) \\ &\quad + S(Y, Z)g(X, W) - S(X, Z)g(Y, W)\} \\ &\quad - \frac{r}{(n-1)(n-2)} (g(Y, Z)g(X, W)) \\ &\quad + \frac{r}{(n-1)(n-2)} (g(X, Z)g(Y, W)) \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

yazılabilir. (2.1.2) de W yerine ξ alınır, (1.3.26), (1.3.11) ve (1.3.30) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} g(Y, Z)\eta(X) - g(X, Z)\eta(Y) &= \frac{1}{(n-2)} \{g(Y, Z)S(X, \xi) - g(X, Z)S(Y, \xi) \\ &\quad + S(Y, Z)g(X, \xi) - S(X, Z)g(Y, \xi)\} \\ &\quad - \frac{r}{(n-1)(n-2)} g(Y, Z)g(X, \xi) \\ &\quad + \frac{r}{(n-1)(n-2)} g(X, Z)g(Y, \xi) \end{aligned}$$

olur. Bu son eşitlik düzenlenirse

$$\begin{aligned}
g(Y, Z)\eta(X) - g(X, Z)\eta(Y) &= \frac{1}{(n-2)} \{ (n-1)g(Y, Z)\eta(X) \\
&\quad - (n-1)g(X, Z)\eta(Y) \\
&\quad + S(Y, Z)\eta(X) - S(X, Z)\eta(Y) \} \quad (2.1.3) \\
&\quad - \frac{r}{(n-1)(n-2)} g(Y, Z)\eta(X) \\
&\quad + \frac{r}{(n-1)(n-2)} g(X, Z)\eta(Y)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada X yerine ξ alınarak (2.1.3) den

$$\begin{aligned}
-g(Y, Z) - \eta(Z)\eta(Y) &= \frac{1}{(n-2)} \{ -(n-1)g(Y, Z) - (n-1)\eta(Y)\eta(Z) \\
&\quad - S(Y, Z) - (n-1)\eta(Y)\eta(Z) \} \\
&\quad - \frac{r}{(n-1)(n-2)} \{ -g(Y, Z) - \eta(Y)\eta(Z) \} \quad (2.1.4)
\end{aligned}$$

eşitliğine ulaşılır. Bu son eşitlikten

$$S(Y, Z) = \left(\frac{r}{n-1} - 1 \right) g(Y, Z) + \left(\frac{r}{n-1} - n \right) \eta(Y)\eta(Z) \quad (2.1.5)$$

elde edilir. (2.1.5), (2.1.2) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
{}^{\vee}R(X, Y, Z, W) &= \frac{1}{(n-2)} \left[\left(\frac{r}{n-1} - 2 \right) \{ g(Y, Z)g(X, W) - g(X, Z)g(Y, W) \} \right. \\
&\quad + \left(\frac{r}{n-1} - n \right) \{ g(Y, Z)\eta(X)\eta(W) + g(X, W)\eta(Y)\eta(Z) \\
&\quad \left. - g(X, Z)\eta(Y)\eta(W) - g(Y, W)\eta(X)\eta(Z) \} \right] \quad (2.1.6)
\end{aligned}$$

bulunur. Şimdi (2.1.5) ve (1.3.12) yi göz önüne alarak S nin X vektör alanı boyunca kovaryant türevini hesaplayalım:

$$\begin{aligned}
(\nabla_X S)(Y, Z) &= \nabla_X S(Y, Z) - S(\nabla_X Y, Z) - S(Y, \nabla_X Z) \\
&= \frac{dr(X)}{n-1} \{ g(Y, Z) + \eta(Y)\eta(Z) \} \\
&\quad + \left(\frac{r}{n-1} - n \right) \{ [\eta(\nabla_X Z) + g(Z, \varphi X)]\eta(Y) \\
&\quad + [\eta(\nabla_X Y) + g(Y, \varphi X)]\eta(Z) \} \\
&\quad + \left(\frac{r}{n-1} - 1 \right) \{ g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \} \\
&\quad - \left(\frac{r}{n-1} - 1 \right) g(\nabla_X Y, Z) - \left(\frac{r}{n-1} - n \right) \eta(\nabla_X Y)\eta(Z) \\
&\quad - \left(\frac{r}{n-1} - 1 \right) g(Y, \nabla_X Z) - \left(\frac{r}{n-1} - n \right) \eta(\nabla_X Z)\eta(Y)
\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}
(\nabla_X S)(Y, Z) &= \frac{dr(X)}{n-1} \{g(Y, Z) + \eta(Y)\eta(Z)\} \\
&+ \left(\frac{r}{n-1} - n \right) \{ \Phi(X, Z)\eta(Y) + \Phi(X, Y)\eta(Z) \} \quad (2.1.7)
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$\begin{aligned}
(\nabla_X S)(Y, Z) - (\nabla_Y S)(X, Z) &= \frac{dr(X)}{n-1} \{g(Y, Z) + \eta(Y)\eta(Z)\} \\
&- \frac{dr(Y)}{n-1} \{g(X, Z) + \eta(X)\eta(Z)\} \\
&+ \left(\frac{r}{n-1} - n \right) \Phi(X, Z)\eta(Y) \\
&- \left(\frac{r}{n-1} - n \right) \Phi(Y, Z)\eta(X) \quad (2.1.8)
\end{aligned}$$

eşitliğine ulaşılır.

Diğer taraftan $(\nabla_W C)(X, Y)Z = 0$ olduğundan $\operatorname{div} C = 0$ dır. Buradan

$$(\nabla_X S)(Y, Z) - (\nabla_Y S)(X, Z) = \frac{1}{2(n-1)} \{g(Y, Z)dr(X) - g(X, Z)dr(Y)\} \quad (2.1.9)$$

elde edilir. (2.1.8) ve (2.1.9) eşitlikleri karşılaştırılırsa

$$r = n(n-1) \quad (2.1.10)$$

bulunur. (2.1.10), (2.1.6) de yerine yazılarak

$$R(X, Y)Z = g(Y, Z)X - g(X, Z)Y$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanır. $\square$

Tanım 2.1.4. M bir Lorentzian para-Sasakian manifold olsun. M üzerinde $\forall X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned}
\tilde{C}(X, Y)Z &= aR(X, Y)Z + b\{S(Y, Z)X - S(X, Z)Y \\
&+ g(Y, Z)QX - g(X, Z)QY\} \\
&- \frac{r}{n} \left(\frac{a}{n-1} + 2b \right) \{g(Y, Z)X - g(X, Z)Y\} \quad (2.1.11)
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan $\tilde{C}$ tensör alanına quasi-konformal eğrilik tensör alanı denir. Burada a ve b , $ab \neq 0$ şartını sağlayan sabitleri; R , Riemann eğrilik tensörünü; S , Ricci tensör alanını; Q , Ricci operatörünü ve r de skaler eğriliği göstermektedir [97].

Tanım 2.1.5. M bir Lorentzian para-Sasakian manifold ve $\tilde{C}$ da M üzerinde konformal eğrilik tensörü olsun. Eğer $\tilde{C} = 0$ ise M ye quasi-konformal flat manifold denir [97].

Teorem 2.1.2. M bir quasi-konformal flat Lorentzian para-Sasakian manifold olsun. Bu durumda M , $S_1^n(1)$ Lorentzian küresi ile lokal olarak izometriktir [82].

İspat. M bir quasi-konformal flat Lorentzian para-Sasakian manifold olsun. Bu durumda (2.1.11) eşitliğinden

$$\begin{aligned} R(X, Y, Z, W) &= -\frac{b}{a}\{S(Y, Z)g(X, W) - S(X, Z)g(Y, W) \\ &\quad + g(Y, Z)S(X, W) - g(X, Z)S(Y, W)\} \\ &\quad + \frac{r}{an}\left(\frac{a}{n-1} + 2b\right)\{g(Y, Z)g(X, W) \\ &\quad - g(X, Z)g(Y, W)\} \end{aligned} \quad (2.1.12)$$

yazılır. (2.1.12) eşitliğinde W yerine ξ alınırsa, (1.3.26), (1.3.11) ve (1.3.30) kullanılırsa

$$\begin{aligned} g(Y, Z)\eta(X) - g(X, Z)\eta(Y) &= -\frac{b}{a}\{S(Y, Z)\eta(X) - S(X, Z)\eta(Y) \\ &\quad + (n-1)g(Y, Z)\eta(X) \\ &\quad - (n-1)g(X, Z)\eta(Y)\} \\ &\quad + \frac{r}{an}\left(\frac{a}{n-1} + 2b\right)\{g(Y, Z)\eta(X) \\ &\quad - g(X, Z)\eta(Y)\} \end{aligned} \quad (2.1.13)$$

elde edilir. Buradan $X = \xi$ seçilerek

$$\begin{aligned} -g(Y, Z) - \eta(Z)\eta(Y) &= -\frac{b}{a}\{-S(Y, Z) - (n-1)\eta(Y)\eta(Z) \\ &\quad - (n-1)g(Y, Z) - (n-1)\eta(Y)\eta(Z)\} \\ &\quad + \frac{r}{an}\left(\frac{a}{n-1} + 2b\right)(-g(Y, Z) - \eta(Y)\eta(Z)) \end{aligned}$$

olur. Böylece bu son eşitlikten

$$\begin{aligned} S(Y, Z) &= \left(\frac{r}{bn}\left(\frac{a}{n-1} + 2b\right) - (n-1) - \frac{a}{b}\right)g(Y, Z) \\ &\quad + \left(\frac{r}{bn}\left(\frac{a}{n-1} + 2b\right) - 2(n-1) - \frac{a}{b}\right)\eta(Y)\eta(Z) \end{aligned} \quad (2.1.14)$$

olduğu kolaylıkla görülür. (2.1.14), (2.1.12) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
{}^{\vee}R(X, Y, Z, W) = & -\frac{b}{a} \left(\frac{r}{bn} \left(\frac{a}{n-1} + 2b \right) - (n-1) - 2 \right) \{g(Y, Z)g(X, W) \\
& -g(X, Z)g(Y, W)\} \\
& -\frac{b}{a} \left[\left(\frac{r}{n} \left(\frac{a}{n-1} + 2b \right) - 2(n-1) - \frac{a}{b} \right) \right] \{\eta(Y)\eta(Z)g(X, W) \\
& -\eta(X)\eta(Z)g(Y, W) \\
& +\eta(X)\eta(W)g(Y, Z) - \eta(Y)\eta(W)g(X, Z)\}
\end{aligned} \tag{2.1.15}$$

elde edilir. Şimdi (2.1.14) ve (1.3.12) yi göz önüne alarak S nin X vektör alanı boyunca kovaryant türevini hesaplayalım:

$$\begin{aligned}
(\nabla_X S)(Y, Z) = & \frac{dr(X)}{bn} \{g(Y, Z) + \eta(Y)\eta(Z)\} \\
& + \left(\frac{r}{bn} \left(\frac{a}{n-1} + 2b \right) - 2(n-1) - \frac{a}{b} \right) \{\Phi(X, Y)\eta(Z) \\
& + \Phi(X, Z)\eta(Y)\}
\end{aligned} \tag{2.1.16}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}
(\nabla_X S)(Y, Z) - (\nabla_Y S)(X, Z) = & \frac{dr(X)}{bn} \{g(Y, Z) + \eta(Y)\eta(Z)\} \\
& - \frac{dr(Y)}{n} \{g(X, Z) + \eta(X)\eta(Z)\} \\
& + \left(\frac{r}{bn} \left(\frac{a}{n-1} + 2b \right) - 2(n-1) - \frac{a}{b} \right) \Phi(X, Z)\eta(Y) \\
& - \left(\frac{r}{bn} \left(\frac{a}{n-1} + 2b \right) - 2(n-1) - \frac{a}{b} \right) \Phi(Y, Z)\eta(X)
\end{aligned} \tag{2.1.17}$$

dir. Diğer taraftan $(\nabla_W \tilde{C})(X, Y)Z = 0$ olduğundan (2.1.17) eşitliği de gözönüne alınarak

$$r = n(n-1) \tag{2.1.18}$$

bulunur. (2.1.18), (2.1.15) da yerine yazılarak

$$R(X, Y)Z = g(Y, Z)X - g(X, Z)Y$$

elde edilir ve ispat tamamlanır. $\square$

Şimdi $R(X, Y).C = 0$ şartını sağlayan Lorentzian para-Sasakian manifoldları inceleyelim:

Tanım 2.1.6. (M, g) , n -boyutlu ($n \geq 4$) bir diferensiyellenebilir manifold olsun. Bu durumda M manifoldu üzerinde R ve C sırasıyla Riemann eğrilik tensör alanı ve konformal eğrilik tensör alanı olmak üzere $R.C$ tensör alanı $\forall X, Y, Z, W, U \in \Gamma(TM)$

$$\begin{aligned} (R(X, Y).C)(Z, W, U) &= R(X, Y)C(Z, W)U - C(R(X, Y)Z, W)U \\ &\quad - C(Z, R(X, Y)W)U \\ &\quad - C(Z, W)R(X, Y)U \end{aligned} \quad (2.1.19)$$

ile tanımlanır [98].

Teorem 2.1.3. M , n -boyutlu ($n \geq 4$) bir Lorentzian para-Sasakian manifold olsun. Eğer M üzerinde $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için $R(X, Y).C = 0$ ise M , $S_1^n(1)$ Lorentzian küresi ile lokal olarak izometriktir [82].

İspat. (1.3.11), (1.3.27) ve (1.3.30) kullanılarak (2.1.1) den $\forall X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned} \eta(C(X, Y)Z) &= \frac{1}{n-2} \left[\left(\frac{r}{n-1} - 1 \right) \{g(Y, Z)\eta(X) - g(X, Z)\eta(Y)\} \right. \\ &\quad \left. - \{S(Y, Z)\eta(X) - S(X, Z)\eta(Y)\} \right] \end{aligned} \quad (2.1.20)$$

elde edilir. (2.1.20) eşitliğinde Z yerine ξ alınır, (1.3.11) ve (1.3.30) kullanılırsa

$$\eta(C(X, Y)\xi) = 0 \quad (2.1.21)$$

bulunur. (2.1.20) eşitliğinde bu kez X yerine ξ alınır

$$\begin{aligned} \eta(C(\xi, Y)Z) &= \frac{1}{n-2} [\{S(Y, Z) - (n-1)\eta(Y)\eta(Z)\} \\ &\quad - \left(\frac{r}{n-1} - 1 \right) \{g(Y, Z) + \eta(Y)\eta(Z)\}] \end{aligned} \quad (2.1.22)$$

olur. M üzerinde $R(X, Y).C = 0$ olduğundan (2.1.19) den

$$\begin{aligned} 0 &= g(R(\xi, Y)C(U, V)W, \xi) - g(C(R(\xi, Y)U, V)W, \xi) \\ &\quad - g(C(U, R(\xi, Y)V)W, \xi) - g(C(U, V)R(\xi, Y)W, \xi) \end{aligned} \quad (2.1.23)$$

olduğu görülür.

(1.3.11) ve (1.3.27) eşitlikleri gözönüne alınarak

$$\begin{aligned}
0 = & - 'C(U, V, W, Y) - \eta(Y)\eta(C(U, V)W) - g(Y, U)\eta(C(\xi, V)W) \\
& + \eta(U)\eta(C(Y, V)W) - g(Y, V)\eta(C(U, \xi)W) + \eta(V)\eta(C(U, Y)W) \\
& - g(Y, W)\eta(C(U, V)\xi) + \eta(W)\eta(C(U, V)Y)
\end{aligned} \tag{2.1.24}$$

elde edilir. Burada $'C(U, V, W, Y) = g(C(U, V)W, Y)$ dir. (2.1.24) eşitliğinde U yerine Y yazılırsa

$$\begin{aligned}
0 = & - 'C(U, V, W, U) - \eta(U)\eta(C(U, V)W) - g(U, U)\eta(C(\xi, V)W) \\
& + \eta(U)\eta(C(U, V)W) - g(U, V)\eta(C(U, \xi)W) + \eta(V)\eta(C(U, U)W) \\
& - g(U, W)\eta(C(U, V)\xi) + \eta(W)\eta(C(U, V)U)
\end{aligned} \tag{2.1.25}$$

bulunur.

Şimdi $p \in M$ noktasındaki $T_P M$ tanjant uzayının bir $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ ortonormal bazını göz önüne alalım. Bu durumda (2.1.25) da $U = e_i$ yazılır ve 1 den n ye kadar i üzerinden toplam alınırsa

$$\eta(C(\xi, V)W) = 0 \tag{2.1.26}$$

eşitliğine ulaşılır. (2.1.21) ve (2.1.26) kullanılarak (2.1.24) den

$$\begin{aligned}
0 = & - 'C(U, V, W, Y) - \eta(Y)\eta(C(U, V)W) + \eta(U)\eta(C(Y, V)W) \\
& + \eta(V)\eta(C(U, Y)W) + \eta(W)\eta(C(U, V)Y)
\end{aligned} \tag{2.1.27}$$

elde edilir.

Eğer (2.1.20), (2.1.27) de kullanılırsa

$$\begin{aligned}
0 = & - 'C(U, V, W, Y) + \eta(W)\frac{1}{n-2}\left[\left(\frac{r}{n-1} - 1\right)\{\eta(U)g(V, Y) \right. \\
& \left. - \eta(V)g(U, Y)\} - \{\eta(U)S(V, Y) - \eta(V)S(U, Y)\}\right]
\end{aligned} \tag{2.1.28}$$

bulunur.

(2.1.26) ve (2.1.22) den

$$S(Y, Z) = \left(\frac{r}{n-1} - 1\right)g(Y, Z) + \left(\frac{r}{n-1} - n\right)\eta(Y)\eta(Z)$$

olur. Bu son eşitlik kullanılarak (2.1.28) eşitliğinden

$$0 = \nabla C(U, V, W, Y)$$

elde edilir ki bu da M manifoldunun konformal flat olduğunu verir. Böylece Teorem 2.1.1 gözönüne alınarak ispat tamamlanır. $\square$

Konformal simetrik manifoldlar üzerinde $\nabla C = 0$ olduğundan $R(X, Y) \cdot C = 0$, $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$, eşitliği sağlanır. Bu durumda Teorem 2.1.1 ve Teorem 2.1.3 gözönüne alınarak aşağıdaki sonuca ulaşılır:

Sonuç 2.1.1. *M , n -boyutlu ($n \geq 4$) bir konformal simetrik Lorentzian para-Sasakian manifold olsun. Bu durumda M , $S_1^n(1)$ Lorentzian küresi ile lokal olarak izometriktir [82].*

Teorem 2.1.1, Teorem 2.1.2 ve Teorem 2.1.3 den aşağıdaki sonuca ulaşılır:

Sonuç 2.1.2. *M bir n -boyutlu konformal flat, quasi-konformal flat veya konformal simetrik Lorentzian para-Sasakian manifold ise $\forall X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için*

$$R(X, Y)Z = g(Y, Z)X - g(X, Z)Y \quad (2.1.29)$$

dir. Burada R , M nin Riemann eğrilik tensör alanıdır.

2.2 4-boyutlu Lorentzian Para-Sasakian Manifoldlar

Üzerindeki Spacelike ve Timelike Eğriler

Bu kısımda Minkowski uzaylarda tanımlı eğriler için [83] de yer alan Frenet formülleri kullanılarak, 4-boyutlu Lorentzian para-Sasakian manifoldlar üzerinde yay-parametresi ile parametrelendirilmiş null (lightlike) olmayan bir $\gamma : I \rightarrow M$ eğrisi için Frenet formülleri verilecektir.

Tanım 2.2.1. *M bir semi-Riemann manifold ve $\gamma : I \rightarrow M$ da M üzerinde bir diferensiyellenebilir eğri olsun. Eğer γ eğrisinin hız vektörü $\gamma'(s)$, $\forall s \in I$, sırasıyla spacelike, timelike veya null (lightlike) ise γ eğrisine sırasıyla spacelike, timelike veya null (lightlike) eğri denir [86].*

M bir 4-boyutlu Lorentzian para-Sasakian manifold ve $\gamma : I \rightarrow M$ da yay-parametresi ile parametrelendirilmiş null (lightlike) olmayan bir eğri olsun. T , N , B_1 ve B_2 , sırasıyla γ eğrisinin teğet, normal, birinci binormal ve ikinci binormal vektör alanını göstermek üzere, γ boyunca M manifoldu üzerinde Frenet çatısını

$$\{T, N, B_1, B_2\}$$

olarak alalım. Şimdi $\gamma : I \rightarrow M$ eğrisinin Frenet formüllerini inceleyelim [83]:

I.Durum : $\gamma : I \rightarrow M$ eğrisi bir spacelike eğri olsun. Bu durumda T bir spacelike vektör olduğundan N ve B_1 vektör alanlarının casual karakterleri göz önüne alınarak γ nın Frenet formülleri için aşağıdaki durumlar söz konusudur:

i) N ve B_1 spacelike ise

$$\begin{bmatrix} \nabla_T T \\ \nabla_T N \\ \nabla_T B_1 \\ \nabla_T B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & k_3 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad (2.2.1)$$

dir. Burada T , N , B_1 ve B_2

$$g(T, T) = g(N, N) = g(B_1, B_1) = 1, \quad g(B_2, B_2) = -1, \quad (2.2.2)$$

şartalarını sağlayan ortogonal vektör alanlarıdır.

ii) N spacelike ve B_1 timelike ise

$$\begin{bmatrix} \nabla_T T \\ \nabla_T N \\ \nabla_T B_1 \\ \nabla_T B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & k_3 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad (2.2.3)$$

dir. Burada T , N , B_1 ve B_2

$$g(T, T) = g(N, N) = g(B_2, B_2) = 1, \quad g(B_1, B_1) = -1, \quad (2.2.4)$$

şartalarını sağlayan ortogonal vektör alanlarıdır.

iii) N spacelike ve B_1 null ise

$$\begin{bmatrix} \nabla_T T \\ \nabla_T N \\ \nabla_T B_1 \\ \nabla_T B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & -k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad (2.2.5)$$

dir. Burada T , N , B_1 ve B_2

$$g(T, T) = g(N, N) = 1, \quad g(B_2, B_2) = g(B_1, B_1) = 0, \quad g(B_1, B_2) = 1 \quad (2.2.6)$$

$$g(T, N) = g(T, B_1) = g(T, B_2) = g(N, B_1) = g(N, B_2) = 0, \quad (2.2.7)$$

şartalarını sağlayan vektör alanlarıdır.

iv) N timelike ve B_1 spacelike ise

$$\begin{bmatrix} \nabla_T T \\ \nabla_T N \\ \nabla_T B_1 \\ \nabla_T B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 & 0 \\ k_1 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad (2.2.8)$$

dir. Burada T , N , B_1 ve B_2

$$g(T, T) = g(B_1, B_1) = g(B_2, B_2) = 1, \quad g(N, N) = -1, \quad (2.2.9)$$

şartalarını sağlayan ortogonal vektör alanlarıdır.

v) N null ve B_1 spacelike ise

$$\begin{bmatrix} \nabla_T T \\ \nabla_T N \\ \nabla_T B_1 \\ \nabla_T B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & k_3 & 0 & -k_2 \\ -k_1 & 0 & -k_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad (2.2.10)$$

dir. Bu durumda k_1 sadece iki değer alır: eğer γ bir geodezik eğri ise $k_1 = 0$, aksi halde $k_1 = 1$ dir. Burada T , N , B_1 ve B_2

$$g(T, T) = g(B_1, B_1) = 1, \quad g(N, N) = g(B_2, B_2) = 0, \quad (2.2.11)$$

$$g(T, N) = g(T, B_1) = g(T, B_2) = g(N, B_1) = g(N, B_2) = 0, \quad g(N, B_2) = 1 \quad (2.2.12)$$

şartalarını sağlayan vektör alanlarıdır.

vi) N null ve B_2 spacelike ise

$$\begin{bmatrix} \nabla_T T \\ \nabla_T N \\ \nabla_T B_1 \\ \nabla_T B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_2 \\ -k_1 & 0 & 0 & k_3 \\ 0 & -k_3 & -k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad (2.2.13)$$

dir. Bu durumda da k_1 sadece iki değer alır: eğer γ bir geodezik eğri ise $k_1 = 0$, aksi halde $k_1 = 1$ dir. Burada T, N, B_1 ve B_2

$$g(T, T) = g(B_2, B_2) = 1, \quad g(N, N) = g(B_1, B_1) = 0, \quad (2.2.14)$$

$$g(T, N) = g(T, B_1) = g(T, B_2) = g(N, B_1) = g(N, B_2) = 0, \quad g(N, B_1) = 1 \quad (2.2.15)$$

şartalarını sağlayan vektör alanlarıdır.

II.Durum : $\gamma : I \rightarrow M$ eğrisi bir timelike eğri olsun. Bu durumda T bir timelike vektör olduğundan γ nın Frenet formülleri

$$\begin{bmatrix} \nabla_T T \\ \nabla_T N \\ \nabla_T B_1 \\ \nabla_T B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 & 0 \\ k_1 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad (2.2.16)$$

dir. Burada T, N, B_1 ve B_2

$$g(N, N) = g(B_1, B_1) = g(B_2, B_2) = 1, \quad g(T, T) = -1, \quad (2.2.17)$$

şartalarını sağlayan ortogonal vektör alanlarıdır.

2.3 4-boyutlu Konformal Flat, Quasi-Konformal Flat ve Konformal Simetrik Lorentzian Para-Sasakian Manifoldlar Üzerindeki Biharmonik Eğriler

Bu kısımda 4-boyutlu bir konformal flat, quasi-konformal flat veya konformal simetrik Lorentzian para-Sasakian manifold üzerindeki null (lightlike) olmayan eğrilerin özgün

biharmonik eğri olmaları için gerek ve yeter şartlar araştırılarak bu eğrilerin biharmonik denklemleri verilecektir.

Teorem 2.3.1. *M bir 4-boyutlu konformal flat, quasi-konformal flat veya konformal simetrik Lorentzian para-Sasakian manifold ve $\gamma : I \rightarrow M$ da M üzerinde ikinci binormali timelike olan yay-parametresi ile parametrelendirilmiş bir spacelike eğri olsun. Bu durumda $\gamma : I \rightarrow M$ eğrisinin özgün (has) biharmonik eğri olması için gerek ve yeter şart $\gamma : I \rightarrow M$ eğrisinin $k_1 = 1$ olacak şekilde bir çember veya $k_1^2 + k_2^2 = 1$ olacak şekilde bir helis olmasıdır.*

İspat. (M, ϕ, ξ, η) , bir 4-boyutlu konformal flat, quasi-konformal flat veya konformal simetrik Lorentzian para-Sasakian manifold olsun. $\gamma : I \rightarrow M$ eğrisinin yay-parametresi ile verilen bir spacelike eğri ve γ eğrisi boyunca M ye teğet olan $\{T, N, B_1, B_2\}$ ortonormal Frenet çatısının da

$$g(T, T) = g(N, N) = g(B_1, B_1) = 1, \quad g(B_2, B_2) = -1$$

şartlarını sağladığını düşünelim. Bu durumda $T = \gamma'(s)$ bir spacelike vektördür. $N, \nabla_T T$ doğrultusunda birim spacelike vektör alanı, B_1 ve B_2 de sırasıyla birim spacelike ve birim timelike vektör alanları olmak üzere γ eğrisi boyunca M ye teğet olan $\{T, N, B_1, B_2\}$ ortonormal Frenet çatısını göz önüne alalım. Bu durumda (2.2.1) ile verilen Frenet formülleri ve (2.1.29) kullanılarak $\gamma : I \rightarrow M$ eğrisinin bitensiyon alanı

$$\begin{aligned} \tau_2(\gamma) &= \nabla_T^3 T - R(T, \nabla_T T)T \\ &= \nabla_T \nabla_T (k_1 N) - R(T, k_1 N)T \\ &= \nabla_T (k_1' N + k_1 \nabla_T N) - k_1 R(T, N)T \\ &= k_1'' N + k_1' \nabla_T N + k_1' \nabla_T N + k_1 \nabla_T (-k_1 T + k_2 B_1) - k_1 R(T, N)T \\ &= k_1'' N + 2k_1' (-k_1 T + k_2 B_1) \\ &\quad + k_1 (-k_1' T - k_1 \nabla_T T + k_2' B_1 + k_2 \nabla_T B_1) - k_1 R(T, N)T \\ &= k_1'' N - 2k_1' k_1 T + 2k_1' k_2 B_1 - k_1' k_1 T - k_1^3 N + k_1 k_2' B_1 \\ &\quad + k_1 k_2 (-k_2 N + k_3 B_2) - k_1 (-N) \end{aligned}$$

olur. Bu son eşitlik düzenlenirse γ eğrisinin biharmonik denklemi

$$\begin{aligned}\tau_2(\gamma) &= (-3k_1'k_1)T + (k_1'' - k_1^3 - k_1k_2^2 + k_1)N \\ &\quad + (2k_1'k_2 + k_1k_2')B_1 + (k_1k_2k_3)B_2 \\ &= 0\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $k_i : I \rightarrow R$, ($i = 1, 2, 3$), fonksiyonları $\gamma : I \rightarrow M$ eğrisinin i .yinci eğrilik fonksiyonlarıdır. Böylece $\gamma : I \rightarrow M$ eğrisinin biharmonik olması için gerek ve yeter şart $k_i : I \rightarrow R$, ($i = 1, 2, 3$), i .yinci eğrilik fonksiyonlarının

$$k_1'k_1 = 0, \quad (2.3.1)$$

$$k_1'' - k_1(k_1^2 + k_2^2 - 1) = 0, \quad (2.3.2)$$

$$2k_1'k_2 + k_1k_2' = 0, \quad (2.3.3)$$

$$k_1k_2k_3 = 0 \quad (2.3.4)$$

denklemlerini sağlamasıdır. Eğer (2.3.1)-(2.3.4) denklemlerinin $\gamma : I \rightarrow M$ eğrisi bir geodezik olmayacak şekildeki çözümleri incelenirse

$$k_1 = \text{sabit} \neq 0,$$

$$k_2 = \text{sabit},$$

$$k_1^2 + k_2^2 = 1,$$

$$k_2k_3 = 0$$

elde edilir ki bu da ispatı tamamlar. $\square$

Teorem 2.3.2. *M bir 4-boyutlu konformal flat, quasi-konformal flat veya konformal simetrik Lorentzian para-Sasakian manifold ve $\gamma : I \rightarrow M$ da M üzerinde birinci binormali timelike olan yay-parametresi ile parametrelendirilmiş bir spacelike eğri olsun. Bu durumda $\gamma : I \rightarrow M$ eğrisinin özgün (has) biharmonik eğri olması için gerek ve yeter şart $\gamma : I \rightarrow M$ eğrisinin $k_1 = 1$ olacak şekilde bir çember veya $k_1^2 - k_2^2 = 1$ olacak şekilde bir helis olmasıdır.*

İspat. (M, ϕ, ξ, η) , bir 4-boyutlu konformal flat, quasi-konformal flat veya konformal simetrik Lorentzian para-Sasakian manifold olsun. $\gamma : I \rightarrow M$, yay-parametresi

ile verilen bir spacelike eğri olsun. Bu durumda $T = \gamma'(s)$ bir spacelike vektördür. $\gamma : I \rightarrow M$ eğrisinin ortonormal Frenet çatısı $\{T, N, B_1, B_2\}$ olmak üzere B_1 timelike olduğundan $N, \nabla_T T$ doğrultusunda bir spacelike vektör alanı ve B_2 de bir spacelike vektör alanıdır. Bu durumda (2.2.3) ile verilen Frenet formülleri ve (2.1.29) kullanılarak bienerjinin Euler-Lagrange denklemi

$$\begin{aligned}
\tau_2(\gamma) &= \nabla_T^3 T - R(T, \nabla_T T)T \\
&= \nabla_T \nabla_T (k_1 N) - R(T, k_1 N)T \\
&= \nabla_T (k_1' N + k_1 \nabla_T N) - k_1 R(T, N)T \\
&= k_1'' N + k_1' \nabla_T N + k_1' \nabla_T N + k_1 \nabla_T (-k_1 T + k_2 B_1) - k_1 R(T, N)T \\
&= k_1'' N + 2k_1' (-k_1 T + k_2 B_1) \\
&\quad + k_1 (-k_1' T - k_1 \nabla_T T + k_2' B_1 + k_2 \nabla_T B_1) - k_1 R(T, N)T \\
&= k_1'' N - 2k_1' k_1 T + 2k_1' k_2 B_1 - k_1' k_1 T - k_1^3 N + k_1 k_2' B_1 \\
&\quad + k_1 k_2 (k_2 N + k_3 B_2) - k_1 (-N) \\
&= (-3k_1' k_1) T + (k_1'' - k_1^3 + k_1 k_2^2 + k_1) N \\
&\quad + (2k_1' k_2 + k_1 k_2') B_1 + (k_1 k_2 k_3) B_2 \\
&= 0
\end{aligned}$$

olur. Burada $k_i : I \rightarrow R$, ($i = 1, 2, 3$), fonksiyonları $\gamma : I \rightarrow M$ eğrisinin i .yinci eğrilik fonksiyonlarıdır. Böylece $\gamma : I \rightarrow M$ eğrisinin biharmonik olması için gerek ve yeter şart $k_i : I \rightarrow R$, ($i = 1, 2, 3$), i .yinci eğrilik fonksiyonlarının

$$k_1' k_1 = 0, \quad (2.3.5)$$

$$k_1'' - k_1(k_1^2 - k_2^2 - 1) = 0, \quad (2.3.6)$$

$$2k_1' k_2 + k_1 k_2' = 0, \quad (2.3.7)$$

$$k_1 k_2 k_3 = 0 \quad (2.3.8)$$

denklemlerini sağlamasıdır. Eğer (2.3.5)-(2.3.8) denklemlerinin $\gamma : I \rightarrow M$ eğrisi bir geodezik olmayacak şekildeki (yani $k_1 \neq 0$ için) çözümleri incelenirse

$$k_1 = \text{sabit} \neq 0,$$

$$k_2 = \text{sabit},$$

$$k_1^2 - k_2^2 = 1,$$

$$k_2 k_3 = 0$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

Teorem 2.3.3. *M bir 4-boyutlu konformal flat, quasi-konformal flat veya konformal simetrik Lorentzian para-Sasakian manifold ve $\gamma : I \rightarrow M$ da M üzerinde yay-parametresi ile parametrelendirilmiş bir spacelike eğri olsun. N bir spacelike vektör ve B_1 bir null (lightlike) vektör olmak üzere γ eğrisi boyunca M ye teğet olan Frenet çatısı da $\{T, N, B_1, B_2\}$ olsun. Bu durumda $\gamma : I \rightarrow M$ eğrisinin özgün (has) biharmonik eğri olması için gerek ve yeter şart*

(i) $k_1 = 1$

ve

(ii) $k_2 = 0$ veya $\ln k_2(s) = - \int k_3(s) ds$

olmasıdır.

İspat. (M, ϕ, ξ, η) , bir 4-boyutlu konformal flat, quasi-konformal flat veya konformal simetrik Lorentzian para-Sasakian manifold olsun. $\gamma : I \rightarrow M$, yay-parametresi ile verilen bir spacelike eğri olsun. M üzerinde γ eğrisi boyunca hareketli $\{T, N, B_1, B_2\}$ Frenet çatısının

$$g(T, T) = g(N, N) = 1, \quad g(B_1, B_1) = g(B_2, B_2) = 0,$$

$$g(T, N) = g(T, B_1) = g(T, B_2) = g(N, B_1) = g(N, B_2) = 0, \quad g(B_1, B_2) = 1$$

şartlarını sağladığını düşünelim. (2.2.5) kullanılarak γ eğrisinin bitension alanı

$$\begin{aligned} \tau_2(\gamma) &= \nabla_T^3 T - R(T, \nabla_T T)T \\ &= \nabla_T \nabla_T (k_1 N) - R(T, k_1 N)T \\ &= \nabla_T (k_1' N + k_1 \nabla_T N) - k_1 R(T, N)T \\ &= k_1'' N + k_1' \nabla_T N + k_1' \nabla_T N + k_1 \nabla_T (-k_1 T + k_2 B_1) - k_1 R(T, N)T \\ &= k_1'' N + 2k_1' (-k_1 T + k_2 B_1) \\ &\quad + k_1 (-k_1' T - k_1 \nabla_T T + k_2' B_1 + k_2 \nabla_T B_1) - k_1 R(T, N)T \end{aligned}$$

olur. Bu son eşitlikten γ eğrisinin biharmonik denklemi

$$\begin{aligned}\tau_2(\gamma) &= (-3k'_1 k_1) T + (k''_1 - k_1^3 + k_1) N \\ &\quad + (2k'_1 k_2 + k_1 k'_2 + k_1 k_2 k_3) B_1 \\ &= 0\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Burada $k_i : I \rightarrow R$, ($i = 1, 2, 3$), fonksiyonları $\gamma : I \rightarrow M$ eğrisinin i .yinci eğrilik fonksiyonlarıdır. Böylece $\gamma : I \rightarrow M$ eğrisinin biharmonik olması için gerek ve yeter şart $k_i : I \rightarrow R$, ($i = 1, 2, 3$), i .yinci eğrilik fonksiyonlarının

$$k'_1 k_1 = 0, \quad (2.3.9)$$

$$k''_1 - k_1^3 + k_1 = 0, \quad (2.3.10)$$

$$2k'_1 k_2 + k_1 k'_2 + k_1 k_2 k_3 = 0, \quad (2.3.11)$$

denklemlerini sağlamasıdır. Eğer (2.3.9)-(2.3.11) denklemlerinin $\gamma : I \rightarrow M$ eğrisi bir geodezik olmayacak şekildeki (yani $k_1 \neq 0$ için) çözümleri incelenirse

$$k_1 = 1$$

ve

$$k'_2 + k_2 k_3 = 0 \quad (2.3.12)$$

bulunur. (2.3.12) den $k_2 = 0$ veya $\ln k_2(s) = -\int k_3(s) ds$ elde edilir ki bu da ispatı tamamlar. $\square$

Teorem 2.3.4. *M bir 4-boyutlu konformal flat, quasi-konformal flat veya konformal simetrik Lorentzian para-Sasakian manifold ve $\gamma : I \rightarrow M$ da M üzerinde birim normal vektör alanı timelike olan yay-parametresi ile parametrelendirilmiş bir spacelike eğri olsun. Bu durumda $\gamma : I \rightarrow M$ eğrisinin biharmonik eğri olması için gerek ve yeter şart bir geodezik olmasıdır.*

İspat. (M, ϕ, ξ, η) , bir 4-boyutlu konformal flat, quasi-konformal flat veya konformal simetrik Lorentzian para-Sasakian manifold olsun. $\gamma : I \rightarrow M$, birim normal vektör alanı timelike olan yay-parametresi ile parametrelendirilmiş bir spacelike eğri olsun. Öyleyse $T = \gamma'(s)$ bir spacelike vektördür ve γ eğrisi boyunca M ye teğet olan

$\{T, N, B_1, B_2\}$ ortonormal Frenet çatısı $g(T, T) = g(B_1, B_1) = g(B_2, B_2) = 1$, $g(N, N) = -1$ şartlarını sağlar. Bu durumda (2.2.8) ile verilen Frenet formülleri ve (2.1.29) kullanılarak $\gamma : I \rightarrow M$ eğrisinin biharmonik denklemi

$$\begin{aligned}
\tau_2(\gamma) &= \nabla_T^3 T - R(T, \nabla_T T)T \\
&= \nabla_T \nabla_T (k_1 N) - R(T, k_1 N)T \\
&= \nabla_T (k_1' N + k_1 \nabla_T N) - k_1 R(T, N)T \\
&= k_1'' N + k_1' \nabla_T N + k_1' \nabla_T N + k_1 \nabla_T (k_1 T + k_2 B_1) - k_1 R(T, N)T \\
&= k_1'' N + 2k_1' (k_1 T + k_2 B_1) \\
&\quad + k_1 (k_1' T + k_1 \nabla_T T + k_2' B_1 + k_2 \nabla_T B_1) - k_1 R(T, N)T \\
&= k_1'' N + 2k_1' k_1 T + 2k_1' k_2 B_1 + k_1' k_1 T + k_1^3 N + k_1 k_2' B_1 \\
&\quad + k_1 k_2 (k_2 N + k_3 B_2) - k_1 (-N) \\
&= (3k_1' k_1) T + (k_1'' + k_1^3 + k_1 k_2^2 + k_1) N \\
&\quad + (2k_1' k_2 + k_1 k_2') B_1 + (k_1 k_2 k_3) B_2 \\
&= 0
\end{aligned}$$

olur. Burada $k_i : I \rightarrow R$, ($i = 1, 2, 3$), fonksiyonları $\gamma : I \rightarrow M$ eğrisinin i .yinci eğrilik fonksiyonlarıdır. Böylece $\gamma : I \rightarrow M$ eğrisinin biharmonik olması için gerek ve yeter şart $k_i : I \rightarrow R$, ($i = 1, 2, 3$), i .yinci eğrilik fonksiyonlarının

$$k_1' k_1 = 0, \quad (2.3.13)$$

$$k_1'' + k_1 (k_1^2 + k_2^2 + 1) = 0, \quad (2.3.14)$$

$$2k_1' k_2 + k_1 k_2' = 0, \quad (2.3.15)$$

$$k_1 k_2 k_3 = 0 \quad (2.3.16)$$

denklemlerini sağlamasıdır. Eğer (2.3.13)-(2.3.16) denklemlerinin $\gamma : I \rightarrow M$ eğrisi bir geodezik olmayacak şekildeki (yani $k_1 \neq 0$ için) çözümleri incelenirse

$$k_1 = \text{sabit} \neq 0,$$

$$k_2 = \text{sabit},$$

$$k_1^2 + k_2^2 = -1,$$

$$k_2 k_3 = 0$$

elde edilir. Halbuki $k_1^2 + k_2^2 = -1$ olması mümkün değildir. Öyleyse $\gamma : I \rightarrow M$ eğrisi geodezik olmak zorundadır. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

Teorem 2.3.5. *M bir 4-boyutlu konformal flat, quasi-konformal flat veya konformal simetrik Lorentzian para-Sasakian manifold ve $\gamma : I \rightarrow M$ da M üzerinde yay-parametresi ile parametrelendirilmiş bir spacelike eğri olsun. N bir null (lightlike) vektör ve B_1 bir spacelike vektör olmak üzere γ eğrisi boyunca M ye teğet olan Frenet çatısı da $\{T, N, B_1, B_2\}$ olsun. Bu durumda $\gamma : I \rightarrow M$ eğrisinin biharmonik eğri olması için gerek ve yeter şart bir geodezik olmasıdır.*

İspat. (M, ϕ, ξ, η) , bir 4-boyutlu konformal flat, quasi-konformal flat veya konformal simetrik Lorentzian para-Sasakian manifold olsun. $\gamma : I \rightarrow M$, yay-parametresi ile verilen bir spacelike eğri olsun. M üzerinde γ eğrisi boyunca hareketli $\{T, N, B_1, B_2\}$ Frenet çatısının

$$\begin{aligned} g(T, T) &= g(B_1, B_1) = 1, & g(N, N) &= g(B_2, B_2) = 0, \\ g(T, N) &= g(T, B_1) = g(T, B_2) = g(N, B_1) = g(B_1, B_2) = 0, & g(N, B_2) &= 1 \end{aligned}$$

şartlarını sağladığını düşünelim. (2.2.10) kullanılarak

$$\begin{aligned} \tau_2(\gamma) &= \nabla_T^3 T - R(T, \nabla_T T)T \\ &= \nabla_T \nabla_T (k_1 N) - R(T, k_1 N)T \\ &= \nabla_T (k_1' N + k_1 \nabla_T N) - k_1 R(T, N)T \\ &= k_1'' N + k_1' \nabla_T N + k_1' \nabla_T N + k_1 \nabla_T (k_2 B_1) - k_1 R(T, N)T \\ &= k_1'' N + 2k_1' (k_2 B_1) + k_1 (k_2' B_1 + k_2 \nabla_T B_1) - k_1 R(T, N)T \\ &= k_1'' N + 2k_1' k_2 B_1 + k_1 k_2' B_1 \\ &\quad + k_1 k_2 (k_3 N - k_2 B_2) - k_1 (-N) \\ &= (k_1'' + k_1 k_2 k_3 + k_1) N + (2k_1' k_2 + k_1 k_2') B_1 + (k_1 k_2^2) B_2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $k_i : I \rightarrow R$, ($i = 1, 2, 3$), fonksiyonları $\gamma : I \rightarrow M$ eğrisinin i .yinci eğrilik fonksiyonlarıdır. Böylece $\gamma : I \rightarrow M$ eğrisinin biharmonik olması için gerek

ve yeter şart $k_i : I \rightarrow R$, ($i = 1, 2, 3$), i .yinci eğrilik fonksiyonlarının

$$k_1'' + k_1 k_2 k_3 + k_1 = 0, \quad (2.3.17)$$

$$2k_1' k_2 + k_1 k_2' = 0, \quad (2.3.18)$$

$$k_1 k_2^2 = 0, \quad (2.3.19)$$

denklemlerini sağlamasıdır. Diğer taraftan $\gamma : I \rightarrow M$, normal vektör alanı null (lightlike) olan bir spacelike eğri olduğundan birinci eğriliği k_1 , $\gamma : I \rightarrow M$ bir geodezik iken 0 diğer tüm durumlarda ise 1 dir. Eğer yukarıdaki denklemlerin $\gamma : I \rightarrow M$ eğrisi bir geodezik olmayacak şekildeki (yani $k_1 \neq 0$ için) çözümleri incelenirse $k_1 = 1$ olacağından (2.3.17) den $k_2 k_3 + 1 = 0$ ve (2.3.19) dan $k_2 = 0$ elde edilir. Halbuki bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $k_1 = 0$ yani $\gamma : I \rightarrow M$ bir geodezik olmak zorundadır. $\square$

Teorem 2.3.6. *M bir 4-boyutlu konformal flat, quasi-konformal flat veya konformal simetrik Lorentzian para-Sasakian manifold ve $\gamma : I \rightarrow M$ da M üzerinde yay-parametresi ile parametrelendirilmiş bir spacelike eğri olsun. N bir null (lightlike) vektör ve B_2 bir spacelike vektör olmak üzere γ eğrisi boyunca M ye teğet olan Frenet çatısı da $\{T, N, B_1, B_2\}$ olsun. Bu durumda $\gamma : I \rightarrow M$ eğrisinin biharmonik eğri olması için gerek ve yeter şart bir geodezik olmasıdır.*

İspat. (M, ϕ, ξ, η) , bir 4-boyutlu konformal flat, quasi-konformal flat veya konformal simetrik Lorentzian para-Sasakian manifold olsun. $\gamma : I \rightarrow M$, yay-parametresi ile verilen bir spacelike eğri olsun. M üzerinde γ eğrisi boyunca hareketli $\{T, N, B_1, B_2\}$ Frenet çatısının

$$g(T, T) = g(B_2, B_2) = 1, \quad g(N, N) = g(B_1, B_1) = 0,$$

$$g(T, N) = g(T, B_1) = g(T, B_2) = g(N, B_2) = g(B_1, B_2) = 0, \quad g(N, B_1) = 1$$

şartlarını sağladığını düşünelim. (2.2.13) kullanılarak γ eğrisi için bienerjinin Euler-Lagrange denklemi

$$\begin{aligned}
\tau_2(\gamma) &= \nabla_T^3 T - R(T, \nabla_T T)T \\
&= \nabla_T (k'_1 N + k_1 \nabla_T N) - k_1 R(T, N)T \\
&= k''_1 N + 2k'_1 (k_2 B_2) + k_1 (k'_2 B_2 + k_2 \nabla_T B_2) - k_1 R(T, N)T \\
&= k''_1 N + 2k'_1 k_2 B_2 + k_1 k'_2 B_2 \\
&\quad + k_1 k_2 (-k_3 N - k_2 B_1) - k_1 (-N) \\
&= (k''_1 - k_1 k_2 k_3 + k_1) N + (-k_1 k_2^2) B_1 + (2k'_1 k_2 + k_1 k'_2) B_2 \\
&= 0
\end{aligned}$$

bulunur. Burada $k_i : I \rightarrow R$, ($i = 1, 2, 3$), fonksiyonları $\gamma : I \rightarrow M$ eğrisinin i .yinci eğrilik fonksiyonlarıdır. Böylece $\gamma : I \rightarrow M$ eğrisinin biharmonik olması için gerek ve yeter şart $k_i : I \rightarrow R$, ($i = 1, 2, 3$), i .yinci eğrilik fonksiyonlarının

$$k''_1 - k_1 k_2 k_3 + k_1 = 0, \quad (2.3.20)$$

$$k_1 k_2^2 = 0, \quad (2.3.21)$$

$$2k'_1 k_2 + k_1 k'_2 = 0, \quad (2.3.22)$$

denklemlerini sağlamasıdır. Diğer taraftan $\gamma : I \rightarrow M$, normal vektör alanı null (lightlike) olan bir spacelike eğri olduğundan birinci eğriliği k_1 , $\gamma : I \rightarrow M$ bir geodezik iken 0 diğer tüm durumlarda ise 1 dir. Eğer yukarıdaki denklemlerin $\gamma : I \rightarrow M$ eğrisi bir geodezik olmayacak şekildeki (yani $k_1 \neq 0$ için) çözümleri incelenirse $k_1 = 1$ olacağından (2.3.20) den $k_2 k_3 + 1 = 0$ ve (2.3.21) dan $k_2 = 0$ elde edilir. Halbuki bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $k_1 = 0$ yani $\gamma : I \rightarrow M$ bir geodezik olmak zorundadır. $\square$

Şimdi 4-boyutlu konformal flat, quasi-konformal flat veya konformal simetrik Lorentzian para-Sasakian manifold üzerindeki bir timelike eğrinin özgün (has) biharmonik olması için gerek ve yeter şartları inceleyelim:

Teorem 2.3.7. *M bir 4-boyutlu konformal flat, quasi-konformal flat veya konformal simetrik Lorentzian para-Sasakian manifold ve $\gamma : I \rightarrow M$ da M üzerinde yay-parametresi ile parametrelendirilmiş bir timelike eğri olsun. Bu durumda $\gamma : I \rightarrow M$*

eğrisinin biharmonik eğri olması için gerek ve yeter şart $\gamma : I \rightarrow M$ eğrisinin $k_1 = 1$ olacak şekilde bir çember veya $k_1^2 - k_2^2 = 1$ olacak şekilde bir helis olmasıdır.

İspat. (M, ϕ, ξ, η) , bir 4-boyutlu konformal flat, quasi-konformal flat veya konformal simetrik Lorentzian para-Sasakian manifold olsun. $\gamma : I \rightarrow M$, yay-parametresi ile verilen bir timelike eğri olsun. Öyleyse $T = \gamma'(s)$ bir timelike vektördür ve γ eğrisi boyunca M ye teğet olan $\{T, N, B_1, B_2\}$ ortonormal Frenet çatısı $g(T, T) = -1$, $g(N, N) = g(B_1, B_1) = g(B_2, B_2) = 1$ şartlarını sağlar. (2.2.16) eşitliği kullanılarak γ eğrisinin biharmonik denklemi

$$\begin{aligned}
\tau_2(\gamma) &= \nabla_T^3 T - R(T, \nabla_T T)T \\
&= \nabla_T \nabla_T (k_1 N) - R(T, k_1 N)T \\
&= \nabla_T (k_1' N + k_1 \nabla_T N) - k_1 R(T, N)T \\
&= k_1'' N + k_1' \nabla_T N + k_1' \nabla_T N + k_1 \nabla_T (k_1 T + k_2 B_1) - k_1 R(T, N)T \\
&= k_1'' N + 2k_1' (k_1 T + k_2 B_1) \\
&\quad + k_1 (k_1' T + k_1 \nabla_T T + k_2' B_1 + k_2 \nabla_T B_1) - k_1 R(T, N)T \\
&= k_1'' N + 2k_1' k_1 T + 2k_1' k_2 B_1 + k_1' k_1 T + k_1^3 N + k_1 k_2' B_1 \\
&\quad + k_1 k_2 (-k_2 N + k_3 B_2) - k_1 (N) \\
&= (3k_1' k_1) T + (k_1'' + k_1^3 - k_1 k_2^2 - k_1) N \\
&\quad + (2k_1' k_2 + k_1 k_2') B_1 + (k_1 k_2 k_3) B_2 \\
&= 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $k_i : I \rightarrow R$, ($i = 1, 2, 3$), fonksiyonları $\gamma : I \rightarrow M$ eğrisinin i .yinci eğrilik fonksiyonlarıdır. Böylece $\gamma : I \rightarrow M$ eğrisinin biharmonik olması için gerek ve yeter şart $k_i : I \rightarrow R$, ($i = 1, 2, 3$), i .yinci eğrilik fonksiyonlarının

$$k_1' k_1 = 0, \quad (2.3.23)$$

$$k_1'' + k_1 (k_1^2 - k_2^2 - 1) = 0, \quad (2.3.24)$$

$$2k_1' k_2 + k_1 k_2' = 0, \quad (2.3.25)$$

$$k_1 k_2 k_3 = 0 \quad (2.3.26)$$

denklemlerini sağlamasıdır. Eğer (2.3.5)-(2.3.8) denklemlerinin $\gamma : I \rightarrow M$ eğrisi bir

geodezik olmayacak şekildeki (yani $k_1 \neq 0$ için) çözümleri incelenirse

$$\begin{aligned} k_1 &= \text{sabit} \neq 0, \\ k_2 &= \text{sabit}, \\ k_1^2 - k_2^2 &= 1, \\ k_2 k_3 &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

2.4 $S_1^4(1)$ Lorentz Birim Küresi Üzerindeki Biharmonik Eğriler

(M, ϕ, ξ, η) , bir n -boyutlu ($n > 3$) konformal flat, quasi-konformal flat veya konformal simetrik Lorentzian para-Sasakian manifold olsun. Teorem 2.1.1, Teorem 2.1.2 ve Sonuç 2.1.1 den M manifoldu $S_1^n(1)$ Lorentz birim küresine lokal olarak izometriktir. Bu gerçeği ve kısım 2.3 de verdiğimiz teoremleri kullanarak, bu kısımda $S_1^4(1)$ Lorentz birim küresi üzerindeki geodezik olmayan biharmonik eğriler için bazı karakterizasyonlar verilecektir. Ayrıca $S_1^4(1)$ Lorentz birim küresi üzerindeki null olmayan bir eğrinin aslında 4. mertebeden bir diferansiyel denklem olan biharmonik denklemi çözülerek bazı sınıflandırmalar ve bazı özel özgün biharmonik eğriler elde edilecektir.

$$\langle, \rangle = -dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2 + dx_5^2$$

olmak üzere $\langle, \rangle$ metriğine sahip 5-boyutlu Minkowski uzay $(R_1^5, \langle, \rangle)$ olsun. Bu durumda $S_1^4(1)$ Lorentz birim küresi, R_1^5 Minkowski uzayında

$$S_1^4(1) = \{p \in R_1^5 : \langle p, p \rangle = 1\} \quad (2.4.1)$$

ile tanımlanan bir hiperkuadriktir.

$\gamma : I \rightarrow S_1^4(1)$, yay-parametresi ile parametrelendirilmiş null (lightlike) olmayan bir eğri ve ∇ da $S_1^4(1)$ Lorentz birim küresi üzerinde γ eğrisi boyunca kovaryant türev olsun. Bu durumda γ eğrisi boyunca bir X vektör alanı için $\gamma'(s) = T(s)$ olmak üzere

$$\nabla_T X = X' + \langle T, X \rangle \gamma \quad (2.4.2)$$

dir. Ayrıca $S_1^4(1)$ Lorentz birim küresi, skaler eğriliği 1 olan bir Lorentzian uzay form olduğundan $\forall X, Y, Z \in \Gamma(T(S_1^4(1)))$ için

$$R(X, Y)Z = \langle Y, Z \rangle X - \langle X, Z \rangle Y$$

yazılır. Burada $R, S_1^4(1)$ Lorentz birim küresi üzerindeki Riemann eğrilik tensör alanıdır.

Önerme 2.4.1. $\gamma : I \rightarrow S_1^4(1)$ yay-parametresi ile parametrelendirilmiş geodezik olmayan bir biharmonik spacelike eğri; $\{T, N, B_1, B_2\}$, N ve B_1 spacelike vektör alanları olmak üzere $S_1^4(1)$ Lorentz birim küresi üzerinde γ eğrisi boyunca ortonormal Frenet çatısı olsun. Bu durumda

$$\gamma^{(IV)} + 2\gamma'' + (1 - k_1^2)\gamma = 0 \quad (2.4.3)$$

dır. Burada $k_1 : I \rightarrow R$, γ eğrisinin birinci eğrilik fonksiyonudur.

İspat. $\gamma : I \rightarrow S_1^4(1)$, normal vektör alanı N ve binormal vektör alanı B_1 spacelike olan yay-parametresi ile parametrelendirilmiş geodezik olmayan bir biharmonik spacelike eğri olsun. Bu durumda (2.2.1) kullanılarak

$$\begin{aligned} \nabla_T^2 N &= \nabla_T(\nabla_T N) \\ &= \nabla_T(-k_1 T + k_2 B_1) \\ &= -k_1 \nabla_T T + k_2 \nabla_T B_1 \\ &= -k_1(k_1 N) + k_2(-k_2 N + k_3 B_2) \\ &= -(k_1^2 + k_2^2)N + (k_2 k_3) B_2 \\ &= -N \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

bulunur. Ayrıca (2.2.1) ve (2.4.2) den

$$\begin{aligned} \nabla_T^2 N &= \nabla_T(\nabla_T N) = \nabla_T(N' + \langle T, N \rangle \gamma) \\ &= \nabla_T N' = N'' + \langle T, N' \rangle \gamma \\ &= N'' + \langle T, \nabla_T N - \langle T, N \rangle \gamma \rangle \gamma \\ &= N'' + \langle T, \nabla_T N \rangle \gamma \\ &= N'' + \langle T, -k_1 T + k_2 B_1 \rangle \gamma \\ &= N'' - k_1 \gamma \end{aligned} \quad (2.4.5)$$

elde edilir. (2.4.4) ve (2.4.5) eşitliklerinden

$$-N = N'' - k_1 \gamma \quad (2.4.6)$$

dir. Diğer taraftan $S_1^4(1)$ üzerindeki Gauss denkleminden faydalanarak

$$\nabla_T T = T' + \langle T, T \rangle \gamma = \gamma'' + \gamma \quad (2.4.7)$$

olduğu kolayca görülebilir. Bu son eşitlikten

$$N = \frac{1}{k_1}(\gamma'' + \gamma) \quad (2.4.8)$$

olur. Böylece (2.4.8), (2.4.6) eşitliğinde kullanılırsa ispat tamamlanmış olur. $\square$

Önerme 2.4.1 göz önüne alınırsa, $S_1^4(1)$ Lorentz birim küresi üzerinde tanımlı, normal vektör alanı ve binormal vektör alanı spacelike olan özgün (has) biharmonik spacelike eğrileri bulmak için (2.4.3) ile verilen diferansiyel denklemin çözümleri incelenmelidir. Böylece aşağıdaki teoreme ulaşılır:

Teorem 2.4.1. $\gamma : I \rightarrow S_1^4(1)$ yay-parametresi ile parametrelendirilmiş geodezik olmayan bir biharmonik spacelike eğri; $\{T, N, B_1, B_2\}$, N ve B_1 spacelike vektör alanları olmak üzere $S_1^4(1)$ Lorentz birim küresi üzerinde γ eğrisi boyunca ortonormal Frenet çatısı olsun. Bu durumda aşağıdaki iki durum söz konusudur:

(i) $\gamma : I \rightarrow S_1^4(1)$ eğrisi yarıçapı $\frac{1}{\sqrt{2}}$ olan bir çemberdir.

(ii) $\gamma : I \rightarrow S_1^4(1)$, $\gamma(s) = \left(0, \frac{\cos(as)}{\sqrt{2}}, \frac{\sin(as)}{\sqrt{2}}, \frac{\cos(bs)}{\sqrt{2}}, \frac{\sin(bs)}{\sqrt{2}}\right)$

dir. Burada $k_1 : I \rightarrow \mathbb{R}$, γ eğrisinin birinci eğrilik fonksiyonu, $a = \sqrt{1 - k_1}$ ve $b = \sqrt{1 + k_1}$ dir.

İspat. $\gamma : I \rightarrow S_1^4(1)$, normal vektör alanı N ve binormal vektör alanı B_1 spacelike olan yay-parametresi ile parametrelendirilmiş bir özgün (has) biharmonik spacelike eğri olsun. k_1 ile $\gamma : I \rightarrow S_1^4(1)$ eğrisinin birinci eğrilik fonksiyonunu gösterelim.

(i) Eğer $k_1 = 1$ ise (2.4.3) ile verilen diferansiyel denklem

$$\gamma^{(IV)} + 2\gamma'' = 0 \quad (2.4.9)$$

diferansiyel denklemine dönüşür. (2.4.9) diferansiyel denkleminin karakteristik denklemi

$$m^4 + 2m^2 = 0$$

olur. Bu karakteristik denklemin kökleri

$$m_1 = m_2 = 0, \quad m_3 = i\sqrt{2} \quad \text{ve} \quad m_4 = -i\sqrt{2}$$

şeklinde. Böylece (2.4.9) diferansiyel denkleminin genel çözümü

$$\gamma(s) = c_1 + c_2 s + c_3 \cos(\sqrt{2}s) + c_4 \sin(\sqrt{2}s) \quad (2.4.10)$$

dir. Burada c_1, c_2, c_3 ve c_4 birbirine dik sabit vektörlerdir. $|\gamma| = 1$ ve $|\gamma'| = 1$ olduğundan

$$c_2 = 0 \quad \text{ve} \quad |c_1|^2 = |c_3|^2 = |c_4|^2 = \frac{1}{2} \quad (2.4.11)$$

bulunur. Öyleyse (2.4.10) ve (2.4.11) eşitliklerinden $-d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 = \frac{1}{2}$ olmak üzere

$$\gamma(s) = \left(d_1, \frac{\cos(\sqrt{2}s)}{\sqrt{2}}, \frac{\sin(\sqrt{2}s)}{\sqrt{2}}, d_2, d_3 \right)$$

elde edilir ki bu da $\gamma : I \rightarrow S_1^4(1)$ eğrisinin yarıçapı $\frac{1}{\sqrt{2}}$ olan bir çember olduğunu gösterir.

(ii) Eğer $0 < k_1 < 1$ ise (2.4.3) ile verilen diferansiyel denklemin karakteristik denklemi

$$m^4 + 2m^2 + k_2^2 = 0 \quad (2.4.12)$$

olur. $m^2 = t$ dersek (2.4.12) denklemi

$$t^2 + 2t^2 + k_2^2 = 0 \quad (2.4.13)$$

denkleme indirgenir. (2.4.13) denkleminin diskriminantı $\Delta = 4(1 - k_2^2)$ olduğundan bu denklemin kökleri t_1 ve t_2 olmak üzere

$$t_1 = -1 + k_1, \quad (t_1 < 0),$$

$$t_2 = -1 - k_1, \quad (t_2 < 0)$$

dir. Buradan $m^2 = t$ olduğu göz önüne alınırsa (2.4.12) karakteristik denkleminin kökleri

$$m_1 = -i\sqrt{1 - k_1}, \quad m_2 = i\sqrt{1 - k_1}, \quad m_3 = -i\sqrt{1 + k_1} \quad \text{ve} \quad m_4 = i\sqrt{1 + k_1}$$

bulunur. Böylece $\sqrt{1-k_1} = a$ ve $\sqrt{1+k_1} = b$ olmak üzere (2.4.3) diferansiyel denkleminin genel çözümü

$$\gamma(s) = c_1 \cos(as) + c_2 \sin(as) + c_3 \cos(bs) + c_4 \sin(bs) \quad (2.4.14)$$

olur. Burada c_1, c_2, c_3 ve c_4 birbirine dik sabit vektörlerdir. $|\gamma| = 1$ ve $|\gamma'| = 1$ olduğundan

$$|c_1|^2 = |c_2|^2 = |c_3|^2 = |c_4|^2 = \frac{1}{2} \quad (2.4.15)$$

elde edilir. Öyleyse (2.4.14) ve (2.4.15) eşitliklerinden

$$\gamma(s) = \left(0, \frac{\cos(as)}{\sqrt{2}}, \frac{\sin(as)}{\sqrt{2}}, \frac{\cos(bs)}{\sqrt{2}}, \frac{\sin(bs)}{\sqrt{2}} \right)$$

elde edilir ki bu da ispatı tamamlar. $\square$

Önerme 2.4.2. $\gamma : I \rightarrow S_1^4(1)$ yay-parametresi ile parametrelendirilmiş geodezik olmayan bir biharmonik spacelike eğri; $\{T, N, B_1, B_2\}$, N bir spacelike vektör alanı ve B_1 bir timelike vektör alanı olmak üzere $S_1^4(1)$ Lorentz birim küresi üzerinde γ eğrisi boyunca ortonormal Frenet çatısı olsun. Bu durumda

$$\gamma^{(IV)} + 2\gamma'' + (1 - k_1^2)\gamma = 0 \quad (2.4.16)$$

dır. Burada $k_1 : I \rightarrow R$, γ eğrisinin birinci eğrilik fonksiyonudur.

İspat. $\gamma : I \rightarrow S_1^4(1)$, normal vektör alanı N spacelike ve binormal vektör alanı B_1 timelike vektör olan yay-parametresi ile parametrelendirilmiş bir özgün (has) biharmonik spacelike eğri olsun. Bu durumda (2.2.3) kullanılarak

$$\begin{aligned} \nabla_T^2 N &= \nabla_T(\nabla_T N) = \nabla_T(-k_1 T + k_2 B_1) \\ &= -k_1 \nabla_T T + k_2 \nabla_T B_1 = -k_1(k_1 N) + k_2(k_2 N + k_3 B_2) \\ &= -(k_1^2 - k_2^2)N + (k_2 k_3) B_2 = -N \end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca (2.2.3) ve (2.4.2) den

$$\begin{aligned} \nabla_T^2 N &= \nabla_T(\nabla_T N) = \nabla_T(N' + \langle T, N \rangle \gamma) \\ &= \nabla_T N' = N'' + \langle T, N' \rangle \gamma \\ &= N'' + \langle T, \nabla_T N - \langle T, N \rangle \gamma \rangle \gamma = N'' + \langle T, \nabla_T N \rangle \gamma \\ &= N'' + \langle T, -k_1 T + k_2 B_1 \rangle \gamma \\ &= N'' - k_1 \gamma \end{aligned}$$

elde edilir. Bu son iki eşitlikten

$$-N = N'' - k_1\gamma \quad (2.4.17)$$

olur. Diğer taraftan $S_1^4(1)$ üzerindeki Gauss denkleminden faydalanarak

$$\nabla_T T = T' + \langle T, T \rangle \gamma = \gamma'' + \gamma$$

olduğu kolayca görülebilir. Buradan

$$N = \frac{1}{k_1}(\gamma'' + \gamma) \quad (2.4.18)$$

bulunur. Böylece (2.4.18), (2.4.17) eşitliğinde kullanılırsa ispat tamamlanmış olur. $\square$

Şimdi (2.4.16) diferansiyel denkleminin çözümlerini inceleyelim:

(i) Eğer $k_1 = 1$ ise (2.4.16) ile verilen diferansiyel denklem (2.4.9) diferansiyel denkleme indirgeneceğinden bu diferansiyel denklemin çözümü olan $\gamma : I \rightarrow S_1^4(1)$ eğrisi yarıçapı $\frac{1}{\sqrt{2}}$ olan bir çemberdir.

(ii) Eğer $k_1 > 1$ ise (2.4.16) ile verilen diferansiyel denklemin karakteristik denklemi

$$m^4 + 2m^2 - k_2^2 = 0 \quad (2.4.19)$$

olur. $m^2 = t$ dersek (2.4.19) denklemi

$$t^2 + 2t^2 - k_2^2 = 0 \quad (2.4.20)$$

denkleme indirgenir. (2.4.20) denkleminin diskriminantı $\Delta = 4(1+k_2^2)$ olduğundan bu denklemin kökleri t_1 ve t_2 olmak üzere

$$t_1 = -1 + k_1, \quad (t_1 > 0)$$

$$t_2 = -1 - k_1, \quad (t_2 < 0)$$

dir. Buradan $m^2 = t$ olduğu göz önüne alınırsa (2.4.19) karakteristik denkleminin kökleri

$$m_1 = \sqrt{k_1 - 1}, \quad m_2 = -\sqrt{k_1 - 1}, \quad m_3 = -i\sqrt{1 + k_1} \quad \text{ve} \quad m_4 = i\sqrt{1 + k_1}$$

şeklindedir. Böylece $\sqrt{k_1 - 1} = a$ ve $\sqrt{1 + k_1} = b$ olmak üzere (2.4.16) diferansiyel denkleminin genel çözümü

$$\gamma(s) = c_1 e^{as} + c_2 e^{-as} + c_3 \cos(bs) + c_4 \sin(bs) \quad (2.4.21)$$

olur. Şimdi $|\gamma| = 1$ ve $|\gamma'| = 1$ olacak şekilde c_1, c_2, c_3 ve c_4 sabit vektörlerini belirleyerek (2.4.16) diferansiyel denkleminin özel bir çözümünü bulalım:

$$\begin{aligned} |\gamma|^2 &= \langle \gamma(s), \gamma(s) \rangle \\ &= \langle c_1, c_1 \rangle e^{2as} + \langle c_1, c_2 \rangle + \langle c_1, c_3 \rangle e^{as} \cos(bs) + \langle c_1, c_4 \rangle e^{as} \sin(bs) \\ &\quad + \langle c_2, c_1 \rangle + \langle c_2, c_2 \rangle e^{-2as} + \langle c_2, c_3 \rangle e^{-as} \cos(bs) + \langle c_2, c_4 \rangle e^{-as} \sin(bs) \\ &\quad + \langle c_3, c_1 \rangle e^{as} \cos(bs) + \langle c_3, c_2 \rangle e^{-as} \cos(bs) \\ &\quad + \langle c_3, c_3 \rangle \cos^2(bs) + \langle c_3, c_4 \rangle \cos(bs) \sin(bs) \\ &\quad + \langle c_4, c_1 \rangle e^{as} \sin(bs) + \langle c_4, c_2 \rangle e^{-as} \sin(bs) \\ &\quad + \langle c_4, c_3 \rangle \sin(bs) \cos(bs) + \langle c_4, c_4 \rangle \sin^2(bs) \end{aligned} \quad (2.4.22)$$

ve

$$\begin{aligned} |\gamma'|^2 &= \langle \gamma'(s), \gamma'(s) \rangle \\ &= \langle ac_1 e^{as} - ac_2 e^{-as} - bc_3 \sin(bs) + bc_4 \cos(bs), \\ &\quad ac_1 e^{as} - ac_2 e^{-as} - bc_3 \sin(bs) + bc_4 \cos(bs) \rangle \\ &= a^2 \langle c_1, c_1 \rangle e^{2as} - a^2 \langle c_1, c_2 \rangle - ab \langle c_1, c_3 \rangle e^{as} \sin(bs) \\ &\quad + ab \langle c_1, c_4 \rangle e^{as} \cos(bs) - a^2 \langle c_2, c_1 \rangle + a^2 \langle c_2, c_2 \rangle e^{-2as} \\ &\quad + ab \langle c_2, c_3 \rangle e^{-as} \sin(bs) - ab \langle c_2, c_4 \rangle e^{-as} \cos(bs) \\ &\quad - ab \langle c_3, c_1 \rangle e^{as} \sin(bs) + ab \langle c_3, c_2 \rangle e^{-as} \sin(bs) \\ &\quad + b^2 \langle c_3, c_3 \rangle \sin^2(bs) - b^2 \langle c_3, c_4 \rangle \sin(bs) \cos(bs) \\ &\quad + ab \langle c_4, c_1 \rangle e^{as} \cos(bs) - ab \langle c_4, c_2 \rangle e^{-as} \cos(bs) \\ &\quad - b^2 \langle c_4, c_3 \rangle \cos(bs) \sin(bs) + b^2 \langle c_4, c_4 \rangle \cos^2(bs) \end{aligned} \quad (2.4.23)$$

olduğundan c_1, c_2, c_3 ve c_4 sabit vektörleri

$$\begin{aligned}
\langle c_1, c_1 \rangle &= \langle c_2, c_2 \rangle = 0, \\
\langle c_3, c_3 \rangle &= \langle c_4, c_4 \rangle = \frac{3}{b^2} = \frac{1}{2}, \\
\langle c_1, c_2 \rangle &= \frac{1}{a^2} = \frac{1}{4}, \\
\langle c_1, c_3 \rangle &= \langle c_1, c_4 \rangle = 0 \\
\langle c_2, c_3 \rangle &= \langle c_2, c_4 \rangle = 0 \\
\langle c_3, c_4 \rangle &= 0
\end{aligned} \tag{2.4.24}$$

olacak şekilde

$$\begin{aligned}
c_1 &= (1, 0, 0, 0, 1), \quad c_2 = \left(-1, \frac{\sqrt{7}}{4}, 0, 0, -\frac{3}{4}\right), \\
c_3 &= \left(0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right), \quad c_4 = \left(-\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, -\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}\right)
\end{aligned}$$

şeklinde seçilebilir. Bu durumda gerçekten $|\gamma|^2 = 1$ ve $|\gamma'|^2 = 1$ olur. Öyleyse (2.4.16) diferansiyel denkleminin özel bir çözümü $k_1 = 5$ ve $k_2 = 2\sqrt{6}$ eğriliklerine sahip

$$\begin{aligned}
\gamma(s) &= (e^{2s} - e^{-2s} - \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}} \sin(\sqrt{6}s), \frac{\sqrt{7}}{4} e^{-2s} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\sqrt{6}s), \\
&\quad \frac{1}{2} \cos(\sqrt{6}s), \frac{1}{2} \cos(\sqrt{6}s), e^{2s} - \frac{3}{4} e^{-2s} - \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}} \sin(\sqrt{6}s))
\end{aligned}$$

ile verilen bir helistir. Bu helis, $S_1^4(1)$ Lorentzian birim küresi üzerinde, normal vektör alanı spacelike ve binormal vektör alanı timelike olan yay-parametresi ile parametrelendirilmiş bir özgün (has) biharmonik spacelike eğridir.

Önerme 2.4.3. $\gamma : I \rightarrow S_1^4(1)$ yay-parametresi ile parametrelendirilmiş geodezik olmayan bir spacelike eğri; $\{T, N, B_1, B_2\}$, N bir spacelike vektör alanı ve B_1 bir null (lightlike) vektör alanı olmak üzere $S_1^4(1)$ Lorentz birim küresi üzerinde γ eğrisi boyunca bir Frenet çatısı olsun. Bu durumda

$$\gamma^{(IV)} + 2\gamma'' = 0 \tag{2.4.25}$$

dır.

İspat. $\gamma : I \rightarrow S_1^4(1)$, normal vektör alanı N spacelike ve binormal vektör alanı B_1 null (lightlike) vektör olan yay-parametresi ile parametrelendirilmiş bir özgün (has) biharmonik spacelike eğri olsun. Bu durumda (2.2.5) kullanılarak

$$\begin{aligned}
\nabla_T^2 N &= \nabla_T(\nabla_T N) \\
&= \nabla_T(-k_1 T + k_2 B_1) \\
&= -k_1 \nabla_T T + k_2 \nabla_T B_1 \\
&= -k_1(k_1 N) + k_2(k_3 B_1) \\
&= -(k_1^2)N + (k_2 k_3) B_1 \\
&= -N
\end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca (2.2.3) ve (2.4.2) den

$$\begin{aligned}
\nabla_T^2 N &= \nabla_T(\nabla_T N) = \nabla_T(N' + \langle T, N \rangle \gamma) \\
&= \nabla_T N' = N'' + \langle T, N' \rangle \gamma \\
&= N'' + \langle T, \nabla_T N - \langle T, N \rangle \gamma \rangle \gamma \\
&= N'' + \langle T, \nabla_T N \rangle \gamma \\
&= N'' + \langle T, -k_1 T + k_2 B_1 \rangle \gamma \\
&= N'' - k_1 \gamma \\
&= N'' - \gamma
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu son iki eşitlikten

$$-N = N'' - \gamma \quad (2.4.26)$$

olur. Diğer taraftan $S_1^4(1)$ üzerindeki Gauss denkleminde faydalanarak

$$\nabla_T T = T' + \langle T, T \rangle \gamma = \gamma'' + \gamma$$

olduğu kolayca görülebilir. Buradan

$$N = \gamma'' + \gamma \quad (2.4.27)$$

bulunur. Böylece (2.4.27), (2.4.26) eşitliğinde kullanılırsa ispat tamamlanmış olur.

□

Teorem 2.4.2. $\gamma : I \rightarrow S_1^4(1)$ yay-parametresi ile parametrelendirilmiş geodezik olmayan bir biharmonik spacelike eğri; $\{T, N, B_1, B_2\}$, N bir spacelike vektör alanı ve B_1 bir null (lightlike) vektör alanı olmak üzere $S_1^4(1)$ Lorentz birim küresi üzerinde γ eğrisi boyunca bir Frenet çatısı olsun. Bu durumda $\gamma : I \rightarrow S_1^4(1)$ eğrisi yarıçapı $\frac{1}{\sqrt{2}}$ olan bir çemberdir.

İspat. (2.4.25) ile verilen diferansiyel denklemin çözümü, Teorem 2.4.1 (i) nin ispatında kullanılan yöntem izlenerek aynı şekilde elde edilir. $\square$

Şimdi $S_1^4(1)$ Lorentzian küresi üzerinde yay-parametresi ile parametrelendirilmiş geodezik olmayan bir biharmonik timelike eğri için aşağıdaki karakterizasyonu verelim:

Önerme 2.4.4. $\gamma : I \rightarrow S_1^4(1)$ yay-parametresi ile parametrelendirilmiş geodezik olmayan bir biharmonik timelike eğri olsun. Bu durumda

$$\gamma^{(IV)} - 2\gamma'' + (1 - k_1^2)\gamma = 0 \quad (2.4.28)$$

dır. Burada $k_1 : I \rightarrow \mathbb{R}$, γ eğrisinin birinci eğrilik fonksiyonudur.

İspat. $\gamma : I \rightarrow S_1^4(1)$ yay-parametresi ile parametrelendirilmiş geodezik olmayan bir biharmonik timelike eğri olsun. Bu durumda (2.2.16) ile verilen Frenet denklemleri kullanılarak

$$\begin{aligned} \nabla_T^2 N &= \nabla_T(\nabla_T N) \\ &= \nabla_T(k_1 T + k_2 B_1) \\ &= k_1 \nabla_T T + k_2 \nabla_T B_1 \\ &= k_1(k_1 N) + k_2(-k_2 N + k_3 B_2) \\ &= (k_1^2 - k_2^2)N + (k_2 k_3) B_1 \\ &= N \end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca (2.2.16) ve (2.4.2) den

$$\begin{aligned}
\nabla_T^2 N &= \nabla_T(\nabla_T N) = \nabla_T(N' + \langle T, N \rangle \gamma) \\
&= \nabla_T N' = N'' + \langle T, N' \rangle \gamma \\
&= N'' + \langle T, \nabla_T N - \langle T, N \rangle \gamma \rangle \gamma \\
&= N'' + \langle T, \nabla_T N \rangle \gamma \\
&= N'' + \langle T, -k_1 T + k_2 B_1 \rangle \gamma \\
&= N'' + k_1 \gamma
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu son iki eşitlikten

$$N = N'' + k_1 \gamma \quad (2.4.29)$$

olur. Diğer taraftan $S_1^4(1)$ üzerindeki Gauss denkleminden faydalanarak

$$\nabla_T T = T' + \langle T, T \rangle \gamma = \gamma'' - \gamma$$

olduğu kolayca görülebilir. Buradan

$$N = \frac{1}{k_1} (\gamma'' - \gamma) \quad (2.4.30)$$

bulunur. Böylece (2.4.30), (2.4.29) eşitliğinde kullanılırsa ispat tamamlanmış olur. $\square$

Bu kısımda son olarak (2.4.28) diferansiyel denkleminin çözümlerini inceleyelim:

(i) Eğer $k_1 = 1$ ise (2.4.28) ile verilen diferansiyel denklem

$$\gamma^{(IV)} - 2\gamma'' = 0 \quad (2.4.31)$$

diferansiyel denkleme dönüşür. (2.4.31) diferansiyel denkleminin karakteristik denklemini

$$m^4 - 2m^2 = 0$$

olur. Bu karakteristik denklemin kökleri

$$m_1 = m_2 = 0, \quad m_3 = \sqrt{2} \quad \text{ve} \quad m_4 = -\sqrt{2}$$

şeklindedir. Böylece (2.4.28) diferansiyel denkleminin genel çözümü

$$\gamma(s) = c_1 + c_2 s + c_3 e^{-\sqrt{2}s} + c_4 e^{\sqrt{2}s} \quad (2.4.32)$$

dir. Burada c_1, c_2, c_3 ve c_4 sabit vektörlerdir. $|\gamma|^2 = 1$ ve $|\gamma'|^2 = 1$ olduğundan

$$\begin{aligned} \langle c_1, c_1 \rangle &= \frac{1}{2}, \\ \langle c_2, c_2 \rangle &= \langle c_3, c_3 \rangle = \langle c_4, c_4 \rangle = 0, \\ \langle c_1, c_2 \rangle &= \langle c_1, c_3 \rangle = \langle c_1, c_4 \rangle = 0, \\ \langle c_2, c_3 \rangle &= \langle c_2, c_4 \rangle = 0, \\ \langle c_3, c_4 \rangle &= \frac{1}{4} \end{aligned} \quad (2.4.33)$$

olacak şekilde

$$\begin{aligned} c_1 &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, 0, 1 \right), \quad c_2 = (0, 0, 0, 0, 0), \\ c_3 &= \left(-1, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right), \quad c_4 = \left(1, -\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \end{aligned}$$

şeklinde seçilebilir. Öyleyse (2.4.31) diferansiyel denkleminin özel bir çözümü

$$\gamma(s) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - e^{-\sqrt{2}s} + e^{\sqrt{2}s}, \frac{e^{-\sqrt{2}s}}{\sqrt{2}} - \frac{e^{\sqrt{2}s}}{2\sqrt{2}}, \frac{e^{\sqrt{2}s}}{2\sqrt{2}}, \frac{e^{\sqrt{2}s}}{2}, 1 - \frac{e^{-\sqrt{2}s}}{\sqrt{2}} + \frac{e^{\sqrt{2}s}}{2\sqrt{2}} \right)$$

olur.

(ii) Eğer $k_1 > 1$ ise (2.4.28) ile verilen diferansiyel denklemin karakteristik denklemi

$$m^4 - 2m^2 - k_2^2 = 0 \quad (2.4.34)$$

olur. $m^2 = t$ dersek (2.4.34) denklemi

$$t^2 - 2t - k_2^2 = 0 \quad (2.4.35)$$

denkleminde indirgenir. (2.4.35) denkleminin diskriminantı $\Delta = 4(1+k_2^2)$ olduğundan bu denklemin kökleri t_1 ve t_2 olmak üzere

$$t_1 = 1 + k_1, \quad (t_1 > 0)$$

$$t_2 = 1 - k_1, \quad (t_2 < 0)$$

dir. Buradan $m^2 = t$ olduğu göz önüne alınırsa (2.4.34) karakteristik denkleminin kökleri

$$m_1 = \sqrt{1+k_1}, \quad m_2 = -\sqrt{1+k_1}, \quad m_3 = -i\sqrt{k_1-1} \quad \text{ve} \quad m_4 = i\sqrt{k_1-1}$$

şeklindedir. Böylece $\sqrt{1+k_1} = a$ ve $\sqrt{k_1-1} = b$ olmak üzere (2.4.28) diferansiyel denkleminin genel çözümü

$$\gamma(s) = c_1 e^{as} + c_2 e^{-as} + c_3 \cos(bs) + c_4 \sin(bs) \quad (2.4.36)$$

olur. Böylece $|\gamma|^2 = 1$ ve $|\gamma'|^2 = 1$ olacak şekilde c_1, c_2, c_3 ve c_4 sabit vektörlerini belirleyerek (2.4.28) diferansiyel denkleminin özel bir çözümünü bulalım:

c_1, c_2, c_3, c_4 sabit vektörleri $a = 2, b = \sqrt{2}$ ve

$$\begin{aligned} \langle c_1, c_1 \rangle &= \langle c_2, c_2 \rangle = 0, \\ \langle c_3, c_3 \rangle &= \langle c_4, c_4 \rangle = \frac{1}{2}, \\ \langle c_1, c_2 \rangle &= \frac{1}{4}, \\ \langle c_1, c_3 \rangle &= \langle c_1, c_4 \rangle = 0 \\ \langle c_2, c_3 \rangle &= \langle c_2, c_4 \rangle = 0 \\ \langle c_3, c_4 \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (2.4.37)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} c_1 &= (1, 0, 0, 0, 1), \quad c_2 = \left(-1, \frac{\sqrt{7}}{4}, 0, 0, -\frac{3}{4}\right), \\ c_3 &= \left(0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right), \quad c_4 = \left(-\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, -\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

şeklinde seçilebilir. Bu durumda gerçekten $|\gamma|^2 = 1$ ve $|\gamma'|^2 = 1$ olur. Öyleyse (2.4.28) diferansiyel denkleminin özel bir çözümü $k_1 = 3$ ve $k_2 = 2\sqrt{2}$ eğriliklerine sahip

$$\begin{aligned} \gamma(s) &= (e^{2s} - e^{-2s} - \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}} \sin(\sqrt{2}s), \frac{\sqrt{7}}{4} e^{-2s} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\sqrt{2}s), \\ &\quad \frac{1}{2} \cos(\sqrt{2}s), \frac{1}{2} \cos(\sqrt{2}s), e^{2s} - \frac{3}{4} e^{-2s} - \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}} \sin(\sqrt{2}s)) \end{aligned}$$

ile verilen bir helistir. Bu helis, $S_1^4(1)$ Lorentzian birim küresi üzerinde yay-parametre-
si ile parametrelendirilmiş bir özgün (has) biharmonik timelike eğridir.

BÖLÜM 3

LORENTZIAN HEMEN HEMEN

PARAKONTAKT

MANİFOLDLARIN HİPERYÜZEYLERİ

Bu bölüm beş kısımdan oluşmaktadır. İlk kısımda bir $(\overline{M}, \varphi, \xi, \eta)$ hemen hemen parakontakt manifoldunun $\xi \notin \Gamma(TM)$ olacak şekildeki non-invariant M hiperyüzeyleri incelenerek bu hiperyüzeylerin $\overline{M}$ deki hemen hemen parakontakt yapıdan indirgenen bir hemen hemen çarpım yapısına sahip oldukları gösterildi. İkinci kısım afin kosimplektik hemen hemen parakontakt manifoldların ve normal hemen hemen parakontakt manifoldların hiperyüzeylerine ayrıldı. Üçüncü kısımda bir $(\overline{M}, \varphi, \xi, \eta, \bar{g})$ Lorentzian hemen hemen parakontakt manifoldunun ve özel olarak Lorentzian para-Sasakian manifoldunun sırasıyla, $\xi \notin \Gamma(TM)$ olacak şekildeki non-invariant hiperyüzeyleri ve $\xi \in \Gamma(TM)$ olacak şekildeki invariant hiperyüzeyleri araştırıldı. Dördüncü kısımda, bir önceki kısımda karakterize edilen hiperyüzeyler için örnekler verildi. Son kısımda ise Lorentzian para-Sasakian manifoldlarının sırasıyla, spacelike ve timelike hiperyüzeylerinin özgün biharmonik olması için gerek ve yeter şartlar incelendi.

3.1 Hemen Hemen Parakontakt Manifoldların

Non-Invariant Hiperyüzeyleri

Bu kısımda bir hemen hemen parakontakt manifoldun, karakteristik vektör alanı hiperyüzeye ait olmayacak şekildeki non-invariant hiperyüzeylerinin bir hemen hemen çarpım yapısına sahip olduğu gösterilerek bu tipteki hiperyüzeylerin bir lokal çarpım manifoldu olması için gerek şartlar araştırılacaktır. Ayrıca esas manifold üzerindeki hemen hemen parakontakt yapının normal olması ile non-invariant hiperyüzey üzerine indirgenen hemen hemen çarpım yapısının integrallenebilirliği arasındaki ilişki verilecektir.

$\overline{M}, (\varphi, \xi, \eta)$ hemen hemen parakontakt yapısına sahip n -boyutlu bir hemen hemen parakontakt manifold ve M de $\overline{M}$ nin bir hiperyüzeyi olsun.

$$i : M \rightarrow \overline{M}$$

bir immersiyon olmak üzere her $p \in M$ için $\xi_{i(p)}$ vektörünün M hiperyüzeyinin teğet hiperdüzlemine ait olmadığını düşünelim. Bu durumda herhangi bir $X \in \Gamma(TM)$ için

$$\varphi i_* X = i_* JX + \alpha(X)\xi \quad (3.1.1)$$

yazılabilir. Burada J , (1,1)-tipinde bir tensör alanı, α bir 1-form ve $i_*, i : M \rightarrow \overline{M}$ immersiyonunun türev dönüşümüdür. Eğer $\alpha \neq 0$ ise M ye $\overline{M}$ nin bir non-invaryant hiperyüzeyi denir. Diğer taraftan eğer $\alpha = 0$ ise M ye $\overline{M}$ nin bir invaryant hiperyüzeyi denir [49].

Teorem 3.1.1. $(\overline{M}, \varphi, \xi, \eta)$, $\text{boy} \overline{M} = n$, bir hemen hemen parakontakt manifold ve M de $\overline{M}$ nin $\xi \notin \Gamma(TM)$ olacak şekilde bir non-invaryant hiperyüzeyi olsun. Bu durumda M üzerinde bir hemen hemen çarpım yapısı vardır.

İspat. $\overline{M}, (\varphi, \xi, \eta)$ hemen hemen parakontakt yapıma sahip n -boyutlu bir manifold ve M de $\overline{M}$ nin bir non-invaryant hiperyüzeyi olsun. $\xi \notin \Gamma(TM)$ alalım. (3.1.1) eşitliğinin her iki tarafına φ uygulanır ve (1.3.1)-(1.3.4) kullanılırsa her $X \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned} \varphi^2(i_* X) &= \varphi(i_* JX) + \alpha(X)\varphi\xi \\ i_* X + \eta(i_* X)\xi &= i_*(J^2 X) + \alpha(JX)\xi \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

elde edilir. (3.1.2) den

$$J^2 X = X \quad (3.1.3)$$

ve

$$\alpha(JX) = \eta(i_* X) = i^*(\eta(X)) \quad (3.1.4)$$

bulunur. Burada i^*, i_* türev dönüşümünün dual dönüşümüdür. (3.1.3) den J nin M üzerinde bir hemen hemen çarpım yapısı olduğu görülür. Böylece ispat tamamlanır.

□

$\overline{M}$ hemen hemen parakontakt manifoldunun bir M hiperyüzeyi üzerinde

$$C\alpha(X) = \alpha(JX), \quad X \in \Gamma(TM) \quad (3.1.5)$$

şeklinde bir $C\alpha$ 1-formu tanımlayalım. Bu durumda (3.1.4) den

$$C\alpha = i^*\eta \quad (3.1.6)$$

yazılabilir. Böylece M hiperyüzeyi $\alpha = 0$ iken φ altında invaryant kalır.

Şimdi $\overline{M}$ hemen hemen parakontakt manifoldu üzerinde bir $\overline{\nabla}$ simetrik afin konneksiyonu gözönüne alalım. Bu durumda $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\overline{\nabla}_{i_*X} i_*Y = i_*\nabla_X Y + h(X, Y)\xi \quad (3.1.7)$$

olacak şekilde M üzerinde ξ afin normaline göre bir ∇ afin konneksiyonu tanımlanabilir. Burada h , M üzerinde (0,2)-tipinde simetrik bir tensör alanıdır ve M nin ξ ye göre ikinci temel formu olarak adlandırılır.

$\overline{M}$ hemen hemen parakontakt manifoldu üzerindeki (φ, ξ, η) hemen hemen parakontakt yapısı normal olsun. Bu durumda $\forall \overline{X}, \overline{Y} \in \Gamma(T\overline{M})$ için

$$\begin{aligned} S(\overline{X}, \overline{Y}) &= [\varphi\overline{X}, \varphi\overline{Y}] - \varphi[\varphi\overline{X}, \overline{Y}] - \varphi[\overline{X}, \varphi\overline{Y}] \\ &\quad + \varphi^2[\overline{X}, \overline{Y}] + d\eta(\overline{X}, \overline{Y})\xi \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

ile tanımlanan $\overline{M}$ nin (1,2)-tipindeki S torsiyon alanı sıfırdır. (3.1.8) eşitliğinde $\overline{Y} = \xi$ alınırsa

$$\mathcal{L}_\xi\varphi = 0 \quad \text{ve} \quad \mathcal{L}_\xi\eta = 0 \quad (3.1.9)$$

elde edilir. Burada $\mathcal{L}_\xi$, ξ karakteristik vektör alanına göre Lie türev operatörüdür. (3.1.8) eşitliğinden

$$\begin{aligned} S(\overline{X}, \overline{Y}) &= \overline{\nabla}_{\varphi\overline{X}}(\varphi\overline{Y}) - \overline{\nabla}_{\varphi\overline{Y}}(\varphi\overline{X}) - \varphi(\overline{\nabla}_{\varphi\overline{X}}\overline{Y} - \overline{\nabla}_{\overline{Y}}(\varphi\overline{X})) \\ &\quad - \varphi(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\varphi\overline{Y} - \overline{\nabla}_{\varphi\overline{Y}}\overline{X}) + \varphi^2(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \overline{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{X}) \\ &\quad + (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\eta(\overline{Y}) - \overline{\nabla}_{\overline{Y}}\eta(\overline{X}) - \eta([\overline{X}, \overline{Y}]))\xi \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

veya

$$\begin{aligned} S(\overline{X}, \overline{Y}) &= (\overline{\nabla}_{\varphi\overline{X}}\varphi)\overline{Y} - (\overline{\nabla}_{\varphi\overline{Y}}\varphi)\overline{X} + \varphi(\overline{\nabla}_{\overline{Y}}\varphi)\overline{X} - \varphi(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\varphi)\overline{Y} \\ &\quad + [(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\eta)\overline{Y} - (\overline{\nabla}_{\overline{Y}}\eta)\overline{X}]\xi \end{aligned} \quad (3.1.11)$$

yazılabilir. $X, Y \in \Gamma(TM)$ olmak üzere (3.1.11) eşitliğinde $\bar{X} = i_*X$ ve $\bar{Y} = i_*Y$ alalım. Buradan (3.1.1) ve (3.1.7) kullanılarak

$$\begin{aligned}
S(i_*X, i_*Y) &= (\bar{\nabla}_{i_*JX+\alpha(X)\xi}\varphi)i_*Y - (\bar{\nabla}_{i_*JY+\alpha(Y)\xi}\varphi)i_*X \\
&\quad + \varphi(\bar{\nabla}_{i_*Y}\varphi)i_*X - \varphi(\bar{\nabla}_{i_*X}\varphi)i_*Y + ((\bar{\nabla}_{i_*X}\eta)i_*Y - (\bar{\nabla}_{i_*Y}\eta)i_*X)\xi \\
&= (\bar{\nabla}_{i_*JX}\varphi + \alpha(X)\bar{\nabla}_\xi\varphi)i_*Y - (\bar{\nabla}_{i_*JY}\varphi + \alpha(Y)\bar{\nabla}_\xi\varphi)i_*X \\
&\quad + \varphi(\bar{\nabla}_{i_*Y}\varphi)i_*X - \varphi(\bar{\nabla}_{i_*X}\varphi)i_*Y + ((\bar{\nabla}_{i_*X}\eta)i_*Y - (\bar{\nabla}_{i_*Y}\eta)i_*X)\xi \\
&= \bar{\nabla}_{i_*JX}\varphi(i_*Y) - \varphi(\bar{\nabla}_{i_*JX}i_*Y) + \alpha(X)\bar{\nabla}_\xi\varphi(i_*Y) - \alpha(X)\varphi(\bar{\nabla}_\xi i_*Y) \\
&\quad - \bar{\nabla}_{i_*JY}\varphi(i_*X) + \varphi(\bar{\nabla}_{i_*JY}i_*X) - \alpha(Y)\bar{\nabla}_\xi\varphi(i_*X) + \alpha(Y)\varphi(\bar{\nabla}_\xi i_*X) \\
&\quad + \varphi(\bar{\nabla}_{i_*Y}\varphi(i_*X) - \varphi(\bar{\nabla}_{i_*X}i_*X) - \bar{\nabla}_{i_*X}\varphi(i_*Y) + \varphi(\bar{\nabla}_{i_*Y}i_*X)) \\
&\quad + [\bar{\nabla}_{i_*X}\eta(i_*Y) - \eta(\bar{\nabla}_{i_*X}i_*Y) - \bar{\nabla}_{i_*Y}\eta(i_*X) + \eta(\bar{\nabla}_{i_*Y}i_*X)]\xi \\
&= \bar{\nabla}_{i_*JX}(i_*JY + \alpha(Y)\xi) - \varphi(i_*\nabla_{JX}Y + h(JX, Y)\xi) \\
&\quad - \bar{\nabla}_{i_*JY}(i_*JX + \alpha(X)\xi) + \varphi(i_*\nabla_{JY}X + h(JY, X)\xi) \\
&\quad + \alpha(X)(\bar{\nabla}_\xi\varphi)i_*Y - \alpha(Y)(\bar{\nabla}_\xi\varphi)i_*X \\
&\quad + \varphi[\bar{\nabla}_{i_*Y}(i_*JX + \alpha(X)\xi) - \varphi(i_*\nabla_XY + h(X, Y)\xi)] \\
&\quad - \varphi[\bar{\nabla}_{i_*X}(i_*JY + \alpha(Y)\xi) - \varphi(i_*\nabla_YX + h(Y, X)\xi)] \\
&\quad + [\bar{\nabla}_{i_*X}((\alpha \circ J)Y) - \eta(i_*\nabla_XY + h(X, Y)\xi)]\xi \\
&\quad - [\bar{\nabla}_{i_*Y}((\alpha \circ J)X) - \eta(i_*\nabla_YX + h(Y, X)\xi)]\xi
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
S(i_*X, i_*Y) &= i_*\nabla_{JX}JY + \nabla_{JX}(\alpha(Y))\xi + \alpha(Y)\bar{\nabla}_{\varphi i_*X - \alpha(X)\xi}\xi \\
&\quad - i_*J\nabla_{JX}Y - \alpha(\nabla_{JX}Y)\xi + \alpha(X)(\bar{\nabla}_\xi\varphi)i_*Y \\
&\quad - i_*\nabla_{JY}JX - \nabla_{JY}(\alpha(X))\xi - \alpha(X)\bar{\nabla}_{\varphi i_*Y - \alpha(Y)\xi}\xi \\
&\quad + i_*J\nabla_{JY}X + \alpha(\nabla_{JY}X)\xi - \alpha(Y)(\bar{\nabla}_\xi\varphi)i_*X \\
&\quad + i_*J(\nabla_YJX) + \alpha(\nabla_YJX)\xi + \alpha(X)\varphi(\bar{\nabla}_{i_*Y}\xi) - i_*\nabla_XY \\
&\quad - i_*J(\nabla_XJY) - \alpha(\nabla_XJY)\xi - \alpha(Y)\varphi(\bar{\nabla}_{i_*X}\xi) + i_*\nabla_YX \\
&\quad + [\nabla_X((\alpha \circ J)Y) - \nabla_Y((\alpha \circ J)X)]\xi \\
&\quad - 2[\eta(i_*\nabla_XY) - \eta(i_*\nabla_YX)]\xi.
\end{aligned}$$

bulunur. Bu son eşitliği yeniden düzenlersek

$$\begin{aligned}
S(i_*X, i_*Y) &= i_*\{\nabla_{JX}JY - \nabla_{JY}JX - J(\nabla_{JX}Y - \nabla_YJX) \\
&\quad - J(\nabla_XJY - \nabla_{JY}X) - (\nabla_YX - \nabla_XY)\} \\
&\quad + (\bar{\nabla}_\xi\varphi + \varphi\bar{\nabla}\xi - (\bar{\nabla}\xi)\varphi)(\alpha(X)i_*Y - \alpha(Y)i_*X) \\
&\quad + \{\nabla_{JX}(\alpha(Y)) - \nabla_{JY}(\alpha(X)) - \alpha(\nabla_{JX}Y) + \alpha(\nabla_{JY}X) \\
&\quad - \alpha(\nabla_XJY) + \alpha(\nabla_YJX) + \nabla_X((\alpha \circ j)Y) - \nabla_Y((\alpha \circ j)X)\}\xi \\
&\quad - 2[\eta(i_*(\nabla_XY - \nabla_YX))]\xi \\
&= i_*\{[JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY] - [X, Y]\} \\
&\quad + L_\xi\varphi\{\alpha(X)i_*Y - \alpha(Y)i_*X\} \\
&\quad + \{(\nabla_{JX}\alpha)Y - (\nabla_{JY}\alpha)X + (\nabla_X\alpha)(JY) - (\nabla_Y\alpha)(JX)\}\xi \\
&\quad - 2[\eta(i_*(\nabla_XY - \nabla_YX))]\xi \\
&= i_*[J, J](X, Y) + \mathcal{L}_\xi\varphi\{\alpha(X)i_*Y - \alpha(Y)i_*X\} \\
&\quad + \{d\alpha(JX, Y) + d\alpha(X, JY) - 2i^*\eta([X, Y])\}\xi
\end{aligned} \tag{3.1.12}$$

olur.

Teorem 3.1.2. $(\bar{M}, \varphi, \xi, \eta)$ bir normal hemen hemen parakontakt manifold ve M de $\bar{M}$ nin $\xi \notin \Gamma(TM)$ olacak şekilde bir non-invariant hiperyüzeyi olsun. Bu durumda M hiperyüzeyi diferensiyeli

$$d\alpha(JX, Y) + d\alpha(X, JY) = 2C\alpha([X, Y]), \quad \forall X, Y \in \Gamma(TM) \tag{3.1.13}$$

şartını sağlayan bir $\alpha = C^{-1}i^*\eta$ 1-formuna sahip lokal çarpım manifoldudur.

İspat. $\bar{M}$ hemen hemen parakontakt manifoldu üzerindeki (φ, ξ, η) hemen hemen parakontakt yapısı normal olsun. Bu durumda $\bar{M}$ nin (1,2)-tipindeki S torsiyon alanı sıfır olacağından (3.1.9) ve (3.1.12) eşitliğinden

$$0 = i_*[J, J](X, Y) + \{d\alpha(JX, Y) + d\alpha(X, JY) - 2i^*\eta([X, Y])\}\xi \tag{3.1.14}$$

olur. Bu son eşitliğin teğet ve normal kısımları göz önüne alınırsa

$$d\alpha(JX, Y) + d\alpha(X, JY) = 2i^*\eta([X, Y]) = 2C\alpha([X, Y]), \quad \forall X, Y \in \Gamma(TM)$$

olduğu görülür. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

Sonuç 3.1.1. $(\overline{M}, \varphi, \xi, \eta)$ bir normal hemen hemen parakontakt manifold ve M de $\overline{M}$ nin $\xi \notin \Gamma(TM)$ olacak şekilde bir invaryant hiperyüzeyi olsun. Bu durumda M nin hemen hemen çarpım yapısı J integrallenebilir.

İspat. $\overline{M}$ hemen hemen parakontakt manifoldu üzerindeki (φ, ξ, η) hemen hemen parakontakt yapısı normal ve M de $\overline{M}$ nin $\xi \notin \Gamma(TM)$ olacak şekilde bir invaryant hiperyüzeyi ise $\alpha = 0$ olduğundan (3.1.14) den $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$0 = i_*[J, J](X, Y)$$

elde edilir. Öyleyse J hemen hemen çarpım yapısının Nijenhuis tensör alanı $[J, J] = 0$ yani J integrallenebilir. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

Teorem 3.1.3. $(\overline{M}, \varphi, \xi, \eta)$ bir hemen hemen parakontakt manifold ve $\xi, (\varphi, \xi, \eta)$ hemen hemen parakontakt yapısının bir infinitesimal otomorfizmi olsun. Eğer $\overline{M}$ nin her non-invaryant hiperyüzeyi için indirgenmiş hemen hemen çarpım yapısı integrallenebilir ve (3.1.13) sağlanıyor ise $\overline{M}$ normaldir.

İspat. $\xi, \overline{M}$ üzerindeki (φ, ξ, η) hemen hemen parakontakt yapısının bir infinitesimal otomorfizmi ise

$$\mathcal{L}_\xi \varphi = 0 \tag{3.1.15}$$

dır. Diğer taraftan $\overline{M}$ nin herhangi bir M non-invaryant hiperyüzeyi için indirgenmiş hemen hemen çarpım yapısı integrallenebilir ise

$$[J, J] = 0 \tag{3.1.16}$$

olur. Böylece (3.1.15), (3.1.16) ve (3.1.13) den ispat tamamlanır. $\square$

3.2 Afın Kosimplektik ve Normal Hemen Hemen Parakontakt Manifoldların İnvaryant ve Non-İnvaryant Hiperyüzeyleri

Bu kısımda afın kosimplektik hemen hemen parakontakt manifoldların karakteristik vektör alanı hiperyüzeye ait olmayacak şekildeki non-invaryant hiperyüzeylerinin

total flat olduğu gösterilecektir. Ayrıca normal hemen hemen parakontakt manifoldların aynı tipteki hiperyüzeyleri için bazı karakterizasyonlar verilecektir.

$\overline{M}, (\varphi, \xi, \eta)$ hemen hemen parakontakt yapısına sahip bir hemen hemen parakontakt manifold ve $\overline{\nabla}$ de $\overline{M}$ nin simetrik afin konneksiyonu olsun. $\overline{M}$ nin $\xi \notin \Gamma(TM)$ olacak şekildeki bir non-invariant M hiperyüzeyi üzerindeki indirgenmiş konneksiyonu ∇ ile gösterelim. Eğer herhangi $X, Y \in \Gamma(TM)$ vektör alanları için

$$(\nabla_X i_*) Y = \overline{\nabla}_{i_* X} i_* Y - i_* (\nabla_X Y) \quad (3.2.1)$$

yazılırsa Gauss ve Weingarten formülleri sırasıyla

$$(\nabla_X i_*) Y = h(X, Y)\xi, \quad h(X, Y) = h(Y, X) \quad (3.2.2)$$

ve

$$\overline{\nabla}_{i_* X} \xi = -i_* AX + w(X)\xi \quad (3.2.3)$$

şeklinde ifade edilir. Burada w , M nin afin normal demeti üzerindeki konneksiyonu veren 1-formdur. (3.1.1), (3.2.2) ve (3.2.3) eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned} (\overline{\nabla}_{i_* X} \varphi) i_* Y &= \overline{\nabla}_{i_* X} \varphi i_* Y - \varphi (\overline{\nabla}_{i_* X} i_* Y) \\ &= \overline{\nabla}_{i_* X} (i_* JY + \alpha(Y)\xi) - \varphi (i_* \nabla_X Y + h(X, Y)\xi) \\ &= \overline{\nabla}_{i_* X} i_* JY + (i_* X) (\alpha(Y)) \xi + \alpha(Y) \overline{\nabla}_{i_* X} \xi \\ &\quad - i_* J (\nabla_X Y) - \alpha (\nabla_X Y) \xi \\ &= i_* \nabla_X JY + h(X, JY)\xi + (i_* X) (\alpha(Y)) \xi \\ &\quad + \alpha(Y) (-i_* AX + w(X)\xi) - i_* J (\nabla_X Y) - \alpha (\nabla_X Y) \xi \\ &= i_* (\nabla_X JY - J (\nabla_X Y)) + h(X, JY)\xi + (i_* X) (\alpha(Y)) \xi \\ &\quad - \alpha(Y) (i_* AX) + \alpha(Y) w(X)\xi - \alpha (\nabla_X Y) \xi \\ &= i_* ((\nabla_X J)Y - \alpha(Y)AX) \\ &\quad + (h(X, JY) + (\nabla_X \alpha) Y + \alpha(Y)w(X)) \xi \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

elde edilir. Böylece aşağıdaki iki durumu inceleyebiliriz:

I.Durum: $\overline{M}$ bir afin kosimplektik hemen hemen parakontakt manifold olsun. Bu durumda

$$\overline{\nabla} \varphi = 0 \quad \text{ve} \quad \overline{\nabla} \eta = 0 \quad (3.2.5)$$

olacağından (3.1.11) dan $\overline{M}$ üzerindeki (φ, ξ, η) hemen hemen parakontakt yapısının normal olduğu kolaylıkla görülür. (1.3.1)-(1.3.2) den $X \in \Gamma(TM)$ ve $\overline{Y} \in \Gamma(T\overline{M})$ vektör alanları için

$$(\overline{\nabla}_{i_*X}\varphi) \overline{Y} = \overline{\nabla}_{i_*X}\varphi\overline{Y} - \varphi(\overline{\nabla}_{i_*X}\overline{Y})$$

dir. Bu son eşitlikte $\overline{Y}$ yerine ξ alınırsa $\overline{\nabla}\varphi = 0$ olduğundan

$$\varphi(\overline{\nabla}_{i_*X}\xi) = 0 \quad (3.2.6)$$

bulunur. Diğer taraftan

$$(\overline{\nabla}_{i_*X}\eta) \overline{Y} = i_*X(\eta(\overline{Y})) - \eta(\overline{\nabla}_{i_*X}\overline{Y})$$

ifadesinde $\overline{Y}$ yerine ξ alınırsa $\overline{\nabla}\eta = 0$ olduğundan

$$\eta(\overline{\nabla}_{i_*X}\xi) = 0 \quad (3.2.7)$$

elde edilir. (3.2.6) eşitliğinin her iki tarafına φ uygulanır ve (3.2.7) eşitliği göz önüne alınırsa

$$0 = \overline{\nabla}_{i_*X}\xi$$

olur. Böylece (3.2.3) Weingarten denkleminde

$$AX = 0 \quad \text{ve} \quad w(X) = 0 \quad (3.2.8)$$

elde edilir. (3.2.8), (3.2.4) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\nabla J = 0, \quad (3.2.9)$$

$$(\nabla_X\alpha)Y = -h(X, JY) \quad (3.2.10)$$

bulunur.

II.Durum: $\overline{M}$, $\varphi = \overline{\nabla}\xi$ şartını sağlayan bir normal hemen hemen parakontakt manifold olsun. Bu durumda (3.1.1) ve (3.2.3) den her $X \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned} \varphi i_*X &= \overline{\nabla}_{i_*X}\xi \\ i_*JX + \alpha(X)\xi &= -i_*AX + w(X)\xi \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

elde edilir. (3.2.11) eşitliğinin teğet ve normal kısımları eşitlenirse

$$JX = -AX \quad \text{ve} \quad \alpha(X) = w(X)$$

bulunur. Böylece

$$J = -A, \quad (3.2.12)$$

$$\alpha = w \quad (3.2.13)$$

olur.

Eğer her $X \in \Gamma(TM)$ için $AX = 0$ ise (3.2.3) den $\bar{\nabla}_{i_*X}\xi$ ile ξ karakteristik vektör alanının lineer bağımlı olduğu görülür. Dolayısıyla afin normaller M hiperyüzeyi boyunca paralel olur. Bu durumda M hiperyüzeyi total flat olarak adlandırılır.

Önerme 3.2.1. $\bar{M}, (\varphi, \xi, \eta)$ hemen hemen parakontakt yapısına sahip bir afin kosimp-
lektik hemen hemen parakontakt manifold ve $M, \bar{M}$ nin $\xi \notin \Gamma(TM)$ olacak şekildeki
bir non-invaryant hiperyüzeyi olsun. Bu durumda M hiperyüzeyi total flattir ve

$$\begin{aligned} \nabla J &= 0, \\ (\nabla_X \alpha) Y &= -h(X, JY), \\ w &= 0 \end{aligned}$$

dır.

Eğer M hiperyüzeyi invaryant ise $\alpha = 0$ olacağından aşağıdaki sonuca ulaşılır:

Sonuç 3.2.1. $\bar{M}, (\varphi, \xi, \eta)$ hemen hemen parakontakt yapısına sahip bir afin kosimp-
lektik hemen hemen parakontakt manifold ve $M, \bar{M}$ nin $\xi \notin \Gamma(TM)$ olacak şekildeki
bir invaryant hiperyüzeyi olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \nabla J &= 0, \\ h &= 0, \\ w &= 0 \end{aligned}$$

dır.

Önerme 3.2.2. $\bar{M}, \varphi = \bar{\nabla}\xi$ şartını sağlayan bir normal hemen hemen parakontakt
manifold ve M de $\bar{M}$ nin $\xi \notin \Gamma(TM)$ olacak şekildeki bir non-invaryant hiperyüzeyi
olsun. Bu durumda

$$J = -A, \quad \alpha = w$$

dır.

3.3 Lorentzian Hemen Hemen Parakontakt Manifoldların İnvaryant ve Non-İnvaryant Hiperyüzeyleri

Bu kısımda Lorentzian hemen hemen parakontakt manifoldların karakteristik vektör alanı hiperyüzeye ait olmayacak şekildeki non-invaryant hiperyüzeylerinin hemen hemen çarpım metrik manifoldu olduğu gösterilerek esas manifold ile hiperyüzeyin temel 2-formları arasındaki ilişki incelenecektir. Ayrıca Lorentzian para-Sasakian manifoldların aynı tipteki non-invaryant hiperyüzeyleri için bazı karakterizasyonlar verilerek bu hiperyüzeylerin lokal çarpım yapısına sahip olması için gerek ve yeter şartlar araştırılacaktır. Son olarak, Lorentzian hemen hemen parakontakt manifoldların karakteristik vektör alanını teğette kabul eden invaryant hiperyüzeylerinin Lorentzian hemen hemen parakontakt manifoldlar olduğu ve Lorentzian para-Sasakian manifoldların aynı tipteki invaryant hiperyüzeylerinin ise Lorentzian para-Sasakian yapıya sahip olduğu gösterilecektir.

$\overline{M}, (\varphi, \xi, \eta, \overline{g})$ Lorentzian hemen hemen parakontakt yapısına sahip bir Lorentzian hemen hemen parakontakt manifold olsun. $M, \overline{M}$ nin bir hiperyüzeyi olmak üzere M üzerine indirgenmiş metriği g ile gösterelim.

Önerme 3.3.1. $(M, J, \alpha, g), (\overline{M}, \varphi, \xi, \eta, \overline{g})$ Lorentzian hemen hemen parakontakt manifoldunun $\xi \notin \Gamma(TM)$ olacak şekildeki bir non-invaryant hiperyüzeyi olsun. Bu durumda (M, J, α, g) non-invaryant hiperyüzeyi üzerinde

$$G = g + \alpha \otimes \alpha \quad (3.3.1)$$

olacak şekilde bir G hemen hemen çarpım metriği vardır.

İspat. (1.3.14) eşitliğinden her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\overline{g}(\varphi i_* X, i_* Y) = \overline{g}(i_* X, \varphi i_* Y) \quad (3.3.2)$$

yazılabilir. (3.1.1), (3.3.2) da yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \overline{g}(i_* JX + \alpha(X)\xi, i_* Y) &= \overline{g}(i_* X, i_* JY + \alpha(Y)\xi) \\ \overline{g}(i_* JX, i_* Y) + \alpha(X)\overline{g}(\xi, i_* Y) &= \overline{g}(i_* X, i_* JY) + \alpha(Y)\overline{g}(i_* X, \xi) \\ \overline{g}(i_* JX, i_* Y) + \alpha(X)\eta(i_* Y) &= \overline{g}(i_* X, i_* JY) + \alpha(Y)\eta(i_* X) \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

elde edilir. g , M hiperyüzeyi üzerinde indirgenmiş metrik yani $i^*\bar{g} = g$ olduğundan

$$\bar{g}(i_*X, i_*Y) = g(X, Y) \quad (3.3.4)$$

dir. Böylece (3.1.6) ve (3.3.4) den

$$g(JX, Y) + \alpha(X)C\alpha(Y) = g(X, JY) + \alpha(Y)C\alpha(X)$$

yani

$$(g + \alpha \otimes \alpha)(JX, Y) = (g + \alpha \otimes \alpha)(X, JY)$$

olur. Eğer

$$G = g + \alpha \otimes \alpha$$

denilirse

$$G(JX, Y) = G(X, JY), \quad \forall X, Y \in \Gamma(TM)$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

Sonuç 3.3.1. $(\bar{M}, \varphi, \xi, \eta, \bar{g})$ Lorentzian hemen hemen parakontakt manifoldunun $\xi \notin \Gamma(TM)$ olacak şekildeki bir non-invaryant hiperyüzeyi bir hemen hemen çarpım metrik manifoldudur.

Şimdi $(\bar{M}, \varphi, \xi, \eta, \bar{g})$ Lorentzian hemen hemen parakontakt manifoldunun temel 2-formu Φ ve $\bar{M}$ nin (M, J, G) hiperyüzeyinin

$$\Omega(X, Y) = G(JX, Y), \quad \forall X, Y \in \Gamma(TM) \quad (3.3.5)$$

ile tanımlanan Ω temel 2-formu arasındaki ilişkiyi inceleyelim:

Lemma 3.3.1. (M, J, α, G) , $(\bar{M}, \varphi, \xi, \eta, \bar{g})$ Lorentzian hemen hemen parakontakt manifoldunun $\xi \notin \Gamma(TM)$ olacak şekildeki bir non-invaryant hiperyüzeyi olsun. Φ ve Ω sırasıyla M ve $\bar{M}$ nin temel 2-formları olmak üzere

$$i^*\Phi = \Omega - C\alpha \wedge \alpha \quad (3.3.6)$$

dır.

İspat. M ve $\overline{M}$ nin temel 2-formları sırasıyla Φ ve Ω olsun. (3.1.1), (3.1.6) ve (3.3.1) kullanılarak her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned}
i^*\Phi(X, Y) &= \Phi(i_*X, i_*Y) \\
&= \overline{g}(\varphi i_*X, i_*Y) \\
&= \overline{g}(i_*JX + \alpha(X)\xi, i_*Y) \\
&= \overline{g}(i_*JX, i_*Y) + \alpha(X)\overline{g}(\xi, i_*Y) \\
&= g(JX, Y) + \alpha(X)\eta(i_*Y) \\
&= G(JX, Y) - \alpha(JX)\alpha(Y) + \alpha(X)\alpha(JY) \\
&= G(JX, Y) - C\alpha(X)\alpha(Y) + \alpha(X)C\alpha(Y) \\
&= \Omega(X, Y) - (C\alpha \wedge \alpha)(X, Y)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

Teorem 3.3.1. $(\overline{M}, \varphi, \xi, \eta, \overline{g})$ bir Lorentzian para-Sasakian manifold ve (M, J, α, G) de $\overline{M}$ nin $\xi \notin \Gamma(TM)$ olacak şekildeki bir non-invariant hiperyüzeyi olsun. Bu durumda

$$J = -A \quad (3.3.7)$$

$$\alpha = w \quad (3.3.8)$$

dır.

İspat. $(\overline{M}, \varphi, \xi, \eta, \overline{g})$ bir Lorentzian para-Sasakian manifold olduğundan $\forall X \in \Gamma(TM)$ için

$$\overline{\nabla}_{i_*X}\xi = \varphi i_*X$$

dir. Bu durumda (3.1.1) ve (3.2.3) den

$$-i_*AX + w(X)\xi = i_*JX + \alpha(X)\xi$$

olur. Son eşitlikte teğet ve normal kısımlar göz önüne alınırsa

$$J = -A \text{ ve } \alpha = w$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

Teorem 3.3.2. $(\overline{M}, \varphi, \xi, \eta, \overline{g})$ bir Lorentzian para-Sasakian manifold ve (M, J, α, G) de $\overline{M}$ nin $\xi \notin \Gamma(TM)$ olacak şekildeki bir non-invariant hiperyüzeyi olsun. Bu durumda $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$(a) (\nabla_X J)Y = \alpha(Y)JX - C\alpha(Y)X,$$

$$(b) \overline{g}(i_*X, i_*Y) + 2C\alpha(X)C\alpha(Y) = h(X, JY) + (\nabla_X \alpha)Y + \alpha(X)\alpha(Y)$$

dir.

İspat. (M, J, α, G) , $(\overline{M}, \varphi, \xi, \eta, \overline{g})$ Lorentzian para-Sasakian manifoldunun $\xi \notin \Gamma(TM)$ olacak şekildeki bir non-invariant hiperyüzeyi olduğundan (3.2.4) eşitliğinde (3.3.7) ve (3.3.8) yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} (\overline{\nabla}_{i_*X} \varphi) i_*Y &= [i_*(\nabla_X J)Y + \alpha(Y)i_*JX] \\ &\quad + [h(X, JY) + (\nabla_X \alpha)Y + \alpha(X)\alpha(Y)] \xi \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

elde edilir. Diğer taraftan (1.3.19) den

$$(\overline{\nabla}_{i_*X} \varphi) i_*Y = \overline{g}(i_*X, i_*Y) \xi + \eta(i_*Y) i_*X + 2\eta(i_*X) \eta(i_*Y) \xi \quad (3.3.10)$$

yazılabilir. Böylece (3.1.6) göz önüne alınarak (3.3.9) ve (3.3.10) eşitliklerinden

$$i_*[(\nabla_X J)Y + \alpha(Y)JX] = i_*[C\alpha(Y)X]$$

ve

$$h(X, JY) + (\nabla_X \alpha)Y + \alpha(X)\alpha(Y) = \overline{g}(i_*X, i_*Y) + 2C\alpha(X)C\alpha(Y)$$

elde edilir ki bu da ispatı tamamlar. $\square$

Teorem 3.3.2 den aşağıdaki sonuca ulaşılır:

Sonuç 3.3.2. $(\overline{M}, \varphi, \xi, \eta, \overline{g})$ bir Lorentzian para-Sasakian manifold ve (M, J, α, G) de $\overline{M}$ nin $\xi \notin \Gamma(TM)$ olacak şekildeki bir non-invariant hiperyüzeyi olsun. Bu durumda M nin bir lokal çarpım manifoldu olması için gerek ve yeter şart $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\alpha(Y)JX = C\alpha(Y)X \quad (3.3.11)$$

olmasıdır.

Şimdi $(\overline{M}, \varphi, \xi, \eta)$ bir hemen hemen parakontakt manifold ve M de $\overline{M}$ nin $\xi \in \Gamma(TM)$ olacak şekildeki bir invaryant hiperyüzeyi olsun. Bu durumda M hiperyüzeyi üzerinde $(1,1)$ -tipinde bir tensör alanı ψ olmak üzere herhangi bir $X \in \Gamma(TM)$ vektör alanı için

$$\varphi i_* X = i_* \psi X \quad (3.3.12)$$

yazılabilir. (3.3.12) eşitliğinin her iki tarafına φ uygulanırsa

$$i_* \psi^2 X = \varphi^2 i_* X = i_* X + \eta(i_* X) \xi \quad (3.3.13)$$

elde edilir. Eğer

$$\xi = i_* \xi^* \quad (3.3.14)$$

ve

$$\eta(i_* X) = \eta^*(X) \quad (3.3.15)$$

gösterimleri kullanılırsa (3.3.13) den

$$\psi^2 X = X + \eta^*(X) \xi^* \quad (3.3.16)$$

bulunur. Buna ek olarak

$$\eta^*(\psi X) = \eta(i_* \psi X) = \eta(\varphi i_* X) = 0, \quad (3.3.17)$$

$$\eta^*(\xi^*) = \eta(i_* \xi^*) = \eta(\xi) = -1 \quad (3.3.18)$$

dir. Ayrıca

$$i_* \psi \xi^* = \varphi i_* \xi^* = \varphi \xi = 0$$

olduğundan

$$\psi \xi^* = 0 \quad (3.3.19)$$

olur. Böylece aşağıdaki teorem verilebilir:

Önerme 3.3.2. $(\overline{M}, \varphi, \xi, \eta)$ bir hemen hemen parakontakt manifold ve M de $\overline{M}$ nin $\xi \in \Gamma(TM)$ olacak şekildeki bir invaryant hiperyüzeyi olsun. Bu durumda M hiperyüzeyi (ψ, ξ^*, η^*) hemen hemen parakontakt yapısına sahip bir hemen hemen parakontakt manifolddur.

Teorem 3.3.3. $(\overline{M}, \varphi, \xi, \eta)$ bir hemen hemen parakontakt manifold ve M de $\overline{M}$ nin $\xi \in \Gamma(TM)$ olacak şekildeki bir invaryant hiperyüzeyi olsun. Bu durumda $\overline{M}$ normal ise M de normaldir.

İspat. (3.1.8) eşitliğinden (3.3.12), (3.3.14) ve (3.3.15) kullanılarak $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned}
S(i_*X, i_*Y) &= [\varphi, \varphi](i_*X, i_*Y) + d\eta(i_*X, i_*Y)\xi \\
&= [\varphi i_*X, \varphi i_*Y] - \varphi[\varphi i_*X, i_*Y] - \varphi[i_*X, \varphi i_*Y] \\
&\quad + \varphi^2[i_*X, i_*Y] + [(\overline{\nabla}_{i_*X}\eta)i_*Y - (\overline{\nabla}_{i_*Y}\eta)i_*X]\xi \\
&= [i_*\psi X, i_*\psi Y] - \varphi[i_*\psi X, i_*Y] - \varphi[i_*X, i_*\psi Y] + \varphi^2[i_*X, i_*Y] \\
&\quad + [(i_*X)(\eta(i_*Y)) - \eta(\overline{\nabla}_{i_*X}i_*Y) - (i_*Y)(\eta(i_*X)) + \eta(\overline{\nabla}_{i_*Y}i_*X)]\xi \\
&= i_*[\psi X, \psi Y] - \varphi i_*[\psi X, Y] - \varphi i_*[X, \psi Y] + \varphi^2 i_*[X, Y] \\
&\quad + [(i_*X)(\eta(i_*Y)) - \eta(i_*\nabla_X Y + h(X, Y)\xi)]\xi \\
&\quad - [(i_*Y)(\eta(i_*X)) - \eta(i_*\nabla_Y X + h(Y, X)\xi)]\xi
\end{aligned}$$

yazılır. Buradan

$$\begin{aligned}
S(i_*X, i_*Y) &= i_*[\psi X, \psi Y] - i_*\psi[\psi X, Y] - i_*\psi[X, \psi Y] + i_*\psi^2[X, Y] \\
&\quad + [(i_*X)(\eta^*(Y)) - (i_*Y)(\eta^*(X)) - \eta^*([X, Y])]i_*\xi^* \\
&= i_*\{[\psi, \psi](X, Y) + d\eta^*(X, Y)\xi^*\}
\end{aligned} \tag{3.3.20}$$

elde edilir. $\overline{M}$ normal ise $S = 0$ olacağından

$$[\psi, \psi](X, Y) + d\eta^*(X, Y)\xi^* = 0 \tag{3.3.21}$$

olur ki bu da M nin normal olduğunu verir. Böylece ispat tamamlanmış olur. $\square$

Teorem 3.3.4. $(\overline{M}, \varphi, \xi, \eta, \overline{g})$ bir Lorentzian hemen hemen parakontakt manifold ve M de $\overline{M}$ nin $\xi \in \Gamma(TM)$ olacak şekildeki bir invaryant hiperyüzeyi olsun. Bu durumda M bir Lorentzian hemen hemen parakontakt manifolddur.

İspat. Teorem 3.3.2 den $(\overline{M}, \varphi, \xi, \eta)$ hemen hemen parakontakt manifoldunun $\xi \in \Gamma(TM)$ olacak şekildeki bir M invaryant hiperyüzeyi (ψ, ξ^*, η^*) hemen hemen parakon-

takt yapısına sahip bir hemen hemen parakontakt manifolddur. M hiperyüzeyi üzerine indirgenmiş metrik $g^* = i^*\bar{g}$ olsun. Bu durumda

$$g^*(\xi^*, \xi^*) = \bar{g}(i_*\xi^*, i_*\xi^*) = \bar{g}(\xi, \xi) = -1$$

dir. Diğer taraftan $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$g^*(\psi X, \psi Y) = \bar{g}(i_*\psi X, i_*\psi Y) = \bar{g}(\varphi i_*X, \varphi i_*Y) \quad (3.3.22)$$

olur. $\bar{M}$ bir Lorentzian hemen hemen paracontact manifold olduğundan (1.3.10) eşitliği göz önüne alınarak (3.3.22) den

$$\begin{aligned} g^*(\psi X, \psi Y) &= \bar{g}(i_*X, i_*Y) + \eta(i_*X)\eta(i_*Y) \\ &= g^*(X, Y) + \eta^*(X)\eta^*(Y) \end{aligned} \quad (3.3.23)$$

elde edilir ki bu da ispatı tamamlar. $\square$

Teorem 3.3.5. $(\bar{M}, \varphi, \xi, \eta, \bar{g})$ bir Lorentzian para-Sasakian manifold ve M de $\bar{M}$ nin $\xi \in \Gamma(TM)$ olacak şekildeki bir invaryant hiperyüzeyi olsun. Bu durumda M bir Lorentzian para-Sasakian manifolddur.

İspat. $\bar{M}$ bir Lorentzian para-Sasakian manifold olsun. Bu durumda $\bar{\nabla}$, $\bar{M}$ nin Levi-Civita konneksiyonu olmak üzere $\forall X \in \Gamma(TM)$ için

$$\bar{\nabla}_{i_*X}\xi = \varphi i_*X$$

dir. (3.3.12) ve (3.3.14) den

$$\bar{\nabla}_{i_*X}i_*\xi^* = i_*\psi X \quad (3.3.24)$$

olur. Böylece Gauss denklemi kullanılarak (3.3.24) eşitliği

$$i_*\nabla_X\xi^* + h(X, \xi^*)N = i_*\psi X \quad (3.3.25)$$

şeklinde yazılabilir. ∇ , M hiperyüzeyi üzerindeki indirgenmiş konneksiyon ve N de M nin bir normal vektör alanıdır. (3.3.25) ün teğet ve normal kısımları eşitlenirse

$$\nabla_X\xi^* = \psi X, \quad (3.3.26)$$

$$h(X, \xi^*) = 0 \quad (3.3.27)$$

elde edilir. Ayrıca $\overline{M}$ bir Lorentzian para-Sasakian manifold olduğundan (1.3.19) den

$$\begin{aligned}
(\overline{\nabla}_{i_*X}\varphi) i_*Y &= \overline{g}(i_*X, i_*Y) \xi + \eta(i_*Y) i_*X + 2\eta(i_*X) \eta(i_*Y) \xi \\
&= i^*\overline{g}(X, Y) i_*\xi^* + \eta^*(Y) i_*X + 2\eta^*(X) \eta^*(Y) i_*\xi^* \\
&= i_*[g^*(X, Y) \xi^* + \eta^*(Y) X + 2\eta^*(X) \eta^*(Y) \xi^*] \quad (3.3.28)
\end{aligned}$$

dir. Diğer taraftan Gauss denklemi ve (3.3.12) dan

$$\begin{aligned}
(\overline{\nabla}_{i_*X}\varphi) i_*Y &= \overline{\nabla}_{i_*X}\varphi i_*Y - \varphi(\overline{\nabla}_{i_*X}i_*Y) \\
&= \overline{\nabla}_{i_*X}i_*\psi Y - \varphi(i_*\nabla_X Y + h(X, Y)N) \\
&= i_*\nabla_X\psi Y + h(X, \psi Y)N - i_*\psi\nabla_X Y - h(X, Y)\varphi N \\
&= i_*(\nabla_X\psi Y - \psi\nabla_X Y) + h(X, \psi Y)N - h(X, Y)\varphi N \quad (3.3.29)
\end{aligned}$$

bulunur. (3.3.28) ve (3.3.29) göz önüne alınırsa

$$(\nabla_X\psi)Y = g^*(X, Y)\xi^* + \eta^*(Y)X + 2\eta^*(X)\eta^*(Y)\xi^* \quad (3.3.30)$$

elde edilir. (3.3.26) ve (3.3.30) den M nin bir Lorentzian para-Sasakian manifold olduğu görülür. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

3.4 Örnekler

Bu kısımda önceki kısımlarda tanıtılan hiperyüzeyler için örnekler verilecektir.

Örnek 3.4.1. $\overline{M}$, (x, y, z, t, s) koordinat sistemi ile verilen 5-boyutlu bir reel uzay olsun. $\overline{M}$ üzerinde

$$\begin{aligned}
\eta &= ds - dx - dz, \quad \xi = -\frac{\partial}{\partial s}, \\
\varphi\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) &= -\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial s}, \quad \varphi\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) = -\frac{\partial}{\partial y}, \\
\varphi\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) &= -\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial s}, \quad \varphi\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}, \quad \varphi\left(\frac{\partial}{\partial s}\right) = 0,
\end{aligned}$$

olacak şekilde bir $\varphi(1, 1)$ -tensör alanını, ξ vektör alanını ve η 1-formunu tanımlayalım.

Bu durumda

$$\eta(\xi) = (ds - dx - dz)\left(-\frac{\partial}{\partial s}\right) = -1 \quad (3.4.1)$$

dir. Herhangi bir $\overline{X} = a_1 \frac{\partial}{\partial x} + a_2 \frac{\partial}{\partial y} + a_3 \frac{\partial}{\partial z} + a_4 \frac{\partial}{\partial t} + a_5 \frac{\partial}{\partial s} \in \Gamma(T\overline{M})$ vektör alanı için

$$\begin{aligned}\eta(\overline{X}) &= (ds - dx - dz)(\overline{X}) \\ &= a_5 - a_1 - a_3\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\varphi^2(\overline{X}) &= \varphi(\varphi(\overline{X})) \\ &= \varphi\left(\varphi\left(a_1 \frac{\partial}{\partial x} + a_2 \frac{\partial}{\partial y} + a_3 \frac{\partial}{\partial z} + a_4 \frac{\partial}{\partial t} + a_5 \frac{\partial}{\partial s}\right)\right) \\ &= \varphi\left(a_1\left(-\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial s}\right) + a_2\left(-\frac{\partial}{\partial y}\right) + a_3\left(-\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial s}\right) + a_4\left(-\frac{\partial}{\partial t}\right)\right) \\ &= -a_1\left(-\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial s}\right) - a_2\left(-\frac{\partial}{\partial y}\right) - a_3\left(-\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial s}\right) - a_4\left(-\frac{\partial}{\partial t}\right) \\ &= a_1 \frac{\partial}{\partial x} + a_2 \frac{\partial}{\partial y} + a_3 \frac{\partial}{\partial z} + a_4 \frac{\partial}{\partial t} + (a_1 + a_3) \frac{\partial}{\partial s} \\ &= \overline{X} + \eta(\overline{X})\xi\end{aligned}\tag{3.4.2}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned}(\eta \circ \varphi)(\overline{X}) &= \eta(\varphi(\overline{X})) \\ &= \eta\left(-a_1 \frac{\partial}{\partial x} - a_2 \frac{\partial}{\partial y} - a_3 \frac{\partial}{\partial z} - a_4 \frac{\partial}{\partial t} - (a_1 + a_3) \frac{\partial}{\partial s}\right) \\ &= (ds - dx - dz)\left(-a_1 \frac{\partial}{\partial x} - a_2 \frac{\partial}{\partial y} - a_3 \frac{\partial}{\partial z} - a_4 \frac{\partial}{\partial t} - (a_1 + a_3) \frac{\partial}{\partial s}\right) \\ &= -(a_1 + a_3) + a_1 + a_3 \\ &= 0\end{aligned}\tag{3.4.3}$$

ve

$$\varphi\xi = \varphi\left(\frac{\partial}{\partial s}\right) = 0\tag{3.4.4}$$

dır. Böylece (3.4.1)-(3.4.4) den (φ, ξ, η) üçlüsü $\overline{M}$ üzerinde bir hemen hemen parakontakt yapı olur. (φ, ξ, η) hemen hemen parakontakt yapısına sahip $\overline{M}$ manifoldu da bir hemen hemen parakontakt manifolddur. $\overline{M}$ nin $s = x$ denklemi ile verilen M_1 hiperyüzeyini ve $i : M_1 \rightarrow \overline{M}$ immersiyonunu göz önüne alalım. Bu durumda

$$u_1 = (1, 0, 0, 0, 1), \quad u_2 = (0, 1, 0, 0, 0), \quad u_3 = (0, 0, 1, 0, 0), \quad u_4 = (0, 0, 0, 1, 0)$$

olmak üzere $\Gamma(TM_1) = Sp\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ dir. Buradan herhangi bir $p \in M_1$ noktası için $\xi_{i(p)}$ karakteristik vektör alanının M_1 in teğet hiperdüzlemine ait olmadığı kolaylıkla

görülür. $f_i \in C^\infty(M_1, R)$, $1 \leq i \leq 4$, fonksiyonları için bir $X \in \Gamma(TM_1)$ vektör alanı

$$X \equiv i_*X = f_1u_1 + f_2u_2 + f_3u_3 + f_4u_4$$

şeklinde yazılabilir. Böylece

$$\varphi i_*X = -f_1u_1 - f_2u_2 - f_3u_3 - f_4u_4 + f_3\xi \quad (3.4.5)$$

elde edilir. (3.4.5), M_1 in $\overline{M}$ hemen hemen parakontakt manifoldunun $\xi \notin \Gamma(TM_1)$ olacak şekildeki bir non-invaryant hiperyüzeyi olduğunu gösterir.

Şimdi $\overline{M}$ nin $x = y$ denklemi ile verilen M_2 hiperyüzeyini ve $i : M_2 \rightarrow \overline{M}$ immersiyonunu göz önüne alalım. Bu durumda

$$v_1 = (1, 1, 0, 0, 0), v_2 = (0, 0, 1, 0, 0), v_3 = (0, 0, 0, 1, 0), v_4 = (0, 0, 0, 0, 1)$$

olmak üzere $\Gamma(TM_2) = Sp\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dir. $v_4 = -\xi$ olduğundan herhangi bir $p \in M_1$ noktası için $\xi_{i(p)}$ karakteristik vektör alanı M_2 nin teğet hiperdüzlemine aittir. Buradan $h_i \in C^\infty(M_2, R)$, $1 \leq i \leq 4$, , fonksiyonları için bir $Y \in \Gamma(TM_2)$ vektör alanı

$$Y \equiv i_*Y = h_1v_1 + h_2v_2 + h_3v_3 + h_4v_4$$

şeklinde yazılabilir. Böylece

$$\varphi i_*Y = -h_1v_1 - h_2v_2 - h_3v_3 + (h_1 + h_2)\xi \quad (3.4.6)$$

elde edilir. (3.4.6), M_2 nin $\overline{M}$ hemen hemen parakontakt manifoldunun $\xi \in \Gamma(TM_1)$ olacak şekildeki bir invaryant hiperyüzeyi olduğunu gösterir.

Örnek 3.4.2. (x, y, z, t, s) koordinat sistemi ile verilen 5-boyutlu bir $\overline{M}$ reel uzayı üzerinde

$$\begin{aligned} \eta &= ds - dx, & \xi &= -\frac{\partial}{\partial s}, \\ \varphi\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) &= \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial s}, & \varphi\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) &= \frac{\partial}{\partial y}, \\ \varphi\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) &= \frac{\partial}{\partial z}, & \varphi\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) &= \frac{\partial}{\partial t}, & \varphi\left(\frac{\partial}{\partial s}\right) &= 0, \end{aligned}$$

olacak şekilde bir φ $(1, 1)$ -tensör alanını, ξ vektör alanını ve η 1-formunu tanımlayalım. Bu durumda (φ, ξ, η) üçlüsünün $\overline{M}$ üzerinde bir hemen hemen parakontakt yapı olduğu kolaylıkla görülebilir.

$\overline{M}$ nin $s = x$ denklemi ile verilen M hiperyüzeyini ve $i : M \rightarrow \overline{M}$ immersiyonunu göz önüne alalım. Bu durumda

$$u_1 = (1, 0, 0, 0, 1), \quad u_2 = (0, 1, 0, 0, 0), \quad u_3 = (0, 0, 1, 0, 0), \quad u_4 = (0, 0, 0, 1, 0)$$

olmak üzere $\Gamma(TM) = Sp\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ dir. Herhangi bir $p \in M$ noktası için $\xi_{i(p)}$ karakteristik vektör alanının M nin teğet hiperdüzlemine ait olmayacağı açıktır. Ek olarak

$$\varphi u_1 = u_1, \quad \varphi u_2 = u_2, \quad \varphi u_3 = u_3, \quad \varphi u_4 = u_4$$

olduğundan $M, \overline{M}$ hemen hemen parakontakt manifoldunun $\xi \notin \Gamma(TM)$ olacak şekildeki bir invaryant hiperyüzeyidir.

Örnek 3.4.3. $\overline{M}, (x, y, z)$ koordinat sistemi ile verilen 3-boyutlu bir reel uzay olsun. $\overline{M}$ üzerinde

$$\begin{aligned} \eta &= dz, \quad \xi = -\frac{\partial}{\partial z}, \\ \varphi\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) &= -\frac{\partial}{\partial x}, \quad \varphi\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) = -\frac{\partial}{\partial y}, \quad \varphi\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) = 0, \\ \overline{g} &= (dx)^2 + (dy)^2 - \eta \otimes \eta \end{aligned}$$

olsun. Bu durumda $(\varphi, \xi, \eta, \overline{g})$ dörtlüsü ile birlikte $\overline{M}$ bir Lorentzian hemen hemen parakontakt manifold olur. $\overline{M}$ nin $x = \arcsin y$ denklemi ile verilen M yüzeyini ve $i : M \rightarrow \overline{M}$ immersiyonunu göz önüne alalım. Bu durumda M yüzeyinin teğet düzlemi

$$u_1 = (1, \sqrt{1-y^2}, 0), u_2 = (0, 0, 1)$$

tarafından gerilir. $\xi = -u_2$ olduğundan herhangi bir $p \in M$ noktası için $\xi_{i(p)}$ karakteristik vektör alanı M nin teğet düzlemine aittir. M yüzeyinin normal vektör alanı

$$N = (\sqrt{1-y^2}, -1, 0)$$

dir. $f_i \in C^\infty(M_1, R), 1 \leq i \leq 2$, fonksiyonları için herhangi bir $X \in \Gamma(TM)$ vektör alanı

$$X \equiv i_*X = f_1 u_1 + f_2 u_2 \in \Gamma(TM)$$

şeklinde yazılabilir.

$$\varphi i_* X = -f_1 u_1$$

olduğundan $M, \overline{M}$ Lorentzian hemen hemen parakontakt manifoldunun $\xi \in \Gamma(TM)$ olacak şekildeki bir invaryant yüzeyidir.

Örnek 3.4.4. $\overline{M}, (x, y, z)$ koordinat sistemi ile verilen 3-boyutlu bir reel uzay olsun. $\overline{M}$ üzerinde

$$\begin{aligned} \eta &= dz, \quad \xi = -\frac{\partial}{\partial z}, \\ \varphi\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}, \quad \varphi\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) = -\frac{\partial}{\partial y}, \quad \varphi\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) = 0, \\ \overline{g} &= e^{-2z}(dx)^2 + e^{2z}(dy)^2 - (dz)^2 \end{aligned}$$

tanımlayalım. Bu durumda $(\varphi, \xi, \eta, \overline{g})$ dörtlüsü ile birlikte $\overline{M}$ bir Lorentzian para-Sasakian manifold olur. $\overline{M}$ nin $z = x + y$ denklemi ile verilen M_1 yüzeyini ve $i : M_1 \rightarrow \overline{M}$ immersiyonunu göz önüne alalım. Bu durumda

$$u_1 = (1, 0, 1), \quad u_2 = (0, 1, 1),$$

olmak üzere $\Gamma(TM_1) = Sp\{u_1, u_2\}$ dir. M_1 yüzeyinin normal vektör alanı

$$N = (e^{2(x+y)}, e^{2(x+y)}, 1)$$

dir. ξ karakteristik vektör alanı

$$\xi = -\frac{1}{e^{2(x+y)} + e^{-2(x+y)} - 1}((e^{2(x+y)})u_1 + (e^{-2(x+y)})u_2 - N)$$

olarak yazılabileceğinden herhangi bir $p \in M_1$ noktası için $\xi_{i(p)} \notin T_{i(p)}M_1$ dir. M_1 üzerindeki reel değerli diferensiyellenebilir f_1, f_2 fonksiyonları için bir $X \in \Gamma(TM_1)$ vektör alanı $X \equiv i_* X = f_1 u_1 + f_2 u_2$ şeklinde ifade edilebilir. Böylece

$$\varphi i_* X = f_1 u_1 - f_2 u_2 + (f_1 - f_2)\xi$$

elde edilir. Buradan

$$i_* JX = f_1 u_1 - f_2 u_2$$

ve

$$\alpha(X) = f_1 - f_2$$

bulunur. Burada J , M_1 yüzeyi üzerinde bir hemen hemen çarpım yapısıdır. Böylece M_1 , $\overline{M}$ Lorentzian para-Sasakian manifoldunun $\xi \notin \Gamma(TM_1)$ olacak şekildeki bir non-invariant yüzeyidir.

Şimdi $\overline{M}$ nin $x = \arctan y$ denklemi ile verilen M_2 yüzeyini ve $i : M_2 \rightarrow \overline{M}$ immersiyonunu göz önüne alalım. Bu durumda

$$\left\{ v_1 = \left(\frac{1}{1+y^2}, 1, 0 \right), v_2 = (0, 0, 1) \right\}$$

kümesi M_2 yüzeyinin teğet düzlemi için bir lokal bazdır. Böylece ξ karakteristik vektör alanının M_2 nin teğet düzlemine ait olduğu açıktır. M_2 nin normal vektör alanı

$$N = (e^{2z}, -\frac{1}{1+y^2}e^{-2z}, 0)$$

dır. Herhangi bir $i_*Y \equiv Y = \gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 \in \Gamma(TM_2)$ için

$$\varphi i_*Y = -\gamma_1 \left(v_1 - \frac{2(1+y^2)}{(1+y^2)^2 e^{2z} - e^{-2z}} N \right)$$

olduğundan M_2 , $\overline{M}$ Lorentzian hemen hemen parakontakt manifoldunun $\xi \in \Gamma(TM_2)$ olacak şekildeki bir non-invariant yüzeyidir.

3.5 Lorentzian Para-Sasakian Manifoldların Biharmonik Hiperyüzeyleri

Bu kısımda Lorentzian para-Sasakian manifoldların spacelike ve timelike hiperyüzeylerinin biharmonik olması için gerek ve yeter şartlar araştırılacaktır. Sabit ortalama eğrilikli Lorentz para-Sasakian manifoldların biharmonik spacelike hiperyüzeyleri ile Lorentz para-Sasakian manifoldların total umbilik biharmonik spacelike hiperyüzeyleri incelenecektir. Ayrıca özel olarak Lorentzian para-Sasakian manifoldların sırası ile Ricci flat ve η -Einstein olması durumunda timelike hiperyüzeylerinin biharmonikliği ile ilgili bazı karakterizasyonlar verilecektir.

$(\overline{M}, \phi, \xi, \eta, \bar{g})$, $(m+1)$ -boyutlu bir Lorentzian para-Sasakian manifold ve M , $\overline{M}$ nin bir hiperyüzeyi olsun. Bu durumda M hiperyüzeyinin birim normal vektör alanı N olmak üzere (1.3.41) ve (1.3.42) Gauss-Weingarten formüllerinden $\forall X, Y \in$

$\Gamma(TM)$ için

$$B(X, Y) = \varepsilon \bar{g}(\bar{\nabla}_X Y, N)N = -\varepsilon \bar{g}(Y, \bar{\nabla}_X N)N = \varepsilon \bar{g}(A_N X, Y)N \quad (3.5.1)$$

ve

$$\bar{g}(A_N X, Y) = \bar{g}(B(X, Y), N) = \bar{g}(b(X, Y)N, N) = \varepsilon b(X, Y), \quad (3.5.2)$$

yazılabilir. Burada $\varepsilon = \bar{g}(N, N)$ dir.

3.5.1 Lorentzian para-Sasakian manifoldların biharmonik spacelike hiperyüzeyleri

Teorem 3.5.1. $(\bar{M}, \varphi, \xi, \eta, \bar{g})$, $(m+1)$ -boyutlu bir Lorentzian para-Sasakian manifold; M , $\bar{M}$ nin bir hiperyüzeyi ve $\Psi : M \rightarrow \bar{M}$ bir izometrik immersiyon olsun. ξ karakteristik vektör alanı M hiperyüzeyinin birim normal vektör alanı olmak üzere M spacelike hiperyüzeyinin biharmonik olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned} \Delta H - 2mH &= 0, \\ 2A(\text{grad}H) - \frac{m}{2}(\text{grad}H^2) &= 0 \end{aligned} \quad (3.5.3)$$

olmasıdır. Burada A , M hiperyüzeyinin birim normal vektör alanı ξ ye göre Weingarten temel tensörü (şekil operatörü) ve H , M hiperyüzeyinin ortalama eğrilik vektörü $\mu = H\xi$ olacak şekildeki ortalama eğrilik fonksiyonudur.

İspat. M , $(\bar{M}, \varphi, \xi, \eta, \bar{g})$ Lorentzian para-Sasakian manifoldunun $\xi \in \Gamma(T^\perp M)$ olacak şekildeki bir hiperyüzeyi ve $\Psi : M \rightarrow \bar{M}$ bir izometrik immersiyon olsun.

$$\{d\Psi(e_1), \dots, d\Psi(e_m), \xi\}$$

$\bar{M}$ nin bir lokal ortonormal çatısı olmak üzere M hiperyüzeyinin bir $\{e_1, \dots, e_m\}$ lokal ortonormal çatısını göz önüne alalım. Pull-back konneksiyon tanımını kullanarak $\forall X \in \Gamma(TM)$, $W \in \Gamma(\Psi^{-1}TM)$ için $d\Psi(X)$ ile X vektör alanını ve $\nabla_X^\Psi W$ ile $\bar{\nabla}_X W$ yı özdeş kılabiliriz. M hiperyüzeyinin ortalama eğrilik vektörü $\mu = H\xi$ olmak üzere

Ψ izometrik immersiyonunun tensiyon alanı

$$\begin{aligned}
\tau(\psi) &= \sum_{i=1}^m \nabla d\Psi(e_i, e_i) \\
&= \sum_{i=1}^m B(e_i, e_i) \\
&= (boyM)\mu \\
&= mH\xi
\end{aligned} \tag{3.5.4}$$

şeklindedir. Buradan (3.5.4) kullanılarak Ψ nin bitensiyon alanı

$$\begin{aligned}
\tau_2(\Psi) &= \sum_{i=1}^m \{ \nabla_{e_i}^\Psi \nabla_{e_i}^\Psi \tau(\Psi) - \nabla_{\nabla_{e_i} e_i}^\Psi \tau(\Psi) - \bar{R}(d\Psi(e_i), \tau(\Psi)) d\Psi(e_i) \} \\
&= \sum_{i=1}^m \{ \nabla_{e_i}^\Psi \nabla_{e_i}^\Psi (mH\xi) - \nabla_{\nabla_{e_i} e_i}^\Psi (mH\xi) - \bar{R}(d\Psi(e_i), mH\xi) d\Psi(e_i) \} \\
&= \sum_{i=1}^m \{ \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} (mH\xi) - \bar{\nabla}_{\nabla_{e_i} e_i} (mH\xi) - \bar{R}(d\Psi(e_i), mH\xi) d\Psi(e_i) \} \\
&= m \sum_{i=1}^m \{ \bar{\nabla}_{e_i} (e_i(H)\xi + H\bar{\nabla}_{e_i} \xi) - (\nabla_{e_i} e_i)(H)\xi - H\bar{\nabla}_{\nabla_{e_i} e_i} \xi \\
&\quad - H\bar{R}(d\Psi(e_i), \xi) d\Psi(e_i) \} \\
&= m \sum_{i=1}^m \{ e_i e_i(H)\xi + 2e_i(H)\bar{\nabla}_{e_i} \xi + H\bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} \xi \\
&\quad - (\nabla_{e_i} e_i)(H)\xi - H\bar{\nabla}_{\nabla_{e_i} e_i} \xi - H\bar{R}(d\Psi(e_i), \xi) d\Psi(e_i) \} \\
&= -m(\Delta H)\xi - mH\Delta^\Psi \xi - 2mA(gradH) \\
&\quad + mH \sum_{i=1}^n \bar{R}(\xi, d\Psi(e_i)) d\Psi(e_i).
\end{aligned} \tag{3.5.5}$$

bulunur. $\bar{M}$ bir Lorentzian para-Sasakian manifold olduğundan (1.3.27) dan

$$\bar{R}(\xi, d\Psi(e_i)) d\Psi(e_i) = m\xi \tag{3.5.6}$$

olur. (3.5.6), (3.5.5) de yerine yazılırsa

$$\tau_2(\Psi) = -m(\Delta H)\xi - mH\Delta^\Psi \xi - 2mA(gradH) + m^2 H\xi \tag{3.5.7}$$

elde edilir. $\tau_2(\Psi)$ yi teğet ve normal kısımlarına ayırmak için $\Delta^\Psi \xi$ nin teğet ve

normal kısımlarını belirlemek yeterli olacaktır. (1.3.21) den

$$\begin{aligned}
\bar{g}(\Delta^\Psi \xi, \xi) &= - \sum_{i=1}^m \bar{g}(\bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} \xi - \bar{\nabla}_{\nabla_{e_i} e_i} \xi, \xi) \\
&= - \sum_{i=1}^m \bar{g}(\bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} \xi, \xi) \\
&= \sum_{i=1}^m \bar{g}(\bar{\nabla}_{e_i} \xi, \bar{\nabla}_{e_i} \xi), \\
&= \sum_{i=1}^m \bar{g}(\phi_{e_i}, \phi_{e_i}).
\end{aligned} \tag{3.5.8}$$

bulunur. Bu son eşitlikte (1.3.10) göz önüne alınarak $\Delta^\Psi \xi$ nin normal kısmı

$$\begin{aligned}
(\Delta^\Psi \xi)^\perp &= -\bar{g}(\Delta^\Psi \xi, \xi) \xi \\
&= - \sum_{i=1}^m \bar{g}(\bar{\nabla}_{e_i} \xi, \bar{\nabla}_{e_i} \xi) \xi \\
&= -m\xi.
\end{aligned} \tag{3.5.9}$$

olur. $\Delta^\Psi \xi$ nin teğet kısmı ise

$$\begin{aligned}
(\Delta^\Psi \xi)^\top &= - \sum_{i,k=1}^m \bar{g}(\bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} \xi - \bar{\nabla}_{\nabla_{e_i} e_i} \xi, e_k) e_k \\
&= \sum_{i,k=1}^m \bar{g}(\bar{\nabla}_{e_i} A e_i - A(\nabla_{e_i} e_i), e_k) e_k \\
&= \sum_{i,k=1}^m \{e_i \bar{g}(A e_i, e_k) - \bar{g}(A e_i, \nabla_{e_i} e_k) - \bar{g}(A(\nabla_{e_i} e_i), e_k)\} e_k \\
&= \sum_{i,k=1}^m \{-e_i b(e_i, e_k) + b(e_i, \nabla_{e_i} e_k) + b(\nabla_{e_i} e_i, e_k)\} e_k \\
&= - \sum_{i,k=1}^m \{\nabla_{e_i} b(e_k, e_i)\} e_k.
\end{aligned} \tag{3.5.10}$$

dır. Diğer taraftan Codazzi-Mainardi denkleminde

$$\begin{aligned}
\nabla_{e_i} b(e_k, e_i) - \nabla_{e_k} b(e_i, e_i) &= (\bar{R}(e_i, e_k) e_i)^\perp \\
&= -\bar{g}(\bar{R}(e_i, e_k) e_i, \xi) \\
&= \bar{S}(\xi, e_k).
\end{aligned} \tag{3.5.11}$$

yazılabilir. $\bar{S}(\xi, e_k) = 0$ olduğundan (3.5.11) eşitliği

$$\nabla_{e_i} b(e_k, e_i) = \nabla_{e_k} b(e_i, e_i) \tag{3.5.12}$$

olduğunu gösterir. Eğer (3.5.12) eşitliği (3.5.10) da yerine yazılırsa

$$(\Delta^\Psi \xi)^\top = -m \text{grad} H \quad (3.5.13)$$

bulunur. Buradan (3.5.9) ve (3.5.13) eşitlikleri göz önüne alınarak $\tau_2(\Psi)$ nin teğet ve normal kısımları

$$\begin{aligned} (\tau_2(\psi))^\top &= -2A(\text{grad} H) + \frac{m}{2}(\text{grad} H^2), \\ (\tau_2(\psi))^\perp &= -m(\Delta H) + 2m^2 H. \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

Teorem 3.5.1 den aşağıdaki sonuçlar verilebilir.

Sonuç 3.5.1. *Sabit ortalama eğrilikli bir Lorentzian para-Sasakian manifoldun bir spacelike hiperyüzeyinin biharmonik olması için gerek ve yeter şart minimal olmasıdır.*

İspat. $M, (\overline{M}, \varphi, \xi, \eta, \overline{g})$ Lorentzian para-Sasakian manifoldunun sabit ortalama eğrilikli bir spacelike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda H sabittir. Öyleyse (3.5.3) dan M nin bir biharmonik spacelike hiperyüzey olması için gerek ve yeter şart $H = 0$ olmasıdır. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

Örnek 3.5.1. (x, y, z) koordinat sistemi ile verilen 3-boyutlu $\overline{M} = \mathbb{R}^3$ reel uzayı üzerinde

$$\begin{aligned} \eta &= dz, \quad \xi = -\frac{\partial}{\partial z}, \\ \phi\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}, \quad \phi\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) = -\frac{\partial}{\partial y}, \quad \phi\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) = 0, \\ \overline{g} &= e^{-2z}(dx)^2 + e^{2z}(dy)^2 - (dz)^2. \end{aligned} \quad (3.5.14)$$

olacak şekilde bir $\phi(1, 1)$ -tensör alanını, ξ vektör alanını, η 1-formunu ve g Lorentzian metriğini tanımlayalım. Bu durumda $\overline{M}, (\phi, \xi, \eta, \overline{g})$ Lorentzian para-Sasakian yapsına sahip bir Lorentzian para-Sasakian manifold olur.

Şimdi $c > 0$ bir sabit sayı olmak üzere $\overline{M}$ nin $z = c$ ile verilen yüzeyini gözönüne alalım. Bu durumda $\Psi : M \rightarrow \overline{M}$ izometrik immersiyonu

$$\Psi(x, y) = (x, y, c)$$

ile tanımlanabilir. $\overline{M}$ üzerindeki $\overline{g}$ metriğinden M yüzeyi üzerine indirgenen metrik g olmak üzere g nin bileşenleri

$$\begin{aligned} g_{11} &= g\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \overline{g}\left(d\Psi\left(\frac{\partial}{\partial x}\right), d\Psi\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right) \circ \Psi = e^{-2z}, \\ g_{12} &= g\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) = \overline{g}\left(d\Psi\left(\frac{\partial}{\partial x}\right), d\Psi\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\right) \circ \Psi = 0, \\ g_{22} &= g\left(\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y}\right) = \overline{g}\left(d\Psi\left(\frac{\partial}{\partial y}\right), d\Psi\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\right) \circ \Psi = e^{2z}. \end{aligned} \quad (3.5.15)$$

dir. Ayrıca

$$f_1 = e^z \frac{\partial}{\partial x}, \quad f_2 = e^{-z} \frac{\partial}{\partial y}, \quad f_3 = \frac{\partial}{\partial z} \quad (3.5.16)$$

olmak üzere $\{f_1, f_2, f_3\}$, $\overline{M}$ nin bir ortonormal çatısını oluşturur. Burada $\xi = -f_3$, M nin birim normal vektör alanıdır. Böylece M , $\overline{M}$ Lorentzian para-Sasakian manifoldunun bir spacelike hiperyüzeyi olur.

Diğer taraftan

$$[f_1, f_2] = 0, \quad [f_1, f_3] = -e^z f_1, \quad [f_2, f_3] = -e^{-z} f_2, \quad (3.5.17)$$

ve $\overline{M}$ nin $\overline{\nabla}$ Levi-Civita konneksiyonunun bileşenleri

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}_{f_1} f_1 &= -f_3, & \overline{\nabla}_{f_1} f_2 &= 0, & \overline{\nabla}_{f_1} f_3 &= -f_1 \\ \overline{\nabla}_{f_2} f_1 &= 0, & \overline{\nabla}_{f_2} f_2 &= f_3, & \overline{\nabla}_{f_2} f_3 &= -f_2 \\ \overline{\nabla}_{f_3} f_1 &= 0, & \overline{\nabla}_{f_3} f_2 &= 0, & \overline{\nabla}_{f_3} f_3 &= 0. \end{aligned} \quad (3.5.18)$$

olduğundan M yüzeyinin ikinci temel formunun bileşenleri

$$\begin{aligned} b(f_1, f_1) &= -\overline{g}(\overline{\nabla}_{f_1} f_1, \xi) = -1, \\ b(f_1, f_2) &= -\overline{g}(\overline{\nabla}_{f_1} f_2, \xi) = 0, \\ b(f_2, f_2) &= -\overline{g}(\overline{\nabla}_{f_2} f_2, \xi) = 1. \end{aligned} \quad (3.5.19)$$

bulunur. Buradan M nin ortalama eğriliğ H olmak üzere (3.5.19) dan

$$H = \frac{1}{2} [b(f_1, f_1) + b(f_2, f_2)] = 0,$$

elde edilir. Böylece, $(\phi, \xi, \eta, \overline{g})$ Lorentzian para-Sasakian yapıya sahip üst yarı uzay, minimal dolayısıyla biharmonik olan $z = c$ düzlemleri tarafından foliate edilir (yapraklandırılır).

Sonuç 3.5.2. *Harmonik ortalama eğrilikli bir Lorentzian para-Sasakian manifoldun bir spacelike hiperyüzeyinin biharmonik olması için gerek ve yeter şart minimal olmasıdır.*

İspat. $M, (\overline{M}, \varphi, \xi, \eta, \overline{g})$ Lorentzian para-Sasakian manifoldunun harmonik ortalama eğrilikli bir spacelike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda $\Delta H = 0$ dır. Öyleyse (3.5.3) dan M nin bir biharmonik spacelike hiperyüzey olması için gerek ve yeter şart $H = 0$ olmasıdır. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

Sonuç 3.5.3. $M, (m+1)$ -boyutlu $(\overline{M}, \varphi, \xi, \eta, \overline{g})$ Lorentzian para-Sasakian manifoldunun $\Delta H = \lambda H, \lambda \in R$, şartını sağlayan bir spacelike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda M nin biharmonik olması için gerek ve yeter şart

$$A(\text{grad}H) = \frac{m}{4}(\text{grad}H^2) \quad (3.5.20)$$

olmasıdır.

İspat. $M, (m+1)$ -boyutlu $(\overline{M}, \varphi, \xi, \eta, \overline{g})$ Lorentzian para-Sasakian manifoldunun $\Delta H = \lambda H, \lambda \in R$, şartını sağlayan bir spacelike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda (3.5.3) dan ispat tamamlanır. $\square$

Teorem 3.5.2. $M, (m+1)$ -boyutlu $(\overline{M}, \varphi, \xi, \eta, \overline{g})$ Lorentzian para-Sasakian manifoldunun bir total umbilik biharmonik spacelike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda M sabit ortalama eğriliğine sahiptir.

İspat. $M, (\overline{M}, \varphi, \xi, \eta, \overline{g})$ Lorentzian para-Sasakian manifoldunun bir total umbilik biharmonik hiperyüzeyi ve $\Psi : \overline{M} \rightarrow M$ bir izometrik immersiyon olsun. $\overline{M}$ nin bir lokal ortonormal çatısı $\{d\Psi(e_1), \dots, d\Psi(e_m), \xi\}$ olmak üzere M hiperyüzeyinin bir $\{e_1, \dots, e_m\}$ lokal ortonormal çatısını göz önüne alalım. $\forall X \in \Gamma(TM)$ için $d\Psi(X)$ ile X vektör alanı özdeş olarak düşünülebilir. Böylece $\overline{M}$ nin bir $\{e_1, e_2, \dots, e_m, \xi\}$ lokal ortonormal çatısı için $\lambda_i, (1 \leq i \leq m), e_i$ doğrultusundaki asli eğrilikler olmak üzere $Ae_i = \lambda_i e_i$ dir. M total umbilik olduğundan herhangi bir $p \in M$ noktasındaki bütün asli eğrilikler aynı bir $\lambda(p)$ sayısına eşittir. (3.5.1) eşitliğinde N yerine ξ karakteristik

vektör alanı alınırsa

$$\begin{aligned}
H &= -\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m g(B(e_i, e_i), \xi) \\
&= -\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m g(Ae_i, e_i) \\
&= -\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m g(\lambda e_i, e_i) \\
&= -\lambda.
\end{aligned} \tag{3.5.21}$$

Diğer taraftan (3.5.21) den

$$A(gradH) = -\frac{1}{2}grad\lambda^2. \tag{3.5.22}$$

bulunur. Buradan (3.5.3), (3.5.21) and (3.5.22) eşitlikleri göz önüne alınarak

$$\begin{aligned}
\Delta\lambda - 2m\lambda &= 0, \\
(2 + m)grad\lambda^2 &= 0,
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

3.5.2 Lorentzian para-Sasakian manifoldların biharmonik timelike hiperyüzeyleri

$(\overline{M}, \phi, \xi, \eta, \overline{g})$, $(m+1)$ -boyutlu bir Lorentzian para-Sasakian manifold ve $M, \overline{M}$ nin $\xi \in \Gamma(TM)$ olacak şekilde bir hiperyüzeyi olsun. Bu durumda M hiperyüzeyinin birim normal vektör alanı N olmak üzere N spacelike olduğundan $M, \overline{M}$ nin bir timelike hiperyüzeyi olur. $\Psi : M \rightarrow \overline{M}$ izometrik immersiyonunun tensiyon alanı

$$\tau(\Psi) = m\mu,$$

dür. Burada μ ve H sırasıyla M hiperyüzeyinin ortalama eğrilik vektör alanı ve ortalama eğrilik fonksiyonu olmak üzere $\mu = HN$ dir.

Teorem 3.5.3. *$(\overline{M}, \phi, \xi, \eta, \overline{g})$, $(m+1)$ -boyutlu bir Lorentzian para-Sasakian manifold ve $M, \overline{M}$ nin bir timelike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda M nin biharmonik olması için gerek ve yeter şart*

$$\begin{aligned}
\frac{m}{2}(gradH^2) + 2A(gradH) - 2H(\overline{Q}(N))^{\mathfrak{T}} &= 0, \\
\Delta H + H|A|^2 - H(\overline{S}(N, N)) &= 0
\end{aligned} \tag{3.5.23}$$

olmasıdır. Burada $\bar{S}$, $\bar{M}$ Lorentzian para-Sasakian manifoldunun Ricci eğriliği; $\bar{Q}$, $\bar{M}$ Lorentzian para-Sasakian manifoldunun $\forall X, Y \in \Gamma(T\bar{M})$ için $\bar{g}(\bar{Q}X, Y) = \bar{S}(X, Y)$ ile tanımlanan Ricci operatörü ve A , M hiperyüzeyinin N birim normal vektör alanına göre Weingarten temel tensörü (şekil operatörü) dür.

İspat. M , $(m+1)$ -boyutlu $(\bar{M}, \phi, \xi, \eta, \bar{g})$ Lorentzian para-Sasakian manifoldunun bir timelike hiperyüzeyi; N , M hiperyüzeyinin birim normal vektör alanı ve $\Psi : M \rightarrow \bar{M}$ bir izometrik immersiyon olsun. M nin bir $\{e_1, e_2, \dots, e_{m-1}, e_m = \xi\}$ ortonormal bazını alalım. M hiperyüzeyinin ortalama eğrilik vektörü $\mu = HN$ olmak üzere $\Psi : M \rightarrow \bar{M}$ izometrik immersiyonunun tensiyon alanı

$$\tau(\Psi) = \sum_{i=1}^m \nabla d\Psi(e_i, e_i) = \sum_{i=1}^m B(e_i, e_i) = (boy M)\mu = mHN \quad (3.5.24)$$

dir. Bu durumda $\Psi : M \rightarrow \bar{M}$ izometrik immersiyonunun bitensiyon alanı

$$\begin{aligned} \tau_2(\Psi) &= \sum_{i=1}^m \varepsilon_i \{ \nabla_{e_i}^\Psi \nabla_{e_i}^\Psi \tau(\Psi) - \nabla_{\nabla_{e_i} e_i}^\Psi \tau(\Psi) - \bar{R}(d\Psi(e_i), \tau(\Psi)) d\Psi(e_i) \} \\ &= \sum_{i=1}^m \varepsilon_i \{ \nabla_{e_i}^\Psi \nabla_{e_i}^\Psi (mHN) - \nabla_{\nabla_{e_i} e_i}^\Psi (mHN) - \bar{R}(d\Psi(e_i), mHN) d\Psi(e_i) \} \\ &= \sum_{i=1}^m \varepsilon_i \{ \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} (nHN) - \bar{\nabla}_{\nabla_{e_i} e_i} (nHN) - \bar{R}(d\Psi(e_i), mHN) d\Psi(e_i) \} \\ &= m \sum_{i=1}^m \varepsilon_i \{ \bar{\nabla}_{e_i} (e_i(H)N + H\bar{\nabla}_{e_i} N) - (\nabla_{e_i} e_i)(H)N - H\bar{\nabla}_{\nabla_{e_i} e_i} N \\ &\quad - H\bar{R}(d\Psi(e_i), N) d\Psi(e_i) \} \\ &= \sum_{i=1}^m \varepsilon_i \{ e_i e_i(H)N + 2e_i(H)\bar{\nabla}_{e_i} N + H\bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} N \\ &\quad - (\nabla_{e_i} e_i)(H)N - H\bar{\nabla}_{\nabla_{e_i} e_i} N - H\bar{R}(d\Psi(e_i), N) d\Psi(e_i) \} \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} \tau_2(\Psi) &= -m(\Delta H)N - mH\Delta^\Psi N - 2mA(grad H) \\ &\quad - mH \left\{ \sum_{i=1}^{m-1} \bar{R}(d\Psi(e_i), N) d\Psi(e_i) - \bar{R}(d\Psi(\xi), N) d\Psi(\xi) \right\} \quad (3.5.25) \end{aligned}$$

olur. Şimdi $\tau_2(\Psi)$ nin teğet ve normal bileşenlerini bulmak için öncelikle (3.5.25) deki $\Delta^\Psi N$ nin ve eğrilik tensör alanı $\bar{R}$ yi içeren son iki terimin teğet ve normal

bileşenlerini belirleyelim:

$$\begin{aligned}
(\Delta^\Psi N)^\top &= - \sum_{i,k=1}^m \bar{g}(\bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} N - \bar{\nabla}_{\nabla_{e_i} e_i} N, e_k) e_k \\
&= \sum_{i,k=1}^m \bar{g}(\bar{\nabla}_{e_i} A e_i - A(\nabla_{e_i} e_i), e_k) e_k \\
&= \sum_{i,k=1}^m \{e_i \bar{g}(A e_i, e_k) - \bar{g}(A e_i, \nabla_{e_i} e_k) - \bar{g}(A(\nabla_{e_i} e_i), e_k)\} e_k \\
&= \sum_{i,k=1}^m \{e_i b(e_i, e_k) - b(e_i, \nabla_{e_i} e_k) - b(\nabla_{e_i} e_i, e_k)\} e_k \\
&= \sum_{i,k=1}^m \{\nabla_{e_i} b(e_k, e_i)\} e_k,
\end{aligned} \tag{3.5.26}$$

dir. Codazzi-Mainardi denkleminde

$$\begin{aligned}
\nabla_{e_i} b(e_k, e_i) - \nabla_{e_k} b(e_i, e_i) &= (\bar{R}(e_i, e_k) e_i)^\perp \\
&= \bar{g}(\bar{R}(e_i, e_k) e_i, N) \\
&= -\bar{S}(N, e_k).
\end{aligned} \tag{3.5.27}$$

yazılır. Buradan

$$\nabla_{e_i} b(e_k, e_i) = \nabla_{e_k} b(e_i, e_i) - \bar{S}(N, e_k). \tag{3.5.28}$$

elde edilir. (3.5.28), (3.5.26) da yerine yazılırsa $\Delta^\Psi N$ nin teğet bileşeni

$$\begin{aligned}
(\Delta^\Psi N)^\top &= \sum_{i,k=1}^m \{\nabla_{e_k} b(e_i, e_i) - \bar{S}(N, e_k)\} e_k \\
&= m(\text{grad} H) - (\bar{Q}(N))^\top.
\end{aligned} \tag{3.5.29}$$

bulunur. $\Delta^\Psi N$ nin normal bileşeni ise

$$\begin{aligned}
(\Delta^\Psi N)^\perp &= \bar{g}(\Delta^\Psi N, N) \\
&= - \sum_{i=1}^m \{\varepsilon_i \bar{g}(\bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} N - \bar{\nabla}_{\nabla_{e_i} e_i} N, N)\} \\
&= \sum_{i=1}^m \{\varepsilon_i \bar{g}(\bar{\nabla}_{e_i} N, \bar{\nabla}_{e_i} N)\} \\
&= |A|^2,
\end{aligned} \tag{3.5.30}$$

olur. Burada $\varepsilon_i = \bar{g}(e_i, e_i)$, $1 \leq i \leq m$, dir.

Diğer taraftan

$$\begin{aligned}
-\sum_{k=1}^{m-1} \bar{S}(N, e_k) e_k &= \sum_{i,k=1}^{m-1} \bar{g}(\bar{R}(d\Psi(e_i), N) d\Psi(e_i), e_k) e_k \\
&\quad - \sum_{i=1}^{m-1} \bar{g}(\bar{R}(d\Psi(e_i), N) d\Psi(e_i), \xi) \xi \\
&= (\bar{Q}(N))^{\top}
\end{aligned} \tag{3.5.31}$$

ve

$$\sum_{i=1}^{m-1} \bar{g}(\bar{R}(d\Psi(e_i), N) d\Psi(e_i), N) = -\bar{S}(N, N) + 1 \tag{3.5.32}$$

olduğundan (3.5.25) de eğrilik tensör alanı $\bar{R}$ yi içeren dördüncü terimin teğet ve normal bileşenleri sırasıyla $(\bar{Q}(N))^{\top}$ ve $-\bar{S}(N, N) + 1$ dir. Ayrıca 1.3.28 dan

$$\bar{R}(d\Psi(\xi), N) d\Psi(\xi) = N \tag{3.5.33}$$

dir. Buradan (3.5.29)-(3.5.33) eşitlikleri göz önüne alınarak $\tau_2(\Psi)$ nin teğet ve normal bileşenleri sırasıyla

$$\begin{aligned}
(\tau_2(\Psi))^{\top} &= -m \left[\frac{m}{2} (grad H^2) + 2A(grad H) - 2H(\bar{Q}(N))^{\top} \right], \\
(\tau_2(\Psi))^{\perp} &= -m \left[(\Delta H) + H |A|^2 - H\bar{S}(N, N) \right]
\end{aligned}$$

olur. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

Teorem 3.5.3 den aşağıdaki sonuçlara ulaşılır.

Sonuç 3.5.4. $(\bar{M}, \phi, \xi, \eta, \bar{g})$, $(m+1)$ -boyutlu bir Lorentzian para-Sasakian manifold ve $M, \bar{M}$ nin sabit ortalama eğrilikli bir timelike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda M nin biharmonik olması için gerek ve yeter şart ya minimal ya da

$$(\bar{Q}(N))^{\top} = 0 \text{ ve } \bar{S}(N, N) = |A|^2 \tag{3.5.34}$$

olmasıdır. Özel olarak, $\bar{M}$ Lorentzian para-Sasakian manifoldu pozitif olmayan Ricci eğriliğine sahip ise bu durumda M nin biharmonik olması için gerek ve yeter şart minimal olmasıdır.

İspat. $M, \overline{M}$ Lorentzian para-Sasakian manifoldunun sabit ortalama eğrilikli bir timelike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda (3.5.23) den M nin biharmonik olması için gerek ve yeter şart

$$H(\overline{Q}(N))^{\top} = 0 \quad \text{ve} \quad H(|A|^2 - \overline{S}(N, N)) = 0$$

olmasıdır. Böylece ya $H = 0$ ya da $(\overline{Q}(N))^{\top} = 0$ ve $|A|^2 - \overline{S}(N, N) = 0$ olur ki bu da ispatı tamamlar. $\square$

Örnek 3.5.2. (x, y, z) koordinat sistemi ile verilen 3-boyutlu $\overline{M} = \mathbb{R}^3$ reel uzayını ve $\overline{M}$ üzerinde Örnek 3.5.1 de tanımlanan Lorentzian para-Sasakian yapısını gözönüne alalım. M de $\overline{M}$ nin

$$x = f(y)$$

ile verilen bir yüzeyi olsun. Bu durumda

$$\left\{ f_1 = \left(\frac{f'}{\sqrt{e^{-2z}(f')^2 + e^{2z}}}, \frac{1}{\sqrt{4e^{-2z}(f')^2 + e^{2z}}}, 0 \right), f_2 = (0, 0, 1) \right\} \quad (3.5.35)$$

olmak üzere $\{f_1, f_2\}$ kümesi M yüzeyi için bir ortonormal baz sistemidir. M nin birim normal vektör alanı ise

$$N = \left(\frac{e^{2z}}{\sqrt{(f')^2 e^{-2z} + e^{2z}}}, \frac{-f' e^{-2z}}{\sqrt{(f')^2 e^{-2z} + e^{2z}}}, 0 \right) \quad (3.5.36)$$

ile verilebilir. $f_2 = -\xi$ olduğundan $M, \overline{M}$ Lorentzian para-Sasakian manifoldunun bir timelike yüzeyi olur.

Diğer taraftan $\overline{\nabla}, \overline{M}$ nin Levi-Civita konneksiyonu olmak üzere $\overline{\nabla}$ nin bileşenleri

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial x} &= -e^{-2z} \frac{\partial}{\partial z}, & \overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial y} &= 0, & \overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial z} &= -\frac{\partial}{\partial x}, \\ \overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial y}} \frac{\partial}{\partial x} &= 0, & \overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial y}} \frac{\partial}{\partial y} &= e^{2z} \frac{\partial}{\partial z}, & \overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial y}} \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial y}, \\ \overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial z}} \frac{\partial}{\partial x} &= -\frac{\partial}{\partial x}, & \overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial z}} \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}, & \overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial z}} \frac{\partial}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (3.5.37)$$

bulunur. Buradan (3.5.37) kullanılarak

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_{f_1} f_1 &= \bar{\nabla} \left(\frac{f'}{\sqrt{e^{-2z}(f')^2 + e^{2z}}} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{\sqrt{e^{-2z}(f')^2 + e^{2z}}} \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{f'}{\sqrt{e^{-2z}(f')^2 + e^{2z}}} \frac{\partial}{\partial x} \right) \\
&\quad + \bar{\nabla} \left(\frac{f'}{\sqrt{e^{-2z}(f')^2 + e^{2z}}} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{\sqrt{e^{-2z}(f')^2 + e^{2z}}} \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{e^{-2z}(f')^2 + e^{2z}}} \frac{\partial}{\partial y} \right) \\
&= \frac{-(f')^2 e^{-2z}}{(e^{-2z}(f')^2 + e^{2z})} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{\sqrt{e^{-2z}(f')^2 + e^{2z}}} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f'}{\sqrt{e^{-2z}(f')^2 + e^{2z}}} \right) \frac{\partial}{\partial x} \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{e^{-2z}(f')^2 + e^{2z}}} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\sqrt{e^{-2z}(f')^2 + e^{2z}}} \right) \frac{\partial}{\partial y} \\
&\quad + \frac{e^{2z}}{(e^{-2z}(f')^2 + e^{2z})} \frac{\partial}{\partial z} \\
&= \frac{f'' e^{2z}}{(e^{-2z}(f')^2 + e^{2z})^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{f'' f' e^{-2z}}{(e^{-2z}(f')^2 + e^{2z})^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial}{\partial y} \\
&\quad + \frac{e^{2z} - (f')^2 e^{-2z}}{(e^{-2z}(f')^2 + e^{2z})} \frac{\partial}{\partial z}
\end{aligned} \tag{3.5.38}$$

ve

$$\bar{\nabla}_{f_2} f_2 = 0. \tag{3.5.39}$$

elde edilir. Böylece N , M nin birim normal vektör alanı olduğundan M yüzeyinin ikinci temel formunun bileşenleri

$$b(f_1, f_1) = g(\bar{\nabla}_{f_1} f_1, N) = \frac{f''}{(e^{-2z}(f')^2 + e^{2z})}, \tag{3.5.40}$$

$$b(f_2, f_2) = g(\bar{\nabla}_{f_2} f_2, N) = 0. \tag{3.5.41}$$

bulunur. (3.5.40) ve (3.5.41) den M nin ortalama eğriliği

$$H = \frac{f''}{2(e^{-2z}(f')^2 + e^{2z})} \tag{3.5.42}$$

olur. Böylece M nin minimal dolayısıyla biharmonik olması için gerek ve yeter şart c, d sıfırdan farklı sabit sayılar olmak üzere

$$f(y) = cy + d,$$

olmasıdır.

Sonuç 3.5.5. Ricci flat bir Lorentzian para-Sasakian manifoldun sabit ortalama eğrilikli bir timelike hiperyüzeyinin biharmonik olması için gerek ve yeter şart minimal olmasıdır.

İspat. $\overline{M}$ bir Ricci flat Lorentzian para-Sasakian manifold ve M , $\overline{M}$ nin sabit ortalama eğrilikli bir timelike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda (3.5.23) den M nin biharmonik olması için gerek ve yeter şart $H = 0$ olmasıdır. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

Sonuç 3.5.6. $(\overline{M}, \phi, \xi, \eta, \overline{g})$, $(m+1)$ -boyutlu bir η -Einstein Lorentzian para-Sasakian manifold ve M de $\overline{M}$ nin bir timelike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda M nin biharmonik olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned} \frac{m}{2}(\text{grad}H^2) + 2A(\text{grad}H) &= 0, \\ (\Delta H) + H|A|^2 - H(\frac{\bar{r}}{m} - 1) &= 0, \end{aligned} \quad (3.5.43)$$

olmasıdır. Burada $\bar{r}$, $\overline{M}$ nin skaler eğriliğidir. Özel olarak, eğer $0 \neq H = \text{sabit}$ ise bu durumda M nin bir has (özgün) biharmonik hiperyüzey olması için gerek ve yeter şart

$$|A|^2 = \frac{\bar{r}}{m} - 1 \quad (3.5.44)$$

olmasıdır.

İspat. $\overline{M}$ $(m+1)$ -boyutlu bir η -Einstein Lorentzian para-Sasakian manifold olsun. Bu durumda (1.3.25) den

$$\overline{S}(N, N) = \frac{\bar{r}}{m} - 1. \quad (3.5.45)$$

bulunur. Diğer taraftan (3.5.31) den

$$(\overline{Q}(N))^{\top} = 0 \quad (3.5.46)$$

dir. Buradan (3.5.45) and (3.5.46), (3.5.23) de yerine yazılarak (3.5.43) elde edilir. Özel olarak eğer $0 \neq H = \text{sabit}$ ise $\text{grad}H = 0$ ve $\Delta H = 0$ olacağından ispat tamamlanır. $\square$

Teorem 3.5.4. $(\overline{M}, \phi, \xi, \eta, \overline{g})$ sabit kesit eğriliğine sahip $(m+1)$ -boyutlu bir Lorentzian para-Sasakian manifold ve M de $\overline{M}$ nin bir timelike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda M nin biharmonik olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned} \frac{m}{2}(\text{grad}H^2) + 2A(\text{grad}H) &= 0, \\ (\Delta H) + H|A|^2 - mH &= 0 \end{aligned} \quad (3.5.47)$$

olmasıdır. Özel olarak eğer $\overline{M}$ bir belirsiz uzay form ve M de $\overline{M}$ nin sabit ortalama eğrilikli bir timelike hiperyüzeyi ise M nin bir has (özgün) biharmonik hiperyüzey olması için gerek ve yeter şart

$$|A|^2 = m \quad (3.5.48)$$

olmasıdır.

İspat. $\overline{M}$, sabit $\overline{C}$ kesit eğriliğine sahip $(m+1)$ -boyutlu bir Lorentzian para-Sasakian manifold olsun. Bu durumda $\forall X, Y \in \Gamma(T\overline{M})$ için

$$\overline{S}(X, Y) = m\overline{g}(X, Y)$$

dir. Buradan $\overline{M}$, skaler eğriliği

$$\overline{r} = m(m+1) \quad (3.5.49)$$

olan bir η -Einstein manifold olur. Böylece Sonuç 3.5.6 den ispat tamamlanır. $\square$

Önerme 3.5.1. $(\overline{M}, \phi, \xi, \eta, \overline{g})$, $(m+1)$ -boyutlu ($\text{boy } \overline{M} > 2$) bir η -Einstein Lorentzian para-Sasakian manifold olsun. $\overline{M}$ nin total umbilik biharmonik timelike hiperyüzeyi sabit ortalama eğriliklidir.

İspat. $\overline{M}$ bir η -Einstein Lorentzian para-Sasakian manifold; M , $\overline{M}$ nin bir total umbilik biharmonik timelike hiperyüzeyi ve N de M nin birim normal vektör alanı olsun. M total umbilik hiperyüzey olduğundan bir $\lambda \in C^\infty(M, R)$ fonksiyonu için $A = \lambda I$ dir. Bu durumda M nin bir ortonormal bazı $\{e_1, e_2, \dots, e_{m-1}, e_m = \xi\}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m-1} \varepsilon_i \overline{g}(B(e_i, e_i), N) \\ &= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m-1} \overline{g}(Ae_i, e_i) \\ &= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m-1} g(\lambda e_i, e_i) \\ &= \frac{m-1}{m} \lambda \end{aligned} \quad (3.5.50)$$

bulunur. Buradan

$$A(\text{grad}H) = \frac{m-1}{2m} \text{grad}\lambda^2. \quad (3.5.51)$$

olduğu görülür. Diğer taraftan

$$|A|^2 = m\lambda^2. \quad (3.5.52)$$

dir. (3.5.50), (3.5.51) ve (3.5.52), (3.5.43) da yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \left(\frac{m^2-1}{2m}\right)grad\lambda^2 &= 0, \\ \Delta\lambda + m\lambda^3 - \left(\frac{\bar{r}}{m} - 1\right)\lambda &= 0. \end{aligned} \quad (3.5.53)$$

elde edilir. Buradan ya $\lambda = 0$ ve böylece $H = 0$, ya da $\lambda = \pm \frac{1}{m}\sqrt{\bar{r} - m} = \text{sabit}$ olur. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

Teorem 3.5.1 den $\bar{r} < m$ için aşağıdaki sonuç verilebilir:

Sonuç 3.5.7. $(\bar{M}, \phi, \xi, \eta, \bar{g})$, $(m+1)$ -boyutlu ($\text{boy } \bar{M} > 2$) bir η -Einstein Lorentzian para-Sasakian manifold ve $\bar{r} < m$ olsun. Bu durumda $\bar{M}$ nin bir total umbilik timelike hiperyüzeyinin biharmonik olması için gerek ve yeter şart minimal olmasıdır.

Önerme 3.5.2. Ricci flat bir Lorentzian para-Sasakian manifoldun total umbilik bir biharmonik timelike hiperyüzeyi minimaldir.

İspat. $\bar{M}$, $(m+1)$ -boyutlu ($\text{boy } \bar{M} > 2$) bir Ricci flat Lorentzian para-Sasakian manifold ve M , $\bar{M}$ nin bir total umbilik biharmonik timelike hiperyüzeyi olsun. (3.5.50), (3.5.51) ve (3.5.52), (3.5.23) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \left(\frac{m^2-1}{2m}\right)grad\lambda^2 &= 0, \\ (m-1)\left(\frac{1}{m}\Delta\lambda + \lambda^3\right) &= 0. \end{aligned} \quad (3.5.54)$$

elde edilir. M biharmonik ve $m > 1$ olduğundan (3.5.54) denklem sisteminden $\lambda = 0$, yani $H = 0$ bulunur. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

BÖLÜM 4

LORENTZIAN HEMEN HEMEN

PARAKONTAKT

MANİFOLDLARIN ALTMANİFOLDLARI

Bu bölüm dört kısımdan oluşmaktadır. İlk kısımda Lorentzian hemen hemen parakontakt manifoldların slant (eğik) altmanifoldları tanıtılarak örnekler verildi. İkinci kısımda Lorentzian hemen hemen parakontakt manifoldların semi-slant altmanifoldları incelendi. Ayrıca bu kısımda özel olarak manifoldun Lorentzian parakosimplektik ve Lorentzian para-Sasakian olması durumunda semi-slant altmanifoldların tanımında yer alan distribüsyonların integrallenebilirlik şartları araştırıldı. Üçüncü kısım Lorentzian parakosimplektik manifoldların warped (çapraşık) çarpım, semi-invaryant warped çarpım, semi-slant warped çarpım ve anti-slant warped çarpım altmanifoldlarına ayrıldı. Son kısımda ise Lorentzian para-Sasakian manifoldların biharmonik altmanifoldları incelendi.

4.1 Lorentzian Hemen Hemen Parakontakt Manifoldların Slant Altmanifoldları

Bu kısımda Lorentzian hemen hemen parakontakt manifoldların slant altmanifoldları tanıtılarak bu manifoldların, sırasıyla karakteristik vektör alanını teğetinde ve normalinde kabul eden altmanifoldlarının slant olması için gerek ve yeter şartlar araştırılacaktır.

$\overline{M}$, (φ, ξ, g) Lorentzian hemen hemen parakontakt yapısına sahip bir Lorentzian almost parakontakt manifold ve $i : M \rightarrow \overline{M}$ bir izometrik immersiyon olmak üzere M de $\overline{M}$ nin bir altmanifoldu olsun. $\overline{M}$ Lorentzian almost parakontakt manifoldundan M altmanifoldu üzerine indirgenmiş metriği de g ile gösterelim. Herhangi bir $X \in$

$\Gamma(TM)$ için fX ve wX sırasıyla φX in teğet ve normal bileşleri olmak üzere

$$\varphi X = fX + wX \quad (4.1.1)$$

yazılabilir. Benzer şekilde herhangi bir $N \in \Gamma(T^\perp M)$ için

$$\varphi N = BN + CN \quad (4.1.2)$$

yazılabilir. Burada BN ve CN sırasıyla φN in teğet ve normal bileşenlerini göstermektedir.

Tanım 4.1.1. $(\overline{M}, \varphi, \xi, g)$ bir Lorentzian hemen hemen parakontakt manifold ve M de $\overline{M}$ nin bir altmanifoldu olsun. Bu durumda eğer

- i) $w = 0$ yani $\varphi X = fX \in \Gamma(TM)$, $\forall X \in \Gamma(TM)$, ise M ye $\overline{M}$ nin *invariant altmanifoldu*,
- ii) $f = 0$ yani $\varphi X = wX \in \Gamma(T^\perp M)$, $\forall X \in \Gamma(TM)$, ise M ye $\overline{M}$ nin *anti-invariant altmanifoldu*

denir.

Tanım 4.1.2. $(\overline{M}, \varphi, \xi, g)$ bir Lorentzian hemen hemen parakontakt manifold ve M de $\overline{M}$ nin bir altmanifoldu olsun. Bu durumda eğer M üzerinde

- i) $TM = D_1 \oplus D_2$,
- ii) D_1 distribüsyonu *invariant*, yani $\varphi D_1 = D_1$,
- iii) D_2 distribüsyonu *anti-invariant*, yani $\varphi D_2 \subset T^\perp M$

olacak şekilde ortogonal D_1 ve D_2 distribüsyonları var ise M ye $\overline{M}$ nin *semi-invariant altmanifoldu* denir.

Lemma 4.1.1. $(\overline{M}, \varphi, \xi, g)$ bir Lorentzian hemen hemen parakontakt manifold ve M de $\overline{M}$ nin bir altmanifoldu olsun. Bu durumda $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$g(fX, Y) = g(X, fY) \quad (4.1.3)$$

dir.

Şimdi $(\overline{M}, \varphi, \xi, g)$ bir Lorentzian hemen hemen parakontakt manifold ve M de $\overline{M}$ nin $\xi \in \Gamma(TM)$ olacak şekildeki bir altmanifoldu olsun. Bu durumda D, TM tanjant demetinde ξ karakteristik vektör alanının gerdiği distribüsyona ortogonal bir distribüsyon olmak üzere

$$TM = D \oplus \langle \xi \rangle \quad (4.1.4)$$

yazılabilir.

Tanım 4.1.3. $(\overline{M}, \varphi, \xi, g)$ bir Lorentzian hemen hemen parakontakt manifold ve M de $\overline{M}$ nin $\xi \in \Gamma(TM)$ olacak şekildeki bir altmanifoldu olsun. Herhangi bir $p \in M$ noktasında ξ_p nin bir katı olmayan $0 \neq X \in \Gamma(TM)$ için φX ile $T_p M$ tanjant uzayı arasındaki $\theta(X)$ açısı sabit yani $p \in M$ noktasının ve $X \in \Gamma(TM) - Sp\{\xi_p\}$ vektörünün seçilişinden bağımsız ise M ye $\overline{M}$ nin slant altmanifoldu denir. θ açısına ise M slant altmanifoldunun slant açısı denir.

$\varphi \xi = 0$ olduğundan θ açısı aynı zamanda φX ile D_p arasındaki açıdır. İnvaryant ve anti-invaryant altmanifoldlar sırasıyla $\theta = 0$ ve $\theta = \frac{\pi}{2}$ slant açısına sahip slant altmanifoldlardır. İnvaryant ve anti-invaryant olmayan slant altmanifoldlara özgün slant altmanifoldlar denir.

Örnek 4.1.1. $(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3, y_4, t)$ koordinat sistemi ile verilen 7-boyutlu bir $\overline{M}$ reel uzayı üzerinde

$$\begin{aligned} \eta &= dt, \quad \xi = -\frac{\partial}{\partial t}, \\ \varphi \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) &= \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (i = 1, 2) \\ \varphi \left(\frac{\partial}{\partial y_j} \right) &= -\frac{\partial}{\partial y_j}, \quad (j = 1, 2, 3, 4) \\ \varphi \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) &= 0, \\ g &= (dx_i)^2 + (dy_j)^2 - \eta \otimes \eta \end{aligned}$$

olacak şekilde bir $\varphi (1, 1)$ -tensör alanını, ξ vektör alanını, η 1-formunu ve g Lorentzian metriğini tanımlayalım. Bu durumda $i = 1, 2$ ve $j = 1, 2, 3, 4$ olmak üzere

$$\begin{aligned} X &= a_i \frac{\partial}{\partial x_i} + b_j \frac{\partial}{\partial y_j} + c \frac{\partial}{\partial t} \in \Gamma(TM) \\ Y &= d_i \frac{\partial}{\partial x_i} + e_j \frac{\partial}{\partial y_j} + f \frac{\partial}{\partial t} \in \Gamma(TM) \end{aligned}$$

için

$$\eta(\xi) = -1 = g(\xi, \xi),$$

$$\eta(X) = c = g(X, \xi),$$

$$\begin{aligned}\varphi^2(X) &= \varphi \left(\varphi \left(a_i \frac{\partial}{\partial x_i} + b_j \frac{\partial}{\partial y_j} + c \frac{\partial}{\partial t} \right) \right) \\ &= \varphi \left(a_i \frac{\partial}{\partial x_i} - b_j \frac{\partial}{\partial y_j} \right) \\ &= a_i \frac{\partial}{\partial x_i} + b_j \frac{\partial}{\partial y_j} + c \frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial t} \\ &= X + \eta(X) \xi,\end{aligned}$$

$$(\eta \circ \varphi)(X) = 0,$$

dir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}g(\varphi X, \varphi Y) &= g(a_i \frac{\partial}{\partial x_i} - b_j \frac{\partial}{\partial y_j}, d_i \frac{\partial}{\partial x_i} - e_j \frac{\partial}{\partial y_j}) \\ &= a_i d_i + b_j e_j \\ &= g(X, Y) + \eta(X) \eta(Y)\end{aligned}$$

olduğundan (φ, ξ, η, g) dörtlüsü $\overline{M}$ üzerinde bir Lorentzian hemen hemen parakontakt yapı olur. Böylece $\overline{M}$, (φ, ξ, η, g) Lorentzian hemen hemen parakontakt yapısı ile birlikte bir Lorentzian hemen hemen parakontakt manifolddur.

Şimdi $\overline{M}$ Lorentzian hemen hemen parakontakt manifoldunun $u, v \in (0, \frac{\pi}{2})$ ve $0 \neq k = \text{sabit}$ olmak üzere

$$\Omega(u, v) = (u, v, -k \sin u, -k \sin v, k \cos u, k \cos v, u + v)$$

dönüşümü ile verilen M altmanifoldunu gözönüne alalım. Bu durumda

$$X = \Omega_u(u, v) = (1, 0, -k \cos u, 0, -k \sin u, 0, 1)$$

$$Y = \Omega_v(u, v) = (0, 1, 0, -k \cos v, 0, -k \sin v, 1)$$

olmak üzere $\{X, Y\}$ kümesi M altmanifoldunun tanjant demeti TM için bir ortogonal bazdır. Diğer taraftan

$$\varphi X = (1, 0, k \cos u, 0, k \sin u, 0, 0)$$

$$\varphi Y = (0, 1, 0, k \cos v, 0, k \sin v, 0)$$

olduğundan $M, \overline{M}$ nin

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{1 - k^2}{\sqrt{(1 + k^2)(2 + k^2)}} \right) \quad (4.1.5)$$

slant açısına sahip bir slant altmanifoldudur.

Şimdi, Lorentzian hemen hemen parakontakt manifoldların slant altmanifoldları ile ilgili önemli bir karakterizasyonu vereceğiz:

Teorem 4.1.1. $(\overline{M}, \varphi, \xi, g)$ bir Lorentzian hemen hemen parakontakt manifold ve M de $\overline{M}$ nin bir altmanifoldu olsun. Bu durumda

i) eğer $\xi \in \Gamma(TM)$ ise M nin bir slant altmanifold olması için gerek ve yeter şart

$$f^2 = \lambda(I + \eta \otimes \xi) \quad (4.1.6)$$

olacak şekilde bir $\lambda \in [0, 1]$ sabit sayısının var olmasıdır.

ii) eğer $\xi \in \Gamma(T^\perp M)$ ise M nin bir slant altmanifold olması için gerek ve yeter şart

$$f^2 = \lambda I \quad (4.1.7)$$

olacak şekilde bir $\lambda \in [0, 1]$ sabit sayısının var olmasıdır.

İspat. (i) $M, (\overline{M}, \varphi, \xi, g)$ Lorentzian hemen hemen parakontakt manifoldunun bir altmanifoldu olsun. $\xi \in \Gamma(TM)$ ve M nin bir slant altmanifold olduğunu kabul edelim. θ , M nin slant açısı olmak üzere herhangi bir $X \in \Gamma(TM)$ için

$$\cos \theta(X) = \frac{\|fX\|}{\|\varphi X\|} \quad (4.1.8)$$

yazılabilir. (4.1.3), (4.1.8), (1.3.14) ve (1.3.2) kullanılarak her $X \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned} g(f^2 X, X) &= g(fX, fX) \\ &= \cos^2 \theta(X) g(\varphi X, \varphi X) \\ &= \cos^2 \theta(X) g(\varphi^2 X, X) \\ &= \cos^2 \theta(X) g(X + \eta(X)\xi, X) \end{aligned} \quad (4.1.9)$$

olur. Böylece

$$f^2X = \cos^2 \theta(X)(X + \eta(X)\xi), \quad X \in \Gamma(TM) \quad (4.1.10)$$

elde edilir. (4.1.10) da $\lambda = \cos^2 \theta \in [0, 1]$ olarak alınırsa (4.1.6) eşitliğine ulaşılır.

Tersine $\lambda \in [0, 1]$ bir sabit olmak üzere (4.1.6) eşitliğinin sağlandığını kabul edelim. (4.1.1), (4.1.3), (4.1.6) ve (1.3.10) den her $X \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned} \cos \theta(X) &= \frac{g(\varphi X, fX)}{\|\varphi X\| \|fX\|} \\ &= \frac{g(X, f^2X)}{\|\varphi X\| \|fX\|} \\ &= \frac{\lambda g(X, X + \eta(X)\xi)}{\|\varphi X\| \|fX\|} \\ &= \frac{\lambda (g(X, X) + \eta(X)\eta(X))}{\|\varphi X\| \|fX\|} \\ &= \frac{\lambda g(\varphi X, \varphi X)}{\|\varphi X\| \|fX\|} \end{aligned}$$

dir. Buradan

$$\cos \theta(X) = \frac{\lambda \|\varphi X\|}{\|fX\|} \quad (4.1.11)$$

bulunur. (4.1.8) ve (4.1.11) göz önüne alınırsa

$$\cos^2 \theta(X) = \lambda \quad (4.1.12)$$

elde edilir. Böylece $\theta(X)$ sabit ve dolayısıyla M bir slant altmanifold olur.

(ii) $\xi \in \Gamma(T^\perp M)$ olsun. Bu durumda $\eta(X) = 0$ olduğundan M bir slant altmanifold ise (4.1.10) dan (4.1.7) elde edilir. Tersine (4.1.7) sağlanıyor ise (4.1.12) den M nin bir slant altmanifold olacağı kolaylıkla görülür. Böylece ispat tamamlanır.

□

Sonuç 4.1.1. $(\overline{M}, \varphi, \xi, g)$ bir Lorentzian hemen hemen parakontakt manifold ve M de $\overline{M}$ nin $\xi \in \Gamma(TM)$ olacak şekildeki bir slant altmanifoldu olsun. Bu durumda θ , M nin slant açısı olmak üzere her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$g(fX, fY) = \cos^2 \theta \{g(X, Y) + \eta(X)\eta(Y)\} \quad (4.1.13)$$

$$g(wX, wY) = \sin^2 \theta \{g(X, Y) + \eta(X)\eta(Y)\} \quad (4.1.14)$$

dir.

İspat. Teorem 4.1.1 ve (4.1.3) den

$$\begin{aligned} g(fX, fY) &= g(f^2X, Y) \\ &= g(\cos^2 \theta(X)(X + \eta(X)\xi), Y) \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu son eşitlikte (1.3.11) kullanılırsa (4.1.13) elde edilir.

Diğer taraftan (1.3.10), (4.1.1) ve (4.1.13) den

$$\begin{aligned} g(\varphi X, \varphi Y) &= g(fX + wX, fX + wX) \\ g(X, Y) + \eta(X)\eta(Y) &= g(fX, fX) + g(wX, wX) \\ g(X, Y) + \eta(X)\eta(Y) &= \cos^2 \theta \{g(X, Y) + \eta(X)\eta(Y)\} + g(wX, wX) \end{aligned}$$

elde edilir ki bu da ispatı tamamlar. $\square$

$M, (\overline{M}, \varphi, \xi, g)$ Lorentzian hemen hemen parakontakt manifoldunun bir altmanifoldu olsun. Bu durumda herhangi bir $X \in \Gamma(TM)$ için (1.3.1), (1.3.2), (4.1.1) ve (4.1.2) den

$$X + \eta(X)\xi = f^2X + wfX + BwX + CwX \quad (4.1.15)$$

yazılır. Eğer $\xi \in \Gamma(TM)$ ise (4.1.15) eşitliğinin teğet ve normal kısımları birbirine eşitlenerek

$$I + \eta \otimes \xi = f^2 + Bw \quad (4.1.16)$$

$$wf + Cw = 0 \quad (4.1.17)$$

elde edilir. Diğer taraftan eğer $\xi \in \Gamma(T^\perp M)$ ise $\eta(X) = 0$ olacağından yine (4.1.15) eşitliğinin teğet ve normal kısımları birbirine eşitlenerek

$$I = f^2 + Bw \quad (4.1.18)$$

$$wf + Cw = 0 \quad (4.1.19)$$

bulunur. Böylece aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Teorem 4.1.2. $(\overline{M}, \varphi, \xi, g)$ bir Lorentzian hemen hemen parakontakt manifold ve M de $\overline{M}$ nin bir altmanifoldu olsun. Bu durumda

i) eğer $\xi \in \Gamma(TM)$ ise M nin bir slant altmanifold olması için gerek ve yeter şart

$$Bw = \mu(I + \eta \otimes \xi) \quad (4.1.20)$$

olacak şekilde bir $\mu \in [0, 1]$ sabit sayısının var olmasıdır.

ii) eğer $\xi \in \Gamma(T^\perp M)$ ise M nin bir slant altmanifold olması için gerek ve yeter şart

$$Bw = \mu I \quad (4.1.21)$$

olacak şekilde bir $\mu \in [0, 1]$ sabit sayısının var olmasıdır.

İspat. $M, (\overline{M}, \varphi, \xi, g)$ Lorentzian hemen hemen parakontakt manifoldunun bir altmanifoldu olsun. $\xi \in \Gamma(TM)$ olduğunu kabul edelim. Teorem 4.1.1 (i) şıkkı göz önüne alınarak (4.1.6) eşitliği (4.1.16) da yerine yazılırsa

$$Bw = (1 - \lambda)(I + \eta \otimes \xi)$$

elde edilir. $\lambda = \cos^2 \theta$ olduğundan $\mu = 1 - \lambda$ olarak seçilir ise $\mu = \sin^2 \theta \in [0, 1]$ olur ve (4.1.20) eşitliğine ulaşılır.

Diğer taraftan $\xi \in \Gamma(T^\perp M)$ ise Teorem 4.1.1 (ii) ve (4.1.18) den

$$Bw = (1 - \lambda)I$$

bulunur. $\mu = 1 - \lambda$ olarak seçilir ise (4.1.21) elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

4.2 Lorentzian Hemen Hemen Parakontakt Manifoldların Semi-Slant Altmanifoldları

Bu kısımda Lorentzian hemen hemen parakontakt manifoldların semi-slant altmanifoldları tanımlanarak bu manifoldların altmanifoldlarının semi-slant olması için bazı karakterizasyonlar verilecektir. Ayrıca esas manifoldun Lorentzian parakosimplektik ve Lorentzian para-Sasakian manifold olması durumunda semi-slant altmanifold tanımında yer alan distribüsyonların integrallenebilirliği incelenecektir.

Tanım 4.2.1. $(\overline{M}, \varphi, \xi, g)$ bir Lorentzian hemen hemen parakontakt manifold ve D de $\overline{M}$ üzerinde bir diferensiyellenebilir distribüsyon olsun. Eğer $\forall p \in \overline{M}$ noktası ve $0 \neq X \in \Gamma(D_p)$ vektörü için φX ile D_p arasındaki θ_p açısı sabit yani $p \in \overline{M}$ noktasının ve $X \in \Gamma(D_p)$ vektörünün seçilişinden bağımsız ise D ye $\overline{M}$ nin bir slant distribüsyonu denir. θ_p açısına ise D_p slant distribüsyonunun slant açısı denir.

$M, (\overline{M}, \varphi, \xi, g)$ Lorentzian hemen hemen parakontakt manifoldunun bir altmanifoldu ve D, M üzerinde bir diferensiyellenebilir distribüsyon olsun. D distribüsyonuna M üzerinde ortogonal olan distribüsyonu $D^\perp$ ile gösterelim. P_1 ve P_2 sırasıyla D ve $D^\perp$ üzerindeki ortogonal projeksiyonlar olmak üzere $\forall X \in \Gamma(TM)$ için

$$\varphi X = P_1 fX + P_2 fX + wX \quad (4.2.1)$$

yazılabilir. Böylece aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 4.2.1. $M, (\overline{M}, \varphi, \xi, g)$ Lorentzian hemen hemen parakontakt manifoldunun bir altmanifoldu ve D, M üzerinde $\xi \in \Gamma(D)$ olacak şekilde bir diferensiyellenebilir distribüsyon olsun. Bu durumda D nin bir slant distribüsyon olması için gerek ve yeter şart

$$(P_1 f)^2 = \lambda(I + \eta \otimes \xi) \quad (4.2.2)$$

olacak şekilde bir $\lambda \in [0, 1]$ sabit sayısının var olmasıdır. Ayrıca, eğer θ açısı D slant distribüsyonunun slant açısı ise $\lambda = \cos^2 \theta$ dir.

İspat. Kabul edelim ki D, M üzerinde $\xi \in \Gamma(D)$ olacak şekilde bir slant distribüsyon olsun. $\forall X \in \Gamma(D)$ için (4.2.1) den

$$\begin{aligned} \cos \theta(X) &= \frac{g(\varphi X, P_1 fX)}{\|\varphi X\| \|P_1 fX\|} \\ &= \frac{\|P_1 fX\|}{\|\varphi X\|} \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\|P_1 fX\| = \cos \theta(X) \|\varphi X\| \quad (4.2.3)$$

yazılabilir. (4.2.1), (4.2.3) ve (1.3.1) kullanılarak

$$\begin{aligned}
g(X, (P_1 f)^2 X) &= g(P_1 f X, P_1 f X) \\
&= \cos^2 \theta(X) g(\varphi X, \varphi X) \\
&= \cos^2 \theta(X) g(X, \varphi^2 X) \\
&= \cos^2 \theta(X) g(X, X + \eta(X)\xi), \quad \forall X \in \Gamma(D)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$(P_1 f)^2 X = \cos^2 \theta(X) (X + \eta(X)\xi), \quad \forall X \in \Gamma(D)$$

olur. $\lambda = \cos^2 \theta$ olarak seçilir ise (4.2.2) eşitliğine ulaşılır.

Tersine (4.2.2) eşitliği sağlanacak şekilde bir $\lambda \in [0, 1]$ sabit sayısının var olduğunu düşünelim. Bu durumda φ nin simetrik olduğu göz önüne alınarak herhangi bir $X \in \Gamma(D)$ için

$$\begin{aligned}
\cos \theta(X) &= \frac{g(\varphi X, P_1 f X)}{\|\varphi X\| \|P_1 f X\|} \\
&= \frac{g(X, \varphi P_1 f X)}{\|\varphi X\| \|P_1 f X\|} \\
&= \frac{g(X, (P_1 f)^2 X)}{\|\varphi X\| \|P_1 f X\|} \\
&= \frac{\lambda g(X, X + \eta(X)\xi)}{\|\varphi X\| \|P_1 f X\|}
\end{aligned}$$

yazılabilir. Bu son eşitlikte (1.3.1) yerine yazılırsa

$$\cos \theta(X) = \frac{\lambda \|\varphi X\|}{\|P_1 f X\|}$$

elde edilir. Diğer taraftan $\cos \theta(X) = \frac{\|P_1 f X\|}{\|\varphi X\|}$ olduğundan $\lambda = \cos^2 \theta$ bulunur. Bu da θ nın sabit ve dolayısıyla D nin bir slant distribüsyon olduğunu gösterir. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

Sonuç 4.2.1. $M, (\overline{M}, \varphi, \xi, g)$ Lorentzian hemen hemen parakontakt manifoldunun bir altmanifoldu ve D, M üzerinde $\xi \in \Gamma(T^\perp M)$ olacak şekilde bir diferensiyellenebilir distribüsyon olsun. Bu durumda D nin bir slant distribüsyon olması için gerek ve yeter şart

$$(P_1 f)^2 = \lambda I \tag{4.2.4}$$

olacak şekilde bir $\lambda \in [0, 1]$ sabit sayısının var olmasıdır. Ayrıca, eğer θ açısı D slant distribüsyonunun slant açısı ise $\lambda = \cos^2 \theta$ dır.

Teorem 4.2.2. $M, (\overline{M}, \varphi, \xi, g)$ Lorentzian hemen hemen parakontakt manifoldunun bir altmanifoldu ve D, M üzerinde bir diferensiyellenebilir distribüsyon olsun. Bu durumda M nin bir slant altmanifold olması için gerek ve yeter şart D nin M ile aynı slant açısına sahip bir slant distribüsyon olmasıdır.

İspat. Kabul edelim ki M, θ slant açısına sahip bir slant altmanifold olsun. $\forall X \in \Gamma(D)$ için $\theta(X) = \theta_D(X)$ olacağından D distribüsyonu M ile aynı slant açısına sahip bir slant distribüsyondur.

Tersine D, M üzerinde bir slant distribüsyon olsun. Bu durumda herhangi bir $X \in \Gamma(TM) - Sp\{\xi\}$ için

$$\begin{aligned} \cos \theta(X) &= \frac{g(fX, \varphi X)}{\|fX\| \|\varphi X\|} \\ &= \frac{g(fX, fX)}{\|fX\| \|\varphi X\|} \\ &= \frac{\|fX\|}{\|\varphi X\|} \end{aligned}$$

dir. Buradan $\|\varphi X\| = \sqrt{\|X\|^2 + (\eta(X))^2}$ olduğundan

$$\cos \theta(X) = \frac{\|fX\|}{\sqrt{\|X\|^2 + (\eta(X))^2}} \quad (4.2.5)$$

bulunur. Diğer taraftan P, φ nin D üzerindeki ortogonal projeksiyonunu göstermek üzere $X - \eta(X)\xi \in \Gamma(D)$ için

$$\begin{aligned} \cos \theta_D(X) &= \frac{g(Pf(X - \eta(X)\xi), \varphi(X - \eta(X)\xi))}{\|Pf(X - \eta(X)\xi)\| \|\varphi(X - \eta(X)\xi)\|} \\ &= \frac{g(Pf(X - \eta(X)\xi), Pf(X - \eta(X)\xi))}{\|Pf(X - \eta(X)\xi)\| \|\varphi(X - \eta(X)\xi)\|} \\ &= \frac{\|P(X - \eta(X)\xi)\|}{\|\varphi(X - \eta(X)\xi)\|} \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

dir. $\overline{M}$ Lorentzian hemen hemen parakontakt manifoldu üzerinde

$$P(X - \eta(X)\xi) = fX$$

ve

$$\begin{aligned}
\|\varphi(X - \eta(X)\xi)\| &= \sqrt{g(\varphi(X - \eta(X)\xi), \varphi(X - \eta(X)\xi))} \\
&= \sqrt{g(X - \eta(X)\xi, \varphi^2(X - \eta(X)\xi))} \\
&= \sqrt{g(X - \eta(X)\xi, X + \eta(X)\xi)} \\
&= \sqrt{\|X\|^2 + (\eta(X))^2}
\end{aligned}$$

olduğundan (4.2.5) ve (4.2.6) den

$$\cos \theta_D(X) = \cos \theta(X)$$

elde edilir. Böylece M bir slant altmanifold olur ve ispat tamamlanır. $\square$

Semi-invariant altmanifoldların bir genelleştirmesi olarak bir Lorentzian hemen hemen parakontakt manifoldun semi-slant altmanifoldları aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

Tanım 4.2.2. $(\overline{M}, \varphi, \xi, g)$ bir Lorentzian hemen hemen parakontakt manifold ve M de $\overline{M}$ nin bir altmanifoldu olsun. Eğer M üzerinde

i) $TM = D_1 \oplus D_2 \oplus Sp\{\xi\},$

ii) D_1 distribüsyonu invariant, yani $\varphi D_1 = D_1,$

iii) D_2 distribüsyonu $\theta \neq 0, \frac{\pi}{2}$ slant açısına sahip slant distribüsyon

olacak şekilde ortogonal D_1 ve D_2 distribüsyonları var ise M ye $\overline{M}$ nin semi-slant altmanifoldu denir. Bu durumda D_2 slant distribüsyonunun θ slant açısına M semi-slant altmanifoldunun slant açısı denir.

Semi-slant altmanifoldların invariant ve anti-invariant distribüsyonları sırasıyla $\theta = 0$ ve $\theta = \frac{\pi}{2}$ slant açılı slant distribüsyonlardır. Semi-invariant altmanifoldlar, semi-slant altmanifoldların özel bir halidir.

M bir semi-slant altmanifold ve boy $D_i = d_i, (i = 1, 2)$, olsun. Bu durumda eğer

(i) $d_2 = 0$ ise M bir invariant altmanifold,

(ii) $d_1 = 0$ ve $\theta = \frac{\pi}{2}$ ise M bir anti-invariant altmanifold,

(iii) $d_1 = 0$ ve $\theta \neq 0, \frac{\pi}{2}$ ise M bir özgün slant altmanifold,

(iv) $d_1.d_2 \neq 0$ ve $\theta \neq 0, \frac{\pi}{2}$ ise M bir özgün semi-slant altmanifold

olur.

Örnek 4.2.1. $(x_1, \dots, x_9)$ koordinat sistemi ile verilen 9-boyutlu $\overline{M} = R^9$ reel uzayını gözönüne alalım. $e_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$, $1 \leq j \leq 9$, olmak üzere $\overline{M}$ nin standart bazı $\{e_1, \dots, e_9\}$ olsun. $\overline{M}$ üzerinde bir φ (1,1)-tensör alanını, ξ vektör alanını, η 1-formunu ve g Lorentzian metriğini

$$\xi = e_9, \quad \eta = -dx_9,$$

$$\varphi e_1 = e_2, \quad \varphi e_2 = e_1, \quad \varphi e_3 = e_8,$$

$$\varphi e_4 = \cos v e_5 - \sin v e_6,$$

$$\varphi e_5 = \cos v e_4 - \sin v e_7,$$

$$\varphi e_6 = -\sin v e_4 + \cos v e_7,$$

$$\varphi e_7 = \sin v e_5 + \cos v e_6,$$

$$\varphi e_8 = e_3, \quad \varphi e_9 = 0,$$

$$g = (dx_1)^2 + \dots + (dx_8)^2 - \eta \otimes \eta$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda (φ, ξ, η, g) dörtlüsü $\overline{M}$ üzerinde bir Lorentzian hemen hemen parakontakt yapı olur.

Şimdi $\overline{M}$ Lorentzian hemen hemen parakontakt manifoldunun

$$M = \{x = (x_1, \dots, x_9) \in R^9 : x_3, x_6, x_7, x_8 = 0\}$$

ile tanımlanan M altmanifoldunu gözönüne alalım. Bu durumda

$$D_1 = Sp\{e_1, e_2\} \quad \text{ve} \quad D_2 = Sp\{e_4, e_5\}$$

olarak alınırsa, D_1 distribüsyonun bir invaryant distribüsyon ve D_2 distribüsyonunun da $\theta = v$ slant açısına sahip bir slant distribüsyon olduğu görülür. Öyleyse

$$TM = D_1 \oplus D_2 \oplus Sp\{\xi\}$$

şeklinde yazılabilir. Böylece $M, \overline{M}$ Lorentzian hemen hemen parakontakt manifoldunun bir semi-slant altmanifoldu olur.

Şimdi, $(\overline{M}, \varphi, \xi, g)$ bir Lorentzian hemen hemen parakontakt manifold ve M de $\overline{M}$ nin bir semi-slant altmanifoldu olsun. D_i , $(i = 1, 2)$, distribüsyonu üzerindeki projeksiyonu P_i , $(i = 1, 2)$, ile gösterelim. Bu durumda herhangi bir $X \in \Gamma(TM)$ için

$$X = P_1X + P_2X + \eta(X)\xi \quad (4.2.7)$$

ve

$$\varphi X = fP_1X + fP_2X + wP_2X \quad (4.2.8)$$

yazılabilir. Burada

$$\varphi P_1X = fP_1X \quad \text{ve} \quad wP_1X = 0 \quad (4.2.9)$$

olur. Özel olarak, (4.2.8) ve (4.2.9) dan

$$fX = \varphi P_1X + fP_2X \quad (4.2.10)$$

olduğu görülür.

(4.1.13) eşitliğinde Y yerine P_1Y alınır ve $\eta(P_1Y) = 0$ olduğu kullanılırsa

$$g(fX, fP_1Y) = \cos^2 \theta g(X, P_1Y), \quad X, Y \in \Gamma(TM) \quad (4.2.11)$$

elde edilir. Benzer şekilde (4.1.14) eşitliğinde Y yerine P_2Y alınır ve $\eta(P_2Y) = 0$ olduğu göz önüne alınırsa

$$g(wX, wP_2Y) = \sin^2 \theta g(X, P_2Y), \quad X, Y \in \Gamma(TM) \quad (4.2.12)$$

olur.

Lorentzian hemen hemen parakontakt manifoldların semi-slant altmanifoldlarının karakterizasyonu için aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.2.3. $(\overline{M}, \varphi, \xi, g)$ bir Lorentzian hemen hemen parakontakt manifold ve M de $\overline{M}$ nin bir altmanifoldu olsun. Bu durumda M nin bir semi-slant altmanifold olması için gerek ve yeter şart

(i) $D' = \{ X \mid f^2X = \lambda X \}$, M üzerinde bir distribüsyon

(ii) D' distribüsyonuna ortogonal olan her $X \in \Gamma(TM)$ için $wX = 0$

olacak şekilde bir $\lambda \in [0, 1)$ sabit sayısının var olmasıdır. Ayrıca, eğer M nin slant açısı θ ise $\lambda = \cos^2 \theta$ dir.

İspat. Kabul edelim ki M bir semi-slant altmanifold ve $\lambda = \cos^2 \theta$ olsun. Herhangi bir $X \in \Gamma(D')$ için eğer $X \in \Gamma(D_1)$ ise

$$X = \varphi^2 X - \eta(X)\xi = \varphi^2 X = (fP_1)^2 X = \lambda X$$

elde edilir. Buradan $\lambda = 1$ olur ki bu $\lambda \in [0, 1)$ kabulü ile çelişir. Dolayısıyla $D' \subseteq D_2$ dir. Diğer taraftan, D_2 bir slant distribüsyon olduğundan herhangi bir $X \in \Gamma(D_2)$ için

$$f^2 X = (fP_2)^2 X = \lambda X$$

yazılabilir. Böylece $D_2 \subseteq D'$ olduğu görülür. Dolayısıyla $D' = D_2$ yani D' , M üzerinde bir distribüsyon olur. Ayrıca, $D' = D_2$ ve D_2 bir slant distribüsyon olduğundan D' distribüsyonuna ortogonal olan her $X \in \Gamma(TM)$ için $wX = 0$ olacağı kolaylıkla görülmektedir.

Tersine $D' = D^\perp$ olacak şekilde $TM = D \oplus D^\perp \oplus Sp\{\xi\}$ olduğunu kabul edelim. (ii) deki hipotezden dolayı $fD \subseteq D$ dir. φ simetrik ve $X \in \Gamma(D^\perp)$, $Y \in \Gamma(D)$ için $wY = 0$ olduğundan

$$g(\varphi X, Y) = g(X, \varphi Y) = g(X, fY) = 0$$

dir. Böylece $\varphi X \in \Gamma(D^\perp)$ yani $D^\perp$ bir invaryant distribüsyon olur. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

Şimdi semi-slant altmanifold tanımında verilen distribüsyonların integrallenebilirlik şartlarını inceleyelim.

Teorem 4.2.4. $(\overline{M}, \varphi, \xi, g)$ bir Lorentzian parakosimplektik manifold ve M de $\overline{M}$ nin bir semi-slant altmanifoldu olsun. Bu durumda

(i) D_1 distribüsyonunun integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart $X, Y \in \Gamma(D_1)$ için

$$h(X, fY) = h(fX, Y) \tag{4.2.13}$$

olmasıdır.

(ii) D_2 distribüsyonunun integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart $X, Y \in \Gamma(D_2)$ için

$$P_1(\nabla_X f P_2 Y - \nabla_Y f P_2 X) = P_1(A_{w P_2 Y} X - A_{w P_2 X} Y) \quad (4.2.14)$$

olmasıdır.

İspat. $(\overline{M}, \varphi, \xi, g)$ bir Lorentzian parakosimplektik manifold olduğundan $\forall X, Y \in \Gamma(T\overline{M})$ için

$$\overline{\nabla}_X \varphi Y = \varphi \overline{\nabla}_X Y \quad (4.2.15)$$

dir.

(i) (4.2.15) eşitliğinde Gauss-Weingarten formülü, (4.1.1), (4.1.2) ve (4.2.8) kullanılarak $\forall X, Y \in \Gamma(D_1)$

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}_X \varphi Y &= \varphi \overline{\nabla}_X Y \\ \overline{\nabla}_X (fY + wY) &= \varphi(\nabla_X Y + h(X, Y)) \\ \nabla_X fY + h(X, fY) &= f \nabla_X Y + w \nabla_X Y \\ &\quad + Bh(X, Y) + Ch(X, Y) \end{aligned} \quad (4.2.16)$$

$$\begin{aligned} \nabla_X fY + h(X, fY) &= f P_1 \nabla_X Y + f P_2 \nabla_X Y \\ &\quad + Bh(X, Y) + w P_2 \nabla_X Y \\ &\quad + Ch(X, Y) \end{aligned} \quad (4.2.17)$$

bulunur. Bu son eşitlikte normal kısımlar birbirine eşitlenirse

$$h(X, fY) = w P_2 \nabla_X Y + Ch(X, Y) \quad (4.2.18)$$

elde edilir. (4.2.18) de X ile Y yi yer değiştirerek

$$h(fX, Y) = w P_2 \nabla_Y X + Ch(Y, X) \quad (4.2.19)$$

yazılabilir. h simetrik olduğundan (4.2.18) ve (4.2.19) den

$$h(X, fY) - h(fX, Y) = w P_2[X, Y], \quad \forall X, Y \in \Gamma(D_1) \quad (4.2.20)$$

elde edilir.

Kabul edelim ki D_1 distribüsyonu integrallenebilir olsun. Bu durumda $\forall X, Y \in \Gamma(D_1)$ için $[X, Y] \in \Gamma(D_1)$ olacağından $w P_2[X, Y] = 0$ dır. Böylece (4.2.20) dan (4.2.13) eşitliğine ulaşılır.

Tersine $\forall X, Y \in \Gamma(D_1)$ için $h(X, fY) = h(fX, Y)$ ise $w P_2[X, Y] = 0$ olur. Buradan da $P_2[X, Y] = 0$ yani $[X, Y] \in \Gamma(D_1)$ olduğu görülür. Öyleyse D_1 distribüsyonu integrallenebilirdir.

(ii) $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için (4.2.8) ve Gauss-Weingarten formülünden

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_X \varphi Y &= \bar{\nabla}_X(\varphi P_1 Y + f P_2 Y + w P_2 Y) \\ &= \bar{\nabla}_X \varphi P_1 Y + \bar{\nabla}_X f P_2 Y + \bar{\nabla}_X w P_2 Y \\ &= \nabla_X \varphi P_1 Y + h(X, \varphi P_1 Y) + \nabla_X f P_2 Y + h(X, f P_2 Y) \\ &\quad - A_{w P_2 Y} X + \nabla_X^\perp w P_2 Y\end{aligned}\tag{4.2.21}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}\varphi \bar{\nabla}_X Y &= \varphi(\nabla_X Y + h(X, Y)) \\ &= f \nabla_X Y + w \nabla_X Y + B h(X, Y) + C h(X, Y)\end{aligned}\tag{4.2.22}$$

dir. (4.2.21) ve (4.2.22), (4.2.15) de yerine yazılırsa $\forall X, Y \in \Gamma(D_2)$ için

$$\begin{aligned}&\nabla_X f P_2 Y + h(X, f P_2 Y) - A_{w P_2 Y} X + \nabla_X^\perp w P_2 Y \\ &= f \nabla_X Y + w \nabla_X Y + B h(X, Y) + C h(X, Y)\end{aligned}\tag{4.2.23}$$

bulunur. Bu son eşitlikte X ile Y nin rollerini değiştirerek

$$\begin{aligned}&\nabla_Y f P_2 X + h(Y, f P_2 X) - A_{w P_2 X} Y + \nabla_Y^\perp w P_2 X \\ &= f \nabla_Y X + w \nabla_Y X + B h(Y, X) + C h(Y, X)\end{aligned}\tag{4.2.24}$$

yazılır. (4.2.23) ve (4.2.24) eşitlikleri taraf tarafa çıkarılırsa

$$\begin{aligned}f[X, Y] + w[X, Y] &= \nabla_X f P_2 Y - \nabla_Y f P_2 X + A_{w P_2 X} Y - A_{w P_2 Y} X \\ &\quad + \nabla_X^\perp w P_2 Y - \nabla_Y^\perp w P_2 X\end{aligned}\tag{4.2.25}$$

elde edilir. (4.2.25) ün teğet kısımları eşitlenirse

$$f[X, Y] = \nabla_X f P_2 Y - \nabla_Y f P_2 X + A_{w P_2 X} Y - A_{w P_2 Y} X$$

bulunur. Buradan

$$P_1 f [X, Y] = P_1 \{ \nabla_X f P_2 Y - \nabla_Y f P_2 X \} - P_1 \{ A_{wP_2Y} X - A_{wP_2X} Y \} \quad (4.2.26)$$

yazılabilir.

Şimdi, kabul edelim ki D_2 distribüsyonu integrallenebilir olsun. Bu durumda $\forall X, Y \in \Gamma(D_2)$ için $[X, Y] \in \Gamma(D_2)$ olacağından $P_1 f [X, Y] = 0$ dır. Böylece (4.2.26) dan (4.2.14) eşitliğine ulaşılır.

Tersine (4.2.14) eşitliği sağlanıyorsa $P_1 f [X, Y] = 0$. Buradan da $[X, Y] \in \Gamma(D_2)$ yani D_2 distribüsyonunun integrallenebilir olduğu görülür. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

Teorem 4.2.5. $(\overline{M}, \varphi, \xi, g)$ bir Lorentzian parakosimplektik manifold ve M de $\overline{M}$ nin bir mixed-geodezik semi-slant altmanifoldu olsun. Bu durumda D_1 distribüsyonunun integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart $X \in \Gamma(D_1)$ ve $N \in \Gamma(T^\perp M)$ için

$$\varphi A_N X = A_N \varphi X \quad (4.2.27)$$

olmasıdır.

İspat. $M, \overline{M}$ nin bir mixed-geodezik semi-slant altmanifoldu olduğundan herhangi bir $X \in \Gamma(D_1)$, $Y \in \Gamma(D_2)$ ve $N \in \Gamma(T^\perp M)$ için

$$g(A_N X, Y) = g(h(X, Y), N) = 0$$

dır. Bu ise $A_N X$ in D_2 de bileşeni olmadığını gösterir. Böylece

$$g(\varphi A_N X, Y) = g(A_N X, \varphi Y) = g(h(X, \varphi Y), N) \quad (4.2.28)$$

ve

$$g(A_N \varphi X, Y) = g(h(\varphi X, Y), N) \quad (4.2.29)$$

yazılabilir. Buradan her $X, Y \in \Gamma(D_1)$ için

$$g(\varphi A_N X - A_N \varphi X, Y) = g(h(X, \varphi Y) - h(\varphi X, Y), N)$$

elde edilir. Böylece Teorem 4.2.4 (i) ve bu son eşitlikten D_1 in integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart

$$\varphi A_N X - A_N \varphi X = 0, \quad X \in \Gamma(D_1), \quad N \in \Gamma(T^\perp M)$$

olmasıdır. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

$(\overline{M}, \varphi, \xi, g)$ bir Lorentzian parakosimplektik manifold ve M de $\overline{M}$ nin bir semi-slant altmanifoldu olmak üzere (4.2.15) eşitliğinde Gauss-Weingarten formülü, (4.1.1) ve (4.1.2) kullanılarak $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$(\nabla_X f)Y = A_{wY}X + Bh(X, Y) \quad (4.2.30)$$

ve

$$(\nabla_X w)Y = Ch(X, Y) - h(X, fY) \quad (4.2.31)$$

elde edilir. Burada f ve w nın kovaryant türevleri

$$(\nabla_X f)Y = \nabla_X fY - f \nabla_X Y$$

$$(\nabla_X w)Y = \nabla_X^\perp wY - w \nabla_X Y$$

ile tanımlanır.

f nin paralel olması yani $\nabla f = 0$ olması Lorentzian parakosimplektik manifoldlar üzerinde ayrı bir öneme sahiptir. Şimdi bu durumu karakterize edecek şekilde aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 4.2.6. *$(\overline{M}, \varphi, \xi, g)$ bir Lorentzian parakosimplektik manifold ve M de $\overline{M}$ nin bir semi-slant altmanifoldu olsun. Eğer $\nabla f = 0$ ise bu durumda D_1 ve D_2 distribüsyonları integrallenebilir ve bu distribüsyonların integral altmanifoldları M de total geodeziktir.*

İspat. $\nabla_X f = 0$ ise (4.2.30) dan herhangi bir $Y \in \Gamma(D_1)$ ve $X \in \Gamma(TM)$ için

$$Bh(X, Y) = 0 \quad (4.2.32)$$

bulunur. Böylece (1.3.14), (4.1.2) ve (4.2.32) den $Y \in \Gamma(D_1)$ ve $X, Z \in \Gamma(TM)$ için

$$0 = g(Bh(X, Y), Z) = g(\varphi h(X, Y), Z) = g(h(X, Y), \varphi Z)$$

elde edilir. Buradan

$$g(h(X, Y), wP_2Z) = 0 \quad (4.2.33)$$

ve

$$g(\varphi h(X, Y), wP_2 Z) = 0 \quad (4.2.34)$$

olur. Böylece $\overline{M}$ nin bir Lorentzian parakosimplektik manifold olduğu ve (4.2.33) eşitliği göz önüne alınarak

$$\begin{aligned} 0 &= g(\varphi h(X, Y), wP_2 \nabla_X Y) \\ &= g(\nabla_X \varphi Y - \varphi \nabla_X Y + h(X, \varphi Y), wP_2 \nabla_X Y) \\ &= -g(\varphi \nabla_X Y, wP_2 \nabla_X Y) + g(h(X, \varphi Y), wP_2 \nabla_X Y) \\ &= -g(wP_2 \nabla_X Y, wP_2 \nabla_X Y) \end{aligned} \quad (4.2.35)$$

yazılabilir. Bu son eşitlikte (4.1.14) kullanılarak

$$\begin{aligned} 0 &= -g(wP_2 \nabla_X Y, wP_2 \nabla_X Y) \\ &= -\sin^2 \theta \{g(P_2 \nabla_X Y, P_2 \nabla_X Y) + (\eta(P_2 \nabla_X Y))^2\} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise $P_2 \nabla_X Y = 0$ yani $\nabla_X Y \in \Gamma(D_1)$ olduğunu gösterir.

Şimdi $Y \in \Gamma(D_1)$ ve $V \in \Gamma(D_2)$ alalım. D_1 ve D_2 ortogonal distribüsyonlar olduğundan herhangi bir $Z \in \Gamma(TM)$ için $g(Y, \nabla_Z V) = 0$, $\forall Y \in \Gamma(D_1)$, yani $\nabla_Z V \in \Gamma(D_2)$ olur. Bu da D_2 nin integrallenebilir olduğunu gösterir. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

Lemma 4.2.1. *$(\overline{M}, \varphi, \xi, g)$ bir Lorentzian parakosimplektik manifold ve M de $\overline{M}$ nin bir semi-slant altmanifoldu olsun. Bu durumda $i \neq j$ olmak üzere M nin bir D_i - D_j -geodezik altmanifold olması için gerek ve yeter şart $N \in \Gamma(T^\perp M)$ için*

$$A_N X \in \Gamma(D_i \oplus Sp\{\xi\}), \quad X \in \Gamma(D_i \oplus Sp\{\xi\}), \quad i = 1, 2 \quad (4.2.36)$$

olmasıdır.

İspat. Kabul edelim ki M bir D_1 - D_2 -geodezik altmanifold olsun. Bu durumda $X \in \Gamma(D_1)$, $Y \in \Gamma(D_2)$ ve $N \in \Gamma(T^\perp M)$ için

$$g(A_N X, Y) = g(h(X, Y), N) = 0 \quad (4.2.37)$$

elde edilir. Öyleyse $X \in \Gamma(D_1)$ için $A_N X \in \Gamma(D_1 \oplus Sp\{\xi\})$ dir. h simetrik olduğundan benzer şekilde $Y \in \Gamma(D_2)$ için $A_N Y \in \Gamma(D_2 \oplus Sp\{\xi\})$ bulunur.

Tersine $i = 1, 2$ ve $X \in \Gamma(D_i \oplus Sp\{\xi\})$ için $A_N X \in \Gamma(D_i \oplus Sp\{\xi\})$ ise (4.2.37) den M nin bir D_i - D_j -geodezik altmanifold olduğu kolaylıkla görülür. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

Teorem 4.2.7. $(\overline{M}, \varphi, \xi, g)$ bir Lorentzian parakosimplektik manifold ve M de $\overline{M}$ nin bir semi-slant altmanifoldu olsun. Eğer $\nabla w = 0$ ise bu durumda M bir mixed geodezik altmanifolddur. Ayrıca;

- (i) eğer $X, Y \in \Gamma(D_1)$ ise M bir D_1 -geodezik altmanifold veya $h(X, Y)$, C^2 nin karakteristik değeri 1 olan bir karakteristik vektörüdür.
- (ii) eğer $X, Y \in \Gamma(D_2)$ ise M bir D_2 -geodezik altmanifold veya $h(X, Y)$, C^2 nin karakteristik değeri $\cos^2 \theta$ olan bir karakteristik vektörüdür.

İspat. Eğer $\nabla w = 0$ ise (4.2.31) dan

$$Ch(X, Y) = h(X, fY), \quad X, Y \in \Gamma(TM)$$

yazılır. Buradan D_1 in invaryant ve D_2 nin θ slant açısına sahip slant distribüsyon olduğu göz önüne alınarak $X \in \Gamma(D_1), Y \in \Gamma(D_2)$ için

$$\begin{aligned} C^2 h(X, Y) &= Ch(X, fY) = h(X, f^2 Y) \\ &= h(X, \cos^2 \theta (Y + \eta(Y)\xi)) \\ &= \cos^2 \theta h(X, Y) \end{aligned} \tag{4.2.38}$$

ve

$$\begin{aligned} C^2 h(X, Y) &= C^2 h(Y, X) = Ch(Y, fX) \\ &= h(Y, f^2 X) = h(Y, X) = h(X, Y) \end{aligned} \tag{4.2.39}$$

elde edilir. (4.2.38) ve (4.2.39) dan

$$\sin^2 \theta h(X, Y) = 0$$

bulunur. Bu ise $h(X, Y) = 0$, $X \in \Gamma(D_1), Y \in \Gamma(D_2)$, olduğunu gösterir. Böylece M bir mixed geodezik semi-slant altmanifold olur.

Benzer şekilde $\forall X, Y \in \Gamma(D_1)$ için

$$C^2h(X, Y) = h(X, Y)$$

ve $\forall X, Y \in \Gamma(D_2)$ için

$$C^2h(X, Y) = \cos^2 \theta h(X, Y)$$

dir. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

Teorem 4.2.8. *$(\overline{M}, \varphi, \xi, g)$ bir Lorentzian parakosimplektik manifold ve M de $\overline{M}$ nin bir semi-slant altmanifoldu olsun. Bu durumda M nin bir semi-slant çarpım altmanifoldu olması için gerek ve yeter şart $\forall Z \in \Gamma(TM), X \in \Gamma(D_1)$ için*

$$Bh(X, Y) = 0 \quad \text{ve} \quad h(Z, fX) = Ch(Z, X) \quad (4.2.40)$$

olmasıdır.

İspat. $M, \overline{M}$ nin bir semi-slant çarpım altmanifoldu ise D_1 ve D_2 , M de total geodezik distribüsyonlardır. $Z \in \Gamma(TM)$ ve $X \in \Gamma(D_1)$ olsun. Bu durumda (4.2.30) dan

$$Bh(X, Z) = 0$$

olur. Diğer taraftan Teorem 4.2.6 den

$$(\nabla_Z w)X = \nabla_Z^\perp wX - w(\nabla_Z X) = 0 \quad (4.2.41)$$

dır. Böylece (4.2.31) dan

$$h(Z, fX) = Ch(Z, X)$$

elde edilir.

Tersine (4.2.40) eşitliğinin sağlandığını kabul edelim. Öyleyse (4.2.31) ve (4.2.41) den

$$0 = (\nabla_Z w)X = -w(\nabla_Z X), \quad Z \in \Gamma(TM), \quad X \in \Gamma(D_1)$$

elde edilir. Bu ise $\nabla_Z X \in \Gamma(D_1)$ olduğunu gösterir. D_2, D_1 e ortogonal olduğundan $Z \in \Gamma(TM), Y \in \Gamma(D_2)$ için $\nabla_Z Y \in \Gamma(D_2)$ dir. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

Sonuç 4.2.2. $(\overline{M}, \varphi, \xi, g)$ bir Lorentzian parakosimplektik manifold ve M de $\overline{M}$ nin bir semi-slant altmanifoldu olsun. $\nabla w = 0$ olması için gerek ve yeter şart $\forall Z \in \Gamma(TM), N \in \Gamma(T^\perp M)$ için

$$A_{CN}Z = A_N fZ \quad (4.2.42)$$

olmasıdır.

İspat. (4.2.31) ve (1.3.14) dan $\forall X, Z \in \Gamma(TM), N \in \Gamma(T^\perp M)$ için

$$\begin{aligned} g((\nabla_X w)Z, N) &= g(Ch(X, Z) - h(X, fZ), N) \\ &= g(Ch(X, Z), N) - g(h(X, fZ), N) \\ &= g(\varphi h(X, Z), N) - g(h(X, fZ), N) \\ &= g(h(X, Z), \varphi N) - g(h(X, fZ), N) \\ &= g(h(X, Z), CN) - g(h(X, fZ), N) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu son eşitlikte (1.3.43) kullanılırsa

$$g((\nabla_X w)Z, N) = g(A_{CN}Z - A_N fZ, X)$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

Sonuç 4.2.3. $(\overline{M}, \varphi, \xi, g)$ bir Lorentzian parakosimplektik manifold ve M de $\overline{M}$ nin bir semi-slant altmanifoldu olsun. $\nabla f = 0$ olması için gerek ve yeter şart $\forall Y, Z \in \Gamma(TM)$ için

$$A_{wP_2Y}Z = -A_{wP_2Z}Y \quad (4.2.43)$$

olmasıdır.

İspat. (4.2.30) ve (1.3.14) dan $\forall X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned} g((\nabla_X f)Y, Z) &= g(A_{wY}X + Bh(X, Y), Z) \\ &= g(A_{wP_2Y}X, Z) + g(h(X, Y), wP_2Z) \\ &= g(A_{wP_2Y}X, Z) + g(A_{wP_2Z}X, Y) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan A Weingarten dönüşümü simetrik olduğundan

$$g((\nabla_X f)Y, Z) = g(X, A_{wP_2Y}Z + A_{wP_2Z}Y)$$

yazılabilir. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

Şimdi, $(\overline{M}, \varphi, \xi, g)$ bir Lorentzian para-Sasakian manifold ve M de $\overline{M}$ nin bir semi-slant altmanifoldu olsun. Semi-slant altmanifold tanımında yer alan distribüsyonların integrallenebilirliğini incelemek için, oldukça kullanışlı olan bazı eşitlikleri verelim.

Lemma 4.2.2. $(\overline{M}, \varphi, \xi, g)$ bir Lorentzian para-Sasakian manifold ve M de $\overline{M}$ nin bir semi-slant altmanifoldu olsun. Bu durumda $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$P_1(\nabla_X \varphi P_1 Y) + P_1(\nabla_X f P_2 Y) = \varphi P_1 \nabla_X Y + P_1 A_{w P_2 Y} X + \eta(Y) P_1 X \quad (4.2.44)$$

$$\begin{aligned} P_2(\nabla_X \varphi P_1 Y) + P_2(\nabla_X f P_2 Y) &= f P_2 \nabla_X Y + P_2 A_{w P_2 Y} X \\ &\quad + Bh(X, Y) + \eta(Y) P_2 X \end{aligned} \quad (4.2.45)$$

$$\eta(\nabla_X \varphi P_1 Y) + \eta(\nabla_X f P_2 Y) = \eta(A_{w P_2 Y} X) + g(X, Y) + 3\eta(X)\eta(Y) \quad (4.2.46)$$

$$h(X, \varphi P_1 Y) + h(X, f P_2 Y) + \nabla_X^\perp w P_2 Y = w P_2 \nabla_X Y + Ch(X, Y) \quad (4.2.47)$$

dir.

İspat. $(\overline{M}, \varphi, \xi, g)$ bir Lorentzian para-Sasakian manifold olduğundan (1.3.19) de Gauss formülü, (4.2.8) ve (4.1.2) kullanılarak

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}_X \varphi Y &= \varphi \overline{\nabla}_X Y + (g(X, Y) + 2\eta(X)\eta(Y))\xi + \eta(Y)X \\ &= \varphi \nabla_X Y + \varphi h(X, Y) + (g(X, Y) + 2\eta(X)\eta(Y))\xi + \eta(Y)X \\ &= \varphi P_1 \nabla_X Y + f P_2 \nabla_X Y + w P_2 \nabla_X Y + Bh(X, Y) + Ch(X, Y) \\ &\quad + (g(X, Y) + 2\eta(X)\eta(Y))\xi + \eta(Y)X \end{aligned} \quad (4.2.48)$$

bulunur. (4.2.48) ve (4.2.21) den

$$\begin{aligned} &\varphi P_1 \nabla_X Y + f P_2 \nabla_X Y + w P_2 \nabla_X Y + Bh(X, Y) + Ch(X, Y) \\ &\quad + (g(X, Y) + 2\eta(X)\eta(Y))\xi + \eta(Y)X \\ &= \nabla_X \varphi P_1 Y + h(X, \varphi P_1 Y) + \nabla_X f P_2 Y + h(X, f P_2 Y) \\ &\quad - A_{w P_2 Y} X + \nabla_X^\perp w P_2 Y \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan (4.2.7) kullanılarak

$$\begin{aligned}
& \varphi P_1 \nabla_X Y + f P_2 \nabla_X Y + w P_2 \nabla_X Y + B h(X, Y) + C h(X, Y) \\
& + (g(X, Y) + 2\eta(X)\eta(Y))\xi + \eta(Y)(P_1 X + P_2 X + \eta(X)\xi) \\
= & P_1(\nabla_X \varphi P_1 Y) + P_2(\nabla_X \varphi P_1 Y) + \eta(\nabla_X \varphi P_1 Y)\xi \\
& + P_1(\nabla_X f P_2 Y) + P_2(\nabla_X f P_2 Y) + \eta(\nabla_X f P_2 Y)\xi \\
& - P_1(A_{w P_2 Y} X) - P_2(A_{w P_2 Y} X) - \eta(A_{w P_2 Y} X)\xi \\
& + \nabla_X^\perp w P_2 Y + h(X, \varphi P_1 Y) + h(X, f P_2 Y)
\end{aligned}$$

yazılır. Bu son eşitlikte sırasıyla D_1 , D_2 , $Sp\{\xi\}$ ve $T^\perp M$ deki bileşenler birbirine eşitlenirse ispat tamamlanır. $\square$

Teorem 4.2.9. $(\overline{M}, \varphi, \xi, g)$ bir Lorentzian para-Sasakian manifold ve M de $\overline{M}$ nin bir semi-slant altmanifoldu olsun. Bu durumda

(i) D_1 distribüsyonunun integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart $X, Y \in \Gamma(D_1)$ için

$$h(X, \varphi Y) = h(\varphi X, Y) \quad (4.2.49)$$

olmasıdır.

(ii) D_2 distribüsyonunun integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart $X, Y \in \Gamma(D_2)$ için

$$P_1(\nabla_X f Y - \nabla_Y f X) = P_1(A_{w Y} X - A_{w X} Y) \quad (4.2.50)$$

olmasıdır.

İspat. (i) $X, Y \in \Gamma(D_1)$ olsun. $g(X, \xi) = 0$ ve $g(Y, \xi) = 0$ olduğundan (1.3.21) göz önüne alınarak

$$g(\overline{\nabla}_Y X, \xi) = -g(X, \overline{\nabla}_Y \xi) = -g(Y, \varphi X) \quad (4.2.51)$$

ve

$$g(\overline{\nabla}_X Y, \xi) = -g(Y, \overline{\nabla}_X \xi) = -g(Y, \varphi X) \quad (4.2.52)$$

elde edilir. (4.2.51), (4.2.52) ve (1.3.14) den

$$g([X, Y], \xi) = -g(Y, \varphi X) + g(Y, \varphi X) = 0$$

bulunur. Öyleyse $[X, Y] \notin Sp\{\xi\}$ olur. Diğer taraftan $X, Y \in \Gamma(D_1)$ için (4.2.47) den

$$h(X, \varphi Y) = wP_2 \nabla_X Y + Ch(X, Y)$$

yazılır. Benzer şekilde

$$h(Y, \varphi X) = wP_2 \nabla_Y X + Ch(Y, X)$$

dir. Bu iki eşitlikten

$$h(X, \varphi Y) - h(Y, \varphi X) = wP_2[X, Y] \quad (4.2.53)$$

elde edilir.

Kabul edelim ki D_1 distribüsyonu integrallenebilir olsun. Bu durumda $X, Y \in \Gamma(D_1)$ için $P_2[X, Y] = 0$ olacağından (4.2.49) elde edilir.

Tersine $X, Y \in \Gamma(D_1)$ için $h(X, \varphi Y) = h(Y, \varphi X)$ ise M bir semi-slant altmanifold olduğundan (4.2.53) den $P_2[X, Y] = 0$ yani D_1 distribüsyonu integrallenebilirdir.

(ii) $X, Y \in \Gamma(D_2)$ için (i) şikkındaki ispata benze şekilde $[X, Y] \notin Sp\{\xi\}$ olduğu kolaylıkla görülebilir. Diğer taraftan (4.2.44) den $\forall X, Y \in \Gamma(D_2)$ için

$$P_1(\nabla_X f P_2 Y) = \varphi P_1 \nabla_X Y + P_1 A_{wP_2 Y} X$$

dir. Burada X ile Y nin rolleri değiştirilirse

$$P_1(\nabla_Y f P_2 X) = \varphi P_1 \nabla_Y X + P_1 A_{wP_2 X} Y$$

olur. Bu son iki eşitlikten

$$P_1(\nabla_X f Y - \nabla_Y f X) - P_1(A_{wY} X - A_{wX} Y) = \varphi P_1[X, Y] \quad (4.2.54)$$

elde edilir.

Kabul edelim ki D_2 distribüsyonu integrallenebilir olsun. Bu durumda $X, Y \in \Gamma(D_2)$ için $[X, Y] \in \Gamma(D_2)$ olacağından $P_1[X, Y] = 0$ dır. Buradan (4.2.50) eşitliğine ulaşılır.

Tersine (4.2.50) eşitliği sağlanıyor ise $\varphi P_1[X, Y] = 0$, $X, Y \in \Gamma(D_2)$, olur ki bu da D_2 distribüsyonunun integrallenebilir olduğunu gösterir. Böylece ispat tamamlanır.

□

Önerme 4.2.1. $(\overline{M}, \varphi, \xi, g)$ bir Lorentzian para-Sasakian manifold ve M de $\overline{M}$ nin bir semi-slant altmanifoldu olsun. Bu durumda

$$[X, \xi] \in \Gamma(D_1), \quad X \in \Gamma(D_1) \quad (4.2.55)$$

ve

$$[Y, \xi] \in \Gamma(D_2), \quad Y \in \Gamma(D_2) \quad (4.2.56)$$

dir.

İspat. $(\overline{M}, \varphi, \xi, g)$ bir Lorentzian para-Sasakian manifold olduğundan (1.3.19) eşitliği $X \in \Gamma(D_1)$ için

$$\overline{\nabla}_\xi \varphi X = \varphi \overline{\nabla}_\xi X \quad (4.2.57)$$

olur. Burada Gauss formülü kullanılarak

$$h(\varphi X, \xi) = 0 \quad \text{ve} \quad h(X, \xi) = 0, \quad X \in \Gamma(D_1)$$

bulunur. Öyleyse (4.2.57) dan

$$\nabla_\xi \varphi X = \varphi \nabla_\xi X$$

elde edilir. Böylece herhangi bir $X \in \Gamma(D_1)$ için $\nabla_\xi X \in \Gamma(D_1)$ olduğu görülür. Diğer taraftan D_1 ve D_2 ortogonal distribüsyonlar olduğundan herhangi bir $Y \in \Gamma(D_2)$ için $\nabla_\xi Y \in \Gamma(D_2)$ dir. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

Teorem 4.2.9 ve Önerme 4.2.1 den aşağıdaki sonuçlara ulaşılır:

Sonuç 4.2.4. $(\overline{M}, \varphi, \xi, g)$ bir Lorentzian para-Sasakian manifold ve M de $\overline{M}$ nin bir semi-slant altmanifoldu olsun. Bu durumda $D_1 \oplus Sp\{\xi\}$ distribüsyonunun integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart $X, Y \in \Gamma(D_1)$ için

$$h(X, \varphi Y) = h(\varphi X, Y)$$

olmasıdır.

Sonuç 4.2.5. $(\overline{M}, \varphi, \xi, g)$ bir Lorentzian para-Sasakian manifold ve M de $\overline{M}$ nin bir semi-slant altmanifoldu olsun. Bu durumda $D_2 \oplus Sp\{\xi\}$ distribüsyonunun integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart $X, Y \in \Gamma(D_2)$ için

$$(\nabla_X fY - \nabla_Y fX - A_{wY} X + A_{wX} Y) \in \Gamma(D_2)$$

olmasıdır.

4.3 Lorentzian Parakosimplektik Manifoldların Warped Çarpım Altmanifoldları

Bu kısımda öncelikle Lorentzian parakosimplektik manifoldların warped çarpım altmanifoldlarının bazı özel durumlar için yokluğu gösterilecektir. Daha sonra Lorentzian parakosimplektik manifoldların semi-invariant warped çarpım altmanifoldları tanıtılarak bir örnek verildikten sonra bu altmanifoldların tanımında yer alan distribüsyonların integrallenebilirliği araştırılacaktır. Ayrıca bu kısımda Lorentzian parakosimplektik manifoldların semi-slant warped çarpım altmanifoldları ve anti-slant warped çarpım altmanifoldları ile ilgili bazı yokluk teoremleri verilecektir.

Lemma 4.3.1. $M, (\overline{M}, \varphi, \xi, g)$ Lorentzian parakosimplektik manifoldunun bir altmanifoldu olsun. Bu durumda $\forall X \in \Gamma(TM)$ için

$$\nabla_X \xi = 0, \quad (4.3.1)$$

$$h(X, \xi) = 0 \quad (4.3.2)$$

dır.

İspat. $\overline{M}$ bir Lorentzian parakosimplektik manifold olduğundan $\overline{\nabla} \varphi = 0$ eşitliği göz önüne alınırsa $\forall X \in \Gamma(TM)$ için

$$\overline{\nabla}_X \xi = 0 \quad (4.3.3)$$

dır. Buradan Gauss formülü kullanılarak (4.3.1) ve (4.3.2) elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

Teorem 4.3.1. $(\overline{M}, \varphi, \xi, g)$ bir Lorentzian parakosimplektik manifold ve $M =_{f_2} N_1 \times_{f_1} N_2$ de $\overline{M}$ nin bir doubly warped çarpım altmanifoldu olsun. Bu durumda, eğer

(i) $\xi \in \Gamma(TN_1)$ ise f_2 sabittir.

(ii) $\xi \in \Gamma(TN_2)$ ise f_1 sabittir.

İspat. (i) $\xi \in \Gamma(TN_1)$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $Z \in \Gamma(TN_2)$ için Lemma 1.2.2 ve (4.3.1) den

$$\xi(\ln f_1)Z + Z(\ln f_2)\xi = 0$$

yazılır. Bu ise $Z(\ln f_2) = 0, \forall Z \in \Gamma(TN_2)$, yani f_2 nin sabit olduğunu gösterir.

(ii) $\xi \in \Gamma(TN_2)$ olsun. Öyleyse $X \in \Gamma(TN_1)$ olmak üzere Lemma 1.2.2 ve (4.3.1) göz önüne alınarak

$$X(\ln f_1)\xi + \xi(\ln f_2)X = 0$$

elde edilir. Böylece $X(\ln f_1) = 0, \forall X \in \Gamma(TN_1)$, yani f_1 sabit olur ve ispat tamamlanır. $\square$

Böylece aşağıdaki sonucu verebiliriz:

Sonuç 4.3.1. $(\overline{M}, \varphi, \xi, g)$ Lorentzian parakosimplektik manifoldunun $\xi \in \Gamma(TN_2)$ olacak şekilde bir $M = N_1 \times_{\tilde{f}} N_2$ warped çarpım altmanifoldu yoktur.

$(\overline{M}, \varphi, \xi, g)$ Lorentzian parakosimplektik manifoldunun $\xi \in \Gamma(TN_1)$ olacak şekilde bir $M = N_1 \times_{\tilde{f}} N_2$ warped çarpım altmanifoldunu incelemek için öncelikle aşağıdaki lemma verilebilir:

Lemma 4.3.2. $M = N_1 \times_{\tilde{f}} N_2$, $(\overline{M}, \varphi, \xi, g)$ Lorentzian parakosimplektik manifoldunun $\xi \in \Gamma(TN_1)$ olacak şekilde bir warped çarpım altmanifoldu olsun. Bu durumda $\forall X, Y \in \Gamma(TN_1)$ ve $\forall Z, W \in \Gamma(TN_2)$ için

$$\xi(\ln \tilde{f}) = 0, \quad (4.3.4)$$

$$A_{wZ} X = -Bh(X, Z), \quad (4.3.5)$$

$$g(h(X, Y), wZ) = -g(h(X, Z), wY), \quad (4.3.6)$$

$$g(h(X, W), wZ) = -g(h(X, Z), wW), \quad (4.3.7)$$

dir.

İspat. $(\overline{M}, \varphi, \xi, g)$ Lorentzian parakosimplektik manifold olduğundan (4.3.1) ve Lemma 1.2.1 den kolaylıkla (4.3.4) eşitliğine ulaşılır. Benzer şekilde Lemma 1.2.1

gözönüne alınarak (4.2.16) dan

$$\begin{aligned}
X(\ln \tilde{f})fZ + h(X, fZ) - A_{wZ}X + \nabla_X^\perp wZ &= X(\ln \tilde{f})fZ + w \nabla_X Z \\
&\quad + Bh(X, Z) + Ch(X, Z) \\
h(X, fZ) - A_{wZ}X + \nabla_X^\perp wZ &= Bh(X, Z) + Ch(X, Z) \quad (4.3.8)
\end{aligned}$$

yazılır. (4.3.8) in teğet kısımları birbirine eşitlenerek (4.3.5) elde edilir. (4.3.5) eşitliğinin her iki tarafı sırasıyla $Y \in \Gamma(TN_1)$ ve $W \in \Gamma(TN_2)$ ile iç çarpıma tabi tutulursa

$$\begin{aligned}
-g(A_{wZ}X, Y) &= g(Bh(X, Z), Y) \\
-g(h(X, Y), wZ) &= g(h(X, Z), \varphi Y)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
-g(A_{wZ}X, W) &= g(Bh(X, Z), W) \\
-g(h(X, W), wZ) &= g(h(X, Z), \varphi W)
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan sırasıyla (4.3.6) ve (4.3.7) eşitlikleri elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

Teorem 4.3.2. $(\overline{M}, \varphi, \xi, g)$ bir Lorentzian parakosimplektik manifoldunun $\xi \in \Gamma(TM^\perp)$ olacak şekilde bir $M =_{f_2} N_1 \times_{f_1} N_2$ doubly warped çarpım altmanifoldu yoktur.

İspat. $\xi \in \Gamma(TM^\perp)$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda her $X \in \Gamma(TM)$ için $\eta(X) = 0$ olduğu açıktır. Öyleyse $X, Y \in \Gamma(TN_1)$ ve $Z \in \Gamma(TN_2)$ için Lemma 1.2.1, (1.3.41) ve (1.3.10) eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
g(\nabla_Z X, Y) &= g(\nabla_X Z, Y) \\
&= g(\overline{\nabla}_X Z, Y) \\
&= g(\varphi \overline{\nabla}_X Z, \varphi Y) - \eta(\overline{\nabla}_X Z) \eta(Y) \\
&= g(\varphi \overline{\nabla}_X Z, \varphi Y) \\
&= g(\overline{\nabla}_X \varphi Z, \varphi Y) \quad (4.3.9)
\end{aligned}$$

bulunur. Diğer taraftan

$$g(\varphi Z, \varphi Y) = g(Y, Z) = 0$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
g(\bar{\nabla}_X \varphi Z, \varphi Y) &= -g(\varphi Z, \bar{\nabla}_X \varphi Y) \\
&= -g(\varphi Z, \varphi \bar{\nabla}_X Y) \\
&= -g(Z, \bar{\nabla}_X Y) \\
&= -g(Z, \nabla_X Y)
\end{aligned}$$

dir. $X, Y \in \Gamma(TN_1)$ için $\nabla_X Y \in \Gamma(TN_1)$ olduğundan

$$g(\bar{\nabla}_X \varphi Z, \varphi Y) = -g(Z, \nabla_X Y) = 0 \quad (4.3.10)$$

elde edilir. (4.3.9) ve (4.3.10) dan

$$g(\nabla_Z X, Y) = 0$$

olur. Buradan Lemma 1.2.1 göz önüne alınarak

$$Z(\ln f_2)g(X, Y) = 0, \quad \forall X, Y \in \Gamma(TN_1), Z \in \Gamma(TN_2),$$

bulunur. Böylece f_2 nin bir sabit fonksiyon olduğu görülür ve ispat tamamlanır. $\square$

Teorem 4.3.3. $(\bar{M}, \varphi, \xi, g)$ bir Lorentzian parakosimplektik manifold ve $M = M_T \times_{\tilde{f}} M_{\perp}$ de $\bar{M}$ nin $\xi \in \Gamma(TM^{\perp})$ olacak şekilde bir semi-invaryant warped çarpımaltmanifoldu olsun. Bu durumda M bir alışılmış belirsiz çarpım manifoldudur.

İspat. $\xi \in \Gamma(TM^{\perp})$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda her $X \in \Gamma(TM)$ için $\eta(X) = 0$ dir. Öyleyse $X \in \Gamma(TM_T)$ ve $Z, W \in \Gamma(TM_{\perp})$ için Lemma 1.2.1, (1.3.41) ve (1.3.10) kullanılarak

$$\begin{aligned}
g(\nabla_X Z, W) &= g(\nabla_Z X, W) = g(\bar{\nabla}_Z X, W) \\
&= g(\varphi \bar{\nabla}_Z X, \varphi W) - \eta(\bar{\nabla}_Z X) \eta(W) \\
&= g(\varphi \bar{\nabla}_Z X, \varphi W)
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan $\bar{M}$ bir Lorentzian parakosimplektik manifold olduğundan (1.3.41),

(1.3.42), (1.3.10) ve (1.3.43) eşitlikleri göz önüne alınarak

$$\begin{aligned}
X(\ln \tilde{f})g(Z, W) &= g(\bar{\nabla}_Z \varphi X, \varphi W) = g(h(Z, \varphi X), \varphi W) \\
&= g(\bar{\nabla}_{\varphi X} Z, \varphi W) = g(\bar{\nabla}_{\varphi X} \varphi Z, W) \\
&= -g(A_{\varphi Z} \varphi X, W) = -g(h(\varphi X, W), \varphi Z) \\
&= -g(\bar{\nabla}_W \varphi X, \varphi Z) = -g(\varphi \bar{\nabla}_W X, \varphi Z) \\
&= -g(\bar{\nabla}_W X, Z) = -g(\bar{\nabla}_X W, Z) \\
&= -X(\ln \tilde{f})g(W, Z)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise

$$2X(\ln \tilde{f})g(W, Z) = 0$$

olduğunu verir. Yani $\tilde{f}$ fonksiyonu sabittir. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

Teorem 4.3.4. $(\bar{M}, \varphi, \xi, g)$ bir Lorentzian parakosimplektik manifold ve $M = M_T \times_{\tilde{f}} M_{\perp}$ de $\bar{M}$ nin $\xi \in \Gamma(TM_{\perp})$ olacak şekilde bir semi-invariant warped çarpımaltnmanifoldu olsun. Bu durumda M bir alışılmış belirsiz çarpım manifoldudur.

İspat. $\xi \in \Gamma(TM_{\perp})$ ve $X \in \Gamma(TM_T)$ olsun. Lemma 1.2.1 göz önüne alınarak (4.3.1) den

$$\nabla_X \xi = \nabla_{\xi} X = X(\ln \tilde{f})\xi = 0$$

elde edilir. Böylece $X(\ln \tilde{f}) = 0$ bulunur ve ispat tamamlanır. $\square$

Örnek 4.3.1. (x_i, y_j, t) koordinat sistemi ile verilen 5-boyutlu bir $\bar{M}$ reel uzayn üzerinde

$$\eta = dt, \quad \xi = -\frac{\partial}{\partial t},$$

$$\varphi\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (1 \leq i \leq 2)$$

$$\varphi\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right) = -\frac{\partial}{\partial y_j}, \quad (1 \leq j \leq 2)$$

$$\varphi\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = 0,$$

$$g = (dx_i)^2 + (dy_j)^2 - \eta \otimes \eta$$

olacak şekilde bir φ $(1, 1)$ -tensör alanını, ξ vektör alanını, η 1-formunu ve g Lorentzian metriğini tanımlayalım. Bu durumda (φ, ξ, η, g) dörtlüsü $\overline{M}$ üzerinde bir Lorentzian hemen hemen parakontakt yapı olur. Böylece $\overline{M}$, (φ, ξ, η, g) Lorentzian hemen hemen parakontakt yapısı ile birlikte bir Lorentzian hemen hemen parakontakt manifolddur.

Şimdi $\overline{M}$ Lorentzian hemen hemen parakontakt manifoldunun

$$\Omega(v, \theta, \beta, u) = (v \cos \theta, v \sin \theta, v \cos \beta, v \sin \beta, \sqrt{2}u)$$

dönüşümü ile verilen M altmanifoldunu gözönüne alalım. Bu durumda

$$W_1 = (\cos \theta, \sin \theta, \cos \beta, \sin \beta, 0),$$

$$W_2 = (-v \sin \theta, v \cos \theta, 0, 0, 0),$$

$$W_3 = (0, 0, -v \sin \beta, v \cos \beta, 0),$$

$$W_4 = (0, 0, 0, 0, \sqrt{2}),$$

olmak üzere $Sp \{W_1, W_2, W_3, W_4\} = TM$ dir. Diğer taraftan

$$\varphi W_1 = (\cos \theta, \sin \theta, -\cos \beta, -\sin \beta, 0)$$

$$\varphi W_2 = (-v \sin \theta, v \cos \theta, 0, 0, 0)$$

$$\varphi W_3 = (0, 0, v \sin \beta, -v \cos \beta, 0)$$

$$\varphi W_4 = (0, 0, 0, 0, 0)$$

olduğundan

$$D_1 = \text{Span}\{W_2, W_3\} \quad \text{ve} \quad D_2 = \text{Span}\{W_1, W_4\}$$

olarak alınır, sırasıyla invariant ve anti-invariant D_1 ve D_2 distribüsyonları elde edilir. Böylece M , $\overline{M}$ nin bir semi-invariant altmanifoldu olur. Ayrıca, M üzerine

indirgenmiş metriğin bileşenleri

$$\begin{aligned}
g_{11} &= g(W_1, W_1) = 2 \\
g_{12} &= g_{21} = g(W_1, W_2) = 0 \\
g_{13} &= g_{31} = g(W_1, W_3) = 0 \\
g_{14} &= g_{41} = g(W_1, W_4) = 0 \\
g_{22} &= g(W_2, W_2) = v^2 \\
g_{23} &= g_{32} = g(W_2, W_3) = 0 \\
g_{24} &= g_{42} = g(W_2, W_4) = 0 \\
g_{33} &= g(W_3, W_3) = v^2 \\
g_{34} &= g_{43} = g(W_3, W_4) = 0 \\
g_{44} &= g(W_4, W_4) = -2
\end{aligned}$$

şeklindedir. Buradan

$$g = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

yani

$$g = 2(dv^2 - du^2) + v^2(d\theta^2 + d\beta^2) = 2g_{N_\perp} + v^2g_{N_\top}$$

elde edilir. Böylece M , $\overline{M}$ nin $\tilde{f} = v^2$ warped çarpım fonksiyonuna sahip bir semi-invaryant warped çarpımaltmanifoldu olur.

Teorem 4.3.5. $(\overline{M}, \varphi, \xi, g)$ bir Lorentzian parakosimplektik manifold ve $M = M_\perp \times_{\tilde{f}} M_\top$ de $\overline{M}$ nin bir semi-invaryant warped çarpımaltmanifoldu olsun. Bu durumda invaryant D_1 distribüsyonu ve anti-invaryant D_2 distribüsyonu daima integrallenebilir.

İspat. Lemma 1.2.1 göz önüne alınarak (4.2.17) dan $X \in \Gamma(D_2)$, $U \in \Gamma(D_1)$ için

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_X \varphi U &= \varphi \overline{\nabla}_X U \\
\nabla_X fU + h(X, fU) &= f \nabla_X U + w \nabla_X U + Bh(U, X) + Ch(U, X) \\
X(\ln \tilde{f})fU + h(X, fU) &= X(\ln \tilde{f})fU + Bh(U, X) + Ch(U, X) \quad (4.3.11)
\end{aligned}$$

yazılabilir. (4.3.11) in teğet ve normal kısımları birbirine eşitlenirse

$$Bh(X, U) = 0 \quad (4.3.12)$$

ve

$$h(X, fU) = Ch(X, U) \quad (4.3.13)$$

elde edilir. (4.2.30) ve (4.3.12) den

$$A_{wX}U = -X(\ln \tilde{f})fU \quad (4.3.14)$$

dir.

D_2 distribüsyonu M de total geodezik ve $\overline{M}$ de anti-invaryant olduğundan Gauss-Weingarten formülleri kullanılarak $X, Y \in \Gamma(D_2)$ için

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}_X \varphi Y &= \varphi \overline{\nabla}_X Y \\ \overline{\nabla}_X wY &= \varphi \nabla_X Y + \varphi h(X, Y) \\ -A_{wY} X + \nabla_X^\perp wY &= f \nabla_X Y + w \nabla_X Y + Bh(X, Y) + C(X, Y) \end{aligned} \quad (4.3.15)$$

yazılır. (4.3.15) in normal kısımları birbirine eşitlenirse

$$A_{wY} X = -Bh(X, Y) \quad (4.3.16)$$

elde edilir. (4.3.16) da X ile Y nin rollerini değiştirirsek h simetrik olduğundan

$$A_{wY} X = A_{wX} Y \quad (4.3.17)$$

bulunur. Ayrıca, her $Z \in \Gamma(TM)$ için Gauss formülü, (1.3.14) ve A şekil operatörünün self adjoint olduğu göz önüne alınarak

$$\begin{aligned} g(A_{wX} Y, Z) &= g(h(Y, Z), wX) \\ &= g(\overline{\nabla}_Z Y, \varphi X) \\ &= g(\overline{\nabla}_Z \varphi Y, X) \\ &= -g(A_{wY} Z, X) \\ &= -g(A_{wY} X, Z) \end{aligned} \quad (4.3.18)$$

olur. (4.3.16), (4.3.17) ve (4.3.18) den

$$A_{wX} Y = 0 \quad \text{ve} \quad Bh(X, Y) = 0 \quad (4.3.19)$$

bulunur.

Diğer taraftan $U, V \in \Gamma(D_1)$ için

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_U \varphi V &= \varphi \bar{\nabla}_U V \\
\bar{\nabla}_U fV &= \varphi \nabla_U V + \varphi h(U, V) \\
h(U, fV) + \nabla_U fV &= \varphi \left(\nabla'_U V - g(U, V) \frac{\text{grad} \tilde{f}}{\tilde{f}} \right) + Bh(U, V) + Ch(U, V) \\
h(U, fV) + \nabla_U fV &= f(\nabla'_U V) - g(U, V)w \left(\frac{\text{grad} \tilde{f}}{\tilde{f}} \right) + Bh(U, V) + Ch(U, V)
\end{aligned}$$

olduğundan bu son eşitliğin teğet ve normal kısımlarının eşitliğinden

$$\nabla'_U fV - g(fV, U) \frac{\text{grad} \tilde{f}}{\tilde{f}} = f(\nabla'_U V) + Bh(U, V) \quad (4.3.20)$$

ve

$$h(U, fV) = -g(U, V)w \left(\frac{\text{grad} \tilde{f}}{\tilde{f}} \right) + Ch(U, V) \quad (4.3.21)$$

elde edilir. Buradan

$$h(U, fV) = h(V, fU) \quad (4.3.22)$$

olduğu kolaylıkla görülebilir.

Son olarak (4.2.31) dan

$$\begin{aligned}
w([V, U]) &= w(\nabla_V U - \nabla_U V) \\
&= \nabla_V^\perp wU - (\nabla_V w)U - \nabla_U^\perp wV + (\nabla_U w)V \\
&= (\nabla_U w)V - (\nabla_V w)U \\
&= Ch(U, V) - h(U, fV) - Ch(V, U) + h(V, fU) \quad (4.3.23)
\end{aligned}$$

yazılır. (4.3.23) de (4.3.22) yerine yazılır ve h nın simetrik olduğu göz önüne alınırsa

$$w([V, U]) = 0, \quad U, V \in \Gamma(D_1)$$

elde edilir. Bu ise $U, V \in \Gamma(D_1)$ için $[V, U] \in \Gamma(D_1)$ olduğunu yani D_1 in integrallenebilir olduğunu verir.

Benzer şekilde (4.2.30) dan $\forall X, Y \in \Gamma(D_2)$ için

$$\begin{aligned}
f([X, Y]) &= f(\nabla_X Y - \nabla_Y X) \\
&= \nabla_X fY - (\nabla_X f)Y - \nabla_Y fX + (\nabla_Y f)X \\
&= (\nabla_Y f)X - (\nabla_X f)Y \\
&= A_{wX}Y + Bh(Y, X) - A_{wY}X - Bh(X, Y) \\
&= 0
\end{aligned}$$

bulunur. Öyleyse $X, Y \in \Gamma(D_2)$ için $[X, Y] \in \Gamma(D_2)$ yani D_2 integrallenebilirdir. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

Teorem 4.3.6. $(\overline{M}, \varphi, \xi, g)$ bir Lorentzian parakosimplektik manifold ve M de $\overline{M}$ nin bir altmanifoldu olsun. Bu durumda M nin bir semi-invaryant altmanifold olması için gerek ve yeter şart $wf = 0$ olmasıdır.

Teorem 4.3.7. $(\overline{M}, \varphi, \xi, g)$ bir Lorentzian parakosimplektik manifold ve M de $\overline{M}$ nin bir semi-invaryant altmanifoldu olsun. Bu durumda M nin bir semi-invaryant warped çarpım altmanifoldu olması için gerek ve yeter şart M nin şekil operatörünün $W(\mu) = 0$, $W \in \Gamma(D)$, olacak şekilde bir μ fonksiyonu için

$$A_{\varphi X} U = -X(\mu)\varphi U, \quad X \in \Gamma(D_2), U \in \Gamma(D_1)$$

olmasıdır. Burada μ , her $W \in \Gamma(D_1)$ için $W(\mu) = 0$ şartını sağlayan N üzerinde bir fonksiyondur.

İspat. Kabul edelim ki $M = M_\perp \times_{\tilde{f}} M_T$, $\overline{M}$ nin bir semi-invaryant warped çarpımaltmanifoldu olsun. Bu durumda (4.3.14) den $X \in \Gamma(D_2)$ ve $U \in \Gamma(D_1)$ için

$$A_{\varphi X} U = -X(\ln \tilde{f})\varphi U$$

dir. Burada $\mu = \ln \tilde{f}$ olmak üzere $W \in \Gamma(D_1)$ için $W(\mu) = 0$ olur.

Tersine M nin $\overline{M}$ nin bir semi-invaryant altmanifoldu olduğunu kabul edelim. μ , M üzerinde $\forall W \in \Gamma(D_1)$ için $W(\mu) = 0$ olacak şekilde bir fonksiyon ve $X \in \Gamma(D_2)$ ve $U \in \Gamma(D_1)$ için

$$A_{\varphi X} U = -X(\mu)\varphi U$$

olsun. Bu durumda $\overline{M}$ bir Lorentzian parakosimplektik manifold olduğundan (4.3.19) dan $X, Y \in \Gamma(D_2)$ ve $V \in \Gamma(D_1)$ için

$$g(\nabla_X Y, \varphi V) = g(\overline{\nabla}_X Y, \varphi V) = g(\overline{\nabla}_X \varphi Y, V) = -g(A_{\varphi Y} X, V) = 0$$

bulunur. Böylece D_2 distribüsyonu M de total geodezik olur. Benzer şekilde (4.3.14) den

$$\begin{aligned} g(\nabla_U V, X) &= g(\overline{\nabla}_U V, X) = -g(V, \overline{\nabla}_U X) \\ &= -g(\varphi V, \overline{\nabla}_U \varphi X) \\ &= -g(\varphi V, \overline{\nabla}_U w X) \\ &= g(A_{wX} U, \varphi V) \\ &= -g(X(\mu) \varphi U, \varphi V) \\ &= -X(\mu) g(U, V) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\mu = \frac{1}{\tilde{f}}$ dir. Semi-invariant M altmanifoldunun D_1 distribüsyonu daima integrallenebilir ve $\forall W \in \Gamma(TM_\top)$ için $W(\mu) = 0$ olduğundan D_1 distribüsyonu M de total umbiliktir ve ortalama eğrilik vektör alanı paraleldir. Böylece M_T ve $M_\perp$ sırasıyla D_1 ve D_2 distribüsyonlarının integral manifoldları olmak üzere semi-invariant M altmanifoldu $M_\perp \times_{\tilde{f}} M_T$ şeklinde bir warped çarpım olur. $\square$

4.3.1 Lorentzian parakosimplektik manifoldların semi-slant warped çarpım altmanifoldları

$(\overline{M}, \varphi, \xi, g)$ bir Lorentzian parakosimplektik manifold ve M de $\overline{M}$ nin bir semi-slant warped çarpım altmanifoldu olsun. Bu durumda $N_\top$, $\overline{M}$ nin bir invariant ve N_θ da $\overline{M}$ nin bir özgün slant altmanifoldu olmak üzere Sonuç (4.3.1) den $\overline{M}$ nin $\xi \in \Gamma(TN_\theta)$ ise $N_\top \times_{\tilde{f}} N_\theta$ semi-slant warped çarpım altmanifoldunun ve $\xi \in \Gamma(TN_\top)$ ise $N_\theta \times_{\tilde{f}} N_\top$ semi-slant warped çarpım altmanifoldunun var olmadığı görülür. Böylece $\overline{M}$ nin bir semi-slant warped çarpım altmanifoldu için sadece aşağıdaki iki durum söz konusudur:

- (i) $\xi \in \Gamma(TN_\top)$ olmak üzere $M = N_\top \times_{\tilde{f}} N_\theta$
- (ii) $\xi \in \Gamma(TN_\theta)$ olmak üzere $M = N_\theta \times_{\tilde{f}} N_\top$

Şimdi bu durumları inceleyelim:

Teorem 4.3.8. $(\overline{M}, \varphi, \xi, g)$ Lorentzian parakosimplektik manifoldunun $\xi \in \Gamma(TN_\top)$ olacak şekilde bir $M = N_\top \times_{\tilde{f}} N_\theta$ özgün semi-slant warped çarpım altmanifoldu yoktur.

İspat. Kabul edelim ki $(\overline{M}, \varphi, \xi, g)$ bir Lorentzian parakosimplektik manifold ve $M = N_\top \times_{\tilde{f}} N_\theta$ da $\xi \in \Gamma(TN_\top)$ olacak şekilde $\overline{M}$ nin bir özgün semi-slant warped çarpım altmanifoldu olsun. $X \in \Gamma(TN_\top)$ ve $Z \in \Gamma(TN_\theta)$ alalım. Bu durumda (1.3.35), (1.3.41), (1.3.42), (4.1.1), (4.1.2) ve Lemma 1.2.1 den

$$\begin{aligned}\overline{\nabla}_Z \varphi X &= \varphi \overline{\nabla}_Z X \\ \overline{\nabla}_Z fX &= \varphi \nabla_Z X + \varphi h(Z, X) \\ fX(\ln \tilde{f})Z + h(Z, fX) &= X(\ln \tilde{f})fZ + X(\ln \tilde{f})wZ \\ &\quad + Bh(Z, X) + Ch(Z, X)\end{aligned}\tag{4.3.24}$$

elde edilir. (4.3.24) in teğet ve normal kısımları birbirine eşitlenirse

$$fX(\ln \tilde{f})Z = X(\ln \tilde{f})fZ + Bh(Z, X)\tag{4.3.25}$$

ve

$$h(Z, fX) = X(\ln \tilde{f})wZ + Ch(Z, X)\tag{4.3.26}$$

bulunur.

Diğer taraftan (4.3.7) den

$$g(h(X, Z), wZ) = 0$$

dır. Buradan

$$0 = g(h(X, Z), \varphi Z) = g(\varphi h(X, Z), Z) = g(Bh(X, Z), Z)$$

yazılabilir. Öyleyse

$$Bh(X, Z) \in \Gamma(TN_\top)\tag{4.3.27}$$

dir.

(4.3.25) den

$$fX(\ln \tilde{f})g(Z, fZ) = X(\ln \tilde{f})g(fZ, fZ) + g(Bh(Z, X), fZ)$$

yazılabilir. Burada (4.1.13) ve (4.3.27) kullanılarak

$$fX(\ln \tilde{f})g(Z, fZ) = \cos^2 \theta X(\ln \tilde{f})g(Z, Z) \quad (4.3.28)$$

elde edilir. Ancak Lemma 1.2.1 gözönüne alınarak

$$\begin{aligned} X(\ln \tilde{f})g(Z, Z) &= g(\nabla_Z X, Z) = g(\overline{\nabla}_Z X, Z) \\ &= -g(X, \overline{\nabla}_Z Z) \\ &= -g(\varphi X, \varphi \overline{\nabla}_Z Z) + \eta(X)\eta(\overline{\nabla}_Z Z) \\ &= -g(\varphi X, \overline{\nabla}_Z \varphi Z) \\ &= -g(\varphi X, \nabla_Z fZ - A_{wZ}Z) \\ &= -g(fX, \nabla_Z fZ) + g(fX, A_{wZ}Z) \\ &= g(fX, g(Z, fZ)grad \ln \tilde{f}) + g(h(fX, Z), wZ) \\ &= fX(\ln \tilde{f})g(Z, fZ) \end{aligned}$$

bulunur. Bu son eşitlik (4.3.28) de yerine yazılırsa

$$X(\ln \tilde{f})g(Z, Z) = (\cos^2 \theta) X(\ln \tilde{f})g(Z, Z)$$

yani

$$(\sin^2 \theta) X(\ln \tilde{f}) \|Z\|^2 = 0$$

olur. Bu ise $\theta = 0$ veya $X(\ln \tilde{f}) = 0$ olduğunu gösterir. N_θ bir özgün slant altmanifold olduğundan $\theta \neq 0$ dir. Dolayısıyla $X(\ln \tilde{f}) = 0$ olur ve ispat tamamlanır. $\square$

Teorem 4.3.9. $(\overline{M}, \varphi, \xi, g)$ Lorentzian parakosimplektik manifoldunun $\xi \in \Gamma(TN_\theta)$ olacak şekilde bir $M = N_\theta \times_{\tilde{f}} N_\top$ özgün semi-slant warped çarpım altmanifoldu yoktur.

İspat. $(\overline{M}, \varphi, \xi, g)$ bir Lorentzian parakosimplektik manifold ve $M = N_\theta \times_{\tilde{f}} N_\top$ de $\xi \in \Gamma(TN_\theta)$ olacak şekilde $\overline{M}$ nin bir özgün semi-slant warped çarpım altmanifoldu

olsun. $X \in \Gamma(TN_{\top})$ ve $Z \in \Gamma(TN_{\theta})$ olmak üzere

$$\nabla_Z X = \nabla_X Z = Z(\ln \tilde{f})X \quad (4.3.29)$$

yazılır. $\overline{M}$ bir Lorentzian parakosimplektik manifold olduğundan (4.3.1) den

$$\xi(\ln \tilde{f}) = 0 \quad (4.3.30)$$

elde edilir. $g(X, Z) = 0$ eşitliği ve Gauss formülünden

$$g(\overline{\nabla}_X X, Z) = g(\nabla_X X, Z) = -g(X, \nabla_X Z) = -Z(\ln \tilde{f})g(X, X) \quad (4.3.31)$$

dir. Ancak (1.3.10) den

$$g(\overline{\nabla}_X X, Z) = g(\varphi \overline{\nabla}_X X, \varphi Z) - \eta(\overline{\nabla}_X X)\eta(Z)$$

dir. Bu son eşitlikte Gauss denklemi ve (4.3.30) kullanılırsa

$$\begin{aligned} g(\nabla_X X, Z) &= g(\overline{\nabla}_X \varphi X, \varphi Z) \\ &= g(\nabla_X \varphi X, fZ) + g(h(X, \varphi X), wZ) \end{aligned} \quad (4.3.32)$$

bulunur. (4.3.31) ve (4.3.32) dan

$$g(h(X, fX), wZ) - (fZ)(\ln \tilde{f})g(X, fX) = -Z(\ln \tilde{f})g(X, X) \quad (4.3.33)$$

yazılır.

Diğer taraftan $X \in \Gamma(TN_{\top})$ ve $Z \in \Gamma(TN_{\theta})$ için (1.3.35), (1.3.41), (1.3.42), (4.1.1), (4.1.2) ve Lemma 1.2.1 den

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}_Z \varphi X &= \varphi \overline{\nabla}_Z X \\ \overline{\nabla}_Z fX &= \varphi \nabla_Z X + h(Z, X) \\ Z(\ln \tilde{f})fX + h(Z, fX) &= Z(\ln \tilde{f})fX + Bh(Z, X) + Ch(Z, X) \\ h(Z, fX) &= Bh(Z, X) + Ch(Z, X) \end{aligned} \quad (4.3.34)$$

dir. (4.3.34) in teğet ve normal kısımlarının eşitliğinden

$$Bh(Z, X) = 0 \quad (4.3.35)$$

ve

$$h(Z, fX) = Ch(Z, X) \quad (4.3.36)$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_X \varphi Z &= \varphi \bar{\nabla}_X Z \\ \bar{\nabla}_X fZ + \bar{\nabla}_X wZ &= \varphi \nabla_X Z + \varphi h(X, Z) \\ \nabla_X fZ + h(X, fZ) - A_{wZ} X + \nabla_X^\perp wZ &= f \nabla_X Z + w \nabla_X Z \\ &\quad + Bh(Z, X) + Ch(Z, X) \\ fZ(\ln \tilde{f})X + h(X, fZ) - A_{wZ} X + \nabla_X^\perp wZ &= Z(\ln \tilde{f})fX \\ &\quad + Bh(Z, X) + Ch(Z, X) \end{aligned}$$

dir. Bu son eşitlikte teğet kısımlar birbirine eşitlenir ve (4.3.35) kullanılırsa

$$fZ(\ln \tilde{f})X - A_{wZ} X = Z(\ln \tilde{f})fX \quad (4.3.37)$$

olur. Böylece (4.3.37) ve (4.1.13) den

$$\begin{aligned} g(h(X, fX), wZ) &= fZ(\ln \tilde{f})g(X, fX) - Z(\ln \tilde{f})g(fX, fX) \\ &= fZ(\ln \tilde{f})g(X, fX) - (\cos^2 \theta) Z(\ln \tilde{f})g(X, X) \end{aligned} \quad (4.3.38)$$

elde edilir. (4.3.38), (4.3.33) da yerine yazılırsa

$$Z(\ln \tilde{f})g(X, X) = (\cos^2 \theta) Z(\ln \tilde{f})g(X, X)$$

yani

$$(\sin^2 \theta) Z(\ln \tilde{f}) \|X\|^2 = 0$$

olur. Bu ise $\theta = 0$ veya $Z(\ln \tilde{f}) = 0$ olduğunu gösterir. N_θ bir özgün slant altmanifold olduğundan $\theta \neq 0$ dir. Dolayısıyla $Z(\ln \tilde{f}) = 0$ olur ve ispat tamamlanır. $\square$

4.3.2 Lorentzian parakosimplektik manifoldların anti-slant warped çarpım altmanifoldları

$(\overline{M}, \varphi, \xi, g)$ bir Lorentzian parakosimplektik manifold ve M de $\overline{M}$ nin bir anti-slant warped çarpım altmanifoldu olsun. Bu durumda $N_\perp$, $\overline{M}$ nin bir anti-invariant ve

N_θ da $\overline{M}$ nin bir özgün slant altmanifoldu olmak üzere Sonuç (4.3.1) den $\overline{M}$ nin $\xi \in \Gamma(TN_\theta)$ ise $N_\perp \times_{\tilde{f}} N_\theta$ anti-slant warped çarpım altmanifoldunun ve $\xi \in \Gamma(TN_\perp)$ ise $N_\theta \times_{\tilde{f}} N_\perp$ anti-slant warped çarpım altmanifoldunun var olmadığı görülür. Böylece $\overline{M}$ nin bir anti-slant warped çarpım altmanifoldu için sadece aşağıdaki iki durum söz konusudur:

- (i) $\xi \in \Gamma(TN_\perp)$ olmak üzere $M = N_\perp \times_{\tilde{f}} N_\theta$.
- (ii) $\xi \in \Gamma(TN_\theta)$ olmak üzere $M = N_\theta \times_{\tilde{f}} N_\perp$.

Şimdi bu durumları inceleyelim:

Teorem 4.3.10. $(\overline{M}, \varphi, \xi, g)$ Lorentzian parakosimplektik manifoldunun $\xi \in \Gamma(TN_\perp)$ olacak şekilde bir $M = N_\perp \times_{\tilde{f}} N_\theta$ özgün anti-slant warped çarpım altmanifoldu yoktur.

İspat. Kabul edelim ki; $M = N_\perp \times_{\tilde{f}} N_\theta$, $\overline{M}$ Lorentzian parakosimplektik manifoldunun $\xi \in \Gamma(TN_\perp)$ olacak şekilde bir özgün anti-slant warped çarpım altmanifoldu ve $X \in \Gamma(TN_\perp)$, $Z \in \Gamma(TN_\theta)$ olsun. Bu durumda Lemma 1.2.1, (1.3.10), (1.3.35), (1.3.41), (1.3.42), (4.1.1) ve (4.1.2) den

$$\begin{aligned}
X(\ln \tilde{f})g(Z, Z) &= g(\nabla_Z X, Z) = g(\overline{\nabla}_Z X, Z) \\
&= -g(X, \overline{\nabla}_Z Z) \\
&= -g(\varphi X, \varphi \overline{\nabla}_Z Z) + \eta(X)\eta(\overline{\nabla}_Z Z) \\
&= -g(\varphi X, \overline{\nabla}_Z \varphi Z) \\
&= -g(\varphi X, h(Z, fZ) + \nabla_Z^\perp wZ)
\end{aligned}$$

yazılabilir. Burada $N_\perp$ in anti-invariant olduğu gözönüne alınarak

$$X(\ln \tilde{f})g(Z, Z) = -g(wX, h(Z, fZ)) - g(wX, \nabla_Z^\perp wZ) \quad (4.3.39)$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\overline{\nabla}_Z \varphi Z = \varphi \overline{\nabla}_Z Z$$

olduğundan Gauss-Weingarten formülleri, (4.1.1), (4.1.2) ve Lemma 1.2.1 kullanılarak

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_Z fZ + \overline{\nabla}_Z wZ &= \varphi \nabla_Z Z + \varphi h(Z, Z) \\
\nabla_Z fZ + h(Z, fZ) - A_{wZ}Z + \nabla_Z^\perp wZ &= \varphi(\nabla_Z^{N_\theta} Z - g(Z, Z)grad \ln \tilde{f}) \\
&\quad + Bh(Z, Z) + Ch(Z, Z) \\
\nabla_Z fZ + h(Z, fZ) - A_{wZ}Z + \nabla_Z^\perp wZ &= f \nabla_Z^{N_\theta} Z + w \nabla_Z^{N_\theta} Z \\
&\quad - g(Z, Z)w(grad \ln \tilde{f}) \quad (4.3.40) \\
&\quad + Bh(Z, Z) + Ch(Z, Z)
\end{aligned}$$

elde edilir. (4.3.40) nin normal kısmı alınırsa

$$h(Z, fZ) + \nabla_Z^\perp wZ = w \nabla_Z^{N_\theta} Z - g(Z, Z)w(grad \ln \tilde{f}) + Ch(Z, Z) \quad (4.3.41)$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned}
g(\nabla_Z^\perp wZ, wX) &= -g(h(Z, fZ), wX) + g(w \nabla_Z^{N_\theta} Z, wX) \\
&\quad - g(Z, Z)g(w(grad \ln \tilde{f}), wX) + g(Ch(Z, Z), wX)
\end{aligned}$$

yazılabilir. (4.1.14) ve (1.3.10) den

$$\begin{aligned}
g(\nabla_Z^\perp wZ, wX) &= -g(h(Z, fZ), wX) - (\sin^2 \theta)X(\ln \tilde{f})g(Z, Z) \\
&\quad + g(\varphi h(Z, Z), \varphi X) \\
&= -g(h(Z, fZ), wX) - (\sin^2 \theta)X(\ln \tilde{f})g(Z, Z) \\
&\quad + g(h(Z, Z), X) + \eta(h(Z, Z))\eta(X) \\
&= -g(h(Z, fZ), wX) - (\sin^2 \theta)X(\ln \tilde{f})g(Z, Z) \quad (4.3.42)
\end{aligned}$$

elde edilir. (4.3.42), (4.3.39) de yerine yazılarak

$$X(\ln \tilde{f})g(Z, Z) = (\sin^2 \theta)X(\ln \tilde{f})g(Z, Z)$$

yani

$$(\cos^2 \theta)X(\ln \tilde{f}) \|Z\|^2 = 0$$

bulunur. Öyleyse $\theta = \frac{\pi}{2}$ veya $X(\ln \tilde{f}) = 0$ dır. N_θ bir özgün slant altmanifold olduğundan $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ dir. Dolayısıyla $X(\ln \tilde{f}) = 0, \forall X \in \Gamma(TN_\perp)$, olmak zorundadır. Bu ise $\tilde{f}$ nin sabit olduğunu verir ve ispat tamamlanır. $\square$

Teorem 4.3.11. $(\overline{M}, \varphi, \xi, g)$ Lorentzian parakosimplektik manifoldunun $\xi \in \Gamma(TN_\theta)$ olacak şekilde bir $M = N_\theta \times_{\tilde{f}} N_\perp$ özgün anti-slant warped çarpım altmanifoldu yoktur.

İspat. Kabul edelim ki $\overline{M}$ Lorentzian parakosimplektik manifold ve $M = N_\perp \times_{\tilde{f}} N_\theta$ de $\overline{M}$ nin $\xi \in \Gamma(TN_\theta)$ olacak şekilde bir özgün anti-slant warped çarpım altmanifoldu olsun. $X \in \Gamma(TN_\perp)$, $Z \in \Gamma(TN_\theta)$ alalım. Bu durumda Gauss-Weingarten formülleri, (4.1.1), (4.1.2) ve Lemma 1.2.1 kullanılarak

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_X \varphi Z &= \varphi \overline{\nabla}_X Z \\
\overline{\nabla}_X fZ + \overline{\nabla}_X wZ &= \varphi \nabla_X Z + \varphi h(X, Z) \\
\nabla_X fZ + h(X, fZ) - A_{wZ} X + \nabla_X^\perp wZ &= f \nabla_X Z + w \nabla_X Z \\
&\quad + Bh(Z, X) + Ch(Z, X) \\
fZ(\ln \tilde{f})X + h(X, fZ) - A_{wZ} X + \nabla_X^\perp wZ &= Z(\ln \tilde{f})wX + Bh(Z, X) \\
&\quad + Ch(Z, X)
\end{aligned} \tag{4.3.43}$$

elde edilir. (4.3.43) in normal kısımları birbirine eşitlenirse

$$h(X, fZ) + \nabla_X^\perp wZ = Z(\ln \tilde{f})wX + Ch(Z, X) \tag{4.3.44}$$

bulunur. Öyleyse (4.3.7) den

$$g(\nabla_X^\perp wZ, wX) = Z(\ln \tilde{f})g(wX, wX) + g(Ch(Z, X), wX) \tag{4.3.45}$$

yazılabilir.

Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_Z \varphi X &= \varphi \overline{\nabla}_Z X \\
\overline{\nabla}_Z wX &= \varphi \nabla_Z X + h(Z, X) \\
-A_{wX} Z + \nabla_Z^\perp wX &= Z(\ln \tilde{f})wX + Bh(Z, X) + Ch(Z, X)
\end{aligned} \tag{4.3.46}$$

dir. Bu son eşitliğin normal kısımları birbirine eşitlenirse

$$\nabla_Z^\perp wX = Z(\ln \tilde{f})wX + Ch(Z, X) \tag{4.3.47}$$

olur. Böylece (4.3.7), (4.3.44) ve (4.3.47) dan

$$g(\nabla_X^\perp wZ, wX) = g(\nabla_Z^\perp wX, wX)$$

elde edilir. Buradan $N_\perp$ in anti-invariant olduğu gözönüne alınarak Lemma 1.2.1, (1.3.10) ve (1.3.35) den

$$\begin{aligned} g(\nabla_X^\perp wZ, wX) &= g(\nabla_Z^\perp wX, wX) = g(\bar{\nabla}_Z wX, wX) \\ &= g(\bar{\nabla}_Z \varphi X, \varphi X) = g(\varphi \bar{\nabla}_Z X, \varphi X) \\ &= g(\bar{\nabla}_Z X, X) + \eta(\bar{\nabla}_Z X)\eta(X) \\ &= Z(\ln \tilde{f})g(X, X) \end{aligned} \tag{4.3.48}$$

bulunur. (4.3.48), (4.3.45) da yerine yazılırsa

$$Z(\ln \tilde{f})g(X, X) = Z(\ln \tilde{f})g(wX, wX) + g(Ch(Z, X), wX)$$

olur. Burada (1.3.10) ve (4.1.14) kullanılarak

$$\begin{aligned} Z(\ln \tilde{f})g(X, X) &= (\sin^2 \theta) Z(\ln \tilde{f})g(X, X) + g(\varphi h(Z, X), \varphi X) \\ &= (\sin^2 \theta) Z(\ln \tilde{f})g(X, X) \\ &\quad + g(h(Z, X), X) + \eta(h(Z, X))\eta(X) \\ &= (\sin^2 \theta) Z(\ln \tilde{f})g(X, X) \end{aligned}$$

yani

$$(\cos^2 \theta) Z(\ln \tilde{f}) \|X\|^2 = 0$$

bulunur. Öyleyse $\theta = \frac{\pi}{2}$ veya $Z(\ln \tilde{f}) = 0$ dır. N_θ bir özgün slant altmanifold olduğundan $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ dir. Dolayısıyla $Z(\ln \tilde{f}) = 0, \forall Z \in \Gamma(TN_\theta)$, dır. Bu ise $\tilde{f}$ nin sabit olduğunu verir ve ispat tamamlanır. $\square$

4.4 Lorentzian Para-Sasakian Manifoldların biharmonik Altmanifoldları

Bu kısımda Lorentzian para-Sasakian uzay formların Biharmonik altmanifoldları için bazı karakterizasyonlar verilecektir.

Teorem 4.4.1. $(\overline{M}, \varphi, \xi, g)$ bir Lorentzian para-Sasakian uzay form ve M de $\overline{M}$ nin m -boyutlu bir altmanifoldu olsun. M nin bir biharmonik altmanifold olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{cases} 2iz A_{\nabla_{(-)}^\perp} H(-) + \frac{m}{2} \text{grad}(|H|^2) = 0 \\ -\Delta^\perp H + iz B(-, A_H -) - mH = 0 \end{cases} \quad (4.4.1)$$

şartlarının sağlanmasıdır. Burada B ve H sırasıyla M altmanifoldunun ikinci temel formunu ve ortalama eğrilik vektör alanını göstermektedir.

İspat. $\overline{M}$ nin m -boyutlu bir M altmanifoldunu ve $i : M \rightarrow \overline{M}$ izometrik immersiyonunu göz önüne alalım. (1.1.17) eşitliği kullanılarak i izometrik immersiyonunun tensiyon alanı

$$\tau(i) = mH$$

şeklinde yazılır. $\{X_j\}_{j=1}^m$, $p \in M$ noktasında M altmanifoldunun bir lokal geodezik çatısı olmak üzere (1.1.27) den i izometrik immersiyonunun bitensiyon alanı

$$\begin{aligned} \tau_2(i) &= -\Delta(\tau(i)) - iz R^{\overline{M}}(di(-), \tau(i)) di(-) \\ &= \sum_{j=1}^m \varepsilon_j \left\{ \nabla_{X_j}^i \nabla_{X_j}^i \tau(i) - \nabla_{\nabla_{X_j}^M X_j}^i \tau(i) \right\} \\ &\quad - \sum_{j=1}^m \varepsilon_j \overline{R}(di(X_j), \tau(i)) di(X_j) \\ &= m \left\{ \sum_{j=1}^m \varepsilon_j \overline{\nabla}_{X_j} \overline{\nabla}_{X_j} H - \sum_{j=1}^m \varepsilon_j \overline{R}(X_j, H) X_j \right\} \end{aligned} \quad (4.4.2)$$

bulunur. $\overline{M}$ bir Lorentzian para-Sasakian uzay form olduğundan

$$\overline{R}(X_j, H) X_j = g(H, X_j) X_j - g(X_j, X_j) H = -H \quad (4.4.3)$$

dır. Bu son eşitlik ve Gauss-Weingarten formülleri kullanılarak (4.4.2) den

$$\begin{aligned}
\tau_2(i) &= m \left\{ \sum_{j=1}^m \varepsilon_j \bar{\nabla}_{X_j} \left(-A_H X_j + \nabla_{X_j}^\perp H \right) + mH \right\} \\
&= m \sum_{j=1}^m \varepsilon_j \left(-\nabla_{X_j} A_H X_j - B(X_j, A_H X_j) \right. \\
&\quad \left. - A_{\nabla_{X_j}^\perp H} X_j + \nabla_{X_j}^\perp \nabla_{X_j}^\perp H \right) + m^2 H \\
&= -m \left(\Delta^\perp H + iz B(-, A_H(-)) \right. \\
&\quad \left. + iz A_{\nabla_{(-)}^\perp H}(-) + iz \nabla_{(-)} A_H(-) - mH \right) \tag{4.4.4}
\end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi $iz \nabla_{(-)} A_H(-)$ ifadesini hesaplayalım:

$$\begin{aligned}
iz \nabla_{(-)} A_H(-) &= \sum_{j=1}^m \varepsilon_j (\nabla_{X_j} A_H X_j) = \sum_{j,k=1}^m \varepsilon_j \nabla_{X_j} (\varepsilon_k g(A_H X_j, X_k) X_k) \\
&= \sum_{j,k=1}^m \varepsilon_j X_j (\varepsilon_k g(A_H X_j, X_k)) X_k \\
&= \sum_{j,k=1}^m \varepsilon_j X_j (\varepsilon_k g(B(X_j, X_k), H)) X_k \\
&= \sum_{j,k=1}^m \varepsilon_j X_j (\varepsilon_k g(\bar{\nabla}_{X_k} X_j, H)) X_k \\
&= \sum_{j,k=1}^m \varepsilon_j \{ \varepsilon_k [g(\bar{\nabla}_{X_j} \bar{\nabla}_{X_k} X_j, H) X_k] \\
&\quad + g(\bar{\nabla}_{X_k} X_j, \bar{\nabla}_{X_j} H) X_k \} \\
&= \sum_{j,k=1}^m \varepsilon_j \{ \varepsilon_k [g(\bar{\nabla}_{X_j} \bar{\nabla}_{X_k} X_j, H) X_k] \\
&\quad + g(B(X_j, X_k), \nabla_{X_j}^\perp H) X_k \} \\
&= \sum_{j,k=1}^m \varepsilon_j \{ \varepsilon_k [g(\bar{\nabla}_{X_j} \bar{\nabla}_{X_k} X_j, H) X_k] \\
&\quad + g(B(X_j, X_k), \nabla_{X_j}^\perp H) X_k \} \\
&= \sum_{j,k=1}^m \varepsilon_j \{ \varepsilon_k [g(\bar{\nabla}_{X_k} \bar{\nabla}_{X_j} X_j, H) X_k] \\
&\quad + g(\bar{R}(X_j, X_k) X_j, H) X_k \} \\
&\quad + \sum_{j,k=1}^m \varepsilon_j \left\{ \varepsilon_k g(A_{\nabla_{X_j}^\perp H} X_j, X_k) X_k \right\}. \tag{4.4.5}
\end{aligned}$$

Burada Gauss formülü kullanılarak

$$\begin{aligned}
& \sum_{j,k=1}^m \varepsilon_j \{ \varepsilon_k g(\bar{\nabla}_{X_k} \bar{\nabla}_{X_j} X_j, H) X_k \} \\
&= \sum_{j,k=1}^m \varepsilon_j \{ \varepsilon_k g(\bar{\nabla}_{X_k} (\nabla_{X_j} X_j + B(X_j, X_j)), H) X_k \} \\
&= \sum_{j,k=1}^m \varepsilon_j \{ \varepsilon_k g(\bar{\nabla}_{X_k} B(X_j, X_j), H) X_k \} \\
&= m \sum_{k=1}^m \varepsilon_k g(\bar{\nabla}_{X_k} H, H) X_k \\
&= \frac{m}{2} \sum_{k=1}^m \varepsilon_k X_k (g(H, H)) X_k \\
&= \frac{m}{2} \sum_{k=1}^m \varepsilon_k g(\text{grad } |H|^2, X_k) X_k \\
&= \frac{m}{2} \text{grad } |H|^2
\end{aligned} \tag{4.4.6}$$

bulunur. Ayrıca $\bar{M}$ bir Lorentzian para-Sasakian uzay form olduğundan

$$\begin{aligned}
& \sum_{j,k=1}^m \varepsilon_j \{ \varepsilon_k g(\bar{R}(X_j, X_k) X_j, H) X_k \} \\
&= \sum_{j,k=1}^m \varepsilon_j \{ \varepsilon_k g(g(X_k, X_j) X_j - g(X_j, X_j) X_k, H) X_k \} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{4.4.7}$$

dır. (4.4.6) ve (4.4.7) eşitlikleri (4.4.5) de yerine yazılırsa

$$iz \nabla_{(-)} A_H(-) = \frac{m}{2} \text{grad } (|H|^2) + iz A_{\nabla_{(-)}^\perp H}(-) \tag{4.4.8}$$

elde edilir. Böylece (4.4.4) ve (4.4.8) den

$$\tau_2(i) = -m \left(\Delta^\perp H + iz B(-, A_H(-)) + 2 iz A_{\nabla_{(-)}^\perp H}(-) + \frac{m}{2} \text{grad } (|H|^2) - mH \right)$$

olur. Bu durumda $\tau_2(i)$ bitensiyon alanının teğet ve normal bileşenleri sırasıyla

$$\begin{cases} (\tau_2(i))^\top = -m \left(2 iz A_{\nabla_{(-)}^\perp H}(-) + \frac{m}{2} \text{grad } (|H|^2) \right) \\ (\tau_2(i))^\perp = -m \left(\Delta^\perp H - iz B(-, A_H(-)) - mH \right) \end{cases} \tag{4.4.9}$$

şeklinde. M nin bir biharmonik altmanifold olması için gerek ve yeter şart $\tau_2(i) = 0$ olmasıdır. Öyleyse (4.4.9) den (4.4.1) biharmonik denkleminde ulaşılır ve ispat tamamlanır. $\square$

Sonuç 4.4.1. $(\overline{M}, \varphi, \xi, g)$ bir Lorentzian para-Sasakian uzay form ve M de $\overline{M}$ nin $\nabla^\perp H = 0$ olacak şekilde m -boyutlu bir altmanifoldu olsun. Bu durumda M nin bir biharmonik altmanifold olması için gerek ve yeter şart

$$iz \ B(-, A_H(-)) = mH \quad (4.4.10)$$

olmasıdır.

İspat. $\nabla^\perp H = 0$ ise $\Delta^\perp H = 0$ ve $grad |H|^2 = 0$ dır. Öyleyse (4.4.1) biharmonik denklemi (4.4.10) eşitliğine indirgenir ve ispat tamamlanır. $\square$

Teorem 4.4.2. $(\overline{M}, \varphi, \xi, g)$ bir Lorentzian para-Sasakian uzay form ve M de $\overline{M}$ nin boy $M = m \neq 4$ olacak şekilde bir pseudo-umbilik altmanifoldu olsun. Bu durumda M nin bir biharmonik altmanifold olması için gerek ve yeter şart

$$|H|^2 = \text{sabit} \text{ ve } \Delta^\perp H = m(|H|^2 - 1)H$$

olmasıdır.

İspat. M bir pseudo-umbilik altmanifold olduğundan

$$A_H = |H|^2 I \quad (4.4.11)$$

dır. Buradan $\{X_j\}_{j=1}^m$, $p \in M$ noktasında M altmanifoldunun bir lokal geodezik çatısı olmak üzere (4.4.8) ve (4.4.11) den

$$\begin{aligned} iz \ A_{\nabla_{(-)}^\perp H}(-) &= \sum_{j=1}^m \varepsilon_j (\nabla_{X_j} A_H X_j) - \frac{m}{2} grad(|H|^2) \\ &= \sum_{j=1}^m \varepsilon_j (\nabla_{X_j} (|H|^2 X_j)) - \frac{m}{2} grad(|H|^2) \\ &= \sum_{j=1}^m \varepsilon_j (X_j (|H|^2) X_j) - \frac{m}{2} grad(|H|^2) \\ &= grad(|H|^2) - \frac{m}{2} grad(|H|^2) \\ &= \left(1 - \frac{m}{2}\right) grad(|H|^2) \end{aligned} \quad (4.4.12)$$

elde edilir. Diğer taraftan (4.4.11) den

$$\begin{aligned}
 iz \ B(-, A_H -) &= \sum_{j=1}^m \varepsilon_j B(X_j, A_H X_j) \\
 &= |H|^2 \sum_{j=1}^m \varepsilon_j B(X_j, X_j) \\
 &= m |H|^2 H
 \end{aligned} \tag{4.4.13}$$

olur. (4.4.12) ve (4.4.13), (4.4.1) biharmonik denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{cases} 2 \left(1 - \frac{m}{2}\right) grad(|H|^2) + \frac{m}{2} grad(|H|^2) = 0 \\ -\Delta^\perp H + m |H|^2 H - mH = 0 \end{cases}$$

yani

$$\begin{cases} (4 - m) grad(|H|^2) = 0 \\ -\Delta^\perp H + m(|H|^2 - 1) H = 0 \end{cases} \tag{4.4.14}$$

elde edilir. $m \neq 4$ olduğundan (4.4.14) den $grad(|H|^2) = 0$ yani $|H|^2 = \text{sabit}$ ve $\Delta^\perp H = m(|H|^2 - 1) H$ olur. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

Sonuç 4.4.2. $(\overline{M}, \varphi, \xi, g)$ bir Lorentzian para-Sasakian uzay form ve M de $\overline{M}$ nin ortalama eğrilik vektör alanı paralel olan bir pseudo-umbilik altmanifoldu olsun. Bu durumda M nin minimal olmayan bir biharmonik altmanifold olması için gerek ve yeter şart $|H|^2 = 1$ olmasıdır.

İspat. Eğer M altmanifoldunun ortalama eğrilik vektör alanı paralel ise $\nabla^\perp H = 0$ dir. Öyleyse Sonuç (4.4.1) den M nin bir biharmonik altmanifold olması için gerek ve yeter şart (4.4.10) eşitliğinin sağlanmasıdır. Bu durumda $\{X_j\}_{j=1}^m, p \in M$ noktasında M altmanifoldunun bir lokal geodezik çatısı olmak üzere (4.4.10) dan

$$\sum_{j=1}^m \varepsilon_j B(X_j, A_H X_j) = mH \tag{4.4.15}$$

yazılır. Diğer taraftan M bir pseudo-umbilik altmanifold olduğundan (4.4.11), (4.4.15) da yerine yazılarak

$$mH(|H|^2 - 1) = 0$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

KAYNAKLAR

- [1] R. Caddeo, *Riemannian manifolds on which the distance function is harmonic*, Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino, 40 (1982), 93-101.
- [2] R. Caddeo, L. Vanhecke, *Does " $\Delta^2 d^{2-n} = 0$ on a Riemannian manifold" imply flatness?*, Period. Math. Hungar., 17 (1986), 109-117.
- [3] L. Sario, M. Nakai, C. Wang, L. Chung, *Classification theory of Riemannian manifolds. Harmonic, quasiharmonic and biharmonic function*, Lecture Notes in Mathematic 605, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1977.
- [4] G. Y. Jiang, *2-harmonic isometric immersions between Riemannian manifolds*, Chinese Ann. Math. Ser. A 7 (1986), 130-144.
- [5] L. P. Einshart, *Riemannian Geometry*, 1926.
- [6] J. Eells, J. H. Sampson, *Harmonic mappings of Riemannian manifolds*, Amer. J. Math. 86 (1964), 109-160.
- [7] S. Montaldo, C. Oniciuc, *A Short Survey on Biharmonic Maps Between Riemannian Manifolds* (2005), <http://beltrami.sc.unica.it/biharmonic/>.
- [8] B.-Y. Chen, *Some open problems and conjectures on submanifolds of finite type*, Soochow J. Math. 17 (1991), 169-188.
- [9] G. Y. Jiang, *2-harmonic maps and their first and second variational formulas*, Chinese Ann. Math. Ser. A 7 (1986), 389-402.
- [10] C. Oniciuc, *Biharmonic Maps Between Riemannian Manifolds*, Analele Stiintifice ale University Al. I. Cuza Iasi. Mat. (N.S.), 48 (2002), 613-622.
- [11] R. Caddeo, S. Montaldo, C. Oniciuc, *Biharmonic Submanifolds of S^3* , Int. J. Math., 12 (2001), 867-876.
- [12] R. Caddeo, S. Montaldo, C. Oniciuc, *Biharmonic Submanifolds in Spheres*, Israel J. Math., 130 (2002), 109-123.
- [13] B.-Y. Chen, S. Ishikawa, *Biharmonic pseudo-Riemannian submanifolds in pseudo-Euclidean spaces*, Kyushu J. Math., vol.52 (1998), 167-185.
- [14] I. Dimitric, *Submanifolds of E^m with harmonic mean curvature vector*, Bull. Inst. Math. Acad. Sinica, 20 (1992), 53-65.
- [15] T. Hasanis, T. Vlachos, *Hypersurfaces in E^4 with harmonic mean curvature vector field*, Math. Nachr., 172 (1995), 145-169.

- [16] B.-Y. Chen, S. Ishikawa, *Biharmonic surfaces in pseudo-Euclidean Spaces*, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A 45(2) (1991), 323-347.
- [17] J. Inoguchi, *Biharmonic curves in Minkowski 3-space*, Int. J. Math. Sci. 21 (2003), 1365-1368.
- [18] R. Caddeo, S. Montaldo, P. Piu, *Biharmonic curves on a surface*, Rend. Mat. AppL. 21 (2001), 143-157.
- [19] R. Caddeo, C. Oniciuc, P. Piu, *Explicit formulas for non-geodesic biharmonic curves of the Heisenberg group*, Rend. Sem., Mat. Univ. Politec. Torino 62 (2004), 265-278.
- [20] D. Fetcu, *Biharmonic curves in the generalized Heisenberg group*, Beitrage Algebra Geom. 46 (2005), 513-521.
- [21] A. Balmuş, *On the biharmonic curves of the Euclidean and Berger 3-dimensional spheres*, Sci. Ann. Univ. Agric. Sci. Vet. Med. 47 (2004), 87-96.
- [22] A. Balmus, C. Oniciuc, *Biharmonic surfaces of S^4* , Kyushu J. Math., to appear, arXiv: 0902.4849.
- [23] Y.-L. Ou, *Biharmonic hypersurfaces in Riemannian manifolds*, arxiv:0901.1507v2.
- [24] R. Caddeo, S. Montaldo, C. Oniciuc, *Biharmonic hypersurfaces in 4-dimensional space forms*, arXiv:0709.2023v1.
- [25] Y.-L. Ou, *On conformal biharmonic immersions*, Anal. Global Analysis and Geom., vol.2, Number 2 (2009), 133-142.
- [26] A. Balmus, S. Montaldo, C. Oniciuc, *Classification results for biharmonic results in spheres*, Israel J. Math. 168 (2008), 201-220.
- [27] J. Berndt, F. Tricerri, L. Vanhecke, *Generalized Heisenberg groups and Damek-Ricci harmonic spaces*, Lecture Notes in Mathematics, 1598. Springer-Verlag, Berlin, 1995.
- [28] J. Inoguchi, *Submanifolds with harmonic mean curvature in contact 3-manifolds*, Colloq. Math. 100 (2004), 163-179.
- [29] T. Sasahara, *Legendre surfaces in Sasakian space forms whose mean curvature vectors are eigenvectors*, Publ. Math. Debrecen 67 (2005), 285-303.
- [30] C. Özgür, M. M. Tripathi, *On Legendre Curves in α -Sasakian Manifolds*, Bull. Malays. Math. Sci. Soc.(2)31(1) (2008), 91-96.
- [31] K. Arslan, R. Ezentas, C. Murathan, T. Sasahara, *Biharmonic anti-invariant submanifolds in Sasakian space forms*, Beitrage Algebra Geom., Beiträge zur Algebra und Geometrie Contributions to Algebra and Geometry 48(1) (2007), 191-207.

- [32] K. Arslan, R. Ezentas, C. Murathan, T. Sasahara, *Biharmonic submanifolds in 3-dimensional (κ, μ) -manifolds*, Internat. J. Math. Math. Sci. 22 (2005), 3575-3586.
- [33] B. C. Montano, L. D. Terlizzi, M. M. Tripathi, *Invariant submanifolds of $(\kappa; \mu)$ -manifolds*, Glasg. Math. J. 50 (2008), no. 3., 499-507.
- [34] D. Blair, *Riemannian Geometry of Contact and Symplectic Manifolds*, 2002, Birkhauser, Boston.
- [35] T. Sasahara, *Biharmonic Lagrangian surfaces of constant mean curvature in complex space forms*, Glasg. Math. J. 49 (2007), 497-507.
- [36] W. Zhang, *New Examples of Biharmonic Submanifolds in CP^n and S^{2n+1}* , arXiv/math:0705.3961.
- [37] S. Ishikawa, *Biharmonic W-Surfaces in 4-dimensional pseudo-Euclidean Space*, Memoirs of the Faculty of Science, Kyushu University, Ser. A, Vol. 46, No. 2 (1992), 269-286.
- [38] F. Defever, G. Kaimakamis, V. Papantoniou, *Biharmonic surfaces of the 4-dimensional semi-Euclidean space E^4* , J. Math. Anal. Appl. 315 (2006), 276-286.
- [39] C. Ouyang, *Biharmonic space-like submanifolds in pseudo-Riemannian space form*, Chinese Ann. Math. Ser. A, 21 No.6 (2000), 649-654.
- [40] H. Sun, *2-Harmonic Spacelike Submanifolds in De Sitter Space*, Journal of Southern Institute of Metallurgy, 21 No. 2 (2000), 138-142.
- [41] W. Zhang, *Biharmonic space-like hypersurfaces in pseudo-Riemannian space*, arxiv:math/0808.1346v1.
- [42] I. Satō, *On a structure similar to the almost contact structure*, Tensor (N.S.) 30 (1976), no. 3, 219-224.
- [43] T. Adati, K. Matsumoto, *On conformally recurrent and conformally symmetric P-Sasakian Manifolds*, TRU Math. 13(1977), 25-32.
- [44] K. Matsumoto, *On Lorentzian paracontact manifolds*, Bull. of Yamagata Univ. Nat. Sci., 12(1989), 151-156.
- [45] I. Mihai, R. Rosca, *On Lorentzian P-Sasakian manifolds*, Classical Analysis, World Scientific Publ., (1992), 156-169.
- [46] S. Prasad, R. H. Ojha, *Lorentzian paracontact submanifolds*, Publ. Math. Debrecen. 44 (1994), 215-223.
- [47] D. E. Blair, G. D. Ludden, *Hypersurfaces in almost contact manifold*, Tohoku Math. J. (2), Vol. 21, No. 3 (1969), 354-362.

- [48] S. S. Eum, *On Complex hypersurfaces in normal almost contact spaces*, Tensor(19) (1968), 45-50.
- [49] S. I. Goldberg, K. Yano, *Noninvariant hypersurfaces of almost contact manifolds*, J. of Math. Soc. Japan 22 (1970), 25-35.
- [50] G. D. Ludden, *Submanifolds of cosymplectic manifolds*, J. Diff. Geom. 4 (1970), 237-244.
- [51] T. Adati, *Hypersurfaces of almost paracontact Riemannian manifold*, TRU Math. 17 (1981), no. 2, 189-198.
- [52] A. Bucki, *Hypersurfaces of almost r -paracontact Riemannian manifold*, Tensor N.S. 48 (1989), 245-251.
- [53] A. Bucki, A. Miernowski, *Invariant hypersurfaces of an almost r -paracontact manifold*, Demonstratio Math. 19 (1986), 113-121.
- [54] H. Gill, K. K. Dube, *Invariant and Non Invariant Hypersurfaces of Almost r -Paracontact Manifolds*, Proceedings of the National Conference on Frontiers in Applied and Computational Mathematics (FACM-2005), 2005.
- [55] R. Prasad, A. Rai, A. Shukla, M. M. Tripathi, *A note on transversal hypersurfaces of Lorentzian almost paracontact manifolds*, Demonstratio Mathematica, 2007, Vol. 40, n. 4, 929-938.
- [56] U. C. De, A. K. Sengupta, *CR-submanifolds of a Lorentzian para-Sasakian manifold*, Bull. Malaysian Math. Sc. Soc. (Second Series) 23 (2000) 99-106.
- [57] U.C. De, A. A. Shaikh, *Non-Existence of Proper Semi-Invariant Submanifolds of a Lorentzian Para-Sasakian Manifold*, Bull. Malaysian Math. Soc. (Second Series) 22 (1999) 179-183.
- [58] B. Prasad, *Semi-Invariant Submanifolds of a Lorentzian Para-Sasakian Manifold*, Bull. Malaysian Math. Soc. (Second Series) 21 (1998) 21-26.
- [59] M.M. Tripathi, *On semi-invariant submanifolds of Lorentzian almost paracontact manifolds*, J. Korea Soc. Math. Educ. Ser. B: Pure Appl. Math. ISSN 1226-0657 Volume 8, Number 1 (May 2001), Pages 1-8.
- [60] M.M. Tripathi, *On semi-invariant submanifolds of LP-cosymplectic manifolds*, Bull. Malaysian Math. Soc. (Second Series) 24(2001), no. 1, 69-79.
- [61] A. Bejancu, *CR-submanifolds of a Kaehler manifold. I*, Proc. Amer. Math. Soc., 69(1) (1978), 135-142.
- [62] A. Bejancu, N. Papaghiuc, *Semi-Invariant Submanifolds of a Sasakian Manifold*, Ann. Stiint. Al.I. Cuza Univ. Iasi 27(1981), 163-170.
- [63] B. Y. Chen, *Slant immersions*, Bull. Austral. Math. Soc. 41 (1990) no.1, 135-147.

- [64] B. Y. Chen, *Geometry of Slant submanifolds*, Katholieke Universiteit Leuven, Leuven, 1990.
- [65] A. Lotta, *Slant submanifolds in Contact Geometry*, Bull. Math. Soc. Romanie 39(1996), 183-198.
- [66] J. L. Cabrerizo, A. Carriazo, L. M. Fernandez, M. Fernandez, *Slant Submanifolds in Sasakian Manifolds*, Glasgow Math. J. 42(2000), 125-138.
- [67] J. L. Cabrerizo, A. Carriazo, L. M. Fernandez, M. Fernandez, *Structure on a Slant Submanifold of a Contact Manifold*, Indian J. Pure Appl. Math. 31(2000), 857-864.
- [68] R. S. Gupta, S.M.K. Haider, M.H. Shadid, *Slant submanifolds of a Kenmotsu manifold*, *Radovi Math.*, vol.12, 205-214 (2004).
- [69] V. A. Khan, M. A. Khan, K. A. Khan, *Slant and semi-slant submanifolds of a Kenmotsu manifold*, Math. Slovaca 57 (2007), No. 5, 483-494, DOI: 10.2478/s12175-007-0040-5.
- [70] N. Papaghiuc, *Semi-Slant Submanifolds of a Kaehlerian Manifold*, Ann. Stiint. Al.I. Cuza Univ. Iasi. 40(1994), 55-61.
- [71] H. Li, X. Li, *Semi-slant submanifolds of locally Product manifold*, Georgian math. J. vol.12 (2005) no.2, 273-282.
- [72] J. L. Cabrerizo, A. Carriazo, L. M. Fernandez, M. Fernandez, *Semi-Slant Submanifolds of a Sasakian Manifold*, Geom. Dedicata 78 (1999), 183-199.
- [73] M. Atçeken, *Semi-slant submanifolds of an almost paracontact manifold*, Canadian Math. Bulletin, ISSN 0008-4395, Vol. 53, No.2 (2010), 206-217.
- [74] R. L. Bishop, B. O'Neill, *Manifolds of negative curvature*, Trans. Amer. Math. Soc. 145 (1969), 1-49.
- [75] B.-Y. Chen, *Geometry of warped product CR-submanifolds in Kaehler manifolds*, Monatsh Math. 133, 177-195, (2001).
- [76] B.-Y. Chen, *Geometry of warped product CR-submanifolds in Kaehler manifolds II*, Monatsh Math. 134, 103-119, (2001).
- [77] I. Hasegawa, I. Mihai, *Contact CR-warped Product submanifolds in Sasakian Manifolds*, Geom. Dedicata, 102 (2003), 143-150.
- [78] B.Sahin, *Nonexistence of warped product semi-slant submanifolds of Kaehler manifold*, Geom. Dedicata 117 (2006), 195-202.
- [79] M. Atçeken, *Warped product semi-slant submanifolds in a locally Riemannian product manifold*, Bull. Austral. Math. Soc. 77, vol.2, 177-186 (2008).
- [80] M. Atçeken, *Warped product semi-slant submanifolds in Kenmotsu manifolds*, Turk. J. Math. 34 (2010), 425-432.

- [81] A. K. Khan, V. A. Khan, S. Uddin, *Warped product submanifolds of cosymplectic manifolds*, Balkan J. Of Geom. and Its Appl., vol.13, No.1 (2008), 55-65.
- [82] M. Tarafdar, A. Bhattacharyya, *On Lorentzian para-Sasakian manifolds*, Steps in Diff. Geom, Proceedings of the Collquium on Diff. Geom. 25-30, July 2000, Debrecen, Hungary.
- [83] J. Walrave, *Curves and surfaces in Minkowski Space*, Doctoral Thesis, K. U. Leuven, Fac. of Science, 1995.
- [84] P. Baird, J. C. Wood, *Harmonic Morphisms Between Riemannian Manifolds*, Clarendon Press, Oxford, 2003.
- [85] A. Sabuncuoğlu, *Lineer Cebir*, Nobel Yayınları, 2004.
- [86] B. O'Neill, *Semi-Riemann Geometry*, Academic Press, New York, 1983.
- [87] B. Unal, *Doubly warped products*, Differential Geometry and its Applications Volume 15, Issue 3, November 2001, 253-263.
- [88] K. Matsumoto, I. Mihai, R. Rosca, ξ -null geodesic gradient vector fields on a Lorentzian para-Sasakian manifold, J. Korean Math. Soc. 32(1) (1995), 17-31.
- [89] M. M. Tripathi, U. C. De, *Lorentzian almost paracontact manifolds and their submanifolds*, J. Korea Soc. Math. Educ. Ser. B: Pure Appl. Math. ISSN 1226-0657 Volume 8, Number 2 (May 2001), 101-125.
- [90] I. Mihai, A. A. Shaikh, U. C. De, *On Lorentzian para-Sasakian manifolds*, Korean Journal of Mathematical Sciences 6 (1999), 1-13.
- [91] K. Matsumoto, I. Mihai, *On a certain transformation in a Lorentzian para-Sasakian manifold*, Tensor (N.S.) 47 (1988), 189-197.
- [92] J.K. Beem, P.E. Ehrlich, *Global Lorentzian geometry*, Marcel Dekker, New York, 1981.
- [93] U. C. De, K. Matsumoto, A. A. Shaikh, *On Lorentzian para-Sasakian manifolds*, Rendicontidel Seminario Matematico di Messina, Serie II, Supplemto al n. 3 (1991), 1-10.
- [94] K. D. Singh, M. M. Tripathi, *On normal (e_1, e_2) -r-structure*, Ganita 40 (1989), no.2, 101-112.
- [95] K. Yano, M. Kon, *Structures on manifolds*, Series in Pure Mathematics, 3. World Scientific Co., Singapore, 1984.
- [96] M. C. Chaki, B. Gupta, *On conformally symmetric spaces*, Indian J. Math. 5 (1963), 113-122.
- [97] K. Yano, S. Sawaki, *Riemannian manifolds admitting a conformal transformation group*, J. Differential Geometry 2 (1968), 161-184.

- [98] R. Deszcz, *On pseudo-symmetric spaces*, Bull. Soc. Belg. Math. Ser. A, 44 (1992), 1-34.

ÖZGEÇMİŞ

3 Şubat 1980 tarihinde Malatya’da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Malatya, İstanbul ve Ankara’ da tamamladı. 1997 yılında Hacettepe Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü lisans programına kayıt yaptırdı ve Ocak 2002’ de mezun oldu. Eylül 2002’ de İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisansa başladı. 2005 yılında yüksek lisansı tamamladı ve doktora programına kayıt yaptırdı. Ocak 2006’ da, Niğde Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde araştırma görevlisi olarak göreve başladı. Mayıs 2006’ da lisansüstü öğrenimini tamamlamak üzere görevlendirme ile İnönü Üniversitesi Fen - Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde araştırma görevlisi olarak çalışmaya başladı. Evli olup halen İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde araştırma görevlisi olarak görev yapmaktadır.