ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BERNSTEIN-STANCU POLİNOMLARIYLA YAKLAŞIM

Yeşim DÖNE

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2011

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

BERNSTEIN-STANCU POLİNOMLARIYLA YAKLAŞIM

Yeşim DÖNE

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Ertan İBİKLİ

Bu çalışmada, bir ve iki değişkenli Bernstein-Stancu polinomlarının ve genelleşmiş Bernstein-Stancu tipli polinomların yaklaşım özellikleri ve yaklaşım hızları incelenmiştir.
Bu tez dört bölümden oluşmaktadır.
İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.
İkinci bölümde, Bernstein polinomu ve lineer pozitif operatörler tanıtılıp temel özellikleri incelenmiştir. Bir ve çok değişkenli fonksiyonlar için Korovkin tipi teoremler ifade edilmiştir. Ayrıca bir ve iki değişkenli fonksiyonlar için süreklilik modüllerinin tanımları ve bazı özellikleri verilmiştir.
Üçüncü bölümde, bir ve iki değişkenli Bernstein-Stancu polinomlarının yaklaşım özellikleri ve yaklaşım hızları incelenmiştir. Ayrıca nümerik örnekler verilmiştir.
Son bölümde ise, Bernstein-Stancu polinomlar dizisinin bir genelleşmesi ile ilgili bir makale (Gadjiev ve Ghorbanalizadeh 2010) ele alınmıştır. Son olarak nümerik örnekler verilmiştir.

Temmuz 2011, 90 sayfa

Anahtar Kelimeler : Bernstein-Stancu polinomları, Korovkin teoremi, lineer pozitif operatörler, yakınsaklık hızı, tam süreklilik modülü, kısmi süreklilik modülü.

ABSTRACT

Master Thesis

CONVERGENCE BY BERNSTEIN-STANCU POLYNOMIALS

Yeşim DÖNE

Ankara University
Graduate School of Natural And Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Ertan İBİKLİ

In this study, the approximation properties and the speed of approximation of Bernstein-Stancu polynomials and generalized Bernstein-Stancu type polynomials for one and two variables are examined.
This thesis consists of four chapters.
The first chapter is devoted to introduction.
In the second chapter, Bernstein polynomials and linear positive operators are introduced and their basic properties are obtained. Korovkin type theorems are expressed, for one and several variables functions. Furthermore, definitions and some properties of modulus of continuity of one and two variables functions are given.
In the third chapter, the approximation properties and the speed of approximation of Bernstein-Stancu polynomials for one and two variables are examined. Moreover some numerical examples are given.
In the last chapter, a paper about generalization of the sequence of Bernstein-Stancu polynomials (Gadjiev and Ghorbanalizadeh 2010) is studied. Finally, some numerical examples are given.

July 2011, 90 pages

Key Words : Bernstein-Stancu polynomials, Korovkin theorem, linear positive operators, speed of approximation, complete modulus of continuity, partial modulus of continuity.

TEŞEKKÜR

Bu çalışma konusunu bana veren ve araştırmalarımın her aşamasında en yakın ilgi ve önerileriyle beni yönlendiren danışman hocam, Sayın Prof. Dr. Ertan İBİKLİ (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Anabilim Dalı)' ye ve bana her zaman destek olan aileme en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarımı Yurt İçi Yüksek Lisans Bursu ile destekleyen TÜBİTAK Bilim İnsanı Destekleme Daire Başkanlığı' na teşekkürü bir borç bilirim.

Yeşim DÖNE
Ankara, Temmuz 2011

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{N}$	doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	reel sayılar kümesi
$B(D)$	D kümesi üzerinde sınırlı fonksiyonların uzayı
$C(D)$	D kümesi üzerinde sürekli fonksiyonların uzayı
$C_b(D)$	D kümesi üzerinde sürekli ve tüm reel eksende sınırlı fonksiyonların uzayı
$\Vert\cdot\Vert_{C(D)}$	$C(D)$ uzayında tanımlı norm
$f_n \rightrightarrows f$	f_n dizisi f fonksiyonuna düzgün yakınsar
C_n^k	n' nin k' lı kombinasyonu, yani $C_n^k = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
$\omega(\delta) = \omega(f;\delta)$	Tek değişkenli ve reel değerli sınırlı f fonksiyonunun süreklilik modülü
$\omega_2(\delta) = \omega_2(f;\delta)$	İki değişkenli ve reel değerli sınırlı f fonksiyonunun tam süreklilik modülü
$\omega_2^{(i)}(\delta) = \omega_2^{(i)}(f;\delta)$	İki değişkenli ve reel değerli sınırlı f fonksiyonunun i. bileşene göre kısmi süreklilik modülü $(i = 1, 2)$

ŞEKİLLER DİZİNİ

ÇİZELGELER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Matematiğin bir çok uygulamasında, teorik matematikte ve uygulamalı matematikte standart fonksiyonlardan çok daha karmaşık fonksiyonlarla karşılaşılır. Yaklaşımlar teorisinin en önemli çalışmalarından biri, işlem yapılması zor olan bu fonksiyonların daha iyi özellikleri olan diğer fonksiyonlar cinsinden bir gösterimini elde etmektir.

Yaklaşımlar teorisinin temelini teşkil eden teorem, kapalı ve sınırlı $[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlı, reel değerli, sürekli bir f fonksiyonu için her $\varepsilon > 0$ ve her $x \in [a, b]$ olmak üzere

$$|P(x) - f(x)| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $P(x)$ polinomunun varlığı, ilk kez Weierstrass (1885) tarafından ispat edilmiştir.

Weierstrass teoremi yukarıdaki koşullar altında böyle bir P polinomun varlığını garanti eder, ancak tipi hakkında bilgi vermez.

Bernstein (1912), $[0, 1]$ aralığı üzerinde tanımlı, reel değerli, sürekli bir f fonksiyonuna yaklaşan polinomun tipini belirleyen bir teorem ispatlamıştır. Bu ispatı

$$B_n(f;\ x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \qquad ; \qquad 0 \leq x \leq 1$$

polinomlar dizisini kullanarak göstermiştir. Daha sonraki yıllarda bu polinomlar dizisi Bernstein polinomları olarak anılmaya başlanmıştır. f fonksiyonunun sadece $[0, 1]$ aralığında bulunan rasyonel noktalardaki değeri bilindiği taktirde $B_n(f;\ x)$ polinomları oluşturulabilir. Bu polinomlar için keyfi $\varepsilon > 0$ verildiğinde $[0, 1]$ aralığının her bir x noktasında ve her $n \geq n_0$ için

$$|B_n(f;\ x) - f(x)| < \varepsilon$$

eşitsizliği sağlanacak biçimde $n_0 = n_0(\varepsilon)$ sayısı vardır (Lorentz 1953).

Bernstein polinomunun iki değişkenli sürekli fonksiyonlar uzayında yaklaşımı ise Stancu (1963) tarafından sabit üçgensel bölgede incelenmiştir.

1912 yılından günümüze kadar Bernstein polinomunun bir çok genelleşmesi tanımlanmış ve yaklaşım özellikleri incelenmiştir. Bunlardan birisi Stancu (1969) tarafından α , β

$$0 \leq \alpha \leq \beta$$

koşulunu sağlayan pozitif reel sayılar olmak üzere

$$P_{n,\alpha,\beta}(f;\ x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\tfrac{k+\alpha}{n+\beta}\right) C_n^k x^k \left(1-x\right)^{n-k}$$

şeklinde tanımlanan $P_{n,\alpha,\beta} :\ C\left[0,1\right] \rightarrow C\left[0,1\right]$ Bernstein-Stancu polinomudur. Stancu, Bernstein-Stancu polinomlar dizisinin $[0,1]$ aralığında, $0 \leq \alpha \leq \beta$ koşulunu sağlayan her α , β reel sayısı için f sürekli fonksiyonuna düzgün olarak yaklaştığını göstermiştir. $B_n(f;x)$ Bernstein polinomunun düğüm noktaları, $[0,1]$ aralığının n eşit parçaya bölünmesiyle elde edilen $\frac{k}{n}$ noktaları iken Bernstein-Stancu polinomunun düğüm noktaları ise $[0,1]$ aralığının $\frac{k+\alpha}{n+\beta}$ noktalarıdır.

Büyükyazıcı ve İbikli (2004) tarafından iki değişkenli Bernstein-Stancu polinomları $[0,1] \times [0,1]$ bölgesinde x değişkenine göre n - inci ve y değişkenine göre m - inci dereceden olmak üzere

$$B_{n,m}^{\alpha_k,\beta_k}\left(f;\ x,y\right) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} f\left(\tfrac{k+\alpha_1}{n+\beta_1},\ \tfrac{j+\alpha_2}{m+\beta_2}\right) p_{n,k}(x) q_{m,j}(y)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Burada

$$\begin{aligned} p_{n,k}(x) &= C_n^k x^k \left(1-x\right)^{n-k} \\ q_{m,j}(y) &= C_m^j y^j \left(1-y\right)^{m-j} \end{aligned}$$

ve $\alpha_k,\ \beta_k,\ \ (k=1,2)\ \ 0 \leq \alpha_k \leq \beta_k$ koşulunu sağlayan pozitif reel sayılardır (Büyükyazıcı ve İbikli 2004).

Gadjiev ve Ghorbanalizadeh (2010) tarafından Bernstein-Stancu polinomunun bir genelleşmesi bir ve iki değişkenli durumda tanımlanmış, yaklaşımları ve yaklaşım hızları incelenmiştir.

Bu polinom tek değişken halinde α_1, α_2, β_1, β_2

$$0 \leq \alpha_2 \leq \alpha_1 \leq \beta_1 \leq \beta_2$$

koşulunu sağlayan pozitif reel sayılar olmak üzere $x \in \left[\frac{\alpha_2}{n+\beta_2},\ \frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2}\right]$ için

$$S_{n,\alpha,\beta}(f;\ x) = \left(\frac{n+\beta_2}{n}\right)^n \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1}\right) C_n^k \left(x - \frac{\alpha_2}{n+\beta_2}\right)^k \left(\frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2} - x\right)^{n-k}$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Genelleşmiş Bernstein-Stancu polinomu iki değişken halinde iki bölgede incelenmiştir.

$S = \left[\frac{\alpha_1}{n+\beta_1},\ \frac{n+\alpha_1}{n+\beta_1}\right] \times \left[\frac{\alpha_2}{m+\beta_2},\ \frac{m+\alpha_2}{m+\beta_2}\right]$ dikdörtgensel bölgesinde x değişkenine göre n - inci ve y değişkenine göre m - inci dereceden genelleşmiş Bernstein-Stancu polinomu

$$S_{n,m}^{\alpha_k,\gamma_k,\beta_k,\sigma_k}(f;\ x,y) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} f\left(\frac{i+\gamma_1}{n+\sigma_1},\ \frac{j+\gamma_2}{m+\sigma_2}\right) p_{n,i,\alpha_1,\beta_1}(x) q_{m,j,\alpha_2,\beta_2}(y)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Burada p_{n,i,α_1,β_1} ve q_{m,j,α_2,β_2} fonksiyonları

$$p_{n,i,\alpha_1,\beta_1}(x) = \left(\frac{n+\beta_1}{n}\right)^n C_n^i \left(x - \frac{\alpha_1}{n+\beta_1}\right)^i \left(\frac{n+\alpha_1}{n+\beta_1} - x\right)^{n-i}$$

$$q_{m,j,\alpha_2,\beta_2}(y) = \left(\frac{m+\beta_2}{m}\right)^m C_m^j \left(y - \frac{\alpha_2}{m+\beta_2}\right)^j \left(\frac{m+\alpha_2}{m+\beta_2} - y\right)^{m-j}$$

eşitlikleri ile tanımlıdır.

$\alpha_k,\ \gamma_k,\ \beta_k,\ \sigma_k \quad (k=1,2)$

$$\begin{aligned} 0 &< \alpha_1 < \gamma_1 < \sigma_1 < \beta_1 \\ 0 &< \alpha_2 < \gamma_2 < \sigma_2 < \beta_2 \end{aligned}$$

koşullarını sağlayan pozitif sayılardır.

$\Delta = \left\{ (x,y) : x+y \leq \frac{n+2\alpha}{n+\beta},\ x,y \geq \frac{\alpha}{n+\beta} \right\}$ üçgensel bölgesinde ise genelleşmiş Bernstein-Stancu polinomu

$$S_n^{\alpha,\alpha_k,\beta,\beta_k}(f;\ x,y) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n-k} f\left(\frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1},\ \frac{l+\alpha_2}{n+\beta_2} \right) p_{n,\alpha,\beta}^{k,l}(x,y)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Burada

$$p_{n,\alpha,\beta}^{k,l}(x,y) = \left(\frac{n+\beta}{n} \right)^n C_n^k C_{n-k}^l \left(x - \frac{\alpha}{n+\beta} \right)^k \left(y - \frac{\alpha}{n+\beta} \right)^l \left(\frac{n+2\alpha}{n+\beta} - x - y \right)^{n-k-l}$$

ve $0 \leq \alpha \leq \beta$ olmak üzere $\alpha,\ \alpha_k,\ \beta,\ \beta_k \quad (k=1,2)$ pozitif sayılardır.

Bu çalışmada Stancu' nun "Asupra unei generalizări a polinoamelor lui Bernstein", Büyükyazıcı ve İbikli' nin "The approximation properties of generalized Bernstein polynomials of two variables" ve Gadjiev ve Ghorbanalizadeh' nin "Approximation properties of a new type Bernstein–Stancu polynomials of one and two variables" makaleleri esas alınarak bir ve iki değişkenli Bernstein-Stancu polinomları ve genelleşmiş Bernstein-Stancu polinomlarının yaklaşım özellikleri ve yaklaşım hızları incelenmiştir.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde Weierstrass teoremi ve Bernstein polinomu ifade edilmiş, lineer pozitif operatörlerin tanımı sağladıkları özelliklerle birlikte verilmiş ve daha sonraki bölümlerde de kullanılacak tanımlar açıklanmıştır. Bunlara ek olarak lineer pozitif operatörlerle ilgili olan Korovkin teoreminin ifadesi de bu bölümde verilmiştir.

2.1 Weierstrass Teoremi ve Bernstein Polinomu

Weierstrass (1885) kapalı ve sınırlı $[a,b]$ aralığı üzerinde tanımlı reel değerli her sürekli f fonksiyonuna polinomlar ile yaklaşılabileceğini aşağıdaki teorem ile ifade etmiştir.

Teorem 2.1.1 (Weierstrass 1885**)** f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli olmak üzere $\forall\varepsilon > 0$ için $[a,b]$ aralığı üzerinde

$$|P_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

eşitsizliğini gerçekleyen en az bir $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ polinomu vardır.

Bernstein (1912), [0,1] aralığında Weierstrass teoremini gerçekleyen polinomun tipini belirleyen bir teorem ispatlamıştır. Bu polinom aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

Tanım 2.1.1 (Bernstein 1912) $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ tanımlı, sürekli bir fonksiyon olsun.

$$B_n(f;\ x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k \left(1-x\right)^{n-k}$$

ile tanımlı polinoma *Bernstein polinomu* adı verilir.

f fonksiyonunun sadece $[0,1]$ aralığında bulunan rasyonel noktalardaki değeri bilindiği taktirde $B_n(f;\ x)$ polinomları oluşturulabilir.

Tanım 2.1.2 a ve b pozitif sayılar ve n bir doğal sayı olmak üzere

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$$

eşitliğine *Binom Formülü* denir.

Şimdi daha sonraki bölümlerde kullanılacak temel tanım ve teoremleri verelim.

2.2 Lineer Pozitif Operatörler

Tanım 2.2.1 X ve Y aynı K cismi üzerinde iki lineer uzay ve $D \subset X$ olsun. D nin her bir elemanına Y nin bir elemanını karşılık getiren kurala D den Y ye bir *dönüşüm* veya *operatör* denir.
D kümesine L operatörünün tanım kümesi denir ve genellikle $D(L)$ ile gösterilir.
$R(L) = \{y \in Y : y = L(x), x \in D(L)\}$ kümesine L operatörünün görüntü kümesi denir (Kreyszig 1978).

Tanım 2.2.2 X ve Y aynı K cismi üzerinde iki lineer uzay olmak üzere $L : X \to Y$ şeklindeki L operatörünü gözönüne alalım. Eğer $\forall x, y \in D(L)$ ve $\forall \alpha, \beta \in K$ için

$$L(\alpha x + \beta y) = \alpha L(x) + \beta L(y)$$

koşulu sağlanıyor ise L operatörüne *lineer operatör* denir.

Bu çalışmada X ve Y lineer uzaylarını $C[a,b]$ ve $K \subset \mathbb{R}^2$ kompakt olmak üzere $C(K)$ fonksiyon uzayları olarak ele alacağız.

Tanım 2.2.3 f bir fonksiyon ve L bir operatör olmak üzere

$$f \geq 0 \text{ için } L(f) \geq 0$$

sağlanıyorsa L operatörüne *pozitif operatör* denir (Korovkin 1960).

Hem lineer hem de pozitif olan operatöre *lineer pozitif operatör* denir.

Lineer pozitif operatörlerin bazı önemli özellikleri aşağıda verilmiştir.

Lemma 2.2.1 Lineer pozitif operatörler monoton azalmayandır. Yani

$$g \leq f \Rightarrow L(g) \leq L(f)$$

eşitsizliği sağlanır (Hacıyev ve Hacısalihoğlu 1995).

Lemma 2.2.2 L bir lineer pozitif operatör ise

$$|L(f)| \leq L(|f|)$$

eşitsizliği sağlanır (Hacıyev ve Hacısalihoğlu 1995).

2.3 C[a,b] Uzayında Lineer Pozitif Operatörler ile Yaklaşım Problemi

Tanım 2.3.1 $[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlı ve sürekli tüm reel değerli fonksiyonlar uzayı $C[a, b]$ ile gösterilir ve $C[a, b]$ uzayı

$$\|f\|_{C[a,b]} = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$$

normu ile lineer normlu uzaydır.

Tanım 2.3.2 Eğer her $\varepsilon > 0$ ve her $x \in A$ için $n > n_0$ olduğunda

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı mevcut ise f_n dizisi A üzerinde f fonksiyonuna *düzgün yakınsaktır* denir ve $f_n \rightrightarrows f$ ile gösterilir (Musayev vd. 2003).

Lemma 2.3.1 $C[a,b]$ uzayında normda yakınsaklık ile düzgün yakınsaklık denktir (Musayev vd. 2003).

Teorem 2.3.1 (Cauchy-Schwartz Eşitsizliği) Her $(x_1, x_2, ..., x_n)$, $(y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ için

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

eşitsizliği gerçeklenir (Kreyszig 1978).

Yaklaşımlar teorisinde iki temel problem vardır. Birincisi, verilen uzaydaki bir fonksiyona yakınsayan bir dizi var mıdır? Diğer problem ise yakınsama var ise hızı nedir? $L_n(f;x)$ keyfi bir lineer pozitif operatörler dizisi olmak üzere

$$\|L_n f - f\| \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

olsun. Şimdi de yaklaşım hızını belirleme sorusuna gelinebilir. $\alpha_n \to 0$ olmak üzere,

$$\alpha_n = |L_n(f;x) - f(x)| < \gamma_n$$

denilirse (α_n) dizisinin sıfıra yaklaşma hızı nedir? Burada (α_n) dizisinin sıfıra yaklaşma hızı hakkında herhangi bilgiye sahip değiliz. Acaba hızı bilinen (γ_n) sıfır dizisi bulunabilir mi ki bu dizinin sıfıra yaklaşma hızından (α_n) dizisinin sıfıra yaklaşma hızı bulunabilsin? Bu sorunun cevabı evettir.

$f \in C[a,b]$ için bir süreklilik modülü dizisi yazılabilir.(γ_n) dizisi en azından süreklilik modülü ile oluşturulabilir.

Tanım 2.3.3 $\emptyset \neq I \subset \mathbb{R}$ sınırlı aralığı verilmiş olsun.

$$d(I) = \sup_{x,y \in I} |x - y|$$

büyüklüğüne I *kümesinin çapı* denir.

Tanım 2.3.4 $I \subset \mathbb{R}$ sınırlı bir aralık ve $f : I \to \mathbb{R}$ sınırlı bir fonksiyon olsun. $d = d(I)$ I kümesinin çapı olmak üzere $\omega : (0, d] \to [0, \infty)$

$$\omega(\delta) = \omega(f; \delta) = \sup_{|x-t|<\delta} \{|f(x) - f(t)| : x, t \in I\}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona f fonksiyonunun I üzerindeki *süreklilik modülü* denir (Altomare ve Campiti 1994).

Lemma 2.3.2 $I \subset \mathbb{R}$ sınırlı bir aralık ve f , I üzerinde tanımlı ve sınırlı bir fonksiyon olsun. Bu durumda süreklilik modülü,
i. $\omega(\delta)$ monoton artan bir fonksiyondur,
ii. $m \in \mathbb{N}$ için $\omega(m\delta) \leq m\omega(\delta)$
iii. $\lambda > 0$ için $\omega(\lambda\delta) \leq (\lambda + 1)\,\omega(\delta)$
iv. $f \in C_b(I)$ için $\lim\limits_{\delta \to 0^+} \omega_f(\delta) = 0$
özelliklerine sahiptir (Altomare ve Campiti 1994).

Korovkin (1953) lineer pozitif operatörlerin yaklaşımlarıyla ilgili aşağıdaki teoremi vermiştir.

Teorem 2.3.2 (Korovkin 1953) (L_n) lineer pozitif operatörler dizisi $[a, b]$ aralığında $n \to \infty$ iken

$$L_n(1; x) \rightrightarrows 1$$

$$L_n(t; x) \rightrightarrows x$$

$$L_n(t^2; x) \rightrightarrows x^2$$

koşullarını gerçekliyorsa, $[a, b]$ aralığı üzerinde sürekli ve tüm reel eksende sınırlı herhangi bir f fonksiyonu için $n \to \infty$ iken $[a, b]$ aralığında

$$L_n(f; x) \rightrightarrows f$$

gerçeklenir.

Yakınsaklık hızının hesabına örnek olarak aşağıdaki teoremler verilebilir.

1912 yılında $B_n(f;x)$ polinomlar dizisinin f fonksiyonuna yaklaşmasının ardından, yaklaşım hızı 1934 yılında aşağıdaki gibi verilmiştir.

Teorem 2.3.3 (Popoviciu 1934) $f \in C[0,1]$ ve $B_n(f;x)$ Bernstein polinomu için

$$|B_n(f;x) - f(x)| \leq \frac{3}{2}\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

eşitsizliği gerçeklenir.

$L_n : C[a,b] \to B[a,b]$ lineer pozitif operatörler dizisinin yaklaşım hızı aşağıdaki gibi verilebilir.

Teorem 2.3.4 (Shisha ve Mond 1968) $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $L_n : C[a,b] \to B[a,b]$ lineer pozitif operatörler dizisi olsun ve sabit fonksiyonu sabit fonksiyona dönüştürsün. Her $f \in C[a,b]$, $x \in [a,b]$ ve $\delta \in [0, b-a]$ için

$$|L_n(f;x) - f(x)| \leq \left\{1 + \delta^{-1}\sqrt{L_n\left((t-x)^2;x\right)}\right\}\omega(f;\delta) \tag{2.3.1}$$

eşitsizliği gerçeklenir.

2.4 İki Değişkenli Sürekli Fonksiyonlar Uzayında Lineer Pozitif Operatörler ile Yaklaşım Problemi

Tanım 2.4.1 $K \subset \mathbb{R}^2$ sınırlı bölgesi üzerinde tanımlı ve sürekli tüm reel değerli fonksiyonlar uzayı $C(K)$ ile gösterilir ve $C(K)$ uzayı

$$\|f\|_{C(K)} = \sup_{(x,y)\in K} |f(x,y)|$$

normu ile lineer normlu uzaydır.

$K \subset \mathbb{R}^2$ kompakt bölge ise

$$\|f\|_{C(K)} = \max_{(x,y)\in K} |f(x,y)|$$

olur.

Tanım 2.4.2 $K \subset \mathbb{R}^2$ kompakt bölge olmak üzere her $\varepsilon > 0$ ve her $(x,y) \in K$ için $n,m > N$ olduğunda

$$|f_{n,m}(x,y) - f(x,y)| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon)$ sayısı mevcut ise $f_{n,m}$ dizisi K üzerinde f fonksiyonuna *düzgün yakınsaktır* denir ve $f_{n,m} \rightrightarrows f$ ile gösterilir.

Lemma 2.4.1 $C(K)$ uzayında normda yakınsaklık ile düzgün yakınsaklık denktir.

Tanım 2.4.3 $D \subset \mathbb{R}^2$ sınırlı bir bölge ve $f : D \to \mathbb{R}$ tanımlı, sınırlı bir fonksiyon olsun. $K \subset D$ kompakt bir bölge ve $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ olmak üzere

(a) $$\omega_2(f;\delta) = \sup\left\{|f(x_1,x_2) - f(y_1,y_2)| : x,y \in K,\ \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2} \leq \delta\right\}$$

fonksiyonuna f fonksiyonunun *tam süreklilik modülü* denir.

(b) $$\omega_2^{(1)}(f;\delta) = \sup\{|f(x_1,y) - f(x_2,y)| : (x_1,y),(x_2,y) \in K,\ \ |x_1 - x_2| \leq \delta\}$$

$$\omega_2^{(2)}(f;\delta) = \sup\{|f(x,y_1) - f(x,y_2)| : (x,y_1),(x,y_2) \in K,\ \ |y_1 - y_2| \leq \delta\}$$

fonksiyonlarına sırasıyla f fonksiyonunun x *e göre kısmi süreklilik modülü* ve y *ye göre kısmi süreklilik modülü* denir (Altomare ve Campiti 1994).

Lemma 2.4.2 $D \subset \mathbb{R}^2$ sınırlı bir bölge, $K \subset D$ kompakt bir alt bölge ve f fonksiyonu D bölgesi üzerinde tanımlı ve sınırlı fonksiyon olsun. f fonksiyonunun tam süreklilik modülü $\omega_2(\delta) = \omega_2(f;\delta)$

i. $\omega_2(\delta)$ monoton artan bir fonksiyondur,

ii. $m \in \mathbb{N}$ için $\omega_2(m\delta) \leq m\omega_2(\delta)$

iii. $\lambda > 0$ için $\omega_2(\lambda\delta) \leq (\lambda + 1)\omega_2(\delta)$

iv. $f \in C(K)$ ise $\lim\limits_{\delta \to 0^+} \omega_2(\delta) = 0$ (Altomare ve Campiti 1994)

v. $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ olmak üzere $\omega_2(\lambda_1\delta_1, \lambda_2\delta_2) \leq (1 + \lambda_1 + \lambda_2)\omega_2(\delta_1, \delta_2)$ (*Ipatov* 1955)

özelliklerini sağlar.

Volkov (1957) tarafından Korovkin (1953)' in elde ettiği bazı sonuçlar (Teorem 2.3.2) m boyutlu duruma aşağıdaki şekilde genişletilmiştir.

Teorem 2.4.1 (Volkov 1957) $X \subset \mathbb{R}^m$ sınırlı bir bölge olmak üzere eğer (L_n) lineer pozitif operatörler dizisi $K \subset X$ kompakt bölgesinde $n \to \infty$ iken

$$\begin{aligned} &L_n(1;x) \rightrightarrows 1 \\ &L_n(t_i;x) \rightrightarrows x_i \qquad ; \quad (i = 1, 2, ..., m) \\ &L_n(|t|^2;x) \rightrightarrows |x|^2 \end{aligned}$$

şeklindeki $(m+2)$ tane şartı sağlıyorsa X bölgesinde sürekli ve tüm $\mathbb{R}^m$ de sınırlı herhangi bir f fonksiyonu için K üzerinde $n \to \infty$ iken

$$L_n(f;x) \rightrightarrows f$$

gerçeklenir. Burada $x = (x_1, x_2, ..., x_m)$ ve $\|x\| = |x| = \left(\sum\limits_{k=1}^{m} x_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$ şeklindedir.

3. BİR VE İKİ DEĞİŞKENLİ BERNSTEIN-STANCU POLİNOMLARI

Bu bölümde Bernstein-Stancu polinomunun bir ve iki değişkenli hallerinin yaklaşımları ve yaklaşım hızları incelenecektir. Ayrıca nümerik örnekler verilecektir.

3.1 Bir Değişkenli Bernstein-Stancu Polinomu

Bernstein-Stancu polinomu, Stancu (1969) tarafından aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

Tanım 3.1.1 $P_{n,\alpha,\beta} : \; C\,[0,1] \rightarrow C\,[0,1]$ Bernstein-Stancu operatörler dizisi (polinomlar dizisi) α , β

$$0 \leq \alpha \leq \beta$$

koşulunu sağlayan pozitif reel sayılar olmak üzere

$$P_{n,\alpha,\beta}(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}\right) C_n^k x^k \,(1-x)^{n-k} \tag{3.1.1}$$

şeklinde tanımlanır. Bernstein-Stancu polinomunun düğüm noktaları ise $[0,1]$ aralığının $\frac{k+\alpha}{n+\beta}$ noktalarıdır. Ayrıca $\alpha = \beta = 0$ için klasik Bernstein polinomu elde edilir. Bernstein-Stancu operatörler dizisinin lineer ve pozitif olduğu açıktır.

Lemma 3.1.1 $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\forall x \in [0,1]$ için Bernstein-Stancu polinomu

$$P_{n,\alpha,\beta}(1;x) = 1 \tag{3.1.2}$$

$$P_{n,\alpha,\beta}(t;x) = \frac{n}{n+\beta}x + \frac{\alpha}{n+\beta} \tag{3.1.3}$$

$$P_{n,\alpha,\beta}(t^2;x) = \frac{1}{(n+\beta)^2}\left\{n\,(n-1)\,x^2 + (1+2\alpha)\,nx + \alpha^2\right\} \tag{3.1.4}$$

$$P_{n,\alpha,\beta}((t-x)^2\,;x) = \frac{1}{(n+\beta)^2}\left\{nx\,(1-x) + (\beta x-\alpha)^2\right\} \tag{3.1.5}$$

eşitliklerini sağlar.

İspat. $f(t) = 1$ fonksiyonuna Bernstein-Stancu operatörü uygulanırsa Binom formülünden

$$P_{n,\alpha,\beta}(1;x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = 1$$

elde edilir.

$f(t) = t$ fonksiyonu için $P_{n,\alpha,\beta}$ operatörünün lineerliğinden

$$\begin{aligned}
P_{n,\alpha,\beta}(t;x) &= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \frac{1}{n+\beta}\left\{\sum_{k=0}^{n} k\frac{n!}{k!(n-k)!}x^k (1-x)^{n-k} + \alpha\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k}\right\} \\
&= \frac{1}{n+\beta}\left\{nx\sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}x^{k-1} (1-x)^{n-k} + \alpha\right\} \\
&= \frac{1}{n+\beta}\left\{nx\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k x^k (1-x)^{n-1-k} + \alpha\right\} \\
&= \frac{n}{n+\beta}x + \frac{\alpha}{n+\beta}
\end{aligned}$$

bulunur.

$f(t) = t^2$ fonksiyonu için $P_{n,\alpha,\beta}$ operatörünün lineerliğinden

$$\begin{aligned}
P_{n,\alpha,\beta}(t^2;x) &= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}\right)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \frac{1}{(n+\beta)^2}\left\{\sum_{k=0}^{n} k^2\frac{n!}{k!(n-k)!}x^k (1-x)^{n-k}\right. \\
&\quad \left. +2\alpha\sum_{k=0}^{n} kC_n^k x^k (1-x)^{n-k} + \alpha^2\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k}\right\} \\
&= \frac{1}{(n+\beta)^2}\left\{n\sum_{k=1}^{n} (k-1+1)\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}x^k (1-x)^{n-k}\right. \\
&\quad \left. +2n\alpha\sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}x^k (1-x)^{n-k} + \alpha^2\right\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
P_{n,\alpha,\beta}(t^2;x) &= \frac{1}{(n+\beta)^2}\left\{n\sum_{k=1}^{n}(k-1)\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}x^k(1-x)^{n-k}\right.\\
&\quad+n\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}x^k(1-x)^{n-k}\\
&\quad\left.+2n\alpha x\sum_{k=0}^{n-1}C_{n-1}^{k}x^k(1-x)^{n-1-k}+\alpha^2\right\}\\
&= \frac{1}{(n+\beta)^2}\left\{n(n-1)x^2\sum_{k=2}^{n}\frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!}x^{k-2}(1-x)^{n-k}\right.\\
&\quad\left.+nx\sum_{k=0}^{n-1}C_{n-1}^{k}x^k(1-x)^{n-1-k}+2n\alpha x+\alpha^2\right\}\\
&= \frac{1}{(n+\beta)^2}\left\{n(n-1)x^2\sum_{k=0}^{n-2}C_{n-2}^{k}x^k(1-x)^{n-2-k}+nx+2n\alpha x+\alpha^2\right\}\\
&= \frac{1}{(n+\beta)^2}\left\{n(n-1)x^2+(1+2\alpha)nx+\alpha^2\right\}
\end{aligned}
$$

elde edilir.

$f(t)=(t-x)^2$ fonksiyonu için $P_{n,\alpha,\beta}$ operatörünün lineerliği ve yukarıda elde edilen eşitlikler yardımıyla

$$
\begin{aligned}
P_{n,\alpha,\beta}((t-x)^2;x) &= \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}-x\right)^2C_n^kx^k(1-x)^{n-k}\\
&= \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}\right)^2C_n^kx^k(1-x)^{n-k}\\
&\quad-2x\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}\right)C_n^kx^k(1-x)^{n-k}\\
&\quad+x^2\sum_{k=0}^{n}C_n^kx^k(1-x)^{n-k}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P_{n,\alpha,\beta}((t-x)^2\,;x) &= \frac{1}{(n+\beta)^2}\left\{n\,(n-1)\,x^2+(1+2\alpha)\,nx+\alpha^2\right\} \\
&\quad -2x\left\{\frac{n}{n+\beta}x+\frac{\alpha}{n+\beta}\right\}+x^2 \\
&= \frac{1}{(n+\beta)^2}\left\{n(n-1)x+2\alpha nx+nx+\alpha^2-2n^2x^2\right. \\
&\quad \left.-2\beta nx^2-2\alpha nx-2\alpha\beta x+n^2x^2+2n\beta x^2+\beta^2x^2\right\} \\
&= \frac{1}{(n+\beta)^2}\left\{nx\,(1-x)+(\beta x-\alpha)^2\right\}
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Korovkin teoremi yardımıyla Bernstein-Stancu operatör dizisinin yakınsaklığı aşağıdaki teoremde gösterilmiştir.

Teorem 3.1.1 f , $[0,1]$ aralığında sürekli bir fonksiyon ise

$$\lim_{n\to\infty}\|P_{n,\alpha,\beta}f-f\|_{C[0,1]}=0$$

gerçeklenir.

İspat. Korovkin teoreminin kullanılabilmesi için

$$\lim_{n\to\infty}\|P_{n,\alpha,\beta}(t^\nu;x)-x^\nu\|_{C[0,1]}=0 \quad , \quad \nu=0,1,2 \tag{3.1.6}$$

olduğu gösterilmelidir. Diğer taraftan $C[0,1]$ uzayındaki normun

$$\|P_{n,\alpha,\beta}f-f\|_{C[0,1]}=\max_{x\in[0,1]}|P_{n,\alpha,\beta}(f;x)-f(x)|$$

şeklinde tanımlı olduğu biliniyor.

$\nu = 0$ için (3.1.2) eşitliğinden

$$\lim_{n\to\infty} \max_{0\leq x\leq 1} |P_{n,\alpha,\beta}(1;x) - 1| = 0$$

olduğu açıktır.

$\nu = 1$ için (3.1.3) eşitliği ve üçgen eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \max_{0\leq x\leq 1} |P_{n,\alpha,\beta}(t;x) - x| &= \lim_{n\to\infty} \max_{0\leq x\leq 1} \left| \frac{n}{n+\beta}x + \frac{\alpha}{n+\beta} - x \right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \max_{0\leq x\leq 1} \left| \frac{-\beta}{n+\beta}x + \frac{\alpha}{n+\beta} \right| \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \max_{0\leq x\leq 1} \left\{ \left| \frac{-\beta}{n+\beta} \right| x + \left| \frac{\alpha}{n+\beta} \right| \right\} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha+\beta}{n+\beta} \\
&= 0
\end{aligned}$$

elde edilir. $\nu = 2$ için (3.1.4) eşitliği ve üçgen eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \max_{0\leq x\leq 1} |P_{n,\alpha,\beta}(t^2;x) - x^2| \\
&= \lim_{n\to\infty} \max_{0\leq x\leq 1} \left| \tfrac{1}{(n+\beta)^2} \left\{ n(n-1)x^2 + (1+2\alpha)nx + \alpha^2 \right\} - x^2 \right| \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{(n+\beta)^2} \left\{ \max_{0\leq x\leq 1} \left(\left| -\left(n + 2n\beta + \beta^2\right) \right| x^2 + |1+2\alpha| nx + |\alpha^2| \right) \right\} \\
&= \lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{(n+\beta)^2} \left\{ \max_{0\leq x\leq 1} \left[\left(n + 2n\beta + \beta^2\right) x^2 + (1+2\alpha) nx + \alpha^2 \right] \right\} \\
&= \lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{(n+\beta)^2} \left\{ \left(n + 2n\beta + \beta^2\right) + (1+2\alpha) n + \alpha^2 \right\} \\
&= 0
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde (3.1.6) eşitliği sağlanır. Böylece Korovkin teoreminden $[0,1]$ aralığında sürekli her f fonksiyonu için

$$\lim_{n\to\infty} \|P_{n,\alpha,\beta} f - f\|_{C[0,1]} = 0$$

gerçeklenir.

$f \in C[a,b]$ fonksiyonu için tanımlanan süreklilik modülü yardımıyla Bernstein-Stancu operatörünün yaklaşım hızı aşağıdaki teoremde verilmiştir.

Teorem 3.1.2 Her $f \in C[0,1]$ ve $x \in [0,1]$ için Bernstein-Stancu polinomu

$$|P_{n,\alpha,\beta}(f;x) - f(x)|$$

$$\leq \begin{cases} \frac{3}{2}\omega\left(f;(n+4\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}\right) & ; \quad \alpha \in \left[0,\frac{1}{4}\right] \text{ ve } \beta \in [\alpha, 2\alpha] \\ & \quad\quad veya \\ & \quad \alpha \in \left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right] \text{ ve } \beta \in [4\alpha^2, 2\alpha] \\ \left(1+\frac{4\alpha^2+1}{2\beta+2}\right)\omega\left(f;(n+4\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}\right) & ; \quad \alpha \in \left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right] \text{ ve } \beta \in [\alpha, 4\alpha^2] \\ & \quad\quad veya \\ & \quad \frac{1}{2} \leq \alpha \leq \beta \leq 2\alpha \\ \frac{3}{2}\omega\left(f;\left(n+4(\beta-\alpha)^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right) & ; \quad \alpha \in \left[\beta-\frac{\sqrt{\beta}}{2},\ \frac{\beta}{2}\right] \text{ ve } \beta \in \left[\frac{1}{4},1\right] \\ \left(1+\frac{4\alpha^2+1}{2\beta+2}\right)\omega\left(f;\left(n+4(\beta-\alpha)^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right) & ; \quad \alpha \leq \frac{\beta}{2} \text{ ve } \beta \geq 1 \end{cases}$$

eşitsizliğini sağlar.

İspat. (2.3.1) eşitsizliği ve ardından (3.1.5) eşitliği dikkate alınıp sağ taraftaki ifade büyütülürse

$$
\begin{aligned}
&\left|P_{n,\alpha,\beta}(f;x) - f(x)\right| \\
&\leq \left\{1 + \delta^{-1}\sqrt{P_{n,\alpha,\beta}((t-x)^2\,;x)}\right\}\omega\left(f,\delta\right) \\
&= \left\{1 + \delta^{-1}\frac{1}{(n+\beta)}\sqrt{\left\{nx\left(1-x\right) + \left(\beta x - \alpha\right)^2\right\}}\right\}\omega\left(f,\delta\right) \\
&\leq \left\{1 + \delta^{-1}\frac{1}{(n+\beta)}\sqrt{\left\{\left[\max_{x\in[0,1]} nx\left(1-x\right)\right] + \max_{x\in[0,1]}\left(\beta x - \alpha\right)^2\right\}}\right\}\omega\left(f,\delta\right) \qquad (3.1.7)
\end{aligned}
$$

eşitsizliği elde edilir.

Şimdi bu eşitsizliği irdeleyelim. $g(x) := x(1-x)$ eşitliği ile g fonksiyonu tanımlansın. $g'\left(x\right) = 1-2x$ olduğundan $x = \frac{1}{2}$, g fonksiyonunun kritik noktasıdır. Diğer taraftan $g''(x) = -2 < 0$ olduğundan $\max\limits_{x\in[0,1]} g\left(x\right) = g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$ bulunur. Dolayısıyla (3.1.7) eşitsizliği

$$
\left|P_{n,\alpha,\beta}(f;x) - f(x)\right| \leq \left\{1 + \delta^{-1}\tfrac{1}{(n+\beta)}\sqrt{\left\{\tfrac{n}{4} + \max_{x\in[0,1]}\left(\beta x - \alpha\right)^2\right\}}\right\}\omega\left(f,\delta\right) \qquad (3.1.8)
$$

şeklinde yazılabilir.

$h(x) := \left(\beta x - \alpha\right)^2$ eşitliği ile h fonksiyonu tanımlansın. $h''\left(x\right) = 2\beta^2 > 0$ olduğundan h fonksiyonu maksimum değerini kritik noktasında değil, aralığın uç noktalarından birinde alır. Yani

$$
\begin{aligned}
\max_{x\in[0,1]} h(x) &= \max_{x\in[0,1]}\left(\beta x - \alpha\right)^2 \\
&= \max\left\{\alpha^2,\ \left(\beta - \alpha\right)^2\right\}
\end{aligned}
$$

bulunur.

Burada iki durum söz konusudur:

1. Durum : $\max\limits_{x\in[0,1]} (\beta x-\alpha)^2 = \alpha^2$ olsun. Bu durumda $\alpha^2 \geq (\beta-\alpha)^2$ olacağından

$$2\alpha \geq \beta \tag{3.1.9}$$

elde edilir. Diğer taraftan $\max\limits_{x\in[0,1]} (\beta x-\alpha)^2 = \alpha^2$ olduğundan (3.1.8) eşitsizliği

$$|P_{n,\alpha,\beta}(f;x)-f(x)| \leq \left\{1+\delta^{-1}\frac{1}{2(n+\beta)}\sqrt{n+4\alpha^2}\right\}\omega(f,\delta) \tag{3.1.10}$$

olarak elde edilir. (3.1.10) eşitsizliğinden

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{n+4\alpha^2}}$$

$$|P_{n,\alpha,\beta}(f;x)-f(x)| \leq \left\{1+\frac{1}{2}\left(\frac{n+4\alpha^2}{n+\beta}\right)\right\}\omega\left(f,\frac{1}{\sqrt{n+4\alpha^2}}\right) \tag{3.1.11}$$

elde edilir. Burada

$$a_n := \frac{n+4\alpha^2}{n+\beta}$$

dizisi tanımlansın.

$$a_{n+1}-a_n = \frac{\beta-4\alpha^2}{(n+\beta)(n+\beta+1)}$$

olduğundan burada $\beta-4\alpha^2 \geq 0$ ve $\beta-4\alpha^2 < 0$ olmak üzere iki durum söz konusudur.

(a) $\beta-4\alpha^2 \geq 0$ olsun. Bu durumda $\beta \geq 4\alpha^2$ olacağından

$$a_n = \frac{n+4\alpha^2}{n+\beta} \leq 1 \quad , \quad n=1,2,...$$

bulunur ve bu eşitsizlik (3.1.11) ifadesinde dikkate alınırsa

$$|P_{n,\alpha,\beta}(f;x)-f(x)| \leq \frac{3}{2}\omega\left(f,\frac{1}{\sqrt{n+4\alpha^2}}\right) \tag{3.1.12}$$

elde edilir.

Şimdi de (3.1.12) eşitsizliğinin α ve β sabitlerinin hangi seçimlerinde gerçekleneceğini inceleyelim. (a) şıkkında $\beta \geq 4\alpha^2$ olması durumu ele alınmıştır ve Bernstein-Stancu operatörünün tanımından $0 \leq \alpha \leq \beta$ olduğu bilinmektedir. Bu durumda $\alpha \geq 4\alpha^2$ ve $\alpha < 4\alpha^2$ olmak üzere iki durum söz konusudur.

(i) $\alpha \geq 4\alpha^2$ olsun. $P_{n,\alpha,\beta}$ polinomunun tanımından $0 \leq \alpha \leq \beta$, (3.1.9) ifadesinden $\beta \leq 2\alpha$ ve (a) şıkkındaki seçimimizden dolayı $\beta \geq 4\alpha^2$ olduğu biliniyor. Bu eşitsizlikler beraber gözönüne alınıp $\alpha \geq 4\alpha^2$ olması durumu incelenecek olursa

$$\begin{aligned} 4\alpha^2 &\leq \alpha \leq 2\alpha \\ \alpha &\leq \beta \leq 2\alpha \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\alpha \in \left[0, \frac{1}{4}\right] \text{ ve } \beta \in [\alpha, 2\alpha]$$

bulunur.

(ii) $\alpha < 4\alpha^2$ olsun. $P_{n,\alpha,\beta}$ polinomunun tanımından $0 \leq \alpha \leq \beta$, (3.1.9) ifadesinden $\beta \leq 2\alpha$ ve (a) şıkkındaki seçimimizden dolayı $\beta \geq 4\alpha^2$ olduğu biliniyor. Bu eşitsizlikler beraber gözönüne alınıp $\alpha < 4\alpha^2$ olması durumu incelenecek olursa

$$\alpha \leq 4\alpha^2 \leq 2\alpha \text{ ve } 4\alpha^2 \leq \beta \leq 2\alpha$$

elde edilir. Buradan

$$\alpha \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right] \text{ ve } \beta \in \left[4\alpha^2, 2\alpha\right]$$

bulunur.

(b) $\beta - 4\alpha^2 \leq 0$ olsun. Bu durumda $a_{n+1} - a_n < 0$ $(n = 1, 2, ...)$ olacağından a_n dizisi azalandır. Yani

$$a_n \leq a_1 = \frac{4\alpha^2 + 1}{\beta + 1} \quad , \quad n = 1, 2, ...$$

yazılabilir ve bu eşitsizlik (3.1.11) eşitsizliğinde dikkate alınırsa

$$|P_{n,\alpha,\beta}(f;x)-f(x)| \leq \left\{1+\frac{4\alpha^2+1}{2(\beta+1)}\right\}\omega\left(f,\frac{1}{\sqrt{n+4\alpha^2}}\right) \tag{3.1.13}$$

elde edilir.

Şimdi de (3.1.13) eşitsizliğinin α ve β sabitlerinin hangi seçimlerinde gerçekleneceğini inceleyelim. (b) şıkkında $\beta \leq 4\alpha^2$ olması durumu ele alınmıştır ve (3.1.9) ifadesinden $2\alpha \geq \beta$ olduğu bilinmektedir. Bu durumda $2\alpha \geq 4\alpha^2$ ve $2\alpha < 4\alpha^2$ olmak üzere iki durum söz konusudur.

(i) $2\alpha \geq 4\alpha^2$ olsun. $P_{n,\alpha,\beta}$ polinomunun tanımından $0 \leq \alpha \leq \beta$, (3.1.9) ifadesinden $\beta \leq 2\alpha$ ve (b) şıkkındaki seçimimizden dolayı $\beta \leq 4\alpha^2$ olduğu biliniyor. Bu eşitsizlikleri beraber gözönüne alırsak

$$\alpha \leq 4\alpha^2 \leq 2\alpha \quad \text{ve} \quad \alpha \leq \beta \leq 4\alpha^2$$

elde edilir. Buradan

$$\alpha \in \left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right] \quad \text{ve} \quad \beta \in \left[\alpha, 4\alpha^2\right]$$

bulunur.

(ii) $2\alpha \leq 4\alpha^2$ olsun. $P_{n,\alpha,\beta}$ polinomunun tanımından $0 \leq \alpha \leq \beta$, (3.1.9) ifadesinden $\beta \leq 2\alpha$ ve (b) şıkkındaki seçimimizden dolayı $\beta \leq 4\alpha^2$ olduğu biliniyor. Bu eşitsizlikleri beraber gözönüne alırsak

$$0 \leq 2\alpha \leq 4\alpha^2 \quad \text{ve} \quad \alpha \leq \beta \leq 2\alpha$$

elde edilir. Buradan

$$\alpha \geq \frac{1}{2} \quad \text{ve} \quad \beta \in [\alpha, 2\alpha]$$

bulunur.

2. Durum : $\max\limits_{x\in[0,1]} (\beta x-\alpha)^2 = (\beta-\alpha)^2$ olsun. Bu durumda $(\beta-\alpha)^2 \geq \alpha^2$ olacağından

$$\beta \geq 2\alpha \tag{3.1.14}$$

elde edilir. Diğer taraftan $\max\limits_{x\in[0,1]} (\beta x-\alpha)^2 = (\beta-\alpha)^2$ olduğundan (3.1.8) eşitsizliği

$$|P_{n,\alpha,\beta}(f;x)-f(x)| \leq \left\{1+\delta^{-1}\frac{1}{2(n+\beta)}\sqrt{\left\{n+4(\beta-\alpha)^2\right\}}\right\}\omega(f,\delta) \tag{3.1.15}$$

olarak elde edilir. (3.1.15) eşitsizliğinden

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{n+4(\beta-\alpha)^2}}$$

$$|P_{n,\alpha,\beta}(f;x)-f(x)| \leq \left\{1+\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{n+4(\beta-\alpha)^2}{n+\beta}\right)\right\}\omega\left(f,\tfrac{1}{\sqrt{n+4(\beta-\alpha)^2}}\right) \tag{3.1.16}$$

elde edilir. Burada

$$b_n := \frac{n+4(\beta-\alpha)^2}{n+\beta}$$

dizisi tanımlansın.

$$b_{n+1}-b_n = \frac{\beta-4(\beta-\alpha)^2}{(n+\beta)(n+\beta+1)}$$

olduğundan burada iki durum söz konusudur.

(a) $\beta-4(\beta-\alpha)^2 \geq 0$ olsun. Bu durumda $\beta \geq 4(\beta-\alpha)^2$ olacağından

$$b_n = \frac{n+4(\beta-\alpha)^2}{n+\beta} \leq 1 \quad , \quad n=1,2,...$$

bulunur ve bu eşitsizlik (3.1.16) ifadesinde dikkate alınırsa

$$|P_{n,\alpha,\beta}(f;x)-f(x)| \leq \tfrac{3}{2}\omega\left(f,\tfrac{1}{\sqrt{n+4(\beta-\alpha)^2}}\right) \tag{3.1.17}$$

elde edilir.

Şimdi de (3.1.17) eşitsizliğinin α ve β sabitlerinin hangi seçimlerinde gerçeklenebileceğini inceleyelim. Burada $\beta \geq 4(\beta-\alpha)^2$ olduğundan $\alpha \geq \beta - \frac{\sqrt{\beta}}{2}$ elde edilir. $P_{n,\alpha,\beta}$ polinomunun tanımından $0 \leq \alpha \leq \beta$ ve (3.1.14) ifadesinden $\beta \geq 2\alpha$ olduğu biliniyor. Bu eşitsizlikler beraber gözönüne alınırsa

$$0 \leq \beta - \frac{\sqrt{\beta}}{2} \leq \alpha \leq 2\alpha \leq \beta$$

elde edilir. Burada $\beta - \frac{\sqrt{\beta}}{2} \leq \frac{\beta}{2}$ olduğundan $\beta \leq 1$ ve $\beta - \frac{\sqrt{\beta}}{2} \geq 0$ olduğundan $\beta \geq \frac{1}{4}$ elde edilir. Sonuç olarak (3.1.17) eşitsizliği

$$\alpha \in \left[\beta - \frac{\sqrt{\beta}}{2}, \frac{\beta}{2}\right] \text{ ve } \beta \in \left[\frac{1}{4}, 1\right]$$

için gerçeklenir.

(b) $\beta - 4(\beta-\alpha)^2 \leq 0$ olsun. Bu durumda $b_{n+1} - b_n < 0$ $(n = 1, 2, ...)$ olacağından b_n dizisi azalandır. Bu durumda

$$b_n \leq b_1 = \frac{4(\beta-\alpha)^2+1}{\beta+1} \quad , \quad n = 1, 2, ...$$

yazılabilir ve bu eşitsizlik ve (3.1.16) eşitsizliğinde gözönüne alınırsa

$$|P_{n,\alpha,\beta}(f;x) - f(x)| \leq \left\{1 + \frac{4(\beta-\alpha)^2+1}{2(\beta+1)}\right\} \omega\left(f, \frac{1}{\sqrt{n+4(\beta-\alpha)^2}}\right) \tag{3.1.18}$$

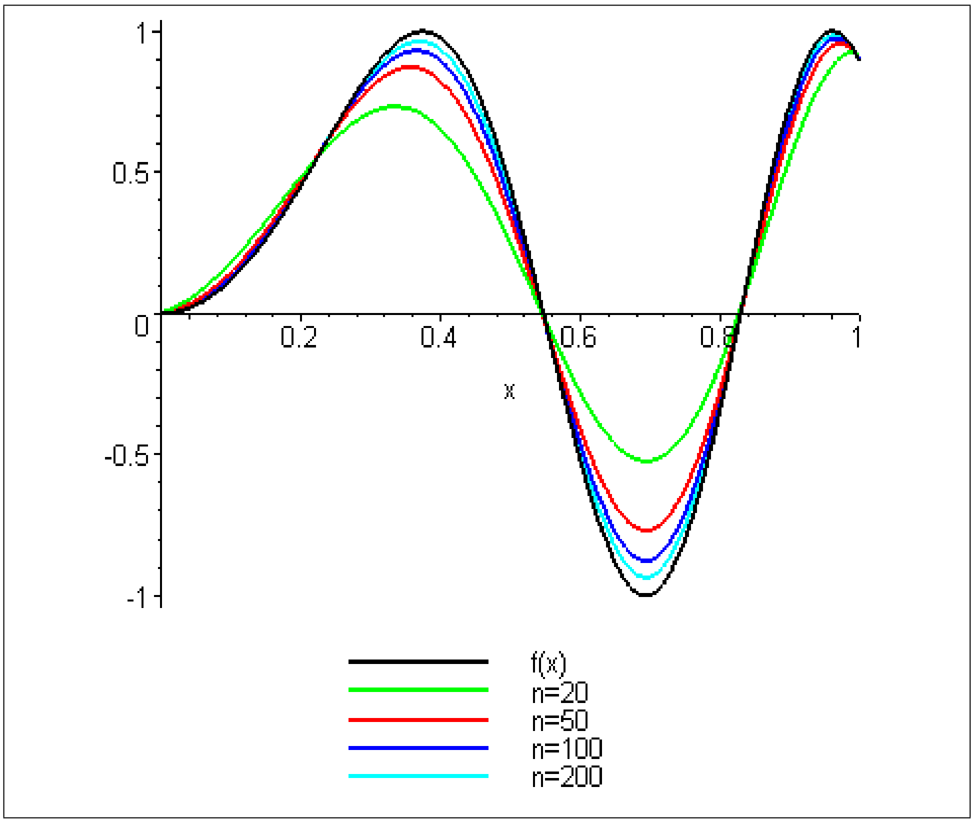
elde edilir.

Şimdi de (3.1.18) eşitsizliğinin α ve β sabitlerinin hangi seçimlerinde gerçeklenebileceğini inceleyelim. Burada $\beta \leq 4(\beta-\alpha)^2$ olduğundan $\alpha \leq \beta - \frac{\sqrt{\beta}}{2}$ bulunur. (3.1.14) ifadesinden $\beta \geq 2\alpha$ yani $\alpha \leq \frac{\beta}{2}$ ve $\frac{\beta}{2} \leq \beta - \frac{\sqrt{\beta}}{2}$ olduğu bilinmektedir. Bu eşitsizlikler beraber gözönüne alınırsa $\beta \geq 1$ elde edilir. Sonuç olarak (3.1.18) eşitsizliği

$$\alpha \leq \frac{\beta}{2} \text{ ve } \beta \geq 1$$

için gerçeklenir.

Örnek 3.1.1 $f(x) = \sin(12(\ln x^2 + 1))$ eşitliği ile tanımlı f fonksiyonuna $P_{n,\alpha,\beta}(f;x)$ polinomlar dizisi ile yaklaşım, $\alpha = 0.2$, $\beta = 0.3$ olmak üzere n=20, 50, 100, 200 için şekil 3.1' de gösterilmiştir.



Şekil 3.1 $P_{n,\alpha,\beta}(f;x)$polinomlar dizisi ile f fonksiyonuna yaklaşım

Örnek 3.1.2 $\alpha = \frac{1}{8}$ ve $\beta = \frac{1}{6}$ için $f(x) = \sin(\pi x)$ eşitliği ile tanımlı f fonksiyonuna $P_{n,\alpha,\beta}(f;x)$ polinomlarıyla yaklaşılırken, süreklilik modülü yardımıyla elde edilen hata değerleri çizelge 3.1' de verilmiştir.

Bu örnekte hata değerleri Teorem 3.1.2 yardımıyla hesaplanmıştır.

Çizelge 3.1 $f(x) = \sin(\pi x)$ fonksiyonuna $P_{n,\alpha,\beta}(f;x)$ polinomlar dizisi ile yaklaşıldığında elde edilen hata değerleri

n	Süreklilik modülüne göre hata değerleri
10	1.254342373
10^2	0.4633855004
10^3	0.1487691851
10^4	0.04711599142
10^5	0.01490163261
10^6	0.004712381082
10^7	0.001490187990
10^8	0.0004712388900
10^9	0.0001490188237
10^{10}	0.00004712388980

3.2 İki Değişkenli Bernstein-Stancu Polinomu

Büyükyazıcı ve İbikli (2004) tarafından iki değişkenli Bernstein-Stancu polinomu aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

Tanım 3.2.1 (3.1.1) ile tanımlı Bernstein-Stancu polinomu iki değişken halinde $[0,1] \times [0,1]$ bölgesinde x değişkenine göre n - inci ve y değişkenine göre m - inci dereceden olmak üzere

$$B_{n,m}^{\alpha_k,\beta_k}(f;\ x,y) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} f\left(\frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1},\ \frac{j+\alpha_2}{m+\beta_2}\right) p_{n,k}(x) q_{m,j}(y) \tag{3.2.1}$$

şeklinde tanımlanabilir. Burada

$$\begin{aligned} p_{n,k}(x) &= C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \\ q_{m,j}(y) &= C_m^j y^j (1-y)^{m-j} \end{aligned}$$

eşitlikleriyle tanımlı fonksiyonlar ve $\alpha_k,\ \beta_k,\ \ (k=1,2)$ ise

$$0 \leq \alpha_k \leq \beta_k$$

koşullarını sağlayan pozitif sayılardır. $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = 0$ için 1989 yılında Martinez tarafından $[0,1]\times[0,1]$ karesel bölgesinde tanımlanan iki değişkenli Bernstein polinomu elde edilir.

İki değişkenli Bernstein-Stancu operatörünün lineer ve pozitif olduğu açıktır.

Lemma 3.2.1 $n,\ m \in \mathbb{N}$ ve $B_{n,m}^{\alpha_k,\beta_k}(f;x,y)$, $[0,1]\times[0,1]$ bölgesi üzerinde (3.2.1) ile tanımlı iki değişkenli Bernstein-Stancu polinomu olmak üzere

$$B_{n,m}^{\alpha_k,\beta_k}(1;\ x,y) = 1 \tag{3.2.2}$$

$$B_{n,m}^{\alpha_k,\beta_k}(t;x,y) = \frac{n}{n+\beta_1}x + \frac{\alpha_1}{n+\beta_1} \tag{3.2.3}$$

$$B_{n,m}^{\alpha_k,\beta_k}(\tau;x,y) = \frac{m}{m+\beta_2}x + \frac{\alpha_2}{m+\beta_2} \tag{3.2.4}$$

$$\begin{aligned} B_{n,m}^{\alpha_k,\beta_k}\left(t^2+\tau^2;x,y\right) &= \left(\frac{n}{n+\beta_1}\right)^2\left(\frac{n-1}{n}\right)x^2 + (1+2\alpha_1)\frac{n}{(n+\beta_1)^2}x \\ &+\frac{\alpha_1^2}{(n+\beta_1)^2} + \left(\frac{m}{m+\beta_2}\right)^2\left(\frac{m-1}{m}\right)y^2 \\ &+ (1+2\alpha_2)\frac{m}{(m+\beta_2)^2}y + \frac{\alpha_2^2}{(m+\beta_2)^2} \end{aligned} \tag{3.2.5}$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat. $g(t,\tau) = 1$ fonksiyonu için Binom formülünden

$$B_{n,m}^{\alpha_k,\beta_k}(1\ ;\ x,y) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} p_{n,k}(x)q_{m,j}(y) = \sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(x)\sum_{j=0}^{m} q_{m,j}(y) = 1$$

elde edilir.

$g(t,\tau)=t$ fonksiyonu için $B_{n,m}^{\alpha_k,\beta_k}$ operatörünün lineerliğinden

$$B_{n,m}^{\alpha_k,\beta_k}(t\ ;\ x,y)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left(\tfrac{k+\alpha_1}{n+\beta_1}\right)p_{n,k}(x)q_{m,j}(y)$$

$$=\tfrac{1}{n+\beta_1}\left\{\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}kp_{n,k}(x)q_{m,j}(y)\ +\alpha_1\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}p_{n,k}(x)q_{m,j}(y)\right\}$$

$$=\tfrac{1}{n+\beta_1}\left\{\sum_{k=0}^{n}kp_{n,k}(x)\sum_{j=0}^{m}q_{m,j}(y)+\alpha_1\right\}$$

$$=\tfrac{1}{n+\beta_1}\left\{\sum_{k=0}^{n}kp_{n,k}(x)+\alpha_1\right\}$$

$$=\tfrac{1}{n+\beta_1}\left\{\sum_{k=0}^{n}k\tfrac{n!}{k!(n-k)!}x^k(1-x)^{n-k}+\alpha_1\right\}$$

$$=\tfrac{1}{n+\beta_1}\left\{n\sum_{k=0}^{n}\tfrac{k}{n}\tfrac{n!}{k!(n-k)!}x^k(1-x)^{n-k}+\alpha_1\right\}$$

$$=\tfrac{1}{n+\sigma_1}\left\{nx\sum_{k=1}^{n}\tfrac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}x^{k-1}(1-x)^{n-k}+\alpha_1\right\}$$

$$=\tfrac{1}{n+\beta_1}\left\{nx\sum_{k=0}^{n-1}C_{n-1}^{k}x^k(1-x)^{n-1-k}+\gamma_1\right\}$$

$$=\tfrac{n}{n+\beta_1}x+\tfrac{\alpha_1}{n+\beta_1}$$

elde edilir. $g(t,\tau)=\tau$ fonksiyonu için benzer işlemler yapılarak,

$$\begin{aligned}B_{n,m}^{\alpha_k,\beta_k}(\tau\ ;\ x,y) &= \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left(\frac{j+\alpha_2}{m+\beta_2}\right)p_{n,k}(x)q_{m,j}(y)\\ &= \frac{1}{m+\beta_2}\left\{\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}jp_{n,k}(x)q_{m,j}(y)+\alpha_2\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}p_{n,k}(x)q_{m,j}(y)\right\}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
B_{n,m}^{\alpha_k,\beta_k}(\tau\ ;\ x,y) &= \frac{1}{m+\sigma_2}\left\{\sum_{i=0}^{n} p_{n,k}(x)\sum_{j=0}^{m} jq_{m,j}(y)+\alpha_2\right\} \\
&= \frac{m}{m+\beta_2}y+\frac{\alpha_2}{m+\beta_2}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Son olarak da $g(t,\tau)=t^2+\tau^2$ fonksiyonu için $B_{n,m}^{\alpha_k,\beta_k}$ operatörünün lineerliğinden

$$
\begin{aligned}
& B_{n,m}^{\alpha_k,\beta_k}(t^2+\tau^2;x,y) \\
&= \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left[\left(\tfrac{k+\alpha_1}{n+\beta_1}\right)^2+\left(\tfrac{j+\alpha_2}{m+\beta_2}\right)^2\right]p_{n,k}(x)q_{m,j}(y) \\
&= \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left(\tfrac{k+\alpha_1}{n+\beta_1}\right)^2 p_{n,k}(x)q_{m,j}(y)+\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left(\tfrac{j+\alpha_2}{m+\beta_2}\right)^2 p_{n,k}(x)q_{m,j}(y) \\
&= \sum_{k=0}^{n}\left(\tfrac{k+\alpha_1}{n+\beta_1}\right)^2 p_{n,k}(x)\sum_{j=0}^{m}q_{m,j}(y)+\sum_{j=0}^{m}\left(\tfrac{j+\alpha_2}{m+\beta_2}\right)^2 q_{m,j}(y)\sum_{k=0}^{n}p_{n,k}(x) \\
&= \sum_{k=0}^{n}\left(\tfrac{k+\alpha_1}{n+\beta_1}\right)^2 p_{n,k}(x)+\sum_{j=0}^{m}\left(\tfrac{j+\alpha_2}{m+\beta_2}\right)^2 q_{m,j}(y)
\end{aligned} \tag{3.2.6}
$$

elde edilir. Şimdi bu iki toplamı hesaplayalım. $B_{n,m}^{\alpha_k,\beta_k}$ operatörünün lineerliğinden ve yukarıdaki benzer eşitliklerden faydalanılarak

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1}\right)^2 p_{n,k}(x) \\
&= \frac{1}{(n+\beta_1)^2}\left\{\sum_{k=0}^{n}k^2 p_{n,k}(x)+2\alpha_1\sum_{k=0}^{n}kp_{n,k}(x)+\alpha_1^2\sum_{k=0}^{n}p_{n,k}(x)\right\} \\
&= \frac{1}{(n+\beta_1)^2}\left\{\sum_{k=0}^{n}k^2 C_n^k x^k(1-x)^{n-k}+2n\alpha_1 x+\alpha_1^2\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \frac{1}{(n+\beta_1)^2}\left\{ n\sum_{k=0}^{n}\frac{k^2}{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}x^k(1-x)^{n-k}+2n\alpha_1 x+\alpha_1^2\right\} \\
&= \frac{1}{(n+\beta_1)^2}\left\{ n\sum_{k=1}^{n}(k-1+1)\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}x^k(1-x)^{n-k}+2n\alpha_1 x+\alpha_1^2\right\} \\
&= \frac{1}{(n+\beta_1)^2}\left\{ n\sum_{k=1}^{n}(k-1)\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}x^k(1-x)^{n-k}\right. \\
&\quad \left. +n\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}x^k(1-x)^{n-k}+2n\alpha_1 x+\alpha_1^2\right\} \\
&= \frac{1}{(n+\beta_1)^2}\left\{ n(n-1)x^2\sum_{k=2}^{n}\frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!}x^{k-2}(1-x)^{n-k}\right. \\
&\quad \left. +nx\sum_{i=0}^{n-1}C_{n-1}^{k}x^k(1-x)^{n-1-k}+2n\alpha_1 x+\alpha_1^2\right\} \\
&= \frac{1}{(n+\beta_1)^2}\left\{ n(n-1)x^2\sum_{k=0}^{n-2}C_{n-2}^{k}x^k(1-x)^{n-2-k}+nx+2n\alpha_1 x+\alpha_1^2\right\} \\
&= \left(\frac{n}{n+\beta_1}\right)^2\left(\frac{n-1}{n}\right)x^2+(1+2\alpha_1)\frac{n}{(n+\beta_1)^2}x+\frac{\alpha_1^2}{(n+\beta_1)^2}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$
I_2=\left(\frac{m}{m+\beta_2}\right)^2\left(\frac{m-1}{m}\right)y^2+(1+2\alpha_2)\frac{m}{(m+\beta_2)^2}y+\frac{\alpha_2^2}{(m+\beta_2)^2}
$$

bulunur. I_1 ve I_2 toplamları (3.2.6) eşitliğinde dikkate alınırlarsa istenilen elde edilir.

$\mathbb{R}^2$ de Korovkin teoreminden iki değişkenli Bernstein-Stancu operatör dizisinin yakınsaklığı aşağıdaki teoremde gösterilmiştir.

Teorem 3.2.1 f , $[0,1]\times[0,1]$ bölgesinde sürekli bir fonksiyon ise

$$
\lim_{n,m\to\infty}\left\| B_{n,m}^{\alpha_k,\beta_k}f-f\right\|_{C([0,1]\times[0,1])}=0
$$

gerçeklenir.

İspat. Bu teoremin ispatında Teorem 2.4.1 kullanılacağından öncelikle

$$\begin{aligned}
&\lim_{n,m\to\infty}\left\|B_{n,m}^{\alpha_k,\beta_k}(1;x,y)-1\right\|_{C([0,1]\times[0,1])}=0\\
&\lim_{n,m\to\infty}\left\|B_{n,m}^{\alpha_k,\beta_k}(t;x,y)-x\right\|_{C([0,1]\times[0,1])}=0\\
&\lim_{n,m\to\infty}\left\|B_{n,m}^{\alpha_k,\beta_k}(\tau;x,y)-y\right\|_{C([0,1]\times[0,1])}=0\\
&\lim_{n,m\to\infty}\left\|B_{n,m}^{\alpha_k,\beta_k}(t^2+\tau^2;x,y)-(x^2+y^2)\right\|_{C([0,1]\times[0,1])}=0
\end{aligned}\tag{3.2.7}$$

olduğu gösterilmelidir. Diğer taraftan $C([0,1]\times[0,1])$ uzayındaki normun

$$\left\|B_{n,m}^{\alpha_k,\beta_k}(f;x,y)-f(x,y)\right\|_{C[0,1]\times[0,1]}=\max_{0\le x,y\le 1}\left|B_{n,m}^{\alpha_k,\beta_k}(f;x,y)-f(x,y)\right|$$

şeklinde tanımlandığı biliniyor.

$g(t,\tau)=1$ fonksiyonu için (3.2.2) eşitliğinden

$$\lim_{n,m\to\infty}\left\{\max_{0\le x,y\le 1}\left|B_{n,m}^{\alpha_k,\beta_k}(1;\ x,y)-1\right|\right\}=0$$

olduğu açıktır.

$g(t,\tau)=t$ fonksiyonu için (3.2.3) eşitliği ve üçgen eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
\lim_{n,m\to\infty}\left\{\max_{0\le x,y\le 1}\left|B_{n,m}^{\alpha_k,\beta_k}(t;\ x,y)-x\right|\right\} &= \lim_{n\to\infty}\left\{\max_{0\le x,y\le 1}\left|\frac{n}{n+\beta_1}x+\frac{\alpha_1}{n+\beta_1}-x\right|\right\}\\
&= \lim_{n\to\infty}\left\{\max_{0\le x,y\le 1}\left|\frac{-\beta_1}{n+\beta_1}x+\frac{\alpha_1}{n+\beta_1}\right|\right\}\\
&\le \lim_{n\to\infty}\left\{\max_{0\le x\le 1}\left(\left|\frac{-\beta_1}{n+\beta_1}\right|x+\left|\frac{\alpha_1}{n+\beta_1}\right|\right)\right\}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_1+\beta_1}{n+\beta_1}\\
&= 0
\end{aligned}$$

bulunur.

$g(t,\tau)=\tau$ fonksiyonu için (3.2.4) eşitliği ve üçgen eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
\lim_{n,m\to\infty}\left\{\max_{0\le x,y\le 1}\left|B_{n,m}^{\alpha_k,\beta_k}(\tau;\ x,y)-y\right|\right\} &= \lim_{m\to\infty}\left\{\max_{0\le x,y\le 1}\left|\frac{m}{m+\beta_2}y+\frac{\alpha_2}{m+\beta_2}-y\right|\right\}\\
&= \lim_{m\to\infty}\left\{\max_{0\le y\le 1}\left|\frac{-\beta_2}{m+\beta_2}y+\frac{\alpha_2}{m+\beta_2}\right|\right\}\\
&\le \lim_{m\to\infty}\left\{\max_{0\le y\le 1}\left(\left|\frac{-\beta_2}{m+\beta_2}\right|y+\left|\frac{\alpha_2}{m+\beta_2}\right|\right)\right\}\\
&= \lim_{m\to\infty}\frac{\alpha_2+\beta_2}{m+\beta_2}\\
&= 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Son olarak $g(t,\tau)=t^2+\tau^2$ fonksiyonu için (3.2.5) eşitliği ve üçgen eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
&\lim_{n,m\to\infty}\left\{\max_{0\le x,y\le 1}\left|B_{n,m}^{\alpha_k,\beta_k}(t^2+\tau^2\ ;\ x,y)-(x^2+y^2)\right|\right\}\\
&=\lim_{n,m\to\infty}\left\{\max_{0\le x,y\le 1}\left|\left[\left(\tfrac{n}{n+\beta_1}\right)^2\left(\tfrac{n-1}{n}\right)-1\right]x^2+\left[\left(\tfrac{m}{m+\beta_2}\right)^2\left(\tfrac{m-1}{m}\right)-1\right]y^2\right.\right.\\
&\qquad\left.\left.+(1+2\alpha_1)\tfrac{n}{(n+\beta_1)^2}x+(1+2\alpha_2)\tfrac{m}{(m+\beta_2)^2}y+\tfrac{\alpha_1^2}{(n+\beta_1)^2}+\tfrac{\alpha_2^2}{(m+\beta_2)^2}\right|\right\}\\
&\le\lim_{n,m\to\infty}\left\{\left|\left(\tfrac{n}{n+\beta_1}\right)^2\left(\tfrac{n-1}{n}\right)-1\right|+\left|\left(\tfrac{m}{m+\beta_2}\right)^2\left(\tfrac{m-1}{m}\right)-1\right|\right.\\
&\qquad\left.+\left|(1+2\alpha_1)\tfrac{n}{(n+\beta_1)^2}\right|+\left|(1+2\alpha_2)\tfrac{m}{(m+\beta_2)^2}\right|+\left|\tfrac{\alpha_1^2}{(n+\beta_1)^2}+\tfrac{\alpha_2^2}{(m+\beta_2)^2}\right|\right\}\\
&=0
\end{aligned}$$

elde edilir.

Böylece Teorem 2.4.1' in hipotezleri gerçeklenir ve bu sayede $[0,1]\times[0,1]$ bölgesinde sürekli ve tüm $\mathbb{R}^2$ de sınırlı herhangi bir f fonksiyonu için

$$\lim_{n,m\to\infty}\left\|B_{n,m}^{\alpha_k,\beta_k}\,f-f\right\|_{C[0,1]\times[0,1]}=0$$

eşitliği sağlanır.

$f\in C([0,1]\times[0,1])$ fonksiyonunun tam ve kısmi süreklilik modülleri yardımıyla $B_{n,m}^{\alpha_k,\beta_k}$ iki değişkenli Bernstein-Stancu operatörünün yaklaşım hızı aşağıdaki teoremde verilmiştir.

Teorem 3.2.2 $f\in C([0,1]\times[0,1])$ olsun. Bu durumda

(i) $\left|B_{n,m}^{\alpha_k,\beta_k}(f;x,y)-f(x,y)\right|\leq\frac{3}{2}\left\{\omega^{(1)}\left(f;\frac{\sqrt{n+4\beta_1^2}}{n+\beta_1}\right)+\omega^{(2)}\left(f;\frac{\sqrt{m+4\beta_2^2}}{m+\beta_2}\right)\right\}$

(ii) $\left|B_{n,m}^{\alpha_k,\beta_k}(f;x,y)-f(x,y)\right|\leq\frac{3}{2}\omega\left(f;\sqrt{\frac{n+4\beta_1^2}{(n+\beta_1)^2}+\frac{m+4\beta_2^2}{(m+\beta_2)^2}}\right)$

eşitsizlikleri gerçeklenir.

İspat.
(i) $B_{n,m}^{\alpha_k,\beta_k}$ iki değişkenli Bernstein-Stancu operatörü için Lemma 2.2.2' den

$$\left|B_{n,m}^{\alpha_k,\beta_k}(f;x,y)-f(x,y)\right|$$

$$=\left|\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left[f\left(\frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1},\frac{j+\alpha_2}{m+\beta_2}\right)-f(x,y)\right]p_{n,k}(x)q_{m,j}(y)\right|$$

$$=\left|\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left[f\left(\frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1},\frac{j+\alpha_2}{m+\beta_2}\right)-f\left(\frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1},y\right)+f\left(\frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1},y\right)-f(x,y)\right]p_{n,k}(x)q_{m,j}(y)\right|$$

$$\leq\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left|f\left(\frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1},\frac{j+\alpha_2}{m+\beta_2}\right)-f\left(\frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1},y\right)+f\left(\frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1},y\right)-f(x,y)\right|p_{n,k}(x)q_{m,j}(y)$$

yazılabilir. Üçgen eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
&\left|B_{n,m}^{\alpha_k,\beta_k}(f;x,y)-f(x,y)\right| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left|f\left(\tfrac{k+\alpha_1}{n+\beta_1},\tfrac{j+\alpha_2}{m+\beta_2}\right)-f\left(\tfrac{k+\alpha_1}{n+\beta_1},y\right)\right|p_{n,k}(x)q_{m,j}(y) \\
&\quad+\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left|f\left(\tfrac{k+\alpha_1}{n+\beta_1},y\right)-f(x,y)\right|p_{n,k}(x)q_{m,j}(y) \\
&=I_1+I_2 \qquad (3.2.8)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Sırasıyla Lemma 2.4.2 (iii) ve Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
I_1 &= \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left|f\left(\frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1},\frac{j+\alpha_2}{m+\beta_2}\right)-f\left(\frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1},y\right)\right|p_{n,k}(x)q_{m,j}(y) \\
&\leq \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\omega^{(2)}\left(f;\left|\frac{j+\alpha_2}{m+\beta_2}-y\right|\right)p_{n,k}(x)q_{m,j}(y) \\
&= \sum_{j=0}^{m}\omega^{(2)}\left(f;\left|\frac{j+\alpha_2}{m+\beta_2}-y\right|\right)q_{m,j}(y) \\
&\leq \sum_{j=0}^{m}\omega^{(2)}\left(f;\delta_m\right)\left[1+\frac{\left|\frac{j+\alpha_2}{m+\beta_2}-y\right|}{\delta_m}\right]q_{m,j}(y) \\
&= \omega^{(2)}\left(f;\delta_m\right)\left\{\sum_{j=0}^{m}q_{m,j}(y)+\frac{1}{\delta_m}\sum_{j=0}^{m}\left|\frac{j+\alpha_2}{m+\beta_2}-y\right|q_{m,j}(y)\right\} \\
&= \omega^{(2)}\left(f;\delta_m\right)\left\{1+\frac{1}{\delta_m}\sum_{j=0}^{m}\left|\frac{j+\alpha_2}{m+\beta_2}-y\right|\sqrt{q_{m,j}(y)}\sqrt{q_{m,j}(y)}\right\} \\
&\leq \omega^{(2)}\left(f;\delta_m\right)\left\{1+\frac{1}{\delta_m}\sqrt{\sum_{j=0}^{m}\left|\frac{j+\alpha_2}{m+\beta_2}-y\right|^2q_{m,j}(y)}\right\} \qquad (3.2.9)
\end{aligned}$$

eşitsizliğine ulaşılır.

Operatörün lineerliği ve Lemma 3.2.1' in ispatında elde edilen eşitlikler gözönüne alınıp gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$\sum_{j=0}^{m}\left|\tfrac{j+\alpha_2}{m+\beta_2}-y\right|^2 q_{m,j}(y)$$

$$=\sum_{j=0}^{m}\left(\tfrac{j+\alpha_2}{m+\beta_2}\right)^2 q_{m,j}(y)-2y\sum_{j=0}^{m}\left(\tfrac{j+\alpha_2}{m+\beta_2}\right) q_{m,j}(y)+y^2\sum_{j=0}^{m} q_{m,j}(y)$$

$$=\left(\tfrac{m}{m+\beta_2}\right)^2\left(\tfrac{m-1}{m}\right)y^2+(1+2\alpha_2)\tfrac{m}{(m+\beta_2)^2}y+\tfrac{\alpha_2^2}{(m+\beta_2)^2}-2y\left[\tfrac{m}{m+\beta_2}y+\tfrac{\alpha_2}{m+\beta_2}\right]+y^2$$

$$=\tfrac{1}{(m+\beta_2)^2}\left\{(\beta_2 y-\alpha_2)^2+my(1-y)\right\} \tag{3.2.10}$$

elde edilir. (3.2.10) eşitliği (3.2.9) eşitsizliğinde gözönüne alınırsa

$$I_1\leq\omega^{(2)}(f;\delta_m)\left\{1+\frac{1}{\delta_m}\frac{1}{(m+\beta_2)}\sqrt{(\beta_2 y-\alpha_2)^2+my(1-y)}\right\}$$

elde edilir. Burada daha önceki hesaplamalarımızdaki gibi $y(1-y)\leq\frac{1}{4}$ olduğu dikkate alınırsa;

$$I_1\leq\omega^{(2)}(f;\delta_m)\left\{1+\frac{1}{2\delta_m}\frac{1}{(m+\beta_2)}\sqrt{4(\beta_2 y-\alpha_2)^2+m}\right\} \tag{3.2.11}$$

bulunur. Benzer şekilde I_2 için;

$$I_2\leq\omega^{(1)}(f;\delta_n)\left\{1+\frac{1}{2\delta_n}\frac{1}{(n+\beta_1)}\sqrt{4(\beta_1 x-\alpha_1)^2+n}\right\} \tag{3.2.12}$$

elde edilir. (3.2.11) ve (3.2.12) eşitsizlikleri (3.2.8) eşitsizliğinde gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned}\left|B_{n,m}^{\alpha_k,\beta_k}(f;x,y)-f(x,y)\right| &\leq \omega^{(1)}(f;\delta_n)\left\{1+\frac{1}{2\delta_n}\frac{1}{(n+\beta_1)}\sqrt{4(\beta_1 x-\alpha_1)^2+n}\right\}\\ &\quad+\omega^{(2)}(f;\delta_m)\left\{1+\frac{1}{2\delta_m}\frac{1}{(m+\beta_2)}\sqrt{4(\beta_2 y-\alpha_2)^2+m}\right\}\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. $(\beta_1 x-\alpha_1)^2 \leq \beta_1^2$ ve $(\beta_2 y-\alpha_2)^2 \leq \beta_2^2$ olduğundan

$$\begin{aligned}\left|B_{n,m}^{\alpha_k,\beta_k}(f;x,y)-f(x,y)\right| &\leq \omega^{(1)}(f;\delta_n)\left\{1+\frac{1}{2\delta_n}\frac{\sqrt{n+4\beta_1^2}}{(n+\beta_1)}\right\} \\ &+\omega^{(2)}(f;\delta_m)\left\{1+\frac{1}{2\delta_m}\frac{\sqrt{m+4\beta_2^2}}{(m+\beta_2)}\right\}\end{aligned}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Buradan

$$\delta_n=\frac{\sqrt{n+4\beta_1^2}}{(n+\beta_1)} \quad \text{ve} \quad \delta_m=\frac{\sqrt{m+4\beta_2^2}}{(m+\beta_2)}$$

bulunur ve böylece ispat tamamlanır.

(ii) $B_{n,m}^{\alpha_k,\beta_k}$ iki değişkenli Bernstein-Stancu operatörü için Lemma 2.2.2 ve Lemma 2.4.2 (iii) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}&\left|B_{n,m}^{\alpha_k,\beta_k}(f;x,y)-f(x,y)\right| \\ &=\left|\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left[f\left(\tfrac{k+\alpha_1}{n+\beta_1},\tfrac{j+\alpha_2}{m+\beta_2}\right)-f(x,y)\right]p_{n,k}(x)q_{m,j}(y)\right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left|f\left(\tfrac{k+\alpha_1}{n+\beta_1},\tfrac{j+\alpha_2}{m+\beta_2}\right)-f(x,y)\right|p_{n,k}(x)q_{m,j}(y) \\ &\leq \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\omega\left(f;\sqrt{\left(\tfrac{k+\alpha_1}{n+\beta_1}-x\right)^2+\left(\tfrac{j+\alpha_2}{m+\beta_2}-y\right)^2}\right)p_{n,k}(x)q_{m,j}(y) \\ &\leq \omega(f;\delta_{n,m})\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left(1+\frac{\sqrt{\left(\frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1}-x\right)^2+\left(\frac{j+\alpha_2}{m+\beta_2}-y\right)^2}}{\delta_{n,m}}\right)p_{n,k}(x)q_{m,j}(y)\end{aligned}$$

elde edilir.

Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden

$$\left|B_{n,m}^{\alpha_k,\beta_k}(f;x,y)-f(x,y)\right|$$

$$\leq \omega\left(f;\delta_{n,m}\right)\left\{\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}p_{n,k}(x)q_{m,j}(y)\right.$$

$$\left.+\tfrac{1}{\delta_{n,m}}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\sqrt{\left(\tfrac{k+\alpha_1}{n+\beta_1}-x\right)^2+\left(\tfrac{j+\alpha_2}{m+\beta_2}-y\right)^2}p_{n,k}(x)q_{m,j}(y)\right\}$$

$$=\omega\left(f;\delta_{n,m}\right)\left\{1+\tfrac{1}{\delta_{n,m}}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\sqrt{\left(\tfrac{k+\alpha_1}{n+\beta_1}-x\right)^2+\left(\tfrac{j+\alpha_2}{m+\beta_2}-y\right)^2}p_{n,k}(x)q_{m,j}(y)\right\}$$

$$\leq \omega\left(f;\delta_{n,m}\right)\left\{1+\tfrac{1}{\delta_{n,m}}\left(\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left[\left(\tfrac{k+\alpha_1}{n+\beta_1}-x\right)^2+\left(\tfrac{j+\alpha_2}{m+\beta_2}-y\right)^2\right]p_{n,k}(x)q_{m,j}(y)\right)^{\frac{1}{2}}\right\}$$

$$=\omega\left(f;\delta_{n,m}\right)\left\{1+\tfrac{1}{\delta_{n,m}}\left[\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left(\tfrac{k+\alpha_1}{n+\beta_1}-x\right)^2p_{n,k}(x)q_{m,j}(y)\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left(\tfrac{j+\alpha_2}{m+\beta_2}-y\right)^2p_{n,k}(x)q_{m,j}(y)\right]^{\frac{1}{2}}\right\} \tag{3.2.13}$$

elde edilir. $B_{n,m}^{\alpha_k,\beta_k}$ operatörünün lineerliğinden

$$\begin{aligned}
P_1 &= \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left(\frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1}-x\right)^2p_{n,k}(x)q_{m,j}(y)\\
&= \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left(\frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1}\right)^2p_{n,k}(x)q_{m,j}(y)-2x\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left(\frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1}\right)p_{n,k}(x)q_{m,j}(y)\\
&\quad +x^2\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}p_{n,k}(x)q_{m,j}(y)\\
&= \frac{1}{\left(n+\beta_1\right)^2}\left\{\left(\beta_1x-\alpha_1\right)^2+nx\left(1-x\right)\right\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$P_2 = \frac{1}{(m+\beta_2)^2}\left\{(\beta_2 y - \alpha_2)^2 + my(1-y)\right\}$$

bulunur. Bu sonuçlar (3.2.13) eşitsizliğinde dikkate alınırsa

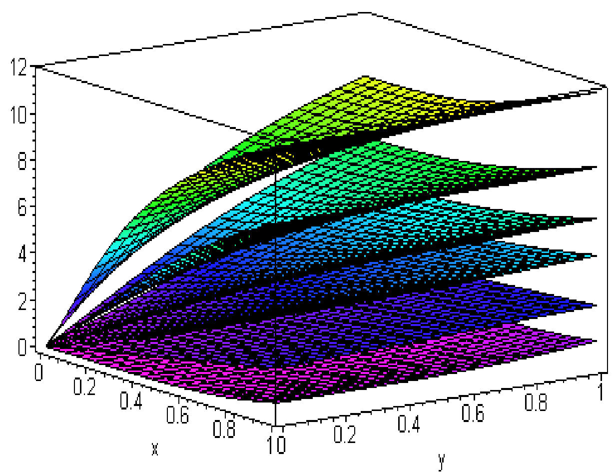
$$\left|B_{n,m}^{\alpha_k,\beta_k}(f;x,y) - f(x,y)\right| \leq \omega(f;\delta_{n,m})\left\{1 + \frac{1}{\delta_{n,m}}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{n+4\beta_1^2}{(n+\beta_1)^2} + \frac{m+4\beta_2^2}{(m+\beta_2)^2}}\right\}$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan

$$\delta_{n,m} = \sqrt{\frac{n+4\beta_1^2}{(n+\beta_1)^2} + \frac{m+4\beta_2^2}{(m+\beta_2)^2}}$$

bulunur ve böylece ispat tamamlanır.

Örnek 3.2.1 $f(x,y) = \ln(x^5 + y^4 + 1)$ eşitliği ile tanımlı f fonksiyonuna $B_{n,m}^{\alpha_k,\beta_k}(f;x,y)$ polinomlar dizisiyle yaklaşım, $\alpha_1 = 0.2$, $\alpha_2 = 0.1$, $\beta_1 = 0.3$, $\beta_2 = 0.4$ olmak üzere n=m=1, 3, 5, 10,13 için şekil 3.2' de gösterilmiştir.



Şekil 3.2 $B_{n,m}^{\alpha_k,\beta_k}(f;x,y)$polinomlar dizisi ile f fonksiyonuna yaklaşım

Örnek 3.2.2 $\beta_1 = 1$ ve $\beta_2 = 2$ için $f(x,y) = x\sin(y)$ eşitliği ile tanımlı f fonksiyonuna $B_{n,m}^{\alpha_k,\beta_k}(f;x,y)$ polinomlarıyla yaklaşılırken, tam ve kısmi süreklilik modülleriyle elde edilen hata değerleri çizelge 3.2' de verilmiştir.

Çizelge 3.2 $f(x,y) = x\sin(y)$ fonksiyonuna $B_{n,m}^{\alpha_k,\beta_k}(f;x,y)$ polinomlar dizisi ile yaklaşıldığında elde edilen hata değerleri

n, m	tam süreklilik modülüne göre hata	kısmi süreklilik modülüne göre hata
10	0.6385555858	1.047709894
10^2	0.2088596702	0.2855388904
10^3	0.06634057352	0.08766292002
10^4	0.02112363480	0.02763206954
10^5	0.006698742759	0.008735180428
10^6	0.002120358136	0.002762216489
10^7	0.0006707236632	0.0008734867002
10^8	0.0002121223452	0.0002762206577
10^9	0.00006708106995	0.00008734863867
10^{10}	0.00002121310650	0.00002762206479

4. BİR VE İKİ DEĞİŞKENLİ BERNSTEIN-STANCU TİPLİ POLİNOMLAR

Bu bölümde Gadjiev ve Ghorbanalizadeh (2010) tarafından tanımlanan Bernstein-Stancu operatörünün bir genelleşmesinin yaklaşımı ve yaklaşım hızı incelenecektir. Ayrıca nümerik örnekler verilecektir.

4.1 Bir Değişkenli Bernstein-Stancu Tipli Polinom

Tanım 4.1.1 α_1 , α_2 , β_1 , β_2

$$0 \leq \alpha_2 \leq \alpha_1 \leq \beta_1 \leq \beta_2$$

koşulunu sağlayan pozitif reel sayılar olmak üzere $x \in I_n \subset [0,1]$ için

$$S_{n,\alpha,\beta}(f;x) = \left(\frac{n+\beta_2}{n}\right)^n \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1}\right) C_n^k \left(x - \frac{\alpha_2}{n+\beta_2}\right)^k \left(\frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2} - x\right)^{n-k} \tag{4.1.1}$$

şeklinde tanımlı polinoma Bernstein-Stancu tipli polinom adı verilir. Burada $I_n := \left[\frac{\alpha_2}{n+\beta_2}, \frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2}\right]$ dir. $\alpha_2 = \beta_2 = 0$ için Bernstein-Stancu polinomu elde edilir. $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = 0$ için klasik Bernstein polinomu elde edilir.

(4.1.1) ile tanımlı $S_{n,\alpha,\beta} : C[0,1] \to C(I_n)$ Bernstein Stancu tipli operatörün lineer ve pozitif olduğu açıktır.

Lemma 4.1.1 $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\forall x \in I_n$ için $S_{n,\alpha,\beta}$ Bernstein-Stancu tipli polinom

$$S_{n,\alpha,\beta}(1;x) = 1 \tag{4.1.2}$$

$$S_{n,\alpha,\beta}(t;x) = \left(\frac{n+\beta_2}{n+\beta_1}\right) x + \left(\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{n+\beta_1}\right) \tag{4.1.3}$$

$$S_{n,\alpha,\beta}(t^2;x) = \left(\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{n+\beta_2}{n+\beta_1}\right)^2\left(x-\frac{\alpha_2}{n+\beta_2}\right)^2$$

$$+\left(\frac{1+2\alpha_1}{n+\beta_1}\right)\left(\frac{n+\beta_2}{n+\beta_1}\right)\left(x-\frac{\alpha_2}{n+\beta_2}\right)+\frac{\alpha_1^2}{(n+\beta_1)^2} \qquad (4.1.4)$$

$$S_{n,\alpha,\beta}((t-x)^2;x) = \frac{1}{(n+\beta_1)^2}\left\{\frac{(n+\beta_2)^2}{n}\left(x-\frac{\alpha_2}{n+\beta_2}\right)\left(\frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2}-x\right)\right.$$

$$\left.+\left[x\left(\beta_2-\beta_1\right)+\left(\alpha_1-\alpha_2\right)\right]^2\right\} \qquad (4.1.5)$$

eşitliklerini sağlar.

İspat. $f(t)=1$ fonksiyonu için Binom formülünden

$$S_{n,\alpha,\beta}(1;x) = \left(\frac{n+\beta_2}{n}\right)^n\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left(x-\frac{\alpha_2}{n+\beta_2}\right)^k\left(\frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2}-x\right)^{n-k}$$

$$= 1$$

elde edilir.

$f(t)=t$ fonksiyonu için $S_{n,\alpha,\beta}$ operatörünün lineerliğinden

$$S_{n,\alpha,\beta}(t;x) = \left(\frac{n+\beta_2}{n}\right)^n\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1}\right)C_n^k\left(x-\frac{\alpha_2}{n+\beta_2}\right)^k\left(\frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2}-x\right)^{n-k}$$

$$= \frac{1}{n+\beta_1}\left(\frac{n+\beta_2}{n}\right)^n\left\{n\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\left(x-\frac{\alpha_2}{n+\beta_2}\right)^k\left(\frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2}-x\right)^{n-k}\right.$$

$$\left.+\alpha_1\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\left(x-\frac{\alpha_2}{n+\beta_2}\right)^k\left(\frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2}-x\right)^{n-k}\right\}$$

$$= \frac{1}{n+\beta_1}\left(\frac{n+\beta_2}{n}\right)^n\left\{n\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}\left(x-\frac{\alpha_2}{n+\beta_2}\right)^k\left(\frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2}-x\right)^{n-k}+\alpha_1\left(\frac{n}{n+\beta_2}\right)^n\right\}$$

$$S_{n,\alpha,\beta}(t;x)=\tfrac{1}{n+\beta_1}\left(\tfrac{n+\beta_2}{n}\right)^n\left\{n\left(x-\tfrac{\alpha_2}{n+\beta_2}\right)\sum_{k=0}^{n-1}\tfrac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}\left(x-\tfrac{\alpha_2}{n+\beta_2}\right)^k\right.$$

$$\left.\times\left(\tfrac{n+\alpha_2}{n+\beta_2}-x\right)^{n-1-k}+\alpha_1\left(\tfrac{n}{n+\beta_2}\right)^n\right\}$$

$$=\tfrac{n}{n+\beta_1}\left(x-\tfrac{\alpha_2}{n+\beta_2}\right)\left(\tfrac{n+\beta_2}{n}\right)^n\left(\tfrac{n}{n+\beta_2}\right)^{n-1}+\tfrac{\alpha_1}{n+\beta_1}$$

$$=\left(\tfrac{n+\beta_2}{n+\beta_1}\right)x+\left(\tfrac{\alpha_1-\alpha_2}{n+\beta_1}\right)$$

bulunur.

$f(t)=t^2$ fonksiyonu için benzer işlemler yapılarak

$$S_{n,\alpha,\beta}(t^2;x)=\left(\tfrac{n+\beta_2}{n}\right)^n\tfrac{n}{(n+\beta_1)^2}\left\{(n-1)\left(x-\tfrac{\alpha_2}{n+\beta_2}\right)^2\sum_{k=0}^{n-2}\tfrac{(n-2)!}{k!(n-2-k)!}\right.$$

$$\left.\times\left(x-\tfrac{\alpha_2}{n+\beta_2}\right)^k\left(\tfrac{n+\alpha_2}{n+\beta_2}-x\right)^{n-2-k}+\left(x-\tfrac{\alpha_2}{n+\beta_2}\right)\left(\tfrac{n}{n+\beta_2}\right)^{n-1}\right\}$$

$$+\left(\tfrac{n+\beta_2}{n+\beta_1}\right)\tfrac{2\alpha_1}{n+\beta_1}\left(x-\tfrac{\alpha_2}{n+\beta_2}\right)+\tfrac{\alpha_1^2}{(n+\beta_1)^2}$$

$$=\left(\tfrac{n+\beta_2}{n}\right)^n\tfrac{n}{(n+\beta_1)^2}\left\{(n-1)\left(x-\tfrac{\alpha_2}{n+\beta_2}\right)^2\left(\tfrac{n}{n+\beta_2}\right)^{n-2}+\left(x-\tfrac{\alpha_2}{n+\beta_2}\right)\left(\tfrac{n}{n+\beta_2}\right)^{n-1}\right\}$$

$$+\left(\tfrac{n+\beta_2}{n+\beta_1}\right)\tfrac{2\alpha_1}{n+\beta_1}\left(x-\tfrac{\alpha_2}{n+\beta_2}\right)+\tfrac{\alpha_1^2}{(n+\beta_1)^2}$$

$$=\left(\tfrac{n-1}{n}\right)\left(\tfrac{n+\beta_2}{n+\beta_1}\right)^2\left(x-\tfrac{\alpha_2}{n+\beta_2}\right)^2+\left(\tfrac{n+\beta_2}{n+\beta_1}\right)\left(\tfrac{1+2\alpha_1}{n+\beta_1}\right)\left(x-\tfrac{\alpha_2}{n+\beta_2}\right)+\tfrac{\alpha_1^2}{(n+\beta_1)^2}$$

elde edilir. $f(t)=(t-x)^2$ fonksiyonu için yukarıda elde edilen eşitlikler ve $S_{n,\alpha,\beta}$ operatörünün lineerliği gözönüne alınırsa

$$S_{n,\alpha,\beta}((t-x)^2;x)=\left(\tfrac{n+\beta_2}{n}\right)^n\left\{\sum_{k=0}^{n}\left(\tfrac{k+\alpha_1}{n+\beta_1}\right)^2C_n^k\left(x-\tfrac{\alpha_2}{n+\beta_2}\right)^k\left(\tfrac{n+\alpha_2}{n+\beta_2}-x\right)^{n-k}\right.$$

$$\left.-2x\sum_{k=0}^{n}\left(\tfrac{k+\alpha_1}{n+\beta_1}\right)C_n^k\left(x-\tfrac{\alpha_2}{n+\beta_2}\right)^k\left(\tfrac{n+\alpha_2}{n+\beta_2}-x\right)^{n-k}+x^2\left(\tfrac{n}{n+\beta_2}\right)^n\right\}$$

$$S_{n,\alpha,\beta}((t-x)^2\,;x) = \left(\tfrac{n-1}{n}\right)\left(\tfrac{n+\beta_2}{n+\beta_1}\right)^2\left(x-\tfrac{\alpha_2}{n+\beta_2}\right)^2 + \left(\tfrac{1+2\alpha_1}{n+\beta_1}\right)\left(\tfrac{n+\beta_2}{n+\beta_1}\right)\left(x-\tfrac{\alpha_2}{n+\beta_2}\right)$$

$$+\tfrac{\alpha_1^2}{(n+\beta_1)^2} - 2x\left\{\left(\tfrac{n+\beta_2}{n+\beta_1}\right)x + \left(\tfrac{\alpha_1-\alpha_2}{n+\beta_1}\right)\right\} + x^2$$

$$= \tfrac{1}{(n+\beta_1)^2}\left\{(n+\beta_2)^2\left(\tfrac{n-1}{n}\right)\left(x-\tfrac{\alpha_2}{n+\beta_2}\right)^2 + (n+\beta_2)\left(x-\tfrac{\alpha_2}{n+\beta_2}\right) + 2\alpha_1(n+\beta_2)\right.$$

$$\left.\times\left(x-\tfrac{\alpha_2}{n+\beta_2}\right) + \alpha_1^2 - 2x(n+\beta_1)\left[(n+\beta_2)x + (\alpha_1-\alpha_2)\right] + (n+\beta_1)^2x^2\right\}$$

$$= \tfrac{1}{(n+\beta_1)^2}\left\{\tfrac{(n+\beta_2)^2}{n}\left(x-\tfrac{\alpha_2}{n+\beta_2}\right)\left[(n-1)\left(x-\tfrac{\alpha_2}{n+\beta_2}\right)\right] + \tfrac{n}{n+\beta_2} + 2\alpha_1(n+\beta_2)\right.$$

$$\left.\times\left(x-\tfrac{\alpha_2}{n+\beta_2}\right) + \alpha_1^2 - 2x(n+\beta_1)\left[(n+\beta_2)x + (\alpha_1-\alpha_2)\right] + (n+\beta_1)^2x^2\right\}$$

$$= \tfrac{1}{(n+\beta_1)^2}\left\{\tfrac{(n+\beta_2)^2}{n}\left(x-\tfrac{\alpha_2}{n+\beta_2}\right)\left[nx - x - \tfrac{n\alpha_2}{n+\beta_2} + \tfrac{\alpha_2}{n+\beta_2} + \tfrac{n}{n+\beta_2}\right] + 2n\alpha_1x\right.$$

$$+ 2\alpha_1\beta_2x - 2\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1^2 + (-2nx - 2\beta_1x)(nx + \beta_2x + \alpha_1 - \alpha_2)$$

$$\left.+\left(n^2 + 2n\beta_1 + \beta_1^2\right)x^2\right\}$$

$$= \tfrac{1}{(n+\beta_1)^2}\left\{\tfrac{(n+\beta_2)^2}{n}\left(x-\tfrac{\alpha_2}{n+\beta_2}\right)\left(\tfrac{n+\alpha_2}{n+\beta_2} - x\right) + (n+\beta_2)^2x^2 - \alpha_2(n+\beta_2)x\right.$$

$$- \alpha_2(n+\beta_2)\left(x-\tfrac{\alpha_2}{n+\beta_2}\right) + 2\alpha_1\beta_2x - 2\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1^2 - 2n\beta_2x^2 + 2n\alpha_2x$$

$$\left.- 2\beta_1\beta_2x + 2\alpha_2\beta_1x - 2\alpha_1\beta_1x - n^2x^2 + \beta_1^2x^2\right\}$$

$$= \tfrac{1}{(n+\beta_1)^2}\left\{\tfrac{(n+\beta_2)^2}{n}\left(x-\tfrac{\alpha_2}{n+\beta_2}\right)\left(\tfrac{n+\alpha_2}{n+\beta_2} - x\right) + \left[x(\beta_2-\beta_1) + (\alpha_1-\alpha_2)\right]^2\right\}$$

elde edilir.

Teorem 4.1.1 f , $[0,1]$ aralığında sürekli bir fonksiyon ise

$$\lim_{n\to\infty} \|S_{n,\alpha,\beta}f - f\|_{C(I_n)} = 0$$

gerçeklenir.

İspat. Korovkin teoreminin kullanılabilmesi için

$$\lim_{n\to\infty} \|S_{n,\alpha,\beta}(t^\nu; x) - x^\nu\|_{C(I_n)} = 0 \quad , \quad \nu = 0,1,2 \tag{4.1.6}$$

olduğu gösterilmelidir.

$\nu = 0$ için (4.1.2) eşitliğinden

$$\lim_{n\to\infty} \max_{\frac{\alpha_2}{n+\beta_2} \le x \le \frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2}} |S_{n,\alpha,\beta}(1;x) - 1| = 0$$

olduğu açıktır.

$\nu = 1$ için (4.1.3) eşitliğinden

$$\lim_{n\to\infty} \max_{\frac{\alpha_2}{n+\beta_2} \le x \le \frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2}} |S_{n,\alpha,\beta}(t;x) - x|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \max_{\frac{\alpha_2}{n+\beta_2} \le x \le \frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2}} \left| \left(\frac{n+\beta_2}{n+\beta_1}\right) x + \left(\frac{\alpha_1-\alpha_2}{n+\beta_1}\right) - x \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \max_{\frac{\alpha_2}{n+\beta_2} \le x \le \frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2}} \left\{ \left(\frac{\beta_2-\beta_1}{n+\beta_1}\right) x + \left(\frac{\alpha_1-\alpha_2}{n+\beta_1}\right) \right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left\{ \left(\frac{\beta_2-\beta_1}{n+\beta_1}\right) \left(\frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2}\right) + \left(\frac{\alpha_1-\alpha_2}{n+\beta_1}\right) \right\}$$

$$= 0$$

gerçeklenir.

$\nu=2$ için (4.1.4) eşitliği ve üçgen eşitsizliğinden

$$\lim_{n\to\infty}\max_{\frac{\alpha_2}{n+\beta_2}\leq x\leq\frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2}}|S_{n,\alpha,\beta}(t^2;x)-x^2|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\max_{\frac{\alpha_2}{n+\beta_2}\leq x\leq\frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2}}\left|\left(\tfrac{n-1}{n}\right)\left(\frac{n+\beta_2}{n+\beta_1}\right)^2\left(x-\frac{\alpha_2}{n+\beta_2}\right)^2+\left(\frac{1+2\alpha_1}{n+\beta_1}\right)\left(\frac{n+\beta_2}{n+\beta_1}\right)\left(x-\frac{\alpha_2}{n+\beta_2}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{\alpha_1^2}{(n+\beta_1)^2}-x^2\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\max_{\frac{\alpha_2}{n+\beta_2}\leq x\leq\frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2}}\left|\left[\left(\tfrac{n-1}{n}\right)\left(\frac{n+\beta_2}{n+\beta_1}\right)^2-1\right]x^2+\frac{n+\beta_2}{(n+\beta_1)^2}\left[-2\alpha_2\left(\tfrac{n-1}{n}\right)+1+2\alpha_1\right]x\right.$$

$$\left.+\left(\tfrac{n-1}{n}\right)\frac{(\alpha_1-\alpha_2)^2}{(n+\beta_1)^2}-\frac{\alpha_2^2}{n(n+\beta_1)^2}+\frac{\alpha_2}{(n+\beta_1)^2}\right|$$

$$\leq\lim_{n\to\infty}\max_{\frac{\alpha_2}{n+\beta_2}\leq x\leq\frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2}}\left\{\left|\left(\tfrac{n-1}{n}\right)\left(\frac{n+\beta_2}{n+\beta_1}\right)^2-1\right|x^2\right.$$

$$\left.+\left|\frac{n+\beta_2}{(n+\beta_1)^2}\left[-2\alpha_2\left(\tfrac{n-1}{n}\right)+1+2\alpha_1\right]\right|x+\left|\left(\tfrac{n-1}{n}\right)\frac{(\alpha_1-\alpha_2)^2}{(n+\beta_1)^2}-\frac{\alpha_2^2}{n(n+\beta_1)^2}+\frac{\alpha_2}{(n+\beta_1)^2}\right|\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left|\left(\tfrac{n-1}{n}\right)\left(\frac{n+\beta_2}{n+\beta_1}\right)^2-1\right|\left(\frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2}\right)^2+\left|\frac{n+\beta_2}{(n+\beta_1)^2}\left[-2\alpha_2\left(\tfrac{n-1}{n}\right)+1+2\alpha_1\right]\right|\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2}\right)+\left|\left(\tfrac{n-1}{n}\right)\frac{(\alpha_1-\alpha_2)^2}{(n+\beta_1)^2}-\frac{\alpha_2^2}{n(n+\beta_1)^2}+\frac{\alpha_2}{(n+\beta_1)^2}\right|\right\}$$

$$=0$$

elde edilir.

$S^*_{n,\alpha,\beta}$ operatörü

$$S^*_{n,\alpha,\beta}(f;x)=\begin{cases}S_{n,\alpha,\beta}(f;x) & ; \quad x\in\left[\frac{\alpha_2}{n+\beta_2},\frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2}\right]\\ f(x) & ; \quad x\in\left[0,\frac{\alpha_2}{n+\beta_2}\right]\cup\left[\frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2},1\right]\end{cases}$$

şeklinde tanımlansın.

Bu durumda

$$\begin{aligned} \left\| S^*_{n,\alpha,\beta} f - f \right\|_{C[0,1]} &= \max_{x\in[0,1]} \left| S^*_{n,\alpha,\beta}(f;x) - f(x) \right| \\ &= \max_{x\in\left[\frac{\alpha_2}{n+\beta_2},\frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2}\right]} \left| S_{n,\alpha,\beta}(f;x) - f(x) \right| \qquad (4.1.7) \end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan (4.1.6) ve (4.1.7) beraber gözönüne alınırsa $\nu = 0,1,2$ için

$$\lim_{n\to\infty} \left\| S^*_{n,\alpha,\beta}(t^\nu;x) - x^\nu \right\|_{C[0,1]} = 0$$

bulunur. Korovkin teoreminden her sürekli f fonksiyonu için

$$\lim_{n\to\infty} \left\| S^*_{n,\alpha,\beta} f - f \right\|_{C[0,1]} = 0$$

elde edilir ve burada (4.1.7) eşitliği dikkate alınırsa

$$\lim_{n\to\infty} \max_{\frac{\alpha_2}{n+\beta_2}\le x\le\frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2}} \left| S_{n,\alpha,\beta}(f;x) - f(x) \right| = 0$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.2 Her $f \in C[0,1]$ ve $x \in \left[\frac{\alpha_2}{n+\beta_2}, \frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2}\right]$ için Bernstein-Stancu tipli polinom

$$\left| S_{n,\alpha,\beta}(f;x) - f(x) \right|$$

$$\le \begin{cases} \frac{3}{2}\omega\left(f; \frac{1}{(n+\beta_1)} \sqrt{4(\beta_2-\beta_1)^2 \left(\frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2}+1\right)^2 + n} \right) & ; \ \beta_2-\beta_1 \ge \alpha_1-\alpha_2 \\ \frac{3}{2}\omega\left(f; \frac{1}{(n+\beta_1)} \sqrt{4(\alpha_1-\alpha_2)^2 \left(\frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2}+1\right)^2 + n} \right) & ; \ \beta_2-\beta_1 < \alpha_1-\alpha_2 \end{cases} \qquad (4.1.8)$$

eşitsizliğini sağlar.

İspat. Bu teoremin ispatının en önemli adımı olan (2.3.1) eşitsizliğinden

$$\left|S_{n,\alpha,\beta}(f;x)-f(x)\right| \leq \left\{1+\delta^{-1}\sqrt{S_{n,\alpha,\beta}((t-x)^2;x)}\right\}\omega(f,\delta) \tag{4.1.9}$$

yazılabilir. Burada iki durum söz konusudur:

1. Durum: $\beta_2-\beta_1 \geq \alpha_1-\alpha_2$ olsun. Lemma 4.1.1' den

$$\begin{aligned} S_{n,\alpha,\beta}((t-x)^2;x) &= \frac{1}{(n+\beta_1)^2}\left\{\frac{(n+\beta_2)^2}{n}\left(x-\frac{\alpha_2}{n+\beta_2}\right)\left(\frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2}-x\right)\right. \\ &\quad \left. +\left[(\beta_2-\beta_1)x+(\alpha_1-\alpha_2)\right]^2\right\} \end{aligned}$$

olduğu biliniyor.
$h(x) := \left(x-\frac{\alpha_2}{n+\beta_2}\right)\left(\frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2}-x\right)$ fonksiyonu tanımlansın. h fonksiyonunun kritik noktası $x=\frac{n+2\alpha_2}{2(n+\beta_2)}$ olarak bulunur. Diğer taraftan $h''(x)=-2<0$ olduğundan kritik nokta maksimum değeri verir. O halde

$$\begin{aligned} h(x) &\leq \max_{\frac{\alpha_2}{n+\beta_2}\leq x\leq\frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2}} h(x) \\ &= \frac{n^2}{4(n+\beta_2)^2} \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlik ve $\beta_2-\beta_1 \geq \alpha_1-\alpha_2$ durumu beraber gözönüne alınırsa;

$$\begin{aligned} &S_{n,\alpha,\beta}((t-x)^2;x) \\ &\leq \tfrac{1}{(n+\beta_1)^2}\left\{\tfrac{(n+\beta_2)^2}{n}\tfrac{n^2}{4(n+\beta_2)^2}+\left[x(\beta_2-\beta_1)+(\alpha_1-\alpha_2)\right]^2\right\} \\ &= \tfrac{1}{(n+\beta_1)^2}\left\{\tfrac{n}{4}+\left[x(\beta_2-\beta_1)+(\alpha_1-\alpha_2)\right]^2\right\} \\ &\leq \tfrac{1}{(n+\beta_1)^2}\left\{\tfrac{n}{4}+\left[x(\beta_2-\beta_1)+(\beta_2-\beta_1)\right]^2\right\} \\ &= \tfrac{1}{(n+\beta_1)^2}\left\{\tfrac{n}{4}+(\beta_2-\beta_1)^2(x+1)^2\right\} \end{aligned}$$

elde edilir. Eşitsizliğin sağ tarafının maksimumu alınırsa

$$S_{n,\alpha,\beta}((t-x)^2\,;x) \leq \frac{1}{(n+\beta_1)^2}\left\{\frac{n}{4}+(\beta_2-\beta_1)^2\left(\frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2}+1\right)^2\right\}$$

bulunur. Bu eşitsizlik (4.1.9) eşitsizliğinde dikkate alınırsa

$$|S_{n,\alpha,\beta}(f;x)-f(x)|$$

$$\leq \left\{1+\delta^{-1}\sqrt{\tfrac{1}{(n+\beta_1)^2}\left\{\tfrac{n}{4}+(\beta_2-\beta_1)^2\left(\tfrac{n+\alpha_2}{n+\beta_2}+1\right)^2\right\}}\right\}\omega(f,\delta)$$

$$= \left\{1+\delta^{-1}\tfrac{1}{2(n+\beta_1)}\sqrt{n+4(\beta_2-\beta_1)^2\left(\tfrac{n+\alpha_2}{n+\beta_2}+1\right)^2}\right\}\omega(f,\delta)$$

elde edilir ve buradan

$$\delta = \frac{1}{(n+\beta_1)}\sqrt{n+4(\beta_2-\beta_1)^2\left(\frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2}+1\right)^2}$$

bulunur.

2. Durum: $\beta_2-\beta_1<\alpha_1-\alpha_2$ olsun. Benzer şekilde

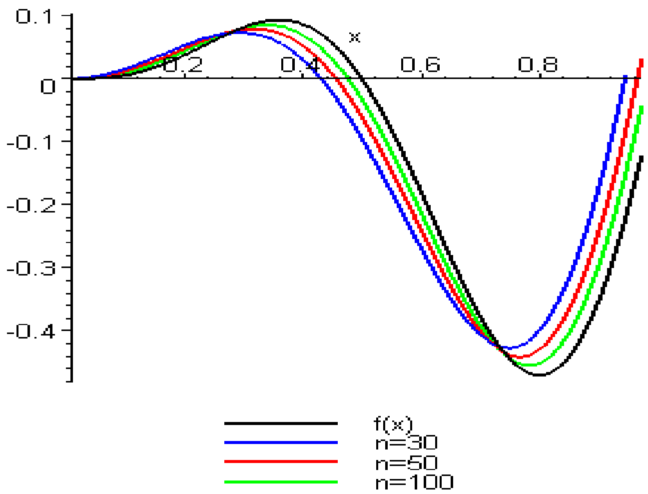
$$|S_{n,\alpha,\beta}(f;x)-f(x)| \leq \left\{1+\delta^{-1}\frac{1}{2(n+\beta_1)}\sqrt{n+4(\alpha_1-\alpha_2)^2\left(\frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2}+1\right)^2}\right\}\omega(f,\delta)$$

elde edilir ve buradan

$$\delta = \frac{1}{(n+\beta_1)}\sqrt{n+4(\alpha_1-\alpha_2)^2\left(\frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2}+1\right)^2}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

Örnek 4.1.1 $f(x) = \sin(2\pi x)\ln(x^2+1)$ eşitliği ile tanımlı f fonksiyonuna $S_{n,\alpha,\beta}(f;x)$ polinomlar dizisiyle yaklaşım, $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 1$, $\beta_1 = 3$, $\beta_2 = 4$ olmak üzere n=30, 50, 100 için şekil 4.1' de gösterilmiştir.



Şekil 4.1 $S_{n,\alpha,\beta}(f;x)$ polinomlar dizisi ile f fonksiyonuna yaklaşım

Örnek 4.1.2 $\alpha_1 = 0.2$, $\alpha_2 = 0.1$, $\beta_1 = 0.3$ ve $\beta_2 = 0.5$ için $f(x) = \sin(\pi x)$ eşitliği ile tanımlı f fonksiyonuna $S_{n,\alpha,\beta}(f;x)$ polinomlarıyla yaklaşılırken süreklilik modülü yardımıyla elde edilen hata değerleri çizelge 4.1' de verilmiştir.

Bu örnekte hata değerleri Teorem 4.1.2 yardımı ile hesaplanmıştır.

Çizelge 4.1 $f(x) = \sin(\pi x)$ fonksiyonuna $S_{n,\alpha,\beta}(f;x)$ polinomlar dizisi ile yaklaşıldığında elde edilen hata değerleri

n	süreklilik modülüne göre hata değerleri
10	1.257140713
10^2	0.4636069098
10^3	0.1487767570
10^4	0.04711623273
10^5	0.01490164026
10^6	0.004712381324
10^7	0.001490187998
10^8	0.0004712388903
10^9	0.0001490188238
10^{10}	0.00004712388980

4.2 İki Değişkenli Bernstein-Stancu Tipli Polinomlar

(4.1.1) ile tanımlı Bernstein-Stancu tipli polinomunun iki değişken halinde iki tür genelleşmesi verilebilir. $S := \left[\frac{\alpha_1}{n+\beta_1}, \frac{n+\alpha_1}{n+\beta_1}\right] \times \left[\frac{\alpha_2}{m+\beta_2}, \frac{m+\alpha_2}{m+\beta_2}\right]$ dikdörtgensel bölgesinde x değişkenine göre n - inci ve y değişkenine göre m - inci dereceden Bernstein-Stancu tipli polinom

$$S_{n,m}^{\alpha_k,\gamma_k,\beta_k,\sigma_k}(f;x,y) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} f\left(\frac{i+\gamma_1}{n+\sigma_1}, \frac{j+\gamma_2}{m+\sigma_2}\right) p_{n,i,\alpha_1,\beta_1}(x) q_{m,j,\alpha_2,\beta_2}(y) \quad (4.2.1)$$

şeklinde tanımlanabilir. Burada

$$p_{n,i,\alpha_1,\beta_1}(x) = \left(\frac{n+\beta_1}{n}\right)^n C_n^i \left(x - \frac{\alpha_1}{n+\beta_1}\right)^i \left(\frac{n+\alpha_1}{n+\beta_1} - x\right)^{n-i}$$

$$q_{m,j,\alpha_2,\beta_2}(y) = \left(\frac{m+\beta_2}{m}\right)^m C_m^j \left(y - \frac{\alpha_2}{m+\beta_2}\right)^j \left(\frac{m+\alpha_2}{m+\beta_2} - y\right)^{m-j}$$

şeklinde tanımlıdır.

$\alpha_k,\ \gamma_k,\ \beta_k,\ \sigma_k\ \ (k=1,2)$

$$\begin{aligned} 0 &< \alpha_1 < \gamma_1 < \sigma_1 < \beta_1 \\ 0 &< \alpha_2 < \gamma_2 < \sigma_2 < \beta_2 \end{aligned}$$

koşullarını sağlayan pozitif sayılardır. Kolaylık açısından $S_{n,m}^{\alpha_k,\gamma_k,\beta_k,\sigma_k}(f;\ x,y)$ gösterimi yerine $S_{n,m}(f;\ x,y)$ gösterimini kullanacağız.

$\Delta := \left\{(x,y):\ x+y \leq \frac{n+2\alpha}{n+\beta},\ \ x,y \geq \frac{\alpha}{n+\beta}\right\}$ üçgensel bölgesine uygun Bernstein-Stancu tipli polinom

$$S_n^{\alpha,\alpha_k,\beta,\beta_k}(f;\ x,y) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k} f\left(\frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1},\ \frac{l+\alpha_2}{n+\beta_2}\right) p_{n,\alpha,\beta}^{k,l}(x,y) \tag{4.2.2}$$

şeklinde tanımlanabilir. Burada

$$p_{n,\alpha,\beta}^{k,l}(x,y) = \left(\tfrac{n+\beta}{n}\right)^n C_n^k C_{n-k}^l \left(x-\tfrac{\alpha}{n+\beta}\right)^k \left(y-\tfrac{\alpha}{n+\beta}\right)^l \left(\tfrac{n+2\alpha}{n+\beta}-x-y\right)^{n-k-l}$$

ve $0 \leq \alpha \leq \beta$ olmak üzere $\alpha,\ \alpha_k,\ \beta,\ \beta_k\ \ (k=1,2)$ pozitif sayılardır.

4.2.1 Dikdörtgensel bölgede iki değişkenli Bernstein-Stancu tipli polinom

Lemma 4.2.1.1 $n,m \in \mathbb{N}$ ve $S_{n,m}(f;x,y)$ S dikdörtgensel bölgesi üzerinde (4.2.1) ile tanımlı iki değişkenli Bernstein-Stancu tipli polinom olmak üzere

$$S_{n,m}(1;x,y) = 1 \tag{4.2.1.1}$$

$$S_{n,m}(t;x,y) = \frac{n+\beta_1}{n+\sigma_1}\,x + \frac{\gamma_1-\alpha_1}{n+\sigma_1} \tag{4.2.1.2}$$

$$S_{n,m}(\tau;x,y) = \frac{m+\beta_2}{m+\sigma_2}\,y + \frac{\gamma_2-\alpha_2}{m+\sigma_2} \tag{4.2.1.3}$$

$$S_{n,m}\left(t^2+\tau^2;x,y\right)=\left(\tfrac{n+\beta_1}{n+\sigma_1}\right)^2\left(\tfrac{n-1}{n}\right)\left(x-\tfrac{\alpha_1}{n+\beta_1}\right)^2+\left(1+2\gamma_1\right)\tfrac{n+\beta_1}{(n+\sigma_1)^2}$$

$$\times\left(x-\tfrac{\alpha_1}{n+\beta_1}\right)+\tfrac{\gamma_1^2}{(n+\sigma_1)^2}+\left(\tfrac{m+\beta_2}{m+\sigma_2}\right)^2\left(\tfrac{m-1}{m}\right)\left(y-\tfrac{\alpha_2}{m+\beta_2}\right)^2$$

$$+\left(1+2\gamma_2\right)\frac{m+\beta_2}{(m+\sigma_2)^2}\left(y-\frac{\alpha_2}{m+\beta_2}\right)+\frac{\gamma_2^2}{(m+\sigma_2)^2} \qquad (4.2.1.4)$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat. $g(t,\tau)=1$ fonksiyonu için Binom özdeşliğinden

$$\begin{aligned}S_{n,m}\left(1\ ;\ x,y\right) &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}p_{n,i,\alpha_1,\beta_1}(x)q_{m,j,\alpha_2,\beta_2}(y)\\ &= \sum_{i=0}^{n}p_{n,i,\alpha_1,\beta_1}(x)\sum_{j=0}^{m}q_{m,j,\alpha_2,\beta_2}(y)\\ &= \sum_{i=0}^{n}p_{n,i,\alpha_1,\beta_1}(x)\\ &= 1\end{aligned}$$

elde edilir. $g(t,\tau)=t$ fonksiyonu için $S_{n,m}$ operatörünün lineerliğinden

$$S_{n,m}\left(t\ ;\ x,y\right)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left(\tfrac{i+\gamma_1}{n+\sigma_1}\right)p_{n,i,\alpha_1,\beta_1}(x)q_{m,j,\alpha_2,\beta_2}(y)$$

$$=\tfrac{1}{n+\sigma_1}\left\{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}ip_{n,i,\alpha_1,\beta_1}(x)q_{m,j,\alpha_2,\beta_2}(y)+\gamma_1\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}p_{n,i,\alpha_1,\beta_1}(x)q_{m,j,\alpha_2,\beta_2}(y)\right\}$$

$$=\tfrac{1}{n+\sigma_1}\left\{\sum_{i=0}^{n}ip_{n,i,\alpha_1,\beta_1}(x)\sum_{j=0}^{m}q_{m,j,\alpha_2,\beta_2}(y)+\gamma_1\right\}$$

$$=\tfrac{1}{n+\sigma_1}\left\{\sum_{i=0}^{n}ip_{n,i,\alpha_1,\beta_1}(x)+\gamma_1\right\}$$

$S_{n,m}(t\ ;\ x,y)$

$$= \tfrac{1}{n+\sigma_1}\left\{\left(\tfrac{n+\beta_1}{n}\right)^n \sum_{i=0}^{n} i\tfrac{n!}{i!(n-i)!}\left(x-\tfrac{\alpha_1}{n+\beta_1}\right)^i\left(\tfrac{n+\alpha_1}{n+\beta_1}-x\right)^{n-i}+\gamma_1\right\}$$

$$= \tfrac{1}{n+\sigma_1}\left\{n\left(x-\tfrac{\alpha_1}{n+\beta_1}\right)\left(\tfrac{n+\beta_1}{n}\right)^n \sum_{i=1}^{n} \tfrac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!}\left(x-\tfrac{\alpha_1}{n+\beta_1}\right)^{i-1}\left(\tfrac{n+\alpha_1}{n+\beta_1}-x\right)^{n-i}+\gamma_1\right\}$$

$$= \tfrac{1}{n+\sigma_1}\left\{n\left(x-\tfrac{\alpha_1}{n+\beta_1}\right)\left(\tfrac{n+\beta_1}{n}\right)^n \sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^{i}\left(x-\tfrac{\alpha_1}{n+\beta_1}\right)^{i}\left(\tfrac{n+\alpha_1}{n+\beta_1}-x\right)^{n-1-i}+\gamma_1\right\}$$

$$= \tfrac{1}{n+\sigma_1}\left\{n\left(x-\tfrac{\alpha_1}{n+\beta_1}\right)\left(\tfrac{n+\beta_1}{n}\right)^n \left(\tfrac{n}{n+\beta_1}\right)^{n-1}+\gamma_1\right\}$$

$$= \tfrac{n+\beta_1}{n+\sigma_1}\ x+\tfrac{\gamma_1-\alpha_1}{n+\sigma_1}$$

elde edilir. $g(t,\tau)=\tau$ fonksiyonu için benzer işlemler yapılarak

$$\begin{aligned}
S_{n,m}(\tau\ ;\ x,y) &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left(\frac{j+\gamma_2}{m+\sigma_2}\right)p_{n,i,\alpha_1,\beta_1}(x)q_{m,j,\alpha_2,\beta_2}(y)\\
&= \frac{1}{m+\sigma_2}\left\{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} j p_{n,i,\alpha_1,\beta_1}(x)q_{m,j,\alpha_2,\beta_2}(y)\right.\\
&\quad \left.+\gamma_2\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} p_{n,i,\alpha_1,\beta_1}(x)q_{m,j,\alpha_2,\beta_2}(y)\right\}\\
&= \frac{1}{m+\sigma_2}\left\{\sum_{i=0}^{n} p_{n,i,\alpha_1,\beta_1}(x)\sum_{j=0}^{m} j q_{m,j,\alpha_2,\beta_2}(y)+\gamma_2\right\}\\
&= \frac{m+\beta_2}{m+\sigma_2}\ y+\frac{\gamma_2-\alpha_2}{m+\sigma_2}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Son olarak da $g(t,\tau)=t^2+\tau^2$ fonksiyonu için;

$$
\begin{aligned}
S_{n,m}\left(t^2+\tau^2;x,y\right) &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left[\left(\frac{i+\gamma_1}{n+\sigma_1}\right)^2+\left(\frac{j+\gamma_2}{m+\sigma_2}\right)^2\right]p_{n,i,\alpha_1,\beta_1}(x)q_{m,j,\alpha_2,\beta_2}(y)\\
&= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left(\frac{i+\gamma_1}{n+\sigma_1}\right)^2 p_{n,i,\alpha_1,\beta_1}(x)q_{m,j,\alpha_2,\beta_2}(y)\\
&\quad +\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left(\frac{j+\gamma_2}{m+\sigma_2}\right)^2 p_{n,i,\alpha_1,\beta_1}(x)q_{m,j,\alpha_2,\beta_2}(y)\\
&= \sum_{i=0}^{n}\left(\frac{i+\gamma_1}{n+\sigma_1}\right)^2 p_{n,i,\alpha_1,\beta_1}(x)\sum_{j=0}^{m}q_{m,j,\alpha_2,\beta_2}(y)\\
&\quad +\sum_{j=0}^{m}\left(\frac{j+\gamma_2}{m+\sigma_2}\right)^2 q_{m,j,\alpha_2,\beta_2}(y)\sum_{i=0}^{n}p_{n,i,\alpha_1,\beta_1}(x)\\
&= \sum_{i=0}^{n}\left(\frac{i+\gamma_1}{n+\sigma_1}\right)^2 p_{n,i,\alpha_1,\beta_1}(x)+\sum_{j=0}^{m}\left(\frac{j+\gamma_2}{m+\sigma_2}\right)^2 q_{m,j,\alpha_2,\beta_2}(y)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitliklerden ve $S_{n,m}$ operatörünün lineerliğinden

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \sum_{i=0}^{n}\left(\frac{i+\gamma_1}{n+\sigma_1}\right)^2 p_{n,i,\alpha_1,\beta_1}(x)\\
&= \frac{1}{\left(n+\sigma_1\right)^2}\left\{\sum_{i=0}^{n}i^2p_{n,i,\alpha_1,\beta_1}(x)+2\gamma_1\sum_{i=0}^{n}ip_{n,i,\alpha_1,\beta_1}(x)+\gamma_1^2\sum_{i=0}^{n}p_{n,i,\alpha_1,\beta_1}(x)\right\}\\
&= \frac{1}{\left(n+\sigma_1\right)^2}\left\{\left(\frac{n+\beta_1}{n}\right)^n n\sum_{i=0}^{n}\frac{i^2}{n}\frac{n!}{i!(n-i)!}\left(x-\frac{\alpha_1}{n+\beta_1}\right)^i\left(\frac{n+\alpha_1}{n+\beta_1}-x\right)^{n-i}\right.\\
&\quad \left.+2\gamma_1\left(n+\beta_1\right)\left(x-\frac{\alpha_1}{n+\beta_1}\right)+\gamma_1^2\right\}\\
&= \frac{1}{\left(n+\sigma_1\right)^2}\left\{\left(\frac{n+\beta_1}{n}\right)^n n\sum_{i=1}^{n}(i-1+1)\frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!}\left(x-\frac{\alpha_1}{n+\beta_1}\right)^i\right.\\
&\quad \left.\times\left(\frac{n+\alpha_1}{n+\beta_1}-x\right)^{n-i}+2\gamma_1\left(n+\beta_1\right)\left(x-\frac{\alpha_1}{n+\beta_1}\right)+\gamma_1^2\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \frac{1}{(n+\sigma_1)^2}\left\{\left(\frac{n+\beta_1}{n}\right)^n n\sum_{i=1}^{n}(i-1)\frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!}\left(x-\frac{\alpha_1}{n+\beta_1}\right)^i\right.\\
&\quad\times\left(\frac{n+\alpha_1}{n+\beta_1}-x\right)^{n-i}+\left(\frac{n+\beta_1}{n}\right)^n n\sum_{i=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!}\left(x-\frac{\alpha_1}{n+\beta_1}\right)^i\\
&\quad\left.\times\left(\frac{n+\alpha_1}{n+\beta_1}-x\right)^{n-i}+2\gamma_1(n+\beta_1)\left(x-\frac{\alpha_1}{n+\beta_1}\right)+\gamma_1^2\right\}\\
&= \frac{1}{(n+\sigma_1)^2}\left\{\left(\frac{n+\beta_1}{n}\right)^n n(n-1)\left(x-\frac{\alpha_1}{n+\beta_1}\right)^2\sum_{i=2}^{n}\frac{(n-2)!}{(i-2)!(n-i)!}\right.\\
&\quad\times\left(x-\frac{\alpha_1}{n+\beta_1}\right)^{i-2}\left(\frac{n+\alpha_1}{n+\beta_1}-x\right)^{n-i}+\left(\frac{n+\beta_1}{n}\right)^n n\left(x-\frac{\alpha_1}{n+\beta_1}\right)\\
&\quad\times\sum_{i=0}^{n-1}C_{n-1}^i\left(x-\frac{\alpha_1}{n+\beta_1}\right)^i\left(\frac{n+\alpha_1}{n+\beta_1}-x\right)^{n-1-i}\\
&\quad\left.+2\gamma_1(n+\beta_1)\left(x-\frac{\alpha_1}{n+\beta_1}\right)+\gamma_1^2\right\}\\
&= \frac{1}{(n+\sigma_1)^2}\left\{\left(\frac{n+\beta_1}{n}\right)^n n(n-1)\left(x-\frac{\alpha_1}{n+\beta_1}\right)^2\sum_{i=0}^{n-2}C_{n-2}^i\left(x-\frac{\alpha_1}{n+\beta_1}\right)^i\right.\\
&\quad\times\left(\frac{n+\alpha_1}{n+\beta_1}-x\right)^{n-2-i}+\left(\frac{n+\beta_1}{n}\right)^n n\left(x-\frac{\alpha_1}{n+\beta_1}\right)\left(\frac{n}{n+\beta_1}\right)^{n-1}\\
&\quad\left.+2\gamma_1(n+\beta_1)\left(x-\frac{\alpha_1}{n+\beta_1}\right)+\gamma_1^2\right\}\\
&= \frac{1}{(n+\sigma_1)^2}\left\{\left(\frac{n+\beta_1}{n}\right)^n n(n-1)\left(x-\frac{\alpha_1}{n+\beta_1}\right)^2\left(\frac{n}{n+\beta_1}\right)^{n-2}\right.\\
&\quad\left.+(n+\beta_1)\left(x-\frac{\alpha_1}{n+\beta_1}\right)+2\gamma_1(n+\beta_1)\left(x-\frac{\alpha_1}{n+\beta_1}\right)+\gamma_1^2\right\}\\
&= \left(\frac{n+\beta_1}{n+\sigma_1}\right)^2\left(\frac{n-1}{n}\right)\left(x-\frac{\alpha_1}{n+\beta_1}\right)^2\\
&\quad+(1+2\gamma_1)\frac{n+\beta_1}{(n+\sigma_1)^2}\left(x-\frac{\alpha_1}{n+\beta_1}\right)+\frac{\gamma_1^2}{(n+\sigma_1)^2}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \left(\frac{m+\beta_2}{m+\sigma_2}\right)^2\left(\frac{m-1}{m}\right)\left(y-\frac{\alpha_2}{m+\beta_2}\right)^2 \\
&\quad +(1+2\gamma_2)\,\frac{m+\beta_2}{(m+\sigma_2)^2}\left(y-\frac{\alpha_2}{m+\beta_2}\right)+\frac{\gamma_2^2}{(m+\sigma_2)^2}
\end{aligned}
$$

şeklinde elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

(4.2.1) ile tanımlı iki değişkenli Bernstein-Stancu tipli operatör dizisinin yakınsaklığı aşağıdaki teoremde gösterilmiştir.

Teorem 4.2.1.1 f , $[0,1]\times[0,1]$ bölgesinde sürekli bir fonksiyon ise

$$\lim_{n,m\to\infty}\|S_{n,m}f \; - f\|_{C(S)}=0$$

gerçeklenir.

İspat. Bu teoremin ispatında Teorem 2.4.1 kullanılacağından öncelikle

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n,m\to\infty}\max_{(x,y)\in S}|S_{n,m}(1;x,y)-1|=0\\
&\lim_{n,m\to\infty}\max_{(x,y)\in S}|S_{n,m}(t;x,y)-x|=0\\
&\lim_{n,m\to\infty}\max_{(x,y)\in S}|S_{n,m}(\tau;x,y)-y|=0\\
&\lim_{n,m\to\infty}\max_{(x,y)\in S}|S_{n,m}(t^2+\tau^2;x,y)-(x^2+y^2)|=0
\end{aligned}
\tag{4.2.1.5}
$$

olduğu gösterilmelidir.

$g(t,\tau)=1$ fonksiyonu için (4.2.1.1) eşitliğinden

$$\lim_{n,m\to\infty}\left\{\max_{(x,y)\in S}|S_{n,m}\,(1;\; x,y)-1|\right\}=0$$

olduğu açıktır.

$g(t,\tau)=t$ fonksiyonu için (4.2.1.2) eşitliği ve üçgen eşitsizliğinden

$$\lim_{n,m\to\infty}\left\{\max_{(x,y)\in S}\left|S_{n,m}\left(t;\ x,y\right)-x\right|\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\max_{\frac{\alpha_1}{n+\beta_1}\le x\le\frac{n+\alpha_1}{n+\beta_1}}\left|\tfrac{n+\beta_1}{n+\sigma_1}x+\tfrac{\gamma_1-\alpha_1}{n+\sigma_1}-x\right|\right\}$$

$$\le\lim_{n\to\infty}\left\{\max_{\frac{\alpha_1}{n+\beta_1}\le x\le\frac{n+\alpha_1}{n+\beta_1}}\left(\left|\tfrac{\beta_1-\sigma_1}{n+\sigma_1}\right|x+\left|\tfrac{\gamma_1-\alpha_1}{n+\sigma_1}\right|\right)\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\tfrac{\beta_1-\sigma_1}{n+\sigma_1}\right)\left(\tfrac{n+\alpha_1}{n+\beta_1}\right)+\tfrac{\gamma_1-\alpha_1}{n+\sigma_1}\right\}$$

$$=0$$

elde edilir. $g(t,\tau)=\tau$ fonksiyonu için (4.2.1.3) eşitliği ve üçgen eşitsizliğinden

$$\lim_{n,m\to\infty}\left\{\max_{(x,y)\in S}\left|S_{n,m}\left(\tau;\ x,y\right)-y\right|\right\}$$

$$=\lim_{m\to\infty}\left\{\max_{\frac{\alpha_2}{m+\beta_2}\le y\le\frac{m+\alpha_2}{m+\beta_2}}\left|\tfrac{m+\beta_2}{m+\sigma_2}y+\tfrac{\gamma_2-\alpha_2}{m+\sigma_2}-y\right|\right\}$$

$$\le\lim_{m\to\infty}\left\{\max_{\frac{\alpha_2}{m+\beta_2}\le y\le\frac{m+\alpha_2}{m+\beta_2}}\left(\left|\tfrac{\beta_2-\sigma_2}{m+\sigma_2}\right|y+\left|\tfrac{\gamma_2-\alpha_2}{m+\sigma_2}\right|\right)\right\}$$

$$=\lim_{m\to\infty}\left\{\left(\tfrac{\beta_2-\sigma_2}{m+\sigma_2}\right)\left(\tfrac{m+\alpha_2}{m+\beta_2}\right)+\tfrac{\gamma_2-\alpha_2}{m+\sigma_2}\right\}$$

$$=0$$

elde edilir.

Son olarak $g(t,\tau)=t^2+\tau^2$ fonksiyonu için (4.2.1.4) eşitliği ve üçgen eşitsizliğinden

$$\lim_{n,m\to\infty}\left\{\max_{(x,y)\in S}\left|S_{n,m}\left(t^2+\tau^2\ ;\ x,y\right)-\left(x^2+y^2\right)\right|\right\}$$

$$=\lim_{n,m\to\infty}\left\{\max_{(x,y)\in S}\left|\left(\tfrac{n+\beta_1}{n+\sigma_1}\right)^2\left(\tfrac{n-1}{n}\right)\left(x-\tfrac{\alpha_1}{n+\beta_1}\right)^2+(1+2\gamma_1)\tfrac{n+\beta_1}{(n+\sigma_1)^2}\left(x-\tfrac{\alpha_1}{n+\beta_1}\right)\right.\right.$$

$$+\tfrac{\gamma_1^2}{(n+\sigma_1)^2}+\left(\tfrac{m+\beta_2}{m+\sigma_2}\right)^2\left(\tfrac{m-1}{m}\right)\left(y-\tfrac{\alpha_2}{m+\beta_2}\right)^2$$

$$\left.\left.+(1+2\gamma_2)\tfrac{m+\beta_2}{(m+\sigma_2)^2}\left(y-\tfrac{\alpha_2}{m+\beta_2}\right)+\tfrac{\gamma_2^2}{(m+\sigma_2)^2}-\left(x^2+y^2\right)\right|\right\}$$

$$=\lim_{n,m\to\infty}\left\{\max_{(x,y)\in S}\left|\left[\left(\tfrac{n+\beta_1}{n+\sigma_1}\right)^2\left(\tfrac{n-1}{n}\right)-1\right]x^2+\left[\left(\tfrac{m+\beta_2}{m+\sigma_2}\right)^2\left(\tfrac{m-1}{m}\right)-1\right]y^2\right.\right.$$

$$+\tfrac{n+\beta_1}{(n+\sigma_1)^2}\left[-2\alpha_1\left(\tfrac{n-1}{n}\right)+1+2\gamma_1\right]x+\tfrac{m+\beta_2}{(m+\sigma_2)^2}\left[-2\alpha_2\left(\tfrac{m-1}{m}\right)+1+2\gamma_2\right]y$$

$$\left.\left.+\tfrac{\alpha_1^2}{(n+\sigma_1)^2}\left(\tfrac{n-1}{n}\right)-\tfrac{(1+2\gamma_1)}{(n+\sigma_1)^2}\alpha_1+\tfrac{\gamma_1^2}{(n+\sigma_1)^2}+\tfrac{\alpha_2^2}{(m+\sigma_2)^2}\left(\tfrac{m-1}{m}\right)-\tfrac{(1+2\gamma_2)}{(m+\sigma_2)^2}\alpha_2+\tfrac{\gamma_2^2}{(m+\sigma_2)^2}\right|\right\}$$

$$\leq\lim_{n,m\to\infty}\left\{\left|\left(\tfrac{n+\beta_1}{n+\sigma_1}\right)^2\left(\tfrac{n-1}{n}\right)-1\right|\left(\tfrac{n+\alpha_1}{n+\beta_1}\right)^2+\left|\left(\tfrac{m+\beta_2}{m+\sigma_2}\right)^2\left(\tfrac{m-1}{m}\right)-1\right|\left(\tfrac{m+\alpha_2}{m+\beta_2}\right)^2+\tfrac{n+\beta_1}{(n+\sigma_1)^2}\right.$$

$$\times\left|-2\alpha_1\left(\tfrac{n-1}{n}\right)+1+2\gamma_1\right|\left(\tfrac{n+\alpha_1}{n+\beta_1}\right)+\tfrac{m+\beta_2}{(m+\sigma_2)^2}\left|-2\alpha_2\left(\tfrac{m-1}{m}\right)+1+2\gamma_2\right|\left(\tfrac{m+\alpha_2}{m+\beta_2}\right)$$

$$\left.+\left|\tfrac{\alpha_1^2}{(n+\sigma_1)^2}\left(\tfrac{n-1}{n}\right)-\tfrac{(1+2\gamma_1)}{(n+\sigma_1)^2}\alpha_1+\tfrac{\gamma_1^2}{(n+\sigma_1)^2}\right|+\left|\tfrac{\alpha_2^2}{(m+\sigma_2)^2}\left(\tfrac{m-1}{m}\right)-\tfrac{(1+2\gamma_2)}{(m+\sigma_2)^2}\alpha_2+\tfrac{\gamma_2^2}{(m+\sigma_2)^2}\right|\right\}$$

$$=0$$

elde edilir. $S^*_{n,m}$ operatörü

$$S^*_{n,m}(f;x,y)=\begin{cases} S_{n,m}(f;x,y) & ; \quad (x,y)\in S \\ f(x,y) & ; \quad (x,y)\in[0,1]\times[0,1]\setminus S\end{cases}$$

şeklinde tanımlansın.

Bu durumda

$$\begin{aligned}\left\|S^*_{n,m}f-f\right\|_{C([0,1]\times[0,1])} &= \max_{(x,y)\in[0,1]\times[0,1]}\left|S^*_{n,m}(f;x,y)-f(x,y)\right| \\ &= \max_{(x,y)\in S}\left|S_{n,m}(f;x,y)-f(x,y)\right| \qquad (4.2.1.6)\end{aligned}$$

eşitliğine ulaşılır. (4.2.1.5) ve (4.2.1.6) ifadeleri kullanılarak

$$\lim_{n,m\to\infty}\left\|S^*_{n,m}(1;x,y)-1\right\|_{C[0,1]\times[0,1]}=0$$

$$\lim_{n,m\to\infty}\left\|S^*_{n,m}(t;x,y)-x\right\|_{C[0,1]\times[0,1]}=0$$

$$\lim_{n,m\to\infty}\left\|S^*_{n,m}(\tau;x,y)-y\right\|_{C[0,1]\times[0,1]}=0$$

$$\lim_{n,m\to\infty}\left\|S^*_{n,m}(t^2+\tau^2;x,y)-(x^2+y^2)\right\|_{C[0,1]\times[0,1]}=0$$

bulunur. Böylece Teorem 2.4.1' den $[0,1]\times[0,1]$ bölgesinde sürekli ve tüm $\mathbb{R}^2$ de sınırlı herhangi bir f fonksiyonu için

$$\lim_{n,m\to\infty}\left\|S^*_{n,m}f-f\right\|_{C[0,1]\times[0,1]}=0$$

elde edilir. Burada (4.2.1.6) eşitliği gözönüne alınırsa

$$\lim_{n,m\to\infty}\left\{\max_{(x,y)\in S}\left|S_{n,m}\left(f\ ;\ x,y\right)-f(x,y)\right|\right\}=0$$

bulunur ve böylece ispat tamamlanır.

$f\in C\left(S\right)$ fonksiyonunun tam ve kısmi süreklilik modülleri yardımıyla (4.2.1) ile tanımlı iki değişkenli Bernstein-Stancu tipli operatörün yaklaşım hızı sıradaki teoremde verilmiştir.

Teorem 4.2.1.2 $f \in C(S)$ olsun. Bu durumda

(i) $\beta_1 - \sigma_1 \geq \gamma_1 - \alpha_1$ ve $\beta_2 - \sigma_2 \geq \gamma_2 - \alpha_2$ için

$$|S_{n,m}(f;x,y) - f(x,y)| \leq \frac{3}{2}\left\{\omega^{(1)}\left(f;\frac{1}{n+\sigma_1}\sqrt{4\left(\beta_1-\sigma_1\right)^2\left(\frac{n+\alpha_1}{n+\beta_1}+1\right)^2+n}\right)\right.$$

$$\left.+\omega^{(2)}\left(f;\frac{1}{m+\sigma_2}\sqrt{4\left(\beta_2-\sigma_2\right)^2\left(\frac{m+\alpha_2}{m+\beta_2}+1\right)^2+m}\right)\right\}$$

$\beta_1 - \sigma_1 < \gamma_1 - \alpha_1$ ve $\beta_2 - \sigma_2 < \gamma_2 - \alpha_2$ için

$$|S_{n,m}(f;x,y) - f(x,y)| \leq \frac{3}{2}\left\{\omega^{(1)}\left(f;\frac{1}{n+\sigma_1}\sqrt{4\left(\gamma_1-\alpha_1\right)^2\left(\frac{n+\alpha_1}{n+\beta_1}+1\right)^2+n}\right)\right.$$

$$\left.+\omega^{(2)}\left(f;\frac{1}{m+\sigma_2}\sqrt{4\left(\gamma_2-\alpha_2\right)^2\left(\frac{m+\alpha_2}{m+\beta_2}+1\right)^2+m}\right)\right\}$$

(ii) $\beta_1 - \sigma_1 \geq \gamma_1 - \alpha_1$ ve $\beta_2 - \sigma_2 \geq \gamma_2 - \alpha_2$ için

$$|S_{n,m}(f;x,y) - f(x,y)|$$

$$\leq \frac{3}{2}\left\{\omega\left(f;\sqrt{\frac{4(\beta_1-\sigma_1)^2\left(\frac{n+\alpha_1}{n+\beta_1}+1\right)^2+n}{(n+\sigma_1)^2}+\frac{4(\beta_2-\sigma_2)^2\left(\frac{m+\alpha_2}{m+\beta_2}+1\right)^2+m}{(m+\sigma_2)^2}}\right)\right\}$$

$\beta_1 - \sigma_1 < \gamma_1 - \alpha_1$ ve $\beta_2 - \sigma_2 < \gamma_2 - \alpha_2$ için

$$|S_{n,m}(f;x,y) - f(x,y)|$$

$$\leq \frac{3}{2}\left\{\omega\left(f;\sqrt{\frac{4(\gamma_1-\alpha_1)^2\left(\frac{n+\alpha_1}{n+\beta_1}+1\right)^2+n}{(n+\sigma_1)^2}+\frac{4(\gamma_2-\alpha_2)^2\left(\frac{m+\alpha_2}{m+\beta_2}+1\right)^2+m}{(m+\sigma_2)^2}}\right)\right\}$$

eşitsizlikleri sağlanır.

İspat.

(i) Lemma 2.2.2 ve üçgen eşitsizliğinden

$$|S_{n,m}(f;x,y)-f(x,y)|$$

$$=\left|\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} f\left(\tfrac{i+\gamma_1}{n+\sigma_1},\tfrac{j+\gamma_2}{m+\sigma_2}\right)p_{n,i,\alpha_1,\beta_1}(x)q_{m,j,\alpha_2,\beta_2}(y)-f(x,y)\right|$$

$$=\left|\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left[f\left(\tfrac{i+\gamma_1}{n+\sigma_1},\tfrac{j+\gamma_2}{m+\sigma_2}\right)-f(x,y)\right]p_{n,i,\alpha_1,\beta_1}(x)q_{m,j,\alpha_2,\beta_2}(y)\right|$$

$$=\left|\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left[f\left(\tfrac{i+\gamma_1}{n+\sigma_1},\tfrac{j+\gamma_2}{m+\sigma_2}\right)-f\left(\tfrac{i+\gamma_1}{n+\sigma_1},y\right)+f\left(\tfrac{i+\gamma_1}{n+\sigma_1},y\right)-f(x,y)\right]\right.$$

$$\left.\times p_{n,i,\alpha_1,\beta_1}(x)q_{m,j,\alpha_2,\beta_2}(y)\right|$$

$$\leq\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left|f\left(\tfrac{i+\gamma_1}{n+\sigma_1},\tfrac{j+\gamma_2}{m+\sigma_2}\right)-f\left(\tfrac{i+\gamma_1}{n+\sigma_1},y\right)+f\left(\tfrac{i+\gamma_1}{n+\sigma_1},y\right)-f(x,y)\right|$$

$$\times\, p_{n,i,\alpha_1,\beta_1}(x)q_{m,j,\alpha_2,\beta_2}(y)$$

$$\leq\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left|f\left(\tfrac{i+\gamma_1}{n+\sigma_1},\tfrac{j+\gamma_2}{m+\sigma_2}\right)-f\left(\tfrac{i+\gamma_1}{n+\sigma_1},y\right)\right|p_{n,i,\alpha_1,\beta_1}(x)q_{m,j,\alpha_2,\beta_2}(y)$$

$$+\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left|f\left(\frac{i+\gamma_1}{n+\sigma_1},y\right)-f(x,y)\right|p_{n,i,\alpha_1,\beta_1}(x)q_{m,j,\alpha_2,\beta_2}(y) \qquad (4.2.1.7)$$

elde edilir. Lemma 2.4.2 (iii) ve Cauchy-Schwartz eşitsizliğinden

$$I_1=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left|f\left(\tfrac{i+\gamma_1}{n+\sigma_1},\tfrac{j+\gamma_2}{m+\sigma_2}\right)-f\left(\tfrac{i+\gamma_1}{n+\sigma_1},y\right)\right|p_{n,i,\alpha_1,\beta_1}(x)q_{m,j,\alpha_2,\beta_2}(y)$$

$$\leq\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\omega^{(2)}\left(f;\left|\tfrac{j+\gamma_2}{m+\sigma_2}-y\right|\right)p_{n,i,\alpha_1,\beta_1}(x)q_{m,j,\alpha_2,\beta_2}(y)$$

$$
\begin{aligned}
I_1 &\leq \sum_{j=0}^{m} \omega^{(2)} \left(f; \left| \tfrac{j+\gamma_2}{m+\sigma_2} - y \right| \right) q_{m,j,\alpha_2,\beta_2}(y) \\
&\leq \sum_{j=0}^{m} \omega^{(2)} \left(f; \delta_m \right) \left[1 + \frac{\left| \frac{j+\gamma_2}{m+\sigma_2} - y \right|}{\delta_m} \right] q_{m,j,\alpha_2,\beta_2}(y) \\
&= \omega^{(2)} \left(f; \delta_m \right) \left\{ \sum_{j=0}^{m} q_{m,j,\alpha_2,\beta_2}(y) + \tfrac{1}{\delta_m} \sum_{j=0}^{m} \left| \tfrac{j+\gamma_2}{m+\sigma_2} - y \right| q_{m,j,\alpha_2,\beta_2}(y) \right\} \\
&= \omega^{(2)} \left(f; \delta_m \right) \left\{ 1 + \tfrac{1}{\delta_m} \sum_{j=0}^{m} \left| \tfrac{j+\gamma_2}{m+\sigma_2} - y \right| \sqrt{q_{m,j,\alpha_2,\beta_2}(y)} \sqrt{q_{m,j,\alpha_2,\beta_2}(y)} \right\} \\
&\leq \omega^{(2)} \left(f; \delta_m \right) \left\{ 1 + \tfrac{1}{\delta_m} \sqrt{ \sum_{j=0}^{m} \left| \tfrac{j+\gamma_2}{m+\sigma_2} - y \right|^2 q_{m,j,\alpha_2,\beta_2}(y) } \right\}
\end{aligned} \tag{4.2.1.8}
$$

eşitsizliği elde edilir. Ayrıca Lemma 4.2.1.1' in ispatında elde edilen eşitliklerden faydalanılıp, gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{m} \left| \tfrac{j+\gamma_2}{m+\sigma_2} - y \right|^2 q_{m,j,\alpha_2,\beta_2}(y) \\
&= \sum_{j=0}^{m} \left(\tfrac{j+\gamma_2}{m+\sigma_2} \right)^2 q_{m,j,\alpha_2,\beta_2}(y) - 2y \sum_{j=0}^{m} \left(\tfrac{j+\gamma_2}{m+\sigma_2} \right) q_{m,j,\alpha_2,\beta_2}(y) + y^2 \sum_{j=0}^{m} q_{m,j,\alpha_2,\beta_2}(y) \\
&= \left(\tfrac{m+\beta_2}{m+\sigma_2} \right)^2 \left(\tfrac{m-1}{m} \right) \left(y - \tfrac{\alpha_2}{m+\beta_2} \right)^2 + (1+2\gamma_2) \tfrac{m+\beta_2}{(m+\sigma_2)^2} \left(y - \tfrac{\alpha_2}{m+\beta_2} \right) \\
&\quad + \tfrac{\gamma_2^2}{(m+\sigma_2)^2} - 2y \left[\tfrac{m+\beta_2}{m+\sigma_2} y + \tfrac{\gamma_2 - \alpha_2}{m+\sigma_2} \right] + y^2 \\
&= \tfrac{1}{(m+\sigma_2)^2} \left\{ \left[(\beta_2 - \sigma_2) y + (\gamma_2 - \alpha_2) \right]^2 + \tfrac{(m+\beta_2)^2}{m} \left(y - \tfrac{\alpha_2}{m+\beta_2} \right) \left(\tfrac{m+\alpha_2}{m+\beta_2} - y \right) \right\}
\end{aligned} \tag{4.2.1.9}
$$

bulunur.

(4.2.1.9) eşitliği (4.2.1.8) eşitsizliğinde gözönüne alınırsa

$$
\begin{aligned}
I_1 \;\; \leq \;\; & \omega^{(2)}\left(f;\delta_m\right)\left\{1+\frac{1}{\delta_m}\frac{1}{(m+\sigma_2)}\left[\left[\left(\beta_2-\sigma_2\right)y+\left(\gamma_2-\alpha_2\right)\right]^2\right.\right. \\
& \left.\left.+\frac{(m+\beta_2)^2}{m}\left(y-\frac{\alpha_2}{m+\beta_2}\right)\left(\frac{m+\alpha_2}{m+\beta_2}-y\right)\right]^{\frac{1}{2}}\right\}
\end{aligned}
$$

eşitsizliği elde edilir. $\frac{(m+\beta_2)^2}{m}\left(y-\frac{\alpha_2}{m+\beta_2}\right)\left(\frac{m+\alpha_2}{m+\beta_2}-y\right) \leq \frac{m}{4}$ eşitsizliği yukardaki eşitsizlikte gözönüne alınırsa

$$
I_1 \leq \omega^{(2)}\left(f;\delta_m\right)\left\{1+\frac{1}{2\delta_m}\frac{1}{(m+\sigma_2)}\sqrt{4\left[\left(\beta_2-\sigma_2\right)y+\left(\gamma_2-\alpha_2\right)\right]^2+m}\right\} \quad (4.2.1.10)
$$

bulunur. Benzer şekilde I_2 için;

$$
I_2 \leq \omega^{(1)}\left(f;\delta_n\right)\left\{1+\frac{1}{2\delta_n}\frac{1}{(n+\sigma_1)}\sqrt{4\left[\left(\beta_1-\sigma_1\right)x+\left(\gamma_1-\alpha_1\right)\right]^2+n}\right\} \quad (4.2.1.11)
$$

yazılabilir. (4.2.1.10) ve (4.2.1.11) eşitsizlikleri (4.2.1.7) eşitsizliğinde gözönüne alınırsa

$$
\begin{aligned}
& |S_{n,m}(f;x,y)-f(x,y)| \\
& \leq \omega^{(1)}\left(f;\delta_n\right)\left\{1+\tfrac{1}{2\delta_n}\tfrac{1}{(n+\sigma_1)}\sqrt{4\left[\left(\beta_1-\sigma_1\right)x+\left(\gamma_1-\alpha_1\right)\right]^2+n}\right. \\
& \quad +\omega^{(2)}\left(f;\delta_m\right)\left\{1+\tfrac{1}{2\delta_m}\tfrac{1}{(m+\sigma_2)}\sqrt{4\left[\left(\beta_2-\sigma_2\right)y+\left(\gamma_2-\alpha_2\right)\right]^2+m}\right.
\end{aligned}
$$

elde edilir.

$\beta_1-\sigma_1 \geq \gamma_1-\alpha_1$ ve $\beta_2-\sigma_2 \geq \gamma_2-\alpha_2$ için

$$
\begin{aligned}
|S_{n,m}(f;x,y)-f(x,y)| \leq & \; \omega^{(1)}\left(f;\delta_n\right)\left\{1+\tfrac{1}{2\delta_n}\tfrac{1}{(n+\sigma_1)}\sqrt{4\left(\beta_1-\sigma_1\right)^2(x+1)^2+n}\right\} \\
& +\omega^{(2)}\left(f;\delta_m\right)\left\{1+\tfrac{1}{2\delta_m}\tfrac{1}{(m+\sigma_2)}\sqrt{4\left(\beta_2-\sigma_2\right)^2(y+1)^2+m}\right\}
\end{aligned}
$$

$$|S_{n,m}(f;x,y)-f(x,y)| \leq \omega^{(1)}(f;\delta_n)\left\{1+\tfrac{1}{2\delta_n}\tfrac{1}{(n+\sigma_1)}\sqrt{4(\beta_1-\sigma_1)^2\left(\tfrac{n+\alpha_1}{n+\beta_1}+1\right)^2+n}\right\}$$

$$+\omega^{(2)}(f;\delta_m)\left\{1+\tfrac{1}{2\delta_m}\tfrac{1}{(m+\sigma_2)}\sqrt{4(\beta_2-\sigma_2)^2\left(\tfrac{m+\alpha_2}{m+\beta_2}+1\right)^2+m}\right\}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}\delta_n &= \frac{1}{n+\sigma_1}\sqrt{4(\beta_1-\sigma_1)^2\left(\frac{n+\alpha_1}{n+\beta_1}+1\right)^2+n}\\ \delta_m &= \frac{1}{(m+\sigma_2)}\sqrt{4(\beta_2-\sigma_2)^2\left(\frac{m+\alpha_2}{m+\beta_2}+1\right)^2+m}\end{aligned}$$

bulunur.

$\beta_1-\sigma_1<\gamma_1-\alpha_1$ ve $\beta_2-\sigma_2<\gamma_2-\alpha_2$ için

$$|S_{n,m}(f;x,y)-f(x,y)| \leq \omega^{(1)}(f;\delta_n)\left\{1+\tfrac{1}{2\delta_n}\tfrac{1}{(n+\sigma_1)}\sqrt{4(\gamma_1-\alpha_1)^2(x+1)^2+n}\right\}$$

$$+\omega^{(2)}(f;\delta_m)\left\{1+\tfrac{1}{2\delta_m}\tfrac{1}{(m+\sigma_2)}\sqrt{4(\gamma_2-\alpha_2)^2(y+1)^2+m}\right\}$$

$$\leq \omega^{(1)}(f;\delta_n)\left\{1+\tfrac{1}{2\delta_n}\tfrac{1}{(n+\sigma_1)}\sqrt{4(\gamma_1-\alpha_1)^2\left(\tfrac{n+\alpha_1}{n+\beta_1}+1\right)^2+n}\right\}$$

$$+\omega^{(2)}(f;\delta_m)\left\{1+\tfrac{1}{2\delta_m}\tfrac{1}{(m+\sigma_2)}\sqrt{4(\gamma_2-\alpha_2)^2\left(\tfrac{m+\alpha_2}{m+\beta_2}+1\right)^2+m}\right\}$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned}\delta_n &= \frac{1}{n+\sigma_1}\sqrt{4(\gamma_1-\alpha_1)^2\left(\frac{n+\alpha_1}{n+\beta_1}+1\right)^2+n}\\ \delta_m &= \frac{1}{(m+\sigma_2)}\sqrt{4(\gamma_2-\alpha_2)^2\left(\frac{m+\alpha_2}{m+\beta_2}+1\right)^2+m}\end{aligned}$$

elde edilir.

(ii) Sırasıyla Lemma 2.2.2, Lemma 2.4.2 (iii) özelliği ve Cauchy-Schwartz eşitsizliği kullanılarak

$$|S_{n,m}(f;x,y)-f(x,y)|$$

$$=\left|\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} f\left(\tfrac{i+\gamma_1}{n+\sigma_1},\tfrac{j+\gamma_2}{m+\sigma_2}\right)p_{n,i,\alpha_1,\beta_1}(x)q_{m,j,\alpha_2,\beta_2}(y)-f(x,y)\right|$$

$$=\left|\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left[f\left(\tfrac{i+\gamma_1}{n+\sigma_1},\tfrac{j+\gamma_2}{m+\sigma_2}\right)-f(x,y)\right]p_{n,i,\alpha_1,\beta_1}(x)q_{m,j,\alpha_2,\beta_2}(y)\right|$$

$$\leq\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left|f\left(\tfrac{i+\gamma_1}{n+\sigma_1},\tfrac{j+\gamma_2}{m+\sigma_2}\right)-f(x,y)\right|p_{n,i,\alpha_1,\beta_1}(x)q_{m,j,\alpha_2,\beta_2}(y)$$

$$\leq\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\omega\left(f;\sqrt{\left(\tfrac{i+\gamma_1}{n+\sigma_1}-x\right)^2+\left(\tfrac{j+\gamma_2}{m+\sigma_2}-y\right)^2}\right)p_{n,i,\alpha_1,\beta_1}(x)q_{m,j,\alpha_2,\beta_2}(y)$$

$$\leq\omega\left(f;\delta_{n,m}\right)\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left(1+\frac{\sqrt{\left(\frac{i+\gamma_1}{n+\sigma_1}-x\right)^2+\left(\frac{j+\gamma_2}{m+\sigma_2}-y\right)^2}}{\delta_{n,m}}\right)p_{n,i,\alpha_1,\beta_1}(x)q_{m,j,\alpha_2,\beta_2}(y)$$

$$=\omega\left(f;\delta_{n,m}\right)\left\{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}p_{n,i,\alpha_1,\beta_1}(x)q_{m,j,\alpha_2,\beta_2}(y)\right.$$

$$\left.+\tfrac{1}{\delta_{n,m}}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\sqrt{\left(\tfrac{i+\gamma_1}{n+\sigma_1}-x\right)^2+\left(\tfrac{j+\gamma_2}{m+\sigma_2}-y\right)^2}p_{n,i,\alpha_1,\beta_1}(x)q_{m,j,\alpha_2,\beta_2}(y)\right\}$$

$$=\omega\left(f;\delta_{n,m}\right)\left\{1+\tfrac{1}{\delta_{n,m}}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\sqrt{\left(\tfrac{i+\gamma_1}{n+\sigma_1}-x\right)^2+\left(\tfrac{j+\gamma_2}{m+\sigma_2}-y\right)^2}\right.$$

$$\left.\times p_{n,i,\alpha_1,\beta_1}(x)q_{m,j,\alpha_2,\beta_2}(y)\right\}$$

$$|S_{n,m}(f;x,y)-f(x,y)|$$

$$\leq \omega\left(f;\delta_{n,m}\right)\left\{1+\tfrac{1}{\delta_{n,m}}\left(\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left[\left(\tfrac{i+\gamma_1}{n+\sigma_1}-x\right)^2+\left(\tfrac{j+\gamma_2}{m+\sigma_2}-y\right)^2\right]\right.\right.$$

$$\left.\left.\times p_{n,i,\alpha_1,\beta_1}(x)q_{m,j,\alpha_2,\beta_2}(y)\right)^{\frac{1}{2}}\right\}$$

$$\leq \omega\left(f;\delta_{n,m}\right)\left\{1+\tfrac{1}{\delta_{n,m}}\left[\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left(\tfrac{i+\gamma_1}{n+\sigma_1}-x\right)^2\times p_{n,i,\alpha_1,\beta_1}(x)q_{m,j,\alpha_2,\beta_2}(y)\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left(\tfrac{j+\gamma_2}{m+\sigma_2}-y\right)^2\times p_{n,i,\alpha_1,\beta_1}(x)q_{m,j,\alpha_2,\beta_2}(y)\right]^{\frac{1}{2}}\right\}$$

$$=\omega\left(f;\delta_{n,m}\right)\left\{1+\frac{1}{\delta_{n,m}}\left[P_1+P_2\right]^{1/2}\right\} \tag{4.2.1.12}$$

eşitsizliği elde edilir. Ayrıca (i) şıkkının ispatında elde edilen (4.2.1.9) eşitliği P_2 toplamını vereceğinden

$$P_2=\tfrac{1}{(m+\sigma_2)^2}\left\{\left[\left(\beta_2-\sigma_2\right)y+\left(\gamma_2-\alpha_2\right)\right]^2+\tfrac{(m+\beta_2)^2}{m}\left(y-\tfrac{\alpha_2}{m+\beta_2}\right)\left(\tfrac{m+\alpha_2}{m+\beta_2}-y\right)\right\}$$

yazılabilir ve benzer şekilde

$$P_1=\tfrac{1}{(n+\sigma_1)^2}\left\{\left[\left(\beta_1-\sigma_1\right)x+\left(\gamma_1-\alpha_1\right)\right]^2+\tfrac{(n+\beta_1)^2}{n}\left(x-\tfrac{\alpha_1}{n+\beta_1}\right)\left(\tfrac{n+\alpha_1}{n+\beta_1}-x\right)\right\}$$

bulunur. P_1 ve P_2 toplamları (4.2.1.12) eşitsizliğinde yazılırsa

$$|S_{n,m}(f;x,y)-f(x,y)|$$

$$\leq \omega\left(f;\delta_{n,m}\right)\left\{1+\tfrac{1}{\delta_{n,m}}\left[\tfrac{1}{(n+\sigma_1)^2}\left\{\left[\left(\beta_1-\sigma_1\right)x+\left(\gamma_1-\alpha_1\right)\right]^2\right.\right.\right.$$

$$+\tfrac{(n+\beta_1)^2}{n}\left(x-\tfrac{\alpha_1}{n+\beta_1}\right)\left(\tfrac{n+\alpha_1}{n+\beta_1}-x\right)\Big\}+\tfrac{1}{(m+\sigma_2)^2}\Big\{\left[\left(\beta_2-\sigma_2\right)y+\left(\gamma_2-\alpha_2\right)\right]^2$$

$$\left.\left.\left.+\tfrac{(m+\beta_2)^2}{m}\left(y-\tfrac{\alpha_2}{m+\beta_2}\right)\left(\tfrac{m+\alpha_2}{m+\beta_2}-y\right)\right\}\right]^{\frac{1}{2}}\right\}$$

$$|S_{n,m}(f;x,y)-f(x,y)|$$

$$\leq \omega\left(f;\delta_{n,m}\right)\left\{1+\tfrac{1}{2\delta_{n,m}}\left[\tfrac{1}{(n+\sigma_1)^2}\left\{4\left[\left(\beta_1-\sigma_1\right)x+\left(\gamma_1-\alpha_1\right)\right]^2+n\right\}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\tfrac{1}{(m+\sigma_2)^2}\left\{4\left[\left(\beta_2-\sigma_2\right)y+\left(\gamma_2-\alpha_2\right)\right]^2+m\right\}\right]^{1/2}\right\}$$

eşitsizliği elde edilir.

$\beta_1-\sigma_1\geq\gamma_1-\alpha_1$ ve $\beta_2-\sigma_2\geq\gamma_2-\alpha_2$ için

$$|S_{n,m}(f;x,y)-f(x,y)|$$

$$\leq \omega\left(f;\delta_{n,m}\right)\left\{1+\tfrac{1}{2\delta_{n,m}}\left[\tfrac{1}{(n+\sigma_1)^2}\left\{4\left(\beta_1-\sigma_1\right)^2\left(x+1\right)^2+n\right\}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\tfrac{1}{(m+\sigma_2)^2}\left\{4\left(\beta_2-\sigma_2\right)^2\left(y+1\right)^2+m\right\}\right]^{\frac{1}{2}}\right\}$$

$$\leq \omega\left(f;\delta_{n,m}\right)\left\{1+\tfrac{1}{2\delta_{n,m}}\left[\tfrac{1}{(n+\sigma_1)^2}\left\{4\left(\beta_1-\sigma_1\right)^2\left(\tfrac{n+\alpha_1}{n+\beta_1}+1\right)^2+n\right\}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\tfrac{1}{(m+\sigma_2)^2}\left\{4\left(\beta_2-\sigma_2\right)^2\left(\tfrac{m+\alpha_2}{m+\beta_2}+1\right)^2+m\right\}\right]^{\frac{1}{2}}\right\}$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned}\delta_{n,m} &= \left[\frac{1}{\left(n+\sigma_1\right)^2}\left\{4\left(\beta_1-\sigma_1\right)^2\left(\frac{n+\alpha_1}{n+\beta_1}+1\right)^2+n\right\}\right.\\ &\quad\left.+\frac{1}{\left(m+\sigma_2\right)^2}\left\{4\left(\beta_2-\sigma_2\right)^2\left(\frac{m+\alpha_2}{m+\beta_2}+1\right)^2+m\right\}\right]^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

elde edilir.

$\beta_1 - \sigma_1 < \gamma_1 - \alpha_1$ ve $\beta_2 - \sigma_2 < \gamma_2 - \alpha_2$ için

$$|S_{n,m}(f;x,y) - f(x,y)|$$

$$\leq \omega(f;\delta_{n,m})\left\{1 + \tfrac{1}{2\delta_{n,m}}\left[\tfrac{1}{(n+\sigma_1)^2}\left\{4(\gamma_1-\alpha_1)^2(x+1)^2+n\right\}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\tfrac{1}{(m+\sigma_2)^2}\left\{4(\gamma_2-\alpha_2)^2(y+1)^2+m\right\}\right]^{\frac{1}{2}}\right\}$$

$$\leq \omega(f;\delta_{n,m})\left\{1 + \tfrac{1}{2\delta_{n,m}}\left[\tfrac{1}{(n+\sigma_1)^2}\left\{4(\gamma_1-\alpha_1)^2\left(\tfrac{n+\alpha_1}{n+\beta_1}+1\right)^2+n\right\}\right.\right.$$

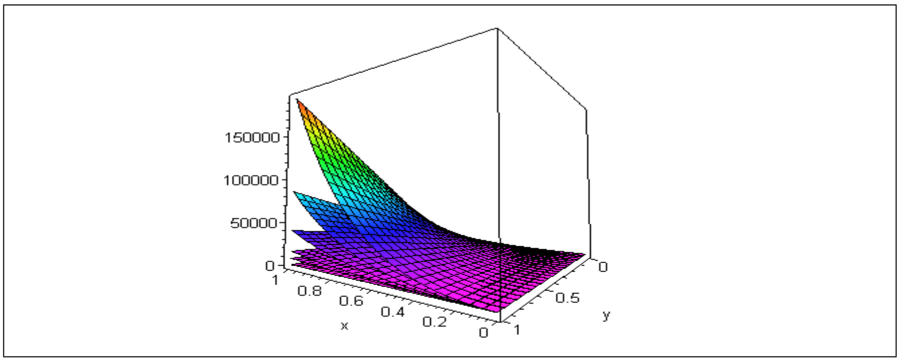
$$\left.\left.+\tfrac{1}{(m+\sigma_2)^2}\left\{4(\gamma_2-\alpha_2)^2\left(\tfrac{m+\alpha_2}{m+\beta_2}+1\right)^2+m\right\}\right]^{\frac{1}{2}}\right\}$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned}\delta_{n,m} &= \left\{\frac{1}{(n+\sigma_1)^2}\left[4(\gamma_1-\alpha_1)^2\left(\frac{n+\alpha_1}{n+\beta_1}+1\right)^2+n\right]\right.\\ &\quad\left.+\frac{1}{(m+\sigma_2)^2}\left[4(\gamma_2-\alpha_2)^2\left(\frac{m+\alpha_2}{m+\beta_2}+1\right)^2+m\right]\right\}^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Örnek 4.2.1.1 $f(x,y) = x^3y$ eşitliği ile tanımlı f fonksiyonuna $S_{n,m}(f;x,y)$ polinomlar dizisiyle yaklaşım $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 2$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 3$, $\beta_1 = \beta_2 = 4$ olmak üzere n=m=3, 5, 8, 11, 15 için şekil 4.2' de gösterilmiştir.



Şekil 4.2 $S_{n,m}(f;x,y)$ polinomlar dizisi ile f fonksiyonuna yaklaşım

Örnek 4.2.1.2 $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 2$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 3$ ve $\beta_1 = \beta_2 = 3.5$ için $f(x,y) = x\sin(y)$ eşitliği ile tanımlı f fonksiyonuna $S_{n,m}(f;x,y)$ polinomlarıyla yaklaşılırken, tam ve kısmi süreklilik modülleriyle elde edilen hata değerleri çizelge 4.2' de verilmiştir.

Çizelge 4.2 $f(x,y) = x\sin(y)$ fonksiyonuna $S_{n,m}(f;x,y)$ polinomlar dizisi ile yaklaşıldığında elde edilen hata değerleri

n, m	tam süreklilik modülüne göre hata	kısmi süreklilik modülüne göre hata
10	0.6934041516	1.303590353
10^2	0.4651383140	0.5413964762
10^3	0.1745790207	0.1824961900
10^4	0.05839924095	0.05921048798
10^5	0.01881056229	0.01889245789
10^6	0.005983590530	0.005991806132
10^7	0.001895722484	0.001896544882
10^8	0.0005998354881	0.0005999177550
10^9	0.0001897202052	0.0001897284327
10^{10}	0.00005999835446	0.00005999917722

4.2.2 Üçgensel bölgede iki değişkenli Bernstein-Stancu tipli polinom

Lemma 4.2.2.1 $n \in \mathbb{N}$ ve $S_n^{\alpha,\alpha_k,\beta,\beta_k}(f;x,y)$ Δ üçgensel bölgesi üzerinde (4.2.2) ile tanımlı iki değişkenli Bernstein-Stancu tipli polinom olmak üzere

$$S_n^{\alpha,\alpha_k,\beta,\beta_k}(1;x,y) = 1 \tag{4.2.2.1}$$

$$S_n^{\alpha,\alpha_k,\beta,\beta_k}(t;x,y) = \tfrac{n+\beta}{n+\beta_1}x + \tfrac{\alpha_1-\alpha}{n+\beta_1} \tag{4.2.2.2}$$

$$S_n^{\alpha,\alpha_k,\beta,\beta_k}(\tau;x,y) = \tfrac{n+\beta}{n+\beta_2}y + \tfrac{\alpha_2-\alpha}{n+\beta_2} \tag{4.2.2.3}$$

$$\begin{aligned} S_n^{\alpha,\alpha_k,\beta,\beta_k}\left(t^2+\tau^2;x,y\right) &= \frac{1}{(n+\beta_1)^2}\Bigg\{(n+\beta)^2\left(\frac{n-1}{n}\right)\left(x-\frac{\alpha}{n+\beta}\right)^2 \\ &+(n+\beta)\left(x-\frac{\alpha}{n+\beta}\right) \\ &+2\alpha_1(n+\beta)\left(x-\frac{\alpha}{n+\beta}\right)+\alpha_1^2\Bigg\} \\ &+\frac{1}{(n+\beta_2)^2}\Bigg\{(n+\beta)^2\left(\frac{n-1}{n}\right)\left(y-\frac{\alpha}{n+\beta}\right)^2 \\ &+(n+\beta)\left(y-\frac{\alpha}{n+\beta}\right) \\ &+2\alpha_2(n+\beta)\left(y-\frac{\alpha}{n+\beta}\right)+\alpha_2^2\Bigg\} \end{aligned} \tag{4.2.2.4}$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat. $g(t,\tau)=1$ için operatörün tanımından ve Binom özdeşliğinden

$$S_n^{\alpha,\alpha_k,\beta,\beta_k}(1;x,y) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k} p_{n,\alpha,\beta}^{k,l}(x,y)$$

$$= \left(\tfrac{n+\beta}{n}\right)^n \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(x-\tfrac{\alpha}{n+\beta}\right)^k \sum_{l=0}^{n-k} C_{n-k}^l \left(y-\tfrac{\alpha}{n+\beta}\right)^l \left(\tfrac{n+2\alpha}{n+\beta}-x-y\right)^{n-k-l}$$

$$S_n^{\alpha,\alpha_k,\beta,\beta_k}(1;x,y) = \left(\tfrac{n+\beta}{n}\right)^n \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(x - \tfrac{\alpha}{n+\beta}\right)^k \left(\tfrac{n+\alpha}{n+\beta} - x\right)^{n-k}$$

$$= \left(\tfrac{n+\beta}{n}\right)^n \left(\tfrac{n}{n+\beta}\right)^n$$

$$= 1$$

elde edilir. $g(t,\tau) = t$ olmak üzere $S_n^{\alpha,\alpha_k,\beta,\beta_k}$ operatörünün lineerliğinden

$$S_n^{\alpha,\alpha_k,\beta,\beta_k}(t;x,y) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k} \left(\tfrac{k+\alpha_1}{n+\beta_1}\right) p_{n,\alpha,\beta}^{k,l}(x,y)$$

$$= \tfrac{1}{n+\beta_1}\left\{\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k} k p_{n,\alpha,\beta}^{k,l}(x,y) + \alpha_1 \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k} p_{n,\alpha,\beta}^{k,l}(x,y)\right\}$$

$$= \tfrac{1}{n+\beta_1}\left\{\left(\tfrac{n+\beta}{n}\right)^n \sum_{k=0}^{n} k C_n^k \left(x - \tfrac{\alpha}{n+\beta}\right)^k \sum_{l=0}^{n-k} C_{n-k}^l \left(y - \tfrac{\alpha}{n+\beta}\right)^l \left(\tfrac{n+2\alpha}{n+\beta} - x - y\right)^{n-k-l}\right\}$$

$$+ \tfrac{\alpha_1}{n+\beta_1}$$

$$= \tfrac{1}{n+\beta_1}\left(\tfrac{n+\beta}{n}\right)^n \sum_{k=0}^{n} k C_n^k \left(x - \tfrac{\alpha}{n+\beta}\right)^k \left(\tfrac{n+\alpha}{n+\beta} - x\right)^{n-k} + \tfrac{\alpha_1}{n+\beta_1}$$

$$= \tfrac{n}{n+\beta_1}\left(\tfrac{n+\beta}{n}\right)^n \sum_{k=0}^{n} \tfrac{k}{n}\tfrac{n!}{k!(n-k)!} \left(x - \tfrac{\alpha}{n+\beta}\right)^k \left(\tfrac{n+\alpha}{n+\beta} - x\right)^{n-k} + \tfrac{\alpha_1}{n+\beta_1}$$

$$= \tfrac{n}{n+\beta_1}\left(\tfrac{n+\beta}{n}\right)^n \left(x - \tfrac{\alpha}{n+\beta}\right) \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k \left(x - \tfrac{\alpha}{n+\beta}\right)^k \left(\tfrac{n+\alpha}{n+\beta} - x\right)^{n-1-k}$$

$$+ \tfrac{\alpha_1}{n+\beta_1}$$

$$= \tfrac{n}{n+\beta_1}\left(\tfrac{n+\beta}{n}\right)^n \left(x - \tfrac{\alpha}{n+\beta}\right)\left(\tfrac{n}{n+\beta}\right)^{n-1} + \tfrac{\alpha_1}{n+\beta_1}$$

$$= \tfrac{n+\beta}{n+\beta_1}x + \tfrac{\alpha_1-\alpha}{n+\beta_1}$$

elde edilir. $g(t,\tau)=\tau$ fonksiyonu için benzer işlemler yapılarak

$$S_n^{\alpha,\alpha_k,\beta,\beta_k}(\tau;x,y)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k}\left(\tfrac{l+\alpha_2}{n+\beta_2}\right)p_{n,\alpha,\beta}^{k,l}(x,y)$$

$$=\tfrac{1}{n+\beta_2}\left\{\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k}lp_{n,\alpha,\beta}^{k,l}(x,y)+\alpha_2\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k}p_{n,\alpha,\beta}^{k,l}(x,y)\right\}$$

$$=\tfrac{1}{n+\beta_2}\left(\tfrac{n+\beta}{n}\right)^n\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left(x-\tfrac{\alpha}{n+\beta}\right)^k\sum_{l=0}^{n-k}lC_{n-k}^l\left(y-\tfrac{\alpha}{n+\beta}\right)^l\left(\tfrac{n+2\alpha}{n+\beta}-x-y\right)^{n-k-l}$$

$$+\tfrac{\alpha_2}{n+\beta_2}$$

$$=\tfrac{1}{n+\beta_2}\left(\tfrac{n+\beta}{n}\right)^n\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left(x-\tfrac{\alpha}{n+\beta}\right)^k(n-k)\sum_{l=0}^{n-k}\tfrac{l}{n-k}\tfrac{(n-k)!}{l!(n-k-l)!}\left(y-\tfrac{\alpha}{n+\beta}\right)^l$$

$$\times\left(\tfrac{n+2\alpha}{n+\beta}-x-y\right)^{n-k-l}+\tfrac{\alpha_2}{n+\beta_2}$$

$$=\tfrac{1}{n+\beta_2}\left(\tfrac{n+\beta}{n}\right)^n\left(y-\tfrac{\alpha}{n+\beta}\right)\sum_{k=0}^{n}(n-k)C_n^k\left(x-\tfrac{\alpha}{n+\beta}\right)^k\sum_{l=1}^{n-k}\tfrac{(n-k-1)!}{(l-1)!(n-k-l)!}$$

$$\times\left(y-\tfrac{\alpha}{n+\beta}\right)^{l-1}\left(\tfrac{n+2\alpha}{n+\beta}-x-y\right)^{n-k-l}+\tfrac{\alpha_2}{n+\beta_2}$$

$$=\tfrac{1}{n+\beta_2}\left(\tfrac{n+\beta}{n}\right)^n\left(y-\tfrac{\alpha}{n+\beta}\right)\sum_{k=0}^{n}(n-k)C_n^k\left(x-\tfrac{\alpha}{n+\beta}\right)^k$$

$$\times\sum_{l=0}^{n-k-1}C_{n-k-1}^l\left(y-\tfrac{\alpha}{n+\beta}\right)^l\left(\tfrac{n+2\alpha}{n+\beta}-x-y\right)^{n-k-1-l}+\tfrac{\alpha_2}{n+\beta_2}$$

$$=\tfrac{n}{n+\beta_2}\left(\tfrac{n+\beta}{n}\right)^n\left(y-\tfrac{\alpha}{n+\beta}\right)\sum_{k=0}^{n}\tfrac{(n-k)}{n}\tfrac{n!}{k!(n-k)!}\left(x-\tfrac{\alpha}{n+\beta}\right)^k\left(\tfrac{n+\alpha}{n+\beta}-x\right)^{n-k-1}+\tfrac{\alpha_2}{n+\beta_2}$$

$$=\tfrac{n}{n+\beta_2}\left(\tfrac{n+\beta}{n}\right)^n\left(y-\tfrac{\alpha}{n+\beta}\right)\sum_{k=0}^{n-1}\tfrac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}\left(x-\tfrac{\alpha}{n+\beta}\right)^k\left(\tfrac{n+\alpha}{n+\beta}-x\right)^{n-1-k}+\tfrac{\alpha_2}{n+\beta_2}$$

$$S_n^{\alpha,\alpha_k,\beta,\beta_k}(\tau;x,y) = \frac{n}{n+\beta_2}\left(\frac{n+\beta}{n}\right)^n\left(y-\frac{\alpha}{n+\beta}\right)\left(\frac{n}{n+\beta}\right)^{n-1}+\frac{\alpha_2}{n+\beta_2}$$

$$= \left(\frac{n+\beta}{n+\beta_2}\right)y+\frac{\alpha_2-\alpha}{n+\beta_2}$$

elde edilir. $g(t,\tau)=t^2+\tau^2$ fonksiyonu için $S_n^{\alpha,\alpha_k,\beta,\beta_k}$ operatörünün lineerliğinden

$$S_n^{\alpha,\alpha_k,\beta,\beta_k}(t^2+\tau^2;x,y)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k}\left[\left(\tfrac{k+\alpha_1}{n+\beta_1}\right)^2+\left(\tfrac{l+\alpha_2}{n+\beta_2}\right)^2\right]p_{n,\alpha,\beta}^{k,l}(x,y)$$

$$=\tfrac{1}{(n+\beta_1)^2}\left\{\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k}k^2p_{n,\alpha,\beta}^{k,l}(x,y)+2\alpha_1\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k}kp_{n,\alpha,\beta}^{k,l}(x,y)\right.$$

$$\left.+\alpha_1^2\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k}p_{n,\alpha,\beta}^{k,l}(x,y)\right\}$$

$$+\tfrac{1}{(n+\beta_2)^2}\left\{\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k}l^2p_{n,\alpha,\beta}^{k,l}(x,y)+2\alpha_2\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k}lp_{n,\alpha,\beta}^{k,l}(x,y)\right.$$

$$\left.+\alpha_2^2\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k}p_{n,\alpha,\beta}^{k,l}(x,y)\right\} \qquad (4.2.2.5)$$

elde edilir.

(4.2.2.5) eşitliğindeki toplamlar daha önce hesaplanan eşitliklerden faydalanılarak hesaplanırsa

$$I_1 = \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k}k^2p_{n,\alpha,\beta}^{k,l}(x,y)$$

$$= \left(\frac{n+\beta}{n}\right)^n\sum_{k=0}^{n}k^2C_n^k\left(x-\frac{\alpha}{n+\beta}\right)^k$$

$$\times\sum_{l=0}^{n-k}C_{n-k}^l\left(y-\frac{\alpha}{n+\beta}\right)^l\left(\frac{n+2\alpha}{n+\beta}-x-y\right)^{n-k-l}$$

$$= \left(\frac{n+\beta}{n}\right)^n\sum_{k=0}^{n}k^2C_n^k\left(x-\frac{\alpha}{n+\beta}\right)^k\left(\frac{n+\alpha}{n+\beta}-x\right)^{n-k}$$

$$
\begin{aligned}
I_1 &= n\left(\frac{n+\beta}{n}\right)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\left(x-\frac{\alpha}{n+\beta}\right)^k\left(\frac{n+\alpha}{n+\beta}-x\right)^{n-k} \\
&= n\left(\frac{n+\beta}{n}\right)^n \sum_{k=1}^{n}(k-1+1)\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}\left(x-\frac{\alpha}{n+\beta}\right)^k\left(\frac{n+\alpha}{n+\beta}-x\right)^{n-k} \\
&= n\left(\frac{n+\beta}{n}\right)^n \left\{\sum_{k=1}^{n}(k-1)\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}\left(x-\frac{\alpha}{n+\beta}\right)^k\left(\frac{n+\alpha}{n+\beta}-x\right)^{n-k}\right. \\
&\quad \left. +\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}\left(x-\frac{\alpha}{n+\beta}\right)^k\left(\frac{n+\alpha}{n+\beta}-x\right)^{n-k}\right\} \\
&= n\left(\frac{n+\beta}{n}\right)^n \left\{(n-1)\left(x-\frac{\alpha}{n+\beta}\right)^2\sum_{k=2}^{n}\frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!}\left(x-\frac{\alpha}{n+\beta}\right)^{k-2}\right. \\
&\quad \times\left(\frac{n+\alpha}{n+\beta}-x\right)^{n-k} \\
&\quad \left. +\left(x-\frac{\alpha}{n+\beta}\right)\sum_{k=0}^{n-1}C_{n-1}^{k}\left(x-\frac{\alpha}{n+\beta}\right)^k\left(\frac{n+\alpha}{n+\beta}-x\right)^{n-1-k}\right\} \\
&= n\left(\frac{n+\beta}{n}\right)^n \left\{(n-1)\left(x-\frac{\alpha}{n+\beta}\right)^2\sum_{k=0}^{n-2}C_{n-2}^{k}\left(x-\frac{\alpha}{n+\beta}\right)^k\right. \\
&\quad \left. \times\left(\frac{n+\alpha}{n+\beta}-x\right)^{n-2-k}+\left(x-\frac{\alpha}{n+\beta}\right)\left(\frac{n}{n+\beta}\right)^{n-1}\right\} \\
&= n(n-1)\left(\frac{n+\beta}{n}\right)^n\left(\frac{n}{n+\beta}\right)^{n-2}\left(x-\frac{\alpha}{n+\beta}\right)^2+(n+\beta)\left(x-\frac{\alpha}{n+\beta}\right) \\
&= (n+\beta)^2\left(\frac{n-1}{n}\right)\left(x-\frac{\alpha}{n+\beta}\right)^2+(n+\beta)\left(x-\frac{\alpha}{n+\beta}\right)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k} k p_{n,\alpha,\beta}^{k,l}(x,y) \\
&= \left(\tfrac{n+\beta}{n}\right)^n\sum_{k=0}^{n} kC_n^k\left(x-\tfrac{\alpha}{n+\beta}\right)^k\sum_{l=0}^{n-k}C_{n-k}^{l}\left(y-\tfrac{\alpha}{n+\beta}\right)^l\left(\tfrac{n+2\alpha}{n+\beta}-x-y\right)^{n-k-l}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \left(\frac{n+\beta}{n}\right)^n \sum_{k=0}^{n} kC_n^k \left(x-\frac{\alpha}{n+\beta}\right)^k \left(\frac{n+\alpha}{n+\beta}-x\right)^{n-k} \\
&= n\left(\frac{n+\beta}{n}\right)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n}\frac{n!}{k!(n-k)!} \left(x-\frac{\alpha}{n+\beta}\right)^k \left(\frac{n+\alpha}{n+\beta}-x\right)^{n-k} \\
&= n\left(\frac{n+\beta}{n}\right)^n \left(x-\frac{\alpha}{n+\beta}\right) \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \left(x-\frac{\alpha}{n+\beta}\right)^{k-1} \\
&\quad \times \left(\frac{n+\alpha}{n+\beta}-x\right)^{n-k} \\
&= n\left(\frac{n+\beta}{n}\right)^n \left(x-\frac{\alpha}{n+\beta}\right) \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k \left(x-\frac{\alpha}{n+\beta}\right)^k \left(\frac{n+\alpha}{n+\beta}-x\right)^{n-1-k} \\
&= n\left(\frac{n+\beta}{n}\right)^n \left(\frac{n}{n+\beta}\right)^{n-1} \left(x-\frac{\alpha}{n+\beta}\right) \\
&= (n+\beta)\left(x-\frac{\alpha}{n+\beta}\right)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Daha önceki hesaplamalarımızdan

$$
I_3 = I_6 = \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k} p_{n,\alpha,\beta}^{k,l}(x,y) = 1
$$

olduğu biliniyor. Benzer şekilde

$$
I_4 = \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k} l^2 p_{n,\alpha,\beta}^{k,l}(x,y)
$$

$$
= \left(\tfrac{n+\beta}{n}\right)^n \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(x-\tfrac{\alpha}{n+\beta}\right)^k \sum_{l=0}^{n-k} l^2 C_{n-k}^l \left(y-\tfrac{\alpha}{n+\beta}\right)^l \left(\tfrac{n+2\alpha}{n+\beta}-x-y\right)^{n-k-l}
$$

$$
= (n-k)\left(\tfrac{n+\beta}{n}\right)^n \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(x-\tfrac{\alpha}{n+\beta}\right)^k \sum_{l=1}^{n-k} l \tfrac{(n-k-1)!}{(l-1)!(n-k-l)!} \left(y-\tfrac{\alpha}{n+\beta}\right)^l
$$

$$
\times \left(\tfrac{n+2\alpha}{n+\beta}-x-y\right)^{n-k-l}
$$

$$I_4 = (n-k)\left(\tfrac{n+\beta}{n}\right)^n \Bigg\{(n-k-1)\sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(x-\tfrac{\alpha}{n+\beta}\right)^k \sum_{l=1}^{n-k}\left(\tfrac{l-1}{n-k-1}\right)$$

$$\times \tfrac{(n-k-1)!}{(l-1)!(n-k-l)!}\left(y-\tfrac{\alpha}{n+\beta}\right)^l \left(\tfrac{n+2\alpha}{n+\beta}-x-y\right)^{n-k-l}$$

$$+\sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(x-\tfrac{\alpha}{n+\beta}\right)^k \sum_{l=1}^{n-k} \tfrac{(n-k-1)!}{(l-1)!(n-k-l)!}\left(y-\tfrac{\alpha}{n+\beta}\right)^l \left(\tfrac{n+2\alpha}{n+\beta}-x-y\right)^{n-k-l}$$

$$= (n-k)\left(\tfrac{n+\beta}{n}\right)^n \Bigg\{(n-k-1)\left(y-\tfrac{\alpha}{n+\beta}\right)^2 \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(x-\tfrac{\alpha}{n+\beta}\right)^k$$

$$\times \sum_{l=2}^{n-k} \tfrac{(n-k-2)!}{(l-2)!(n-k-l)!}\left(y-\tfrac{\alpha}{n+\beta}\right)^{l-2}\left(\tfrac{n+2\alpha}{n+\beta}-x-y\right)^{n-k-l}$$

$$+\left(y-\tfrac{\alpha}{n+\beta}\right)\sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(x-\tfrac{\alpha}{n+\beta}\right)^k$$

$$\times \sum_{l=0}^{n-k-1} C_{n-k-1}^l \left(y-\tfrac{\alpha}{n+\beta}\right)^l \left(\tfrac{n+2\alpha}{n+\beta}-x-y\right)^{n-k-1-l}\Bigg\}$$

$$= (n-k)\left(\tfrac{n+\beta}{n}\right)^n \Bigg\{(n-k-1)\left(y-\tfrac{\alpha}{n+\beta}\right)^2 \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(x-\tfrac{\alpha}{n+\beta}\right)^k$$

$$\times \sum_{l=0}^{n-k-2} C_{n-k-2}^l \left(y-\tfrac{\alpha}{n+\beta}\right)^l \left(\tfrac{n+2\alpha}{n+\beta}-x-y\right)^{n-k-2-l}$$

$$+\left(y-\tfrac{\alpha}{n+\beta}\right)\sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(x-\tfrac{\alpha}{n+\beta}\right)^k \left(\tfrac{n+\alpha}{n+\beta}-x\right)^{n-k-1}\Bigg\}$$

$$= \left(\tfrac{n+\beta}{n}\right)^n \Bigg\{n(n-1)\left(y-\tfrac{\alpha}{n+\beta}\right)^2 \sum_{k=0}^{n} \tfrac{(n-k)(n-k-1)}{n(n-1)}\tfrac{n!}{k!(n-k)!}\left(x-\tfrac{\alpha}{n+\beta}\right)^k$$

$$\times \left(\tfrac{n+\alpha}{n+\beta}-x\right)^{n-k-2} + n\left(y-\tfrac{\alpha}{n+\beta}\right)\sum_{k=0}^{n}\left(\tfrac{n-k}{n}\right)\tfrac{n!}{k!(n-k)!}\left(x-\tfrac{\alpha}{n+\beta}\right)^k \left(\tfrac{n+\alpha}{n+\beta}-x\right)^{n-k-1}$$

$$I_4 = \left(\tfrac{n+\beta}{n}\right)^n \left\{ n(n-1)\left(y-\tfrac{\alpha}{n+\beta}\right)^2 \sum_{k=0}^{n-2} C_{n-2}^k \left(x-\tfrac{\alpha}{n+\beta}\right)^k \left(\tfrac{n+\alpha}{n+\beta}-x\right)^{n-2-k}\right.$$

$$\left. + n\left(y-\tfrac{\alpha}{n+\beta}\right) \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k \left(x-\tfrac{\alpha}{n+\beta}\right)^k \times \left(\tfrac{n+\alpha}{n+\beta}-x\right)^{n-1-k}\right\}$$

$$= \left(\tfrac{n+\beta}{n}\right)^n \left\{ n(n-1)\left(y-\tfrac{\alpha}{n+\beta}\right)^2 \left(\tfrac{n}{n+\beta}\right)^{n-2}\right.$$

$$\left. +n\left(y-\tfrac{\alpha}{n+\beta}\right)\left(\tfrac{n}{n+\beta}\right)^{n-1}\right\}$$

$$= \left(\tfrac{n-1}{n}\right)(n+\beta)^2 \left(y-\tfrac{\alpha}{n+\beta}\right)^2 + (n+\beta)\left(y-\tfrac{\alpha}{n+\beta}\right)$$

elde edilir. Son olarak

$$I_5 = \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k} l p_{n,\alpha,\beta}^{k,l}(x,y)$$

$$= \left(\tfrac{n+\beta}{n}\right)^n \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(x-\tfrac{\alpha}{n+\beta}\right)^k \sum_{l=0}^{n-k} l C_{n-k}^l \left(y-\tfrac{\alpha}{n+\beta}\right)^l \left(\tfrac{n+2\alpha}{n+\beta}-x-y\right)^{n-k-l}$$

$$= (n-k)\left(\tfrac{n+\beta}{n}\right)^n \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(x-\tfrac{\alpha}{n+\beta}\right)^k \sum_{l=0}^{n-k} \left(\tfrac{l}{n-k}\right) \tfrac{(n-k)!}{l!(n-k-l)!}$$

$$\times \left(y-\tfrac{\alpha}{n+\beta}\right)^l \left(\tfrac{n+2\alpha}{n+\beta}-x-y\right)^{n-k-l}$$

$$= (n-k)\left(\tfrac{n+\beta}{n}\right)^n \left(y-\tfrac{\alpha}{n+\beta}\right) \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(x-\tfrac{\alpha}{n+\beta}\right)^k$$

$$\times \sum_{l=1}^{n-k} \tfrac{(n-k-1)!}{(l-1)!(n-k-l)!} \left(y-\tfrac{\alpha}{n+\beta}\right)^{l-1} \left(\tfrac{n+2\alpha}{n+\beta}-x-y\right)^{n-k-l}$$

$$I_5 = (n-k)\left(\tfrac{n+\beta}{n}\right)^n \left(y - \tfrac{\alpha}{n+\beta}\right) \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(x - \tfrac{\alpha}{n+\beta}\right)^k$$

$$\times \sum_{l=0}^{n-k-1} C_{n-k-1}^{l} \left(y - \tfrac{\alpha}{n+\beta}\right)^l \left(\tfrac{n+2\alpha}{n+\beta} - x - y\right)^{n-k-1-l}$$

$$= n\left(\tfrac{n+\beta}{n}\right)^n \left(y - \tfrac{\alpha}{n+\beta}\right) \sum_{k=0}^{n} \tfrac{(n-k)}{n} \tfrac{n!}{k!(n-k)!} \left(x - \tfrac{\alpha}{n+\beta}\right)^k \left(\tfrac{n+\alpha}{n+\beta} - x\right)^{n-k-1}$$

$$= n\left(\tfrac{n+\beta}{n}\right)^n \left(y - \tfrac{\alpha}{n+\beta}\right) \sum_{k=0}^{n-1} \tfrac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} \left(x - \tfrac{\alpha}{n+\beta}\right)^k \left(\tfrac{n+\alpha}{n+\beta} - x\right)^{n-1-k}$$

$$= n\left(\tfrac{n+\beta}{n}\right)^n \left(\tfrac{n}{n+\beta}\right)^{n-1} \left(y - \tfrac{\alpha}{n+\beta}\right)$$

$$= (n+\beta)\left(y - \tfrac{\alpha}{n+\beta}\right)$$

elde edilir. Bu eşitlikler (4.2.2.5) eşitliğinde dikkate alınırsa

$$S_n^{\alpha,\alpha_k,\beta,\beta_k}\left(t^2+\tau^2;x,y\right) = \tfrac{1}{(n+\beta_1)^2}\left\{(n+\beta)^2\left(\tfrac{n-1}{n}\right)\left(x - \tfrac{\alpha}{n+\beta}\right)^2 + (n+\beta)\left(x - \tfrac{\alpha}{n+\beta}\right)\right.$$

$$\left. +2\alpha_1(n+\beta)\left(x - \tfrac{\alpha}{n+\beta}\right) + \alpha_1^2\right\}$$

$$+ \tfrac{1}{(n+\beta_2)^2}\left\{(n+\beta)^2\left(\tfrac{n-1}{n}\right)\left(y - \tfrac{\alpha}{n+\beta}\right)^2 + (n+\beta)\left(y - \tfrac{\alpha}{n+\beta}\right)\right.$$

$$\left. +2\alpha_2(n+\beta)\left(y - \tfrac{\alpha}{n+\beta}\right) + \alpha_2^2\right\}$$

eşitliği elde edilir.

Teorem 4.2.2.1 f , $[0,1]\times[0,1]$ bölgesinde sürekli bir fonksiyon ise

$$\lim_{n\to\infty} \left\| S_n^{\alpha,\alpha_k,\beta,\beta_k} f - f \right\|_{C(\Delta)} = 0$$

gerçeklenir.

İspat. Bu teoremin ispatında Teorem 2.4.1 kullanılacağından öncelikle

$$\lim_{n\to\infty}\max_{(x,y)\in\Delta}\left|S_n^{\alpha,\alpha_k,\beta,\beta_k}(1;x,y)-1\right|=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\max_{(x,y)\in\Delta}\left|S_n^{\alpha,\alpha_k,\beta,\beta_k}(t;x,y)-x\right|=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\max_{(x,y)\in\Delta}\left|S_n^{\alpha,\alpha_k,\beta,\beta_k}(\tau;x,y)-y\right|=0 \tag{4.2.2.6}$$

$$\lim_{n\to\infty}\max_{(x,y)\in\Delta}\left|S_n^{\alpha,\alpha_k,\beta,\beta_k}(t^2+\tau^2;x,y)-(x^2+y^2)\right|=0$$

olduğu gösterilmelidir.

$g(t,\tau)=1$ fonksiyonu için (4.2.2.1) eşitliğinden

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\max_{(x,y)\in\Delta}\left|S_n^{\alpha,\alpha_k,\beta,\beta_k}(1;\ x,y)-1\right|\right\}=0$$

olduğu açıktır. $g(t,\tau)=t$ fonksiyonu için (4.2.2.2) eşitliği ve üçgen eşitsizliğinden

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\max_{(x,y)\in\Delta}\left|S_n^{\alpha,\alpha_k,\beta,\beta_k}(t;\ x,y)-x\right|\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\max_{\frac{\alpha}{n+\beta}\le x\le\frac{n+\alpha}{n+\beta}}\left|\frac{n+\beta}{n+\beta_1}x+\frac{\alpha_1-\alpha}{n+\beta_1}-x\right|\right\}$$

$$\le\lim_{n\to\infty}\left\{\max_{\frac{\alpha}{n+\beta}\le x\le\frac{n+\alpha}{n+\beta}}\left(\left|\frac{\beta-\beta_1}{n+\beta_1}\right|x+\left|\frac{\alpha_1-\alpha}{n+\beta_1}\right|\right)\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{\beta-\beta_1}{n+\beta_1}\right)\left(\frac{n+\alpha}{n+\beta}\right)+\frac{\alpha_1-\alpha}{n+\beta_1}\right\}$$

$$=0$$

elde edilir.

$g(t,\tau)=\tau$ fonksiyonu için (4.2.2.3) eşitliği ve üçgen eşitsizliğinden

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\max_{(x,y)\in\Delta}\left|S_n^{\alpha,\alpha_k,\beta,\beta_k}(\tau;\ x,y)-y\right|\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\max_{\frac{\alpha}{n+\beta}\le x\le\frac{n+\alpha}{n+\beta}}\left|\tfrac{n+\beta}{n+\beta_2}y+\tfrac{\alpha_2-\alpha}{n+\beta_2}-y\right|\right\}$$

$$\le\lim_{n\to\infty}\left\{\max_{\frac{\alpha}{n+\beta}\le x\le\frac{n+\alpha}{n+\beta}}\left(\left|\tfrac{\beta-\beta_2}{n+\beta_2}\right|y+\left|\tfrac{\alpha_2-\alpha}{n+\beta_2}\right|\right)\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\tfrac{\beta-\beta_2}{n+\beta_2}\right)\left(\tfrac{n+\alpha}{n+\beta}\right)+\tfrac{\alpha_2-\alpha}{n+\beta_2}\right\}$$

$$=0$$

elde edilir.

Son olarak $g(t,\tau)=t^2+\tau^2$ fonksiyonu için (4.2.2.4) eşitliği ve üçgen eşitsizliğinden

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\max_{(x,y)\in\Delta}\left|S_n^{\alpha,\alpha_k,\beta,\beta_k}(t^2+\tau^2\ ;\ x,y)-(x^2+y^2)\right|\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\max_{(x,y)\in\Delta}\left|\tfrac{1}{(n+\beta_1)^2}\left[(n+\beta)^2\left(\tfrac{n-1}{n}\right)\left(x-\tfrac{\alpha}{n+\beta}\right)^2+(n+\beta)\left(x-\tfrac{\alpha}{n+\beta}\right)\right.\right.\right.$$

$$\left.+2\alpha_1(n+\beta)\left(x-\tfrac{\alpha}{n+\beta}\right)+\alpha_1^2\right]+\tfrac{1}{(n+\beta_2)^2}\left[(n+\beta)^2\left(\tfrac{n-1}{n}\right)\left(y-\tfrac{\alpha}{n+\beta}\right)^2\right.$$

$$\left.\left.\left.+(n+\beta)\left(y-\tfrac{\alpha}{n+\beta}\right)+2\alpha_2(n+\beta)\left(y-\tfrac{\alpha}{n+\beta}\right)+\alpha_2^2\right]-(x^2+y^2)\right|\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\max_{(x,y)\in\Delta}\left|\left[\left(\tfrac{n+\beta}{n+\beta_1}\right)^2\left(\tfrac{n-1}{n}\right)-1\right]x^2+\left[\left(\tfrac{n+\beta}{n+\beta_2}\right)^2\left(\tfrac{n-1}{n}\right)-1\right]y^2\right.\right.$$

$$+\tfrac{n+\beta}{(n+\beta_1)^2}\left[-2\alpha\left(\tfrac{n-1}{n}\right)+1+2\alpha_1\right]x+\tfrac{n+\beta}{(n+\beta_2)^2}\left[-2\alpha\left(\tfrac{n-1}{n}\right)+1+2\alpha_2\right]y$$

$$\left.\left.+\tfrac{\alpha^2}{(n+\beta_1)^2}\left(\tfrac{n-1}{n}\right)-\tfrac{(1+2\alpha_1)}{(n+\beta_1)^2}\alpha+\tfrac{\alpha_1^2}{(n+\beta_1)^2}+\tfrac{\alpha^2}{(n+\beta_2)^2}\left(\tfrac{n-1}{n}\right)-\tfrac{(1+2\alpha_2)}{(n+\beta_2)^2}\alpha+\tfrac{\alpha_2^2}{(n+\beta_2)^2}\right|\right\}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\max_{(x,y)\in\Delta}\left|S_n^{\alpha,\alpha_k,\beta,\beta_k}\left(t^2+\tau^2\ ;\ x,y\right)-\left(x^2+y^2\right)\right|\right\}$$

$$\leq \lim_{n\to\infty}\left\{\left|\left(\tfrac{n+\beta}{n+\beta_1}\right)^2\left(\tfrac{n-1}{n}\right)-1\right|\left(\tfrac{n+\alpha}{n+\beta}\right)^2+\left|\left(\tfrac{n+\beta}{n+\beta_2}\right)^2\left(\tfrac{n-1}{n}\right)-1\right|\left(\tfrac{n+\alpha}{n+\beta}\right)^2\right.$$

$$+\left|\tfrac{n+\beta}{(n+\beta_1)^2}\right|\left|-2\alpha\left(\tfrac{n-1}{n}\right)+1+2\alpha_1\right|\left(\tfrac{n+\alpha}{n+\beta}\right)$$

$$+\left|\tfrac{n+\beta}{(n+\beta_2)^2}\right|\left|-2\alpha\left(\tfrac{n-1}{n}\right)+1+2\alpha_2\right|\left(\tfrac{n+\alpha}{n+\beta}\right)$$

$$\left.+\left|\tfrac{\alpha^2}{(n+\beta_1)^2}\left(\tfrac{n-1}{n}\right)-\tfrac{(1+2\alpha_1)}{(n+\beta_1)^2}\alpha+\tfrac{\alpha_1^2}{(n+\beta_1)^2}+\tfrac{\alpha^2}{(n+\beta_2)^2}\left(\tfrac{n-1}{n}\right)-\tfrac{(1+2\alpha_2)}{(n+\beta_2)^2}\alpha+\tfrac{\alpha_2^2}{(n+\beta_2)^2}\right|\right\}$$

$$=0$$

elde edilir.

$S^*_{n,\alpha,\alpha_k,\beta,\beta_k}$ operatörü

$$S^*_{n,\alpha,\alpha_k,\beta,\beta_k}(f;x,y)=\begin{cases} S_n^{\alpha,\alpha_k,\beta,\beta_k}(f;x,y) & ;\quad (x,y)\in\Delta \\ f(x,y) & ;\quad (x,y)\in[0,1]\times[0,1]\setminus\Delta \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda

$$\begin{aligned}\left\|S^*_{n,\alpha,\alpha_k,\beta,\beta_k}f-f\right\|_{C([0,1]\times[0,1])} &= \max_{(x,y)\in[0,1]\times[0,1]}\left|S^*_{n,\alpha,\alpha_k,\beta,\beta_k}(f;x,y)-f(x,y)\right| \\ &= \max_{(x,y)\in\Delta}\left|S_n^{\alpha,\alpha_k,\beta,\beta_k}(f;x,y)-f(x,y)\right| \qquad (4.2.2.7)\end{aligned}$$

eşitliğine ulaşılır. (4.2.2.6) ve (4.2.2.7) ifadeleri kullanılarak

$$\lim_{n\to\infty}\left\|S^*_{n,\alpha,\alpha_k,\beta,\beta_k}(1;x,y)-1\right\|_{C[0,1]\times[0,1]}=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\left\|S^*_{n,\alpha,\alpha_k,\beta,\beta_k}(t;x,y)-x\right\|_{C[0,1]\times[0,1]}=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\left\|S^{*}_{n,\alpha,\alpha_k,\beta,\beta_k}(\tau;x,y)-y\right\|_{C[0,1]\times[0,1]}=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\left\|S^{*}_{n,\alpha,\alpha_k,\beta,\beta_k}(t^2+\tau^2;x,y)-(x^2+y^2)\right\|_{C[0,1]\times[0,1]}=0$$

bulunur. Böylece Teorem 2.4.1' den $[0,1]\times[0,1]$ bölgesinde sürekli ve tüm $\mathbb{R}^2$ de sınırlı herhangi bir f fonksiyonu için

$$\lim_{n\to\infty}\left\|S^{*}_{n,\alpha,\alpha_k,\beta,\beta_k}f-f\right\|_{C[0,1]\times[0,1]}=0$$

elde edilir. Burada (4.2.2.7) eşitliği gözönüne alınırsa

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\max_{(x,y)\in\Delta}\left|S_n^{\alpha,\alpha_k,\beta,\beta_k}(f\ ;\ x,y)-f(x,y)\right|\right\}=0$$

bulunur ve böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.2.2.2 $f\in C(\Delta)$ olsun. Bu durumda

(i) $\beta-\beta_1\geq\alpha_1-\alpha$ ve $\beta-\beta_2\geq\alpha_2-\alpha$ için

$$\left|S_n^{\alpha,\alpha_k,\beta,\beta_k}(f;x,y)-f(x,y)\right|\leq 2\omega\left(\frac{\sqrt{4(\beta-\beta_1)^2\left(\frac{n+\alpha}{n+\beta}+1\right)^2+n}}{n+\beta_1},\frac{\sqrt{4(\beta-\beta_2)^2\left(\frac{n+\alpha}{n+\beta}+1\right)^2+n}}{n+\beta_2}\right)$$

(ii) $\beta-\beta_1<\alpha_1-\alpha$ ve $\beta-\beta_2<\alpha_2-\alpha$ için

$$\left|S_n^{\alpha,\alpha_k,\beta,\beta_k}(f;x,y)-f(x,y)\right|\leq 2\omega\left(\frac{\sqrt{4(\alpha_1-\alpha)^2\left(\frac{n+\alpha}{n+\beta}+1\right)^2+n}}{n+\beta_1},\frac{\sqrt{4(\alpha_2-\alpha)^2\left(\frac{n+\alpha}{n+\beta}+1\right)^2+n}}{n+\beta_2}\right)$$

eşitsizlikleri gerçeklenir.

İspat. Lemma 2.2.2, Lemma 2.4.2 (v) ve Cauchy-Schwartz eşitsizliğinden

$$\left|S_n^{\alpha,\alpha_k,\beta,\beta_k}(f;x,y)-f(x,y)\right|=\left|\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k}f\left(\tfrac{k+\alpha_1}{n+\beta_1},\tfrac{l+\alpha_2}{n+\beta_2}\right)p_{n,\alpha,\beta}^{k,l}(x,y)-f(x,y)\right|$$

$$=\left|\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k}\left[f\left(\tfrac{k+\alpha_1}{n+\beta_1},\tfrac{l+\alpha_2}{n+\beta_2}\right)-f(x,y)\right]p_{n,\alpha,\beta}^{k,l}(x,y)\right|$$

$$\leq\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k}\left|f\left(\tfrac{k+\alpha_1}{n+\beta_1},\tfrac{l+\alpha_2}{n+\beta_2}\right)-f(x,y)\right|p_{n,\alpha,\beta}^{k,l}(x,y)$$

$$\leq\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k}\omega\left(\left|x-\tfrac{k+\alpha_1}{n+\beta_1}\right|,\left|y-\tfrac{l+\alpha_2}{n+\beta_2}\right|\right)p_{n,\alpha,\beta}^{k,l}(x,y)$$

$$\leq\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k}\left(\tfrac{1}{\delta_1}\left|x-\tfrac{k+\alpha_1}{n+\beta_1}\right|+\tfrac{1}{\delta_2}\left|y-\tfrac{l+\alpha_2}{n+\beta_2}\right|+1\right)\omega\left(\delta_1,\delta_2\right)p_{n,\alpha,\beta}^{k,l}(x,y)$$

$$=\omega\left(\delta_1,\delta_2\right)\left\{\tfrac{1}{\delta_1}\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k}\left|x-\tfrac{k+\alpha_1}{n+\beta_1}\right|\sqrt{p_{n,\alpha,\beta}^{k,l}(x,y)}\sqrt{p_{n,\alpha,\beta}^{k,l}(x,y)}\right.$$

$$\left.+\tfrac{1}{\delta_2}\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k}\left|y-\tfrac{l+\alpha_2}{n+\beta_2}\right|\sqrt{p_{n,\alpha,\beta}^{k,l}(x,y)}\sqrt{p_{n,\alpha,\beta}^{k,l}(x,y)}+1\right\}$$

$$\leq\omega\left(\delta_1,\delta_2\right)\left\{\tfrac{1}{\delta_1}\left[\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k}\left(x-\tfrac{k+\alpha_1}{n+\beta_1}\right)^2p_{n,\alpha,\beta}^{k,l}(x,y)\right]^{\frac{1}{2}}\left[\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k}p_{n,\alpha,\beta}^{k,l}(x,y)\right]^{\frac{1}{2}}\right.$$

$$\left.+\tfrac{1}{\delta_2}\left[\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k}\left(y-\tfrac{l+\alpha_2}{n+\beta_2}\right)^2p_{n,\alpha,\beta}^{k,l}(x,y)\right]^{\frac{1}{2}}\left[\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k}p_{n,\alpha,\beta}^{k,l}(x,y)\right]^{\frac{1}{2}}+1\right\}$$

$$=\omega\left(\delta_1,\delta_2\right)\left\{\tfrac{1}{\delta_1}\left[\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k}\left(x-\tfrac{k+\alpha_1}{n+\beta_1}\right)^2p_{n,\alpha,\beta}^{k,l}(x,y)\right]^{\frac{1}{2}}\right.$$

$$\left.+\tfrac{1}{\delta_2}\left[\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k}\left(y-\tfrac{l+\alpha_2}{n+\beta_2}\right)^2p_{n,\alpha,\beta}^{k,l}(x,y)\right]^{\frac{1}{2}}+1\right\} \tag{4.2.2.8}$$

elde edilir. Burada

$$I_1 = \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n-k} \left(x - \tfrac{k+\alpha_1}{n+\beta_1} \right)^2 p_{n,\alpha,\beta}^{k,l}(x,y)$$

$$= x^2 \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n-k} p_{n,\alpha,\beta}^{k,l}(x,y) - 2x \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n-k} \left(\tfrac{k+\alpha_1}{n+\beta_1} \right) p_{n,\alpha,\beta}^{k,l}(x,y)$$

$$+ \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n-k} \left(\tfrac{k+\alpha_1}{n+\beta_1} \right)^2 p_{n,\alpha,\beta}^{k,l}(x,y)$$

$$= x^2 - 2x \left[\left(\tfrac{n+\beta}{n+\beta_1} \right) x + \tfrac{\alpha_1 - \alpha}{n+\beta_1} \right] + \tfrac{1}{(n+\beta_1)^2} \left[(n+\beta)^2 \left(\tfrac{n-1}{n} \right) \left(x - \tfrac{\alpha}{n+\beta} \right)^2 \right.$$

$$\left. + (n+\beta) \left(x - \tfrac{\alpha}{n+\beta} \right) + 2\alpha_1 (n+\beta) \left(x - \tfrac{\alpha}{n+\beta} \right) + \alpha_1^2 \right]$$

$$= \tfrac{1}{(n+\beta_1)^2} \left\{ (n+\beta_1)^2 x^2 - 2x (n+\beta_1) \left[(n+\beta) x + \alpha_1 - \alpha \right] + (n+\beta)^2 \left(\tfrac{n-1}{n} \right) \right.$$

$$\left. \times \left(x - \tfrac{\alpha}{n+\beta} \right)^2 + (n+\beta) \left(x - \tfrac{\alpha}{n+\beta} \right) + 2\alpha_1 (n+\beta) \left(x - \tfrac{\alpha}{n+\beta} \right) + \alpha_1^2 \right\}$$

$$= \tfrac{1}{(n+\beta_1)^2} \left\{ (n+\beta_1)^2 x^2 - 2x (n+\beta_1) \left[(n+\beta) x + \alpha_1 - \alpha \right] + 2\alpha_1 (n+\beta) \right.$$

$$\left. \times \left(x - \tfrac{\alpha}{n+\beta} \right) + \alpha_1^2 \tfrac{(n+\beta)^2}{n} \left(x - \tfrac{\alpha}{n+\beta} \right) \left(\tfrac{n+\alpha}{n+\beta} - x \right) + (n+\beta)^2 \left(x - \tfrac{\alpha}{n+\beta} \right)^2 \right\}$$

$$= \tfrac{1}{(n+\beta_1)^2} \left\{ \left[(\beta - \beta_1) x + (\alpha_1 - \alpha) \right]^2 + \tfrac{(n+\beta)^2}{n} \left(x - \tfrac{\alpha}{n+\beta} \right) \left(\tfrac{n+\alpha}{n+\beta} - x \right) \right\}$$

bulunur. Benzer şekilde

$$I_2 = \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n-k} \left(y - \tfrac{l+\alpha_2}{n+\beta_2} \right)^2 p_{n,\alpha,\beta}^{k,l}(x,y)$$

$$= \tfrac{1}{(n+\beta_2)^2} \left\{ \left[(\beta - \beta_2) y + (\alpha_2 - \alpha) \right]^2 + \tfrac{(n+\beta)^2}{n} \left(y - \tfrac{\alpha}{n+\beta} \right) \left(\tfrac{n+\alpha}{n+\beta} - y \right) \right\}$$

elde edilir.

I_1 ve I_2 toplamları (4.2.2.8) eşitsizliğinde yazılırsa

$$\left|S_n^{\alpha,\alpha_k,\beta,\beta_k}(f;x,y)-f(x,y)\right|$$

$$\leq \omega(\delta_1,\delta_2)\left\{\frac{1}{\delta_1}[I_1]^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{\delta_2}[I_2]^{\frac{1}{2}}+1\right\}$$

$$=\omega(\delta_1,\delta_2)\left\{\frac{1}{\delta_1}\left[\frac{1}{(n+\beta_1)^2}\left([(\beta-\beta_1)x+(\alpha_1-\alpha)]^2\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{(n+\beta)^2}{n}\left(x-\frac{\alpha}{n+\beta}\right)\left(\frac{n+\alpha}{n+\beta}-x\right)\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$+\frac{1}{\delta_2}\left[\frac{1}{(n+\beta_2)^2}\left([(\beta-\beta_2)y+(\alpha_2-\alpha)]^2\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\frac{(n+\beta)^2}{n}\left(y-\frac{\alpha}{n+\beta}\right)\left(\frac{n+\alpha}{n+\beta}-y\right)\right)\right]^{\frac{1}{2}}+1\right\}$$

elde edilir.

Şimdi bu eşitsizliği irdeleyelim. $g(x)=\frac{(n+\beta)^2}{n}\left(x-\frac{\alpha}{n+\beta}\right)\left(\frac{n+\alpha}{n+\beta}-x\right)$ eşitliği ile g fonksiyonu tanımlansın. Daha önceki ispatlarda olduğu gibi $\max\limits_{\frac{\alpha}{n+\beta}\leq x\leq\frac{n+\alpha}{n+\beta}} g(x)=\frac{n}{4}$ bulunur. Benzer şekilde $h(x)=\frac{(n+\beta)^2}{n}\left(y-\frac{\alpha}{n+\beta}\right)\left(\frac{n+\alpha}{n+\beta}-y\right)$ eşitliği ile h fonksiyonu tanımlandığında $\max\limits_{\frac{\alpha}{n+\beta}\leq y\leq\frac{n+\alpha}{n+\beta}} h(x)=\frac{n}{4}$ elde edilir. Bu iki eşitlik yukarıdaki eşitsizlikte dikkate alınırsa

$$\left|S_n^{\alpha,\alpha_k,\beta,\beta_k}(f;x,y)-f(x,y)\right|$$

$$\leq \omega(\delta_1,\delta_2)\left\{\frac{1}{\delta_1}\frac{1}{2(n+\beta_1)}\left[4[(\beta-\beta_1)x+(\alpha_1-\alpha)]^2+n\right]^{\frac{1}{2}}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\delta_2}\frac{1}{2(n+\beta_2)}\left[4[(\beta-\beta_2)y+(\alpha_2-\alpha)]^2+n\right]^{\frac{1}{2}}+1\right\}$$

elde edilir.

(i) $\beta-\beta_1 \geq \alpha_1-\alpha$ ve $\beta-\beta_2 \geq \alpha_2-\alpha$ ise,

$$\left|S_n^{\alpha,\alpha_k,\beta,\beta_k}(f;x,y)-f(x,y)\right|$$

$$\leq \omega(\delta_1,\delta_2)\left\{\frac{1}{\delta_1}\frac{1}{2(n+\beta_1)}\left[4(\beta-\beta_1)^2(x+1)^2+n\right]^{\frac{1}{2}}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\delta_2}\frac{1}{2(n+\beta_2)}\left[4(\beta-\beta_2)^2(y+1)^2+n\right]^{\frac{1}{2}}+1\right\}$$

$$\leq \omega(\delta_1,\delta_2)\left\{\frac{1}{\delta_1}\frac{1}{2(n+\beta_1)}\left[4(\beta-\beta_1)^2\left(\frac{n+\alpha}{n+\beta}+1\right)^2+n\right]^{\frac{1}{2}}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\delta_2}\frac{1}{2(n+\beta_2)}\left[4(\beta-\beta_2)^2\left(\frac{n+\alpha}{n+\beta}+1\right)^2+n\right]^{\frac{1}{2}}+1\right\}$$

elde edilir. Burada

$$\delta_1=\frac{\sqrt{4(\beta-\beta_1)^2\left(\frac{n+\alpha}{n+\beta}+1\right)^2+n}}{n+\beta_1}$$

$$\delta_2=\frac{\sqrt{4(\beta-\beta_2)^2\left(\frac{n+\alpha}{n+\beta}+1\right)^2+n}}{n+\beta_2}$$

olup

$$\left|S_n^{\alpha,\alpha_k,\beta,\beta_k}(f;x,y)-f(x,y)\right| \leq 2\omega\left(\frac{\sqrt{4(\beta-\beta_1)^2\left(\frac{n+\alpha}{n+\beta}+1\right)^2+n}}{n+\beta_1},\frac{\sqrt{4(\beta-\beta_2)^2\left(\frac{n+\alpha}{n+\beta}+1\right)^2+n}}{n+\beta_2}\right)$$

elde edilir.

(ii) $\beta-\beta_1 < \alpha_1-\alpha$ ve $\beta-\beta_2 < \alpha_2-\alpha$ ise benzer şekilde

$$\left|S_n^{\alpha,\alpha_k,\beta,\beta_k}(f;x,y)-f(x,y)\right|$$

$$\leq \omega(\delta_1,\delta_2)\left\{\frac{1}{\delta_1}\frac{1}{2(n+\beta_1)}\left[4(\alpha_1-\alpha)^2(x+1)^2+n\right]^{\frac{1}{2}}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\delta_2}\frac{1}{2(n+\beta_2)}\left[4(\alpha_2-\alpha)^2(y+1)^2+n\right]^{\frac{1}{2}}+1\right\}$$

$$\left|S_n^{\alpha,\alpha_k,\beta,\beta_k}(f;x,y)-f(x,y)\right|$$

$$\leq \omega(\delta_1,\delta_2)\left\{\frac{1}{\delta_1}\frac{1}{2(n+\beta_1)}\left[4(\alpha_1-\alpha)^2\left(\frac{n+\alpha}{n+\beta}+1\right)^2+n\right]^{\frac{1}{2}}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\delta_2}\frac{1}{2(n+\beta_2)}\left[4(\alpha_2-\alpha)^2\left(\frac{n+\alpha}{n+\beta}+1\right)^2+n\right]^{\frac{1}{2}}+1\right\}$$

elde edilir ve buradan

$$\delta_1=\frac{\sqrt{4(\alpha_1-\alpha)^2\left(\frac{n+\alpha}{n+\beta}+1\right)^2+n}}{n+\beta_1}$$

$$\delta_2=\frac{\sqrt{4(\alpha_2-\alpha)^2\left(\frac{n+\alpha}{n+\beta}+1\right)^2+n}}{n+\beta_2}$$

olup

$$\left|S_n^{\alpha,\alpha_k,\beta,\beta_k}(f;x,y)-f(x,y)\right|\leq 2\omega\left(\frac{\sqrt{4(\alpha_1-\alpha)^2\left(\frac{n+\alpha}{n+\beta}+1\right)^2+n}}{n+\beta_1},\frac{\sqrt{4(\alpha_2-\alpha)^2\left(\frac{n+\alpha}{n+\beta}+1\right)^2+n}}{n+\beta_2}\right)$$

elde edilir.

KAYNAKLAR

Altomare, F. and Campiti, M. 1993. Korovkin-type Approximation Theory and its Applications. Walter de Gruyter, 627 p., New York.

Bernstein, S. 1912. Démonstration du théorème de Weierstrass fondeé sur le calcul des probabilités. Commun. Soc. Math. Kharkow (2), Vol. 13, pp. 1-2.

Büyükyazıcı, İ. 2003a. İki Değişkenli Bernstein Polinomları Üzerine. G.Ü. Fen Bilimleri Dergisi, Vol. 16, s. 63-67.

Büyükyazıcı, İ. 2003b. İki Değişkenli Bernstein Polinomlarının Yaklaşma Hızı Üzerine. G.Ü. Kastamonu Eğitim Dergisi, Vol. 11, s. 165-174.

Büyükyazıcı, İ. ve İbikli, E. 2004. The Properties of Generalized Bernstein Polynomials of Two Variables. Applied Mathematics and Computation, Vol. 156, pp. 367-380.

Gadjiev, A.D.and Ghorbanalizadeh, A.M. 2010. Approximation properties of a new type Bernstein–Stancu polynomials of one and two variables. Applied Mathematics and Computation, Vol. 24, pp. 890-901.

Hacıyev, A. ve Hacısalihoğlu, H.H. 1995. Lineer Pozitif Operatör Dizilerinin Yakınsaklığı. A.Ü.F.F. Döner Sermaye İşletmesi Yayınları, 100 s, Ankara.

Ipatov, A.F. 1955. Estimation of the error and order of approximation of functions of two variables by Bernstein polynomials (Russian). Uc. Zap. Petrozavodsk. Gos. Univ., 4, no. 4, pp. 31–48.

İbikli, E. 2005. On approximation for functions of two variables on a triangular domain. Rocky Mountain J.Math., Vol. 5, pp. 1523-1531.

Korovkin, P.P. 1953. On convergence of linear positive operators in the space of continuous functions. Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S), Vol. 90, pp. 961-964.

Korovkin, P.P. 1960. Linear Operators and Approximation Theory. Russian Monographs and Texts on advanced Math., III, 1-63p., Gordon&Breach.

Kreyszig, E. 1978. Introductory Functional Analysis with Applications. pp. 82-469. Toronto.

Lorentz, G.G. 1953. Bernstein Polynomials. University of Toronto Press. 36 p., Toronto.

Martinez, F.L. 1989. Some properties of two-demansional Bernstein polynomials. Journal of Approximation Theory, Vol. 59, pp. 300-306.

Musayev, B., Alp, M. ve Mustafayev, N. 2003. Teori ve Çözümlü Problemlerle Analiz II. Tekağaç Eylül Yayıncılık. 1204 s., Kütahya.

Natanson, I.P. 1961. Theory of Functions of a Real Variable. Frederick Ungar Publishing Company. pp. 215-218., New York.

Popoviciu, T. 1934. Sur l'approximation des fonctions convexes d'ordre superieur, Mathematica (Cluj), Vol. 10, pp. 49–54.

Rudin, W. 1921. Functional Analysis. Kingsport Press, Inc. 6p., United States of America.

Stancu, D.D. 1963. A method for obtaining polynomials of Bernstein type of two variables. Am. Math. Mon., Vol. 70 , pp. 260–264.

Stancu, D.D. 1969. Asupra unei generalizări a polinoamelor lui Bernstein. Studia Univ. Babes-Bolyai (Rumence), Ser. Math.-Phys., Vol. 14, pp. 31-45.

Stancu, D.D. 1983. Approximation of functions by means of a new generalized Bernstein operator. Estratto da Calcola. XX, pp. 211-229.

Shisha, O. and Mond, B. 1968. The degree of convergence of linear positive operators, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A, 60, pp. 1196-1200

Volkov, V.I. 1957. Convergence of sequences of linear positive operators in the space of continuous functions of two variables. Dokl. Akad. Nauk. SSSR, 115, pp. 17-19.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	:	Yeşim DÖNE
Doğum Yeri	:	ANKARA
Doğum Tarihi	:	28.08.1986
Medeni Hali	:	Bekar
Yabancı Dili	:	İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise	:	Ankara Atatürk Anadolu Lisesi (2004)
Lisans	:	Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü (2009)
Yüksek Lisans	:	Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı (Eylül 2009 – Temmuz 2011)