

**ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**KLASİK MEKANİKTE
BAZI TERSENEBİLİR DÖNÜŞÜMLER**

Emre GÜRKANLI

FİZİK ANABİLİM DALI

**ANKARA
2011**

Her hakkı saklıdır

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

KLASİK MEKANİKTE BAZI TERSENEBİLİR DÖNÜŞÜMLER

Emre GÜRKANLI

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Fizik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Adnan TEĞMEN

Bu tezde klasik mekanikte terslenebilir dönüşümler olan kanonik ve kanonoid dönüşümler incelenmiştir. Bilindiği gibi bu dönüşümler Hamilton hareket denklemlerini daha basit bir forma indirgemek için kullanılan terslenebilir gönderimlerdir. Bu çalışmada ilk olarak, dönüşümlerin daha iyi anlaşılması açısından teğet uzayı, faz uzayı, Liouville teoremi, Poisson parantezleri gibi yardımcı kavramlar ele alınmıştır. Daha sonra kanonoid ve kanonik dönüşümlerin detaylı ve zamana bağımlılığı da içerecek biçimde bir tanımı yapılmış ve bir dönüşümün kanonoid ve kanonik olması için gerek, yeter şartlar bulunmuştur. Buna göre kanonoid dönüşümlerde, daha basit bir sisteme geçiş için, Hamilton hareket denklemlerini değişmez bırakan yeni bir Hamilton fonksiyonunun varlığı yeterli olurken, kanonik dönüşümlerde, yeni Hamilton fonksiyonunun varlığının yanı sıra yeni faz uzayı değişkenlerinin Poisson parantezlerinin de değişmez kalması gerekmektedir. Her iki dönüşümünde bu tanımlarından yararlanarak bir kıyaslama kurulmuş ve kanonik dönüşümlerin kanonoid dönüşümlerin özel bir alt sınıfı olduğu sonucuna varılmıştır. Son olarak her iki dönüşüm için de üretici fonksiyon ifadeleri bulunmuş ve bu dönüşümler değişik dinamik sistemler kullanılarak örneklendirilmiştir.

Ocak 2011, 47 sayfa

Anahtar Kelimeler: kanonoid dönüşümler, kanonik dönüşümler.

ABSTRACT

Master Thesis

SOME INVERTIBLE TRANSFORMATIONS IN CLASSICAL MECHANICS

Emre GÜRKANLI

Ankara University
Graduate school of Natural and Applied Sciences
Department of Physics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Adnan TEĞMEN

In this thesis, canonical and canonoid transformations which are invertible transformations in classical mechanics are investigated. As is known, these transformations are invertible transformations which can be used to reduce Hamilton's equations of motions into a simpler form. In this study, in order to understand the concept of transformation, the complementary concepts such as tangent space, phase space, Liouville theorem, Poisson brackets are considered. Second, definitions of canonical and canonoid transformations which contain time dependence are made and the necessary and sufficient conditions for a transformation to be canonical and canonoid are found. With this argument, while in canonoid transformations the existence of a new Hamiltonian function which preserves the Hamiltonian nature of the equations of motion is enough in passing into a simpler form, in canonical transformations besides the existence of a new Hamilton function, the Poisson bracket of new phase space variable should remain invariant. A comparison to the definitions of both transformation is made, and it is found that canonical transformations are a special subclass of canonoid transformations. Eventually, in both transformations, generating functions are found and transformations are exemplified by using several dynamical systems.

January 2011, 47 pages

Key Words: canonoid transformations, canonical transformations.

TEŞEKKÜR

Tez alıŐmalarımın her aŐamasında bana yol gosteren ve yakın ilgisiyle bryk destek sağlayan Ankara Unversitesi Fen Fakultesi Fizik Bolumu OĐretim uyelerinden danışman hocam, Sayın Do. Dr. Adnan TEĞMEN'e teŐekkurlerimi sunarım.

Emre GÜRKANLI

Ankara, Ocak 2011

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
SİMGELER DİZİNİ.....	v
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	vi
1. GİRİŞ.....	1
2. TEĞET (TANJANT) UZAYI.....	2
3. DOĞRUSAL FONKSİYON.....	4
3.1 Doğrusal Fonksiyon.....	4
3.2 Doğrusal Form.....	4
3.3 Dual Uzay.....	4
4. KOTANJANT (FAZ) UZAYI.....	5
4.1 Faz Uzayının Tanımı.....	5
4.2 Faz Uzayının Özellikleri.....	5
4.3 Faz Uzayında Dönüşüm.....	8
5. LIOUVILLE TEOREMİ.....	9
6. POISSON PARANTEZLERİ.....	11
6.1 Poisson Parantezlerinin Özellikleri.....	11
7. KANONOİD DÖNÜŞÜMLER.....	16
7.1 Kanonoid Dönüşümler için Üretici Fonksiyonlar.....	19
7.2 Kanonoid Dönüşüm Örnekleri ve Üretici Fonksiyonları.....	23
8. KANONİK DÖNÜŞÜMLER.....	30
8.1 Kanonik Dönüşümler için Üretici Fonksiyonlar.....	30
8.2 Kanonik Dönüşümler için Üretici Fonksiyon Tipleri.....	35
8.3 Kanonik Dönüşüm Örnekleri ve Üretici Fonksiyonları.....	39
8.3.1 Metrik dönüşümler.....	39
8.3.2 Lineer dönüşümler.....	39
8.3.3 Ayar dönüşümleri.....	40
8.3.4 Nokta dönüşümleri.....	41
8.3.5 R^2 de dönme.....	42
8.4 Sonsuz Küçük Kanonik Dönüşümler.....	42
9.SONUÇ.....	45
KAYNAKLAR.....	46
ÖZGEÇMİŞ.....	47

SİMGELER DİZİNİ

H	Hamilton fonksiyonu
K	Kamilton fonksiyonu
L	Lie türevi
W	Kanonoid dönüşümler için üretici fonksiyon
F	Kanonik dönüşümler için üretici fonksiyon
M	P cismi üzerinde bir vektör uzayı
N	P cismi üzerinde bir vektör uzayı
M*	M vektör uzayının dual uzayı
ε	Süreklilik parametresi
$\varepsilon\eta$	Sonsuz küçük yer değiştirme
G	Sonsuz küçük kanonik dönüşümler için üretici fonksiyon
$T_m R^2$	R^2 manifoldu üzerinde m noktasındaki teğet (tanjant) uzayı
$T_m^* R^2$	$T_m R^2$ uzayının dual uzayı
D	Faz uzayında sonsuz küçük hacmin yoğunluğu
Z	Faz uzayında sonsuz küçük hacimdeki sistem noktalarının sayısı
V	Faz uzayında sonsuz küçük bir bölgenin hacmi
R	Reel sayılar kümesi

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1 Tanjant (teğet) uzayı.....	2
Şekil 4.1 Kepler probleminde radyal hareket için faz portresi.....	6
Şekil 4.2 Bir boyutlu basit harmonik salınıcı için faz portresi.....	6
Şekil 5.1 Faz uzayında bir hacmin hareketi.....	8

1.GİRİŞ

Bilindiği gibi kanonik dönüşümler ve onun daha geniş bir formu olan kanonoid dönüşümler Hamilton mekaniğinde çok önemli bir yere sahiptir. Bu dönüşümler Hamilton hareket denklemlerini daha basit bir forma indirgemek için kullanılan terslenebilir gönderimlerdir. Böyle bir dönüşüm Hamilton denklemlerini biçim olarak değişmez bırakan yeni bir Hamilton fonksiyonunu gerektirirken, yeni faz uzayı değişkenlerinin Poisson parantezini de değişmez bırakması gerekir.

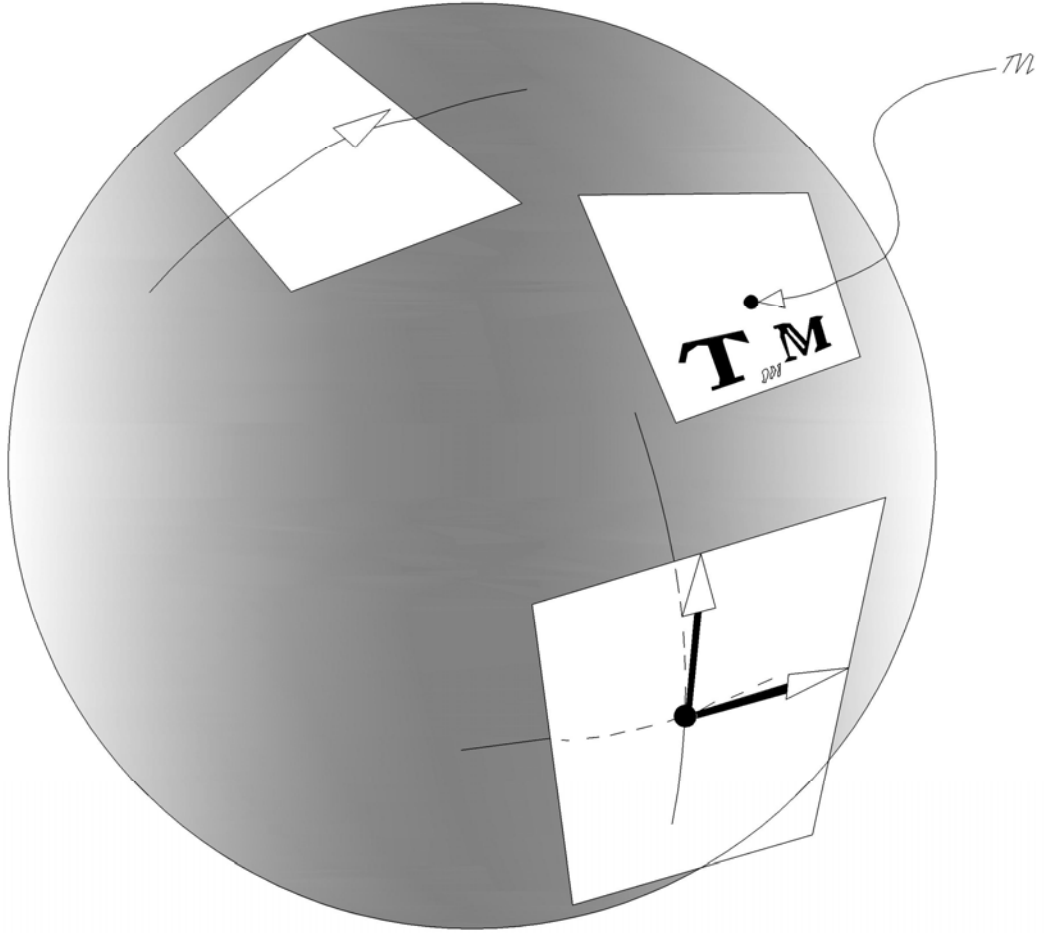
Kanonoid dönüşümler ise kanonik dönüşümlere göre daha geniş bir sınıf olup, daha basit bir sisteme geçmek için yeni Hamilton fonksiyonu üretebilen terslenebilir bir gönderim bulmak yeterli olur.

Buradan anlaşılacağı gibi kanonoid dönüşümler, dinamik sistemlerin çözülmesinde daha geniş ve rahat bir hareket alanı sağlamakta, kanonik dönüşümler ise kanonoid dönüşümlerin özel bir alt sınıfı olarak kalmaktadır.

İlk olarak, bu dönüşümlerin daha iyi anlaşılması için teğet uzayı, faz uzayının yapısı, Liouville teoremi ve Poisson parantezleri gibi bazı yardımcı kavramlar ele alınacak daha sonra bir dönüşümün kanonoid olması ve kanoniklik için gerek ve yeter şartlar incelenecektir.

2.TEĞET (TANJANT) UZAYI

$m \in R^2$ olsun. $v \in R^2$ olmak üzere m noktasından $m+v$ noktasına giden yönlü doğru parçası “ m noktasında, v teğet vektörü” olarak adlandırılısın ve v_m biçiminde gösterilsin. Bu m noktasındaki bütün teğet vektörlerinin kümesi $T_m R^2$ ile gösterilsin (Şekil 2.1).



Şekil 2.1 Tanjant uzayı

$T_m R^2$ kümesi üzerinde toplama ve skalerle çarpma işlemleri aşağıdaki gibi tanımlansın;

- 1) $v_m + w_m = (v + w)_m$
- 2) $\lambda \in R$ olmak üzere ;

$$\lambda v_m = (\lambda v)_m$$

Burada $v_m + w_m$ teğet vektörü, m noktasından $m + (v + w)$ noktasına giden yönlü doğru parçasıdır. Yine λv_m teğet vektörü de, m noktasından $m + \lambda v$ noktasına giden yönlü doğru parçasıdır.

$T_m R^2$ kümesi yukarda tanımlanan, işlemlere göre R cismi üzerinde bir vektör uzayıdır. Böylece elde edilen $T_m R^2$ vektör uzayına, R^2 uzayının m noktasındaki “teğet uzayı” denir.

3. DOĞRUSAL FONKSİYON (LINEER DÖNÜŞÜM)

3.1 Doğrusal Fonksiyon

M ve N aynı P cismi üzerinde iki vektör uzayı ve

$$f : M \rightarrow N$$

bir fonksiyon olsun. Buna göre aşağıdaki koşullar sağlansın.

1) Her $x, y \in M$ için

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

2) Her $x \in M$ ve her $\lambda \in P$ için

$$f(\lambda x) = \lambda f(x)$$

Bu f fonksiyonuna bir doğrusal fonksiyon veya lineer dönüşüm denir.

3.2 Doğrusal Form

Eğer yukarıdaki tanımda $N = P$ olursa

$$f : M \rightarrow P$$

Fonksiyonu doğrusal ise buna doğrusal (lineer) form denir.

3.3 Dual Uzay

M üzerinde bütün doğrusal formların kümesi M^* ile gösterilir. Burada M^* bir vektör uzayıdır ve M 'nin dual uzayı ya da “cebirsal duali” olarak isimlendirilir.

4. KOTANJANT (FAZ) UZAYI

$m \in R^2$ olsun. $T_m R^2$ uzayından R ye giden bütün lineer dönüşümlerin kümesi $T_m^* R^2$ ile gösterilsin. Bu küme R cismi üzerinde bir vektör uzayıdır.

Bu vektör uzayına $T_m R^2$ vektör uzayının “duali” adı verilir.

4.1 Faz Uzayının Tanımı

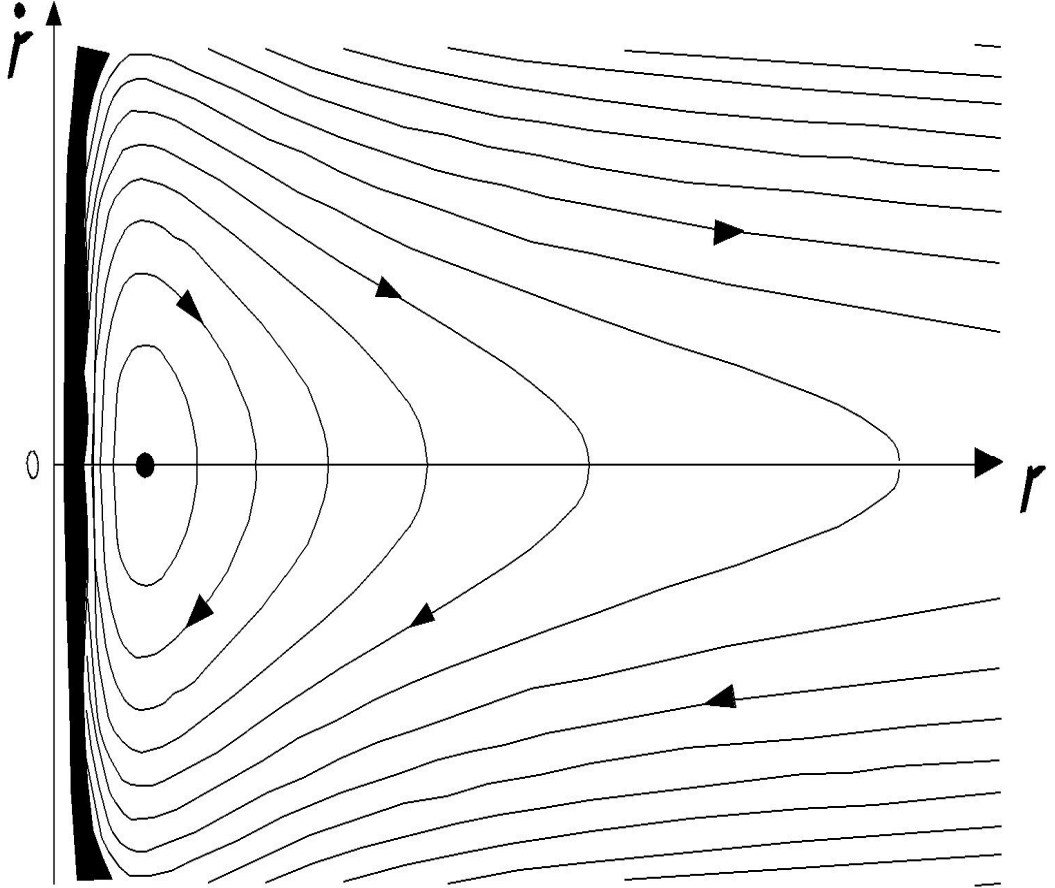
$T_m^* R^2$ vektör uzayına, R^2 manifoldu üzerinde m noktasındaki kotanjant (faz) uzayı denir. Bu uzayın her bir elemanına m noktasında bir “kotanjant vektör” denir.

4.2 Faz Uzayının Özellikleri

- 1) Faz uzayı, içinde bir sistemin tüm olası durumlarının temsil edildiği bir uzaydır.
- 2) Sistemin her olası durumuna karşılık faz uzayında bir tek nokta vardır.
- 3) Mekanik sistemler için, faz uzayı genellikle konum ve momentum değişkenlerinin tüm olası değerlerinden oluşur.
- 4) Bir faz uzayında, her serbestlik veya sistem değişkeni çok boyutlu uzayda bir eksen olarak gösterilir. Sistemin olası her durumu için, veya sistem değişkenlerinin değerlerinin izin verilen kombinasyonları için, çok boyutlu uzayda bir nokta işaretlenir. Bu işaretli noktaların temsili, sistemin durumunun zamana göre ilerlemesiyle benzerdir.
- 5) Faz diyagramı sistemin girebileceği her durumu temsil eder ve diyagramın şekli, sistemin niteliklerini aydınlatır.
- 6) Bir faz uzayı birçok boyuttan oluşabilir. Ancak boyut çift sayı olmalıdır.
- 7) Klasik mekanikte faz uzayının koordinatları genelleştirilmiş koordinatlar q_i ve onların konjuge eşlenikleri p_i lerdir. Böyle bir sistemdeki noktaların yerel yoğunluğu Liouville teoremine uymaktadır ve böylece sabit olarak alınabilir.
- 8) Klasik mekanikte, sistemin verilen herhangi bir zamandaki faz uzayı koordinatları sistemin tüm dinamik değişkenlerinden oluşmaktadır.

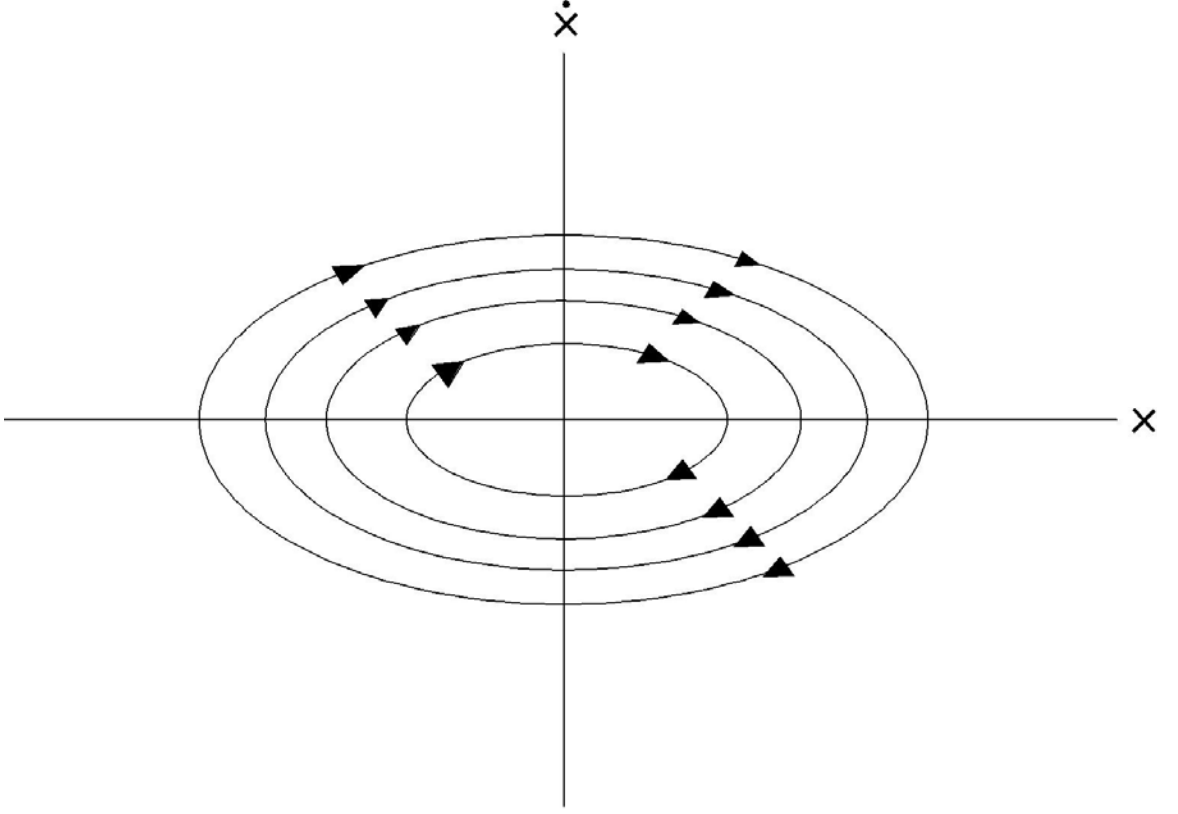
9) Faz uzayında her bir noktanın kesinlikle bir yörüngede bulunması sebebiyle, hiçbir şekilde faz yörüngeleri kesişmez.

Şekil 4.1-4.2' de Kepler probleminde radyal hareket ve basit harmonik salıncı için faz portreleri görülmektedir.



Şekil 4.1 Kepler probleminde radyal hareket için faz portresi

Şekil 4.1' de kapalı eğriler bağlı durumlara karşılık gelmektedir ve bu kapalı eğriler negatif enerji seviyesindedir.



Şekil 4.2 Bir boyutlu basit harmonik salıncı için faz portresi

Şekil 4.2' de görüldüğü üzere hatmonik salıncı için üç farklı toplam enerjiye karşılık gelen kapalı yörüngeler görülmektedir. Diyagrama bakarak aşağıdaki çıkarımlarda bulunulabilir.

- 1) Kapalı yörüngelerin bir noktada kesişmediği görülmektedir. Herhangi bir noktada yörüngelerin kesişmiş olması durumunda ise, bu noktada toplam enerji, iki olası enerji düzeyinde bulunmasından dolayı tanımlı olmayacaktır.
- 2) Kapalı yörüngeler görüldüğü üzere saat yönündedir. Örnek olarak diyagramın sağ üst köşesinde hız pozitiftir.
- 3) Diyagramda x in bu bölgede \dot{x} a karşılık arttığı ve hızın sıfır olduğu değerde maksimuma ulaştığı görülmektedir.

4.3 Faz Uzayında Dönüşüm

Bir genelleştirilmiş koordinat ve momentum takımından bir başka genelleştirilmiş koordinat ve momentum takımına geçmek faz uzayında bir dönüşüm yapmaktır.

$$(x_i, t) \mapsto (X_i(x, t), t)$$

Faz uzayında yapılan dönüşümler genellikle Hamilton fonksiyonunu ve Hamilton denklemlerinin şeklini değiştirir.

Giriş bölümünde açıklandığı üzere, Hamilton hareket denklemlerinin ve Hamilton fonksiyonunun yapısını değiştirmeyen dönüşümler incelenecektir.

5. LIOUVILLE TEOREMİ

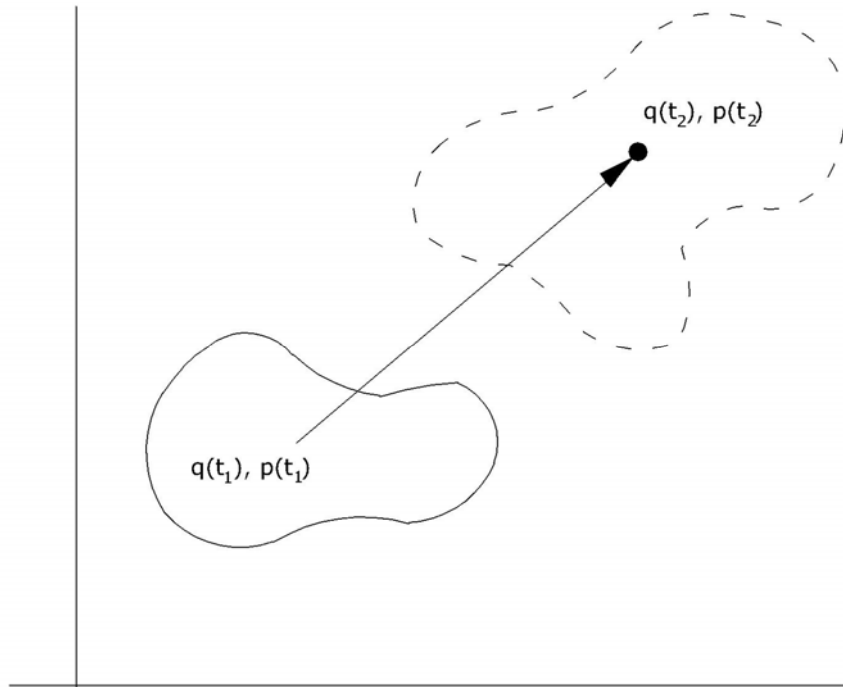
Faz uzayında her sistem bir tek nokta ile gösterilir. Dolayısıyla bu sistemlerin kümesi faz uzayında bir noktalar yığına karşı gelir. Liouville teoremi faz uzayında verilen bir sistemin komşuluğundaki sistemlerin yoğunluğunun zamanla değişmediğini ifade eder.

Faz uzayında verilen bir sistem noktasını çevreleyen sonsuz küçük bir hacim göz önüne alınsın. Bu hacmin sınırı $t = t_1$ anında bazı komşu sistem noktalarının yüzeyleri ile meydana getirilmiş olsun. Zamanla hacmi tanımlayan sistem noktaları faz uzayında hareket ederler ve hacim zamanla farklı şekiller alır.

Yukarıda tanımlanan D yoğunluğunun zamana göre toplam türevi

$$\frac{dD}{dt} = \{D, H\} + \frac{\partial D}{\partial t} \quad (5.1)$$

biçiminde yazılır.



Şekil 5.1 Faz uzayında sonsuz küçük bir hacmin hareketi

Şekil 5.1' de, kesikli çizginin meydana getirdiği eğri sonsuz küçük hacmin zamanla yer değiştirmesini gösteriyor. Hacim içindeki noktaların sayısı sabit kalacaktır. Bu ifade şöyle açıklanabilir. Başlangıçta hacim içinde olan bir sistem noktası dışarı çıkamaz. Eğer bir sistem noktası sınırı geçerse belli bir an için faz uzayında sınır yüzeyini tanımlayan sistem noktalarından biriyle aynı konumda olacak, yani çakışacaktır. O halde sistem hiçbir zaman hacmi terk edemez. Aynı nedenden dolayı başlangıçta dışarıda olan bir sistem hiçbir zaman hacim içine giremez.

Bir başka durum ise hacmin büyüklüğü ile ilgilidir. Poincare integral invariantlarının bir sonucu olarak, faz uzayında bir bölgenin hacminin sonsuz küçük kanonik dönüşümler altında değişmez kaldığını ifade eder. Bu nedenle hacmin büyüklüğü de zamanla değişmez.

O halde sonsuz küçük hacimde hem sistemlerin dZ sayısı hem de dV hacmi sabittir. Dolayısıyla

$$D = \frac{dZ}{dV} \quad (5.2)$$

ifadesi bir sabittir. Buradan;

$$\frac{dD}{dt} = 0 \quad (5.3)$$

olur. Bu ifade de Liouville teoremini ispatlar. Teorem, değişik olarak

$$\frac{\partial D}{\partial t} = -\{D, H\} \quad (5.4)$$

biçiminde de ifade edilebilir.

6. POISSON PARANTEZLERİ

$f(x_1, x_2, t)$ genelleştirilmiş koordinatlara ve zamana bağlı bir fonksiyon olsun. Bu fonksiyonun zamana göre türevi;

$$\frac{df}{dt} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \dot{x}_2 \right) + \frac{\partial f}{\partial t} \quad (6.1)$$

olur. Bu ifade de Hamilton hareket denklemleri kullanılırsa ifade aşağıdaki gibi olur.

$$\frac{df}{dt} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial H}{\partial x_2} - \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial H}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial f}{\partial t} \quad (6.2)$$

Yukarıdaki ifadede

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial H}{\partial x_2} - \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial H}{\partial x_1} \right)$$

Şeklindeki terimler için bir kısaltma kullanılır ve bu kısaltma ilk Poisson tarafından kullanıldığı için onun adıyla anılır.

Herhangi iki $f(x_1, x_2, t)$ ve $g(x_1, x_2, t)$ için Poisson parantezi şu şekilde tanımlanır.

$$\{f, g\} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial g}{\partial x_2} - \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial g}{\partial x_1} \right) \quad (6.3)$$

Buna göre $f(x_1, x_2, t)$ fonksiyonunun zamana göre tam türevi

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t} \quad (6.4)$$

olur.

6.1 Poisson Parantezlerinin Özellikleri

1) İki fonksiyonun Poisson parantezi antisimetriktir.

$$\{f, g\} = -\{g, f\} \quad (6.5)$$

İspat

$$\begin{aligned}\{f, g\} &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial g}{\partial x_2} - \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial g}{\partial x_1} \right) \\ &= - \left(\frac{\partial g}{\partial x_1} \frac{\partial f}{\partial x_2} - \frac{\partial g}{\partial x_2} \frac{\partial f}{\partial x_1} \right) \\ &= -\{g, f\}\end{aligned}\tag{6.6}$$

2) f, g ve h herhangi üç fonksiyon olmak üzere;

$$\{f, g + h\} = \{f, h\} + \{g, h\}\tag{6.7}$$

$$\{f, g + h\} = \{f, g\} + \{f, h\}\tag{6.8}$$

olur. Bu, Poisson parantezinin her iki fonksiyona göre lineer yani bilineer olduğunu gösterir.

İspat

$$\begin{aligned}\{f + g, h\} &= \frac{\partial(f + g)}{\partial x_1} \frac{\partial h}{\partial x_2} - \frac{\partial(f + g)}{\partial x_2} \frac{\partial h}{\partial x_1} \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial g}{\partial x_1} \right) \frac{\partial h}{\partial x_2} - \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} + \frac{\partial g}{\partial x_2} \right) \frac{\partial h}{\partial x_1} \\ &= \{f, h\} + \{g, h\}\end{aligned}\tag{6.9}$$

3) f ve g herhangi iki fonksiyon ve c de bir sabit olmak üzere aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

$$\begin{aligned}\{cf, g\} &= c\{f, g\} \\ \{f, cg\} &= c\{f, g\}\end{aligned}\tag{6.10}$$

İspat

$$\begin{aligned}\frac{\partial(cf)}{\partial x_1} \frac{\partial g}{\partial x_2} - \frac{\partial(cf)}{\partial x_2} \frac{\partial g}{\partial x_1} &= c \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial g}{\partial x_2} - \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial g}{\partial x_1} \right)}_{\{f,g\}} \\ &= c\{f, g\}\end{aligned}\quad (6.11)$$

4) f , g ve h herhangi üç fonksiyon olsun. Buna göre aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

$$\begin{aligned}\{f, gh\} &= \{f, g\}h + g\{f, h\} \\ \{fg, h\} &= \{f, h\}g + f\{g, h\}\end{aligned}\quad (6.12)$$

İspat

$$\begin{aligned}\{f, gh\} &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial(gh)}{\partial x_2} - \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial(gh)}{\partial x_1} \right) \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \left(\frac{\partial g}{\partial x_2} h + g \frac{\partial h}{\partial x_2} \right) - \frac{\partial f}{\partial x_2} \left(\frac{\partial g}{\partial x_1} h + g \frac{\partial h}{\partial x_1} \right) \right) \\ &= \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial g}{\partial x_1} - \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial g}{\partial x_2} \right)}_{\{f,g\}} h + g \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial h}{\partial x_2} - \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial h}{\partial x_1} \right)}_{\{f,h\}} \\ &= \{f, g\}h + g\{f, h\}\end{aligned}\quad (6.13)$$

5) f , g ve h herhangi üç fonksiyon olmak üzere;

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{f, h\}\} = 0 \quad (6.14)$$

Yukarıdaki özdeşlik Jakobi özdeşliği olarak bilinir. Poisson parantezinin asosyatif olmamasının bir sonucudur.

İspat

$$\begin{aligned}\{f, \{g, h\}\} &= \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_1} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x_2 \partial x_1} \frac{\partial h}{\partial x_2} + \frac{\partial^2 h}{\partial x_2^2} \frac{\partial g}{\partial x_1} - \frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2} \frac{\partial h}{\partial x_1} - \frac{\partial^2 h}{\partial x_2 \partial x_1} \frac{\partial g}{\partial x_2} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial f}{\partial x_2} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} \frac{\partial h}{\partial x_2} + \frac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial g}{\partial x_1} - \frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial h}{\partial x_1} - \frac{\partial^2 h}{\partial x_1^2} \frac{\partial g}{\partial x_2} \right) \right\}\end{aligned}\quad (6.15)$$

ifadesine benzer olarak $\{g, \{h, f\}\}$ ve $\{h, \{f, g\}\}$ ifadelerinin eşitleri de yerine yazılırsa sonuç sıfır olacaktır.

6) Herhangi iki f ve g fonksiyonu için;

$$\frac{d}{dt}\{f, g\} = \left\{\frac{df}{dt}, g\right\} + \left\{f, \frac{dg}{dt}\right\} \quad (6.16)$$

dir. Bu eşitlik Poisson Parantezi Teoremi olarak bilinir.

İspat

$$\frac{d}{dt}\{f, g\} = \{\{f, g\}, H\} + \frac{\partial}{\partial t}\{f, g\} \quad (6.17)$$

elde edilir. Jakobi özdeşliğinden

$$\{\{f, g\}, H\} = \{f, \{g, H\}\} + \{\{f, H\}, g\} \quad (6.18)$$

olduğu görülmektedir. Diğer yandan,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\{f, g\} &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial g}{\partial x_2} - \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial g}{\partial x_1}\right) \\ &= \left\{\frac{\partial f}{\partial t}, g\right\} + \left\{f, \frac{\partial g}{\partial t}\right\} \end{aligned} \quad (6.19)$$

olur. Burada Poisson parantezlerinin lineer olma özelliği kullanılarak;

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\{f, g\} &= \{\{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t}, g\} + \left\{f, \{g, H\} + \frac{\partial g}{\partial t}\right\} \\ &= \{\dot{f}, g\} + \{f, \dot{g}\} \end{aligned} \quad (6.20)$$

bulunur.

7) Herhangi iki f ve g fonksiyonunun Poisson parantezi kanonik dönüşüm altında invaryanttır, yani değeri değişmez.

İspat

Zincir kuralından;

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial X_1} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial X_2} \frac{\partial X_2}{\partial x_1} \quad (6.21)$$

olduğu bilinmektedir.

$$\{f, g\}_x = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial g}{\partial x_2} - \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial g}{\partial x_1}\right) \quad (6.22)$$

ifadesinde terimler zincir kuralından yararlanılarak yeniden yazılırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\begin{aligned}
\{f, g\}_x &= \left(\frac{\partial f}{\partial X_1} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial X_2} \frac{\partial X_2}{\partial x_1} \right) \left(\frac{\partial g}{\partial X_1} \frac{\partial X_1}{\partial x_2} + \frac{\partial g}{\partial X_2} \frac{\partial X_2}{\partial x_2} \right) \\
&\quad - \left(\frac{\partial f}{\partial X_1} \frac{\partial X_1}{\partial x_2} + \frac{\partial f}{\partial X_2} \frac{\partial X_2}{\partial x_2} \right) \left(\frac{\partial g}{\partial X_1} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial g}{\partial X_2} \frac{\partial X_2}{\partial x_1} \right) \\
&= \underbrace{\frac{\partial f}{\partial X_1} \frac{\partial g}{\partial X_2} - \frac{\partial f}{\partial X_2} \frac{\partial g}{\partial X_1}}_{\{f, g\}} \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1} \frac{\partial X_2}{\partial x_2} - \frac{\partial X_1}{\partial x_2} \frac{\partial X_2}{\partial x_1} \right) \\
&= \{X_1, X_2\} \{f, g\} \\
&= \{f, g\}_x
\end{aligned} \tag{6.23}$$

7. KANONÖD DÖNÜŞÜMLER

n boyutlu bir faz uzayında $f(x_1, \dots, x_n) = f(x)$ dinamik değişkeninin zamanla değişimi Nambu parantezi ile verilir.

$$\dot{f} = \{f, H_1, \dots, H_{n-1}\} = \frac{\partial(f, H_1, \dots, H_{n-1})}{\partial(x_1, \dots, x_n)} \quad (7.1)$$

Burada Hamilton fonksiyonları lineer bağımsızken x_1, \dots, x_n değişkenleri R^N deki lokal koordinatlardır.

Nambu parantezinin daha açık formu aşağıdaki gibidir.

$$\{f_1, \dots, f_n\} = \frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} = \varepsilon_{i_1 \dots i_n} \frac{\partial f_1}{\partial x_{i_1}} \dots \frac{\partial f_n}{\partial x_{i_n}} \quad (7.2)$$

Aşağıdaki ifadede görüldüğü gibi n boyutta yazılan Nambu parantezi ifadesi 2 boyutta yazıldığı zaman Poisson parantezi ifadesine döner.

$$\{f_1, f_2\} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{\partial f_2}{\partial x_2} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \quad (7.3)$$

Bu bölümde zamana bağımlılığı da göz önünde bulundurarak daha genel bir tanım yapılacaktır.

x_1, x_2 lokal koordinatlar olmak üzere Hamilton hareket denklemleri aşağıdaki gibi verilmektedir.

$$x_i = \varepsilon_{ij} \frac{\partial H}{\partial x_j}, \quad i, j = 1, 2 \quad \varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0 \quad \varepsilon_{12} = -\varepsilon_{21} = 1 \quad (7.4)$$

f dinamik değişkeninin zamanla değişimi ise,

$$\dot{f} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t} \quad (7.5)$$

ile verilir.(7.5) eşitliğinden;

$$\dot{H} = \frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} \quad (7.6)$$

olduğu görülür.

Tanım 7.1

Hamilton fonksiyonu $H(x,t)$ olan bir dinamik sistem için faz uzayında aşağıdaki gibi bir dönüşüm tanımlansın.

$$(x_i, t) \mapsto (X_i(x, t), t) \quad (7.7)$$

Eğer dönüşümden sonra Hamilton hareket denklemlerini (7.8) eşitliğinde görüldüğü gibi değişmez bırakan yeni bir $K(X, t)$ Hamilton fonksiyonu bulunabiliyorsa, bu dönüşüme H' ye göre kanonoiddir denir.

$$X_i = \varepsilon_{ij} \frac{\partial K}{\partial X_j} \quad (7.8)$$

Ayrıca ters dönüşüm ile vektör alanlarının bazları ve diferensiyel formlar da değişir. Dönüşüm kuralları aşağıdaki gibi olur.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} &= \frac{\partial X_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial X_j} + \frac{\partial t}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial t} (= 0) \\ \frac{\partial}{\partial X_i} &= \frac{\partial x_j}{\partial X_i} \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\partial t}{\partial X_i} \frac{\partial}{\partial t} (= 0) \\ dx_i &= \frac{\partial x_i}{\partial X_j} dX_j + \frac{\partial x_i}{\partial t} dt \\ dX_i &= \frac{\partial X_i}{\partial x_j} dx_j + \frac{\partial X_i}{\partial t} dt \end{aligned} \quad (7.9)$$

Tanımdan da anlaşıldığı üzere bir dönüşüm, her Hamilton fonksiyonuna göre kanonoid olmayabilir. Bir dönüşümün kanonoidlik şartının Hamilton fonksiyonundan bağımsız oluşu aşağıdaki teoremlerle verilir.

Teorem 7.1

Bir dönüşümün tüm Hamilton fonksiyonlarına göre kanonoid olması durumu aşağıdaki eşitliğin sağlanması ile gerçekleşir.

$$\{X_1, X_2\} = sbt \quad (7.10)$$

İspat

Hamilton hareket denklemlerinden yararlanılarak;

$$\dot{X}_i = \varepsilon_{ij} \frac{\partial K}{\partial X_j}, \quad i, j = 1, 2 \quad (7.11)$$

elde edilir, dolayısıyla;

$$\frac{\partial}{\partial X_1} \frac{\partial K}{\partial X_2} - \frac{\partial}{\partial X_2} \frac{\partial K}{\partial X_1} = 0 \quad (7.12)$$

olur. Bu ifade düzgün bir biçimde yazılırsa,

$$\varepsilon_{ij} \frac{\partial}{\partial X_i} \frac{\partial K}{\partial X_j} = 0 \quad (7.13)$$

halini alır. Aynı zamanda (7.11) denkleminde

$$\frac{\partial \dot{X}_i}{\partial X_i} = 0 \quad (7.14)$$

olduğu da açıkça görülür.

$$\dot{X}_i(x, t) = \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \dot{x}_j + \frac{\partial X_i}{\partial t} \quad (7.15)$$

iken (7.15) ve (7.13) ifadeleri (7.14) eşitliğinde kullanılırsa;

$$\varepsilon_{ij} \left(\frac{\partial}{\partial X_i} \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial H}{\partial x_i} + \varepsilon_{ji} \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial X_i} \left(\frac{\partial H}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial}{\partial X_i} \frac{\partial X_i}{\partial t} = 0 \quad (7.16)$$

bulunur. Eşitlikteki 2.terim dönüşüm kurallarından dolayı “0” olur. Dolayısıyla

$$\varepsilon_{ji} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial H}{\partial x_i} = 0 \quad (7.17)$$

Bir dönüşümün tüm Hamilton fonksiyonlarına göre kanonoid olması yani Hamilton fonksiyonundan bağımsız olması durumunda 1. terimin katsayısı “0” olur. 3. terim de aynı şekilde “0” olur.

Böylece;

$$\frac{\partial}{\partial X_i} \frac{\partial X_i}{\partial x_j} = 0 \Leftrightarrow \{X_1, X_2\} = \text{sabit} \quad (7.18)$$

olur.

7.1 Kanonoid Dönüşümler için Üretici Fonksiyonlar

ω simplektik 2-formunu $\omega = -d\theta$ şeklinde tanımlayalım. Benzer şekilde H ve K için $\omega_H = -d\theta_H$ ve $\omega_K = -d\theta_K$ olduğu görülmektedir.

Bu ifadelerde $\nu = \pi_2^* \theta$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\theta_H &= \nu - Hdt \\ \theta_K &= \nu - Kdt\end{aligned}\quad (7.19)$$

İle verilir. Bu 1-formlar, $L_\Gamma(\omega_H - \Phi^* \omega_K) = 0$ ifadesinde kullanılarak Lie türevi cinsinden yazılan $d[\underbrace{L_\Gamma(\theta_H - \Phi^* \theta_K)}_{dW}] = 0$ elde edilir. Burada $L_\Gamma \equiv \frac{d}{dt}$ dir.

Bu ise,

$$L_\Gamma(\theta_H - \Phi^* \theta_K) = dW \quad (7.20)$$

olmasını gerektirir. (7.20) denkleminde lokal koordinatlar kullanıldığı zaman aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$\frac{\partial H}{\partial x_1} = \frac{\partial^2 H}{\partial x_1 \partial x_2} x_2 - \frac{\partial H}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial \{H, X_1\}}{\partial x_1} + \{H, X_2\} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} - \frac{\partial A}{\partial t} \quad (7.21)$$

$$\frac{\partial W}{\partial x_2} = \frac{\partial^2 H}{\partial x_2^2} x_2 + X_2 \frac{\partial \{H, X_1\}}{\partial x_2} + \{h, X_2\} \frac{\partial X_1}{\partial x_2} - \frac{\partial B}{\partial t} \quad (7.22)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial^2 H}{\partial t \partial x_2} x_2 + X_2 \frac{\partial \{H, X_1\}}{\partial t} + \{H, X_2\} \frac{\partial X_1}{\partial t} - \frac{\partial C}{\partial t} - \frac{\partial(H - \Phi^* K)}{\partial t} - \{H, \Phi^* K\} \quad (7.23)$$

burada;

$$\begin{aligned}A &= X_2 \frac{\partial X_1}{\partial x_1}, \quad B = X_2 \frac{\partial X_1}{\partial x_2} \\ C &= X_2 \frac{\partial X_1}{\partial t}\end{aligned}\quad (7.24)$$

şeklindedir.

Verilen bir kanonoid dönüşüm için yukarıda verilen eşitliklerdeki $W(x_1, x_2, t)$ fonksiyonu, bu dönüşüm için üretici fonksiyonu temsil eder.

Bu durumun tersine, verilen bir W fonksiyonu için her $X_1(x_1, x_2, t)$ ve $X_2(x_1, x_2, t)$ çözümleri de, $H(x_1, x_2, t)$ Hamilton fonksiyonuna göre kanonoid dönüşümleri verir.

Yukarıdaki eşitliklere bağlı olarak $W(x_1, x_2, t)$ gibi bir fonksiyondan üretilen bir dönüşüm ele alındığında $W = L_T F$ eşitliğini sağlayan bir $F(x_1, x_2, t)$ fonksiyonu bulunabiliyorsa bu dönüşüm kanonoid dönüşümünün özel bir alt sınıfı olan kanonik bir dönüşüm olur. Bir başka şekilde,

$$W = \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t} \quad (7.25)$$

eşitliği (7.21) , (7.22), (7.23) denklemlerinde kullanılırsa aşağıdaki eşitlikler, yani kanonik dönüşüm için üretici fonksiyon elde edilir.

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_1} &= x_2 - A \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} &= -B \\ \frac{\partial F}{\partial t} &= -(H - \Phi^* K) - C \end{aligned} \quad (7.26)$$

(7.26) ifadeleri, kanonoid bir dönüşüm için üretici fonksiyon bulunmasının en genel formudur. Eğer özel olarak $X_1 = x_1$ ve zamandan bağımsız bir Hamilton fonksiyonu $H(x_1, x_2)$ seçilerek bir kısaltma yapılırsa, yukarıdaki eşitlikler daha basit bir forma indirgenir.

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial x_1} &= \frac{\partial^2 H}{\partial x_1 \partial x_2} (x_2 - X_2) - \frac{\partial H}{\partial x_1} + \{H, X_2\} - \frac{\partial A}{\partial t} \\ \frac{\partial W}{\partial x_2} &= \frac{\partial^2 H}{\partial x_2^2} (x_2 - X_2) \\ \frac{\partial W}{\partial t} &= \frac{\partial(\Phi^* K)}{\partial t} + \{\Phi^* K, H\} \end{aligned} \quad (7.27)$$

Burada örnek olarak serbest parçacık Hamiltonyeni $H = \frac{1}{2} p^2$ seçilirse, bu durumda aşağıdaki eşitlikler bulunur.

$$\begin{aligned}\frac{\partial W}{\partial x_1} &= -x_2 \frac{\partial X_2}{\partial x_1} - \frac{\partial X_2}{\partial t} \\ \frac{\partial W}{\partial x_2} &= x_2 - X_2\end{aligned}\quad (7.28)$$

Yukarıdaki eşitliklerden X_2 nin $X_2(x_1, x_2, t)$ şeklinde çözümü ancak ve ancak W ifadesinin aşağıdaki eşitliği sağlamasıyla mümkündür.

$$x_2 \frac{\partial^2 W}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial W}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 W}{\partial x_2 \partial t} = 0 \quad (7.29)$$

Bu durumda genel çözüm şu şekilde bulunur.

$$W = \int \left[\int h(x_2, x_1 - x_2 t) dp \right] dp + x_2 \frac{\partial f(x_1, t)}{\partial x_1} + \frac{\partial f(x_1, t)}{\partial t} \quad (7.30)$$

Burada $h(x_2, x_1 - x_2 t)$ ve $f(x_1, t)$, argümanları $(x_2, x_1 - x_2 t)$ ve (x_1, t) olan, türevlenebilir keyfi fonksiyonlardır.

Böylece, yukarıdaki tanımdan,

$$X_2 = x_2 - \int h(x_2, x_1 - x_2 t) dp - \frac{\partial f(x_1, t)}{\partial x_1} \quad (7.31)$$

bulunur. Yeni değişkenlerin Poisson parantezi ise aşağıdaki gibi olur.

$$\{X_1, X_2\} = 1 - h(x_2, x_1 - x_2 t) \quad (7.32)$$

Bu ifadede $\{X_1, X_2\}$ ifadesi kanoniklik şartından $h(x_2, x_1 - x_2 t)$ kadar farklıdır.

Yukarıdaki ifadede özel olarak $h(x_2, x_1 - x_2 t) = 0$ seçtiğimiz durumda,

$$\{X_1, X_2\} = 1 \quad (7.33)$$

dönüşüm;

$$\begin{aligned}X_1 &= x_1 \\ X_2 &= x_2 - \frac{\partial f(x_1, t)}{\partial x_1}\end{aligned}\quad (7.34)$$

ve üretici fonksiyon ifadesi de,

$$W = x_2 \frac{\partial f(x_1, t)}{\partial x_1} + \frac{\partial f(x_1, t)}{\partial t} \quad (7.35)$$

olarak bulunur.

Burada üretici fonksiyon ifadesi,

$$\Gamma = x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial t} \quad (7.36)$$

Olmak üzere $W = L_T f$ olarak yazılır.

Genel çözümdeki $f(x_1, t)$ fonksiyonu yukarıdaki ifadeyle birlikte kanonik dönüşümün üretici fonksiyonu haline gelir.

Özetle (7.30) formundaki her W fonksiyonu için, $H = \frac{1}{2} p^2$ Hamilton fonksiyonuna göre kanonoid bir dönüşüm tanımlanabilir. Bu durumun tersine (7.27) de görüldüğü üzere her $X_1 = x_1$, $X_2(x_1, x_2, t)$ dönüşümü bir W üretici fonksiyonu belirler.

Son olarak W ifadesi için en genel çözüm yapılırsa;

$$W = f(x_1)x_2 + (1/t^2)h(x_1 - x_2t) + g_1(x_2) + g_2(t) \quad (7.37)$$

bulunur. Burada $f(x_1)$, $h(x_1 - x_2t)$, $g_1(x_2)$ ve $g_2(t)$ keyfi fonksiyonlardır. Bu ifadede $h = g_2 = 0$ olduğu durumda $W = f(x_1)x_2 + g_1$ olur. Üretici fonksiyonun en genel formu, zamandan bağımsız kanonoid dönüşümler için düzenlenmiş olur. W ifadesinin bu en genel formu için (7.28) eşitliğinden yararlanarak dönüşüm tanımlanırsa,

$$X_2 = x_2 - f(x_1) - g_1'(x_2) + (1/t)h'(x_1 - x_2t) \quad (7.38)$$

bulunur ve yeni değişkenlerinin Poisson parantezi aşağıdaki gibi olur.

$$\{X_1, X_2\} = 1 - g_1''(x_2) - h''(x_1 - x_2t) \quad (7.39)$$

(7.39) eşitliğinden, h ve g_1 fonksiyonları lineer fonksiyonlar ise $\{X_1, X_2\} = 1$ olur.

Dönüşüm kanonik bir dönüşüm olur. Diğer durumlarda ise $\{X_1, X_2\} = sbt$ olur.

Bu tip dönüşümler ve üretici fonksiyonları, değişik dinamik sistemler kullanılarak örneklendirilmiştir.

7.2 Kanonoid Dönüşüm Örnekleri ve Üretici Fonksiyonları

1) $H = x_1x_2$ Hamilton fonksiyonu için hareket denklemleri aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \frac{\partial H}{\partial x_2} = x_1 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{\partial H}{\partial x_1} = -x_2\end{aligned}\tag{7.40}$$

Bu sistem için $X_1 = x_1e^{2t}$, $X_2 = x_2^3$ dönüşümü yapıldığında $K = 3X_1X_2$ Hamilton fonksiyonu için hareket denklemlerinin değişmezliği sağlanır.

$$\begin{aligned}\dot{X}_1 &= \frac{\partial K}{\partial X_2} = \dot{x}_1e^{2t} + 2x_1e^{2t} = 3X_1 \\ \dot{X}_2 &= -\frac{\partial K}{\partial X_1} = 3x_2^2\dot{x}_2 = -3x_2^3 = -3X_2\end{aligned}\tag{7.41}$$

Yukarıdaki ifadelerden $K = 3X_1X_2$ olduğu açıkça görülür. Bu dönüşümün üretici fonksiyonu ise (7.21), (7.22) ve (7.23) denklemleri aracılığıyla

$$\begin{aligned}\frac{\partial W}{\partial x_1} &= 0 \\ \frac{\partial W}{\partial x_2} &= 0 \\ \frac{\partial W}{\partial t} &= 0\end{aligned}\tag{7.42}$$

bulunur. Dolayısıyla

$$W = \text{sabit}\tag{7.43}$$

olur.

2) $H = x_2^2/2$ serbest parçacık Hamiltoniyeni için Hamilton hareket denklemleri,

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \frac{\partial H}{\partial x_2} = x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow x_2 = sbt\end{aligned}\tag{7.44}$$

şeklinde. Bu dinamik sistem için $X_1 = x_1$, $X_2 = x_2^{1/2} - x_1^2$ dönüşümü uygulandığı

zaman $K = \frac{1}{3}(X_2 + X_1^2)^3$ Hamilton fonksiyonu için hareket denklemleri değişmez kalır.

$$\begin{aligned}\dot{X}_1 &= \frac{\partial K}{\partial X_2} = (X_2 + X_1^2) = \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{X}_2 &= -\frac{\partial K}{\partial X_1} = -2X_1(X_2 + X_1^2) = \underbrace{\frac{1}{2}\dot{x}_2 x_2^{-1/2}}_0 - 2x_1 \dot{x}_1\end{aligned}\quad (7.45)$$

Bu dönüşüm $H(x_1, x_2)$ Hamilton fonksiyonuna göre kanonoidir. Bu dönüşümün üretici fonksiyonu ise (7.21), (7.22) ve (7.23) eşitlikleri yardımıyla bulunur.

$$\begin{aligned}\frac{\partial W}{\partial x_1} &= 2x_1 x_2 \\ \frac{\partial W}{\partial x_2} &= x_2 - x_2^{1/2} + x_1^2\end{aligned}\quad (7.46)$$

Buna göre;

$$W = x_1^2 x_2 + \frac{x_2^2}{2} - \frac{2}{3} x_2^{3/2}\quad (7.47)$$

bulunur.

3) Bu örnekte Harmonik osilatör için bir dönüşüm uygulansın.

$$H = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)\quad (7.48)$$

Hamilton hareket denklemleri şu şekildedir.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \frac{\partial H}{\partial x_2} = x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{\partial H}{\partial x_1} = -x_1\end{aligned}\quad (7.49)$$

Bu sistem için $X_1 = x_1$ ve $X_2 = x_2 + x_1^2$ dönüşümü uygulandığı zaman,

$$\begin{aligned}\dot{X}_1 &= \frac{\partial K}{\partial X_2} = (X_2 - X_1^2) \\ \dot{X}_2 &= -\frac{\partial K}{\partial X_1} = -2X_1(X_2 - X_1^2) - X_1\end{aligned}\quad (7.50)$$

dolayısıyla yeni Hamilton fonksiyonu

$$K = \frac{X_1^2}{2} + \frac{1}{2}(X_2 - X_1^2)^2\quad (7.51)$$

şeklinde bulunur. Ayrıca bu dönüşümün üretici fonksiyonu ise;

$$\begin{aligned}\frac{\partial W}{\partial x_1} &= -2x_1x_2 \\ \frac{\partial W}{\partial x_2} &= -x_1^2\end{aligned}\tag{7.52}$$

ifadelerinden

$$W = -x_2x_1^2\tag{7.53}$$

bulunur. $X_1 = x_1$, $X_2 = \frac{1}{6}x_2^3 + \frac{1}{2}x_1^2x_2$ dönüşümü için de benzer işlemler yapılarak üretici fonksiyonu bulunabilir.

Bu dönüşümün üretici fonksiyonu ise,

$$\begin{aligned}\frac{\partial W}{\partial x_1} &= x_1 + \frac{1}{2}x_1^3 - \frac{1}{2}x_1x_2^2 \\ \frac{\partial W}{\partial x_2} &= x_2 - \frac{1}{2}x_1^2x_2 - \frac{1}{6}x_2^3\end{aligned}\tag{7.54}$$

ifadelerinden

$$W = \frac{1}{2}(x_2^2 - x_1^2) - \frac{1}{4}(x_1^2x_2^2) + \frac{1}{8}x_1^4 - \frac{1}{24}x_2^4\tag{7.55}$$

bulunur.

4) Yine serbest parçacık Hamiltoniyeni için faz uzayında aşağıdaki gibi bir dönüşüm tanımlansın.

$$\begin{aligned}X_1 &= (x_1^2 - x_2^{1/2})^2 \\ X_2 &= \frac{1}{2}x_1(x_1^2 - x_2^{1/2})^{-1}\end{aligned}\tag{7.56}$$

Buna göre;

$$\begin{aligned}\dot{X}_1 &= \frac{\partial K}{\partial X_2} = 4(x_1^2 - x_2^{1/2})x_1\dot{x}_1 - (x_1^2 - x_2^{1/2})x_2^{-1/2}\dot{x}_2 \\ &= 4(x_1^2 - x_2^{1/2})x_1x_2 \\ &= (4X_2^2X_1 - \sqrt{X_1})^2 8X_1X_2 \\ \dot{X}_2 &= -\frac{\partial K}{\partial X_1} = \frac{1}{2}x_2(x_1^2 - x_2^{1/2})^{-1} - 2x_1^2x_2(x_1^2 - x_2^{1/2})^{-2} \\ &= (4X_2^2X_1 - \sqrt{X_1})^2(-4X_2^2 + \frac{1}{2}X_1^{-1/2})\end{aligned}\tag{7.57}$$

bulunur. Bu ifadelerden K Hamilton fonksiyonu

$$K = \frac{1}{3}(4X_2^2 X_1 - \sqrt{X_1})^3 \quad (7.58)$$

bulunur. Bu dönüşümün üretici fonksiyonu ise aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial x_1} &= -2x_2 x_1^3 (x_1^2 - x_2^{1/2})^{-1} + 2x_1 x_2^{3/2} (x_1^2 - x_2^{1/2})^{-1} - 2x_1 x_2 \\ &= -2x_1 x_2 \frac{(x_1^2 - x_2^{1/2})}{(x_1^2 - x_2^{1/2})} - 2x_1 x_2 \\ &= -4x_1 x_2 \end{aligned} \quad (7.59)$$

Benzer şekilde

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial x_2} &= x_2 - 2x_1^4 (x_1^2 - x_2^{1/2})^{-1} + 2x_1 x_2^{1/2} (x_1^2 - x_2^{1/2})^{-1} - \frac{1}{2} x_2^{1/2} \\ &= x_2 - 2x_1^2 \frac{(x_1^2 - x_2^{1/2})}{(x_1^2 - x_2^{1/2})} + \frac{1}{2} x_2^{1/2} \\ &= x_2 - 2x_1^2 + \frac{1}{2} x_2^{1/2} \end{aligned} \quad (7.60)$$

dır. Buna göre,

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial x_2} &= x_2 - 2x_1^2 + \frac{1}{2} x_2^{1/2} \\ \frac{\partial W}{\partial x_1} &= -4x_2 x_1 \end{aligned} \quad (7.61)$$

ifadelerinden W üretici fonksiyon ifadesi aşağıdaki gibi bulunur.

$$W = \frac{1}{2} x_2^2 - 2x_2 x_1^2 + \frac{1}{3} x_2^{3/2} \quad (7.62)$$

5) Hamilton fonksiyonu $H = \frac{1}{2} x_2^2 - x_1$ olan bir dinamik sistem için Hamilton hareket denklemleri şu şekildedir.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{\partial H}{\partial x_2} = x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 1 \end{aligned} \quad (7.63)$$

Bu dinamik sistem için faz uzayında,

$$\begin{aligned} X_1 &= e^{\left(\frac{1}{2}x_2^2 - x_1\right)} + x_2^2 \\ X_2 &= x_2 \end{aligned} \quad (7.64)$$

dönüşümü yapılınsın. Bu durumda dönüşümden sonra $K = X_2^2 - X_1$ Hamilton fonksiyonu için hareket denklemlerinin değişmezliği sağlanmış olur.

$$\begin{aligned} \dot{X}_1 &= \frac{\partial K}{\partial X_2} = 2X_2 \\ &= x_2 e^{\left(\frac{1}{2}x_2^2 - x_1\right)} \dot{x}_2 + 2x_2 \dot{x}_2 - \dot{x}_1 e^{\left(\frac{1}{2}x_2^2 - x_1\right)} \\ &= 2x_2 \\ \dot{X}_2 &= -\frac{\partial K}{\partial X_1} = 1 = \dot{x}_2 \end{aligned} \quad (7.65)$$

Bu dönüşüm $H = \frac{1}{2}x_2^2 - x_1$ Hamilton fonksiyonuna göre kanonoidir. Dönüşümün üretici fonksiyonu ise,

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial x_1} &= 1 + e^{\left(\frac{1}{2}x_2^2 - x_1\right)} \\ \frac{\partial W}{\partial x_2} &= -3x_2 - x_2 e^{\left(\frac{1}{2}x_2^2 - x_1\right)} \end{aligned} \quad (7.66)$$

denklemlerinden

$$W = -e^{\left(\frac{1}{2}x_2^2 - x_1\right)} - \frac{3}{2}x_2^2 + x_1 \quad (7.67)$$

bulunur.

6) Hamilton fonksiyonu aşağıdaki gibi olan bir sistem için,

$$H = \frac{1}{2}x_2^2 + e^{\gamma t} g x_1 \quad (7.68)$$

şu dönüşüm yapılınsın.

$$\begin{aligned} X_1 &= x_1 \\ X_2 &= \frac{1}{2}x_2^2 + (g/\gamma)x_2 e^{\gamma t} \end{aligned} \quad (7.69)$$

Bu dinamik sistem için Hamilton hareket denklemleri aşağıdaki gibi olur.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \frac{\partial H}{\partial x_2} = x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{\partial H}{\partial x_1} = -e^{\gamma t} g\end{aligned}\quad (7.70)$$

Dönüşümden sonra Hamilton hareket denklemleri ise;

$$\begin{aligned}\dot{X}_1 &= \frac{\partial K}{\partial X_2} = -(g/\gamma)e^{\gamma t} + \sigma[(g^2/\gamma^2)e^{2\gamma t} + 2X_2]^{1/2} \\ \dot{X}_2 &= -\frac{\partial K}{\partial X_1} = -(g^2/\gamma)e^{2\gamma t}\end{aligned}\quad (7.71)$$

bulunur. Bu ifadelerden yeni Hamilton fonksiyonu $K(X_1, X_2, t)$ ifadesi

$$K = (g^2/\gamma)e^{2\gamma t} X_1 - (g/\gamma)e^{\gamma t} X_2 + \frac{1}{3}\sigma[(g^2/\gamma^2)e^{2\gamma t} + 2X_2]^{3/2}\quad (7.72)$$

bulunur. Bu ifadede σ ifadesi aşağıdaki gibidir.

$$\sigma = \text{sign}(x_2 + (g/\gamma)e^{\gamma t})\quad (7.73)$$

Bu dönüşümün üretici fonksiyonu ise şu şekildedir.

$$\begin{aligned}\frac{\partial W}{\partial x_1} &= (g^2/\gamma)e^{2\gamma t} - ge^{\gamma t} \\ \frac{\partial W}{\partial x_2} &= x_2 - \frac{1}{2}x_2^2 - (g/\gamma)x_2e^{\gamma t} \\ \frac{\partial W}{\partial t} &= -\gamma gx_1e^{\gamma t} + 2g^2x_1e^{2\gamma t} - \frac{gx_2^2}{2}e^{\gamma t} + \frac{g^3}{\gamma^2}e^{3\gamma t}\end{aligned}\quad (7.74)$$

Bu ifadelerden dönüşümün üretici fonksiyonu $W(x_1, x_2, t)$

$$W = \frac{g^2x_1}{\gamma}e^{2\gamma t} - gx_1e^{\gamma t} + \frac{1}{2}x_2^2 - \frac{x_2^3}{6} - \left(\frac{g}{\gamma}\right)\frac{x_2^2}{2}e^{\gamma t} + \frac{g^3}{3\gamma^3}e^{3\gamma t}\quad (7.75)$$

bulunur.

7) Serbest parçacık Hamiltoniyeni $H = x_2^2/2$ için zamana bağlı aşağıdaki dönüşüm uygulansın.

$$\begin{aligned}X_1 &= x_1 \\ X_2 &= (1/2t)(x_1 - x_2t)^2\end{aligned}\quad (7.76)$$

Bu durumda;

$$\begin{aligned}\dot{X}_1 &= \frac{\partial K}{\partial X_2} = \dot{x}_1 = x_2 = \frac{1}{t}[X_1 - (2tX_2)^{1/2}] \\ \dot{X}_2 &= -\frac{\partial K}{\partial X_1} = -\frac{X_2}{t}\end{aligned}\tag{7.77}$$

bulunur. Yukarıdaki ifadelerden yeni Hamilton fonksiyonu $K(X_1, X_2, t)$

$$K = \left(\frac{1}{t}\right)[X_1 - \frac{2}{3}(2tX_2)^{1/2}]X_2\tag{7.78}$$

bulunur. Bu dönüşümün üretici fonksiyonu ise aşağıdaki gibi bulunur. Buna göre,

$$\begin{aligned}\frac{\partial W}{\partial x_1} &= \frac{1}{2t^2}(x_1 - x_2t)^2 \\ \frac{\partial W}{\partial x_2} &= x_2 - \frac{1}{2t}(x_1 - x_2t)^2 \\ \frac{\partial W}{\partial t} &= -\frac{1}{3t^3}(x_1 - x_2t)^3 - \frac{x_2}{2t^2}(x_1 - x_2t)^2\end{aligned}\tag{7.79}$$

ifadelerinden

$$W = (x_2^2 / 2) + \frac{1}{6t^2}(x_1 - x_2t)^3\tag{7.80}$$

bulunur.

8. KANONİK DÖNÜŞÜMLER

Giriş bölümünde belirtildiği üzere kanonik dönüşümler, kanonoid dönüşümlerin özel bir alt sınıfı olarak kalmaktadır. Buradan yola çıkarak aşağıdaki tanım yapılabilir.

Tanım 8. 1

(7.18) ifadesindeki sabitin özel olarak “1” olduğu durumlarda ise kanonik dönüşümler denir. Bu durumda;

$$\{X_1, X_2\} = 1 \quad (8.1)$$

olur. Sonuç olarak kanonoid dönüşümlerin kanonik dönüşümlere göre daha geniş bir aile olduğu görülür.

Benzer şekilde eski koordinatların Poisson parantezinin “1” vermesi de kanoniklik tanımı için yeterlidir.

$$\{X_1, X_2\}_X = 1 \quad (8.2)$$

Aynı zamanda bir kanonik dönüşüm keyfi seçilmiş fonksiyonlar için Poisson parantezinin yapısını korur.

$$\{f(x, t), g(x, t)\}_x = \{f(x, t), g(x, t)\}_X$$

Buradan açıkça görülür ki;

$$\begin{aligned} \{X_i, H\}_x &= \{X_i, H\}_X \\ \{x_i, H\}_x &= \{x_i, H\}_X \end{aligned} \quad (8.3)$$

8.1 Kanonik Dönüşümler için Üretici Fonksiyonlar

Bu bölümde kanonik dönüşümler için üretici fonksiyonlar ve tipleri incelenecektir.

$$\chi = dX_2 \wedge dX_1 \quad (8.4)$$

Yukarıdaki ifadede dX_1 ve dX_2 ifadeleri aşağıda görüldüğü üzere diferensiyel formda açılarak yazılırsa

$$dX_i = \frac{\partial X_i}{\partial x_j} dx_j + \frac{\partial X_i}{\partial t} dt \quad (8.5)$$

ve aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$dX_2 \wedge dX_1 = \{X_1, X_2\} dx_2 \wedge dx_1 + \frac{\partial X_{[i}}{\partial t} \frac{\partial X_{j]}}{\partial x_1} dx_1 \wedge dt \quad (8.6)$$

Diğer yandan

$$\frac{\partial X_i}{\partial t} = \frac{\partial K}{\partial X_j} - \{X_i, H\} \quad (8.7)$$

ifadesi (8.6) denklemini içerisinde kullanıldığı zaman

$$dX_2 \wedge dX_1 = dx_2 \wedge dx_1 + \underbrace{\frac{\partial K}{\partial X_j} \frac{\partial X_j}{\partial x_1} dx_1 \wedge dt}_{\text{}} - \{X_{[i}, H\} \frac{\partial X_{j]}}{\partial x_1} dx_1 \wedge dt \quad (8.8)$$

elde edilir. Yukarıdaki ifadede;

$$\begin{aligned} \frac{\partial K}{\partial X_j} \frac{\partial X_j}{\partial x_1} dx_1 \wedge dt &= \frac{\partial K}{\partial X_1} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} dx_1 \wedge dt + \frac{\partial K}{\partial X_2} \frac{\partial X_2}{\partial x_1} dx_1 \wedge dt \\ &= \left(\frac{\partial K}{\partial X_1} dX_1 + \frac{\partial K}{\partial X_2} dX_2 + \frac{\partial K}{\partial t} dt \right) \wedge dt \\ &= dK \wedge dt \end{aligned} \quad (8.9)$$

Bu ifadede

$$\{X_{[i}, H\} = \dot{X}_{[i} - \frac{\partial X_{[i}}{\partial t} \quad (8.10)$$

dir.

(8.9) ifadesinde son terim açık biçimde yazılırsa;

$$\begin{aligned} \{X_{[i}, H\} \frac{\partial X_{j]}}{\partial x_1} dx_1 \wedge dt + \{X_{[i}, H\} \frac{\partial X_{j]}}{\partial x_2} dx_2 \wedge dt &= \{X_{[1}, H\} \frac{\partial X_2}{\partial x_1} dx_1 \wedge dt \\ &- \{X_{[2}, H\} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} dx_1 \wedge dt \\ &+ \{X_{[1}, H\} \frac{\partial X_2}{\partial x_2} dx_2 \wedge dt - \{X_{[2}, H\} \frac{\partial X_1}{\partial x_2} dx_2 \wedge dt \end{aligned} \quad (8.11)$$

olur. Yukarıdaki ifadede Poisson parantezleri açık bir biçimde yazılırsa;

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1} \dot{x}_1 \frac{\partial X_2}{\partial x_1} + \frac{\partial X_1}{\partial x_2} \dot{x}_2 \frac{\partial X_2}{\partial x_1} - \frac{\partial X_2}{\partial x_1} \dot{x}_1 \frac{\partial X_1}{\partial x_2} - \frac{\partial X_2}{\partial x_2} \dot{x}_2 \frac{\partial X_1}{\partial x_2} \right) dx_2 \wedge dt \\
& = -\{X_1, X_2\} \dot{x}_1 dx_2 \wedge dt = -\dot{x}_1 dx_2 \wedge dt \\
& = \frac{\partial H}{\partial x_2} dx_2 \wedge dt
\end{aligned} \tag{8.12}$$

olur. Bu ifadeler (8.11) de kullanılırsa sonuç olarak aşağıdaki ifade bulunur.

$$\begin{aligned}
\{X_{[i}, H\} \frac{\partial X_{j]}}{\partial x_i} &= \frac{\partial H}{\partial x_1} dx_1 \wedge dt + \frac{\partial H}{\partial x_2} dx_2 \wedge dt + \frac{\partial H}{\partial t} dt \wedge dt \\
&= \left(\frac{\partial H}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial H}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial H}{\partial t} dt \right) \wedge dt \\
&= \partial H \wedge dt
\end{aligned} \tag{8.13}$$

Böylece (8.8) denklemi,

$$dX_2 \wedge dX_1 = dx_2 \wedge dx_1 + dK \wedge dt - dH \wedge dt \tag{8.14}$$

şeklini alır. Eğer dönüşüm zamandan bağımsız ise (8.8) eşitliği

$$dX_2 \wedge dX_1 = dx_2 \wedge dx_1 \tag{8.15}$$

halini alır. (8.8) eşitliği düzenlenirse,

$$d\Omega = d \underbrace{(x_2 dx_1 - X_2 dX_1 + Kdt - Hdt)}_{dF} = 0 \tag{8.16}$$

ve buradan da;

$$dF = x_2 dx_1 - X_2 dX_1 + Kdt - Hdt \tag{8.17}$$

şeklini alır. Burada Ω ifadesi bir formdur ve dF ifadesine eşittir.

Yukarıdaki eşitlikte zamana bağımlılık göz önünde bulundurulmadan $dF(x_1, x_2)$ ifadesi, diferansiyel formda yazılır ve katsayılar eşitlenirse;

$$\begin{aligned} x_2 - X_2 \frac{\partial X_1}{\partial x_1} &= \frac{\partial F}{\partial x_1} = B(x) \\ X_2 \frac{\partial X_1}{\partial x_2} &= -\frac{\partial F}{\partial x_2} = A(x) \end{aligned} \quad (8.18)$$

bulunur. Buradan

$$\frac{\partial A}{\partial x_1} + \frac{\partial B}{\partial x_2} = 0 \quad (8.19)$$

Eşitliğin sağlandığı da görülür.(8.18) denklemleri üretici fonksiyon ve kanonik dönüşümlerin bulunması için çok kullanışlı denklemlerdir.

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial F}{\partial x_j} = \varepsilon_{ij} \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial F}{\partial x_j} = 0 \quad (8.20)$$

Verilen bir $X_i(x)$ kanonik dönüşümü için üretici fonksiyon, aşağıdaki kısmi diferansiyel denklemin çözülmesiyle elde edilir.

$$A(x, t) \frac{\partial F}{\partial x_1} + B(x, t) \frac{\partial F}{\partial x_2} = 0 \quad (8.21)$$

Bu durumun tersine üretici fonksiyonun verilmesi durumunda ise aşağıdaki eşitlikten dönüşüm belirlenebilir.

$$[A(x, t) - x_2] \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + B(x, t) \frac{\partial X_1}{\partial x_2} = 0 \quad (8.22)$$

Dönüşümün kalan kısmı olan X_2 (8.18) eşitliklerinden yararlanılarak bulunabilir. Öte yandan (8.17) ifadesinde zamana bağımlılık göz önünde bulundurularak katsayılar eşitlenirse, üretici fonksiyon, kanonik dönüşüm ve yeni Hamilton fonksiyonu arasında aşağıdaki gibi bir eşitlik elde edilir.

$$\frac{\partial F}{\partial t} = K - H - X_2 \frac{\partial X_1}{\partial t} \quad (8.23)$$

Verilen bir dinamik sistem için kanonik dönüşüm uygulandıktan sonra, sistemin yeni Hamilton fonksiyonu şu şekilde bulunabilir.

$$f_i = \frac{\partial K}{\partial x_i} = \frac{\partial H}{\partial x_i} + \frac{\partial X_{[k}}{\partial x_i} \frac{\partial X_{l]}}{\partial t} \quad (8.24)$$

Buradan

$$f_{[i} \frac{\partial K}{\partial x_{j]}} = 0 \quad (8.25)$$

olduğu da görülür. Bu denklemin çözümü yeni Hamilton fonksiyonunu verir. Ayrıca

$$\dot{X}_i \frac{\partial K}{\partial X_i} = \varepsilon_{ij} \frac{\partial K}{\partial X_j} \frac{\partial K}{\partial X_i} = 0 \quad (8.26)$$

Eşitliğin çözümü de aynı sonucu verir.

Teorem 8.1

Eğer kanonik dönüşüm zamandan bağımsız ise yeni Hamilton fonksiyonu aşağıda görüldüğü üzere kolayca bulunabilir.

$$K(X_1, X_2) = H(x_1(X_1, X_2), x_2(X_1, X_2)) \quad (8.27)$$

İspat

$$\begin{aligned} \dot{X}_i &= \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \dot{x}_j = \varepsilon_{jm} \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \frac{\partial H}{\partial x_m} = \varepsilon_{jm} \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \frac{\partial X_k}{\partial x_m} \frac{\partial H}{\partial X_k} \\ &= \{X_i, X_k\} \frac{\partial H}{\partial X_k} \\ &= \varepsilon_{ik} \frac{\partial H}{\partial X_k} \\ &= \varepsilon_{ik} \frac{\partial K}{\partial X_k} \end{aligned} \quad (8.28)$$

Buradan

$$K(X_1, X_2) = H(x_1(X_1, X_2), x_2(X_1, X_2)) \quad (8.29)$$

olduğu görülür.

8.2 Kanonik Dönüşümler için Üretici Fonksiyon Tipleri

(8.17) ifadesinde görüldüğü gibi F üretici fonksiyonu x_1, x_2, X_1, X_2 değişkenlerine bağlıdır. Kanonik dönüşümler nedeniyle bu dört değişken takımı arasında iki tane bağıntı takımı vardır. Bu durum, F fonksiyonunun x_1, x_2, X_1, X_2 değişkenlerinden yalnızca iki tanesine bağlı olmasını gerektirir.

F fonksiyonu (x_1, x_2) koordinatlarına veya (X_1, X_2) koordinatlarına bağlı olması durumunda bir dönüşüm belirlenemez. Bu nedenle geriye $(x_1, X_1), (x_1, X_2), (x_2, X_1)$ ve (x_2, X_2) koordinatlarına bağlı olması durumları kalır.

Bu durumlar ise kanonik dönüşümler için üretici fonksiyon tiplerini verir.

Tip 1

x_1 ve X_1 değişkenlerinin bağımsız koordinatlar olduğu bir dönüşüm için;

$$F[x_1, x_2(x_1, X_1), t] = f_1(x_1, X_1, t) \quad (8.30)$$

olur. Dolayısıyla (8.17) ifadesi aşağıdaki gibi olur.

$$df_1(x_1, X_1, t) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f_1}{\partial t} dt = x_2 dx_1 - X_2 dX_1 + K dt - H dt \quad (8.31)$$

Yukarıdaki eşitlikte dx_1 , dX_1 ve dt nin katsayıları eşitlenirse;

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} &= x_2 \\ \frac{\partial f_1}{\partial X_1} &= -X_2 \\ \frac{\partial f_1}{\partial t} + H &= K \end{aligned} \quad (8.32)$$

olduğu görülür. Ayrıca $F(x_1, x_2, t) \equiv f_1(x_1, X_1, t) = F_1(x_1, X_1, t)$ durumundan yararlanılarak;

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_1}{\partial x_1} &= x_2 \\
\frac{\partial F_1}{\partial X_1} &= -X_2 \\
\frac{\partial F_1}{\partial t} + H &= K
\end{aligned} \tag{8.33}$$

olduğu görülür.

Tip 2

Bağımsız koordinatların x_1 ve X_2 olması durumunda $F[x_1, x_2(x_1, X_2), t] = f_2(x_1, X_2, t)$,

(8.17) ifadesi ise aşağıdaki gibi olur.

olur. Dolayısıyla (8.17) ifadesi aşağıdaki gibi olur.

$$\begin{aligned}
df_2(x_1, X_2, t) &= \frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f_2}{\partial t} dt \\
&= x_2 dx_1 - X_2 \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial X_1}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial X_1}{\partial t} dt \right) + K dt - H dt
\end{aligned} \tag{8.34}$$

Yukarıdaki eşitlikte dx_1 , dX_2 ve dt nin katsayıları eşitlenirse;

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_2}{\partial x_1} &= x_2 - X_2 \frac{\partial X_1}{\partial x_1} \\
\frac{\partial f_2}{\partial X_2} &= -X_2 \frac{\partial X_1}{\partial X_2} \\
\frac{\partial f_2}{\partial t} + X_2 \frac{\partial X_1}{\partial t} + H &= K
\end{aligned} \tag{8.35}$$

(8.35) de parantez içindeki kalan ifade ise F_2 yi verir.

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \underbrace{(f_2 + X_2 X_1)}_{F_2} = x_2 \tag{8.36}$$

Sonuç olarak

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_2}{\partial x_1} &= x_2 \\
\frac{\partial F_2}{\partial X_2} &= X_1 \\
\frac{\partial F_2}{\partial t} + H &= K
\end{aligned} \tag{8.37}$$

eşitlikleri elde edilir. Ayrıca bu ifadelerden

$$\begin{aligned} F(x_1, X_2, t) &\equiv f_2(x_1, X_2, t) + X_2 X_1(x_1, X_2, t) \\ &\equiv F(x_1, X_1(x_1, X_2, t)) + X_2 X_1(x_1, X_2, t) \end{aligned} \quad (8.38)$$

olduğu görülür.

Tip 3

Bağımsız koordinatların x_2 ve X_1 olması durumunda $F[x_1(x_2, X_1), x_2, t] = f_3(x_2, X_1, t)$,

(8.17) ifadesi ise aşağıdaki gibi olur.

$$\begin{aligned} df_3(x_2, X_1, t) &= \frac{\partial f_3}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f_3}{\partial X_1} dX_1 + \frac{\partial f_3}{\partial t} dt \\ &= x_2 \left(\frac{\partial x_1}{\partial x_2} dx_1 + \frac{\partial x_1}{\partial X_1} dX_1 + \frac{\partial x_1}{\partial t} dt \right) - X_2 dX_1 + K dt - H dt \end{aligned} \quad (8.39)$$

Yukarıdaki eşitlikte dx_2 , dX_1 ve dt nin katsayıları eşitlenirse;

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_3}{\partial x_2} &= x_2 \frac{\partial x_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_3}{\partial X_1} &= x_2 \frac{\partial x_1}{\partial X_1} - X_2 \\ \frac{\partial f_3}{\partial t} - x_2 \frac{\partial x_1}{\partial t} + H &= K \end{aligned} \quad (8.40)$$

(8.40) de parantez içindeki kalan ifade ise F_2 yi verir.

$$\frac{\partial}{\partial X_1} \underbrace{(f_3 - x_2 x_1)}_{F_3} = -X_2 \quad (8.41)$$

Burada parantez içindeki ifade F_3 ü verir. Bu tanımla beraber aşağıdaki eşitlikler bulunur.

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_3}{\partial x_2} &= x_1 \\ \frac{\partial F_3}{\partial X_1} &= -X_2 \\ \frac{\partial F_3}{\partial t} + H &= K \end{aligned} \quad (8.42)$$

Ayrıca bu ifadelerden

$$F_3 = f_3(x_2, X_1, t) - x_2 x_1(x_2, X_1, t) = F_3(x_2, X_1, t) \quad (8.43)$$

olduğu görülür.

Tip 4

Bağımsız koordinatların x_2 ve X_2 olması durumunda $F[x_1(x_2, X_2), x_2, t] = f_4(x_2, X_2, t)$ ve (8.17) ifadesi ise aşağıdaki gibi olur.

$$\begin{aligned} df_4(x_2, X_2, t) &= \frac{\partial f_4}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f_4}{\partial X_2} dX_2 + \frac{\partial f_4}{\partial t} dt \\ &= x_2 \left(\frac{\partial x_1}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial x_1}{\partial X_2} dX_2 + \frac{\partial x_1}{\partial t} dt \right) \\ &\quad - X_2 \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial X_1}{\partial X_2} dX_2 + \frac{\partial X_1}{\partial t} dt \right) + Kdt - Hdt \end{aligned} \quad (8.44)$$

Yukarıdaki eşitlikte dx_2 , dX_2 ve dt nin katsayıları eşitlenirse;

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_4}{\partial x_2} &= x_2 \frac{\partial x_1}{\partial x_2} - X_2 \frac{\partial X_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_4}{\partial X_2} &= x_2 \frac{\partial x_1}{\partial X_2} - X_2 \frac{\partial X_1}{\partial X_2} \\ \frac{\partial f_4}{\partial t} - x_2 \frac{\partial x_1}{\partial t} + X_2 \frac{\partial X_1}{\partial t} + H &= K \end{aligned} \quad (8.45)$$

Yukarıdaki eşitliklerde

$$\begin{aligned} x_2 \frac{\partial x_1}{\partial x_2} &= \frac{\partial}{\partial x_2} (x_1 x_2) - x_1 \\ X_2 \frac{\partial X_1}{\partial X_2} &= \frac{\partial}{\partial X_2} (X_1 X_2) - X_1 \end{aligned} \quad (8.46)$$

ifadeleri kullanılırsa;

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_2} \underbrace{(f_4 - x_2 x_1 + X_1 X_2)}_{F_4} &= -x_1 \\ \frac{\partial}{\partial X_2} \underbrace{(f_4 - x_2 x_1 + X_1 X_2)}_{F_4} &= X_1 \end{aligned} \quad (8.47)$$

eşitlikleri bulunur. Buna göre;

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_4}{\partial x_2} &= x_1 \\
\frac{\partial F_4}{\partial X_2} &= -X_1 \\
\frac{\partial F_4}{\partial t} + H &= K
\end{aligned}
\tag{8.48}$$

Ayrıca bu ifadelerden

$$\begin{aligned}
F_4 &= f_4(x_2, X_2, t) - x_2 x_1(x_2, X_2, t) + X_2(x_2, X_2, t) X_1 \\
&= F_4(x_2, X_2, t)
\end{aligned}
\tag{8.49}$$

olduğu görülür.

8.3 Kanonik Dönüşüm Örnekleri ve Üretici Fonksiyonları

8.3.1 Metrik dönüşümler

$$\begin{aligned}
X_1 &= ax_1 \\
X_2 &= bx_2, \quad ab = 1
\end{aligned}
\tag{8.50}$$

(8.18) eşitliklerinden yararlanılarak dönüşümün üretici fonksiyonu;

$$\begin{aligned}
x_2 - X_2 \frac{\partial X_1}{\partial x_1} &= \frac{\partial F}{\partial x_1} = 0 \\
X_2 \frac{\partial X_1}{\partial x_2} &= -\frac{\partial F}{\partial x_2} = 0
\end{aligned}
\tag{8.51}$$

bulunur. Böylece

$$F = Sbt \tag{8.52}$$

bulunur.

8.3.2 Lineer dönüşümler

$$\begin{aligned}
X_1 &= a_1 x_1 + a_2 x_2 \\
X_2 &= b_1 x_1 + b_2 x_2
\end{aligned}
\tag{8.53}$$

şeklinde bir dönüşüm tanımlansın. Burada kanoniklik şartından dolayı

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 \quad (8.54)$$

olur.

(8.18) denklemleri kullanılarak F üretici fonksiyonu aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_1} &= x_2 - a_1 b_1 x_1 - \underbrace{a_1 b_2}_{1+a_2 b_1} x_2 \\ &= -a_1 b_1 x_1 - a_2 b_1 x_2 \end{aligned} \quad (8.55)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = -a_2 b_1 x_1 - a_2 b_2 x_2 \quad (8.56)$$

ifadelerinden,

$$F(x_1, x_2) = -\frac{1}{2} a_1 b_1 x_1^2 - \frac{1}{2} a_2 b_2 x_2^2 - a_2 b_1 x_1 x_2 \quad (8.57)$$

bulunur.

8.3.3 Ayar dönüşümleri

Üç boyutlu faz uzayında aşağıdaki gibi bir dönüşüm tanımlansın.

$$\begin{aligned} X_1 &= x_1 \\ X_2 &= x_2 + f(x_1) \end{aligned} \quad (8.58)$$

Bu dönüşüm $\{X_1, X_2\} = 1$ olduğu üzere kanoniktir. Dönüşümün üretici fonksiyonu ise;

$$\begin{aligned} \frac{F}{\partial x_1} &= x_2 - (x_2 + f(x_1)) = -f(x_1) \\ \frac{F}{\partial x_2} &= 0 \end{aligned} \quad (8.59)$$

ifadelerinden

$$F(x_1) = -\int f(x_1) dx_1 \quad (8.60)$$

bulunur. Bir diğer dönüşüm şekli ise;

$$\begin{aligned} X_1 &= x_1 + g(x_2) \\ X_2 &= x_2 \end{aligned} \quad (8.61)$$

şeklindedir. Bu dönüşümün üretici fonksiyonu ise aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}\frac{F}{\partial x_1} &= x_2 - x_2 = 0 \\ \frac{F}{\partial x_2} &= x_2 \frac{\partial g}{\partial x_2}\end{aligned}\tag{8.62}$$

Bu ifadelerden F üretici fonksiyonu,

$$F = -\int x_2 \frac{\partial g(x_2)}{\partial x_2} dx_2\tag{8.63}$$

bulunur. Bu ifadede kısmi integrasyon alınırsa,

$$F = -x_2 g(x_2) + \int g(x_2) dx_2\tag{8.64}$$

bulunur.

8.3.4 Nokta dönüşümleri

$$\begin{aligned}X_1 &= f(x_1) \\ X_2 &= g(x_1)x_2\end{aligned}\tag{8.65}$$

dönüşümü göz önüne alınsın. Bu ifadede f ve g keyfi seçilmiş fonksiyonlardır. Bu dönüşümde kanoniklik şartından dolayı,

$$\{X_1, X_2\} = f(x_2) \frac{\partial g}{\partial x_2} = 1\tag{8.66}$$

olmalıdır. Dönüşümün üretici fonksiyonu aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x_1} &= x_2 - f(x_2)g(x_2) \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} &= -x_1 g(x_2) \frac{\partial f(x_2)}{\partial x_2}\end{aligned}\tag{8.67}$$

eşitliklerinden,

$$F = x_1 x_2 - x_1 f(x_2) g(x_2)\tag{8.68}$$

bulunur.

8.3.5 \mathbb{R}^2 de dönme

Bu örnekte ise zamana bağımlı aşağıdaki dönüşüm göz önüne alınsın.

$$\begin{aligned} X_1 &= x_1 \cos t + x_2 \sin t \\ X_2 &= -x_1 \sin t + x_2 \cos t \end{aligned} \quad (8.69)$$

Bu dönüşüm aşağıda görüldüğü üzere kanoniktir.

$$\{X_1, X_2\} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

Dönüşümün üretici fonksiyonu ise aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_1} &= x_2 + x_1 \cos t \sin t - x_2 \underbrace{\cos^2 t}_{1-\sin^2 t} = x_1 \sin t \cos t + x_2 \sin^2 t \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} &= x_1 \sin^2 t - x_2 \sin t \cos t \end{aligned} \quad (8.70)$$

İfadelerinden üretici fonksiyon;

$$\begin{aligned} F &= x_1 x_2 \sin^2 t + \frac{1}{2} x_1^2 \cos t \sin t - \frac{1}{2} x_2^2 \cos t \sin t \\ &= x_1 x_2 \sin^2 t + \frac{1}{2} \cos t \sin t (x_1^2 - x_2^2) \end{aligned} \quad (8.71)$$

şeklinde bulunur.

8.4 Sonsuz Küçük Kanonik Dönüşümler

İki boyutlu faz uzayında sonsuz küçük kanonik dönüşümler aşağıdaki gibi verilir.

$$\begin{aligned} X_1 &= x_1 + \varepsilon \eta_1(x_1, x_2) = x_1 + \varepsilon \{x_1, G\} = x_1 + \varepsilon \frac{\partial G}{\partial x_2} \\ X_2 &= x_2 + \varepsilon \eta_2(x_1, x_2) = x_2 + \varepsilon \{x_2, G\} = x_2 - \varepsilon \frac{\partial G}{\partial x_1} \end{aligned} \quad (8.72)$$

Yukarıdaki ifadelerde ε süreklilik parametresi G is sonsuz küçük kanonik dönüşüm için üretici fonksiyon ifadesidir. Bu ifadelerden,

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \eta_2}{\partial x_2} = 0 \quad (8.73)$$

olduğu açıkça görülmektedir.

Sonsuz küçük kanonik dönüşüm, bir sistemi faz uzayı içinde, sistemin yörüngesi boyunca sonsuz küçük biçimde hareket eden parametrelere bağlıdır. Buradan anlaşılacağı üzere sonlu bir kanonik dönüşüm, birbirini izleyen sonsuz küçük kanonik dönüşümlerin toplamı biçiminde ifade edilir.

Bu ifade aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$$\phi = \varphi + \varepsilon \{\varphi, G\} + \frac{\varepsilon^2}{2!} \{\{\varphi, G\}, G\} + \frac{\varepsilon^3}{3!} \{\{\{\varphi, G\}, G\}, G\} + \dots \quad (8.74)$$

Bu eşitlikte $\phi = X_1, X_2$ ve $\phi = x_1, x_2$ olarak yazılırsa aşağıdaki ifade elde edilir.

$$X_i = x_i + \varepsilon \{x_i, G\} + \frac{\varepsilon^2}{2!} \{\{x_i, G\}, G\} + \frac{\varepsilon^3}{3!} \{\{\{x_i, G\}, G\}, G\} + \dots \quad i = 1, 2 \quad (8.75)$$

Benzer şekilde aşağıdaki gibi bir vektör alanı tanımlanırsa,

$$\begin{aligned} \hat{V}_G &= f_1(x) \partial x_1 + f_2(x) \partial x_2 \\ e^{\varepsilon \hat{V}_G} x_i &= X_i \end{aligned} \quad (8.76)$$

şeklinde yine aynı dönüşüm elde edilir.

Bu durumun nasıl işlediği bir örnekle gösterilebilir.

$$\begin{aligned} X_1 &= x_1 + \varepsilon x_2 \\ X_2 &= x_2 - \varepsilon x_1 \end{aligned} \quad (8.77)$$

gibi bir dönüşüm ele alınsın. Bu dönüşümün üretici fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$G = \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2) \quad (8.78)$$

Bu dönüşüm ve üretici fonksiyon ifadesi (8.75) eşitliğinde kullanılarak açıkça yazılırsa R^2 de dönme ifadesi elde edilir.

$$\begin{aligned} X_1 &= x_1 \cos \varepsilon + x_2 \sin \varepsilon \\ X_2 &= -x_1 \sin \varepsilon + x_2 \cos \varepsilon \end{aligned} \tag{8.79}$$

Bu ifadelerde ε dönme açısını verir.

9. SONUÇ

- 1) Kanonik dönüşümler Hamilton hareket denklemlerini daha basit bir forma indirgemek için kullanılan terslenebilir bir gönderimdir.
- 2) Bu tip bir dönüşüm hareket denklemlerini şekil olarak değişmez bırakan yeni bir Hamilton fonksiyonunun varlığını gerektirirken, yeni faz uzayı değişkenlerinin Poisson parantezini de değişmez bırakmalıdır.
- 3) Kanonoid dönüşümlerde ise, daha basit bir sisteme geçmek için yeni bir Hamilton fonksiyonu üretebilen terslenebilir bir gönderim bulmak yeterli olmaktadır.
- 4) Kanonoid dönüşümler dinamik sistemlerin çözümlenmesinde daha geniş ve rahat bir hareket alanı sağlamaktadır.
- 5) Kanonik dönüşümler ise, kanonoid dönüşümlerin özel bir alt sınıfı olarak kalmaktadır.

KAYNAKLAR

- Carinena, J. F. and Ranada, M. F. 1988. Canonoid transformations from a geometric perspective. *Journal of Mathematical Physics*, (29); 2181-2186
- Carinena, J. F. and Ranada, M. F. 1989. Poisson maps and canonoid transformations for time-dependent hamiltonian systems. *Journal of Mathematical Physics*, (30); 2258-2266
- Currie, D. G. and Saletan, E. J. 1972. Canonical transformations and quadratic hamiltonians. *Nuovo Cimento*, (9); 143-153
- Çolakoğlu, K. 1999. *Klasik Mekanik*.
- Goldstein, H. 1980. *Classical Mechanics*.
- Greiner, W. 1992. *Classical Mechanics-Systems of particles and Hamiltonian dynamics*.
- Hurley, J. 1972. Necessary and sufficient conditions for a canonical transformation. *American Journal of Physics*, (40); 533-535
- Leubner, C. and Marte, A. M. 1984. Generalized canonical transformations and constant of motion. *Physics Letters*, (101A); 179-181
- Negri, L. J., Oliveira, L. C. and Teixeira, M. J. 1987. Canonoid transformations in generalized mechanics. *Journal of Mathematical Physics*, (30); 2369-2372
- Rızaoğlu, E. ve Sünel, N. 2006. *Klasik Mekanik*.
- Sabuncuoğlu, A. 2006. *Diferensiyel Geometri*.
- Saletan, J. and Eugene, J. 1998. *Classical Dynamics-A contemporary approach*.
- Teğmen, A. , Dereli, T. and Hakioglu, T. 2009. Canonical transformations in three dimensional phase space. *Int. J. Mod. Phys A*, (24); 4769-4788
- Teixeira, M. J., Negri, L. J. and Oliveira, L. C. 1989. Canonoid transformations in generalized mechanics. *Journal of Mathematical Physics*, (30); 2369-2372
- Vegas, F. J. D. 1989. On the canonical transformation theorem of Currie and Saletan. *Journal of Physics A: Math. Gen.* , (22); 1927-1931

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Emre GÜRKANLI

Doğum Yeri : SAMSUN

Doğum Tarihi : 16/07/1985

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Milli Piyango Anadolu Lisesi (2003)

Lisans : 19 Mayıs Üniversitesi Fen-Ed. Fakültesi Fizik Bölümü (2008)

Yüksek Lisans: Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fizik Anabilim Dalı
(Eylül 2008-Şubat 2011)