

T.C.
GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ
MÜHENDİSLİK VE FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DALGA KILAVUZLARI BOYUNCA GEÇİCİ
SİNYALLERİN TRANSFERİ

Emre EROĞLU
DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GEBZE
2011

T.C.
GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ
MÜHENDİSLİK VE FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DALGA KILAVUZLARI BOYUNCA GEÇİCİ
SİNYALLERİN TRANSFERİ.

Emre EROĞLU
DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

TEZ DANIŞMANI
Prof. Dr. Oleg A. TRETAKOV

GEBZE
2011



DOKTORA TEZİ JÜRİ ONAY SAYFASI

G.Y.T.E. Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 11.11.2011 tarih ve 2011/38 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından 21.11/2011 tarihinde tez savunma sınavı yapılan Emre EROĞLU'nun tez çalışması MATEMATİK Anabilim Dalında DOKTORA tezi olarak kabul edilmiştir.

JÜRİ

ÜYE

(TEZ DANIŞMANI) : Prof. Dr. Oleg A. TRETYAKOV

ÜYE

: Prof. Dr. Tahir A. AZEROĞLU

ÜYE

: Prof. Dr. Mithat İDEMEN

ÜYE

: Prof. Dr. Mansur İSMAİLOV

ÜYE

: Doç. Dr. Mustafa NADAR

ONAY

G.Y.T.E. Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 28.11/2011 tarih ve 2011/39 sayılı kararı.

İMZA/MÜHÜR

Prof. Dr. Ali AKKUMRU
Enstitü Başkanı



ÖZET

TEZİN BAŞLIĞI: DALGA KILAVUZLARI BOYUNCA GEÇİCİ SİNYALLERİN TRANSFERİ.

YAZAR ADI : EMRE EROĞLU

Bu çalışmada; mükemmel iletken yüzeylerden yapılmış bir dalga kılavuzu içerisinde herhangi bir formda olan uyarıcı kaynak fonksiyonlarının oluşturacağı elektromagnetik alan ifadelerinin çözülmesi problemi “*Elektromagnetik Teoriye Evrimsel Yaklaşım*” (EAE) adı verilen analitik bir zaman uzayı yöntemi ile ele alınmıştır.

TE ve *TM* dalga kılavuzu modlarının bir tam kümesi direk olarak zaman-uzayında elde edilmiştir. Modların her bir alan bileşeni iki faktörün ürünüdür: Birincisi modal baz problemine karşılık gelen *enlemsel* dalga kılavuzu koordinatlarının bir vektör fonksiyonudur. Bu fonksiyon iyi çalışılmış Dirichlet ve Neumann sınır-özdeğer problemi yoluyla belirlenir. Fiziksel olarak, bu vektör fonksiyonları dalga kılavuzu kesit-alanı içerisinde modal kuvvet yollarıdır. İkincisi ise zaman-bağımlı modal genlik problemine karşılık gelen skalar bir fonksiyondur. Bu fonksiyon Klein-Gordon denkleminin dalga kılavuzunun *eksenel* koordinat ve zamana bağlı çözümü olarak elde edilir. Sonuç olarak, dalga kılavuzunda zaman-uzayı sinyal yayılması problemi *nedensellik prensibine* bağlı kalınarak analitik olarak çözülmüştür. *Enerji*, *enerji artımı* (*surplus of the energy*) ve genlikler için sayısal sonuçlar, tamsayı ve yarı-tamsayı indisli Bessel fonksiyonları yardımıyla ortaya konulmuştur.

SUMMARY

TITLE OF THE THESIS: TRANSFERRING OF THE TRANSIENT SIGNALS ALONG WAVEGUIDES.

AUTHOR : EMRE EROĞLU

In this study, the problem of electromagnetic field strength which are produced by a given source function which has arbitrary time dependency in a waveguide having perfect electric conductor surface is considered by an analytical time domain method called *Evolutionary Approach to Electromagnetics* (EAE).

A complete set of *TE* and *TM* waveguide modes is obtained in *time-domain*, directly. Every field component of the modes is product of two factors: First one is a vector function of *transverse* waveguide coordinates which corresponds to a modal basis problem. It is specified via well studied Dirichlet and Neumann boundary eigenvalue problems. Physically, these vector functions are distributions of the modal force lines in the waveguide cross-section. The second one is a scalar function corresponds to a time-dependent modal amplitude problem. This is obtained as the solution of Klein-Gordon equation depend on the waveguide's longitudinal coordinate and time. Consequently, the problem of time-domain signal propagation in the waveguide is solved analytically in compliance with a *causality principle*. The graphical results are shown for the cases when the *energy, surplus of the energy* and amplitudes for the waveguide time-domain waveguide modes are represented via the first kind Bessel functions of semi-integer order.

Keywords: Electromagnetic theory, Maxwell equations, time-domain, evolutionary equations, modal basis, modal amplitude, Bessel function, semi-integer order, Heaviside step function, surplus of energy.

TEŞEKKÜR

Doktora öğrenimim süresince bana modern öğretim ve araştırma imkânlarını sağlayan Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü Matematik ve Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalı'ndaki öğretim üyelerine teşekkürlerimi sunarım.

Destekleri ile her zaman yanımda olan Doç. Dr. Serkan Aksoy ve Araş. Gör. Kadir Durgut'a teşekkürlerimi sunarım.

Doktora öğrenimim süresince gerekli ilgi, destek ve yardımlarını esirgemeyen danışman hocam Prof. Dr. O. A. Tretyakov'a teşekkürü bir borç bilirim.

Beni yetiştiren, sevgi, destek ve yardımlarını hep yanı başımda hissettiğim aileme sonsuz teşekkür ederim.

Emre EROĞLU

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	IV
SUMMARY	V
TEŞEKKÜR	VI
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	VII
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	IX
ŞEKİLLER DİZİNİ	X
1. GİRİŞ	
1.1. Konu ve Önemi	1
1.2. Tezin Amacı ve İçeriği	3
1.3. Tarihsel Gelişim	4
2. ZAMAN UZAYI MODLARI PROBLEMİ	
2.1. Giriş	8
2.2. <i>TE</i> Zaman-Uzayı Modları	9
2.3. <i>TM</i> Zaman-Uzayı Modları	12
3. ZAMAN UZAYI MODLARININ GENEL ÖZELLİKLERİ	
3.1. Zaman-Uzayı Modlarının Tamlığı	14
3.2. Zaman-Uzayı Modlarının Rölativistik Değişmezliği	15
3.3. Zaman-Uzayı Modları için Enerjinin Korunumu	17
3.4. Klein-Gordon Denklemi için Başlangıç Koşulları	18
3.5. Nedensellik Prensibi	18

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

\mathbf{r}	: Konum vektörü (m)
t	: Zaman (s)
\mathbf{E}_m	: Elektrik alan vektörü (V/m)
\mathbf{H}_m	: Magnetik alan vektörü (A/m)
X_m	: \mathbf{E}_m ve \mathbf{H}_m vektörlerinden oluşan $col(\mathbf{E}_m(\mathbf{r},t), \mathbf{H}_m(\mathbf{r},t))$ vektörü
$H(t)$: Heaviside basamak fonksiyonu
\mathbf{F}	: Alanları uyaran dalga formu vektörü
∂_t	: Zamana göre kısmi türev operatörü (1/s)
$\mathbf{E}(\mathbf{r})$: Bazın “elektrik” elemanı olarak üç-bileşenli vektör
$\mathbf{H}(\mathbf{r})$: Bazın “magnetik” elemanı olarak üç-bileşenli vektör
$X(\mathbf{r})$: $col(\mathbf{E}(\mathbf{r}), \mathbf{H}(\mathbf{r}))$ şeklinde oluşan altı-bileşenli vektör
\mathbf{G}, \mathfrak{I}	: Maxwell denklemlerinden ayrıştırılan operatörler
ϵ_0	: Boşluğun dielektrik sabiti (F/m)
μ_0	: Boşluğun magnetik sabiti (H/m)
c	: Işığın boşluktaki hızı (m/s) ($c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$)
∂_n	: Normal türev
κ_n	: Dirichlet probleminin özdeğerleri
ϕ_n	: Dirichlet probleminin özfonksiyonları
ν_m	: Neumann probleminin özdeğerleri
ψ_n	: Neumann probleminin özfonksiyonları
e_m	: $\mathbf{E}_m(\mathbf{r},t)$ ’nin zaman-bağımlı modal genlikleri.
h_m	: $\mathbf{H}_m(\mathbf{r},t)$ ’nin zaman-bağımlı modal genlikleri.
$\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_s)$: Dirac delta-fonksiyonu
TE	: Enlemsel Elektrik (Transverse Electric)
TM	: Enlemsel Magnetik (Transverse Magnetic)

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Sekil</u>	<u>Sayfa</u>
4.1. $J_0(x)$, $J_1(x)$, $J_2(x)$ ve $J_3(x)$ fonksiyonlarının grafiği.	31
4.2. $Y_0(x)$, $Y_1(x)$, $Y_2(x)$ ve $Y_3(x)$ fonksiyonlarının grafiği.	32
4.3. $J_0(x)$ ve $Y_0(x)$ 'ın grafiği.	35
4.4. $J_{1/2}(x)$, $J_{3/2}(x)$, $J_{5/2}(x)$ ve $J_{7/2}(x)$ fonksiyonlarının grafiği.	46
4.5. $Y_{1/2}(x)$, $Y_{3/2}(x)$, $Y_{5/2}(x)$ ve $Y_{7/2}(x)$ fonksiyonlarının grafiği.	47
4.6. $P_0(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$, $P_4(x)$ ve $P_5(x)$ fonksiyonlarının grafiği.	52
5.1. Modal genliklerin $0 \leq \xi \leq \tau$ aralığında değişimi. $\tau = 10$ sabit, $\alpha = 0$.	72
5.2. Modal genliklerin $0 \leq \xi \leq \tau$ aralığında değişimi. $\tau = 20$ sabit, $\alpha = 0$.	73
5.3. Modal genliklerin $0 \leq \xi \leq \tau$ aralığında değişimi. $\tau = 10$ sabit, $\alpha = 1$.	73
5.4. Modal genliklerin $0 \leq \xi \leq \tau$ aralığında değişimi. $\tau = 20$ sabit, $\alpha = 1$.	74
5.5. Modal genliklerin $0 \leq \xi \leq \tau$ aralığında değişimi. $\tau = 10$ sabit, $\alpha = 2$.	74
5.6. Modal genliklerin $0 \leq \xi \leq \tau$ aralığında değişimi. $\tau = 20$ sabit, $\alpha = 2$.	75
5.7. Modal genliklerin $0 \leq \xi \leq \tau$ aralığında değişimi. $\tau = 10$ sabit, $\alpha = 3$.	75
5.8. Modal genliklerin $0 \leq \xi \leq \tau$ aralığında değişimi. $\tau = 20$ sabit, $\alpha = 3$.	76
5.9. Modal genliklerin $0 \leq \xi \leq \tau$ aralığında değişimi. $\tau = 10$ sabit, $\alpha = 4$.	76
5.10. Modal genliklerin $10 \leq \tau \leq 20$ zaman aralığında değişimi. $\xi = 10$ sabit, $\alpha = 0$.	77
5.11. Modal genliklerin $10 \leq \tau \leq 30$ zaman aralığında değişimi. $\xi = 10$ sabit, $\alpha = 0$.	77
5.12. Modal genliklerin $10 \leq \tau \leq 20$ zaman aralığında değişimi. $\xi = 10$ sabit, $\alpha = 1$.	78
5.13. Modal genliklerin $10 \leq \tau \leq 30$ zaman aralığında değişimi. $\xi = 10$ sabit, $\alpha = 1$.	78
5.14. Modal genliklerin $10 \leq \tau \leq 40$ zaman aralığında değişimi. $\xi = 10$ sabit, $\alpha = 1$.	79
5.15. Modal genliklerin $10 \leq \tau \leq 20$ zaman aralığında değişimi. $\xi = 10$ sabit, $\alpha = 2$.	79
5.16. Modal genliklerin $10 \leq \tau \leq 30$ zaman aralığında değişimi. $\xi = 10$ sabit, $\alpha = 2$.	80
5.17. Modal genliklerin $10 \leq \tau \leq 40$ zaman aralığında değişimi. $\xi = 10$	80

- sabit, $\alpha = 2$.
- 5.18. Modal genliklerin $10 \leq \tau \leq 20$ zaman aralığında değişimi. $\xi = 10$ sabit, $\alpha = 3$. 81
- 5.19. Modal genliklerin $10 \leq \tau \leq 30$ zaman aralığında değişimi. $\xi = 10$ sabit, $\alpha = 3$. 81
- 5.20. Modal genliklerin $10 \leq \tau \leq 40$ zaman aralığında değişimi. $\xi = 10$ sabit, $\alpha = 3$. 82
- 5.21. Modal genliklerin $10 \leq \tau \leq 20$ zaman aralığında değişimi. $\xi = 10$ sabit, $\alpha = 4$. 82
- 5.22. W_0 ve d_0 'ın $0 \leq \xi \leq 10$ aralığındaki değişimi. $\tau = 10$ sabit, $\alpha = 0$. 83
- 5.23. W_0 ve d_0 'ın $0 \leq \xi \leq 20$ aralığındaki değişimi. $\tau = 10$ sabit, $\alpha = 0$. 83
- 5.24. W_0 ve d_0 'ın $0 \leq \xi \leq 30$ aralığındaki değişimi. $\tau = 10$ sabit, $\alpha = 0$. 84
- 5.25. W_1 ve d_1 'in $0 \leq \xi \leq 10$ aralığındaki değişimi. $\tau = 10$ sabit, $\alpha = 1$. 84
- 5.26. W_1 ve d_1 'in $0 \leq \xi \leq 20$ aralığındaki değişimi. $\tau = 10$ sabit, $\alpha = 1$. 85
- 5.27. W_1 ve d_1 'in $0 \leq \xi \leq 30$ aralığındaki değişimi. $\tau = 10$ sabit, $\alpha = 1$. 85
- 5.28. W_2 ve d_2 'nin $0 \leq \xi \leq 10$ aralığındaki değişimi. $\tau = 10$ sabit, $\alpha = 2$. 86
- 5.29. W_2 ve d_2 'nin $0 \leq \xi \leq 20$ aralığındaki değişimi. $\tau = 10$ sabit, $\alpha = 2$. 86
- 5.30. W_2 ve d_2 'nin $0 \leq \xi \leq 30$ aralığındaki değişimi. $\tau = 10$ sabit, $\alpha = 2$. 87
- 5.31. W_3 ve d_3 'ün $0 \leq \xi \leq 10$ aralığındaki değişimi. $\tau = 10$ sabit, $\alpha = 3$. 87
- 5.32. W_3 ve d_3 'ün $0 \leq \xi \leq 20$ aralığındaki değişimi. $\tau = 10$ sabit, $\alpha = 3$. 88
- 5.33. W_3 ve d_3 'ün $0 \leq \xi \leq 30$ aralığındaki değişimi. $\tau = 10$ sabit, $\alpha = 3$. 88
- 5.34. W_0 ve d_0 'ın $10 \leq \tau \leq 20$ zaman aralığındaki değişimi. $\xi = 10$ sabit, $\alpha = 0$. 89
- 5.35. W_0 ve d_0 'ın $10 \leq \tau \leq 30$ zaman aralığındaki değişimi. $\xi = 10$ sabit, $\alpha = 0$. 89
- 5.36. W_1 ve d_1 'in $10 \leq \tau \leq 20$ zaman aralığındaki değişimi. $\xi = 10$ sabit, $\alpha = 1$. 90
- 5.37. W_1 ve d_1 'in $10 \leq \tau \leq 30$ zaman aralığındaki değişimi. $\xi = 10$ sabit, $\alpha = 1$. 90
- 5.38. W_2 ve d_2 'in $10 \leq \tau \leq 20$ zaman aralığındaki değişimi. $\xi = 10$ sabit, $\alpha = 2$. 91
- 5.39. W_2 ve d_2 'in $10 \leq \tau \leq 30$ zaman aralığındaki değişimi. $\xi = 10$ sabit, $\alpha = 2$. 91
- 5.40. W_3 ve d_3 'ün $10 \leq \tau \leq 20$ zaman aralığındaki değişimi. $\xi = 10$ sabit, $\alpha = 3$. 92
- 5.41. W_3 ve d_3 'ün $10 \leq \tau \leq 30$ zaman aralığındaki değişimi. $\xi = 10$ sabit, $\alpha = 3$. 92

- 5.42. W_0 ve P_0 'nin $0 \leq \xi \leq \tau$ aralığındaki değişimi. $\tau = 10$ sabit, $\alpha = 0$. 93
- 5.43. W_1 ve P_1 'nin $0 \leq \xi \leq \tau$ aralığındaki değişimi. $\tau = 10$ sabit, $\alpha = 1$. 93
- 5.44. W_2 ve P_2 'nin $0 \leq \xi \leq \tau$ aralığındaki değişimi. $\tau = 10$ sabit, $\alpha = 2$. 94
- 5.45. W_3 ve P_3 'nin $0 \leq \xi \leq \tau$ aralığındaki değişimi. $\tau = 10$ sabit, $\alpha = 3$. 94
- 5.46. W_0 ve P_0 'nin $10 \leq \tau \leq 30$ zaman aralığındaki değişimi. $\xi = 10$ sabit, $\alpha = 0$. 95
- 5.47. W_1 ve P_1 'nin $10 \leq \tau \leq 30$ zaman aralığındaki değişimi. $\xi = 10$ sabit, $\alpha = 1$. 95
- 5.48. W_2 ve P_2 'nin $10 \leq \tau \leq 30$ zaman aralığındaki değişimi. $\xi = 10$ sabit, $\alpha = 2$. 96
- 5.49. W_3 ve P_3 'nin $10 \leq \tau \leq 30$ zaman aralığındaki değişimi. $\xi = 10$ sabit, $\alpha = 3$. 96
- 5.50. v_0 , w_0^t ve w_0^l 'nin $0 \leq \xi \leq \tau$ aralığındaki değişimi. $\tau = 10$ sabit, $\alpha = 0$. 97
- 5.51. v_1 , w_1^t ve w_1^l 'nin $0 \leq \xi \leq \tau$ aralığındaki değişimi. $\tau = 10$ sabit, $\alpha = 1$. 97
- 5.52. v_2 , w_2^t ve w_2^l 'nin $0 \leq \xi \leq \tau$ aralığındaki değişimi. $\tau = 10$ sabit, $\alpha = 2$. 98
- 5.53. v_0 , w_0^t ve w_0^l 'nin $10 \leq \tau \leq 30$ zaman aralığındaki değişimi. $\xi = 10$ sabit, $\alpha = 0$. 98
- 5.54. v_1 , w_1^t ve w_1^l 'nin $10 \leq \tau \leq 30$ zaman aralığındaki değişimi. $\xi = 10$ sabit, $\alpha = 1$. 99
- 5.55. v_2 , w_2^t ve w_2^l 'nin $10 \leq \tau \leq 30$ zaman aralığındaki değişimi. $\xi = 10$ sabit, $\alpha = 2$. 99
- 5.56. v_3 , w_3^t ve w_3^l 'ün $10 \leq \tau \leq 30$ zaman aralığındaki değişimi. $\xi = 10$ sabit, $\alpha = 3$. 100
- 5.57. Modal genliklerin $0 \leq \xi \leq \tau$ aralığında değişimi. $\tau = 20$ sabit, $n = 0$. 100
- 5.58. Modal genliklerin $0 \leq \xi \leq \tau$ aralığında değişimi. $\tau = 30$ sabit, $n = 0$. 101
- 5.59. Modal genliklerin $0 \leq \xi \leq \tau$ aralığında değişimi. $\tau = 10$ sabit, $n = 1$. 101
- 5.60. Modal genliklerin $0 \leq \xi \leq \tau$ aralığında değişimi. $\tau = 20$ sabit, $n = 1$. 102
- 5.61. Modal genliklerin $0 \leq \xi \leq \tau$ aralığında değişimi. $\tau = 30$ sabit, $n = 1$. 102
- 5.62. Modal genliklerin $0 \leq \xi \leq \tau$ aralığında değişimi. $\tau = 10$ sabit, $n = 2$. 103
- 5.63. Modal genliklerin $0 \leq \xi \leq \tau$ aralığında değişimi. $\tau = 20$ sabit, $n = 2$. 103
- 5.64. Modal genliklerin $0 \leq \xi \leq \tau$ aralığında değişimi. $\tau = 30$ sabit, $n = 2$. 104

- 5.65. Modal genliklerin $0 \leq \xi \leq \tau$ aralığında değişimi. $\tau = 10$ sabit, $n = 3$. 104
- 5.66. Modal genliklerin $0 \leq \xi \leq \tau$ aralığında değişimi. $\tau = 20$ sabit, $n = 3$. 105
- 5.67. Modal genliklerin $0 \leq \xi \leq \tau$ aralığında değişimi. $\tau = 30$ sabit, $n = 3$. 105
- 5.68. Modal genliklerin $10 \leq \tau \leq 40$ zaman aralığında değişimi. $\xi = 10$ sabit, $n = 0$. 106
- 5.69. Modal genliklerin $10 \leq \tau \leq 40$ zaman aralığında değişimi. $\xi = 10$ sabit, $n = 1$. 106
- 5.70. Modal genliklerin $10 \leq \tau \leq 40$ zaman aralığında değişimi. $\xi = 10$ sabit, $n = 2$. 107
- 5.71. Modal genliklerin $10 \leq \tau \leq 40$ zaman aralığında değişimi. $\xi = 10$ sabit, $n = 3$. 107
- 5.72. $W_{1/2}$ ve $d_{1/2}$ 'nin $0 \leq \xi \leq 20$ aralığındaki değişimi. $\tau = 20$ sabit, $n = 0$. 108
- 5.73. $W_{1/2}$ ve $d_{1/2}$ 'nin $0 \leq \xi \leq 30$ aralığındaki değişimi. $\tau = 30$ sabit, $n = 0$. 108
- 5.74. $W_{3/2}$ ve $d_{3/2}$ 'nin $0 \leq \xi \leq 20$ aralığındaki değişimi. $\tau = 20$ sabit, $n = 1$. 109
- 5.75. $W_{3/2}$ ve $d_{3/2}$ 'nin $0 \leq \xi \leq 30$ aralığındaki değişimi. $\tau = 30$ sabit, $n = 1$. 109
- 5.76. $W_{5/2}$ ve $d_{5/2}$ 'nin $0 \leq \xi \leq 20$ aralığındaki değişimi. $\tau = 20$ sabit, $n = 2$. 110
- 5.77. $W_{5/2}$ ve $d_{5/2}$ 'nin $0 \leq \xi \leq 30$ aralığındaki değişimi. $\tau = 30$ sabit, $n = 2$. 110
- 5.78. $W_{1/2}$ ve $d_{1/2}$ 'nin $10 \leq \tau \leq 20$ zaman aralığındaki değişimi. $\xi = 10$ sabit, $n = 0$. 111
- 5.79. $W_{1/2}$ ve $d_{1/2}$ 'nin $10 \leq \tau \leq 30$ zaman aralığındaki değişimi. $\xi = 10$ sabit, $n = 0$. 111
- 5.80. $W_{1/2}$ ve $d_{1/2}$ 'nin $10 \leq \tau \leq 40$ zaman aralığındaki değişimi. $\xi = 10$ sabit, $n = 0$. 112
- 5.81. $W_{3/2}$ ve $d_{3/2}$ 'nin $10 \leq \tau \leq 20$ zaman aralığındaki değişimi. $\xi = 10$ sabit, $n = 1$. 112
- 5.82. $W_{3/2}$ ve $d_{3/2}$ 'nin $10 \leq \tau \leq 30$ zaman aralığındaki değişimi. $\xi = 10$ sabit, $n = 1$. 113
- 5.83. $W_{3/2}$ ve $d_{3/2}$ 'nin $10 \leq \tau \leq 40$ zaman aralığındaki değişimi. $\xi = 10$ sabit, $n = 1$. 113
- 5.84. $W_{5/2}$ ve $d_{5/2}$ 'nin $10 \leq \tau \leq 20$ zaman aralığındaki değişimi. $\xi = 10$ sabit, $n = 2$. 114
- 5.85. $W_{5/2}$ ve $d_{5/2}$ 'nin $10 \leq \tau \leq 30$ zaman aralığındaki değişimi. $\xi = 10$ sabit, $n = 2$. 114

- 5.86. $W_{5/2}$ ve $d_{5/2}$ 'nin $10 \leq \tau \leq 40$ zaman aralığındaki değişimi. $\xi = 10$ 115
sabit, $n = 2$.
- 5.87. $W_{7/2}$ ve $d_{7/2}$ 'nin $10 \leq \tau \leq 20$ zaman aralığındaki değişimi. $\xi = 10$ 115
sabit, $n = 3$.
- 5.88. $W_{7/2}$ ve $d_{7/2}$ 'nin $10 \leq \tau \leq 30$ zaman aralığındaki değişimi. $\xi = 10$ 116
sabit, $n = 3$.
- 5.89. $W_{7/2}$ ve $d_{7/2}$ 'nin $10 \leq \tau \leq 40$ zaman aralığındaki değişimi. $\xi = 10$ 116
sabit, $n = 3$.
- 5.90. $W_{1/2}$ ve $P_{1/2}$ 'ün $0 \leq \xi \leq \tau$ aralığındaki değişimi. $\tau = 20$ sabit, $n = 0$. 117
- 5.91. $W_{3/2}$ ve $P_{3/2}$ 'nin $0 \leq \xi \leq \tau$ aralığındaki değişimi. $\tau = 20$ sabit, 117
 $n = 1$.
- 5.92. $W_{5/2}$ ve $P_{5/2}$ 'nin $0 \leq \xi \leq \tau$ aralığındaki değişimi. $\tau = 20$ sabit, 118
 $n = 2$.
- 5.93. $W_{7/2}$ ve $P_{7/2}$ 'nin $0 \leq \xi \leq \tau$ aralığındaki değişimi. $\tau = 20$ sabit, 118
 $n = 3$.
- 5.94. $W_{1/2}$ ve $P_{1/2}$ 'nin $10 \leq \tau \leq 20$ zaman aralığındaki değişimi. $\xi = 10$ 119
sabit, $n = 0$.
- 5.95. $W_{1/2}$ ve $P_{1/2}$ 'nin $10 \leq \tau \leq 30$ zaman aralığındaki değişimi. $\xi = 10$ 119
sabit, $n = 0$.
- 5.96. $W_{1/2}$ ve $P_{1/2}$ 'nin $10 \leq \tau \leq 40$ zaman aralığındaki değişimi. $\xi = 10$ 120
sabit, $n = 0$.
- 5.97. $W_{3/2}$ ve $P_{3/2}$ 'nin $10 \leq \tau \leq 20$ zaman aralığındaki değişimi. $\xi = 10$ 120
sabit, $n = 1$.
- 5.98. $W_{3/2}$ ve $P_{3/2}$ 'nin $10 \leq \tau \leq 30$ zaman aralığındaki değişimi. $\xi = 10$ 121
sabit, $n = 1$.
- 5.99. $W_{3/2}$ ve $P_{3/2}$ 'nin $10 \leq \tau \leq 40$ zaman aralığındaki değişimi. $\xi = 10$ 121
sabit, $n = 1$.
- 5.100. $W_{5/2}$ ve $P_{5/2}$ 'nin $10 \leq \tau \leq 20$ zaman aralığındaki değişimi. $\xi = 10$ 122
sabit, $n = 2$.
- 5.101. $W_{5/2}$ ve $P_{5/2}$ 'nin $10 \leq \tau \leq 30$ zaman aralığındaki değişimi. $\xi = 10$ 122
sabit, $n = 2$.
- 5.102. $W_{5/2}$ ve $P_{5/2}$ 'nin $10 \leq \tau \leq 40$ zaman aralığındaki değişimi. $\xi = 10$ 123
sabit, $n = 2$.
- 5.103. $W_{7/2}$ ve $P_{7/2}$ 'nin $10 \leq \tau \leq 20$ zaman aralığındaki değişimi. $\xi = 10$ 123
sabit, $n = 3$.
- 5.104. $W_{7/2}$ ve $P_{7/2}$ 'nin $10 \leq \tau \leq 30$ zaman aralığındaki değişimi. $\xi = 10$ 124
sabit, $n = 3$.
- 5.105. $W_{7/2}$ ve $P_{7/2}$ 'nin $10 \leq \tau \leq 40$ zaman aralığındaki değişimi. $\xi = 10$ 124
sabit, $n = 3$.

5.106.	$v_{1/2}$, $w_{1/2}^f$ ve $w_{1/2}^l$ 'nin $0 \leq \xi \leq \tau$ aralığındaki değişimi. $\tau = 10$ sabit.	125
5.107.	$v_{1/2}$, $w_{1/2}^f$ ve $w_{1/2}^l$ 'nin $0 \leq \xi \leq \tau$ aralığındaki değişimi. $\tau = 20$ sabit.	125
5.108.	$v_{1/2}$, $w_{1/2}^f$ ve $w_{1/2}^l$ 'nin $0 \leq \xi \leq \tau$ aralığındaki değişimi. $\tau = 30$ sabit.	126
5.109.	$v_{3/2}$, $w_{3/2}^f$ ve $w_{3/2}^l$ 'nin $0 \leq \xi \leq \tau$ aralığındaki değişimi. $\tau = 10$ sabit.	126
5.110.	$v_{3/2}$, $w_{3/2}^f$ ve $w_{3/2}^l$ 'nin $0 \leq \xi \leq \tau$ aralığındaki değişimi. $\tau = 20$ sabit.	127
5.111.	$v_{3/2}$, $w_{3/2}^f$ ve $w_{3/2}^l$ 'nin $0 \leq \xi \leq \tau$ aralığındaki değişimi. $\tau = 30$ sabit.	127
5.112.	$v_{5/2}$, $w_{5/2}^f$ ve $w_{5/2}^l$ 'nin $0 \leq \xi \leq \tau$ aralığındaki değişimi. $\tau = 20$ sabit.	128
5.113.	$v_{5/2}$, $w_{5/2}^f$ ve $w_{5/2}^l$ 'nin $0 \leq \xi \leq \tau$ aralığındaki değişimi. $\tau = 30$ sabit.	128
5.114.	$v_{7/2}$, $w_{7/2}^f$ ve $w_{7/2}^l$ 'nin $0 \leq \xi \leq \tau$ aralığındaki değişimi. $\tau = 20$ sabit.	129
5.115.	$v_{7/2}$, $w_{7/2}^f$ ve $w_{7/2}^l$ 'nin $0 \leq \xi \leq \tau$ aralığındaki değişimi. $\tau = 30$ sabit.	129

1. GİRİŞ

1.1. Konu ve Önemi

Elektromagnetik teoride evrimsel yaklaşım (zaman türevi korunup) kullanılarak, elektromagnetik alan kuvvetlerinin arandığı, başlangıç koşulları verilen üç kanonik sınır-değer problemi vardır. Bunlar, Kavite (Kutu) Problemi, *Dalga Kılavuzu Problemi* ve Harici (outer) problem. Bu tezde, *Dalga Kılavuzu Problemi* Euclid uzayının bir alt uzayında çalışılmıştır ve problem kanoniktir. Kavite probleminde kullanılan yöntem ile Maxwell operatörünün denklemden ayrıştırılıp çözülmesidir. Çoklu bağlantılı olduğu kabul edilen dalga kılavuzunun içi boş rasgele bir kesit-alanlı fakat geometrik olarak Oz eksenine boyunca regüler bir kesitinde problemin çözümü yapılmıştır. Dalga kılavuzu yüzeyi mükemmel elektrik iletkenidir.

Sonlu sınır-değer problemlerinde elektromagnetik alanların incelenmesi elektromagnetik teoride temel bir problemdir. Problemin çözüldüğü yapılar kavite veya rezonator olarak adı verilir. Klasik zaman-harmonik elektromagnetik teoride, teorik olarak sadece $t = -\infty$ 'da başlayıp $t = +\infty$ 'a kadar devam eden olayları incelemek mümkündür. Ancak gerçek durumda araştırmacılar “*Zorlanmış Salınım*” olarak adlandırılan osilasyonlarla işlem yapar. “*Zorlanmış*” terimi elektromagnetik alanların bir uyarıcı kaynağın uygulamaya başlaması ile oluştuğu anlamına gelmektedir. Elektromagnetik alanlar sadece kaynak uygulanmaya başladıktan sonra doğar ve zamanla salınırlar. Elbette ki böyle olayların $t = 0$ gibi bir başlangıçları vardır [Erden, 2009].

Zaman-uzayı çalışmalarının bilinen iki ana yöntem ile çözülmesi yaygındır. En sık uygulananı, nümerik analiz yöntemi kullanılarak çözülen, sayısal niceliklerin herbir veri sonrasında tespit edilip analiz edildiği *Zaman Uzayı Sonlu Farklar (Finite Difference Time Domain - FDTD)* yöntemidir. Kullanılan yöntemler nümerik analizin uygulamaları ve bu uygulamaların sağladığı çeşitliliktir [Taflove ve Hagness, 2005]. Yöntemdeki verilerin bolluğu, salınım boyunca veri sağlanabilmesi

ve bu verilerin kaydedilip sonucun mukayese edilerek başlangıç-süreç-sonuç karşılaştırmasıyla gözlem yapıp sağlıklı bir neticeye ulaşılabilmesidir. Yöntemin zenginliği bilgisayar verilerinin çokluğu ve karşılaştırılabilirliğidir [Erden, 2009].

İkinci yöntem ise *analitiktir*. Bu yöntemde Fourier veya Laplace İntegral Dönüşümleri kullanılır. İntegraller $(-\infty, \infty)$ aralığında çalışıldığından nedensellik (causality) prensibi bu yöntemde altı çizilmesi gereken prensiplerden biridir. Fizik ve matematik beraber düşünülmelidir. Matematiksel sonuçlar fiziksel gereksinimleri de karşılamalıdır.

Analitik bir yöntem olan *Elektromagnetik Teoriye Evrimsel Yaklaşım (ETEY)* [Tretyakov, 1993] yöntemi de bu cümledendir. Yöntem zaman-uzayında elektromagnetik alanların çözümlerini analitik olarak inceler. Analitik incelemede diferansiyel *evrim* denklemleri (zaman türevi korunduğundan denklemler evrim denklemleridir) ile çalışılır.

ETEY yöntem ile yakın tarihte, mükemmel iletken dalga kılavuzu yüzeyleriyle bu kavite ve dalga kılavuzlarının kesit-alanlarında zamanda başlangıcı olan sinüzoidal bir işaret ile elektromagnetik alanların uyarılması ve dalga kılavuzu boyunca transferi incelenmiştir [Aksoy ve Tretyakov, 2002], [Aksoy ve Tretyakov, 2004], [Aksoy et al, 2005].

Bu tezde;

(i) Kaynak fonksiyon, üstel fonksiyon ve Bessel fonksiyonun çarpımı olarak hesaplanmış ve daha sonra çözümdeki Bessel fonksiyon ailesi için tamsayı çözümleri ve yarı-tamsayı (semi-integer) çözümleri verilmiştir.

(ii) Bu çözümlerde Heaviside fonksiyonu da kullanılarak çözüm daha da zenginleştirilmiştir.

(iii) Enerji ve enerjideki değişim (surplus of enerji) büyüklükleri ortaya konulmuş, bu büyüklüklerin tamsayı ve yarı tamsayı indisli durumları takdim edilmiştir.

(iv) Çözümler sayısal örneklerle desteklenerek görsel bir perspektif sağlanmaya çalışılmıştır.

1.2. Tezin Amacı ve İçeriği

Tezin amacı; Maxwell denklem sisteminin zaman-uzayında ∂_t 'nin korunduğu *evrim* denklemleri ve Laplacian vasıtasıyla analitik olarak çözümlenmesidir. Elektromagnetik alanlar Maxwell denklem sisteminden bu şekilde ayrıştırılıp zaman uzayında çözülecektir. Çözüm, dalga kılavuzu boyunca incelenerek elde edilir. Sonuçlar tezde şu sıra ile incelenmiştir.

Bölüm 2'de; *TE-TM* zaman-uzayı modlarına genel bir bakış yapılmış, Neumann ve Dirichlet problemlerinin çözümü tartışılmış, uyarıcı kaynak ile dalga kılavuzu boyunca sinyal transferi için, koordinatların ve zamanın ikinci dereceden türevlere sahip (harmonik) reel-değerli öz vektör fonksiyonları sınıfında elde edilen tam analitik çözümleri verilmiştir.

Maxwell denklemleri çözümlenirken başlangıç şartları uygulanmış, sınır değerleri kullanılarak nedensellik prensibine bağlı kalınp çözüm böylece elde edilmiştir.

Bölüm 3'te; Bessel diferansiyel denklemi (fonksiyonu) ve Legendre polinomları hakkında genel bilgiler verilmiş, modal genliklerin Bessel fonksiyonu yardımıyla nasıl çözüldüğü ele alınmıştır. Lorentz transformasyonu altında invaryant kalan Klein-Gordon denkleminin çözümlerine bakılmış, değişkenlerine ayrıştırma yöntemi ile Klein-Gordon dalga denklemi çözümlenip çözüm Bessel fonksiyonu ile üstel bir fonksiyonun çarpımı olarak elde edilmiştir. Bu çözümün sıfır-sonsuz aralığında tam bir fonksiyon ailesi elde edilmiştir. Daha sonra çözüme Heaviside fonksiyonu

uygulanmıştır. Bunlara ilaveten 3-bileşenli ve 2-bileşenli alan vektörlerinin ortalama enerji yoğunluklarının formülleri tartışılmış, bunların toplamı toplam enerji ile ifade edilmiştir. Poynting vektörü ile enerjinin birbirine oranı olan anlık hız, formüle edilmiştir. Daha önce çalışılmış olan [Aksoy ve Tretyakov, 2004] problemin uygulandığı uzay *tamsayılar* cümlesi ile *yarı-tamsayı (semi-integer)* cümlesi beraber verilmiştir. Bessel fonksiyonunun indeksi $\alpha = s + 1/2$, $s = 0, 1, 2, 3, \dots$ alınarak tam, küresel (spherical) Bessel fonksiyon ailesinin seri çözümü verilmiştir. Nihayetinde Bessel diferansiyel denklemi ve Bessel fonksiyonları ile ilgili ayrı bir tartışma yapılmıştır.

Bu bölümde genlik problemi tartışılmış, küresel ve silindirik Bessel fonksiyonu yardımı ile çözümler gösterilmiştir. İlaveten Helmholtz denklemi küresel koordinatlarda Legendre polinomları yardımı ile çözülmüş ve aynı denklemin kartezyen koordinatlarına ek olarak yeni bir yaklaşım sunulmuştur. Bu yaklaşım sonucunda elde edilen denklemlere sınır koşulları uygulanmadan ve denklemler normalize edilmeden sunulmuş, bu tartışmalar başka çalışmalara bırakılmıştır.

Bu bölümde sayısal sonuçlar elde edilerek kıyaslanmış ve grafik davranışları hakkında yorumlar yapılmıştır. Hemen her grafik için $\alpha = 0, 1, 2, 3, \dots$ ve $\alpha = 1/2, 3/2, \dots$ değerlerine ayrı ayrı bakılmış, $\tau = 10, 20, 30, \dots$ ve $\xi = 10, 20, 30, \dots$ değerlerine ait grafiklerin birbiri ile kıyaslanması yapılmıştır.

1.3.Tarihsel Gelişim

Bu tezdeki tartışmalar Elektromagnetik Teoriye Evrimsel Yaklaşım (*ETEY*) yöntemi ile yapılmıştır. *ETEY*'in temel prensibi Maxwell denklemlerindeki elektromagnetik alanların bulunmasında ∂_t zaman türevini koruyarak sistemden alanları çekerek Klein-Gordon denkleminde genlikleri ve potansiyelleri de Helmholtz denkleminde elde edilip çözüme ulaşmasıdır.

Elektromagnetik teorisinin Maxwell denklemleri üzerine kurulduğunun kabul edilmesinin ardından, problemlerin çoğu frekans (Fourier) uzayında geliştirilmiştir.

Elektromagnetik problemlerinin çözümlerinde Fourier dönüşümünün kullanılması zamanı bağımsız değişken olmaktan çıkarmış ve saptanan etkin frekans değerlerindeki alan ifadelerinin genlikleri ters Fourier dönüşümü ile zaman uzayına indirgenerek, elektromagnetik problemlerin zaman uzayı cevapları aranmıştır [Erden, 2009].

Fakat; burada ele alınan *ETEY* yöntemi, ∂_t zaman türevi korunarak ki Matematikçilerin Evrim Denklemleri olarak adlandırdığı zaman türevli diferansiyel denklemlerin bu sayede $t_0 = 0$ ve $t_1 = t$ aralığındaki tekamülünü hesaplayıp gözlemleyebilmek imkanı tanımıştır. Yöntemin farklılığı uygun başlangıç şartları altında, yine uygun sınır koşulları (nasıl bir kesit-alanda çalışılıyor ise buna bağlı sınır koşulları) uygulanarak hesaplanan elektromagnetik alanların zaman uzayındaki davranışlarının gözlemlenebilirliğidir. Bundan dolayı yöntem Evrimsel Yaklaşım (Evolutionary Approach) olarak adlandırılmıştır. Klein-Gordon denkleminde elde edilen modal genlikler zamana (ve eksenel koordinat z 'ye) bağlıdır. Denklemden elde edilen çözümler zaman-bağımlı olduğu gibi bu diferansiyel denklemin α 'nın $(0, \infty)$ aralığındaki değerleri için bir seri çözümü oluştururlar.

Bu fikir 1980'lerde O. A. Tretyakov tarafından ortaya atılmış ve Rus bilimsel dergilerinde yayınlanmıştır [Tretyakov, 1986], [Tretyakov, 1989]. Yöntemin İngilizce versiyonu ise ilk olarak 90'lı yıllarda yayınlanmıştır [Tretyakov, 1993], [Tretyakov, 1994]. *ETEY* yönteminin değişik uygulamaları hakkında yakın zamanlardaki yayınlar fikir verecektir [Aksoy ve Tretyakov, 2003], [Aksoy ve Tretyakov, 2004], [Aksoy et al, 2005].

ETEY yöntemi iki ana fikre dayanmaktadır. Yayınlar kronolojik incelendiğinde elektromagnetik problemlerin zaman uzayında çalışılması fikrinin öncüleri 1940'larda ve 1950'lerde görülmektedir. J. C. Slater [Slater, 1946], G. V. Kisun'ko [Kisun'ko, 1949], K. Kurokawa [Kurokawa, 1958] ve R. Müller [Müller, 1961] alanları özmodların serileri şeklinde sunmaya çalışan ilk kişilerdir. Elektromagnetik teoride daha sonra yayımlanan J. Van Bladel'in eseri bu fikri detaylı bir şekilde içerir [Van Bladel, 1985]. Bu fikir, alanların kompleks genlikleri

için ileri sürülmüş ve şimdiye dek uygulanmaya devam edilmiştir. Zaman uzayındaki Maxwell denklemlerine Fourier dönüşümü uygulanarak; ∂_t , $i\omega$ ile değiştirilmiş ve genel durumda lineer olmayan bünye denklemleri lineer hale getirilmiştir. Dolayısıyla, sadece bir yol kalmıştır: Elektromagnetik problemi frekans uzayında lineerleştirmek. Ancak, lineer elektromagnetik problemlerde bile Fourier dönüşümü görüldüğü kadar kolay değildir [Erden, 2009]. Bu konuda karşılaşılan problemlere ilişkin derinlemesine bir inceleme P. Hillion'un makalesinde mevcuttur [Hillion, 1993].

İkinci önemli fikir; özmodal çözümleri, Maxwell denklemlerinde ∂_t 'yi muhafaza ederek elde etmektir. Bu serilerdeki katsayılar olan modal genlikler zaman-bağımlı olmalıdırlar. Bunun sonucu olarak, modal genlikler için zaman türevli bir evrimsel diferansiyel denklemler cümlesi ortaya çıkmalıdır. Bu denklemler cümlesi bir başka yol olan Zaman Uzayında Elektromagnetik Teoriye Evrimsel Yaklaşım Teorisinin gelişim yolunu açar. Bünye denklemleri gerçekte zaman türevini içeren diferansiyel forma sahiptirler ve bunların cebirsel formlara dönüştürülmesi; kuvvet terimi harmonik bir işaret olan hareket denkleminin çözülmesi ile başlar. H. F. Harmuth yakın geçmişte yayınında bu gerçeği hatırlatmıştır [Harmuth, 1993]. Zaman türevli bünye denklemleri için diferansiyel formlar *ETey* yöntemi için doğal olup, bu bünye denklemlerini evrim denklemleri ile birleştirmek kolaydır [Erden, 2009].

ETey farklı versiyonlarda gerçekleştirilebilir. Bunların her biri; Maxwell denklemlerinden buluşsal olarak kendine-özdeş veya sadece simetrik lineer operatörün matematiksel olarak ayrışması ile başlar. Bu ikinci bahsedilen uzay değişkenlerine göre etki eder. Maxwell denklemlerinden bu şekilde kendine-özdeş operatörün ayrıştırılması, bir operatör özdeğer denklemi verir. Bu özdeğer denklemlerinin özçözümlerinin seçilen bir çözüm uzayında bir baz oluşturur. Bunun sonucu olarak, aranan çözüm, özvektör serileri cinsinden sunulabilir. Bu fiziksel olarak modal alan çözümleri anlamına sahiptir ve burada modal genlikler zaman-bağımlıdır. Bundan sonra modal genlikler için evrim denklemleri türetilmiştir [Tretyakov, 1993], [Erden, 2009].

ETEY yönteminin kavite problemi için uygulama örnekleri de bulunmaktadır [Tretyakov, 1993]. Maxwell denklemlerinden ilk olarak içi boş bir kaviteye uygulanan kendine-özdeş bir operatör ayrıştırılmıştır. Daha sonra bu kavite istenen malzeme ile doldurulabilir. Burada dispersif veya kayıplı bir malzeme kullanılabilir [Erden, 2009].

Dalga kılavuzundaki elektromagnetik alanlar, dalga kılavuzu modal baz elemanlarının açılımı olarak elde edilmiştir. Bazın bu elemanları koordinatların vektör fonksiyonlarıdır. Serideki her eleman skalar bir modal genlik faktörüne sahiptir. Bu genlikler alanların zaman bağımlılıkları bakımından bulunması gereken fonksiyonlarıdır. Genel olarak baz elemanları Laplace operatörü için vektör sınır-özdeğer problemi ile ifade edilir. Değişkenlerine ayrıştırmanın uygulanabildiği özel durumların hepsinde bu vektör problemleri Laplace operatörü için Dirichlet ve Neumann sınır-değer problemine dönüşürler. Modal genlikler için Maxwell denklemlerinden zaman türevli bir adi diferansiyel denklemler sistemi türetilmiştir. Sistem uygun başlangıç koşulları ile desteklenmiştir. Bu problem Cauchy problemidir. Böylece modal genlikler, basit konvolüsyon integralleri olarak elde edilmiştir. Kaynak işaret zamanın integre edilebilen rasgele bir fonksiyon olabilir. Örnek uygulamalarda çözüm Bessel fonksiyonu ve üstel bir fonksiyonun çarpımı olarak hesaplanmıştır. Bunların nedensellik (causality) prensibini sağlamaları garanti edilmiştir [Erden, 2009].

2. ZAMAN-UZAYI MODLARI PROBLEMİ

2.1. Giriş

Dalga kılavuzları boyunca sinyal transferinin analizi iki ana kısımdan oluşur. İlki, zaman-uzayı dalga kılavuzu modlarının *modal bazda* sunumudur. İkincisi ise, Klein-Gordon dalga denkleminin çözülmesi ile takdim edilir. Klein-Gordon denkleminin çözümü bize sinyal transferini sağlayan zaman-bağımlı modal genlikleri gösterir. Klein-Gordon denkleminin çözümü nedensellik (causality) prensibine bağlı kalınarak bulunur. Bu çözümler seri halinde evrimsel olarak ifade edilir.

Dalga kılavuzları boyunca sinyal (işaret) transferi problemi açık olarak çözülür. τ ve ξ 'nin fonksiyonu olan sinyal Heaviside fonksiyonu tarafından yayılımına başlanan ve onun τ ve ξ cinsinden türevlerine sahip, bunların lineer bir kombinasyonu olarak sunulmuştur.

İçi boş bir dalga kılavuzundaki sinyallerin yayılması ve iletilmesi problemi analitik bir zaman-uzayı yöntemi olarak düşünülür. Dalga kılavuzu geometrik olarak homojen, Oz eksenini boyunca regüler ve onun kesit-alanı yeteri kadar düzgün yüzeyli kapalı tekli-bağlantılıdır. Bu yüzeyin mümkün olan hiçbir açısı π dereceyi aşmamaktadır. Dalga kılavuzu yüzeyi mükemmel elektrik iletkenidir. Tam TE ve TM dalga kılavuzları modları direk olarak zaman-uzayında elde edilmiştir. Her bir modal alan enlemsel (transverse) ve eksenel (longitudinal) kısımlarının vektör uzantılarının toplamı olarak alınmıştır. Her bir uzantı iki etkenden oluşur. Biri dalga kılavuzunun bir elemanı ve enlemsel dalga kılavuzu koordinatlarının vektör fonksiyonu olan *modal baz*, diğeri t zamanı ve eksenel koordinat z nin skalar bir fonksiyonu olan bir modal genlik. Modal bazların bütün elemanları iki skalar potansiyel yardımıyla belirlenir. Bunlar uygun bir yol ile normalize edilmiş Laplacian için Dirichlet ve Neumann sınır-değer problemlerinin özçözümleridir. Modal bazın her bir elemanı dalga kılavuzu yüzeyinde uygun sınır koşulları sağlar. Modal genlikler evrimsel kısmi diferansiyel denklemler sisteminin zamana (ve eksenel koordinat z 'ye) bağlı çözümleridir.

3-bileşenli pozisyon vektörü \mathbf{R} ve ∇ operatörü, dalga kılavuzu kesit-alanının S yüzeyi ve \mathbf{z} -ekseni,

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} + \mathbf{z}z, \quad \nabla = \nabla_{\perp} + \mathbf{z}\partial_z \quad (1)$$

olarak alınacaktır. Burada z , Oz eksenini boyunca yönelmiş birim vektör, \mathbf{r} S kesit alanlı dalga kılavuzundaki 2-bileşenli pozisyon vektörü ve ∇_{\perp} , ∇ 'nin enlemsel kısmıdır. Diferansiyel operatörü ∇_{\perp} sadece enlemsel dalga kılavuzu koordinatlarında (\mathbf{r}) çalışır. 3-bileşenli elektromanyetik alan kuvvet vektörleri \mathbf{E} ve \mathbf{H} her biri aşağıdaki gibi iki-bileşenli ve bir-bileşenli vektörlerin toplamı olarak

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_m(\mathbf{R}, t) &= \mathbf{E}(\mathbf{r}, z, t) + \mathbf{z}E_z(\mathbf{r}, z, t) \\ \mathbf{H}_m(\mathbf{R}, t) &= \mathbf{H}(\mathbf{r}, z, t) + \mathbf{z}H_z(\mathbf{r}, z, t) \end{aligned} \quad (2)$$

sunulmuştur. Sınır koşulları,

$$(\mathbf{n} \cdot \mathbf{H})|_L = 0, \quad (\mathbf{l} \cdot \mathbf{E})|_L = 0, \quad (\mathbf{z} \cdot \mathbf{E})|_L = 0 \quad (3)$$

dır.

2.2. TE Zaman-Uzayı Modları

Neumann problemi çözülerek başlanmalıdır.

$$\begin{aligned} (\nabla_{\perp}^2 + \nu_m^2)\psi_m(\mathbf{r}) &= 0 \\ \frac{\partial \psi_m(\mathbf{r})}{\partial n} \Big|_L &= 0 \\ \frac{\nu_m^2}{S} \int_S |\psi_m(\mathbf{r})|^2 ds &= 1N \end{aligned} \quad (4)$$

burada $\partial_n = \mathbf{n} \cdot \nabla_{\perp}$, L konturu üzerinde normal türev, $\nu_m^2 > 0$, $m = 1, 2, \dots$ özdeğerler, m indisi reel eksende artan bir sıra ile sıralanan nümerik değerler, $\psi_m(\mathbf{r})$ lerde bu

özdeğerlere karşılık gelen özvektörlerdir. (4) denklemindeki kuvvet boyutunun N (Newton) olması gerekir ki \mathbf{E}_m ve \mathbf{H}_m alan vektor uzantıları için sırasıyla Vm^{-1} ve Am^{-1} fiziksel boyutları sağlansın.

Örnek1:

$0 \leq x \leq a$ ve $0 \leq y \leq b$ ile sınırları belirlenen dikdörtgen şeklinde bir dalga kılavuzu olan L konturunu düşünelim. A_m^h normalizasyon sabiti olmak üzere $\Psi_m(\mathbf{r})$ potansiyelini $\Psi_m(\mathbf{r}) = A_m^h \psi_m(\mathbf{r})$ olarak alalım. $\psi_m(\mathbf{r}) = \cos(p\pi x/a) \cos(q\pi y/b)$ dir. p ve q parametreleri $p, q = 0, 1, 2, \dots, p + q \neq 0$ şartını sağlayan tamsayılardır. (4) problemini çözerek

$$\begin{aligned} v_m^2 &= \pi^2 \left(\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} \right) \equiv v_{p,q}^2 \\ A_m^h &= \frac{\sqrt{(2 - \delta_{p,0})(2 - \delta_{q,0})}}{v_{p,q}} \equiv A_{p,q}^h \end{aligned} \quad (5)$$

elde edilir. Burada $\delta_{p,0}$ ve $\delta_{q,0}$ Kronecker deltasıdır ($\delta_{m,n} = \begin{cases} 0, & \text{eğer } m \neq n \\ 1, & \text{eğer } m = n \end{cases}$ olduğu hatırlanmalıdır.). v_m^2 özdeğerlerini reel eksen üzerinde konumlayan indis m indisidir: $m \rightarrow (p, q)$. $\Psi_m(\mathbf{r})$ potansiyeli zaman-uzay TE modlarının tanımının bir parçasıdır.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{zm}^h &= 0 \\ v_m^{-1} \mathbf{E}_m^h &= \langle -\partial_{(v_m ct)} h_m(z, t) \rangle \left[-\sqrt[2]{\epsilon_0} \nabla_{\perp} \psi_m(\mathbf{r}) \times \mathbf{z} \right] \\ v_m^{-1} \mathbf{H}_m^h &= \langle \partial_{(v_m z)} h_m(z, t) \rangle \left[-\sqrt[2]{\mu_0} \nabla_{\perp} \psi_m(\mathbf{r}) \right] \\ v_m^{-1} \mathbf{H}_{zm}^h &= \langle h_m(z, t) \rangle \left[v_m \sqrt[2]{\mu_0} \psi_m(\mathbf{r}) \right] \end{aligned} \quad (6)$$

burada $\partial_{(v_m ct)} = (1/cv_m) \partial_t$, $\partial_{(v_m z)} = (1/v_m) \partial_z$ ve $c = \sqrt[2]{\epsilon_0 \mu_0}$ boşlukta ışık hızıdır.

Modal alan çiftleri dalga kılavuzu kesit-alanında [*] köşeli parantez ile gösterilir. Buradaki potansiyellerin hepsi Laplacian'dan elde edilirler. $\langle * \rangle$ kırık parantez ile ifade edilen faktörler uygun modal alan uzantılarının modal genlikleri fiziksel manasına sahiptir. Hepsi Klein-Gordon denkleminde elde edilen bir $h_m(z, t)$ potansiyeli tarafından belirlenir.

$$\left(\partial_{\nu_m ct}^2 - \partial_{\nu_m z}^2 + 1\right)h_m(z, t) = 0 \quad (7)$$

(4) problemi bir sıfır aşıkâr çözümüne daha sahiptir. Bu çözüm $\nu_0^2 = 0$ özdeğerine karşılık gelir ve harmonik $\Psi_0(\mathbf{r})$ fonksiyonu için $\nabla_{\perp}^2 \Psi_0(\mathbf{r}) = 0$, $\partial_n \Psi_0(\mathbf{r})|_L = 0$ problemini üretir. $\mathbf{r} \in L+S$ ve c_1 bir sabit olmak üzere harmonik fonksiyonlar maksimum-minimum teoreminden $\Psi_0(\mathbf{r}) = c_1$ elde edilir. $\Psi_0(\mathbf{r})$ potansiyeli bir TE modu daha üretir.

$$\mathbf{E}_0^h(\mathbf{r}, z, t) = 0, \quad \mathbf{H}_0^h(\mathbf{r}, z, t) = \mathbf{z}c_1 \quad (8)$$

burada \mathbf{H}_0^h alanının modal genliği de bir sabittir.

Weyl Teoremi TE zaman-uzayı modlarının L_2 Hilbert uzayında tam olduğunu ifade etmektedir [Weyl, 1940].

2.3. *TM* Zaman-Uzayı Modları

Önce Dirichlet problemi çözülmeli

$$\begin{aligned} (\nabla_{\perp}^2 + \kappa_m^2) \phi_m(\mathbf{r}) &= 0 \\ \phi_m(\mathbf{r})|_L &= 0 \\ \frac{\kappa_m^2}{S} \int_S |\phi_m(\mathbf{r})|^2 ds &= 1N \end{aligned} \quad (9)$$

burada $\kappa_m^2 > 0$, $m = 1, 2, \dots$ özdeğerler, m indisi reel ekseninde artan bir sıra ile sıralanan nümerik değerler, $\phi_m(\mathbf{r})$ 'lerde bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörleridir. \mathbf{E}_m ve \mathbf{H}_m alan vektor uzantılarının fiziksel boyutları sırasıyla Vm^{-1} ve Am^{-1} şeklindedir. $\kappa_0^2 = 0$ özdeğerine karşılık gelen $\phi_0(\mathbf{r})$ çözümü sıfırdır.

Örnek 2:

Dikdörtgen dalga kılavuzu için bir örnek daha düşünelim. A_m^e normalizasyon sabiti olmak üzere $\Phi_m(\mathbf{r})$ potansiyeli $\Phi_m(\mathbf{r}) = A_m^e \phi_m(\mathbf{r})$ olarak alınsın.

$\phi_m(\mathbf{r}) = \sin(p\pi x/a) \sin(q\pi y/b)$ dir. p ve q parametreleri $p + q \neq 0$ şartıyla $p, q = 0, 1, 2, \dots$ tamsayılarıdır. (9) problemi çözümlenerek

$$\kappa_m^2 = \pi^2 \left(\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} \right) \equiv \kappa_{p,q}^2 \quad (10)$$

$$A_m^e = \frac{2}{\kappa_m} \equiv A_{p,q}^e$$

$\Phi_m(\mathbf{r})$ potansiyelide *TE* modlarında $\Psi_m(\mathbf{r})$ potansiyeli gibi zaman-uzayı *TM* modlarının tanımının bir parçasıdır.

$$\begin{aligned}
H_{zm}^e &= 0 \\
\kappa_m^{-1} H_m^e &= \langle -\partial_{(\kappa_m ct)} e_m(z, t) \rangle \left[z \times \sqrt[2]{\mu_0} \nabla_{\perp} \phi_m(\mathbf{r}) \right] \\
\kappa_m^{-1} E_m^e &= \langle \partial_{(\kappa_m z)} e_m(z, t) \rangle \left[\sqrt[2]{\varepsilon_0} \nabla_{\perp} \phi_m(\mathbf{r}) \right] \\
\kappa_m^{-1} E_{zm}^e &= \langle e_m(z, t) \rangle \left[\kappa_m \sqrt[2]{\varepsilon_0} \phi_m(\mathbf{r}) \right]
\end{aligned} \tag{11}$$

burada $\partial_{(\kappa_m ct)} = (1/c\kappa_m) \partial_t$, $\partial_{(\kappa_m z)} = (1/\kappa_m) \partial_z$ ve $c = \sqrt[2]{\varepsilon_0 \mu_0}$ boşlukta ışık hızıdır.

Weyl Teoremi *TM* zaman-uzayı modlarının L_2 Hilbert uzayında tam olduğunu ifade etmektedir [Weyl, 1940].

Uyarı 1:

Her bir ayrı sabit değerli m indisi için, bütün (6) ve (11) zaman-uzayı modları sınır koşullarını sağlar.

3. ZAMAN UZAYI MODLARININ GENEL ÖZELLİKLERİ

3.1. Zaman-Uzayı Modlarının Tamlığı

(6) ve (11) zaman-uzayı modlarının her ikisi de 6-bileşenli reel değerli fonksiyonel vektör uzayı içinde aşağıdaki iç çarpım tarafından belirlenen keyfi X_1, X_2 vektör çifti tanımlar.

$$(X_1, X_2) = \frac{1}{S} \int_S (\varepsilon_0 \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 + \mu_0 \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{H}_2) ds < \infty \quad (12)$$

burada $X_1 = col(\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1)$ ve $X_2 = col(\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2)$ ve “col” un manası “kolon” ve “ ” üç bileşenli vektörler için skalar çarpımdır.

TE ve TM modlarının (6) ve (11) kümesini sırasıyla, aşağıdaki gibi

$$\mathbf{G} = \{X_m^h\}_{m=0}^{\infty} \quad \mathfrak{S} = \{X_m^e\}_{m=1}^{\infty} \quad (13)$$

$X_m^h = col(\mathbf{E}_m^h, \mathbf{H}_m^h)$ ve $X_m^e = col(\mathbf{E}_m^e, \mathbf{H}_m^e)$ olarak gösterelim. $m = m'$ olmak üzere, ilk farklı eleman çiftini X_m^h ve $X_{m'}^h$ alıp (12) denkleminde bunları X_1, X_2 'nin yerlerine koyarsak $(X_m^h, X_{m'}^h) = 0$ sonucunu buluruz. Bu bize \mathbf{G} kümesindeki bütün elemanların *karşılıklı birbirine dik (ortogonal)* olduğunu gösterir. Aynı durum \mathfrak{S} kümesi elemanları için de geçerlidir. Şimdi \mathbf{G} kümesinden bir X_m^h elemanı ve \mathfrak{S} kümesinden bir $X_{m'}^e$ elemanı alıp bunları tekrar (12) denkleminde yerine koyalım. Yine m, m' keyfi olmak üzere $(X_m^h, X_{m'}^e) = 0$ sonucunu elde ederiz.

\mathbf{G} ve \mathfrak{S} 'nin her birinin kendi içerisindeki *tamlıkları* [Tretyakov, 1990], [Tretyakov, 1993] çalışmalarında ispatlanmıştır. İlaveten \mathbf{G} ve \mathfrak{S} çözümler uzayında

bir *alt uzay* oluştururlar. Nihayetinde bunların *direkt toplamı*: $\mathbf{G} \oplus \mathfrak{F}$ dir. Bundan dolayı, bir alt uzay diğerine diktir.

3.2. Zaman-Uzayı Modlarının Rölativistik Değişmezliği

(6) ve (11) denklemlerinin her zaman-uzayı $(\mathbf{E}_m, \mathbf{H}_m)$ modal alanı ∂_t zaman türevini koruyan Maxwell denklemler sisteminin belirli bir çözümüdür:

$$\nabla \times \mathbf{E}_m = -\mu_0 \partial_t \mathbf{H}_m \quad \text{ve} \quad \nabla \times \mathbf{H}_m = \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}_m \quad (14)$$

∂_t zaman türevini koruyan Maxwell denklemlerinin bir çözümü olarak zaman-uzayı modal alanları özel rölativite teorisine uygun olarak hesaplanmalıdır.

(6) ve (11) zaman-uzayı modlarının eylemsizlik çatısını (\mathbf{r}, z, t) koordinatları ve t zamanı ile F alalım. Yeni bir F' referans çatısını alalım. Hareketlerin Oz eksenini boyunca v sabit hızıyla süregeldiğini kabul edelim. F' 'nde koordinatlar ve zamanı (\mathbf{r}', z', t') ile gösterelim. F 'deki (\mathbf{r}, z, t) ve F' 'deki (\mathbf{r}', z', t') arasındaki karşılık gelme (ilişki) direkt Lorentz transformasyonu tarafından belirlenir:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}', \quad z = (z' + vt')\gamma, \quad t = (t' + vz'/c^2)\gamma \quad (15)$$

burada $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$, $\beta = v/c$. Ters Lorentz transformasyonu aşağıdaki gibi simetrik olarak bulunur:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}', \quad z' = (z - vt)/\gamma, \quad t' = (t - vz/c^2)\gamma \quad (16)$$

$\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ alındığı ve tam tersine, (4) ve (9) problemlerinin çözümleri F ve F' referans çatılarında birbirleriyle örtüşürler. Bunun manası; fiziksel olarak, F ve F' 'deki dalga kılavuzu *modal baz*'larının aynı olmasıdır. Yani, F ve F' 'deki dalga kılavuzu *modal baz*'larının aynı olmasıdır. Yani F ve F' 'deki dalga kılavuzu modal alanları invarianttır (değişmez). Aşikardır ki, ν_m^2 ve κ_m^2 özdeğerleri de bu eylemsizlik referans çatılarında aynıdır, değişmez [Tretyakov ve Akgün, 2010].

Son gerçekte TE ve TM zaman-uzayı modları da bu çatılarda uniformdur [Tretyakov ve Akgün, 2010]. “Boyutsuz” zaman τ ve eksenel koordinat ξ ’yi

$$\begin{cases} \tau = \nu_m ct & \text{ve } \xi = \nu_m z & TE \text{ için} \\ \tau = \kappa_m ct & \text{ve } \xi = \kappa_m z & TM \text{ için} \end{cases} \quad (17)$$

seçelim. O zaman (7) ve (12) ikisi de aynı denklemdir.

Maxwell denklemindeki $h_m(\xi, \tau)$ ve $e_m(\xi, \tau)$ genliklerinin değişmezliğinin sunulması ise (18) Klein-Gordon denklemi ile

$$(\partial_\tau^2 - \partial_\xi^2 + 1)f(\xi, \tau) = 0 \quad (18)$$

burada, $\tau = \nu_m ct$, $\xi = \nu_m z$ olmak şartıyla $f(\xi, \tau)$, $h_m(\xi, \tau)$ ve $\tau = \kappa_m ct$, $\xi = \kappa_m z$ olmak şartıyla $f(\xi, \tau)$, $e_m(\xi, \tau)$ yerindedir.

(18) denkleminin F ve F' referans çatılarının ikisinde de aynı forma sahip olduğu gösterilebilir. Bunu gösterebilmek için (15) ve (16) Lorentz transformasyonlarını alıp önce (ξ, τ) ve (ξ', τ') değişkenlerine adapte etmeliyiz:

$$\begin{cases} \xi = (\xi' + \beta\tau')\gamma, & \tau = (\tau' + \beta\xi')\gamma \\ \xi' = (\xi - \beta\tau)\gamma, & \tau' = (\tau - \beta\xi)\gamma \end{cases} \quad (19)$$

(18) denkleminin çözümü (ξ, τ) yerine (ξ', τ') alınıp “yeni” değişkenleri ile $f(\xi, \tau)$ fonksiyonu $f[\xi'(\xi, \tau), \tau'(\xi, \tau)]$ olarak ters Lorentz transformasyonu ile belirleyip yeniden yorumlansın:

Kısmi türevler $\partial_\tau, \partial_\xi$ yerine $\partial_{\tau'}, \partial_{\xi'}$ olarak

$$\begin{aligned}\partial_{\tau'} f(\xi', \tau') &= (-\beta \gamma \partial_{\xi'} + \gamma \partial_{\tau'}) f(\xi', \tau') \\ \partial_{\xi'} f(\xi', \tau') &= (\gamma \partial_{\xi'} - \beta \gamma \partial_{\tau'}) f(\xi', \tau')\end{aligned}\quad (20)$$

(18) denkleminde bunun iki kere tekrarlanması ile

$$(\partial_{\tau'}^2 - \partial_{\xi'}^2 + 1)f(\xi', \tau') = 0 \quad (21)$$

elde edilir.

(21) denklemini F' referans çatısı içinde geçerlidir. F referans çatısındaki (19) denklemini ile aynı forma sahiptir [Tretyakov ve Akgün, 2010].

3.3. Zaman-Uzayı Modları için Enerjinin Korunumu

Poynting'in teoremini (14) denklemine uygulayalım ve S kesit-alanlı dalga kılavuzu yüzeyinde ortalama bir sonuç bulalım. Ortalama Poynting vektörü P_z ile ve ortalama modal alan enerji yoğunluğu W ile gösterilsin. Burada verilen (18) denklemindeki notasyonlar cinsinden sonuç:

$$\begin{aligned}W(\xi, \tau) &= [(\partial_{\tau} f)^2 + (\partial_{\xi} f)^2 + f^2]/2 \\ P_z(\xi, \tau) &= c(-\partial_{\tau} f)(\partial_{\xi} f)\end{aligned}\quad (22)$$

Poynting teoremi integral formunda

$$\partial_{\xi} [(\partial_{\tau} f)(\partial_{\xi} f)] - \partial_{\tau} [(\partial_{\tau} f)^2 + (\partial_{\xi} f)^2 + f^2]/2 = 0 \quad (23)$$

elde edilir.

3.4. Klein-Gordon Denklemi için Başlangıç Koşulları

Klein-Gordon denklemi herhangi diğer *ikinci dereceden* kısmi diferansiyel denklemler (PDE) gibi “başlangıç koşulları” *çifti* ile desteklenmelidir. Fiziksel olarak, bunlar uygun bir sinyal kaynağının eksitasyonunda rol oynar. Bu kaynağın $t=0$ anından önce uyarılmadığı (hareketsiz olduğu) fakat $t=0$ anında eksitasyona başladığı farz edilsin. Eğer böyleyse, başlangıç koşulu

$$\begin{aligned} f(\xi, \tau)|_{\xi=0} &= \begin{cases} \varphi(\tau), & \tau \geq 0 \Rightarrow t \geq 0 \text{ için} \\ 0, & \tau < 0 \Rightarrow t < 0 \text{ için} \end{cases} \\ \frac{\partial}{\partial \tau} f(\xi, \tau)|_{\xi=0} &= \begin{cases} \hat{\varphi}(\tau), & \tau \geq 0 \Rightarrow t \geq 0 \text{ için} \\ 0, & \tau < 0 \Rightarrow t < 0 \text{ için} \end{cases} \end{aligned} \quad (24)$$

olarak yazılmalıdır. $\varphi(\tau)$, $\hat{\varphi}(\tau)$ verilmelidir ve $\xi = 0 \Rightarrow z = 0$ olmalıdır.

3.5. Nedensellik Prensibi

Klein-Gordon denkleminin çözümleri nedensellik (causality) prensibinin gereksinimlerine bağlı kalmalıdır. Burada en son iki yorum vardır ve biri diğerini destekler. Eğer kaynakları bu başlangıç zamanında *sıfır* ise bütün alanların *sıfır* olduğu *zayıf nedensellik* (weak causality) vardır. Bizim problemimizde bu $\tau < 0$ 'a karşılık gelir. *Güçlü* nedensellik (strong causality) koşulu ise Einstein postülasının ileri sürdüğü herhangi bir magnetik alanın bir sinyali boşlukta c ışık hızıyla yaydığı iddiasını takip eder. Bizim problemimiz, kaynağın; dalga kılavuzu kesit-alanının içinde, $\xi = 0$ 'da yer aldığıdır. Bu bize Klein-Gordon denkleminin çözümünün $\xi = 0$ kaynak noktasının ötesinde $\xi = \tau$ (i.e., $z = ct$) dan sonra *sıfır* olmak zorunda olduğunu söyler. Bundan dolayı, eğer sinyal Oz eksenini boyunca yayılıyorsa Klein-Gordon denkleminin çözümü fiziksel olarak

$$f(\tau, \xi) = \begin{cases} f(\tau, \xi) = 0 & \text{eğer } \tau < 0 \\ f(\tau, \xi) \neq 0 & \text{eğer } 0 \leq \xi \leq \tau \\ f(\tau, \xi) = 0 & \text{eğer } \xi > \tau \end{cases} \quad (25)$$

şeklinde okunmalıdır.

4. MODAL GENLİK PROBLEMİ

Klein-Gordon denkleminin Lorentz transformasyonu altında invaryant (değişmez) kaldığı tartışılmıştı. İlâveten, denklem *grup teorisinin* iskelet çatısındaki *Poincare grubu* altında çalışıldığında kendi özelliklerini korur. W. Jr. Miller, Klein-Gordon denklemini bu yönüyle çalışmış ve bu denklemin çözümünde “simetrinin yörüngeleri” denen *onbir* (11) birbiri ile dik (ortogonal) fonksiyon oluşturmuştur. Çalışmaların sonuçları zaman- uzayında elektromagnetik alan teorisinin gelişmesinde geniş uygulama alanı bulmuştur. Aşağıda bu konuda bir örnek bulabilirsiniz.

(18) ile verilen Klein-Gordon denkleminin $f(\xi, \tau)$ çözümünün modal genlikler için potansiyel belirlediği hatırlansın. Düşünölsün ki *henüz bilinmeyen* “yeni” (u, v) değişkenleri ile verilen bir fonksiyon $f[u(\xi, \tau), v(\xi, \tau)]$ ve (u, v) iki kere diferansiyellenebilen “eski” (ξ, τ) değişkenlerinin bir fonksiyonu olsun. $f[u(\xi, \tau), v(\xi, \tau)]$ fonksiyonunun (18) denkleminin çözümü olarak yerine konması aşağıdaki manipölasyonlardan sonra denklemini yeni haliyle verir. Bu manipölasyonlara bir bakalım:

f fonksiyonunu aşağıdaki gibi değişkenlerine ayıralsın

$$f \equiv f(\xi, \tau) = f[u(\xi, \tau), v(\xi, \tau)] \equiv f(u, v) = U(u)V(v) \quad (26)$$

(18) denklemini (u, v) cinsinden yeniden şekillendirmek için aşağıdaki ön hazırlıklar yapılsın

$$\frac{\partial}{\partial \tau} f(u, v) = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \tau}, \quad (27)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} f(u, v) = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \xi} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} f(u, v) = & \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \tau} \right)^2 + \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \left(\frac{\partial v}{\partial \tau} \right)^2 + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} \\ & + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \frac{\partial u}{\partial \tau} \frac{\partial v}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} \frac{\partial v}{\partial \tau} \frac{\partial u}{\partial \tau} \end{aligned} \quad (29)$$

u ve v değişkenleri bağımsız değişkenler olduğundan bu son denklem daha basitleştirilebilir

$$\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} f(u, v) = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \tau} \right)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \left(\frac{\partial v}{\partial \tau} \right)^2 + \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \frac{\partial u}{\partial \tau} \frac{\partial v}{\partial \tau} \quad (30)$$

aynı yolla aşağıdaki elde edilebilir

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} f(u, v) = \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial v}{\partial \xi} \right\} \quad (31)$$

(27)-(31) denklemlerinin (18) denkleminde yerine yazılmasıyla

$$\begin{aligned} & \left[\left(\frac{\partial u}{\partial \tau} \right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \left[\left(\frac{\partial v}{\partial \tau} \right)^2 - \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + \left[\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \right] \frac{\partial f}{\partial u} \\ & + \left[\frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} \right] \frac{\partial f}{\partial v} + 2 \left[\frac{\partial u}{\partial \tau} \frac{\partial v}{\partial \tau} - \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial v}{\partial \xi} \right] \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + f = 0 \end{aligned} \quad (32)$$

yeni denklemi elde edilir. Burada f fonksiyonu (u, v) bağımsız değişkenlerine bağlı bir kaynak fonksiyonudur. Bir sonraki hedefimiz (32) denkleminde eski (ξ, τ) bağımsız değişkenlerinin elimine edilmesidir. u ve v ye uygulanan ∂_τ ve ∂_ξ kısmi türevleri yardımıyla burada verilmiştir. Bundan dolayı, bu hedef u ve v nin (ξ, τ)

değişkenlerinin fonksiyonu olarak belirlenebilmesi ile gerçekleştirilebilir. Bu simetrisinin yörüngeleri çalışması adımı, Miller $\xi(u, v)$ ve $\tau(u, v)$ ters fonksiyon çiftleri kümesi gösterilmiştir [Ekler]. $u(\xi, \tau)$ ve $v(\xi, \tau)$ fonksiyon çiftlerinin elde edilebilmesi basit bir durumdur.

Zaman-harmonik modal genlikler diğerleri arasında belirli bir durumdur. Miller'in listesinde 1) durumuna (case1) karşılık gelir. Gerçekten $u = \tau, v = \xi$ yerlerine yazıp (32) denklemi (18) daki orijinal haline getirilir. Aşıkardır ki (ξ, τ) değişkenleri zaman-harmonik modlarının ayrılmasına yol açarlar. Bitirirken, (4) ve (9) problemlerinden ν_m^2 ve κ_m^2 özdeğerlerinin fiziksel manası tesis edilebilir. Bunlar, belirtilen sıra ile *TE* ve *TM* zaman-harmonik modlarının ω_m^h ve ω_m^e *cut-off frekansını* $\omega_m^h = c\nu_m$ ve $\omega_m^e = c\kappa_m$ olarak belirlerler. Bu klasik teoride bilinen bir gerçektir.

4.1. Bessel Fonksiyonları ve Legendre Polinomlarına Genel Bir Bakış

4.1.1. Düzgün Tekil Nokta Etrafında Seri Çözüm

n . mertebeden lineer ve homojen adi diferansiyel denklem

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + p_{n-2}y^{(n-2)} + \dots + p_0(x)y = 0$$

şeklinde verilmiş olsun. Bu durumda;

- i) Eğer $p_0(x), p_1(x), \dots, p_{n-1}(x)$ katsayılarının hepsi $x = x_0$ noktasında analitik değilse x_0 noktasına verilen diferansiyel denklemin bir tekil noktası denir.
- ii) Eğer bütün $p_k(x)$ katsayıları analitik değil fakat tüm $(x - x_0)^{n-k} p_k(x)$, $k = 0, 1, \dots, (n-1)$ için analitik ise x_0 noktasına bir düzgün tekil nokta denir.
- iii) Eğer x_0 noktası verilen diferansiyel denklemin ne adi noktası ne de düzgün tekil noktası değilse bu durumda düzgün olmayan tekil noktası denir.

$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ ikinci mertebeden lineer homojen adi diferansiyel denklemi düşünölsün. Eğer $x = 0$ düzgün bir tekil nokta ise $xP(x)$ ve $x^2Q(x)$ fonksiyonları

$$xP(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n x^n, \quad |x| < r$$

$$x^2Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n x^n, \quad |x| < r$$

şeklinde kuvvet serilerine açılabilir veya bunlar

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n x^{n-1}, \quad |x| < r, \quad x \neq 0$$

$$Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n x^{n-2}, \quad |x| < r, \quad x \neq 0$$

şeklinde de yazılabilir.

Verilen diferansiyel denklemin Frobenius seri çözümü aşğıdaki formda önerilsin.

$$y(x) = x^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\alpha}, \quad 0 < x < r,$$

y 'nin x 'e göre türevi alınıp bu sonuçlar diferansiyel denklemde yerine yazılırsa

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+\alpha) a_n x^{n+\alpha-1}, \quad y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+\alpha)(n+\alpha-1) a_n x^{n+\alpha-2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+\alpha)(n+\alpha-1) a_n x^{n+\alpha-2} + \sum_{n=0}^{\infty} P_n x^{n-1} \sum_{n=0}^{\infty} (n+\alpha) a_n x^{n+\alpha-1} + \sum_{n=0}^{\infty} Q_n x^{n-2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\alpha} = 0$$

sonucu bulunur.

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n x^{n-1} \sum_{n=0}^{\infty} (n+\alpha) a_n x^{n+\alpha-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n P_{n-m} x^{n-m-1} (m+\alpha) a_m x^{m+\alpha-1}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{m=0}^n (m+\alpha) P_{n-m} a_m \right] x^{n+\alpha-2} \\
&\sum_{n=0}^{\infty} Q_n x^{n-2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^n Q_{n-m} a_m \right) x^{n+\alpha-2} \\
&\sum_{n=0}^{\infty} \{ (n+\alpha)(n+\alpha-1) a_n + \sum_{m=0}^n [(m+\alpha) P_{n-m} + Q_{n-m}] a_m \} x^{n+\alpha-2} = 0
\end{aligned}$$

eşitliği görülebilir. Bu eşitliğin sağlanması için $x^{n+\alpha-2}$, $n=0,1,\dots$ katsayısı sıfır olmalıdır.

$n=0$ için;

$$[\alpha(\alpha-1) + \alpha P_0 + Q_0] a_0 = 0$$

denklemini elde edilir.

Bu durumda $a_0 = 0$ veya $\alpha(\alpha-1) + \alpha P_0 + Q_0 = 0$ olmalıdır.

$n=1$ için;

$$(n+\alpha) + (n+\alpha-1) a_n + \sum_{m=0}^n [(m+\alpha) P_{n-m} + Q_{n-m}] a_m = 0$$

ise

$$a_n = - \frac{1}{(n+\alpha)(n+\alpha-1) + (n+\alpha) P_0 + Q_0} \sum_{m=0}^{n-1} [(m+\alpha) P_{n-m} + Q_{n-m}] a_m$$

yazılabilir.

i) Eğer $a_0 = 0$ ise $a_1 = a_2 = \dots = 0$ olur ve sonuç olarak $y(x) = 0$ sıfır çözümü elde edilir.

ii) Eğer $a_0 \neq 0$ ise $\alpha(\alpha-1) + \alpha P_0 + Q_0 = 0$ indisel denklemi elde edilir.

İndisel denklemin α için çözülmesiyle α_1 ve α_2 kökleri elde edilir. Bu nedenle sıfır olmayan çözüm için $\alpha_0 \neq 0$ olmalıdır ve α indisel denklemin köküdür.

4.1.2. Düzgün Tekil Nokta Etrafında Seri Çözüm

$$y''(x) + P(x)y'(x) + Q(x)y(x) = 0$$

ikinci mertebeden lineer homojen adi diferansiyel denklemi için $x=0$ bir düzgün tekil nokta ise

$$xP(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n x^n, \quad x^2Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n x^n, \quad |x| < r$$

yazılabilir.

Kabul edilsin ki $\alpha(\alpha+1) + \alpha P_0 + Q_0 = 0$ indisel denklemi α_1 ve α_2 $\alpha_1 \geq \alpha_2$ olmak üzere iki reel köke sahip olsun. Bu durumda verilen diferansiyel denklemin aşağıdaki gibi Frobenius seri çözümü vardır.

$$y_1(x) = x^{\alpha_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad a_0 \neq 0, \quad 0 < x < r$$

buradaki a_n katsayıları $y_1(x)$ 'in diferansiyel denklemde yerine konulmasıyla bulunur. İkinci lineer bağımsız çözüm ise aşağıdaki gibi bulunur [Xie, 2010]:

1. Eğer $\alpha_1 - \alpha_2$ farkı tamsayıdan farklı ise ikinci Frobenius seri çözümü

$$y_2(x) = x^{\alpha_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \quad 0 < x < r$$

şeklindedir. Buradaki b_n katsayıları $y_2(x)$ 'in diferansiyel denklemde yerine konulmasıyla bulunur.

2. Eğer $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ ise

$$y_2(x) = y_1(x) \ln x + x^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \quad 0 < x < r$$

buradaki b_n katsayıları $y_2(x)$ 'in diferansiyel denklemde yerine konulmasıyla bulunur. Bu durumda $y_2(x)$ ikinci çözümü bir Frobenius seri çözümü değildir.

3. Eğer $\alpha_1 - \alpha_2$ farkı tamsayı ise

$$y_2(x) = ay_1(x) \ln x + x^{\alpha_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \quad 0 < x < r$$

buradaki b_n ve a katsayıları $y_2(x)$ 'in diferansiyel denklemde yerine konulmasıyla bulunur. a parametresi sıfır olabilir, aynı zamanda $y_2(x)$ ikinci çözümü bir Frobenius seri çözümü olabilir.

Sonuç olarak diferansiyel denklemin genel çözümü

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \text{ şeklinde verilebilir.}$$

4.1.3. Bessel Diferansiyel Denklemini ve Çözümü

Bessel diferansiyel denklemi

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0, \quad x > 0$$

formundadır. Burada $p \geq 0$ sabit bir sayıdır. Bessel diferansiyel denkleminin çözümünde düzgün tekil nokta etrafında seri çözüm yöntemi kullanılır.

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0, \quad P(x) = \frac{1}{x}, \quad Q(x) = \frac{x^2 - p^2}{x^2} \quad x = 0$$

noktasının bir düzgün tekil nokta olduğu açıktır. Çünkü

$$xP(x) = 1 = 1 + 0.x + 0.x^2 + \dots \Rightarrow P_0 = 1,$$

$$x^2Q(x) = x^2 - p^2 = -p^2 + 0.x + x^2 + 0.x^3 + 0.x^4 + \dots \Rightarrow Q_0 = -p^2,$$

$xP(x)$ ve $x^2Q(x)$ 'lerin her ikisi de $x=0$ noktasında analitiktir ve seriye açılabilirler, bu seriler $|x| < \infty$ için yakınsaktır. Bu nedenle $x=0$ noktası bir düzgün tekil noktadır.

İndisel denklem $\alpha(\alpha-1) + \alpha P_0 + Q_0 = 0$ şeklindedir.

$$\alpha(\alpha-1) + \alpha.1 - p^2 = 0 \Rightarrow \alpha - p^2 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = p, \alpha_2 = -p$$

Bessel diferansiyel denklemi aşağıdaki formda seri çözüme sahiptir.

$$y_1(x) = x^p \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+p}, \quad a_0 \neq 0, \quad 0 < x < \infty$$

x 'e göre türev alınırsa

$$y_1'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+p) a_n x^{n+p-1},$$

$$y_1''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+p)(n+p-1) a_n x^{n+p-2}$$

y_1, y_1' ve y_1'' değerlerinin denklemde yerine konulmasıyla

$$x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+p)(n+p-1) a_n x^{n+p-2} + x \sum_{n=0}^{\infty} (n+p) a_n x^{n+p-1} + (x^2 - p^2) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+p} = 0$$

elde edilir.

Toplamın indeksinin değiştirilmesiyle

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+p+2} \stackrel{n+2=m}{\Rightarrow} \sum_{m=2}^{\infty} a_{m-2} x^{m+p} = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n+p},$$

$$x^p \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} [(n+p)(n+p-1) + (n+p) - p^2] a_n x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n \right\} = 0,$$

$$x^p \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} n(n+2p) a_n x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n = 0$$

yazılabilir. Bu denklemin sağlanabilmesi için $x^n, n=0,1,\dots$ sıfır olmalıdır.

$$x^0 : 0 \cdot (0+2p) a_0 = 0 \Rightarrow a_0 \neq 0 \text{ sabiti keyfidir.}$$

$$x^1 : 1 \cdot (1+2p) a_1 = 0 \Rightarrow a_1 = 0$$

$n \geq 2$ için;

$$x^n : n(n+2p) a_n + a_{n-2} = 0 \Rightarrow a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(n+2p)}$$

Böylece $a_{2n+1} = 0, n=0,1,\dots$ ve

$$a_2 = -\frac{a_0}{2(2+2p)} = -\frac{a_0}{2^2 \cdot 1(1+p)},$$

$$a_4 = -\frac{a_2}{4(4+2p)} = -\frac{a_2}{2^2 \cdot 2(2+p)} = (-1)^2 \frac{a_0}{2^4 \cdot 2!(1+p)(2+p)},$$

⋮

$$a_{2n} = (-1)^n \frac{a_0}{2^{2n} \cdot n!(1+p)(2+p)\dots(n+p)},$$

yazılabilir ve

$$y_1(x) = a_0 x^p \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!(1+p)(2+p)\dots(n+p)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}, \quad 0 < x < \infty$$

çözümüne ulaşılır. Çözümü daha sade yazabilmek için

$$\Gamma(p+1) = \int_0^{\infty} t^p e^{-t} dt, \quad p > 0$$

şeklinde tanımlanan Gamma fonksiyonu kullanılabilir [Xie, 2010]. Burada,

$$\Gamma(p+1) = -\int_0^{\infty} t^p d(e^{-t}) = -t^p e^{-t} \Big|_{t=0}^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-t} p t^{p-1} dt = p \int_0^{\infty} t^{p-1} e^{-t} dt = p \Gamma(p)$$

yazılabilir. Öyle ki

$$\begin{aligned} \Gamma(n+p+1) &= (n+p)\Gamma(n+p) = (n+p)(n+p-1)\Gamma(n+p-1) = \\ &= (n+p)(n+p-1)\dots(1+p)\Gamma(1+p) \end{aligned}$$

elde edilebilir. $p = k$ 'nın bir tamsayı olması durumunda

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = -e^{-t} \Big|_{t=0}^{\infty} = 1,$$

$$\Gamma(2) = 1.\Gamma(1) = 1,$$

$$\Gamma(3) = 2.\Gamma(2) = 2.1 = 2!,$$

...

$$\Gamma(k+1) = k.\Gamma(k) = k!$$

bulunur. Bu nedenle

$$a_0 = [2^p \Gamma(1+p)]^{-1}$$

seçilmesiyle birinci Frobenius seri çözümü

$$y_1(x) = J_p(x)$$

$J_p(x)$ fonksiyonuna p 'inci mertebeden *birinci tür Bessel* fonksiyonu denir.

$$J_p(x) = \frac{1}{2^p \Gamma(1+p)} x^p \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!(1+p)(2+p)\dots(n+p)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n},$$

$$J_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n! \Gamma(n+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}, \quad 0 < x < \infty$$

Funch Teoremine göre lineer bağımsız ikinci çözüm indisel denklemin kökleri arasındaki farka göre değişmektedir. $\alpha_1 - \alpha_2 = 2p$ farkının tamsayıdan farklı, sıfır veya pozitif tamsayı olması durumuna göre değişmektedir.

4.1.3.1. $2p$ 'nin Tamsayı Olmaması Durumu

İkinci Frobenius seri çözümü

$$y_2(x) = x^{-p} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \quad 0 < x < \infty$$

şeklindedir. Aynı işlemleri kullanarak $n = 1, 2, \dots$ için

$$a_{2n-1} = 0, \quad a_{2n} = (-1)^n \frac{b_0}{2^{2n} n! (1-p)(2-p)\dots(n-p)},$$

$$y_2(x) = b_0 x^{-p} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n! (1-p)(2-p)\dots(n-p)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}, \quad 0 < x < \infty$$

$b_0 = [2^{-p} \Gamma(1-p)]^{-1}$ seçilmesiyle

$$y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n! \Gamma(n-p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-p} = J_{-p}(x), \quad 0 < x < \infty$$

elde edilir. Buradan genel çözüm;

$$y(x) = C_1 J_p(x) + C_2 J_{-p}(x)$$

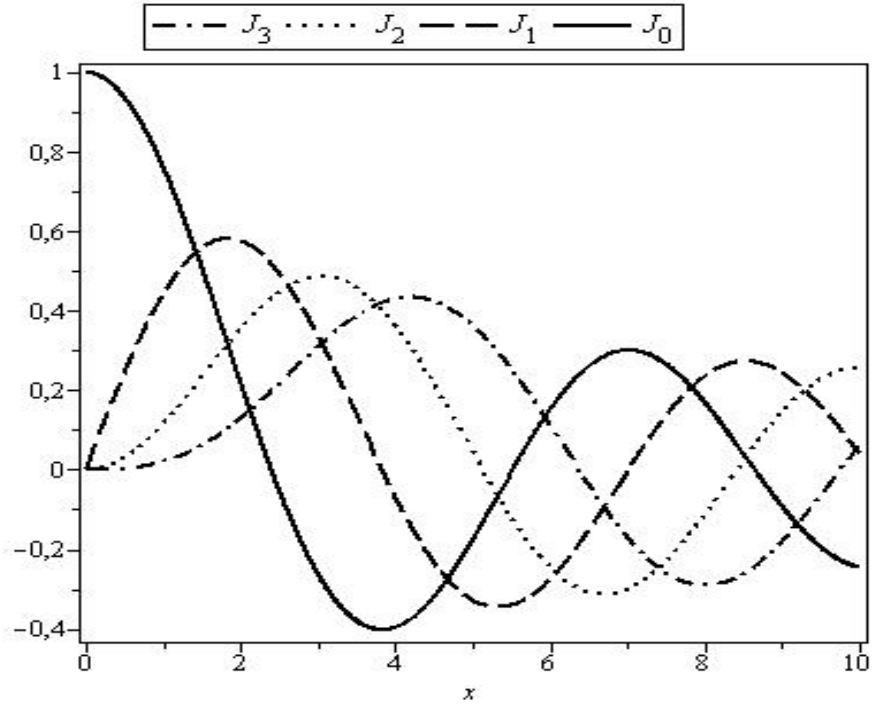
şeklindedir. Genel çözüm aynı zamanda

$$y(x) = D_1 J_p(x) + D_2 Y_p(x)$$

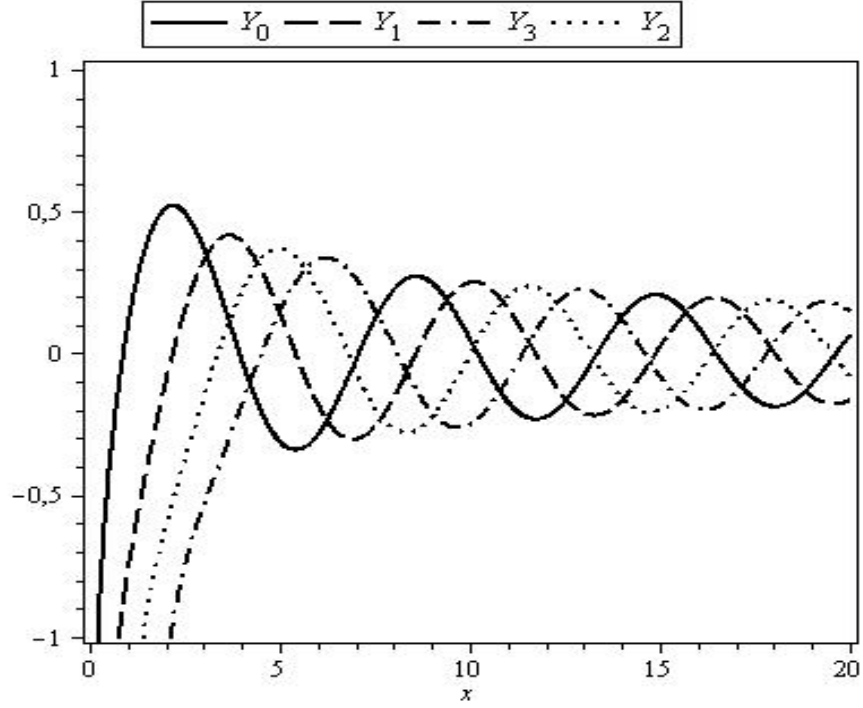
$$Y_p(x) = \frac{J_p(x) \cos(p\pi) - J_{-p}(x)}{\sin(p\pi)}$$

p 'inci mertebeden *ikinci tür Bessel* fonksiyonudur.

$J_0(x)$, $J_1(x)$, $J_2(x)$ ve $J_3(x)$ fonksiyonlarının grafikleri ile $Y_0(x)$, $Y_1(x)$, $Y_2(x)$ ve $Y_3(x)$ fonksiyonlarının grafikleri aşağıdaki şekildedir.



Şekil.4.1. $J_0(x)$, $J_1(x)$, $J_2(x)$ ve $J_3(x)$ fonksiyonlarının grafiği.



Şekil.4.2. $Y_0(x)$, $Y_1(x)$, $Y_2(x)$ ve $Y_3(x)$ fonksiyonlarının grafiği.

Yukarıda verilen $J_0(x)$ ve $Y_0(x)$ fonksiyonlarının grafiklerine yakından bakılacak olursa, görülür ki, x 'in büyük değerleri için bu eğriler sönümlü kosinüs ve sinüs eğrilerini vermektedir.

4.1.3.2. $p = 0, \alpha_1 = \alpha_2 = 0$ Durumu

Birinci Fronenius seri çözümü sadeleştirilerek

$$y_1(x) = J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}, \quad 0 < x < \infty$$

şeklinde yazılabilir. Lineer bağımsız ikinci çözüm ise

$$y_2(x) = y_1(x) \ln x + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \quad 0 < x < \infty$$

biçimindedir. x 'e göre türev alınırsa;

$$y_2'(x) = y_1' \ln x + \frac{y_1}{x} + \sum_{n=0}^{\infty} n b_n x^{n-1},$$

$$y_2''(x) = y_1'(x) \ln x + \frac{2y_1'}{x} - \frac{y_1}{x^2} + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)b_n x^{n-2}, \quad 0 < x < \infty$$

ifadeleri bulunur ve bu ifadelerdeki y_2, y_2' ve y_2'' türevlerinin Bessel diferansiyel denkleminde yerine konulmasıyla ve $p = 0$ durumunda;

$$(x^2 y_1'' + x y_1' + x^2 y_1) \ln x + 2x y_1' + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)b_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n b_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+2} = 0$$

denklemini bulunur [Xie, 2010].

$y_1(x)$ 'in Bessel denkleminin bir çözümü olması nedeniyle $x^2 y_1'' + x y_1' + x^2 y_1 = 0$ yazılabilir ve belirtilmelidir ki

$$2x y_1' = 2x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n!)^2} \frac{2n \cdot x^{2n-1}}{2^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4n}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

bulunur. Buradan

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4n}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)b_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n b_n x^n + \sum_{n=2}^{\infty} b_{n-2} x^n = 0$$

elde edilir.

Bu eşitliğin sağlanabilmesi için $x^n, n = 0, 1, \dots$ sıfır olmalıdır.

x^1 katsayısından $1 \cdot b_1 = 0 \Rightarrow b_1 = 0$ dır.

$x^n, n \geq 1$ katsayısından $b_{2n+1} = 0$ dır ve

$$(-1)^n \frac{4n}{(n!)^2} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} + [2n(2n-1) + 2n]b_{2n} + b_{2n-2} = 0$$

yazılırsa

$$b_{2n} = (-1)^{n+1} \frac{1}{n(n!)^2} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} - \frac{b_{2n-2}}{(2n)^2}$$

elde edilir. Sadelik için $b_0 = 0$ alınsın. Gerekli işlemler yapılarak

$$b_{2n} = (-1)^{n+1} \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}}{(n!)^2} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$$

olduğu gösterilebilir. Bu nedenle lineer bağımsız ikinci çözüm

$$y_2(x) = J_0(x) \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}}{(n!)^2} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}, \quad 0 < x < \infty$$

sıfıncı mertebeden ikinci tür Bessel fonksiyonunun terimidir.

$$y_2(x) = \frac{\pi}{2} Y_0(x) + (\ln 2 - \gamma) J_0(x), \quad 0 < x < \infty$$

$0 < x < \infty$ için sıfıncı mertebeden ikinci tür Bessel fonksiyonu

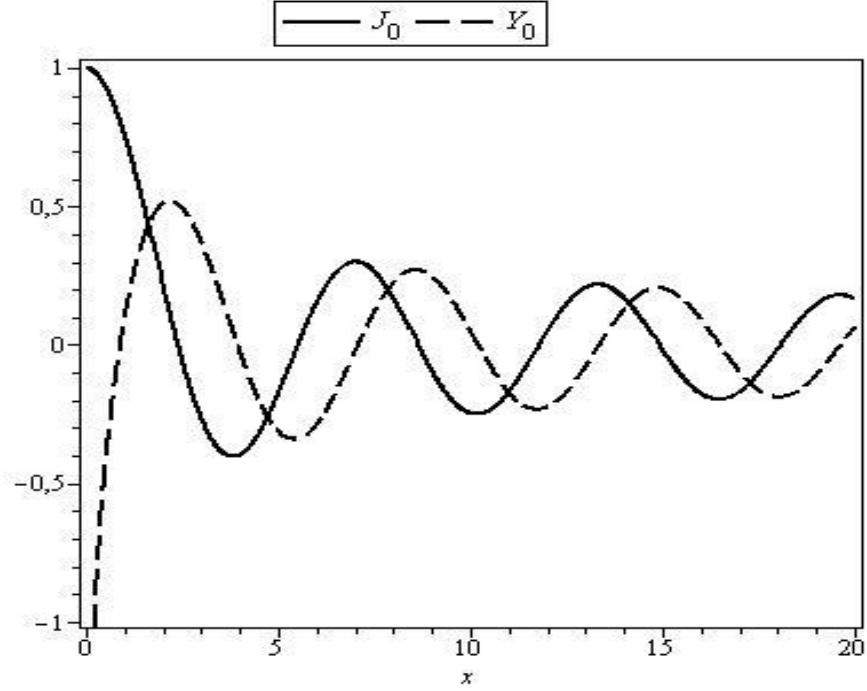
$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi} \left(\left(\ln \frac{x}{2} + \gamma \right) J_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} \right)$$

şeklindedir. Burada

$$\gamma = 0,57721566490153\dots = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right)$$

Euler sabitidir.

Genel çözüm ise $y(x) = C_1 J_0(x) + C_2 Y_0(x)$ şeklindedir [Xie, 2010].



Şekil 4.3. $J_0(x)$ ve $Y_0(x)$ 'in grafikleri.

4.1.3.3. p Pozitif Tamsayı Durumu

Birinci Frobenius seri çözümü

$$y_1(x) = J_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!(n+p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}, \quad 0 < x < \infty$$

şeklinde yazılmıştı. Lineer bağımsız ikinci çözüm için

$$y_2(x) = ay_1(x) \ln x + x^{-p} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \quad 0 < x < \infty$$

$$y_2'(x) = a \left(y_1'(x) \ln x + \frac{y_1}{x} \right) + \sum_{n=0}^{\infty} (n-p) b_n x^{n-p-1}$$

$$y_2''(x) = a \left(y_1''(x) \ln x + \frac{2y_1'}{x} - \frac{y_1}{x^2} \right) + \sum_{n=0}^{\infty} (n-p)(n-p-1) b_n x^{n-p-2}$$

değerlerinin Bessel denkleminde yerine konulmasıyla

$$a(x^2 y_1'' + xy_1' + (x^2 - p^2)y_1) \ln x + 2axy_1' + \sum_{n=0}^{\infty} (n-p)(n-p-1)b_n x^{n-p}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n-p)b_n x^{n-p} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n-p-2} - \sum_{n=0}^{\infty} p^2 b_n x^{n-p} = 0$$

olduğu görülür. $y_1(x)$ ifadesinin denklemin bir çözümü olması nedeniyle

$$x^2 y_1'' + xy_1' + (x^2 - p^2)y_1 = 0$$

yazılabilir.

$$2axy_1' = 2ax \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n+p)x^{2n+p-1}}{n!(n+p)!2^{2n+p}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2a(2n+p)}{n!(n+p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}$$

yazılıp denklemin x^p ile çarpılmasıyla

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{p+1} a(2n+p)}{n!(n+p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2(n+p)} + \sum_{n=0}^{\infty} n(2n-p)b_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_{n-2} x^n = 0$$

elde edilir [Xie, 2010].

Bu eşitliğin sağlanabilmesi için $x^n, n=0,1,\dots$ katsayısı sıfır olmalıdır.

Yukarıdaki eşitliğe $x^n, 0 \leq n < 2p$ 'nin hiçbir katkısı yoktur.

$x^0 : 0 \cdot (0-2p)b_0 = 0 \Rightarrow b_0$ keyfi olduğu için $b_0 = 1$ alınsın.

$$x^1 : 1 \cdot (1-2p)b_1 = 0 \Rightarrow b_1 = 0$$

$x^n, 2 \leq n < 2p$ katsayısından

$$n(n-2p)b_n + b_{n-2} = 0 \Rightarrow b_n = \frac{b_{n-2}}{n(2p-n)}$$

$$\begin{aligned}
n=2: b_2 &= \frac{b_0}{2(2p-2)} = \frac{1}{2^2 \cdot 1(p-1)} \\
n=4: b_4 &= \frac{b_2}{4(2p-4)} = \frac{1}{2^4 \cdot 2!(p-1)(p-2)} \\
&\vdots \\
n=2k: b_{2k} &= \frac{b_{2k-2}}{2k(2p-2k)} = \frac{1}{2^{2k} \cdot k!(p-1)(p-2)\dots(p-k)} = \frac{(p-k-1)!}{2^{2k} k!(p-1)!}
\end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan $b_{2n+1} = 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$ olduğu görülür.

x^{2p} katsayısından

$$\frac{2^{p+1}ap}{p!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p} + b_{2p-2} = 0 \Rightarrow a = -2^{p-1}(p-1)!b_{2(p-1)} = -\frac{1}{2^{p-1}(p-1)!}$$

elde edilir.

b_{2p} değeri keyfidir fakat sadelik için $b_{2p} = 0$ alınsın.

$x^{2(n+p)}$, $n \geq 1$, katsayısından

$$(-1)^n \frac{2^{p+1}a(2n+p)}{n!(n+p)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{2(n+p)} + (2n+2p)(2n)b_{2(n+p)} + b_{2(n-1+p)} = 0,$$

yazılırsa

$$b_{2(n+p)} = (-1)^{n+1} \frac{2^{p-1}a(2n+p)}{n(n+p)n!(n+p)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{2(n+p)} - \frac{b_{2(n-1+p)}}{2^2 n(n+p)}$$

olduğu görülür. Bir iki manipülasyondan sonra

$$b_{2(n+p)} = (-1)^{n+1} \frac{2^{p-1} a A_n}{n!(n+p)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{2(n+p)},$$

$$A_n = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{1+p} + \frac{1}{2+p} + \dots + \frac{1}{n+p}\right)$$

yazılabilir. Buradan lineer bağımsız ikinci çözüm $0 < x < \infty$ için,

$$y_2(x) = a J_p(x) \ln x + x^{-p} \left(\sum_{n=0}^{p-1} \frac{(p-n-1)!}{n!(p-1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} + a \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{p-1} A_n}{n!(n+p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2(n+p)} \right)$$

bulunur. Notasyon değişikliği yapılarak

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} = \psi(n+1) + \gamma, \quad \psi(1) = -\gamma, \quad \psi(n) = \frac{\Gamma'(n)}{\Gamma(n)}$$

yazılır. Burada ψ fonksiyonu $y_2(x)$ Bessel fonksiyonunun bir terimidir.

$$\begin{aligned} y_2(x) &= a \left(J_p(x) \ln x + \frac{x^{-p}}{a} \sum_{n=0}^{p-1} \frac{(p-n-1)!}{n!(p-1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\psi(n+1) + \psi(n+p+1) - \psi(p+1) + \gamma}{n!(n+p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p} \right) \\ &= a \left(\left(J_p(x) \ln \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{p-1} \frac{(p-n-1)!}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-p} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\psi(n+1) + \psi(n+p+1)}{n!(n+p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} (\gamma - \psi(p+1) - 2 \ln 2) J_p(x) \right) \\ &= a \left(\frac{\pi}{2} Y_p(x) - \frac{1}{2} (\gamma - \psi(p+1) - 2 \ln 2) J_p(x) \right), \quad 0 < x < \infty \\ Y_p(x) &= \frac{2}{\pi} J_p(x) \ln \frac{x}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{p-1} \frac{(p-n-1)!}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-p} \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\psi(n+1) + \psi(n+p+1)}{n!(n+p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p} \end{aligned}$$

olarak sunulabilir. Birinci ve ikinci tür Bessel fonksiyonlarının kullanılmasıyla genel çözüm

$$y(x) = C_1 J_p(x) + C_2 Y_p(x)$$

şeklindedir. Bu çözüm $\alpha_1 - \alpha_2$ farkının pozitif tamsayı olması durumudur. İkinci çözüm $\ln x$ logaritmik terimini içerir [Xie, 2010].

4.1.3.4. $p = k + \frac{1}{2}, k = 0, 1, \dots$ ve $\alpha_1 - \alpha_2 = 2k + 1$ 'in Pozitif Tamsayı Durumu

Birinci Frobenius seri çözümü

$$y_1(x) = J_{k+\frac{1}{2}}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n! \Gamma\left(n+k+\frac{3}{2}\right)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+k+\frac{1}{2}}, \quad 0 < x < \infty$$

şeklindedir.

$$y_1'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+k+\frac{1}{2}}{2n! \Gamma\left(n+k+\frac{3}{2}\right)} \Gamma\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+k-\frac{1}{2}},$$

olduğundan lineer bağımsız ikinci çözüm

$$y_2(x) = a y_1(x) \ln x + x^{-(k+\frac{1}{2})} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \quad 0 < x < \infty$$

$$y_2'(x) = a \left(y_1'(x) \ln x + \frac{y_1}{x} \right) + \sum_{n=0}^{\infty} \left(n - k - \frac{1}{2} \right) b_n x^{n-k-\frac{3}{2}}$$

$$y_2''(x) = a \left(y_1''(x) \ln x + \frac{2y_1'}{x} - \frac{y_1}{x^2} \right) + \sum_{n=0}^{\infty} \left(n - k - \frac{1}{2} \right) \left(n - k - \frac{3}{2} \right) b_n x^{n-k-\frac{5}{2}}$$

yazılarak ve bu değerler Bessel denkleminde yerine konularak

$$a(x^2 y_1'' + xy_1' + (x^2 - p^2)y_1) \ln x + 2axy_1' + \sum_{n=0}^{\infty} n(n-2k-1)b_n x^{n-k-\frac{1}{2}} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n-k+\frac{3}{2}} = 0$$

olduğu görülür. Burada

$$x^2 y_1'' + xy_1' + (x^2 - p^2)y_1 = 0$$

olduğu belirtilmelidir ve denklemin $x^{k+\frac{1}{2}}$ ile çarpılmasıyla

$$a \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{k+\frac{3}{2}} (2n+k+\frac{1}{2})}{n! \Gamma\left(n+k+\frac{3}{2}\right)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+2k+1} + \sum_{n=0}^{\infty} n(n-2k-1)b_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+2} = 0$$

bulunur. Bu eşitliğin sağlanabilmesi için $x^2, n=0,1,\dots$ sıfır olmalıdır.

Yukarıdaki eşitliğe $x^n, 0 \leq n < 2k+1$ için hiçbir katkısı yoktur.

$x^0 : 0.(0-2k-1)b_0 = 0 \Rightarrow b_0$ keyfidir.

$$x^1 : 1.(1-2k-1)b_1 = 0 \Rightarrow b_1 = 0$$

$x^n, 2 \leq n < 2p$ katsayısından

$$b_{2m+1} = -\frac{b_{2m-1}}{(2m+1)(2m-2k)} = 0, \quad 1 < m < k$$

olduğu görülebilir. x^{2k+1} katsayısından

$$a \frac{k+\frac{1}{2}}{2^{k-\frac{1}{2}} \Gamma\left(k+\frac{3}{2}\right)} + (2k+1).0.b_{2k+1} + b_{2k-1} = 0 \Rightarrow a = 0$$

yazılırsa $a = 0$ ile birlikte x^n katsayısı verilir.

$$n(n-2p)b_n + b_{n-2} = 0 \Rightarrow b_{2m-1} = 0, b_{2m} = -\frac{b_{2m-2}}{2^2 m(m-p)}, m = 1, 2, \dots$$

$$b_{2m} = (-1)^m \frac{b_0}{2^{2m} m!(1-p)(2-p)\dots(m-p)}.$$

olduğu görülebilir. Nihayetinde

$$b_0 = \left(2^{-p} \Gamma(1-p)\right)^{-1}$$

seçilmesiyle

$$b_{2m} = \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(m-p+1)} \left(\frac{1}{2}\right)^{2m-p}$$

bulunur. Ve $y_2(x)$ çözümü

$$y_2(x) = x^{-p} \sum_{n=0}^{\infty} b_{2n} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n-p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-p} = J_{-p}(x), 0 < x < \infty$$

biçimindedir.

Genel çözüm

$$y(x) = C_1 J_p(x) + C_2 J_{-p}(x)$$

şeklindedir ve $2p$ 'nin tamsayı olmaması durumuyla aynıdır. Bu durum $\alpha_1 - \alpha_2$ nin pozitif tamsayı olduğu durumdur, ikinci çözüm bir Frobenius serisidir ve $\ln x$ logaritmik terimini içermez [Xie, 2010].

Uygulamalarda Bessel fonksiyonu nadiren stveart formda bulunur. İkinci mertebeden lineer adi diferansiyel denklem

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1-2\alpha}{x} \frac{dy}{dx} + \left((\beta\rho x^{\rho-1}) + \frac{\alpha^2 - p^2 \rho^2}{x^2} \right) y = 0, \quad x > 0 \quad (33)$$

şeklinde verilsin. Burada α, β, p, ρ sabit sayılardır ve bu denklem Bessel denkleminde dönüştürülebilir.

$$\xi^2 \frac{d^2\eta}{d\xi^2} + \xi \frac{d\eta}{d\xi} + (\xi^2 - p^2)\eta = 0, \quad \xi > 0 \quad (34)$$

Sonuç aşağıdaki gibi bulunur.

$\xi = \beta x^\rho$ değişken dönüşümüyle,

$$\xi \frac{dy}{d\xi} = \xi \frac{dy/dx}{d\xi/dx} = \beta x^\rho \frac{1}{\beta \rho x^{\rho-1}} \frac{dy}{dx} = \frac{x}{\rho} \frac{dy}{dx} \Rightarrow \xi \frac{d(\cdot)}{d\xi} = \frac{x}{\rho} \frac{d(\cdot)}{dx}$$

yazılabilir. Bu durumda (34) denklemi

$$\xi \frac{d}{d\xi} \left(\xi \frac{d\eta}{d\xi} \right) + (\xi^2 - p^2)\eta = 0 \Rightarrow \frac{x}{\rho} \frac{d}{dx} \left(\frac{x}{\rho} \frac{d\eta}{dx} \right) + (\beta^2 x^{2\rho} - p^2)\eta = 0$$

halini alır. $\eta = x^{-\alpha} y$ dönüşümüyle

$$x \frac{d\eta}{dx} = x^{1-\alpha} \frac{dy}{dx} - \alpha x^{-\alpha} y$$

$$x \frac{d}{dx} \left(x \frac{d\eta}{dx} \right) = x^{2-\alpha} \frac{d^2y}{dx^2} + (1-2\alpha)x^{1-\alpha} \frac{dy}{dx} + \alpha^2 x^{-\alpha} y$$

elde edilir. Buradan diferansiyel denklem

$$x^{2-\alpha} \frac{d^2y}{dx^2} + (1-2\alpha)x^{1-\alpha} \frac{dy}{dx} + \alpha^2 x^{-\alpha} y + (\beta^2 x^{2\rho} - p^2)\rho^2 x^{-\alpha} y = 0$$

haline gelir ve bu denklemdede (33) denkleminin formundadır.

Eğer (34) Bessel diferansiyel denkleminin çözümünde $\eta = B_p(\xi)$ olarak alınsaydı (33) denkleminin çözümü $y = x^\alpha B_p(\beta x^\rho)$ şeklinde olacaktır.

4.1.4. Değişik Mertebelerden Bessel Fonksiyonları Arasındaki Bağlılıklar

Bessel fonksiyonları arasında değişik rekürans formülleri vardır. Bunlar kısaca aşağıdaki şekilde bulunabilir.

$$J_p(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(p+m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+p}$$

fonksiyonu, x in her değeri için yakınsak olduğundan, türevi alınırsa,

$$J'_p(x) = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (2m+p)}{m! \Gamma(p+m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+p-1}$$

elde edilir.

$$xJ'_p(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (2m+p)}{m! \Gamma(p+m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+p}$$

$$xJ'_p(x) = p \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (2m+p)}{m! \Gamma(p+m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+p} + 2m \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m (2m+p)}{m! \Gamma(p+m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+p}$$

$$= pJ_p(x) + x \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m! \Gamma(p+m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+p+1}$$

Buradan,

$$xJ'_p(x) = pJ_p(x) - xJ_{p+1}(x)$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$xJ'_p(x) = -pJ_p(x) - xJ_{p-1}(x)$$

$$J_{p+1}(x) = \frac{2p}{x}J_p(x) - J_{p-1}(x)$$

$$J'_p = \frac{1}{2}(J_{p-1} - J_{p+1})$$

elde edilir. Bu formüller $Y_p(x)$ için de doğrudur.

$J_p(x)$ için bir örnek verirsek

$$J_2(x) = \frac{2}{x}J_1(x) - J_0(x)$$

yazılabilir. Eğer J_0 ve J_1 fonksiyonları biliniyorsa, J_2 ve aynı şekilde, n herhangi bir pozitif tamsayı olmak üzere, $J_n(x)$ bulunabilir. J_0 ve J_1 değerleri ise literatürde çizelgeler halinde verilmektedir.

Yukarıda verilen rekürans formülleri yardımı ile pozitif tamsayı olmayan değişik p değerlerine karşılık olan Bessel fonksiyonları da aynı şekilde kolayca yazılabilir. Örneğin, $p = \frac{1}{2}$ için,

$$\begin{aligned} J_{\frac{1}{2}}(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\Gamma(m+1)\Gamma\left(m+\frac{3}{2}\right)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{x}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2^{2m}\Gamma(m)\Gamma\left(m+\frac{3}{2}\right)} x^{2m} \end{aligned}$$

olur. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{3}{2} + m\right) &= \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \left[\frac{1.3.5\dots(2m+1)}{2^m} \right] \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left[\frac{1.3.5\dots(2m+1)}{2^m} \right]\end{aligned}$$

olduğu göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned}J_{\frac{1}{2}}(x) &= \sqrt{\frac{x}{2}} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2^m \cdot 1.3.5\dots(2m+1)} x^{2m} \\ &= \sqrt{\frac{2x}{\pi}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m+1)!} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} x^{2m+1}\end{aligned}$$

veya

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin(x)$$

elde edilir. Aynı şekilde

$$J_{\frac{-1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos(x)$$

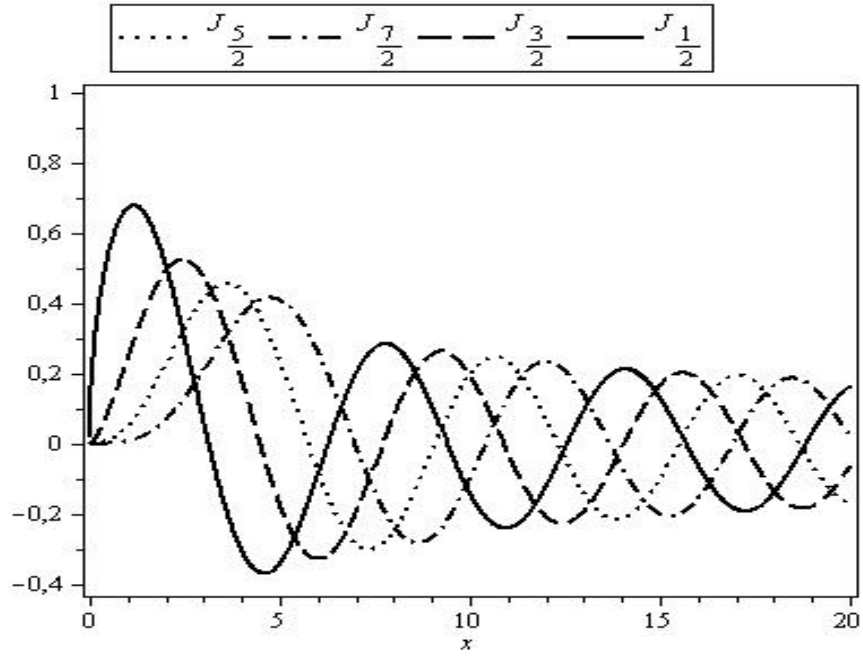
bulunur.

$$\begin{aligned}J_{\frac{3}{2}}(x) &= \frac{1}{x} J_{\frac{1}{2}}(x) - J_{\frac{-1}{2}}(x) \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\frac{\sin(x)}{x} - \cos(x) \right)\end{aligned}$$

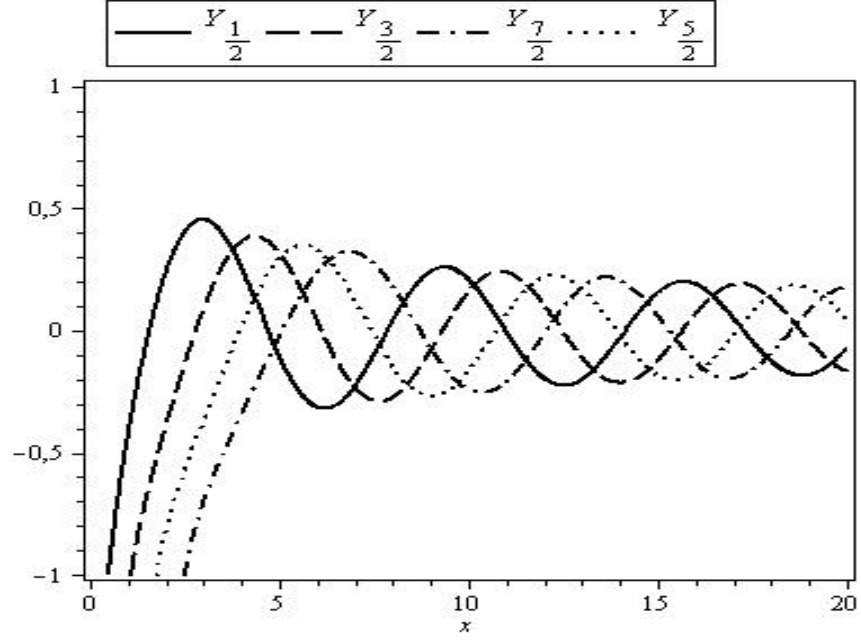
ve aynı şekilde,

$$J_{\frac{5}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\frac{3 \sin(x)}{x^2} - \frac{3 \cos(x)}{x} - \sin(x) \right)$$

bulunur. Şimdi de küresel Bessel fonksiyonlarının grafiklerine bir göz atmak gerekirse



Şekil 4.4. $J_{1/2}(x)$, $J_{3/2}(x)$, $J_{5/2}(x)$ ve $J_{7/2}(x)$ fonksiyonlarının grafiği.



Şekil 4.5. $Y_{1/2}(x)$, $Y_{3/2}(x)$, $Y_{5/2}(x)$ ve $Y_{7/2}(x)$ fonksiyonlarının grafiği.

4.1.5. Legendre Denklemi ve Legendre Polinomları

Bessel diferansiyel denkleminde sonra, ikinci mertebeden değişken katsayılı lineer diferansiyel denklemler arasında,

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + p(p+1)y = 0 \quad (35)$$

denkleminin özel bir yeri vardır. Bu denkleme, p inci mertebeden *Legendre* denklemi denir. Burada p , herhangi bir pozitif reel sayıdır.

(35) denklemi aşağıdaki şekilde tekrar yazılsın.

$$y'' - \frac{2x}{1-x^2}y' + \frac{p(p+1)}{1-x^2}y = 0$$

Açıkça görülüyor ki, burada $x \pm 1$ noktaları düzgün tekil noktalardır. Ayrıca, $s = 1/x$ dönüşümü yapılırsa, (35) denkleminin

$$\frac{d^2 y}{ds^2} + \left[\frac{2}{s} - \frac{2x}{s(s^2-1)} \right] \frac{dy}{ds} + \frac{p(p+1)}{s^2(s^2-1)} y = 0$$

şekline sokulabilmesinden anlaşılacağı üzere, diferansiyel denklem sonsuzda da bir düzgün tekilliğe sahiptir. Öyle ise bu noktalar dışında,

$$P_1(x) = -\frac{2x}{1-x^2}$$

ve

$$P_2(x) = -\frac{p(p+1)}{1-x^2}$$

fonksiyonları analitik fonksiyonlardır. Bu nedenle, $x=0$ noktası komşuluğunda, $|x| < 1$ aralığında (35) denkleminin

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

şeklinde bir seri çözümü bulunabilir. y, y', y'' değerleri (35) denkleminde yerlerine konursa,

$$(1-x^2) \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - 2x \sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^{n-1} + p(p+1) \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

veya

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2n c_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} p(p+1)c_n x^n = 0$$

olur. İndislerle ilgili düzenleme yapılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2}x^n - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2nc_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} p(p+1)c_n x^n = 0$$

veya

$$2c_2 + p(p+1)c_0 + [3.2c_3 + (p+2)(p-1)c_1]x + \sum_{n=2}^{\infty} \{(n+2)(n+1)c_{n+2} + [p(p+1) - n(n+1)]c_n\}x^n = 0$$

elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned} 2c_2 + p(p+1)c_0 &= 0 \\ 3.2c_3 + (p+2)(p-1)c_1 &= 0 \\ (n+2)(n+1)c_{n+2} + (p+n+1)(p-n)c_n &= 0, \quad n \geq 2 \end{aligned}$$

yazılır. $c_0 \neq 0$ olduğu göz önünde tutularak, ilk iki bağıntıdan,

$$c_2 = -\frac{p(p+1)}{2!}c_0 \quad \text{ve} \quad c_3 = -\frac{(p+2)(p-1)}{3!}c_1$$

bulunur. Üçüncü bağıntı,

$$c_{n+2} = -\frac{(p+n+1)(p-n)}{(n+2)(n+1)}c_n, \quad n \geq 2 \quad (36)$$

rekürans formülünü verir. Geri kalan katsayılar bu formül yardımıyla c_0 , c_1 keyfi sabitleri cinsinden bulunur. Böylece, $x < 1$ aralığında p inci mertebeden Legendre denkleminin genel çözümü,

$$y = \left[c_0 \left(1 - \frac{(p+1)p}{2!}x^2 + \frac{(p+3)(p+1)(p-2)}{4!}x^4 - \dots \right) + c_1 \left(x - \frac{(p+2)(p-1)}{3!}x^3 + \frac{(p+4)(p+2)(p-1)(p-3)}{5!}x^5 - \dots \right) \right]$$

elde edilir. Linear bağımsız çözümlerin her biri daha kısa olarak,

$$y_1(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(p+2n-1)(p+2n-3)\dots(p+1)p(p-2)\dots(p-2n+2)}{(2n)!} x^{2n}$$

ve

$$y_2(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{2n+1} \frac{(p+2n)(p+2n-2)\dots(p+2)(p-1)\dots(p-2n+1)}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

şeklinde yazılır. Burada, toplama işareti içinde görülen serilerin her biri $x < 1$ aralığında yakınsak ve $x > 1$ aralığında ise ıraksaktır. İspatlanması kolay olmakla beraber $x = \pm 1$ noktalarında da bu seriler ıraksaktır. Şimdi, (36) numaralı rekürans formülü tekrar göz önüne alınsın. Burada, $n = 2p$ değişken değiştirmesi yapılırsa,

$$c_{p-2} = -\frac{p(p-1)}{2(2p-1)} c_p, \quad p \geq 2$$

elde edilir. Aynı şekilde,

$$c_{p-4} = -\frac{(p-2)(p-3)}{4(2p-3)} c_{p-2} = -\frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{2.4.(2p-1)(2p-3)} c_p$$

olur. Öyle ise, $p = 0$ veya herhangi bir pozitif tamsayı ise, Legendre diferansiyel denkleminin bir özel çözümü,

$$y = c_p \left[x^p - \frac{p(p-1)}{2(2p-1)} x^{p-2} + \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{2.4.(2p-1)(2p-3)} x^{p-4} - \dots \right] \quad (37)$$

olur. Burada açıkça görülüyor ki, p ye bağlı olarak parantez içinde x in üssü sıfır olduğunda serinin son terimi elde edilmiş oluyor; başka bir deyişle seri bir çok terimliye dönüşüyor. c_p nin herhangi bir keyfi sabit olduğu düşünülürse,

$$c_p = \frac{(2p)!}{2^p (p!)^2} = \frac{(2p-1)(2p-3)\dots 1}{p!}, \quad p = 1, 2, 3, \dots$$

seçilmesi halinde, ki burada $c_0 = 1$ olur. (37) denklemi ile tarif edilen polinomlara *Legendre polinomları* denir ve aşağıda ifade edildiği şekilde $P_p(x)$ ile gösterilir. $P_0(x) = 1$ olduğu göz önünde tutularak,

$$P_p(x) = \frac{(2p)!}{2^p (p!)^2} \left[x^p - \frac{p(p-1)}{2(2p-1)} x^{p-2} + \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{2 \cdot 4 \cdot (2p-1)(2p-3)} x^{p-4} - \dots \right], \quad p = 1, 2, 3, \dots \quad (38)$$

yazılır. Yukarıdaki denklemden yararlanarak, her biri Legendre denkleminin bir çözümü olan ilk birkaç Legendre polinomu aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

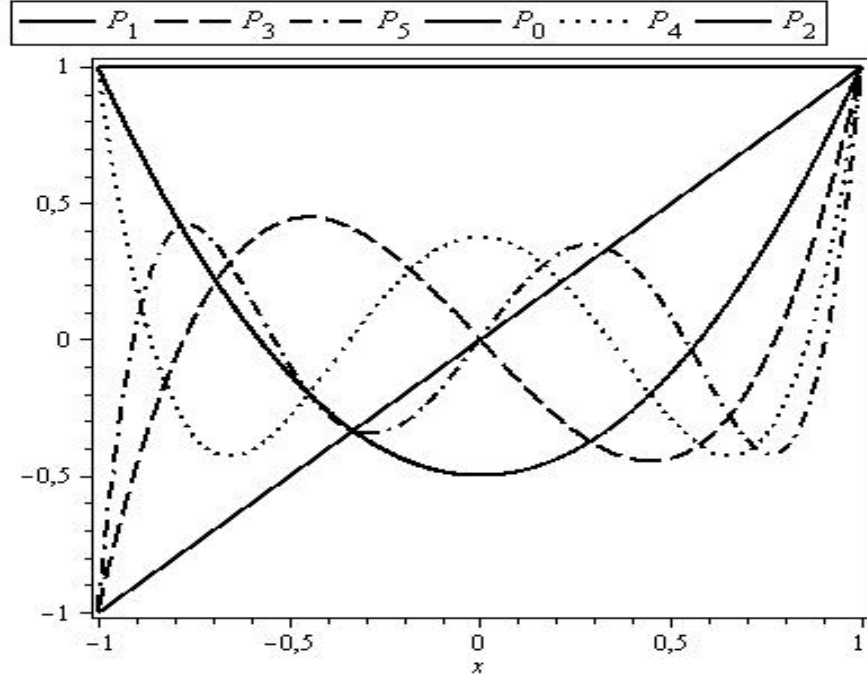
$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$

$$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$$

Bu polinomların ilk beşinin grafikleri aşağıda Şekil 4.6'da gösterilmiştir.



Şekil 4.6. $P_0(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$, $P_4(x)$ ve $P_5(x)$ fonksiyonlarının grafiği.

(38) denklemi ile tarif edilen Legendre polinomları, $P_0(x)=1$, $P_1(x)=x$ ve $P_1(1)=1$ olduğu göz önünde tutularak,

$$P_{p+1}(x) = \frac{2p+1}{p+1} x P_p(x) - \frac{p}{p+1} P_{p-1}(x) \quad (39)$$

rekürans formülü yardımıyla kolayca bulunabilir.

Legendre polinomları, Rodrigues formülü adı verilen bir formül yardımıyla da kısaca,

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad (40)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada p yerine n kullanılmıştır. Bu formülün ispatı, Legendre polinomlarının, Legendre denkleminin çözümü olduğunu ispatlamak suretiyle yapılır. Bunun için önce,

$$u(x) = (x^2 - 1)^n$$

fonksiyonu göz önüne alınsın. Bu fonksiyonun türevi alınırsa,

$$u' = 2nx(x^2 - 1)^{n-1}$$

veya

$$(x^2 - 1)u' - 2nxu = 0$$

elde edilir. Arka arkaya türev alınmasına devam edilirse

$$(x^2 - 1)u'' - 2x(n-1)u' - 2nu = 0$$

.....

$$(x^2 - 1)u^{(k+2)} - 2x[n - (k+1)]u^{(k+1)} - 2[n + (n-1) + \dots + (n-k)]u^{(k)} = 0$$

elde edilir. Diğer taraftan,

$$n + (n-1) + \dots + (n-k) = \frac{(2n-k)(k+1)}{2}$$

olduğundan,

$$(x^2 - 1)u^{(k+1)} - 2x[n - (k+1)]u^{(k+1)} - (2n-k)(k+1)u^{(k)} = 0$$

olur. Burada $k = n$ yazılır ve her terim $\frac{-1}{(2^n n!)}$ ile çarpılırsa,

$$(1-x^2)\frac{u^{(n+2)}}{2^n n!} - 2x\frac{u^{(n+1)}}{2^n n} + n(n+1)\frac{u^{(n)}}{2^n n!} = 0$$

elde edilir ve bu denklemden,

$$P_n(x) = \frac{u^n}{2^n n!} = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n x}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad (41)$$

yazılırsa,

$$(1-x^2)P_n''(x) - 2xP_n'(x) + n(n+1)P_n(x) = 0$$

olur. Rodrigues formülü adı verilen (41) yardımıyla tarif edilen $P_n(x)$ polinomları, Legendre denkleminin birer çözümüdür.

Legendre polinomlarının değişik özellikleri vardır. Bunlardan en önemlisi, $-1 \leq x \leq +1$ aralığında “*ortogonal*” oluşlarıdır. Polinomların bu özelliğini ispatlayabilmek için, Legendre denklemi önce,

$$\left[(1-x^2)y' \right]' = -p(p+1)y$$

şeklinde yazılsın. Burada y yerine $P_n(x)$ veya $P_m(x)$ yazılacak olursa, n ve m pozitif tam sayılar olmak üzere,

$$(1-x^2)P_n'(x) = -n(n+1)P_n(x)$$

veya

$$\left[(1-x^2)P_m'(x) \right]' = -m(m+1)P_m(x)$$

yazılır. Buradan,

$$(1-x^2)P_m''(x) - 2xP_m'(x) + m(m+1)P_m(x) = 0$$

$$(1-x^2)P_n''(x) - 2xP_n'(x) + n(n+1)P_n(x) = 0$$

bulunur. Birinci denklem $-P_n$ ile ve ikincisi P_m ile çarpılıp toplanırsa,

$$(1-x^2)\left(P_m P_n'' - P_m'' P_n\right) - 2x\left(P_m P_n' - P_m' P_n\right) = [m(m+1) - n(n+1)]P_m P_n$$

elde edilir ve bu denklem aşağıdaki şekilde yazılırsa,

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\left(P_m P_n' - P_m' P_n\right)\right] = [m(m+1) - n(n+1)]P_m P_n$$

ve -1 den $+1$ e kadar integrali alınır,

$$[m(m+1) - n(n+1)]\int_{-1}^{+1} P_m P_n dx = 0$$

elde edilir. $m \neq n$ için,

$$\int_{-1}^{+1} P_m P_n dx = 0$$

bulunur. Böylece, Legendre polinomlarının, ortogonal polinomlar olduğu ispatlanmış olur.

4.1.5.1. Küresel Koordinatlarda Helmholtz Denklemi

2. bölümde Neumann ve Dirichlet problemleri adı altında çözülen Helmholtz diferansiyel denklemi şimdi küresel koordinatlarda çözülmeye çalışılsın. Prof. Tretyakov'un önerdiği $\mathbf{R} = \mathbf{r} + z\mathbf{z}$, $\nabla = \nabla_{\perp} + z\partial_z$ notasyonundan biran ayrılıp z eksenine ait ekstenel koordinat da problemin çözümüne katılsın. Yeni haliyle tekrar hatırlanırsa, Neumann problemi:

$$(\nabla^2 + \nu_m^2)\psi_m(r) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial n}\psi_m(r)|_L = 0$$

$$\frac{\nu_m^2}{S} \int_S |\psi_m(r)|^2 ds = 1$$

burada $\partial_n = \mathbf{n} \cdot \nabla$, L konturu üzerinde normal türev, $\nu_m^2 > 0$, $m = 1, 2, \dots$ özdeğerler, m indisi reel ekseninde artan bir sıra ile sıralanan numerik değerler, $\psi_m(r)$ lerde bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörlerdir. Eksenel koordinatlar,

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta$$

şeklinde tanımlansın.

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi_m(r, \theta, \varphi)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi_m(r, \theta, \varphi)}{\partial \theta} \right) + \\ + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi_m(r, \theta, \varphi)}{\partial \varphi^2} + \nu_m^2 \psi_m(r, \theta, \varphi) = 0 \end{aligned} \quad (42)$$

Burada $\psi_m(r, \theta, \varphi)$,

$$\psi_m(r, \theta, \varphi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$$

şeklinde değişkenlerine ayrılırsa (4) denklemi,

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial (R\Theta\Phi)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial (R\Theta\Phi)}{\partial \theta} \right) + \\ + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 (R\Theta\Phi)}{\partial \varphi^2} + \nu_m^2 (R\Theta\Phi) = 0 \end{aligned}$$

bulunur. Buradan,

$$\begin{aligned} \Theta(\theta)\Phi(\varphi)\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R(r)}{\partial r}\right)+R(r)\Phi(\varphi)\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Theta(\theta)}{\partial\theta}\right)+ \\ +R(r)\Theta(\theta)\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi(\varphi)}{\partial\varphi^2}+\nu_m^2R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)=0 \end{aligned}$$

halini alır. Her iki taraf da, $r^2/(R\Theta\Phi)$ ile çarpılırsa,

$$\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R}{\partial r}\right)+\nu_m^2r^2+\frac{1}{\Theta\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\Phi\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}=0$$

elde edilmiş olur. Oysa bu denkleme dikkat edilirse,

$$\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R}{\partial r}\right)+\nu_m^2r^2+\frac{1}{\Theta\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\underbrace{\frac{1}{\Phi(\varphi)}\frac{\partial^2\Phi(\varphi)}{\partial\varphi^2}}_{-n^2}=0 \quad (43)$$

biçiminde bir ifade ile,

$$\frac{1}{\Phi(\varphi)}\frac{\partial^2\Phi(\varphi)}{\partial\varphi^2}=-n^2 \quad (44)$$

burada n bir sabit olmak üzere yazılabilir. (44) denklemindeki ifade (43) denkleminde yerine yazılırsa

$$\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R}{\partial r}\right)+\nu_m^2r^2+\frac{1}{\Theta\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right)-\frac{n^2}{\sin^2\theta}=0 \quad (45)$$

şeklindeki denkleme ulaşılmış olur. Yine bu denkleme dikkatli bakılırsa

$$\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R}{\partial r}\right)+\nu_m^2r^2+\underbrace{\frac{1}{\Theta(\theta)\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Theta(\theta)}{\partial\theta}\right)}_{-l(l+1)}-\frac{n^2}{\sin^2\theta}=0$$

(45) denkleminin üçüncü ve dördüncü terimlerini sadece θ 'nın fonksiyonu oldukları için ileride açıklanacak nedenlerden dolayı $l(l+1)$ sabitine eşitlenirse:

$$\frac{1}{\Theta(\theta)\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial\Theta(\theta)}{\partial\theta} \right) - \frac{n^2}{\sin^2\theta} = -l(l+1) \quad (46)$$

denklemine ulaşılmış olur. (44) numaralı denklem çözümü tanıdık olan basit harmonik salınım denklemdir. Bu denklemin çözümü,

$$\Phi(\varphi) = e^{in\varphi} \quad \text{veya} \quad \Phi(\varphi) = c_1 \cos(n\varphi) + c_2 \sin(n\varphi)$$

dür.

(46) numaralı denklemin çözümü de

$$\Theta(\theta) = P_l^n(\cos\theta), \quad l = 0, 1, 2, \dots$$

burada, n değeri $-l$ 'den l 'ye ye bir tamsayıdır. $P_l^n(\cos\theta)$ ise Legendre polinomlarıdır. Eğer l bir tamsayı değil ise $\cos\theta$ -1 ile 1 değerleri için iraksaktır. $l(l+1)$ sabiti, l 'nin bir tamsayı olması durumunda çözümün yakınsak olmasını sağlamak için seçilmiştir.

Θ ve Φ 'nin fonksiyonları,

$$Y_l^n(\theta, \varphi) = c \cdot P_l^n(\cos\theta) e^{in\varphi}$$

burada c normalizasyon sabiti olmak üzere beraber yazılabilirler. Normalizasyon sabiti başka çalışmalarda tartışılmak üzere r 'nin çözümüne bakılsın.

Denklem (45) ve (46),

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + [\nu_m^2 r^2 - l(l+1)]R = 0$$

buradan

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} + [\nu_m^2 r^2 - l(l+1)]R = 0$$

Çözümün kolaylaşması için x yerine $x \equiv \nu_m r$ alınsın. Öyleyse,

$$r \frac{dR(x)}{dr} = \nu_m r \frac{dR(r)}{\nu_m dr} = \nu_m r \frac{dR(r)}{d(\nu_m r)} = x \frac{dR(r)}{dx}$$

ve benzer şekilde,

$$r^2 \frac{d^2 R(r)}{dr^2} = x^2 \frac{d^2 R(r)}{dx^2}$$

yazılabilir. Nihayetinde,

$$x^2 \frac{d^2 R}{dx^2} + 2x \frac{dR}{dx} + [x^2 - l(l+1)]R = 0$$

halini alır. $R(r) = Z(x)x^{-1/2}$ için çözüm aranır, R' , R'' x 'e göre birinci ve ikinci türevleri göstermek üzere

$$R' = Z'x^{-1/2} - \frac{1}{2}Zx^{-3/2}$$

$$R'' = Z''x^{-1/2} - \frac{1}{2}Z'x^{-3/2} - \frac{1}{2}Z'x^{-3/2} - \frac{1}{2} \left(\frac{-3}{2} \right) Zx^{-5/2}$$

$$= Z''x^{-1/2} - Z'x^{-3/2} + \frac{3}{4}Zx^{-5/2}$$

yukarıdaki türevler kullanılarak,

$$x^2 \left(Z'' x^{-1/2} - Z' x^{-3/2} + \frac{3}{4} Z x^{-5/2} \right) + 2x \left(Z' x^{-1/2} - \frac{1}{2} Z x^{-3/2} \right) + [x^2 - l(l+1)] Z x^{-1/2} = 0$$

buradan,

$$x^2 \left(Z'' - Z' x^{-1} + \frac{3}{4} Z x^{-2} \right) + 2x \left(Z' - \frac{1}{2} Z x^{-1} \right) + [x^2 - l(l+1)] Z = 0$$

elde edilir. Denklem tekrar düzenlenirse,

$$x^2 Z'' + (-x + 2x) Z' + \left[\frac{3}{4} - 1 + x^2 - l(l+1) \right] Z = 0$$

daha düzenli halde,

$$x^2 Z'' + x Z' + \left[x^2 - \left(l + \frac{1}{2} \right)^2 \right] Z = 0$$

elde edilmiş olur. Oysa bu diferansiyel denklem $\left(l + \frac{1}{2} \right)$. indisten (yani küresel)

Bessel diferansiyel denklemdir. Bu denklemin çözümü:

$$R(r) = A \frac{j_{l+1/2}(v_m r)}{\sqrt{v_m r}} + B \frac{Y_{l+1/2}(v_m r)}{\sqrt{v_m r}} \quad (47)$$

A ve B sabitler olmak üzere (47) denklemini Küresel Bessel fonksiyonları olarak adlandırılırlar. Daha önce tartışıldığı gibi *ikinci çeşitten Bessel fonksiyonu* (Neumann) orijinde ıraksak olduğu için çözüme katkısı beklenmeden elenirse,

$$R(r) = A \frac{J_{l+1/2}(\nu_m r)}{\sqrt{\nu_m r}}$$

şeklindedir.

Nihayetinde Neumann problemindeki haliyle $\psi_m(r, \theta, \varphi)$ potansiyelinin genel çözümü:

$$\psi_m(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=-l}^l A_{lm} J_{l+1/2}(\nu_m r) Y_l^m(\theta, \varphi) \quad (48)$$

biçimindedir. Burada A_{lm} sabiti sınır koşullarında normalize edilmelidir. Sınır koşulları ile beraber normalizasyon katsayısını başka çalışmalara bırakarak devam edilirse, (48) denklemi sadece $m=0$ değeri için φ 'den bağımsızdır. Tekrar problemin $\mathbf{R} = \mathbf{r} + \mathbf{z}$, $\nabla = \nabla_{\perp} + \mathbf{z}\partial_z$ orijinal haline dönülürse, problem r 'den bağımsız olmalıdır. Şu halde çözüm (48) denklemi olarak yazılabilir. Dirichlet problemi de benzer şekilde tartışılarak aynı sonuçlara ulaşmak mümkündür.

4.2. Modal Genliklerin Bessel Fonksiyonları İle İfadesi

Miller'in listesinden 2) durumuna (case 2) detaylı bir göz atalım.

$$\tau = u \cosh v, \quad \xi = u \sinh v, \quad 0 \leq u < \infty, \quad -\infty \leq v < \infty \quad (49)$$

olarak alınsın. Önce $u(\xi, \tau)$ ve $v(\xi, \tau)$ değişkenlerine geçiş yapılmalıdır. Bundan dolayı,

$$\begin{aligned} \tau^2 &= u^2 \cosh^2 v & \text{ve} & & \xi^2 &= u^2 \sinh^2 v, \\ \tau^2 - \xi^2 &= u^2 \underbrace{(\cosh^2 v - \sinh^2 v)}_1 = u^2 \end{aligned}$$

ve böylece,

$$u^2 = \tau^2 - \xi^2 \Rightarrow u = \sqrt{\tau^2 - \xi^2}, \quad 0 \leq u < \infty. \quad (50)$$

elde edilir. Buna ilaveten,

$$\frac{\xi}{\tau} = \frac{u \sinh v}{u \cosh v} = \tanh v, \quad \text{yani,} \quad \operatorname{arc tanh} \frac{\xi}{\tau} = v, \quad -\infty < v < \infty \quad (51)$$

yazılabilir. Ve bu denklem de

$$v = \operatorname{arc tanh} \frac{\xi}{\tau} \equiv \frac{1}{2} \ln \frac{\tau + \xi}{\tau - \xi} \quad (52)$$

şeklinde daha kullanışlı hale getirilebilir. İfade bu hale,

$$\operatorname{arc tanh} x \equiv \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right), \quad |x| < 1$$

özelliğinden yararlanılarak gelmiştir. Burada,

$$\operatorname{arc tanh} \frac{\xi}{\tau} \equiv \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \frac{\xi}{\tau}}{1 - \frac{\xi}{\tau}} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\tau + \xi}{\tau - \xi} \right)$$

olarak hesaplanmıştır. Şimdi, $u(\xi, \tau)$ ve $v(\xi, \tau)$ 'ye ait kısmi diferansiyeller hesaplanır

$$u = \sqrt{\tau^2 - \xi^2} \quad v = \operatorname{arc tanh} \frac{\xi}{\tau} \equiv \frac{1}{2} \ln \frac{\tau + \xi}{\tau - \xi}$$

olduğu hatırlanırsa,

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \tau} \sqrt{\tau^2 - \xi^2} = \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2 - \xi^2}} = \frac{u \cosh v}{u} = \cosh v \quad (53)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{1}{2} \ln \frac{\tau + \xi}{\tau - \xi} \right) = -\frac{\xi}{\tau^2 - \xi^2} = -\frac{u \sinh v}{u^2} = -\frac{\sinh v}{u} \quad (54)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial u}{\partial \tau} \right) = \frac{\partial}{\partial \tau} \cosh v = \frac{\partial v}{\partial \tau} \sinh v = -\frac{\sinh^2 v}{u} \quad (55)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} = \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial v}{\partial \tau} \right) = \frac{\partial}{\partial \tau} \left(-\frac{\sinh v}{u} \right) = \frac{\sinh 2v}{u^2} \quad (56)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi} \sqrt{\tau^2 - \xi^2} = -\frac{\xi}{\sqrt{\tau^2 - \xi^2}} = -\frac{u \sinh v}{u} = -\sinh v \quad (57)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{2} \ln \frac{\tau + \xi}{\tau - \xi} \right) = \frac{\tau}{\tau^2 - \xi^2} = \frac{u \cosh v}{u^2} = \frac{\cosh v}{u} \quad (58)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = -\frac{\cosh^2 v}{u} \quad (59)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} = \frac{\sinh 2v}{u^2} \quad (60)$$

elde edilir.

Bütün bu kısmi diferansiyel sonuçları (32) Klein-Gordon diferansiyel denkleminde yerine yazılınsın. Aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\begin{aligned} & \left[\cosh^2 v - \sinh^2 v \right] \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \left[\frac{\sinh^2 v}{u^2} - \frac{\cosh^2 v}{u^2} \right] \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + \\ & + \left[-\frac{\sinh^2 v}{u} + \frac{\cosh^2 v}{u} \right] \frac{\partial f}{\partial u} + \left[\frac{\sinh 2v}{u^2} - \frac{\sinh 2v}{u^2} \right] \frac{\partial f}{\partial v} + \\ & + 2 \left[-\frac{\sinh v \cosh v}{u} + \frac{\sinh v \cosh v}{u} \right] \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + f = 0 \end{aligned} \quad (61)$$

Sadeleştirmelerin ardından

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial u} + 1 - \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right) f(u, v) = 0 \quad (62)$$

kısmi diferansiyel denklemi (PDE) elde edilir. Bernoulli'nin çarpım yöntemi u ve v değişkenlerine uygulanarak $f \equiv f(\xi, \tau) = f[u(\xi, \tau), v(\xi, \tau)] \equiv f(u, v) = U(u)V(v)$

yazılır. Bu son değişkenlerine ayrılmış çarpımın (62) denkleminde yerine yazılmasıyla

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial u} + 1 - \frac{1}{u^2} \underbrace{\frac{V''(v)}{V(v)}}_{\alpha^2} \right) U(u) = 0 \quad (63)$$

kısmi diferansiyeli (PDE) elde edilir. Yani,

$$U''_{\alpha}(u) + \frac{1}{u} U'_{\alpha}(u) + \left(1 - \frac{\alpha^2}{u^2} \right) U_{\alpha}(u) = 0 \quad (64)$$

$$V''_{\alpha}(v) - \alpha^2 V_{\alpha}(v) = 0$$

(64) *adi* diferansiyel denklem çiftine varılır. Burada α değişkenlerine ayrılma yönteminin bir sabitidir. (64) denkleminin $U(u)$ fonksiyonuna ait *adi* diferansiyel denklem kısmındaki Bessel diferansiyel denkleminden *Bessel fonksiyonu*, $V(v)$ fonksiyonuna ait olan kısımdan ise (matematiksel ve fiziksel olarak dikkate değer olmasından dolayı *üstel* gelmesi istenen) bir *üstel fonksiyon* elde edilir. Her iki denklem de iki lineer bağımsız çözüme sahiptir.

$V(v)$ fonksiyonu α keyfi sabit bir parametre olmak üzere $V''(v) = \alpha^2 V(v)$ yazılarak

$$V(v) = a_{\alpha} e^{\alpha v} + b_{\alpha} e^{-\alpha v}$$

yazılabilir. Burada $a_{\alpha}, b_{\alpha} \in \mathfrak{R}$ olmak üzere keyfi reel parametrelerdir. Fakat aşağıda f fonksiyonu oluşturulacağı için bu keyfi parametreler şimdilik ihmal edilerek,

$$V(v) = e^{\pm \alpha v} \quad (65)$$

olarak ifade edilebilir.

Ardından, $U(u)$ fonksiyonu Bessel diferansiyel denklemini verir

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial u} + 1 - \frac{\alpha^2}{u^2} \right) U(u) = 0. \quad (66)$$

Bu denklem lineer bağımsız iki çözüme sahiptir,

$$U(u) = A_\alpha J_\alpha(u) + B_\alpha Y_\alpha(u) \quad (67)$$

burada A_α ve B_α keyfi sabitlerdir. Denklemden, J ye *birinci çeşit* Bessel fonksiyonu, Y ye *ikinci çeşit* Bessel fonksiyonu adı verildiği biliniyor. Oysa *ikinci çeşit* Bessel fonksiyonu $Y(x)$, $x \rightarrow 0$ iken $Y(x) \rightarrow -\infty$ olmaktadır. Yani orijin etrafında ıraksaktır. Bu istenmeyen bir ıraksaklık durumudur. Çözümün seri açılımını bulabilmek için fonksiyonlarımızın yakınsak olması gerekmektedir. Şu halde *ikinci çeşit* Bessel fonksiyonu $Y(x)$ den kurtulmak için keyfi katsayısı $B_\alpha = 0$ seçilmelidir. Nihayetinde $U(u)$ çözümü A_α keyfi sabit olmak üzere

$$U(u) = A_\alpha J_\alpha(u) \quad (68)$$

olarak elde edilmiş olur.

Şimdi bu *üstel* fonksiyon ve *Bessel* fonksiyonunun çarpımı olarak ifade edilen f fonksiyonu yazılsın. $f \equiv f(\xi, \tau) = f[u(\xi, \tau), v(\xi, \tau)] \equiv f(u, v) = U(u)V(v)$ idi. Buradan, bunların kombinasyonu (ξ, τ) bağımsız değişkenleri cinsinden fiziksel olarak dikkate değer:

$$f_\alpha(\xi, \tau) = \left[C_\alpha \left(\frac{\tau - \xi}{\tau + \xi} \right)^{\frac{\alpha}{2}} J_\alpha \left(\sqrt{\tau^2 - \xi^2} \right) + D_\alpha \left(\frac{\tau + \xi}{\tau - \xi} \right)^{\frac{\alpha}{2}} J_\alpha \left(\sqrt{\tau^2 - \xi^2} \right) \right] \quad (69)$$

çözümü elde edilir. Çözümün $\xi = 0$ 'a göre simetrik olduğunu görmek kolaydır. Bu noktadan sonra artık $\xi \geq 0$ uzayının mümkün olduğu ve keyfi sabitin ihmal edildiği, α keyfi sabit bir parametre olmak üzere,

$$f_\alpha(\xi, \tau) = \left(\frac{\tau - \xi}{\tau + \xi} \right)^{\frac{\alpha}{2}} J_\alpha(\sqrt{\tau^2 - \xi^2}) \quad (70)$$

denklemleri ile çalışılacaktır.

Fiziksel olarak bu, TE modları için H_{zm} , TM modları için E_{zm} *eksenel* (longitudinal) alan bileşenlerinin modal genliğidir. (6) ve (11) denklemleri hatırlanarak enlemsel (transverse) alan bileşenlerinin modal genlikleri aşağıdaki gibi gösterilsin:

$$A_\alpha(\xi, \tau) = -\frac{\partial}{\partial \tau} f_\alpha \quad \text{ve} \quad B_\alpha(\xi, \tau) = \frac{\partial}{\partial \xi} f_\alpha \quad (71)$$

Bu türevlerdeki basit manipülasyonlarla

$$\begin{aligned} A_\alpha(\xi, \tau) &= -\frac{\partial}{\partial \tau} f_\alpha = \left(-\frac{1}{2} \right) (f_{\alpha-1} - f_{\alpha+1}) \\ B_\alpha(\xi, \tau) &= \frac{\partial}{\partial \xi} f_\alpha = \left(-\frac{1}{2} \right) (f_{\alpha-1} + f_{\alpha+1}) \end{aligned} \quad (72)$$

kısmi türev sonuçları elde edilir.

TE modlarının elektromagnetik alanı $(\mathbf{E}_m^h, \mathbf{H}_m^h)$, TM modlarının da $(\mathbf{E}_m^e, \mathbf{H}_m^e)$ 5-bileşenlidir [bkz.(6)ve(11) formülleri]. $(\mathbf{E}_m^h, \mathbf{H}_m^h)$ alanı 2-bileşenli \mathbf{E}_m^h alan vektörüne sahip iken \mathbf{H}_m^h alan vektörü 3-bileşenlidir. $(\mathbf{E}_m^e, \mathbf{H}_m^e)$ alanında ise durum bunun tam tersidir. $W_\alpha^{(3)}$ ve $W_\alpha^{(2)}$ denen 3-bileşenli ve 2-bileşenli alan vektörlerinin toplanmasıyla elde edilen ortalama modal alan enerji yoğunluğunun hesaplanması

$$\begin{aligned}
W_{\alpha}^{(3)}(\xi, \tau) &= \left(\frac{1}{8}\right) \left[(f_{\alpha-1} + f_{\alpha+1})^2 + 4f_{\alpha}^2 \right] \\
W_{\alpha}^{(2)}(\xi, \tau) &= \left(\frac{1}{8}\right) (f_{\alpha-1} - f_{\alpha+1})^2
\end{aligned} \tag{73}$$

formüllerindeki gibidir.

Nihayetinde, toplam ortalama modal alan enerji yoğunluğunun hesaplanması

$$W_{\alpha} = W_{\alpha}^{(3)} + W_{\alpha}^{(2)} \tag{74}$$

ve ortalama Poynting vektörü $P_{z\alpha} = A_{\alpha} B_{\alpha}$ şeklinde olduğundan

$$\begin{aligned}
W_{\alpha}(\xi, \tau) &= \left(\frac{1}{4}\right) (f_{\alpha-1}^2 + f_{\alpha+1}^2 + 2f_{\alpha}^2) \\
P_{z\alpha}(\xi, \tau) &= \left(\frac{1}{4}\right) (f_{\alpha-1}^2 - f_{\alpha+1}^2)
\end{aligned} \tag{75}$$

elde edilir. Aynı etki *TM* modları için de düşünülebilir.

Bu niceliklerin oranı, $v_{\alpha}(\xi, \tau) = P_{z\alpha} / W_{\alpha}$ ile gösterilen zaman-uzayı modlarının dalga kılavuzundaki alan enerjisinin bir yerden bir yere taşınmasındaki *anlık hızını* belirtir.

Burada enerjinin transferinde yardımcı ve *enerjik* dalga prosesi sağlayan enerjinin değişimi (surplus of enerji) $dW_{\alpha}(\xi, \tau) = (A_{\alpha}^2(\xi, \tau) - B_{\alpha}^2(\xi, \tau)) / 2$ şeklinde ifade edilebilir.

Geçici sinyallerin yayılımı $f_0(\xi, \tau)$ potansiyeli tarafından oluşturulur. Yani, $f_0(\xi, \tau)$ geçici *enerjik* dalga prosesi olarak yorumlanabilir. Modal alanın aksenal uzantısı ile depolanan $W_0 = f_0^2(\xi, \tau) / 2$ enerjisini, $dW_{\alpha} = (A_{\alpha}^2(\xi, \tau) - B_{\alpha}^2(\xi, \tau)) / 2$ enerjinin değişimi (surplus of energy) desteklenen bir yol yardımıyla enlemsel uzantısı ile transfer eder. Bu durum hem aksenal hemde enlemsel uzantısı ile değişim

içerisinde devam eder. Böylece bunlar depolanan enerjinin yer değiştirmesi ile *enerjik* dalga prosesine katılırlar.

4.3. Silindirik ve Küresel Bessel Fonksiyonları Durumu

Değişkenlerine ayırma sabiti α serbest bir parametredir. α negatif olmayan tamsayılardan alınsın. Bu aşağıdaki gibi sonsuz bir fonksiyon kümesi oluşturur.

$$f_n(\xi, \tau) = \left(\frac{\tau - \xi}{\tau + \xi} \right)^{\frac{n}{2}} J_n \left(\sqrt{\tau^2 - \xi^2} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (76)$$

Her bir $f_n(\xi, \tau)$ (24) başlangıç koşulları altında (18) Klein-Gordon denkleminin belirli bir çözümüdür (her bir n için ayrı ayrı). Burada $\varphi(\tau) = J_n(\tau)$ ve $\hat{\varphi}(\tau) = (1/2)(J_{n-1}(\tau) - J_{n+1}(\tau))$, $\tau \geq 0$ dir. Ayrıca $J_n(\#)$ ve $J_{n\pm 1}(\#)$ notasyonu n 'nin tamsayı değerleri için *silindirik Bessel fonksiyonlarını* göstermektedir.

Aşağıdaki iki fonksiyon ailesi düşünülün:

$$\mathbf{J} = \{J_n(\tau)\}_{n=0}^{\infty} \quad \text{ve} \quad \mathbf{F} = \{f_n(\xi, \tau)\}_{n=0}^{\infty} \quad (77)$$

\mathbf{J} kümesinden her eleman $\xi = 0$ olduğunda \mathbf{F} kümesinden uygun bir elemana eşit olur. Bessel fonksiyonlar ailesi olan \mathbf{J} tamdır ve onun elemanları bir *baz* oluşturur. Bundan dolayı $f_n(\xi, \tau)$ elemanları Oz ekseninin sağ tarafına doğru $J_n(\tau) = f_n(\xi, \tau)|_{\xi=0}$ baz elemanlarının bir *genişlemesi* olarak yorumlanabilir.

\mathbf{F} içerisinden bir baz elemanı $f_n(\xi, \tau)$, (6) veya (11) modal alanının eksenele alan bileşenlerinin mümkün genlikleri arasında tektir. $\tau > \xi > 0$ uzayındaki varyasyonlar, fiziksel olarak, bu alan bileşenlerinin bir dalga kılavuzu boyunca *zaman içerisinde ilerlemesinin* nasıl olduğunu (yayıldığını) ortaya koyar. Bundan dolayı, \mathbf{F} kümesini *evrimsel baz* olarak adlandırmak gayet tabiidir. Onun elemanları,

otomatik olarak enlemsel alan bileşenlerinin modal genliklerini (72) formülleri tarafından $\alpha = n$ veya $\alpha = n + 1/2$ yardımıyla üretir.

Ayrıca $J_n(\#)$ ve $J_{n\pm 1}(\#)$ notasyonu n 'nin yarı-tamsayı değerleri için de küresel Bessel fonksiyonlarını göstermektedir.

Uyarı 2:

“Modal baz” ve “evrimsel baz” terimlerini birbirinden ayırt etmeliyiz. İlki, (4) ve (9) problemlerinin çözümler tarafından üretilir. (6) ve (11) denklemlerinden, dalga kılavuzu kesit-alanının modal alan çiftlerini belirler. İkincisi ise modal genliklerdeki dinamik olayı zaman-uzayında yayılım yaparken tanımlamayı hedefler. Aslında zaman-uzayındaki \mathbf{F} kümesi frekans uzayındaki $\{e^{-i\omega t}\}_{\omega=-\infty}^{+\infty}$ kümesi ile aynı rolü oynar.

Evrimsel bazın pratik uygulamalı bir örneği düşünölsün. (11) TM modunun E_{zm} -bileşeni ile yayılması mümkün olan dalga kılavuzu kesit-alanında $z = 0$ ($\xi = 0$) bir girdi düşünölsün. Bu girdi Heaviside fonksiyonu tarafından gösterilebilen zaman-uzay sinyali aşağıdaki gibi belirlensin:

$$H(\tau) = \begin{cases} 1 & ; \tau \geq 0 \\ 0 & ; \tau < 0 \end{cases} \quad (78)$$

$0 \leq \xi \leq \tau$ aralığında yayılan \mathbf{E}_m^e ve \mathbf{H}_m^e alanlarının modal genlikleri bulunmalıdır. Aslında, $f(\xi, \tau)|_{\xi=0} = H(\tau)$ ve $\hat{\varphi}(\tau) = 0$ şartının sağlanmasıyla (24) başlangıç koşulları altında (18) Klein-Gordon denklemi çözülmek zorundadır.

E_{zm} genliği $0 \leq \xi \leq \tau$ aralığında $\hbar(\xi, \tau)$ olarak gösterilsin. En sonuncusu elde edilir edilmez, \mathbf{E}_m^e ve \mathbf{H}_m^e enlemsel alanları için genlikler sırasıyla $\beta(\xi, \tau) = \partial_\xi \hbar$ ve $A(\xi, \tau) = -\partial_\tau \hbar$ olarak elde edilebilir.

$\tau \geq 0$ aralığında Neumann'ın $H(\tau)$ fonksiyonu genişlemesi bir Bessel fonksiyon serisi olarak

$$H(\tau) = J_0(\tau) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_n(\tau) \quad (79)$$

bulunabilir. $H(\tau)$ 'nin genişlemesi (seri açılımı) $0 \leq \xi \leq \tau$ aralığında evrimsel bazı uygulama yoluyla sağlanır. Bütün modal genliklerin sonuçlarının elde edilmesi

$$\begin{aligned} A(\xi, \tau) &= \left(\xi / \sqrt{\tau^2 - \xi^2} \right) J_1 \left(\sqrt{\tau^2 - \xi^2} \right) \\ \hbar(\xi, \tau) &= J_0 \left(\sqrt{\tau^2 - \xi^2} \right) + \Lambda_{||}(\xi, \tau) \\ \hbar_{\perp}(\xi, \tau) &= \left((2\xi - \tau) / \sqrt{\tau^2 - \xi^2} \right) J_1 \left(\sqrt{\tau^2 - \xi^2} \right) - \Lambda_{\perp}(\xi, \tau) \end{aligned} \quad (80)$$

gibidir. Burada $\Lambda_{||}(\xi, \tau)$ ve $\Lambda_{\perp}(\xi, \tau)$ sonsuz seriler olarak

$$\Lambda_{||} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} f_{2n} \quad \text{ve} \quad \Lambda_{\perp} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} f_{2n-1} \quad (81)$$

şeklindedir.

E_{zm} -bileşeninin $\hbar(\xi, \tau)$ modal genliği daha önce [Aksoy S., 2004] da elde edilmişti. Sırasıyla \mathbf{H}_m^e ve \mathbf{E}_m^e alanlarının enlemsel bileşenlerinin $\Lambda_{||}(\xi, \tau)$ ve $\Lambda_{\perp}(\xi, \tau)$ modal genlikleri ilk kez elde edilecektir.

(81) serileri sinyalin önündeki kapalı civarında (80) genlikleri ile açık (explicit) olarak elde edilebilir. $\xi \rightarrow \tau$ şartıyla serilerin elde edilmesi sonuçları

$$\begin{aligned} \Lambda_{||} &= \delta^2 + (1/12)\delta^4 + O(\delta^5) \\ \Lambda_{\perp} &= 2\delta + (1/3)\delta^3 + O(\delta^5) \end{aligned} \quad (82)$$

şeklindedir. Burada $\delta = (\tau - \xi) / 2 \ll 1$ dir.

$f_n(\xi, \tau)$ elemanlarının bir $F_n(\xi, \omega)$ “frekans portresini” sergileyelim. Bu fonksiyon (25) ’daki nedensellik (causality) prensibine uygun olarak Ters Fourier dönüşümü uygulanarak elde edilmiştir. Aşağıda z nin reel koordinatını kullanarak sonuç sunulmuştur:

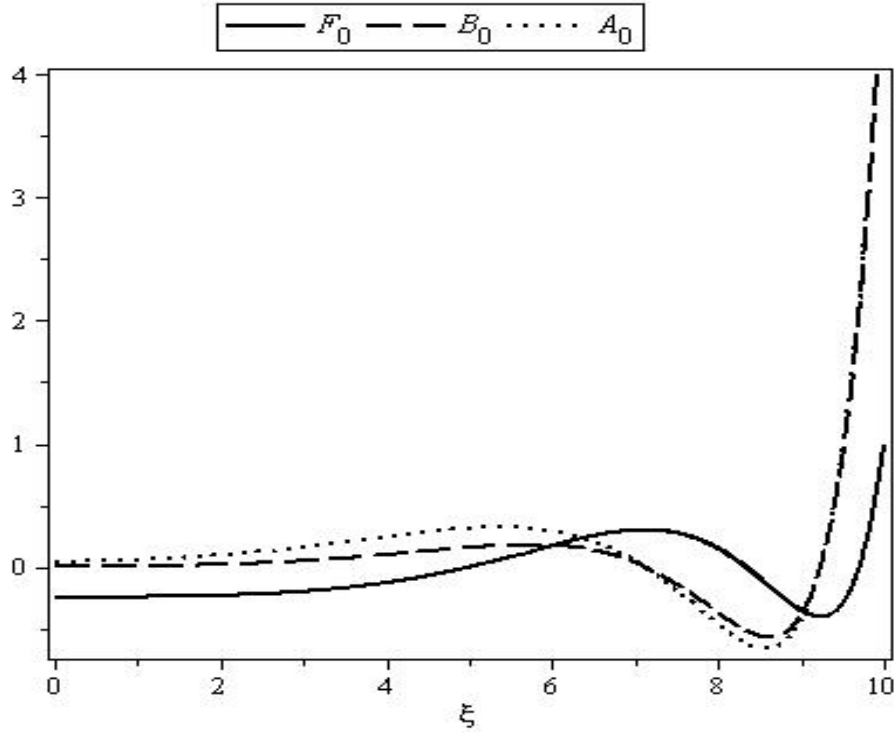
$$F_n(z, \omega) = \frac{e^{\frac{z}{c}\sqrt{\omega^2 - \omega_m^2}}}{-i\frac{z}{c}\sqrt{\omega^2 - \omega_m^2}} \left(\frac{i\omega_m}{\omega + \sqrt{\omega^2 - \omega_m^2}} \right)^n \quad (83)$$

burada $z > 0$, $\omega > 0$, $i = \sqrt{-1}$, $\omega = \kappa_m^e c$ ve $\omega = \kappa_m^e c$ cut-off frekansıdır.

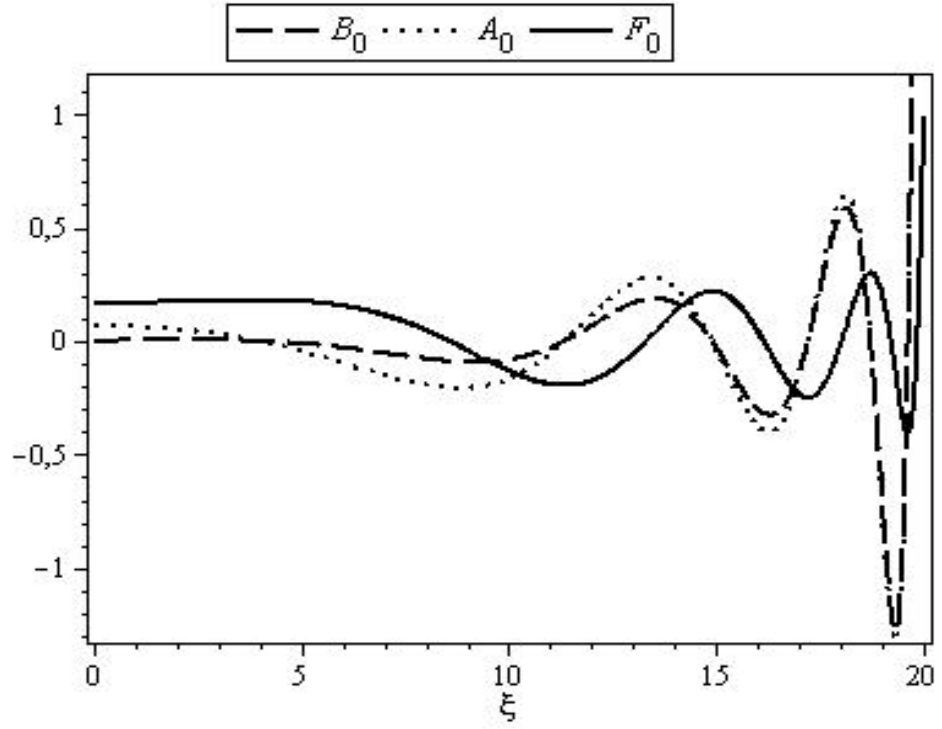
5. SAYISAL SONUÇLAR

Bu bölümde silindirik ve küresel formda f , A ve B fonksiyonlarının $\alpha = 0,1,2,\dots$ değerlerindeki salınımları ile bu salınımların zaman t yani τ ve eksenel koordinat z yani ξ 'nin farklı değerlerindeki görüntüleri sergilenmeye çalışılmıştır. Bunlara ilaveten enerji, Poynting vektörü ve hız (anlık) grafikleri de incelenmiştir. Grafikler Maple bilgisayar programı ile çizdirilmiştir. ξ eksenini boyunca olan salınımlarda τ sabit tutulmuş, τ eksenini boyunca sergilenen salınımlarda ξ sabit tutulmuştur.

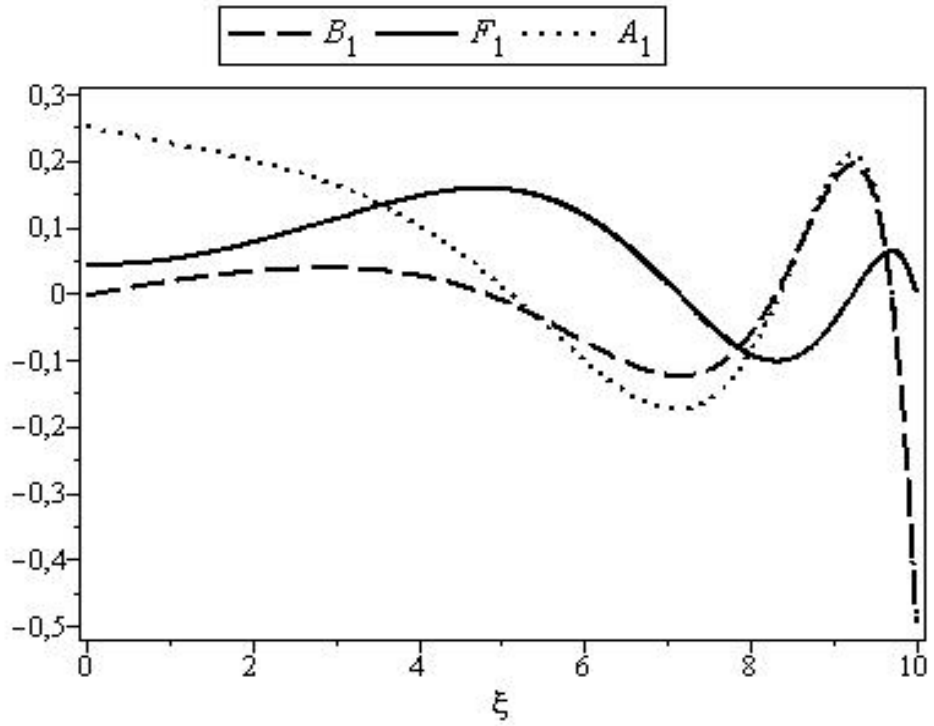
İlk incelenecek salınım grafikleri silindirik formdadır.



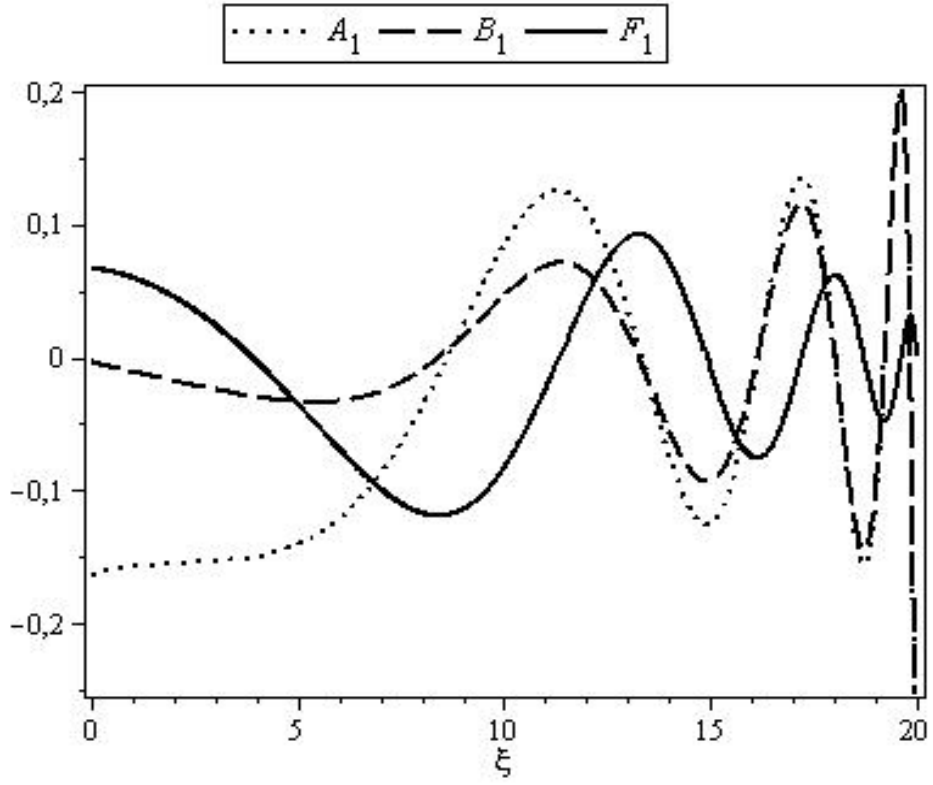
Şekil 5.1. Modal genliklerin $0 \leq \xi \leq \tau$ aralığında değişimi. $\tau = 10$ sabit, ξ boyutsuz eksenel koordinat, $\alpha = 0$.



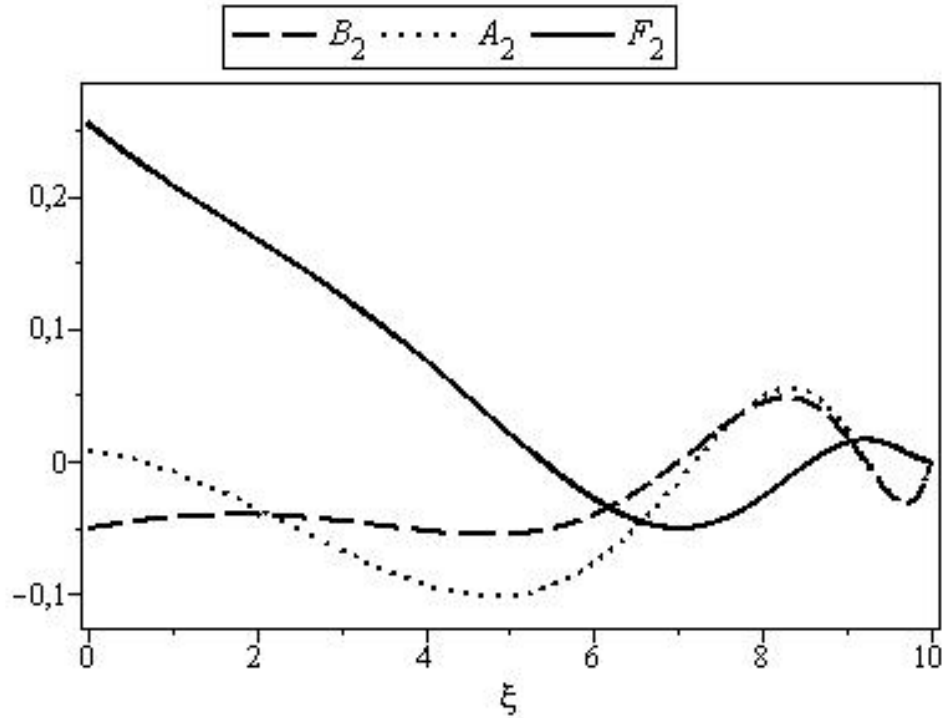
Şekil 5.2. Modal genliklerin $0 \leq \xi \leq \tau$ aralığında değişimi. $\tau = 20$ sabit, ξ boyutsuz ekseneel koordinat, $\alpha = 0$.



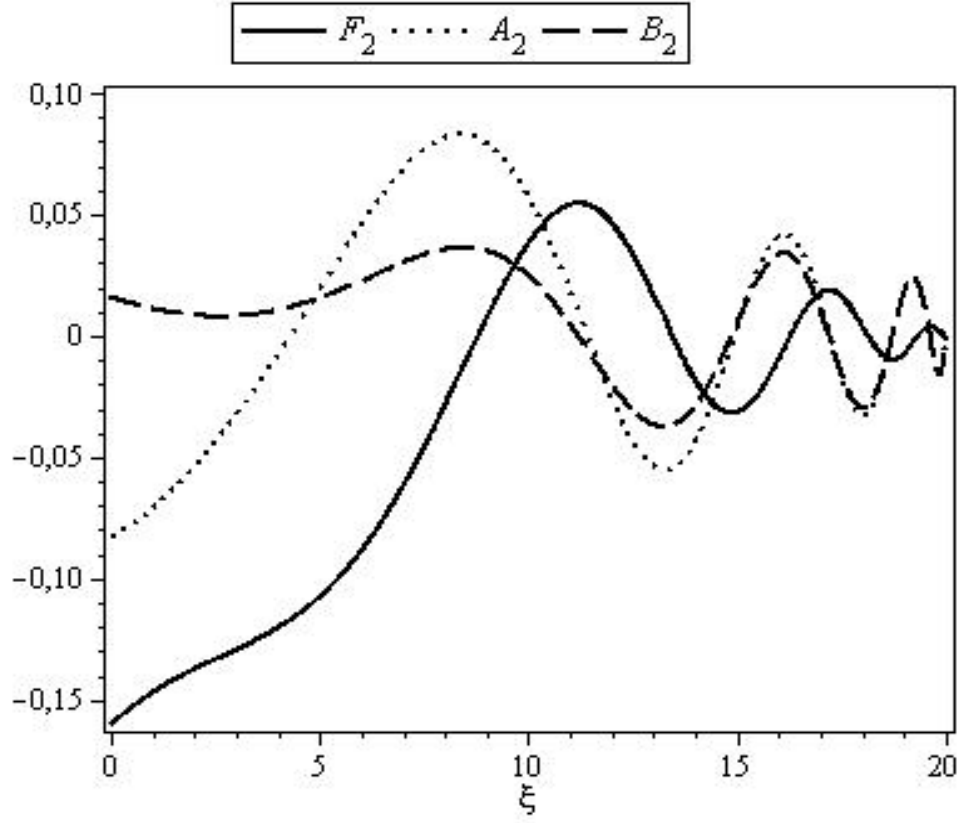
Şekil 5.3. Modal genliklerin $0 \leq \xi \leq \tau$ aralığında değişimi. $\tau = 10$ sabit, ξ boyutsuz ekseneel koordinat, $\alpha = 1$.



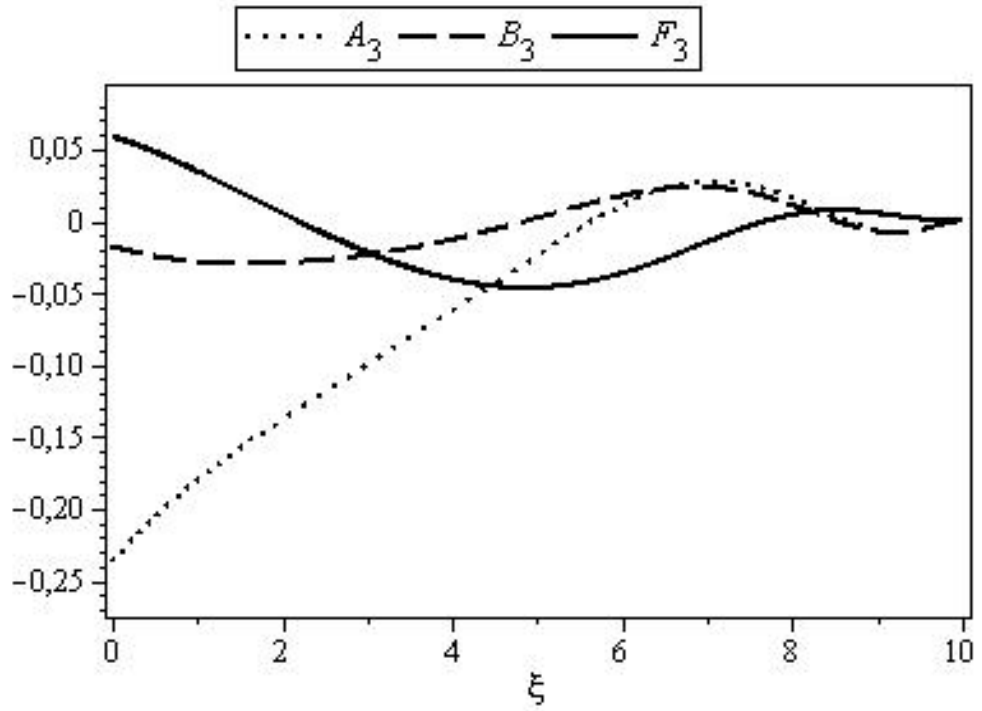
Şekil 5.4. Modal genliklerin $0 \leq \xi \leq \tau$ aralığında değişimi. $\tau = 20$ sabit, ξ boyutsuz aksenal koordinat, $\alpha = 1$.



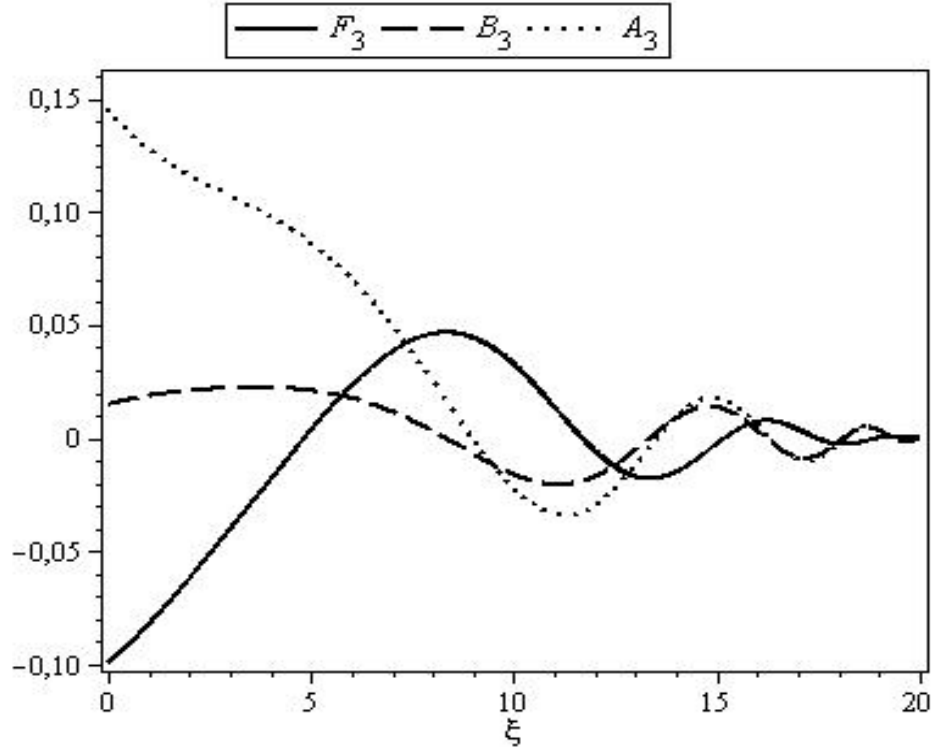
Şekil 5.5. Modal genliklerin $0 \leq \xi \leq \tau$ aralığında değişimi. $\tau = 10$ sabit, ξ boyutsuz aksenal koordinat, $\alpha = 2$.



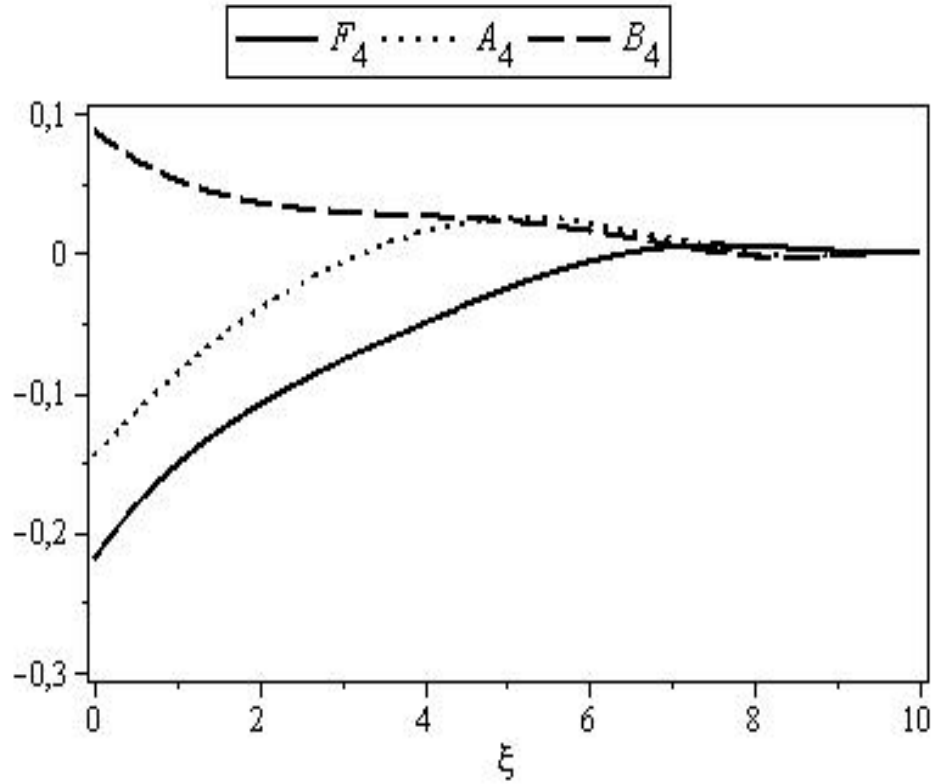
Şekil 5.6. Modal genliklerin $0 \leq \xi \leq \tau$ aralığında değişimi. $\tau = 20$ sabit, ξ boyutsuz aksenal koordinat, $\alpha = 2$.



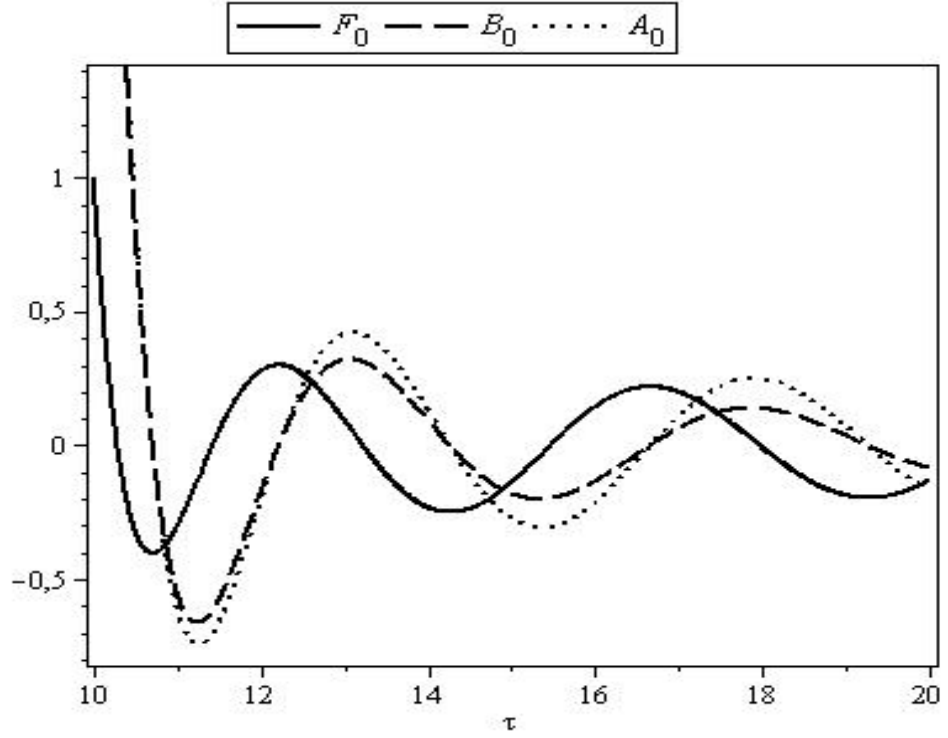
Şekil 5.7. Modal genliklerin $0 \leq \xi \leq \tau$ aralığında değişimi. $\tau = 10$ sabit, ξ boyutsuz aksenal koordinat, $\alpha = 3$.



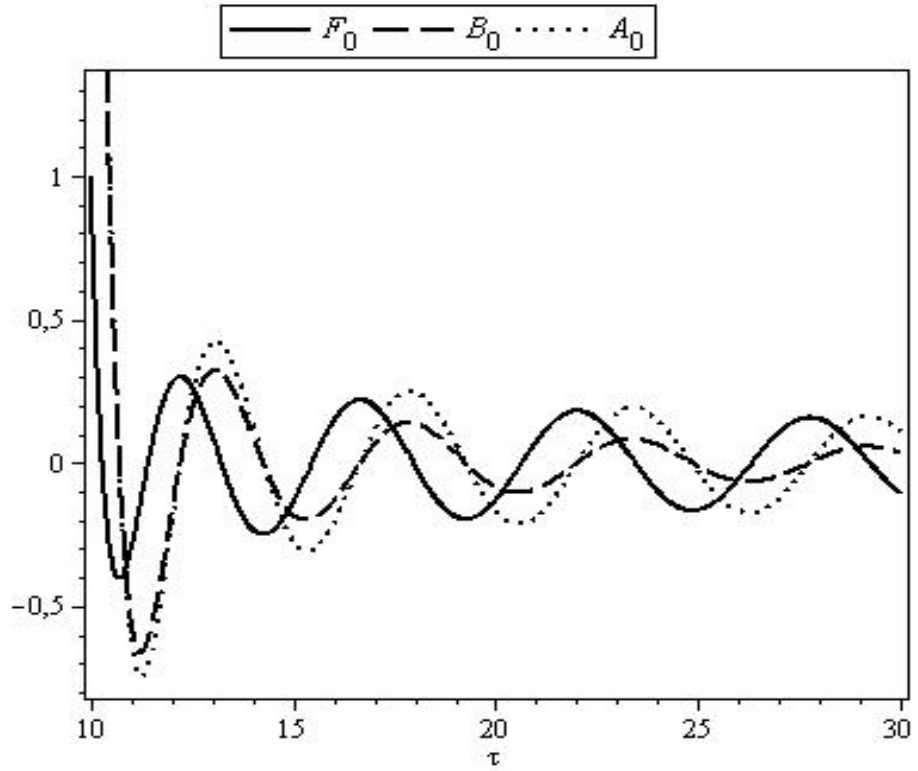
Şekil 5.8. Modal genliklerin $0 \leq \xi \leq \tau$ aralığında değişimi. $\tau = 20$ sabit, ξ boyutsuz eksene koordinat, $\alpha = 3$.



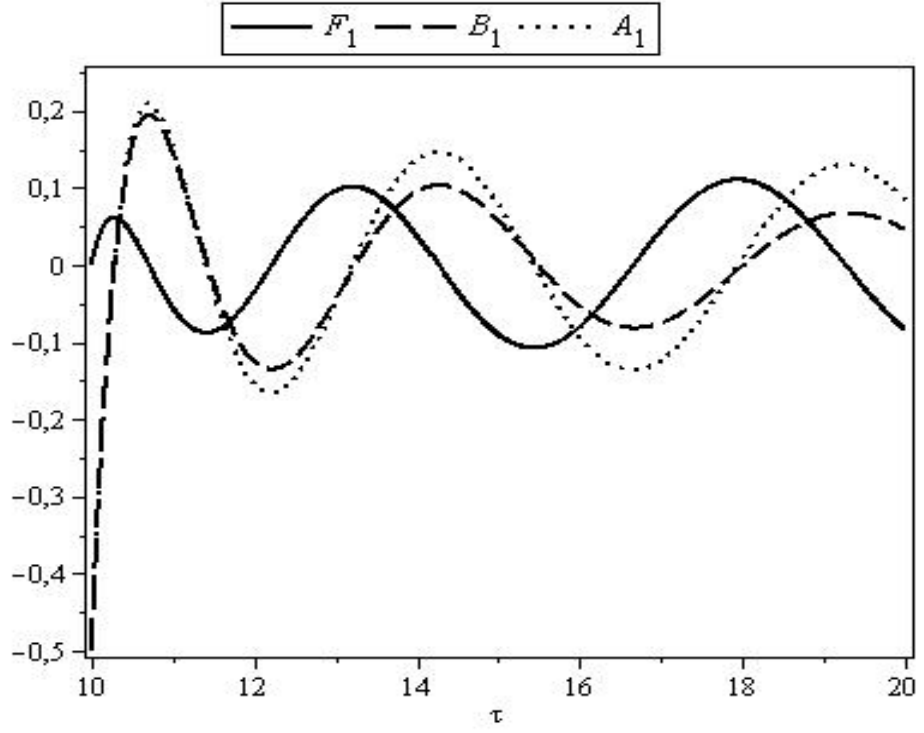
Şekil 5.9. Modal genliklerin $0 \leq \xi \leq \tau$ aralığında değişimi. $\tau = 10$ sabit, ξ boyutsuz eksene koordinat, $\alpha = 4$.



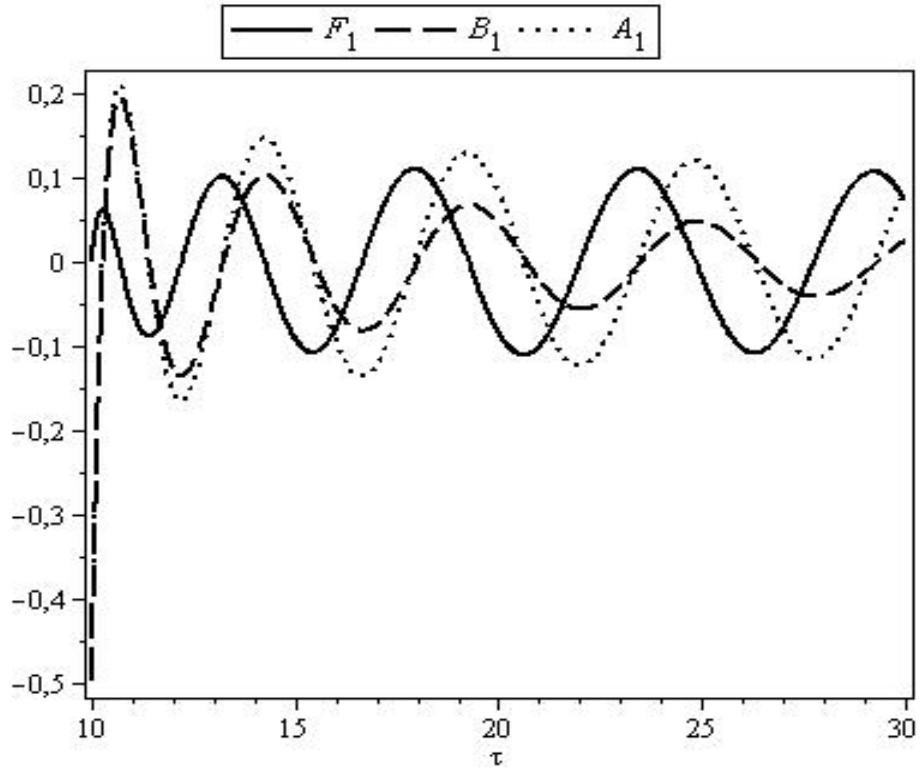
Şekil 5.10. Modal genliklerin $10 \leq \tau \leq 20$ zaman aralığında değişimi. $\xi = 10$ sabit, $\alpha = 0$.



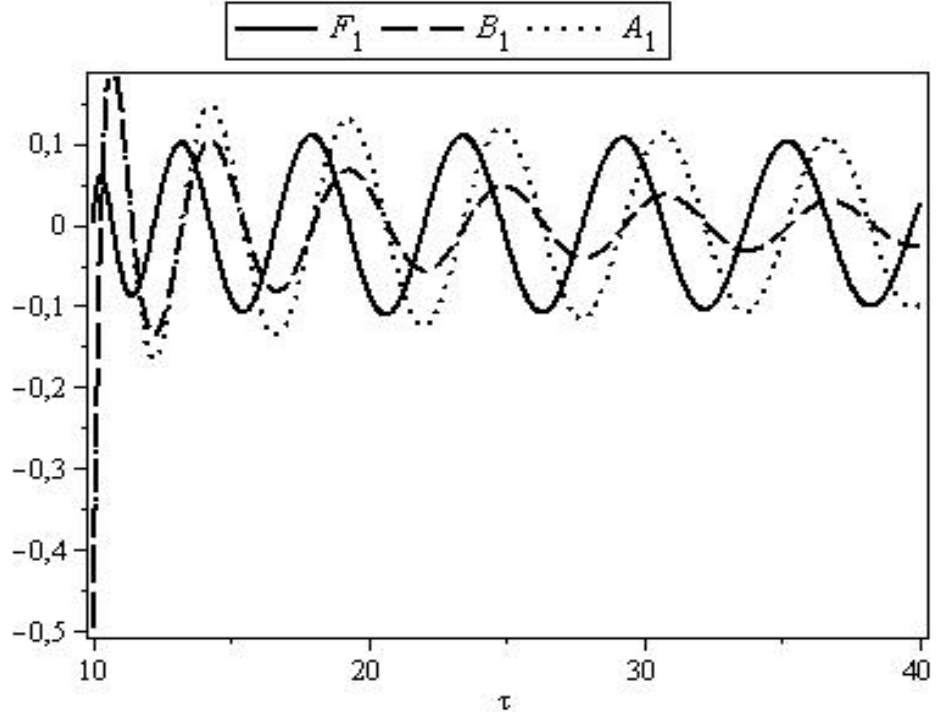
Şekil 5.11. Modal genliklerin $10 \leq \tau \leq 30$ zaman aralığında değişimi. $\xi = 10$ sabit, $\alpha = 0$.



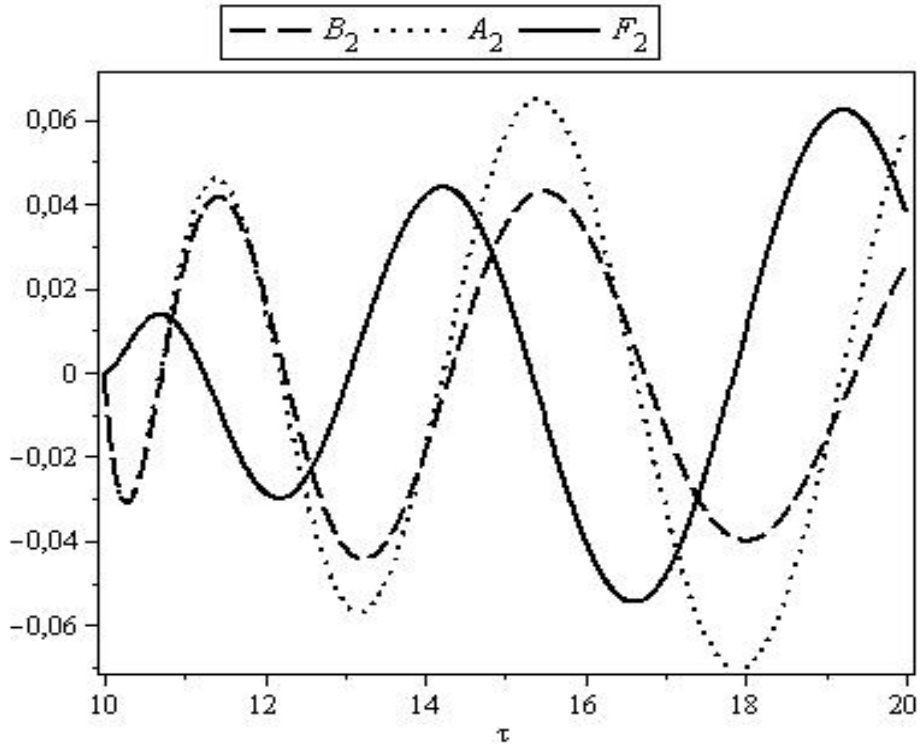
Şekil 5.12. Modal genliklerin $10 \leq \tau \leq 20$ zaman aralığında değişimi. $\xi = 10$ sabit, $\alpha = 1$.



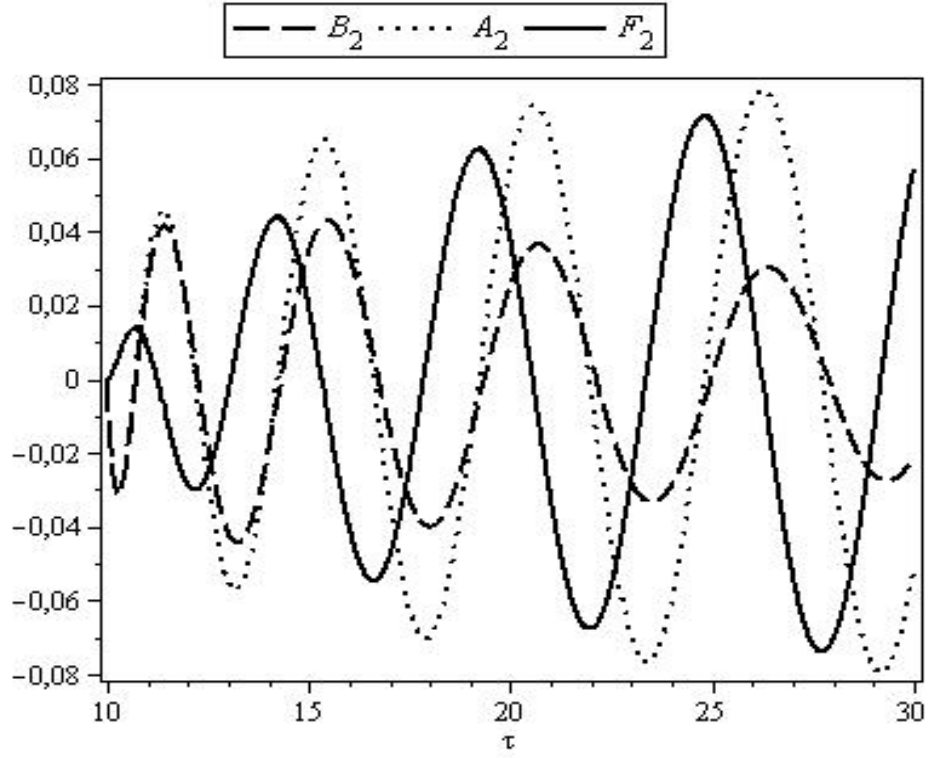
Şekil 5.13. Modal genliklerin $10 \leq \tau \leq 30$ zaman aralığında değişimi. $\xi = 10$ sabit, $\alpha = 1$.



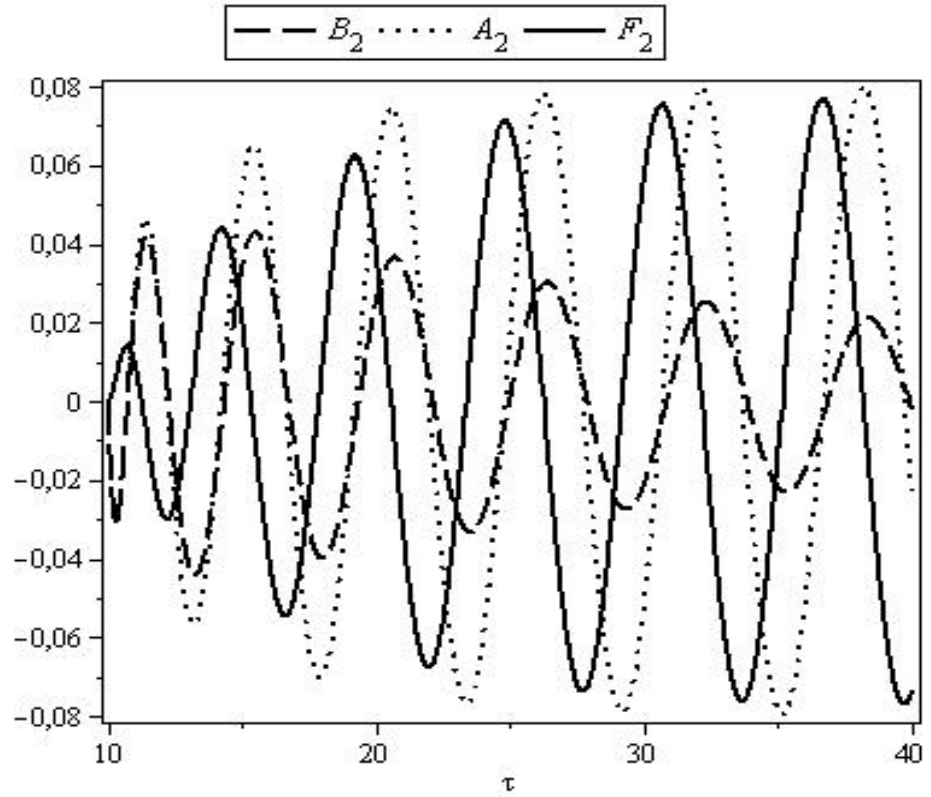
Şekil 5.14. Modal genliklerin $10 \leq \tau \leq 40$ zaman aralığında değişimi. $\zeta = 10$ sabit, $\alpha = 1$.



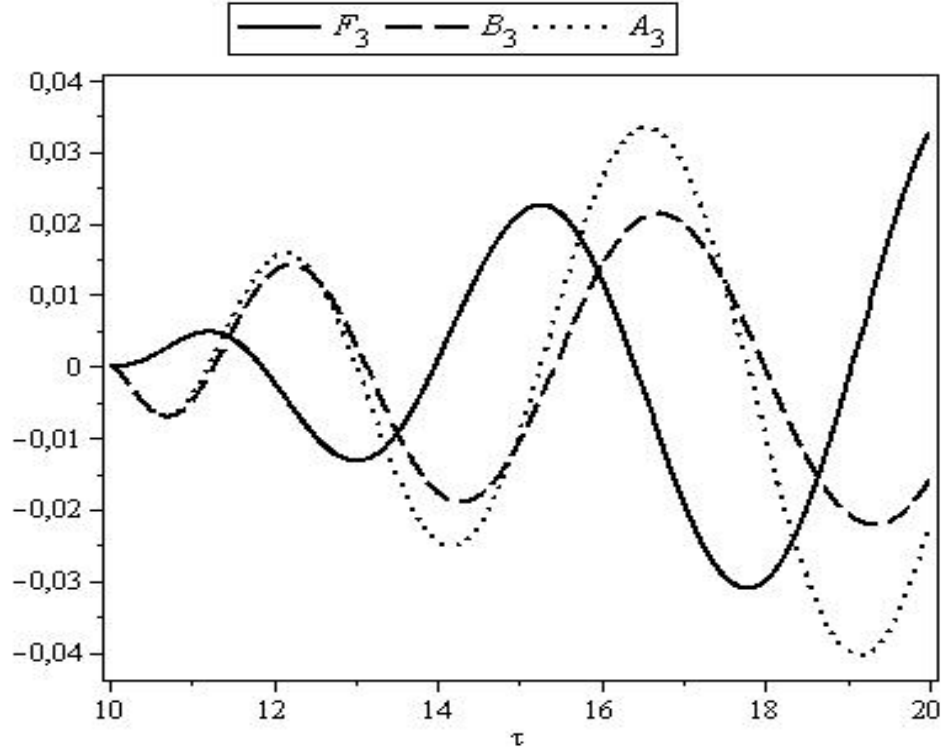
Şekil 5.15. Modal genliklerin $10 \leq \tau \leq 20$ zaman aralığında değişimi. $\zeta = 10$ sabit, $\alpha = 2$.



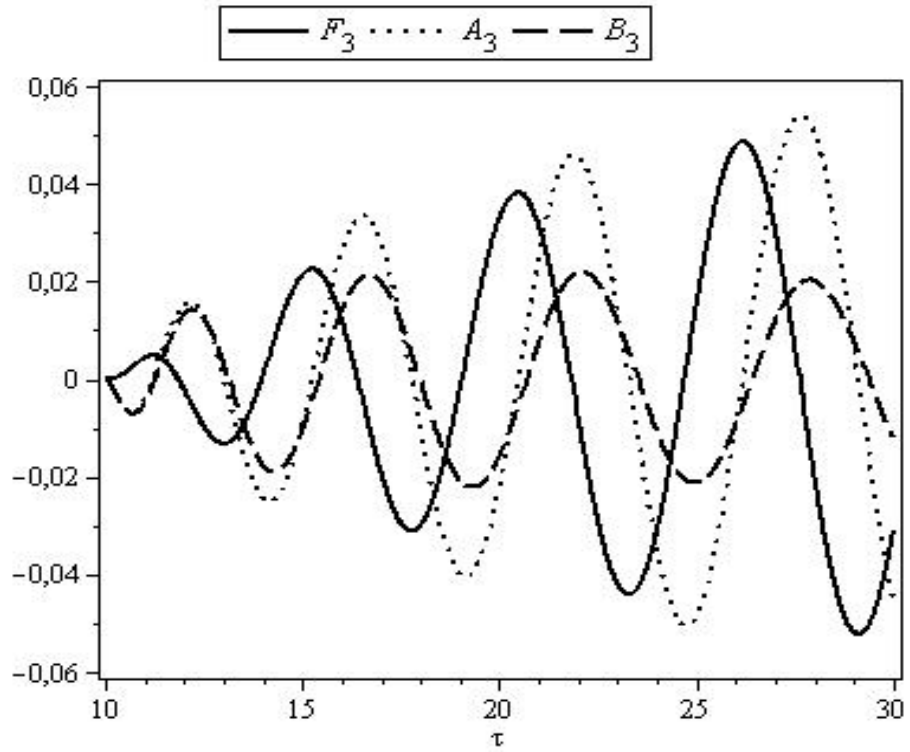
Şekil 5.16. Modal genliklerin $10 \leq \tau \leq 30$ zaman aralığında değişimi. $\xi = 10$ sabit, $\alpha = 2$.



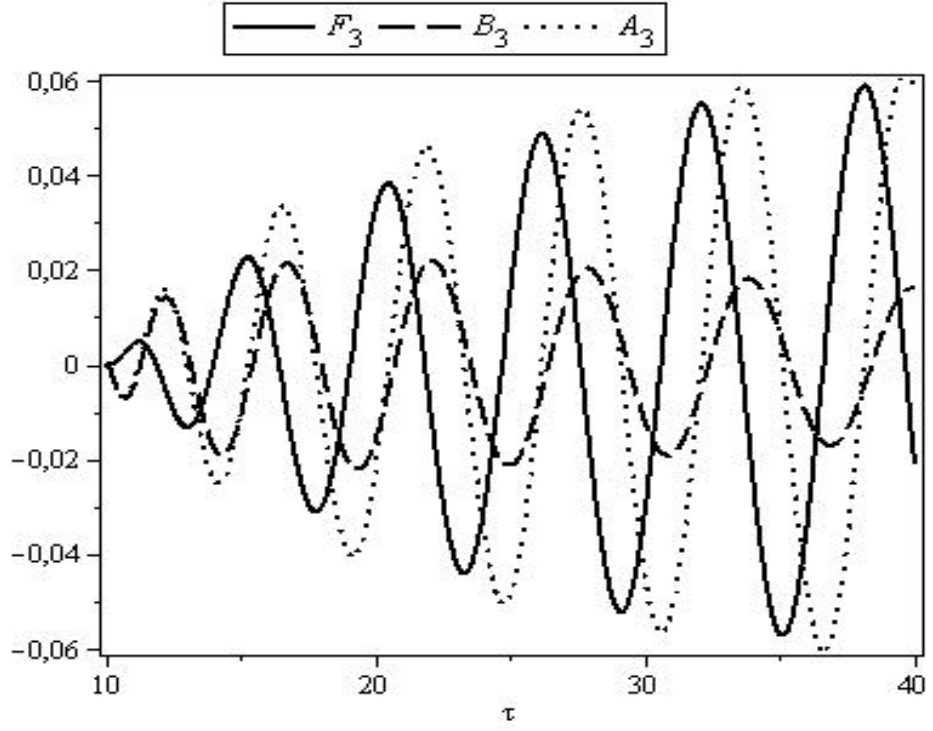
Şekil 5.17. Modal genliklerin $10 \leq \tau \leq 40$ zaman aralığında değişimi. $\xi = 10$ sabit, $\alpha = 2$.



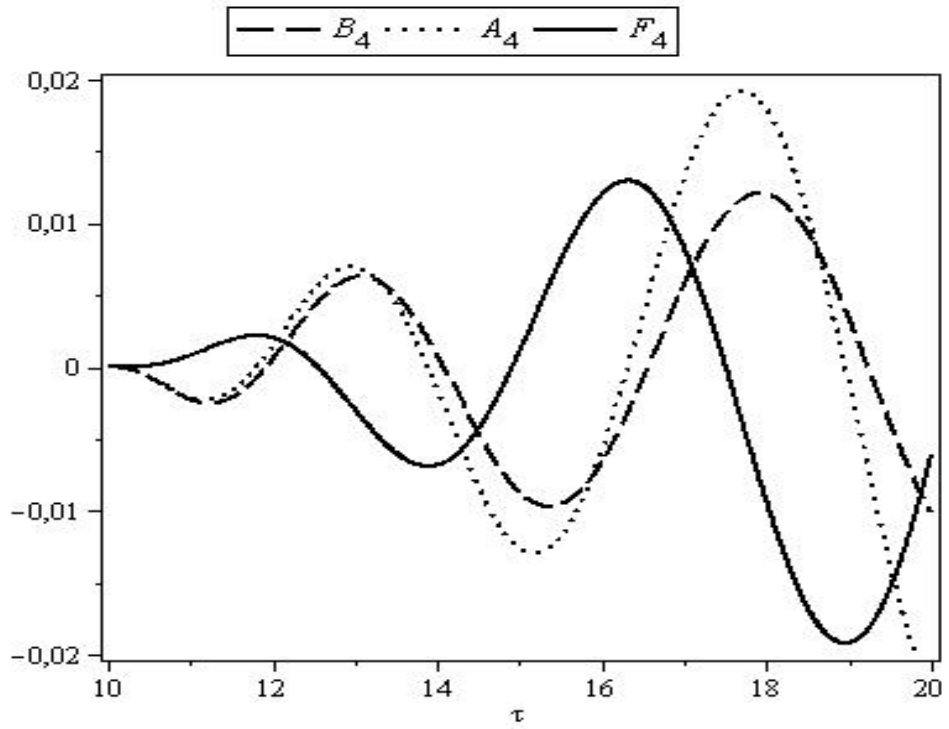
Şekil 5.18. Modal genliklerin $10 \leq \tau \leq 20$ zaman aralığında değişimi. $\xi = 10$ sabit, $\alpha = 3$.



Şekil 5.19. Modal genliklerin $10 \leq \tau \leq 30$ zaman aralığında değişimi. $\xi = 10$ sabit, $\alpha = 3$.

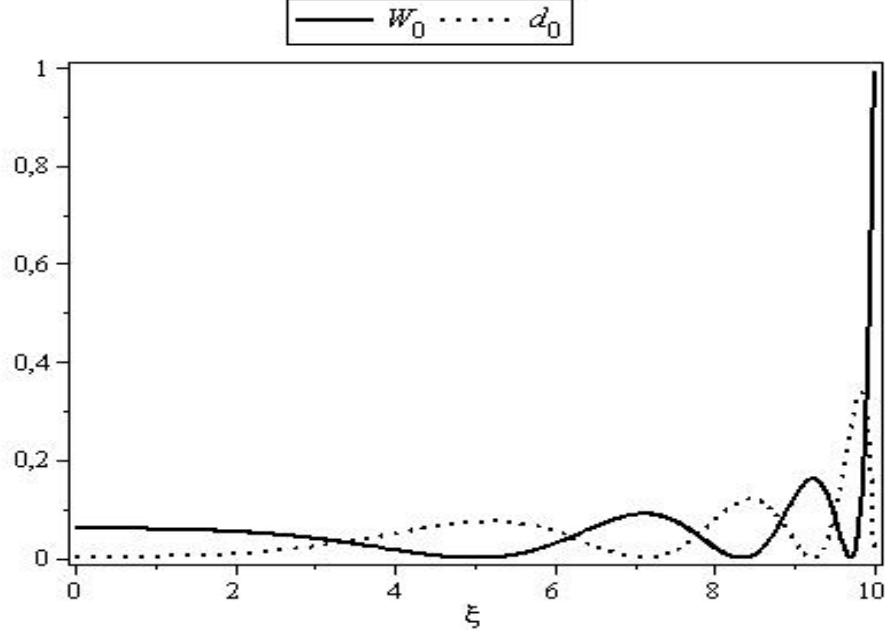


Şekil 5.20. Modal genliklerin $10 \leq \tau \leq 40$ zaman aralığında değişimi. $\xi = 10$ sabit, $\alpha = 3$.

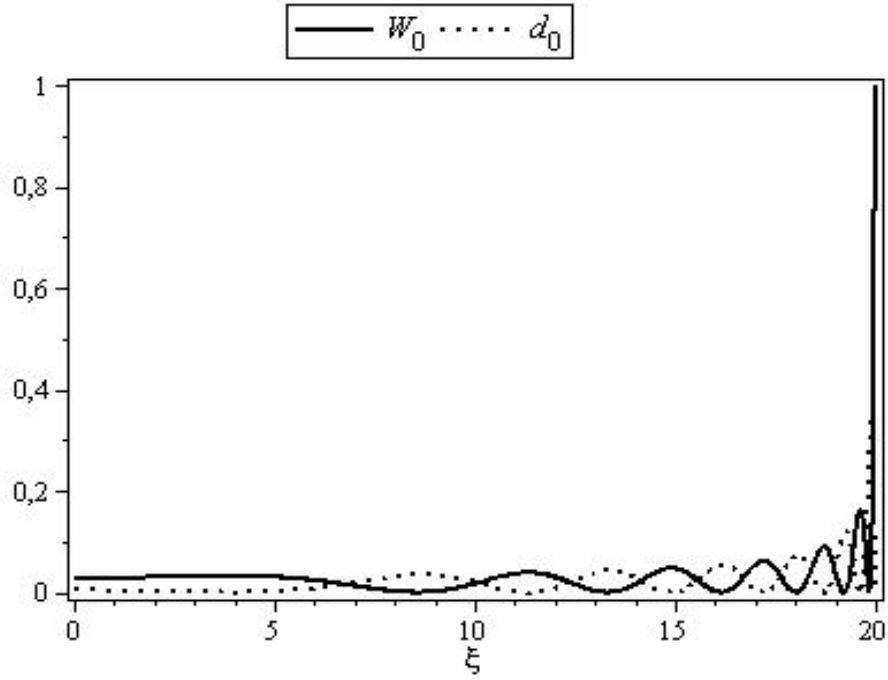


Şekil 5.21. Modal genliklerin $10 \leq \tau \leq 20$ zaman aralığında değişimi. $\xi = 10$ sabit, $\alpha = 4$.

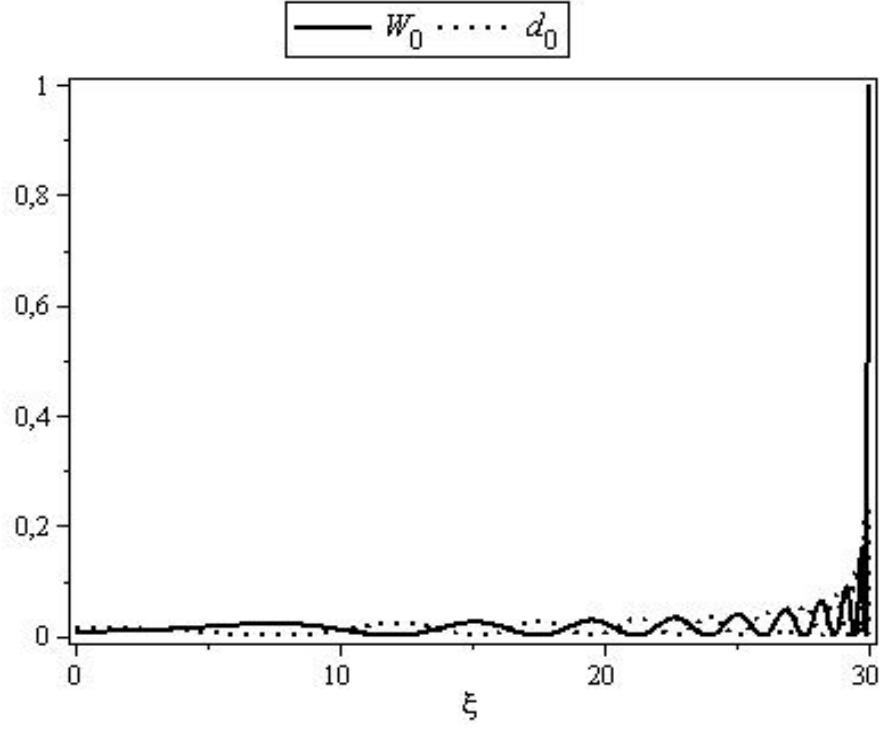
Aşağıda incelenen grafiklerde ise enerji ve enerjideki değişim-artım (surplus of the energy) sergilenmektedir. α 'nın değişen değerleri için, W_α : **Enerji** ve d_α : **Enerjideki değişim** olmak üzere,



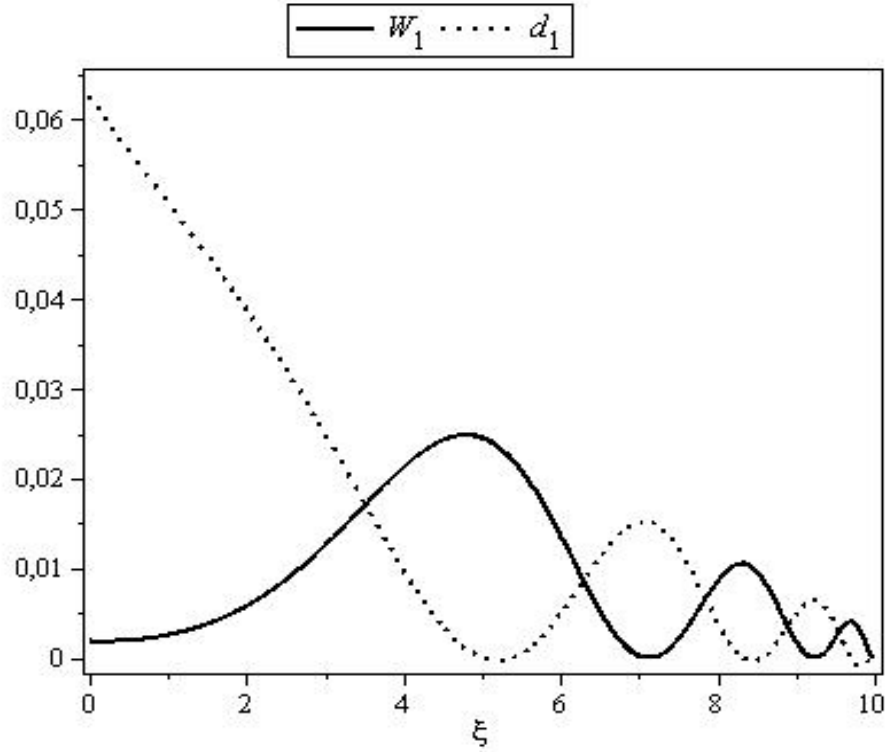
Şekil 5.22. W_0 ve d_0 'ın $0 \leq \xi \leq 10$ aralığındaki değişimi. $\tau = 10$ sabit, ξ boyutsuz eksenel koordinat, $\alpha = 0$.



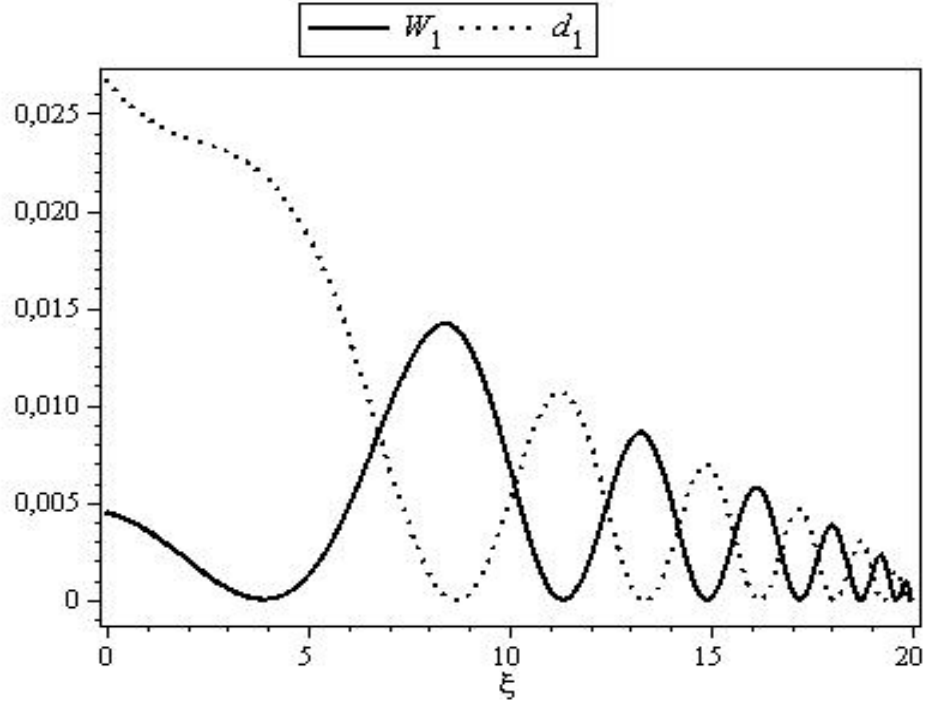
Şekil 5.23. W_0 ve d_0 'ın $0 \leq \xi \leq 20$ aralığındaki değişimi. $\tau = 20$ sabit, ξ boyutsuz eksenel koordinat, $\alpha = 0$.



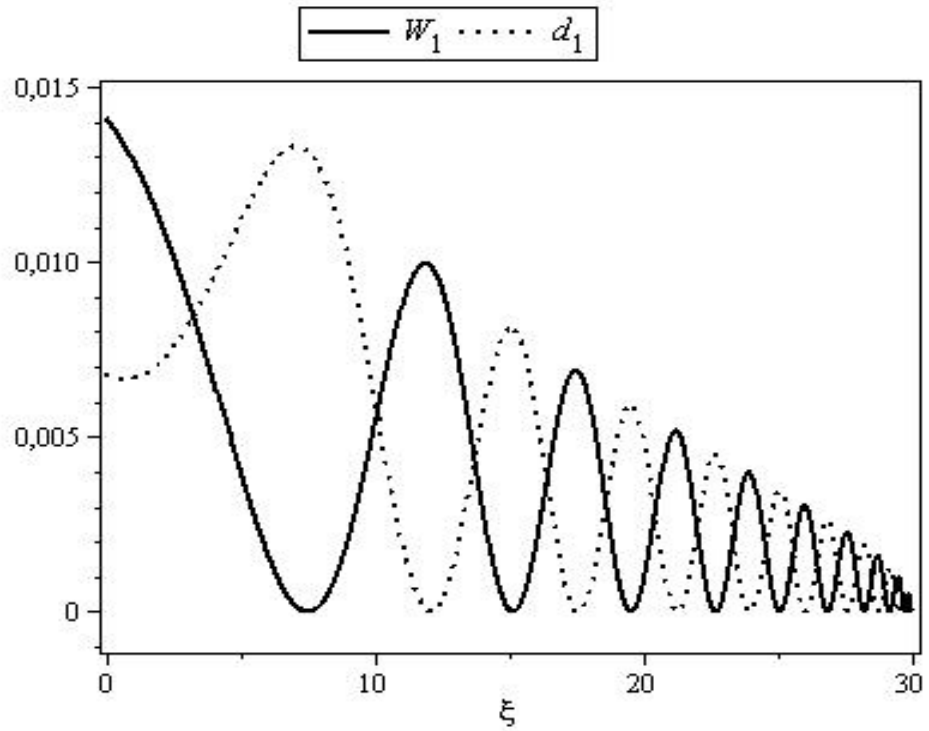
Şekil 5.24. W_0 ve d_0 'in $0 \leq \xi \leq 30$ aralığındaki değişimi. $\tau = 30$ sabit, ξ boyutsuz aksenal koordinat, $\alpha = 0$.



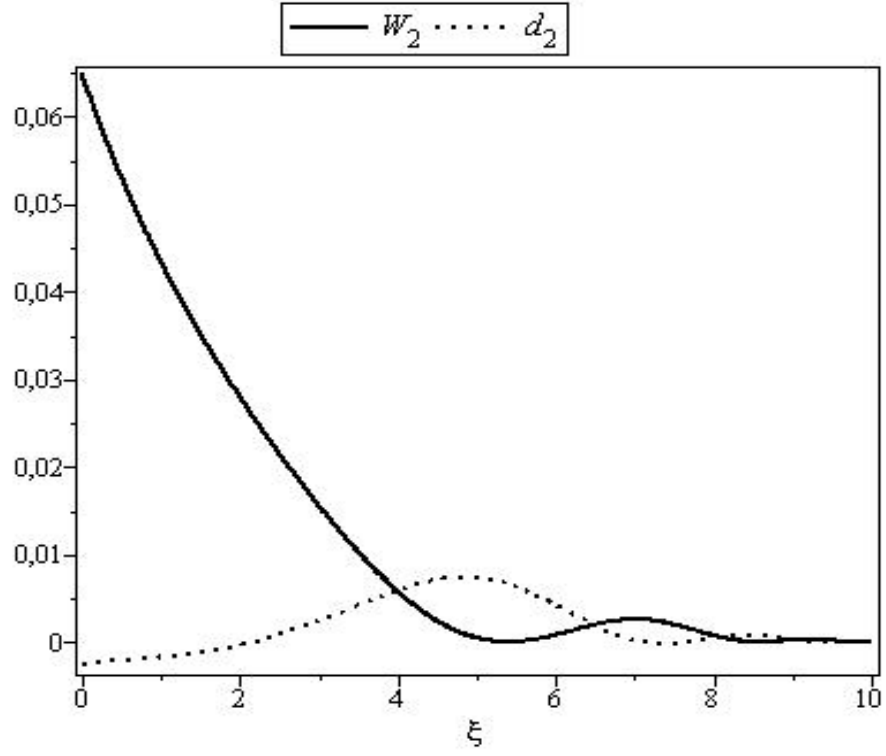
Şekil 5.25. W_1 ve d_1 'in $0 \leq \xi \leq 10$ aralığındaki değişimi. $\tau = 10$ sabit, ξ boyutsuz aksenal koordinat, $\alpha = 1$.



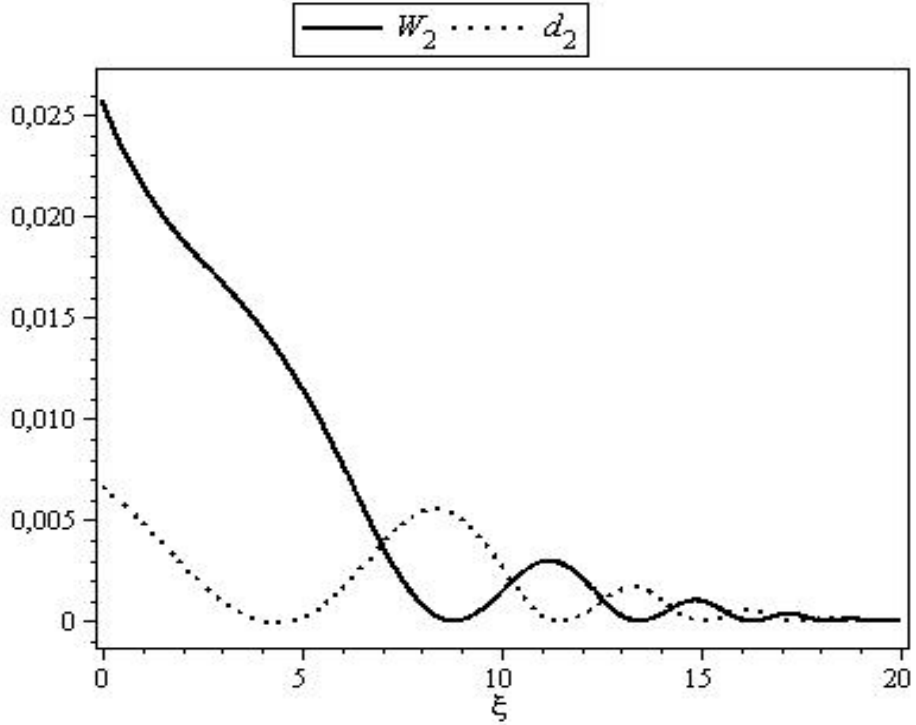
Şekil 5.26. W_1 ve d_1 'in $0 \leq \xi \leq 20$ aralığındaki değişimi. $\tau = 20$ sabit, ξ boyutsuz ekseneel koordinat, $\alpha = 1$.



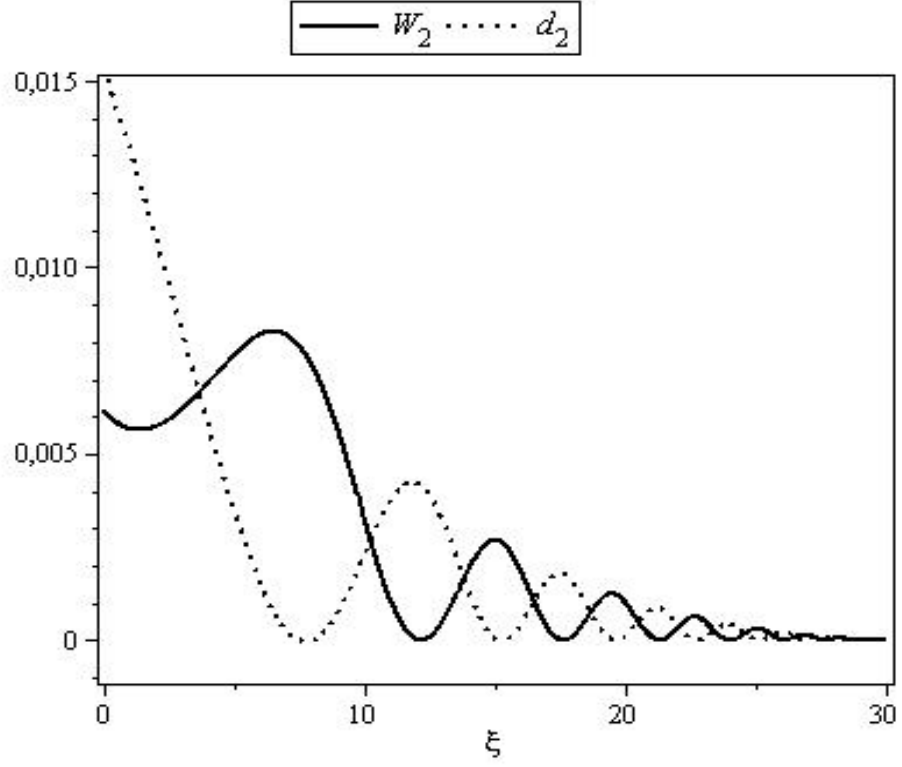
Şekil 5.27. W_1 ve d_1 'in $0 \leq \xi \leq 30$ aralığındaki değişimi. $\tau = 30$ sabit, ξ boyutsuz ekseneel koordinat, $\alpha = 1$.



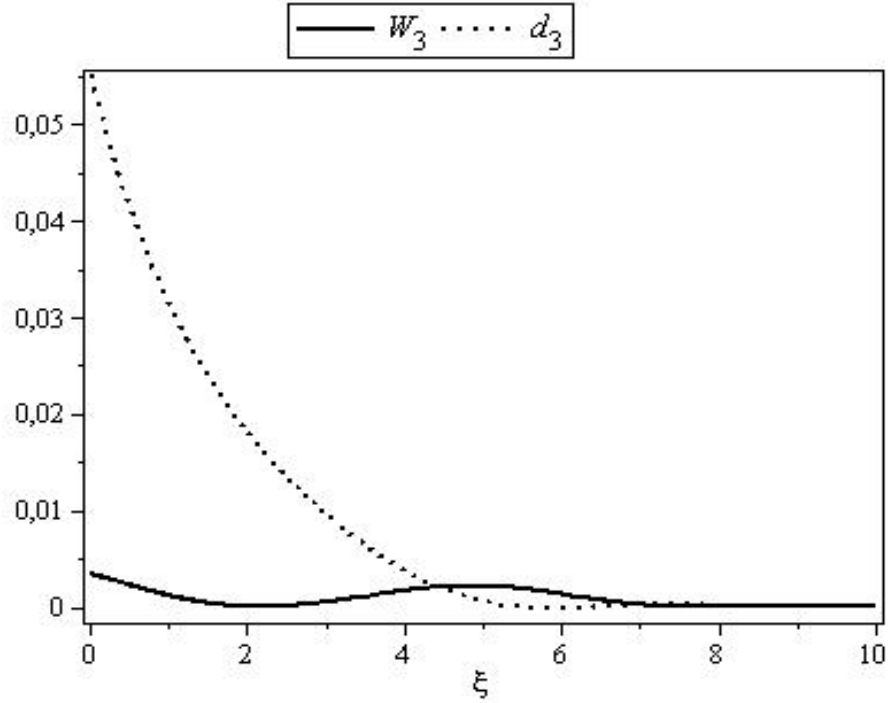
Şekil 5.28. W_2 ve d_2 'nin $0 \leq \xi \leq 10$ aralığındaki değişimi. $\tau = 10$ sabit, ξ boyutsuz aksene koordinat, $\alpha = 2$.



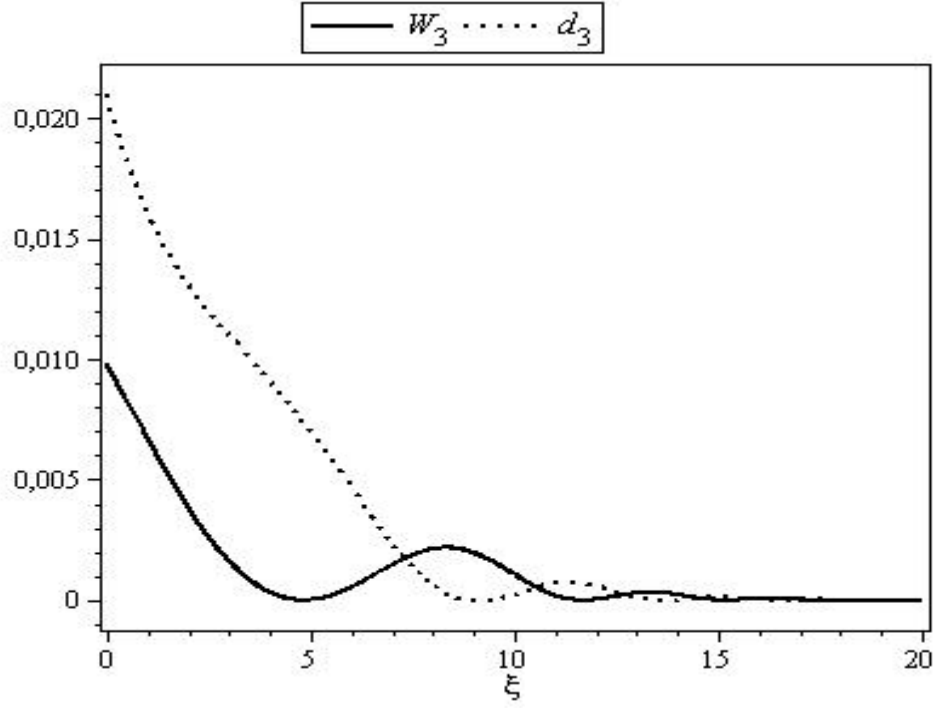
Şekil 5.29. W_2 ve d_2 'nin $0 \leq \xi \leq 20$ aralığındaki değişimi. $\tau = 20$ sabit, ξ boyutsuz aksene koordinat, $\alpha = 2$.



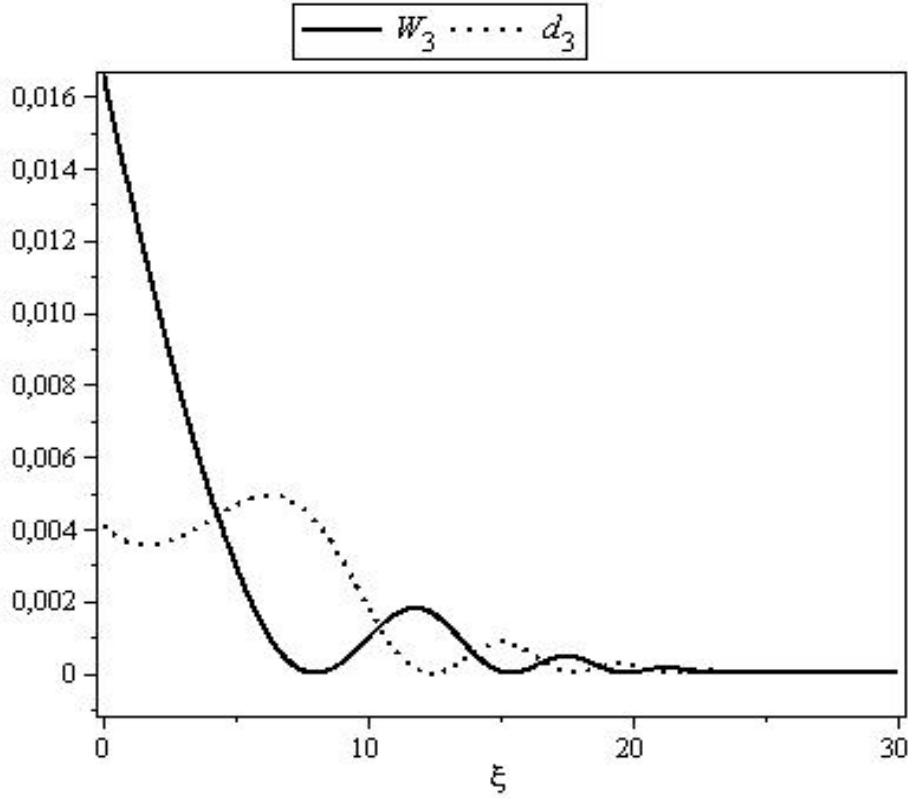
Şekil 5.30. W_2 ve d_2 'nin $0 \leq \xi \leq 30$ aralığındaki değişimi. $\tau = 30$ sabit, ξ boyutsuz aksenal koordinat, $\alpha = 2$.



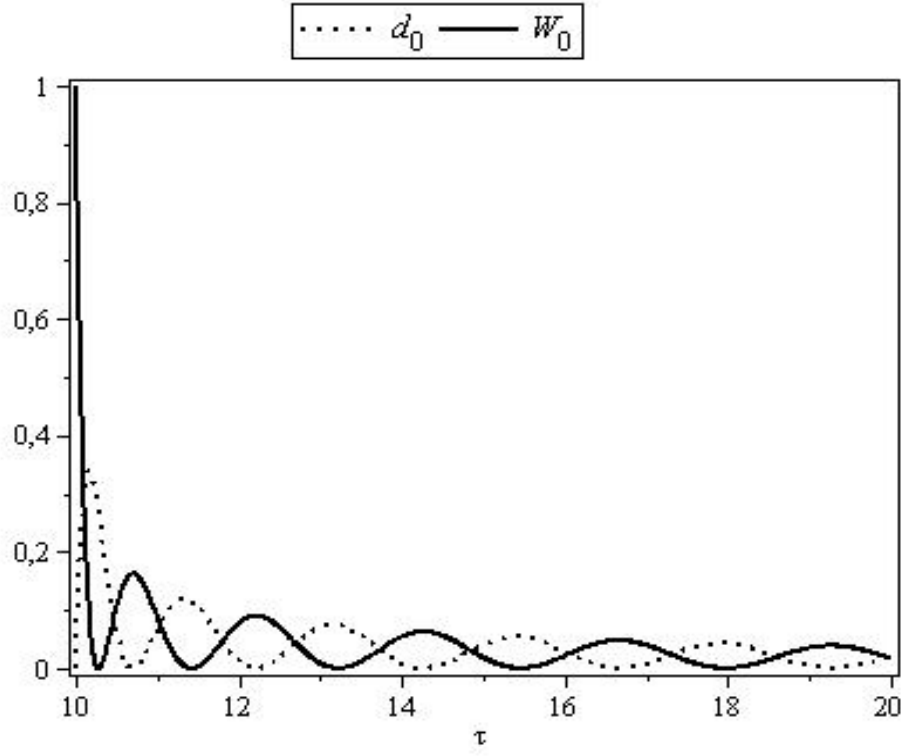
Şekil 5.31. W_3 ve d_3 'ün $0 \leq \xi \leq 10$ aralığındaki değişimi. $\tau = 10$ sabit, ξ boyutsuz aksenal koordinat, $\alpha = 3$.



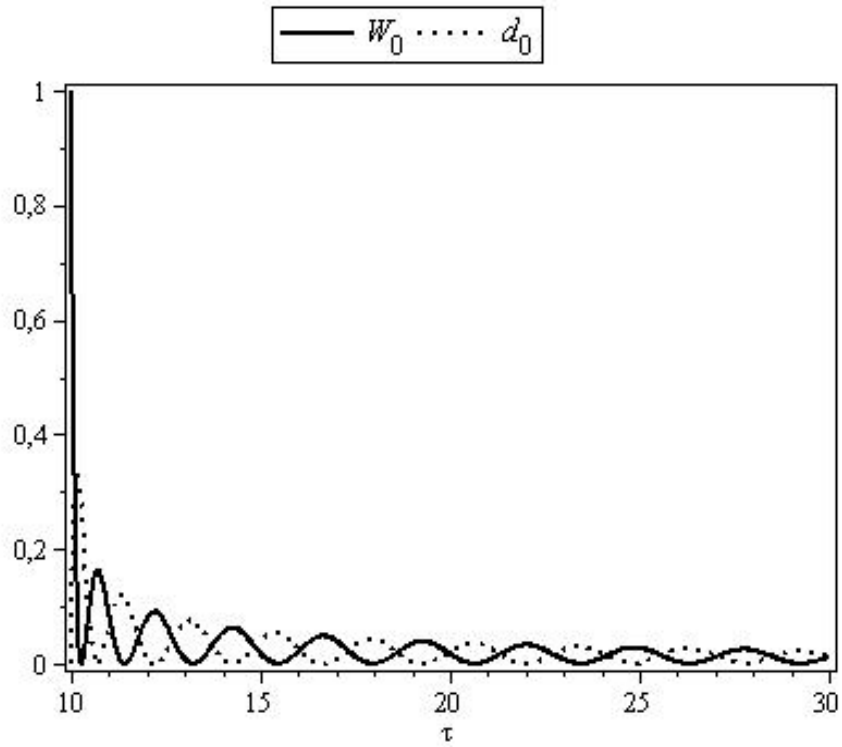
Şekil 5.32. W_3 ve d_3 'ün $0 \leq \xi \leq 20$ aralığındaki değişimi. $\tau = 20$ sabit, ξ boyutsuz eksenel koordinat, $\alpha = 3$.



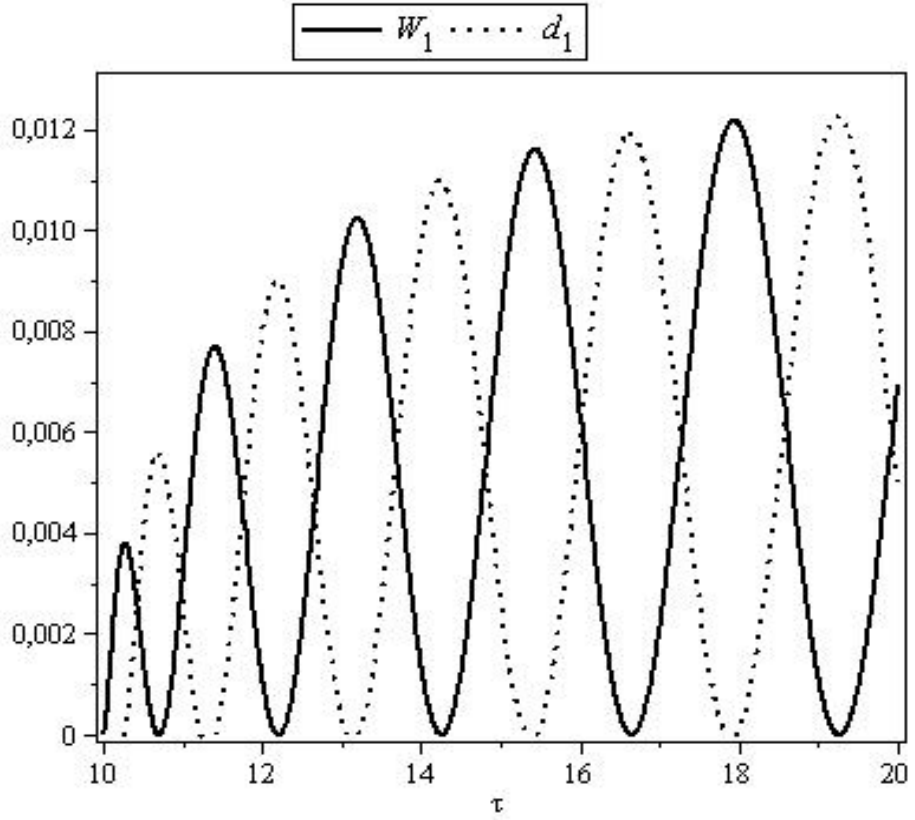
Şekil 5.33. W_3 ve d_3 'ün $0 \leq \xi \leq 30$ aralığındaki değişimi. $\tau = 30$ sabit, ξ boyutsuz eksenel koordinat, $\alpha = 3$.



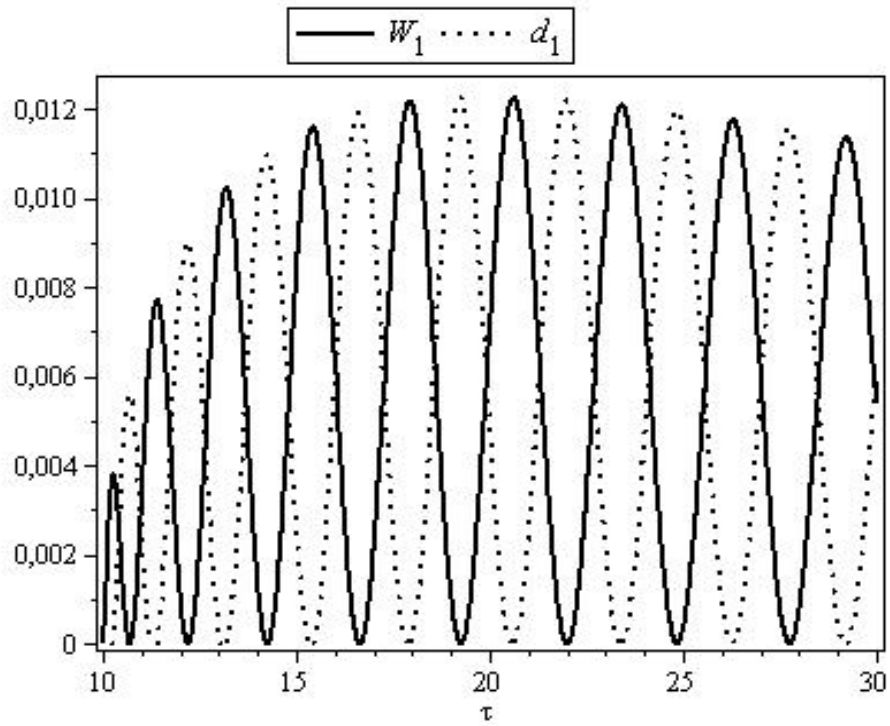
Şekil 5.34. W_0 ve d_0 'ın $10 \leq \tau \leq 20$ zaman aralığındaki değişimi. $\xi = 10$ sabit, $\alpha = 0$.



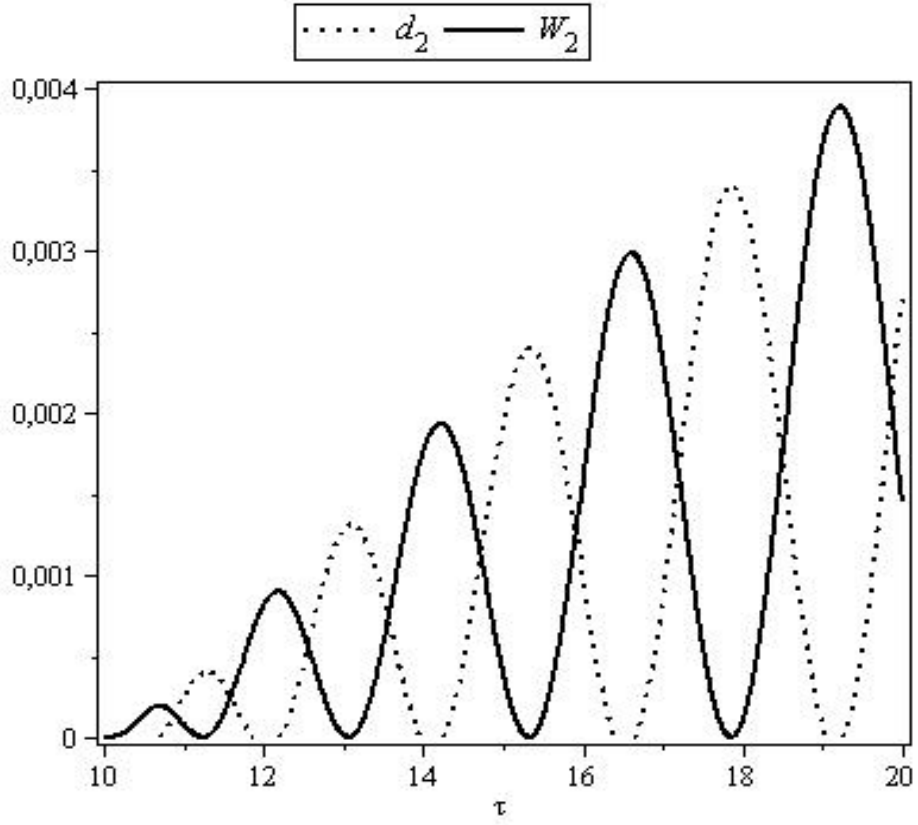
Şekil 5.35. W_0 ve d_0 'ın $10 \leq \tau \leq 30$ zaman aralığındaki değişimi. $\xi = 10$ sabit, $\alpha = 0$.



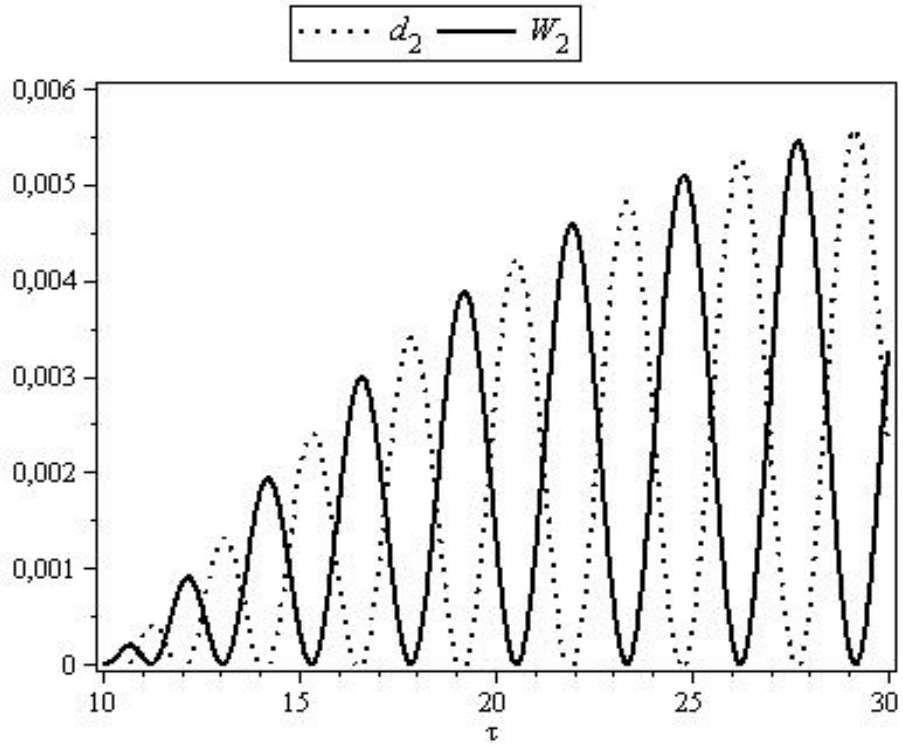
Şekil 5.36. W_1 ve d_1 'in $10 \leq \tau \leq 20$ zaman aralığındaki değişimi. $\xi = 10$ sabit, $\alpha = 1$.



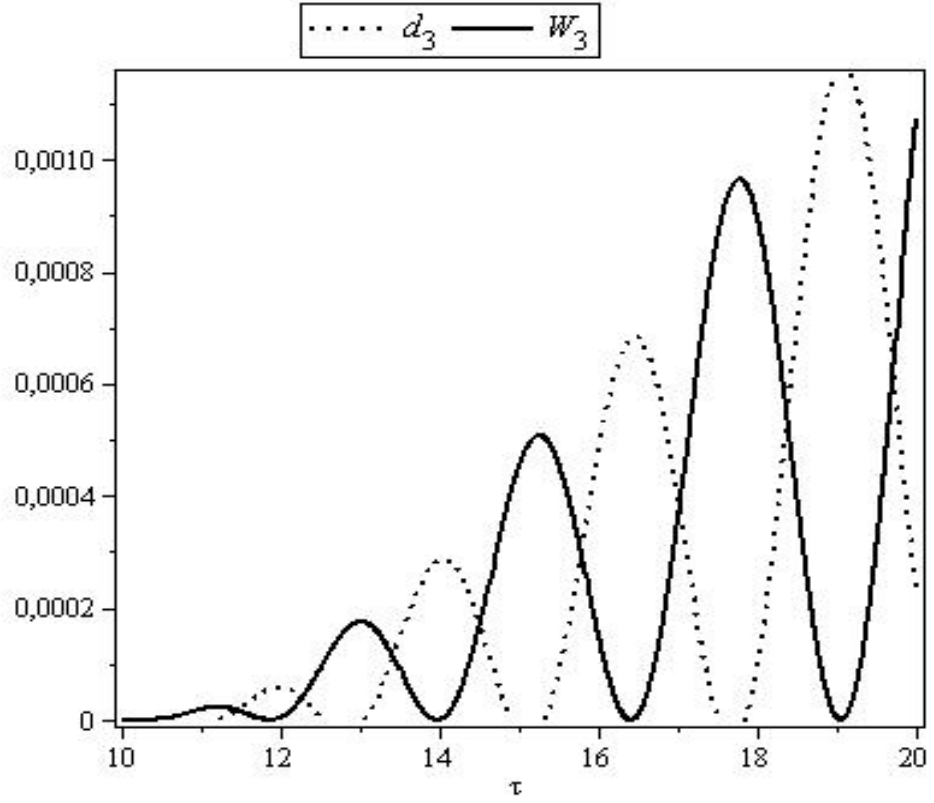
Şekil 5.37. W_1 ve d_1 'in $10 \leq \tau \leq 30$ zaman aralığındaki değişimi. $\xi = 10$ sabit, $\alpha = 1$.



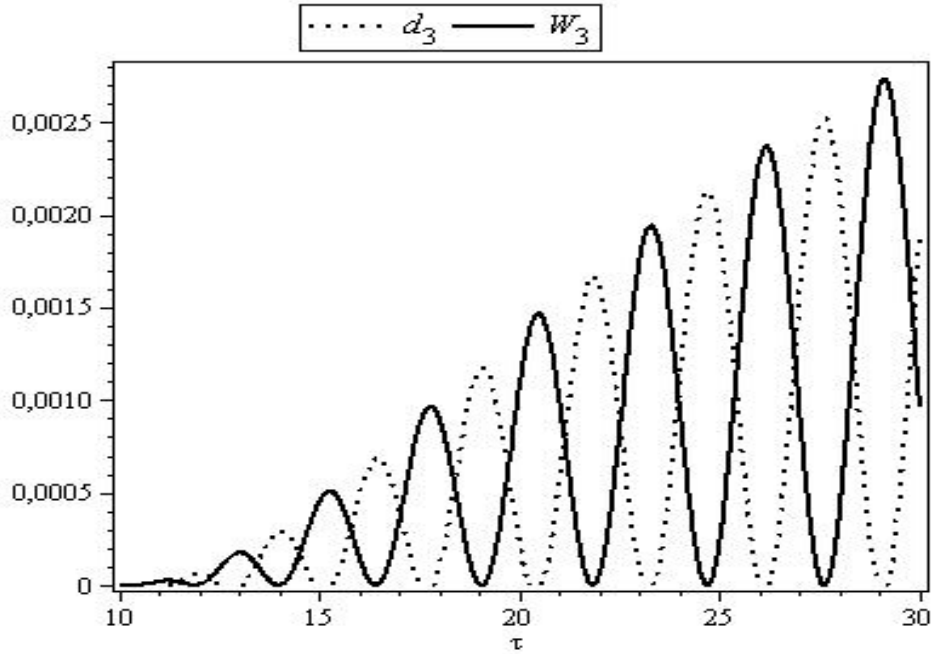
Şekil 5.38. W_2 ve d_2 'nin $10 \leq \tau \leq 20$ zaman aralığındaki değişimi. $\xi = 10$ sabit, $\alpha = 2$.



Şekil 5.39. W_2 ve d_2 'nin $10 \leq \tau \leq 30$ zaman aralığındaki değişimi. $\xi = 10$ sabit, $\alpha = 2$.

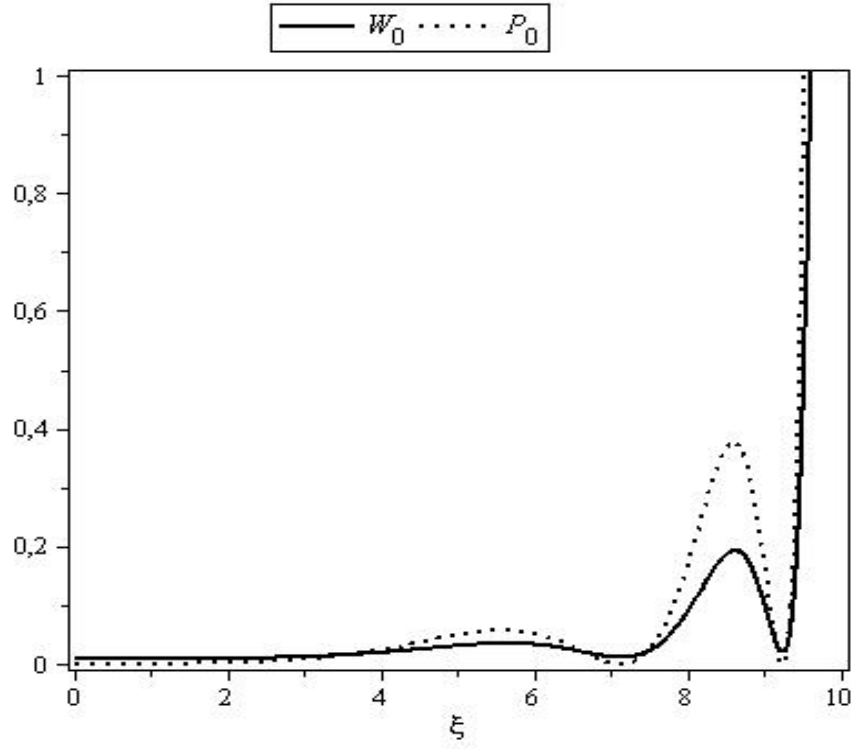


Şekil 5.40. W_3 ve d_3 'ün $10 \leq \tau \leq 20$ zaman aralığındaki değişimi. $\xi = 10$ sabit, $\alpha = 3$.

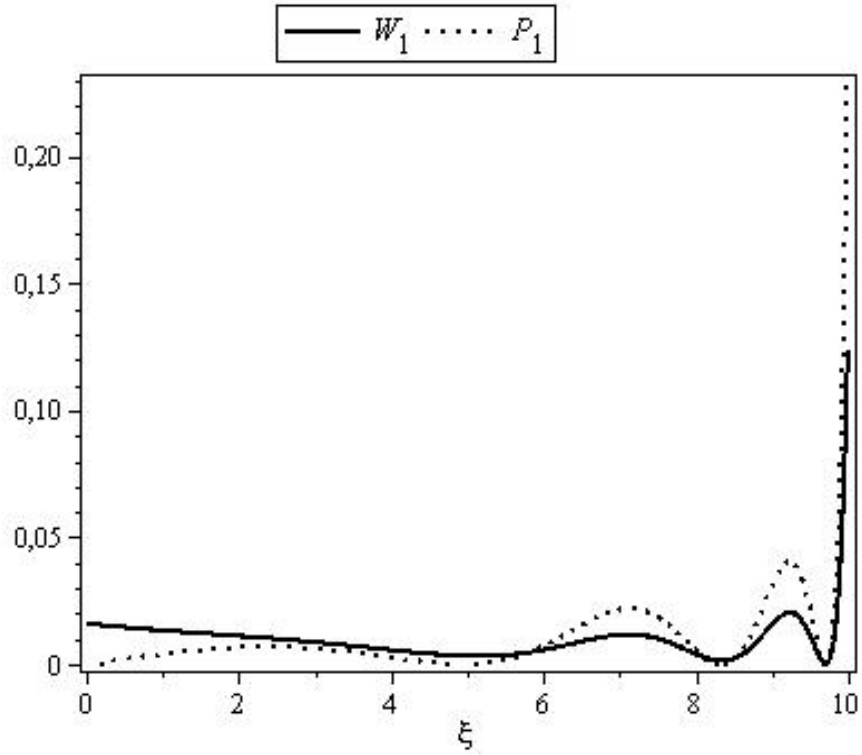


Şekil 5.41. W_3 ve d_3 'ün $10 \leq \tau \leq 30$ zaman aralığındaki değişimi. $\xi = 10$ sabit, $\alpha = 3$.

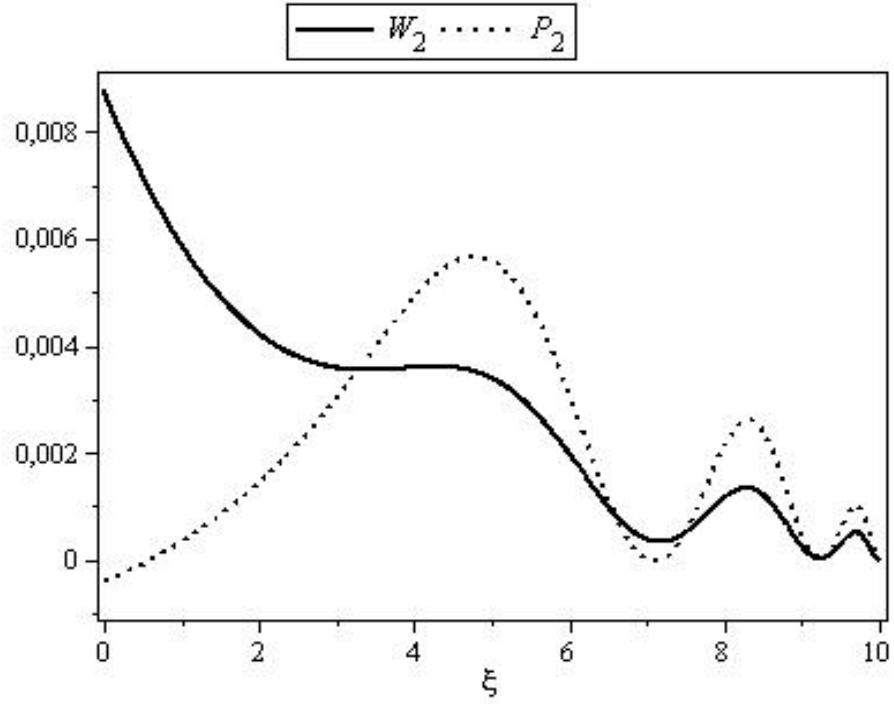
Aşağıdaki grafiklerde Enerji ve Poynting vektörünün grafikleri bir arada verilmiştir. α 'nın değişen değerleri için Poynting vektörü P_α ile gösterilmiştir.



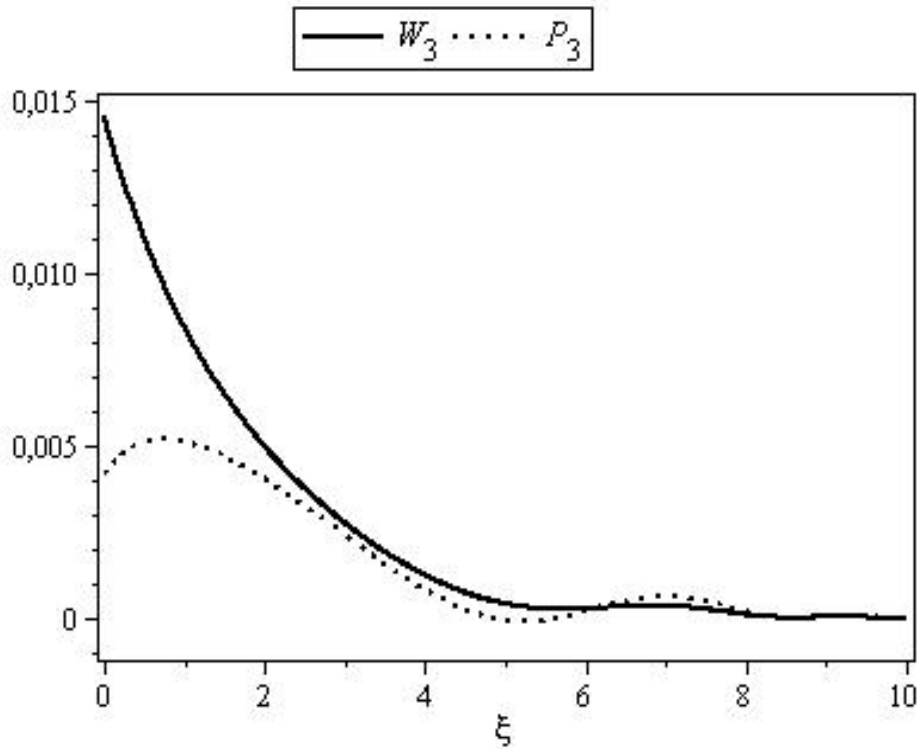
Şekil 5.42. W_0 ve P_0 'in $0 \leq \xi \leq \tau$ aralığındaki değişimi. $\tau = 10$ sabit, ξ boyutsuz eksenel koordinat, $\alpha = 0$.



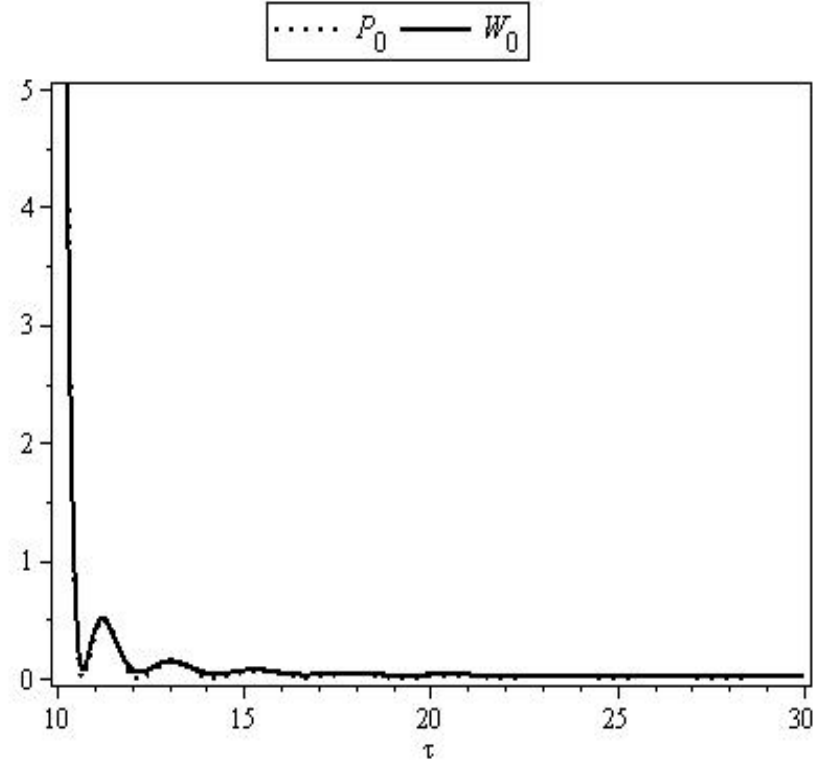
Şekil 5.43. W_1 ve P_1 'in $0 \leq \xi \leq \tau$ aralığındaki değişimi. $\tau = 10$ sabit, ξ boyutsuz eksenel koordinat, $\alpha = 1$.



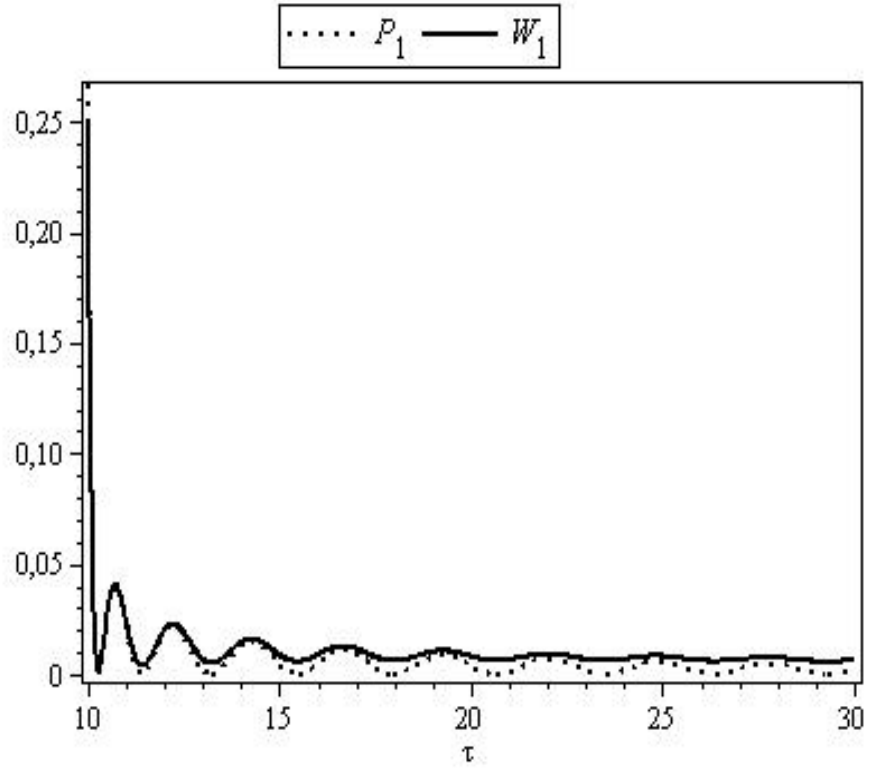
Şekil 5.44. W_2 ve P_2 'nin $0 \leq \xi \leq \tau$ aralığındaki değişimi. $\tau = 10$ sabit, ξ boyutsuz eksene koordinat, $\alpha = 2$.



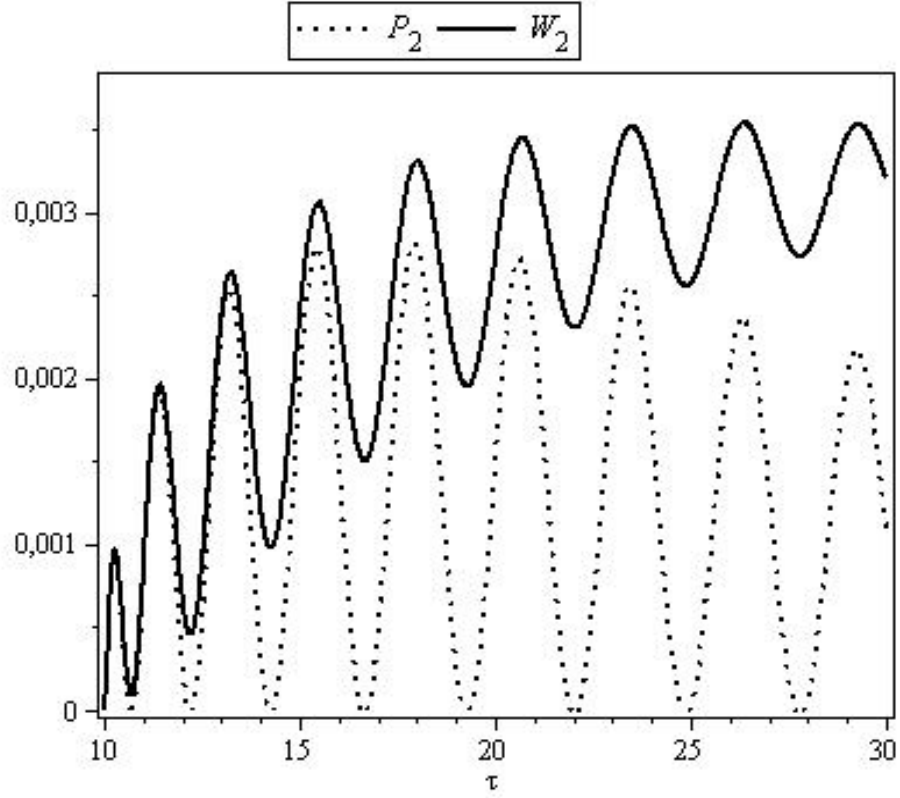
Şekil 5.45. W_3 ve P_3 'ün $0 \leq \xi \leq \tau$ aralığındaki değişimi. $\tau = 10$ sabit, ξ boyutsuz eksene koordinat, $\alpha = 3$.



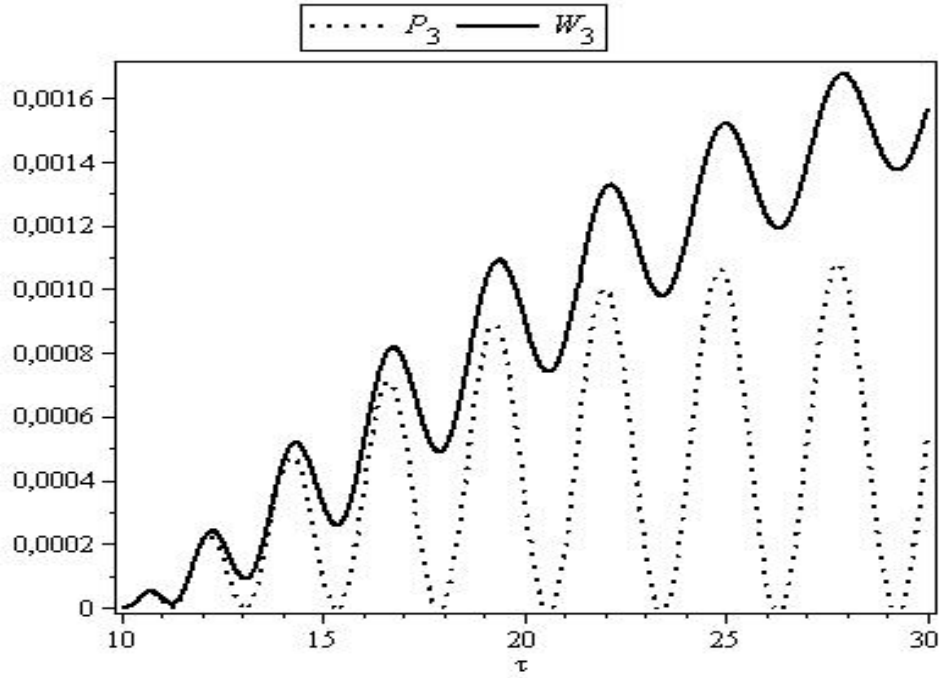
Şekil 5.46. W_0 ve P_0 'in $10 \leq \tau \leq 30$ zaman aralığındaki değişimi. $\xi = 10$ sabit, $\alpha = 0$.



Şekil 5.47. W_1 ve P_1 'in $10 \leq \tau \leq 30$ zaman aralığındaki değişimi. $\xi = 10$ sabit, $\alpha = 1$.

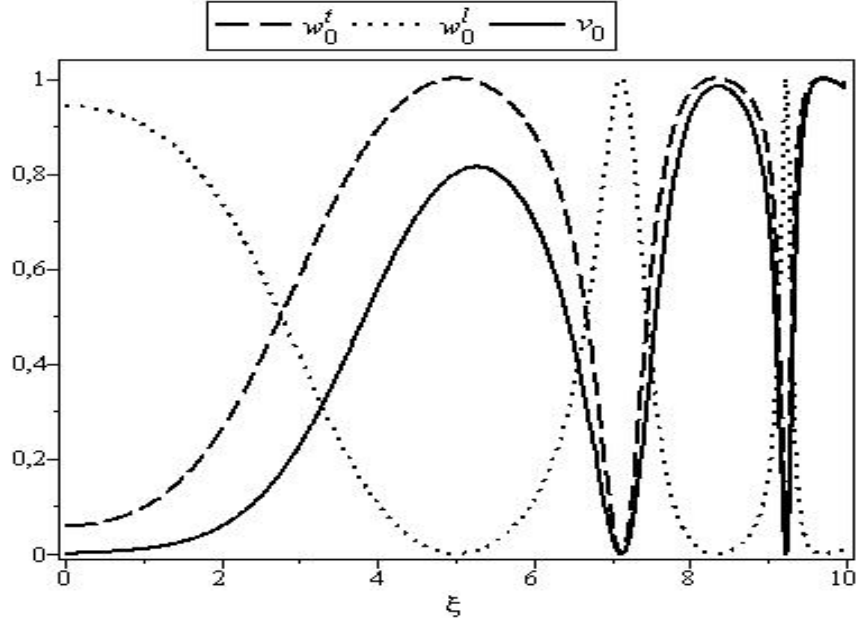


Şekil 5.48. W_2 ve P_2 'nin $10 \leq \tau \leq 30$ zaman aralığındaki değişimi. $\xi = 10$ sabit, $\alpha = 2$.

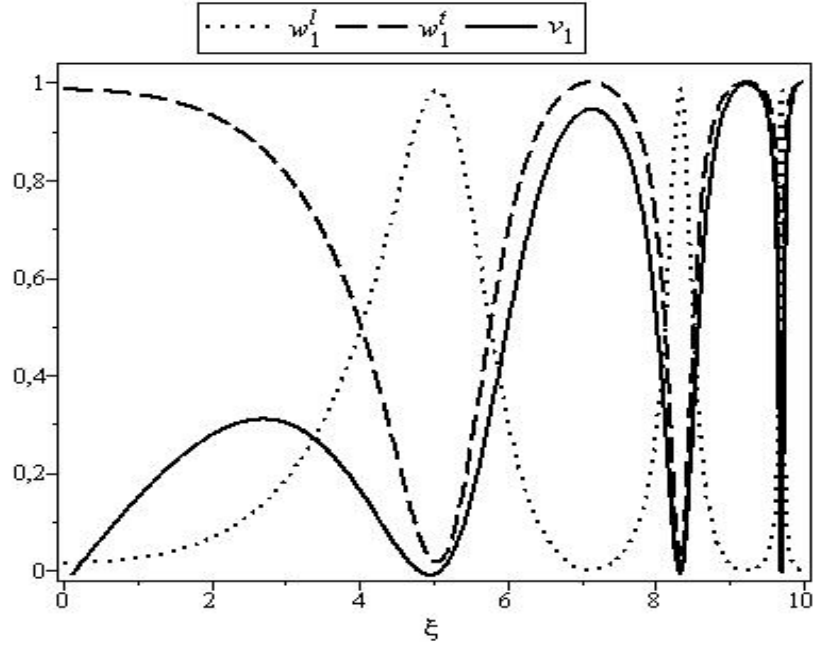


Şekil 5.49. W_3 ve P_3 'ün $10 \leq \tau \leq 30$ zaman aralığındaki değişimi. $\xi = 10$ sabit, $\alpha = 3$.

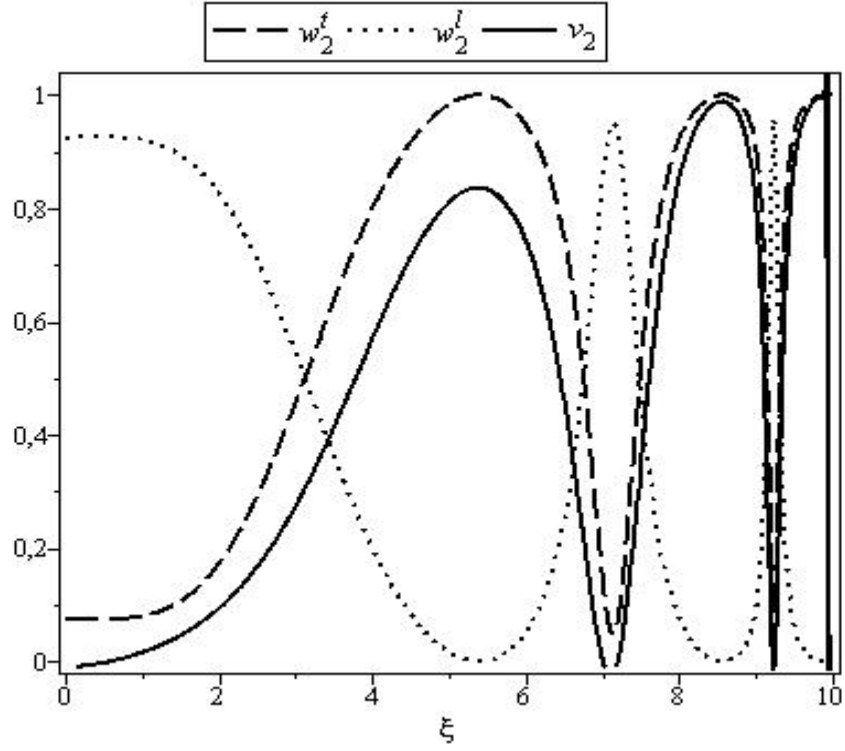
Aşağıdaki grafiklerde hız v_α ile beraber enerjinin enlemsel (w_α^t , transverse) ve aksenal (w_α^l , longitudinal) kısımları ayrı ayrı hesaplanmış, grafikleri bir olarak verilmiştir.



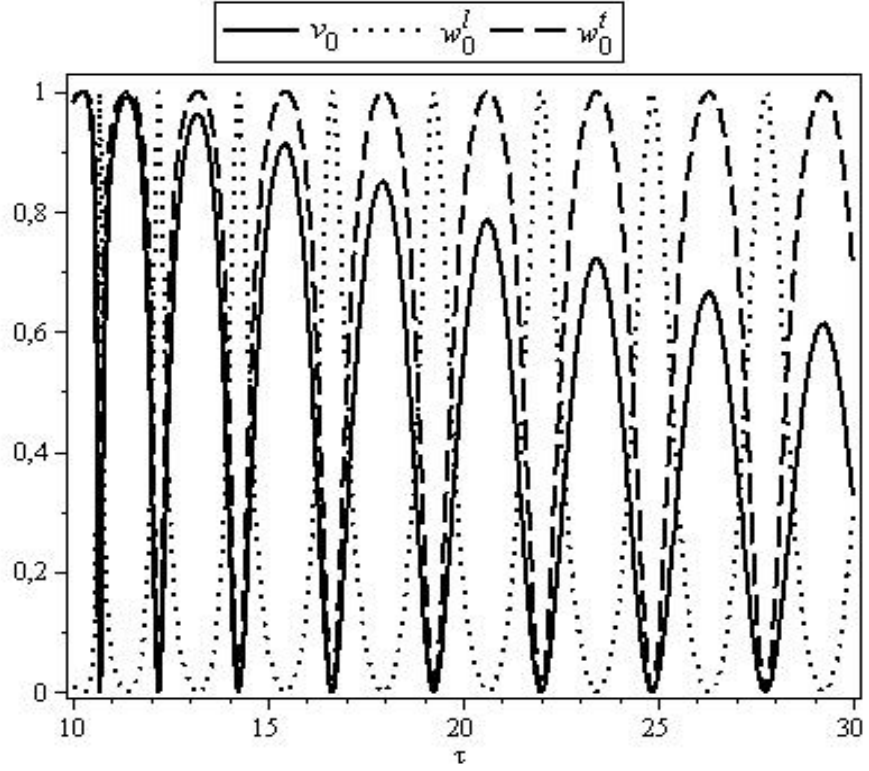
Şekil 5.50. v_0 , w_0^t ve w_0^l 'in $0 \leq \xi \leq \tau$ aralığındaki değişimi. $\tau = 10$ sabit, ξ boyutsuz aksenal koordinat, $\alpha = 0$.



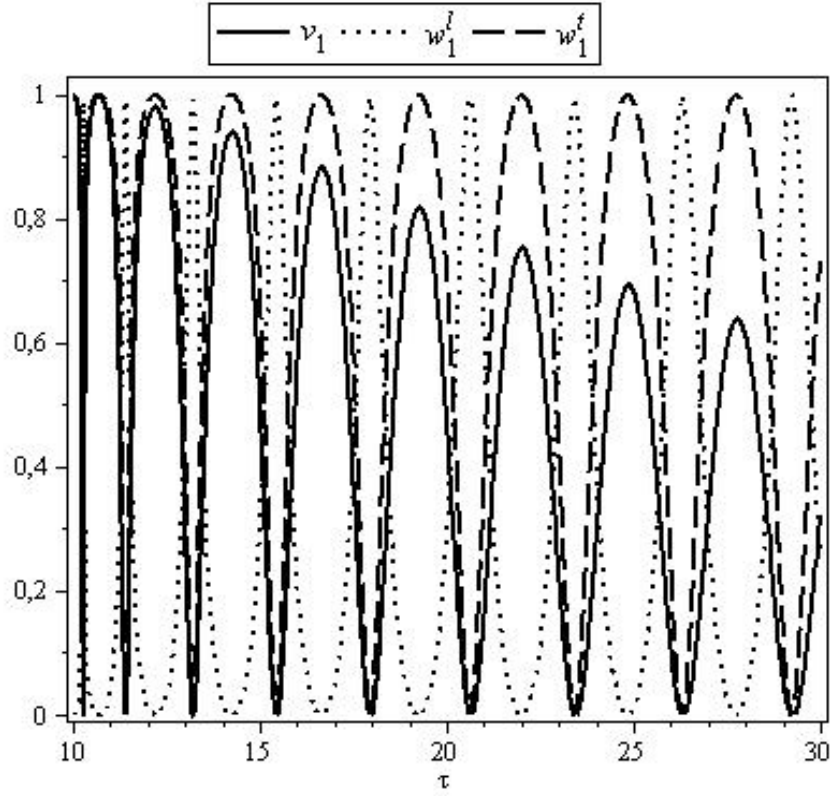
Şekil 5.51. v_1 , w_1^t ve w_1^l 'in $0 \leq \xi \leq \tau$ aralığındaki değişimi. $\tau = 10$ sabit, ξ boyutsuz aksenal koordinat, $\alpha = 1$.



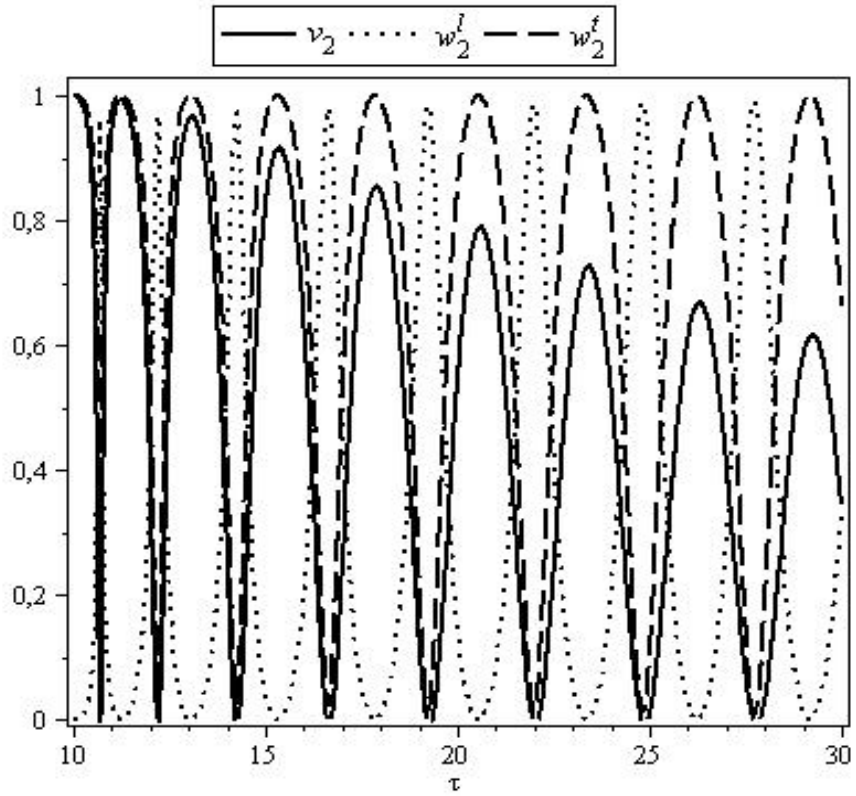
Şekil 5.52. v_2 , w_2^l ve w_2^r 'nin $0 \leq \xi \leq \tau$ aralığındaki değişimi. $\tau = 10$ sabit, ξ boyutsuz aksene koordinat, $\alpha = 2$.



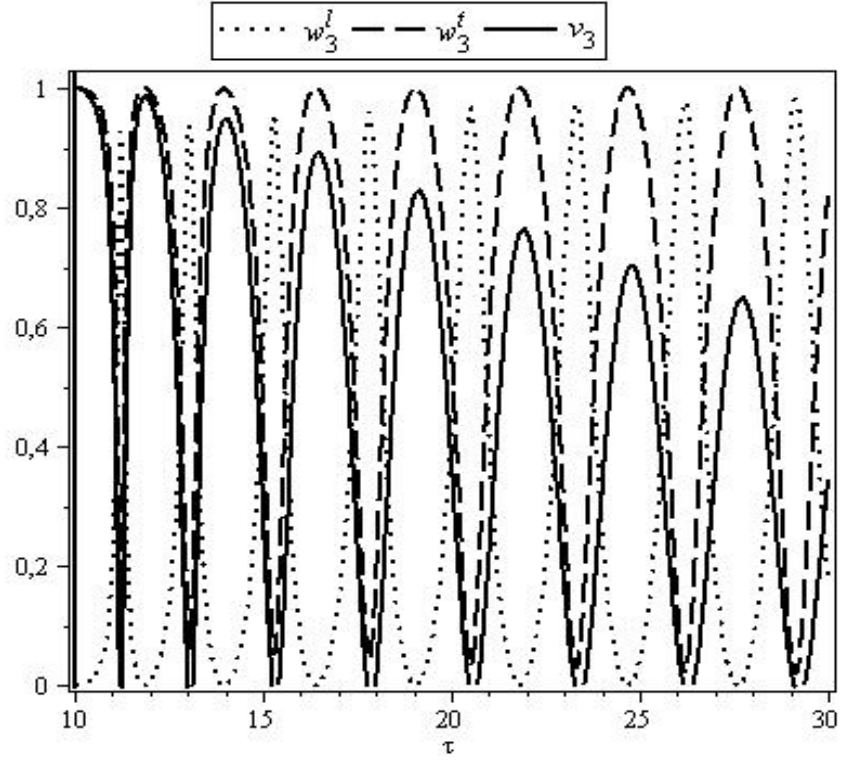
Şekil 5.53. v_0 , w_0^l ve w_0^r 'nin $10 \leq \tau \leq 30$ zaman aralığındaki değişimi. $\xi = 10$ sabit, $\alpha = 0$.



Şekil 5.54. v_1 , w_1^l ve w_1^t 'in $10 \leq \tau \leq 30$ zaman aralığındaki değişimi. $\xi = 10$ sabit, $\alpha = 1$.

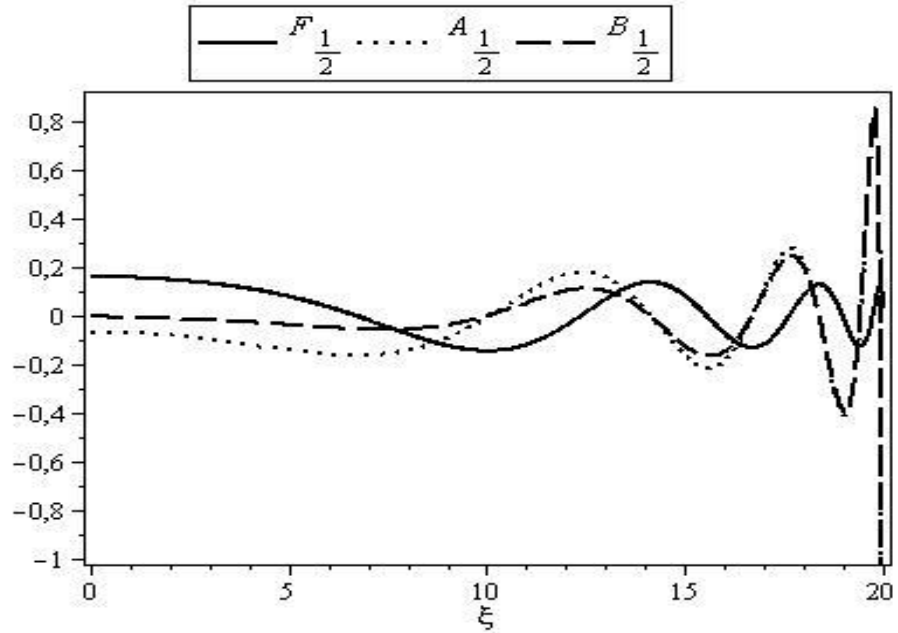


Şekil 5.55. v_2 , w_2^l ve w_2^t 'nin $10 \leq \tau \leq 30$ zaman aralığındaki değişimi. $\xi = 10$ sabit, $\alpha = 2$.

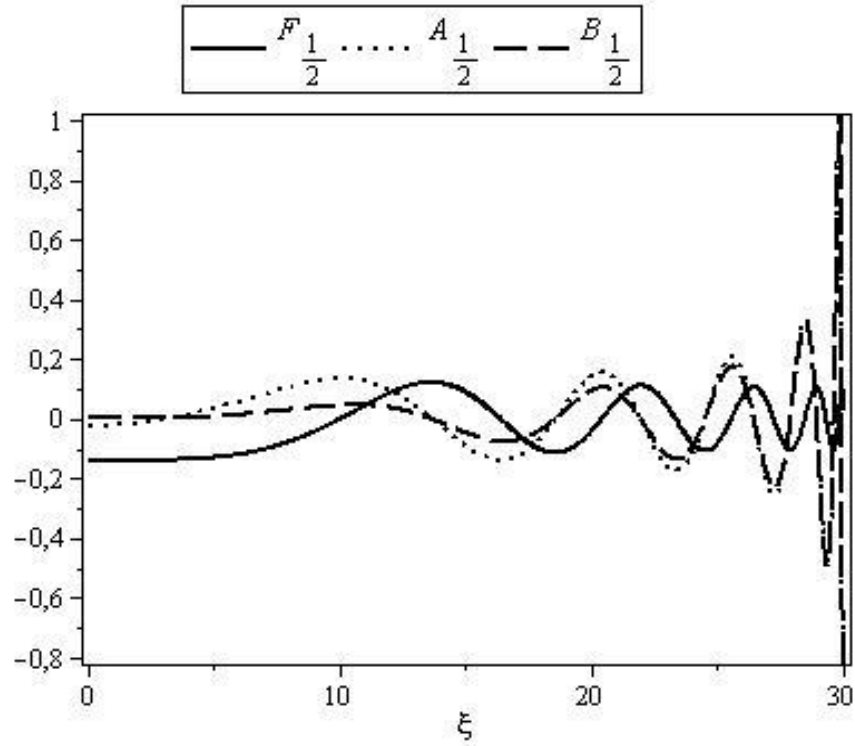


Şekil 5.56. v_3 , w_3^l ve w_3^t 'ün $10 \leq \tau \leq 30$ zaman aralığındaki değişimi. $\xi = 10$ sabit, $\alpha = 3$.

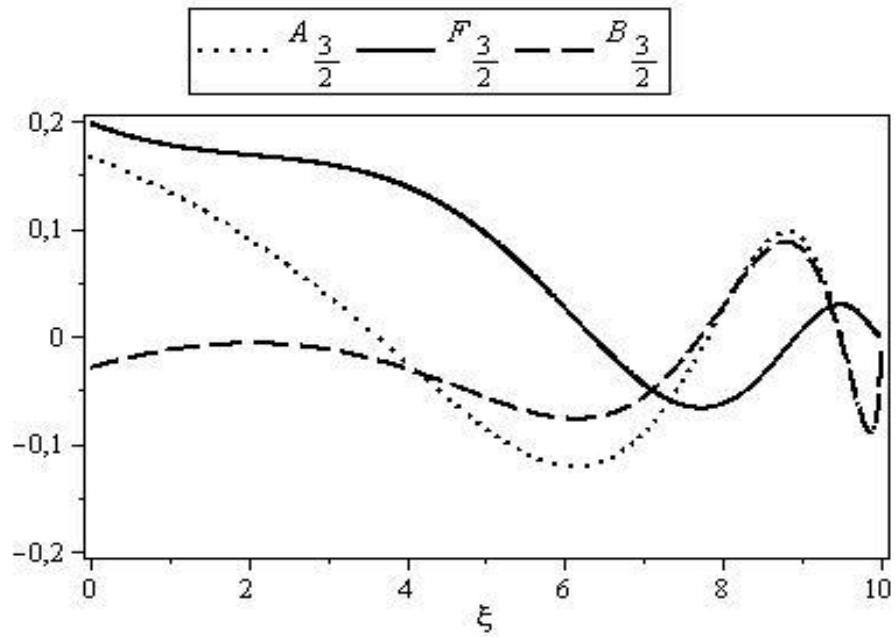
Bu kısımda incelenecek salınım grafikleri küresel ($\alpha = n + 1/2$), $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ formdadır.



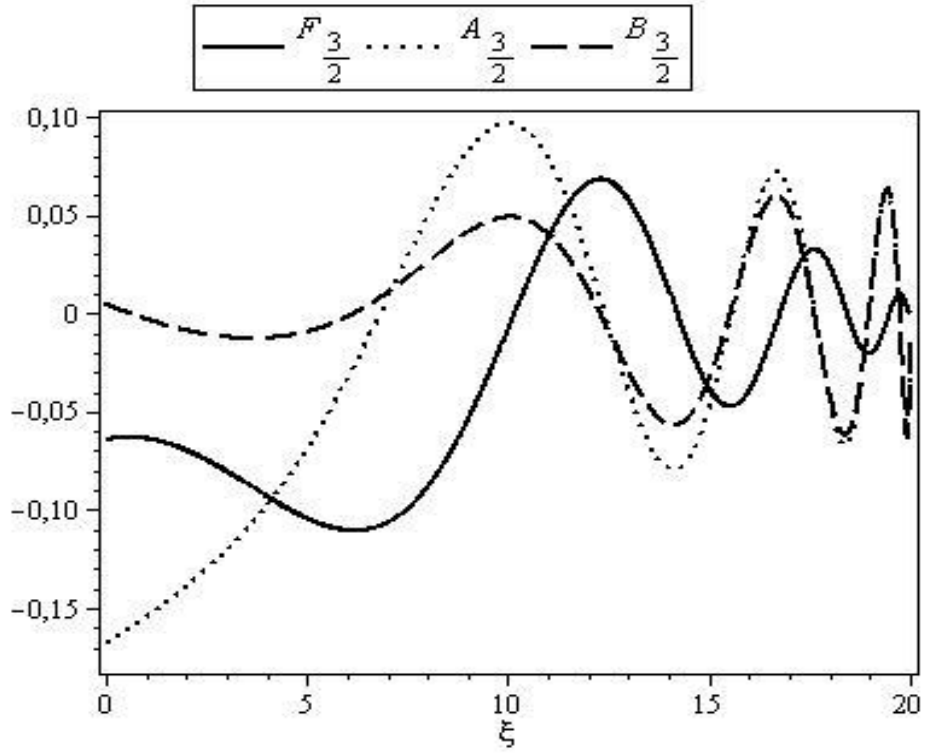
Şekil 5.57. Modal genliklerin $0 \leq \xi \leq \tau$ aralığında değişimi. $\tau = 20$ sabit, ξ boyutsuz eksenel koordinat, $n = 0$.



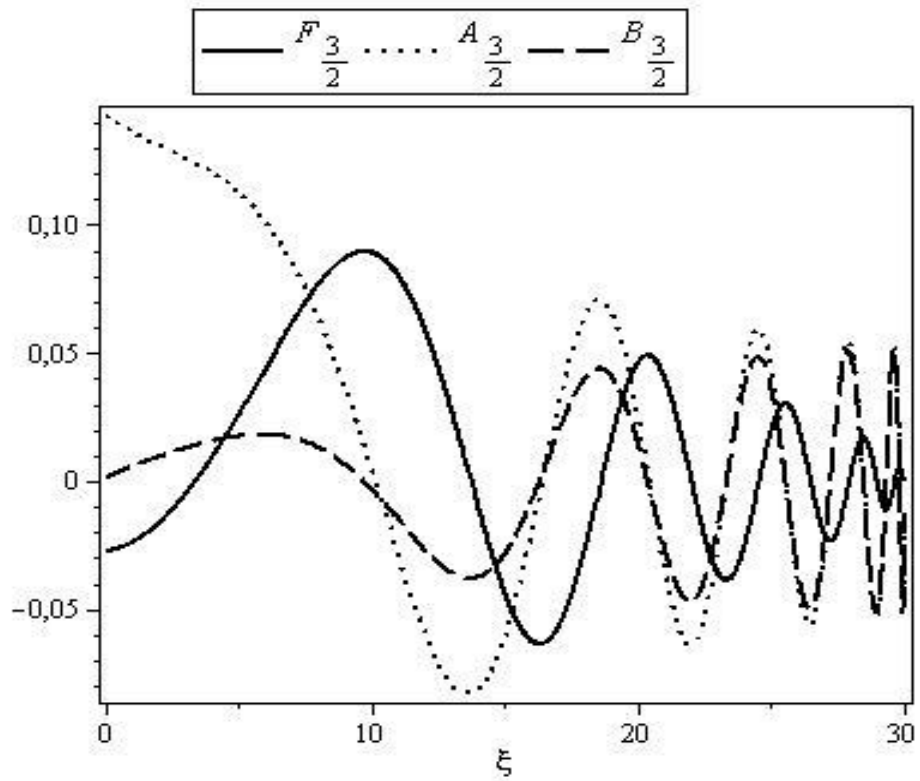
Şekil 5.58. Modal genliklerin $0 \leq \xi \leq \tau$ aralığında değişimi. $\tau = 30$ sabit, ξ boyutsuz eksene koordinat, $n = 0$.



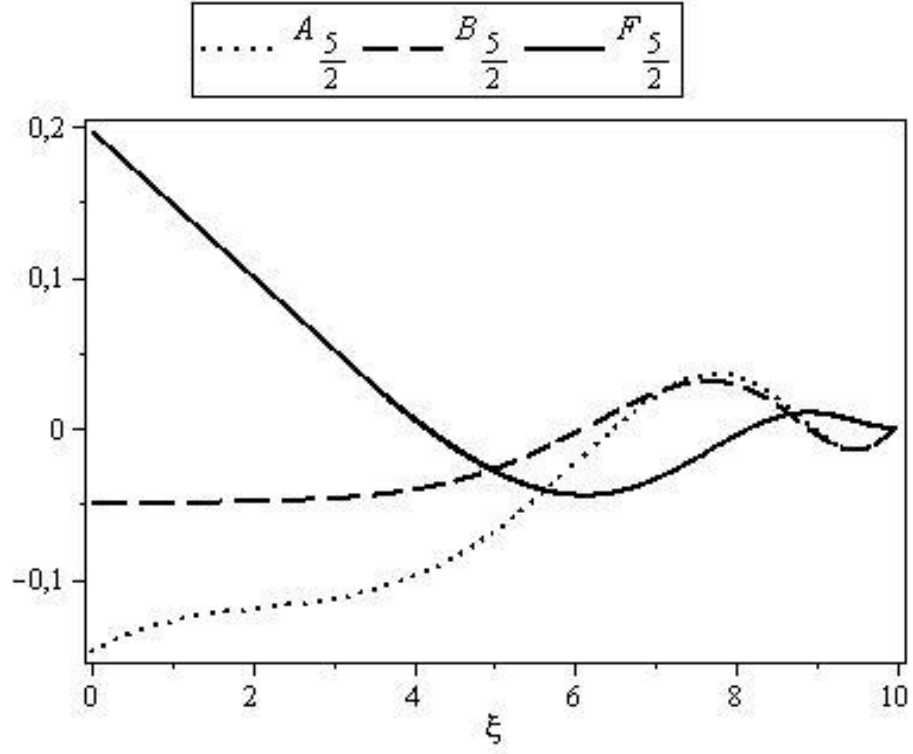
Şekil 5.59. Modal genliklerin $0 \leq \xi \leq \tau$ aralığında değişimi. $\tau = 10$ sabit, ξ boyutsuz eksene koordinat, $n = 1$.



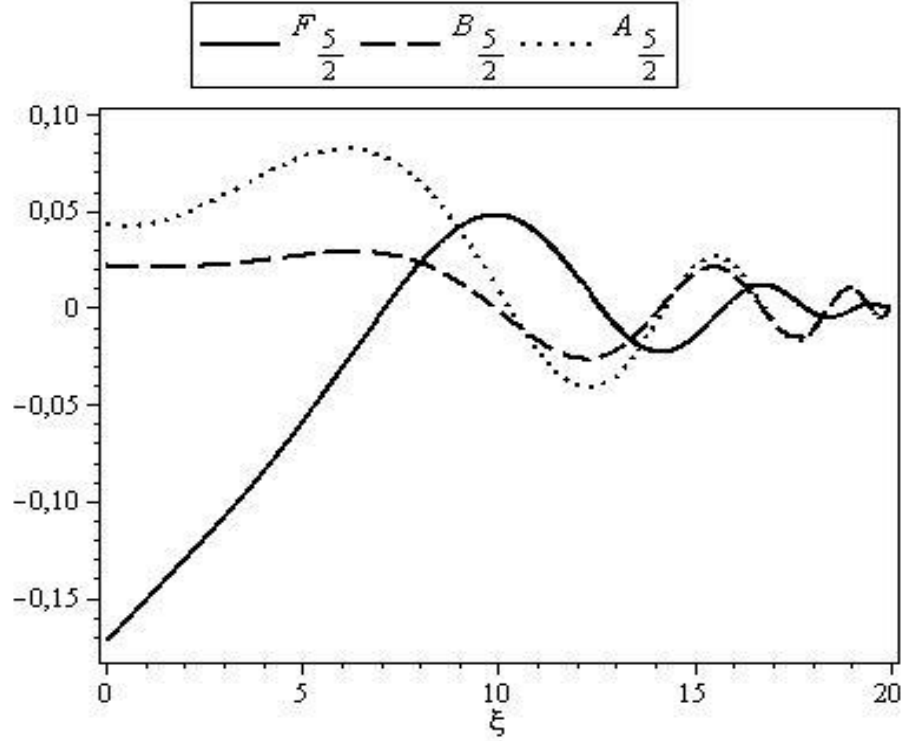
Şekil 5.60. Modal genliklerin $0 \leq \xi \leq \tau$ aralığında değişimi. $\tau = 20$ sabit, ξ boyutsuz eksenel koordinat, $n = 1$.



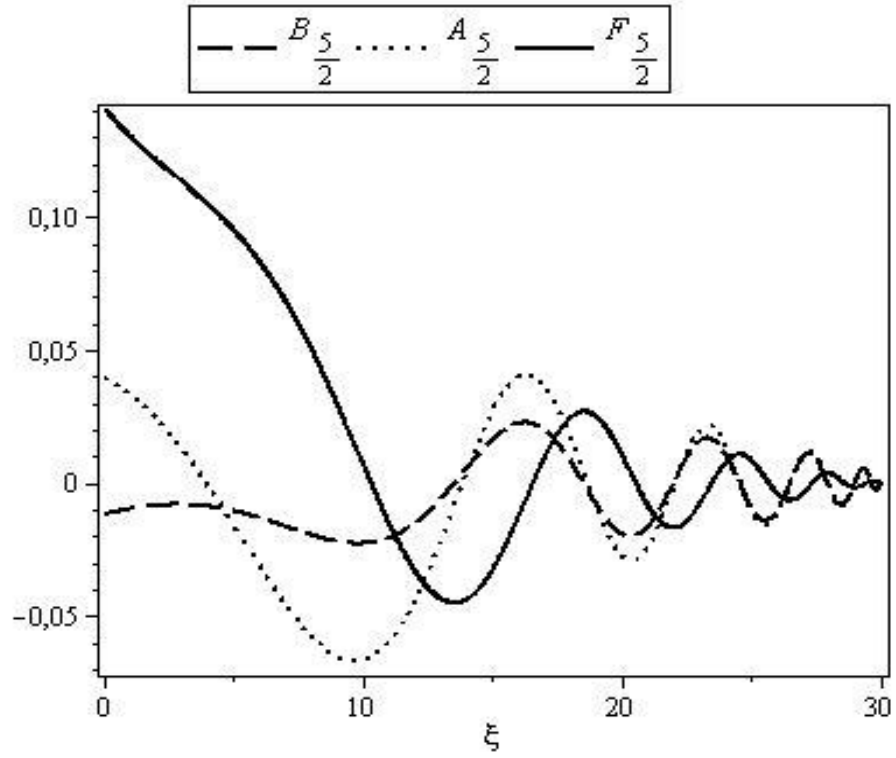
Şekil 5.61. Modal genliklerin $0 \leq \xi \leq \tau$ aralığında değişimi. $\tau = 30$ sabit, ξ boyutsuz eksenel koordinat, $n = 1$.



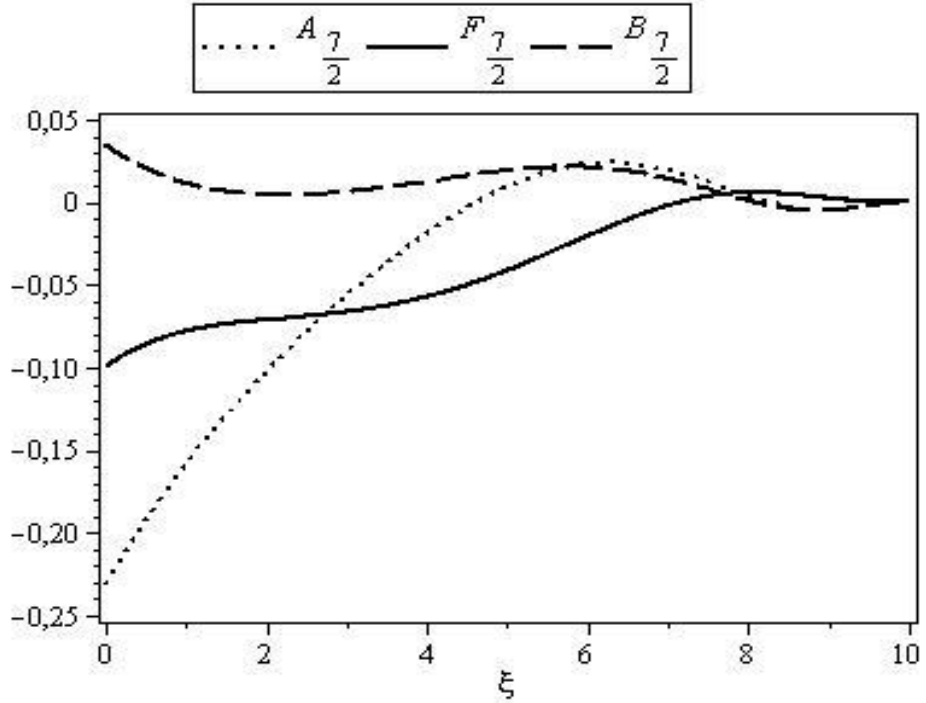
Şekil 5.62. Modal genliklerin $0 \leq \xi \leq \tau$ aralığında değişimi. $\tau = 10$ sabit, ξ boyutsuz eksenel koordinat, $n = 2$.



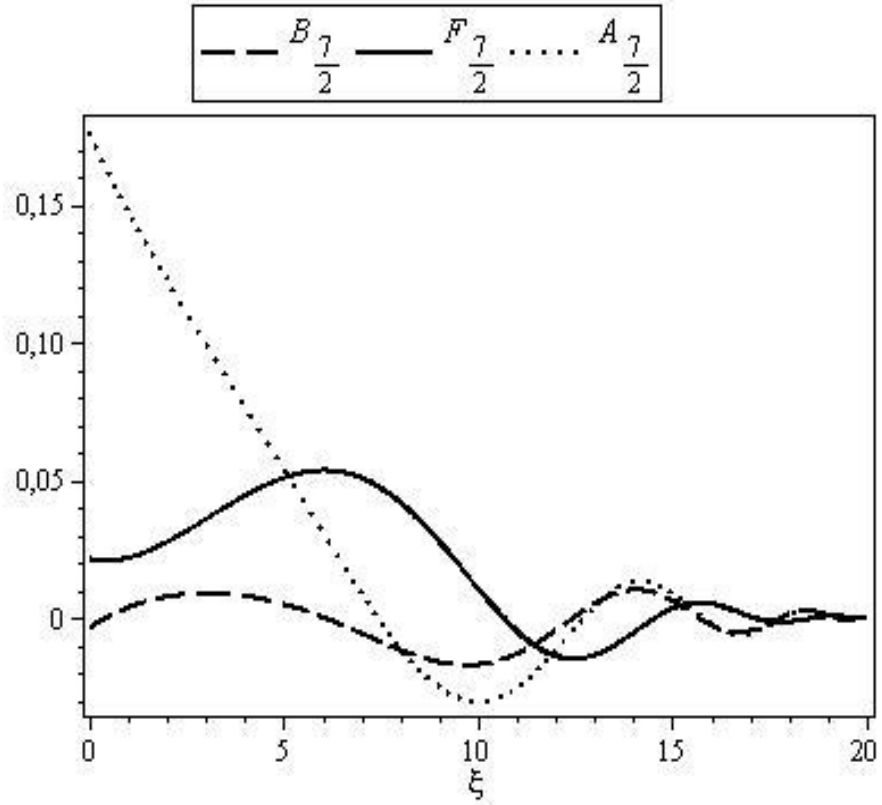
Şekil 5.63. Modal genliklerin $0 \leq \xi \leq \tau$ aralığında değişimi. $\tau = 20$ sabit, ξ boyutsuz eksenel koordinat, $n = 2$.



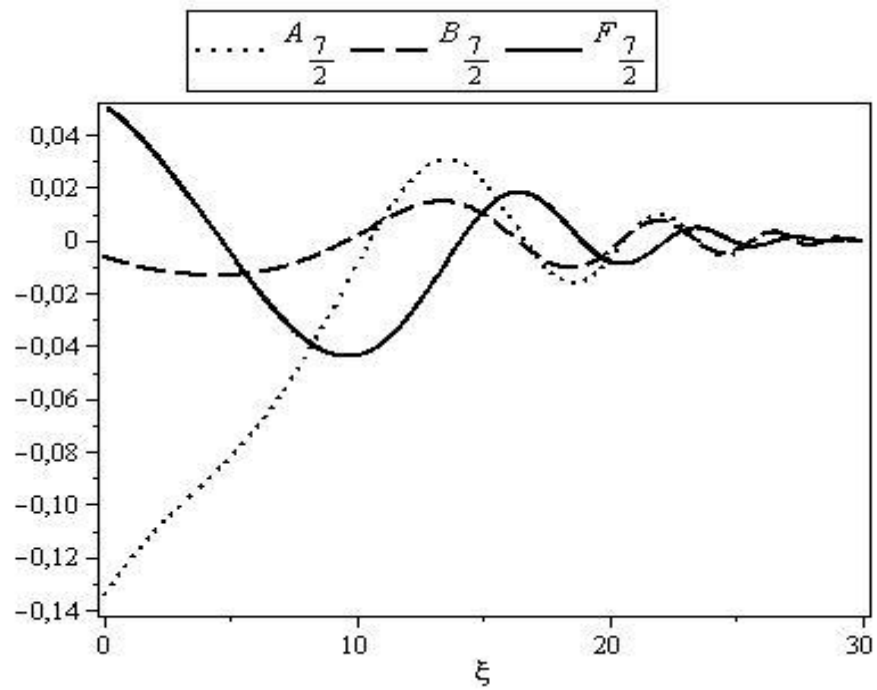
Şekil 5.64. Modal genliklerin $0 \leq \xi \leq \tau$ aralığında değişimi. $\tau = 30$ sabit, ξ boyutsuz aksene koordinat, $n = 2$.



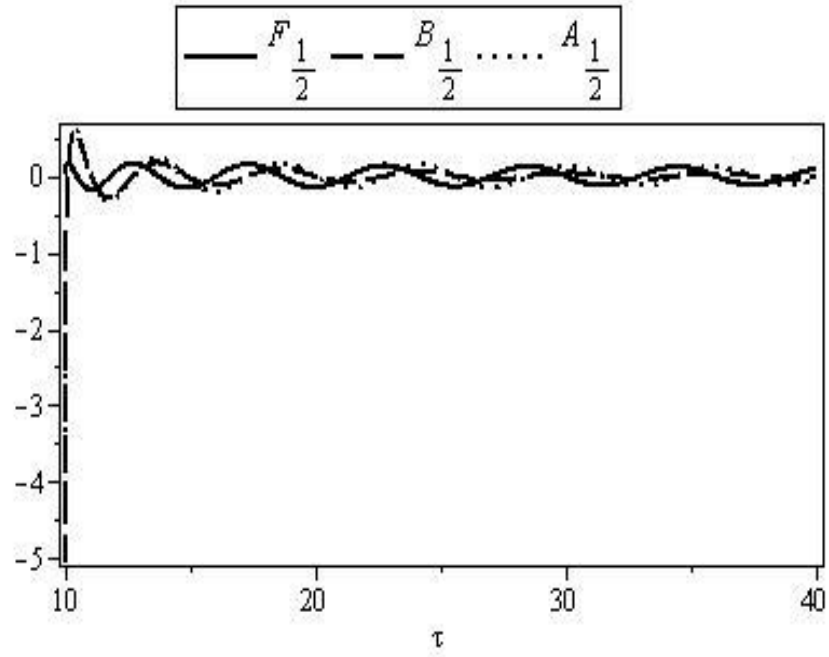
Şekil 5.65. Modal genliklerin $0 \leq \xi \leq \tau$ aralığında değişimi. $\tau = 10$ sabit, ξ boyutsuz aksene koordinat, $n = 3$.



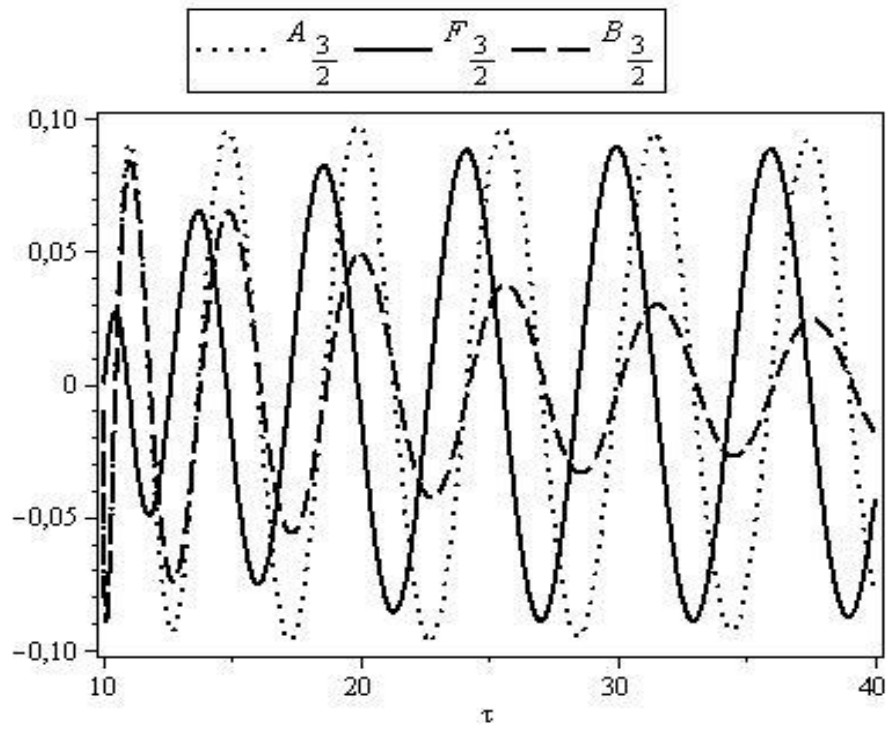
Şekil 5.66. Modal genliklerin $0 \leq \xi \leq \tau$ aralığında değişimi. $\tau = 20$ sabit, ξ boyutsuz aksenal koordinat, $n = 3$.



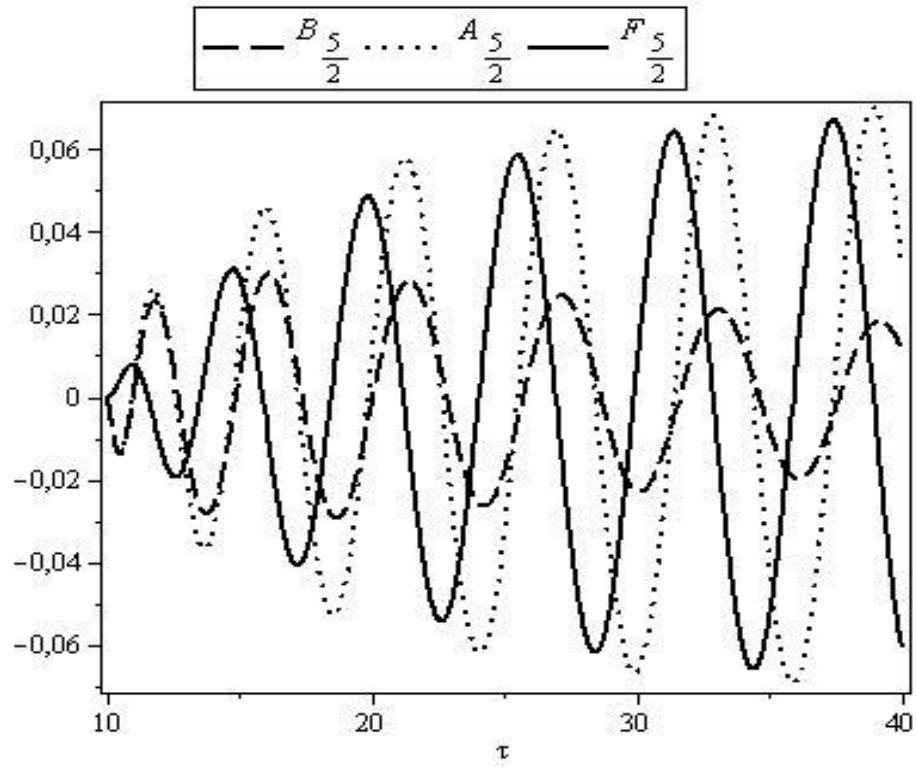
Şekil 5.67. Modal genliklerin $0 \leq \xi \leq \tau$ aralığında değişimi. $\tau = 30$ sabit, ξ boyutsuz aksenal koordinat, $n = 3$.



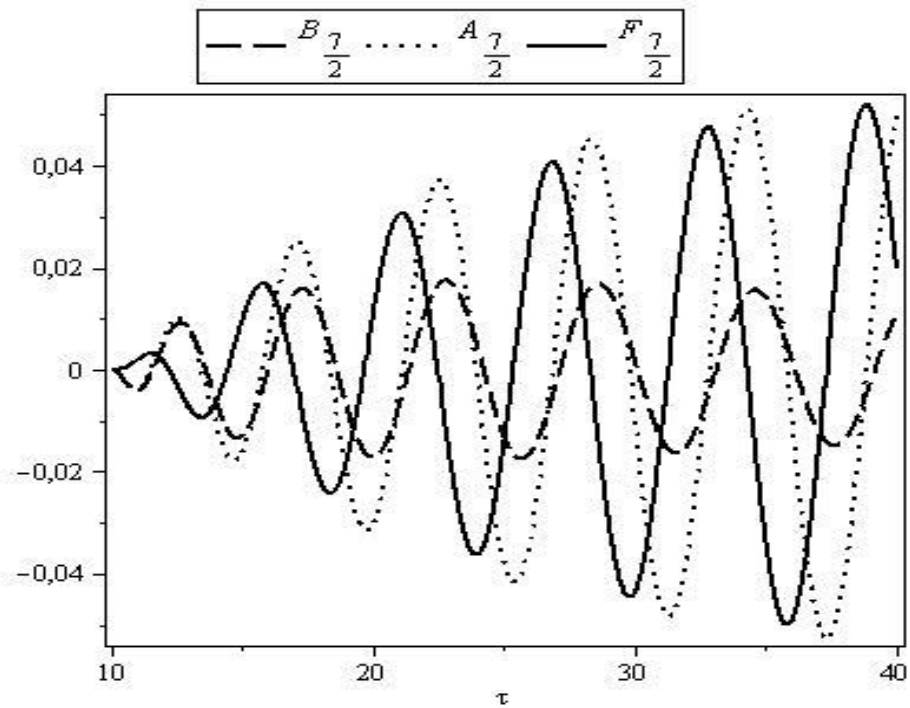
Şekil 5.68. Modal genliklerin $10 \leq \tau \leq 40$ zaman aralığında değişimi. $\xi = 10$ sabit, $n = 0$.



Şekil 5.69. Modal genliklerin $10 \leq \tau \leq 40$ zaman aralığında değişimi. $\xi = 10$ sabit, $n = 1$.

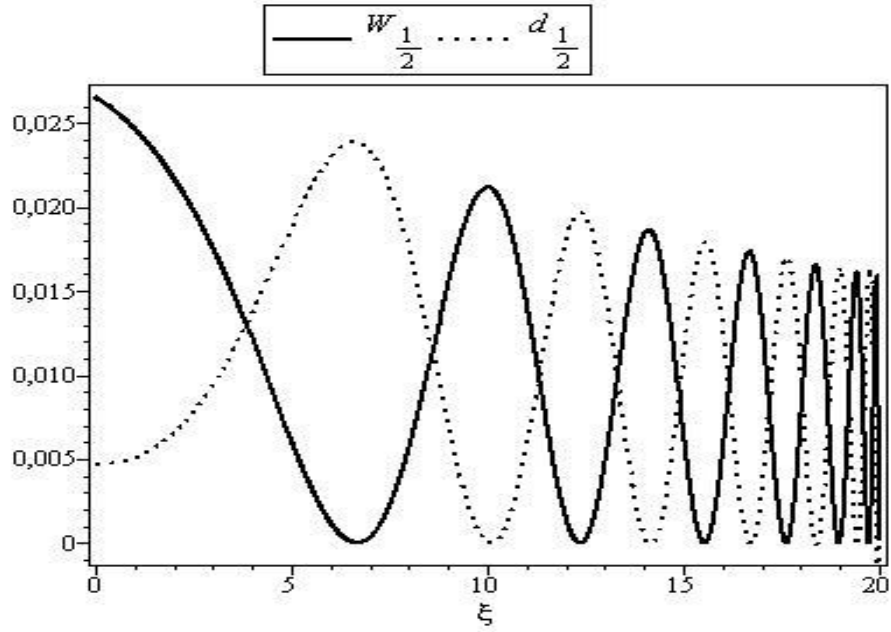


Şekil 5.70. Modal genliklerin $10 \leq \tau \leq 40$ zaman aralığında değişimi. $\xi = 10$ sabit, $n = 2$.

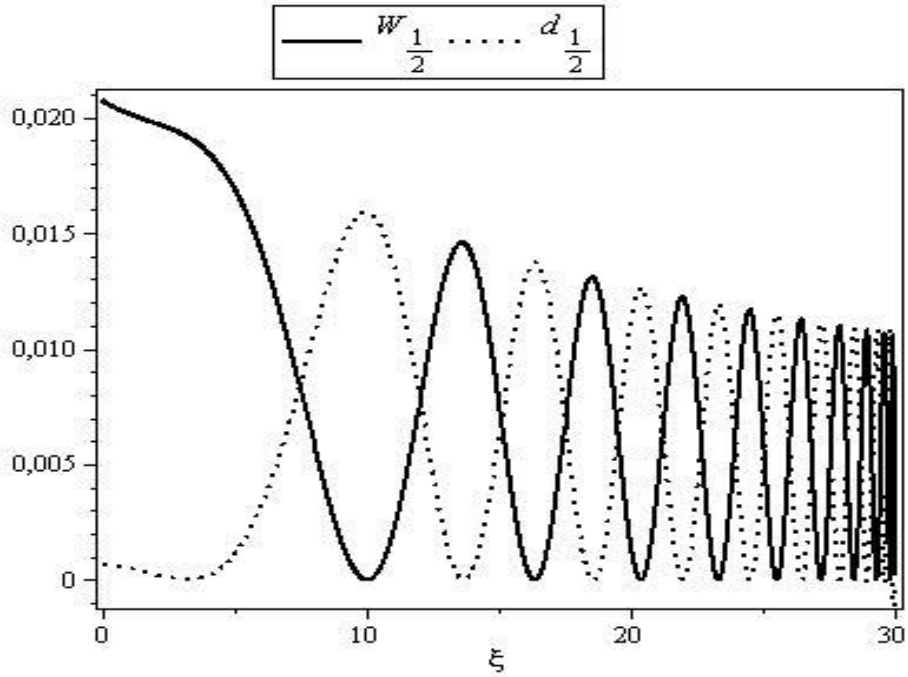


Şekil 5.71. Modal genliklerin $10 \leq \tau \leq 40$ zaman aralığında değişimi. $\xi = 10$ sabit, $n = 3$.

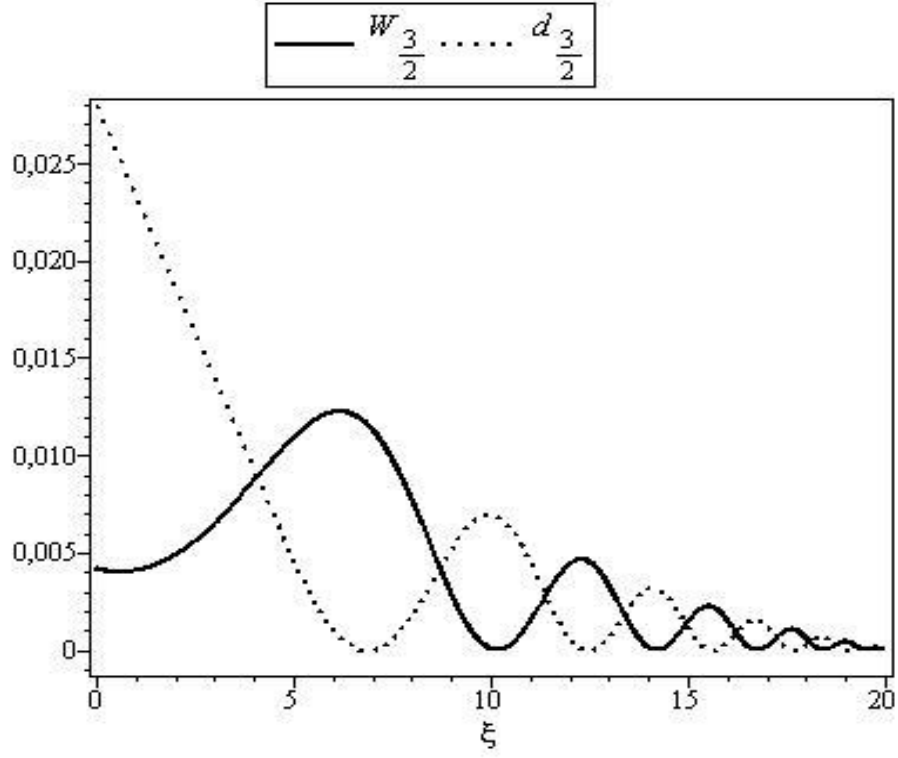
Aşağıda incelenen grafiklerde ise enerji ve enerjideki değişim-artım (surplus of energy) sergilenmektedir. α 'nın değişen yarı-tamsayı değerleri için, W_α : **Enerji** ve d_α : **Enerjideki değişim** olmak üzere,



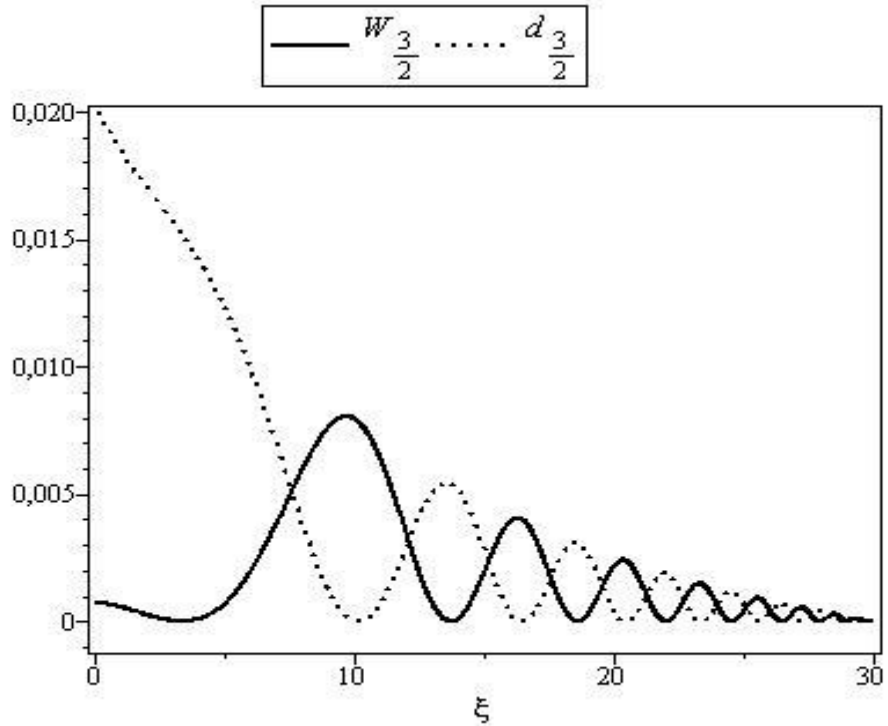
Şekil 5.72. $W_{1/2}$ ve $d_{1/2}$ 'in $0 \leq \xi \leq 20$ aralığındaki değişimi. $\tau = 20$ sabit, ξ boyutsuz aksenal koordinat, $n = 0$.



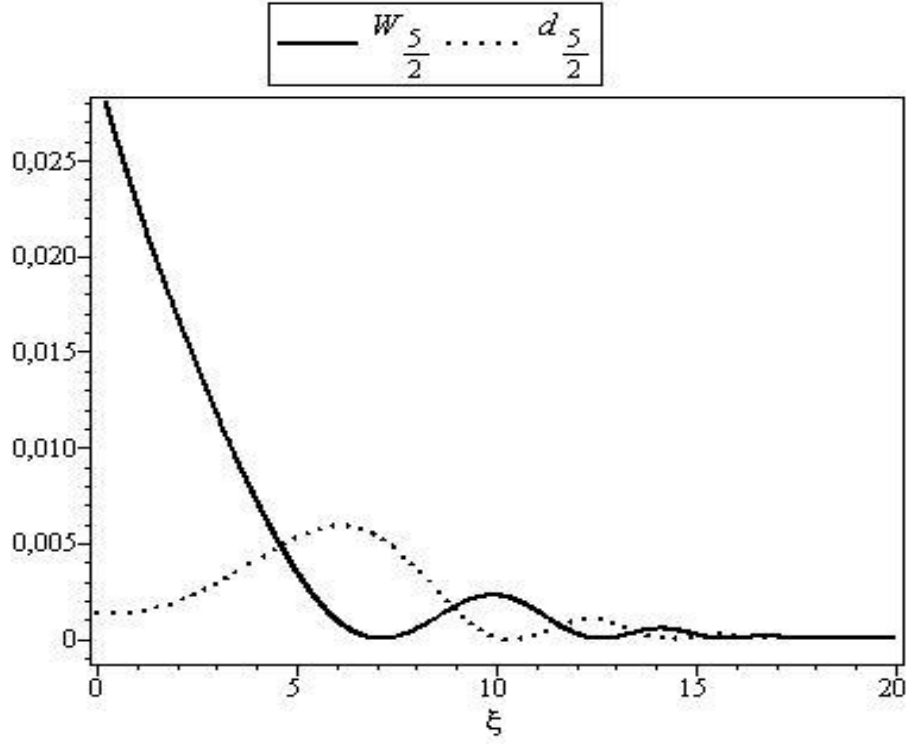
Şekil 5.73. $W_{1/2}$ ve $d_{1/2}$ 'in $0 \leq \xi \leq 30$ aralığındaki değişimi. $\tau = 30$ sabit, ξ boyutsuz aksenal koordinat, $n = 0$.



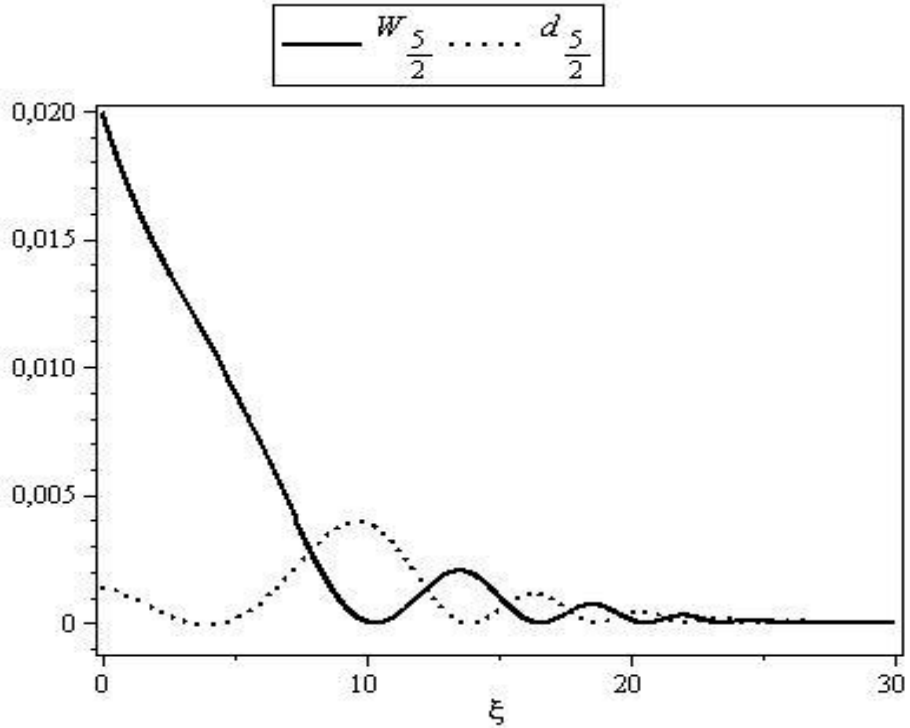
Şekil 5.74. $W_{3/2}$ ve $d_{3/2}$ 'in $0 \leq \xi \leq 20$ aralığındaki değişimi. $\tau = 20$ sabit, ξ boyutsuz eksenel koordinat, $n = 1$.



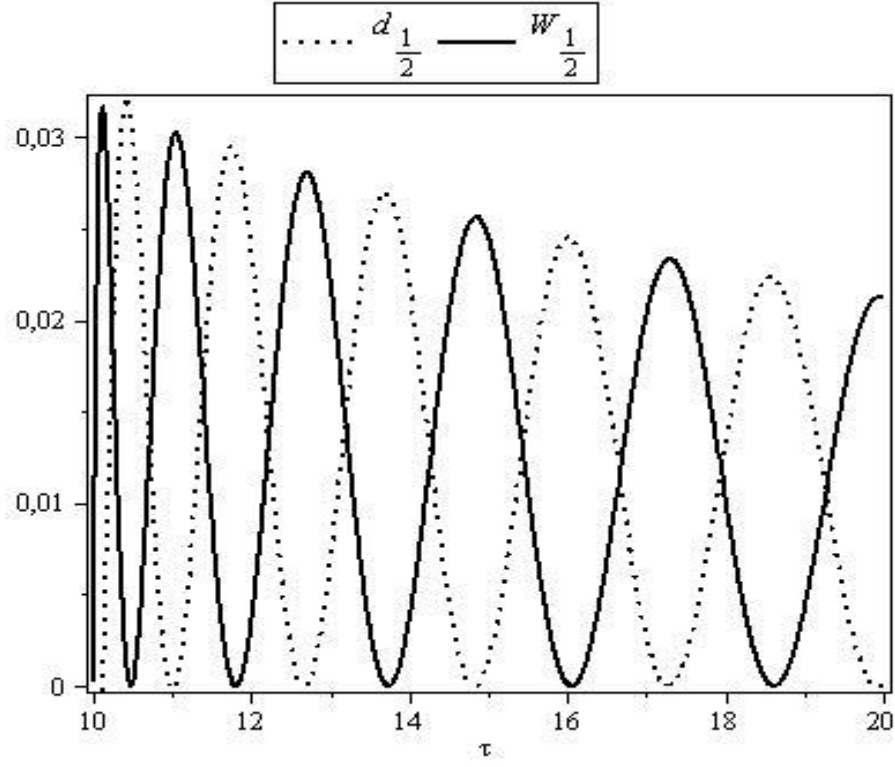
Şekil 5.75. $W_{3/2}$ ve $d_{3/2}$ 'in $0 \leq \xi \leq 30$ aralığındaki değişimi. $\tau = 30$ sabit, ξ boyutsuz eksenel koordinat, $n = 1$.



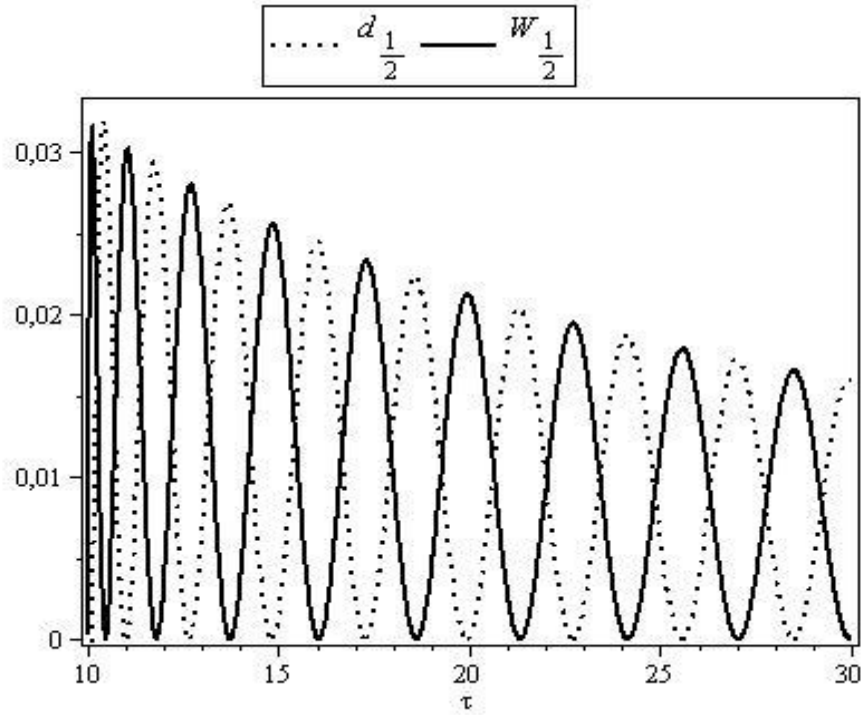
Şekil 5.76. $W_{5/2}$ ve $d_{5/2}$ 'in $0 \leq \xi \leq 20$ aralığındaki değişimi. $\tau = 20$ sabit, ξ boyutsuz aksene koordinat, $n = 2$.



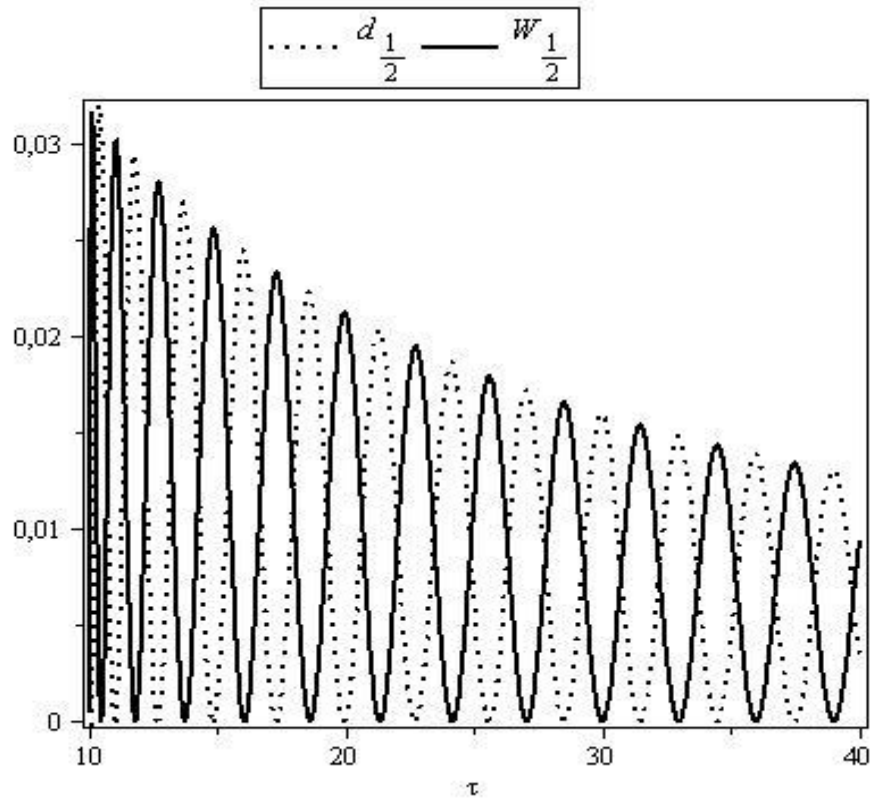
Şekil 5.77. $W_{5/2}$ ve $d_{5/2}$ 'in $0 \leq \xi \leq 30$ aralığındaki değişimi. $\tau = 30$ sabit, ξ boyutsuz aksene koordinat, $n = 2$.



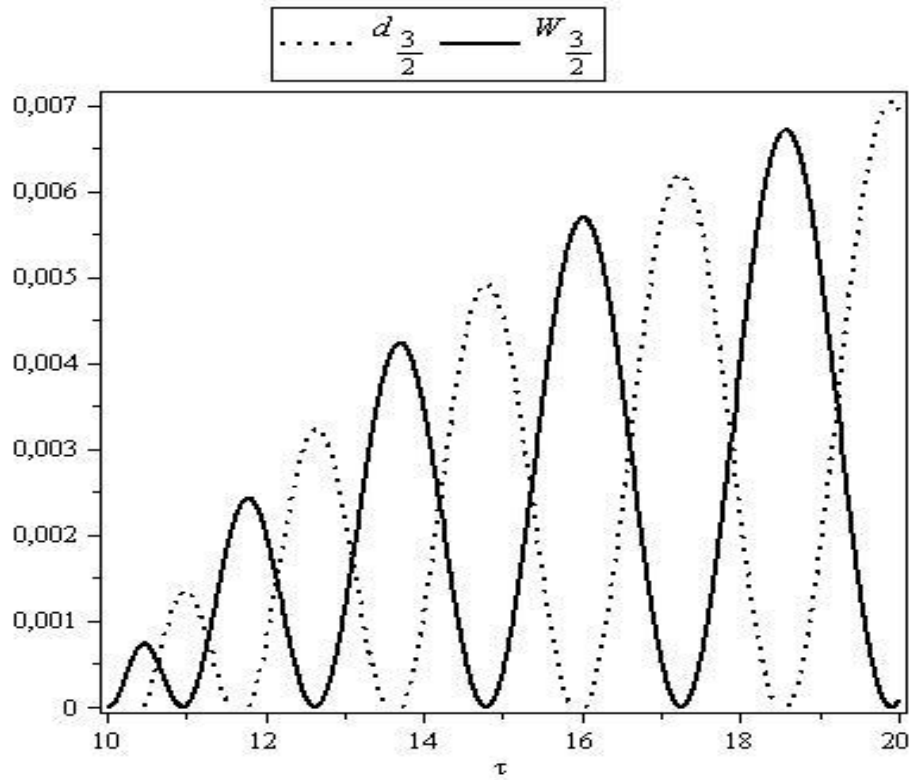
Şekil 5.78. $W_{1/2}$ ve $d_{1/2}$ 'ün $10 \leq \tau \leq 20$ zaman aralığındaki değişimi. $\xi = 10$ sabit, $n = 0$.



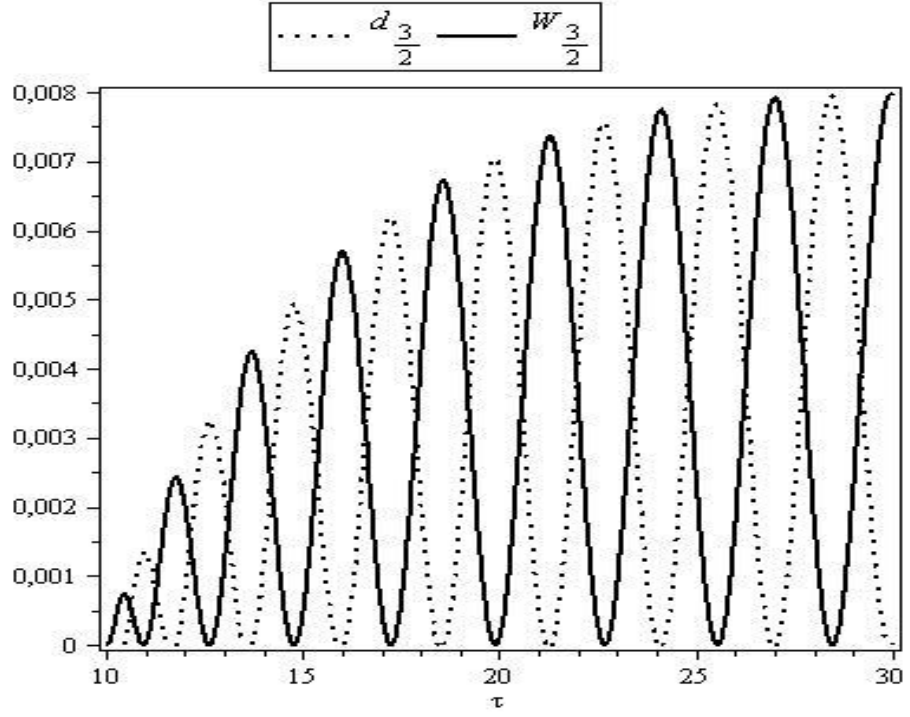
Şekil 5.79. $W_{1/2}$ ve $d_{1/2}$ 'ün $10 \leq \tau \leq 30$ zaman aralığındaki değişimi. $\xi = 10$ sabit, $n = 0$.



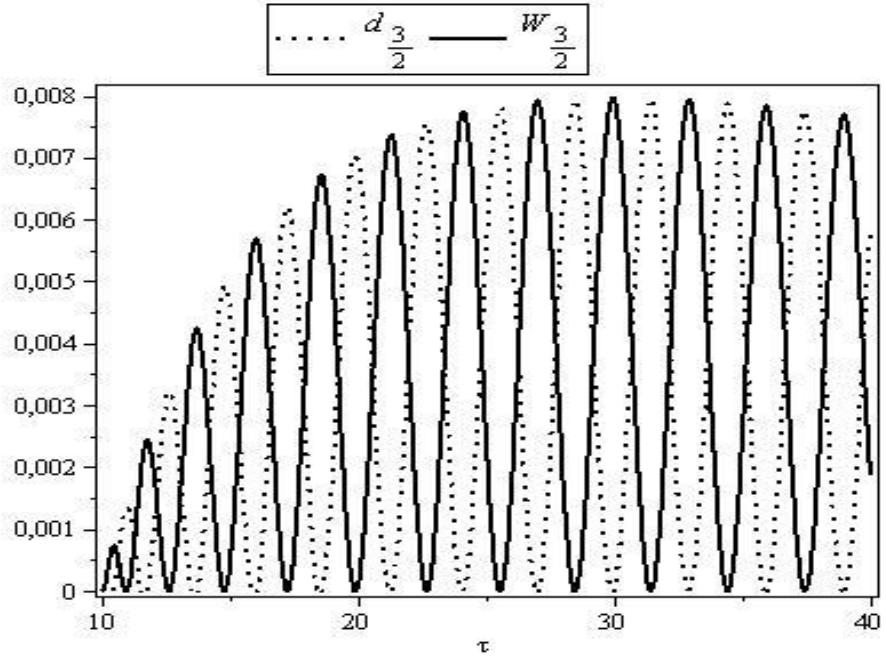
Şekil 5.80. $W_{1/2}$ ve $d_{1/2}$ 'ün $10 \leq \tau \leq 40$ zaman aralığındaki değişimi. $\xi = 10$ sabit, $n = 0$.



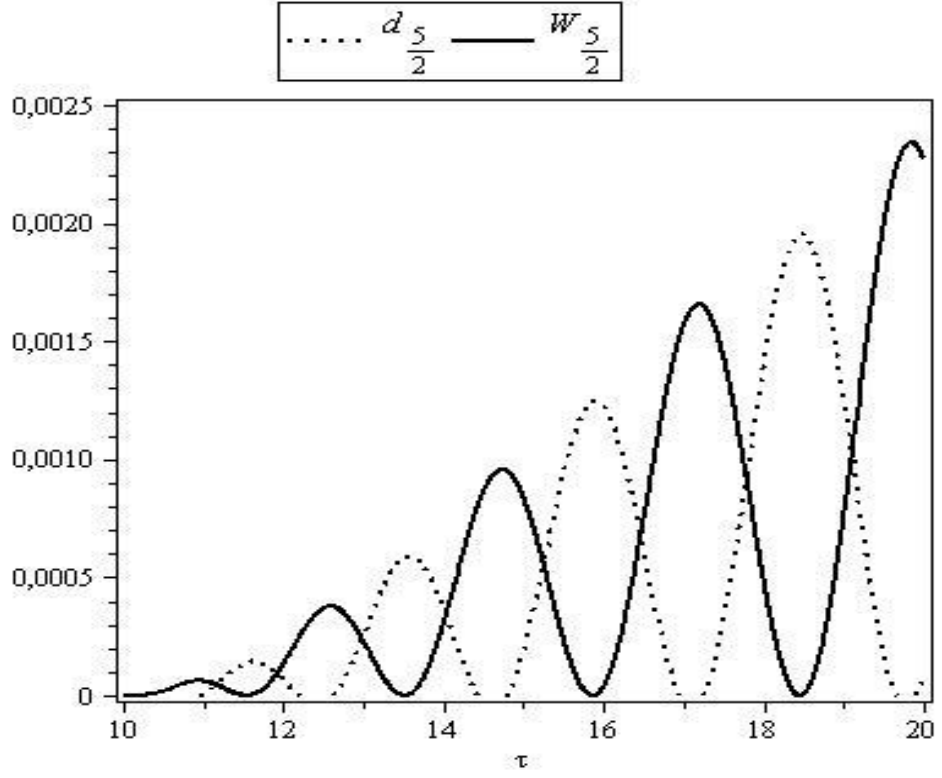
Şekil 5.81. $W_{3/2}$ ve $d_{3/2}$ 'ün $10 \leq \tau \leq 20$ zaman aralığındaki değişimi. $\xi = 10$ sabit, $n = 1$.



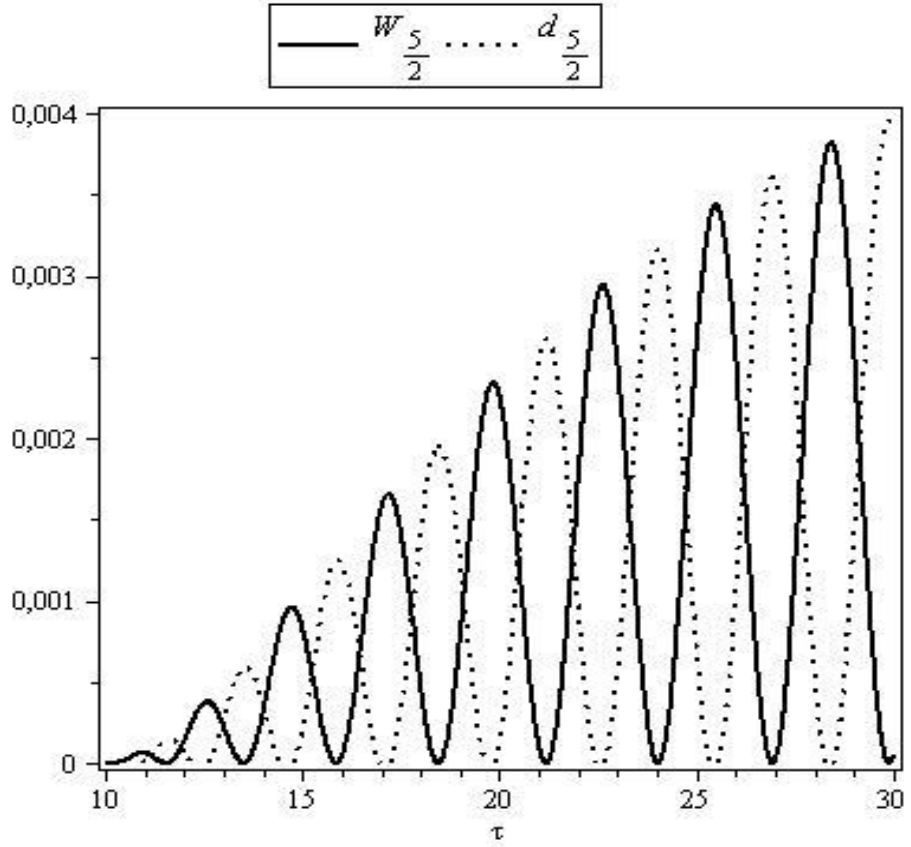
Şekil 5.82. $W_{3/2}$ ve $d_{3/2}$ 'ün $10 \leq \tau \leq 30$ zaman aralığındaki değişimi. $\xi = 10$ sabit, $n = 1$.



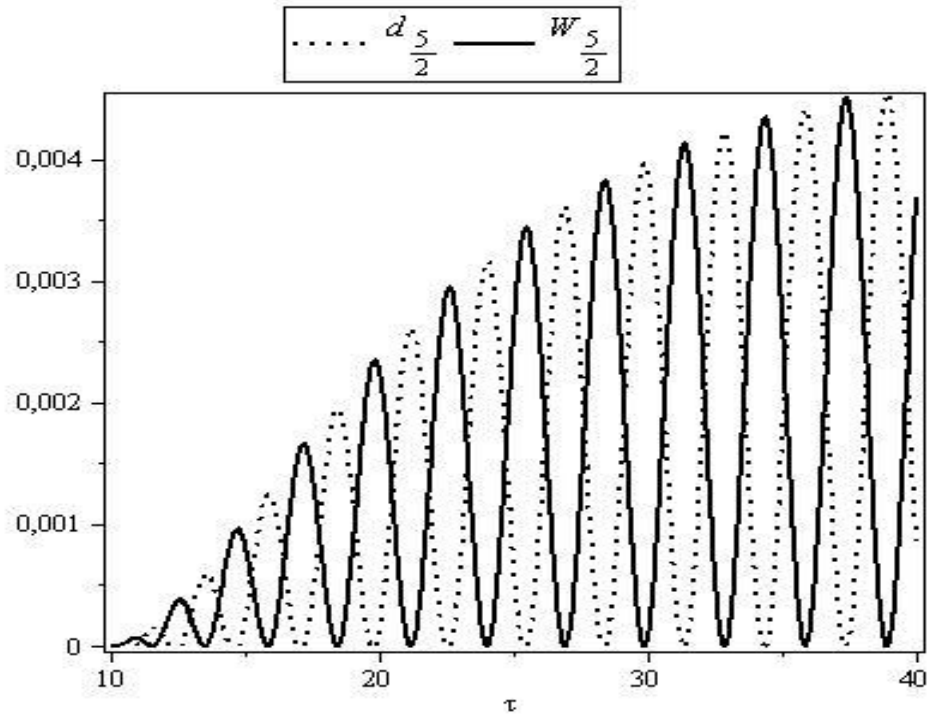
Şekil 5.83. $W_{3/2}$ ve $d_{3/2}$ 'ün $10 \leq \tau \leq 40$ zaman aralığındaki değişimi. $\xi = 10$ sabit, $n = 1$.



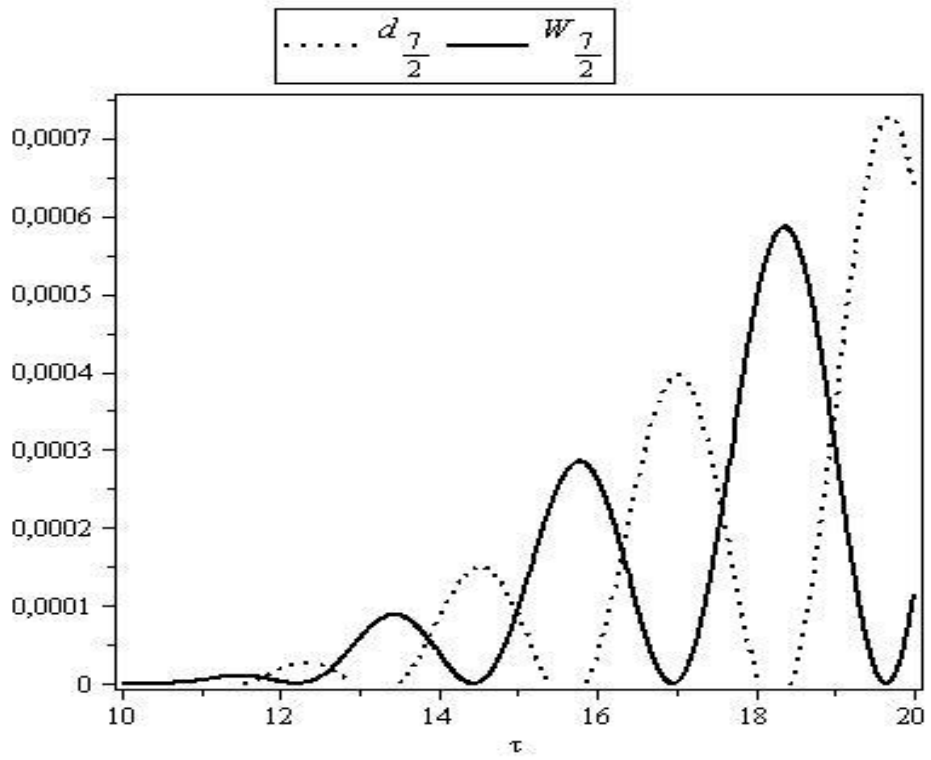
Şekil 5.84. $W_{5/2}$ ve $d_{5/2}$ 'ün $10 \leq \tau \leq 20$ zaman aralığındaki değişimi. $\xi = 10$ sabit, $n = 2$.



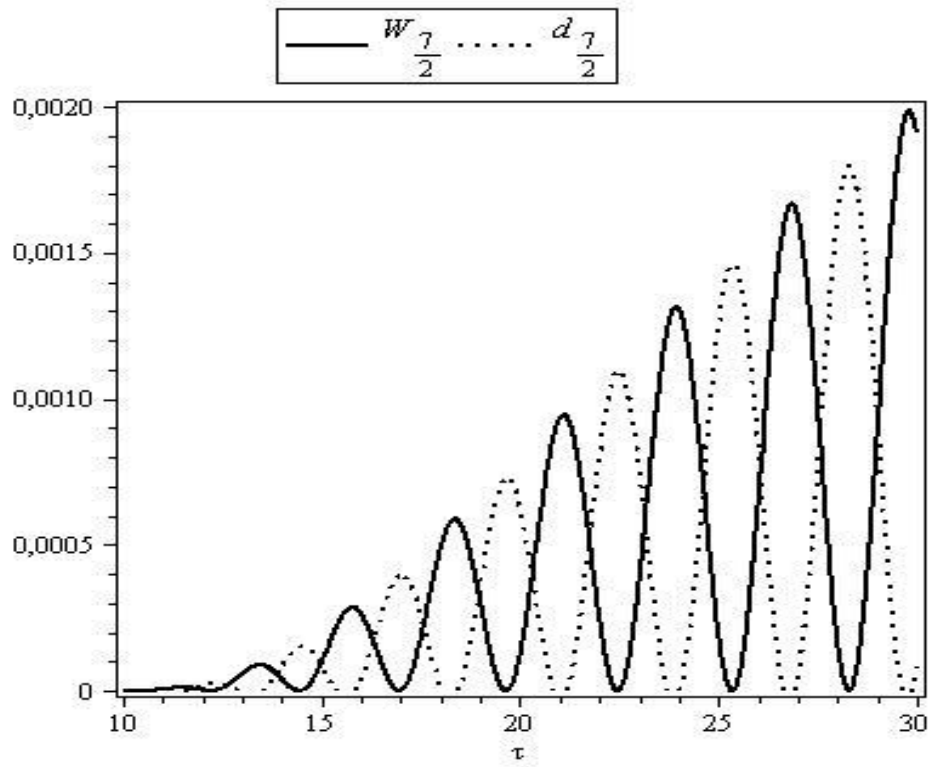
Şekil 5.85. $W_{5/2}$ ve $d_{5/2}$ 'ün $10 \leq \tau \leq 30$ zaman aralığındaki değişimi. $\xi = 10$ sabit, $n = 2$.



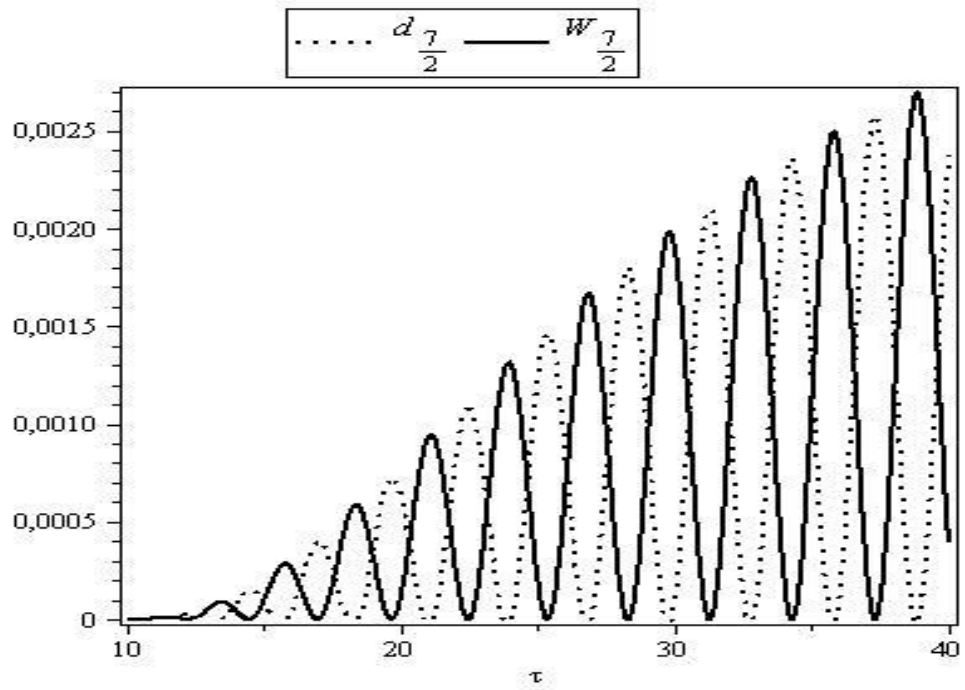
Şekil 5.86. $W_{5/2}$ ve $d_{5/2}$ 'ün $10 \leq \tau \leq 40$ zaman aralığındaki değişimi. $\xi = 10$ sabit, $n = 2$.



Şekil 5.87. $W_{7/2}$ ve $d_{7/2}$ 'ün $10 \leq \tau \leq 20$ zaman aralığındaki değişimi. $\xi = 10$ sabit, $n = 3$.

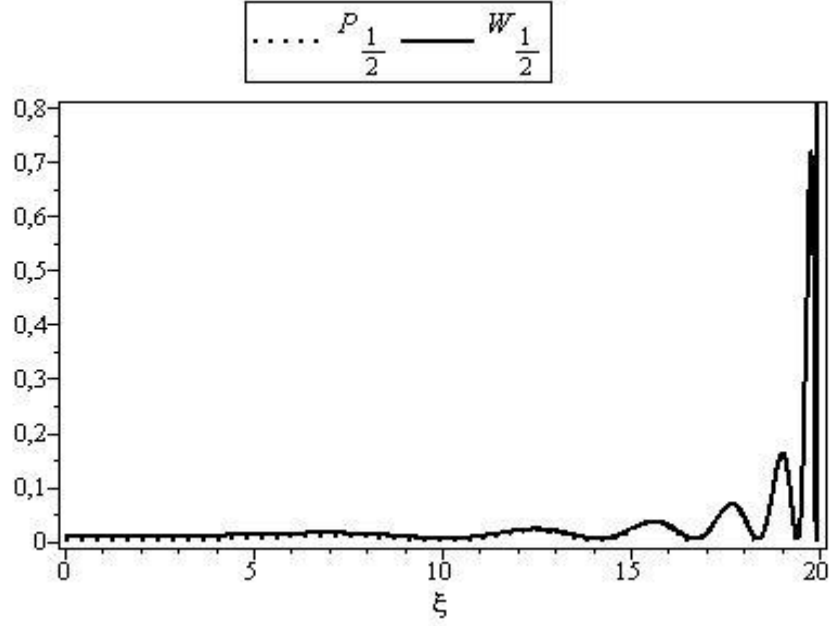


Şekil 5.88. $W_{\gamma/2}$ ve $d_{\gamma/2}$ 'ün $10 \leq \tau \leq 30$ zaman aralığındaki değişimi. $\xi = 10$ sabit, $n = 3$.

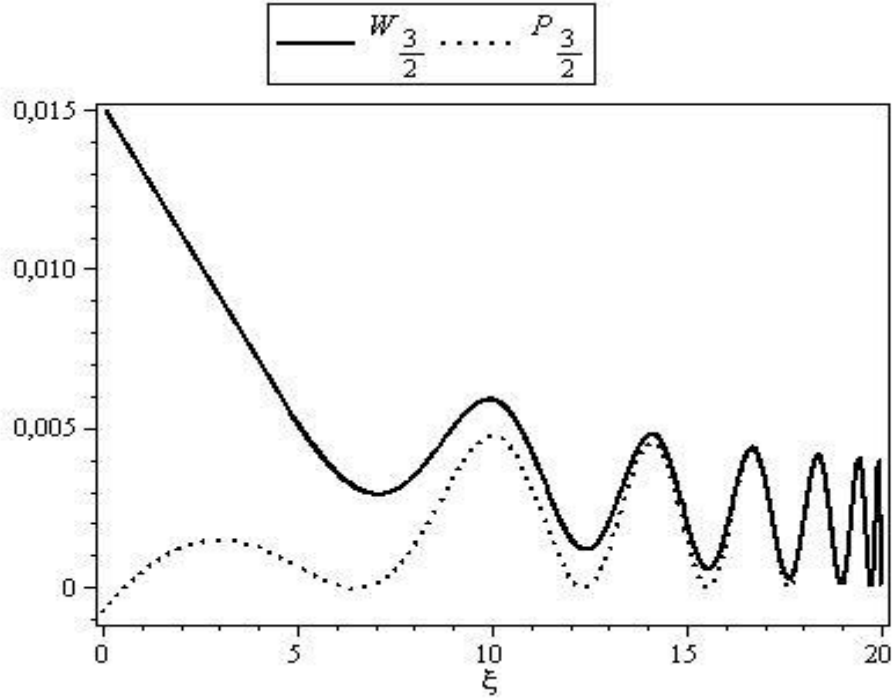


Şekil 5.89. $W_{\gamma/2}$ ve $d_{\gamma/2}$ 'ün $10 \leq \tau \leq 40$ zaman aralığındaki değişimi. $\xi = 10$ sabit, $n = 3$.

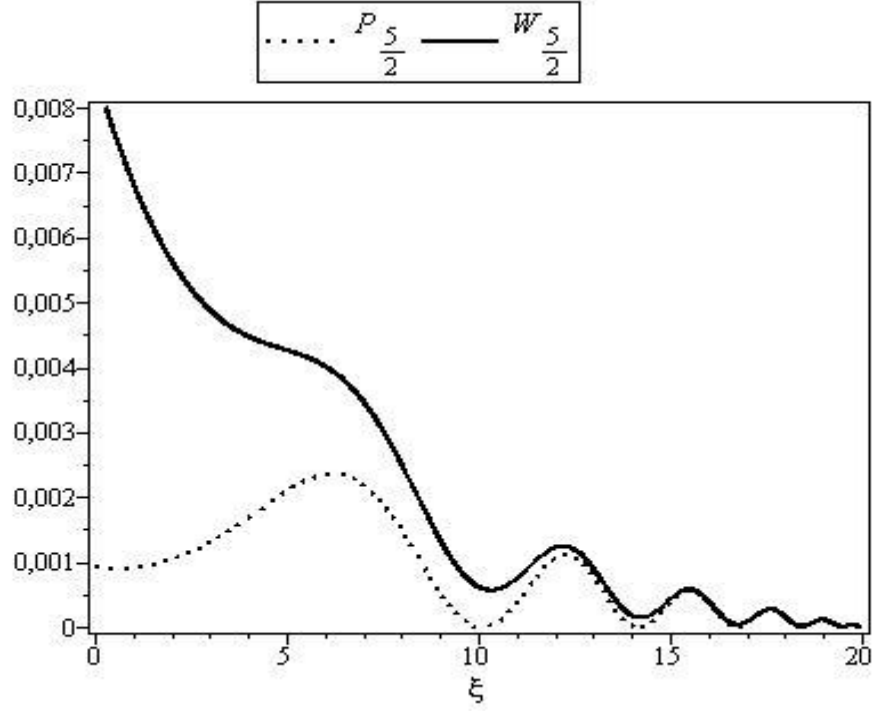
Aşağıdaki grafiklerde Enerji ve Poynting vektörünün grafikleri bir arada verilmiştir. Grafikler α 'nın değişen değerleri içindir.



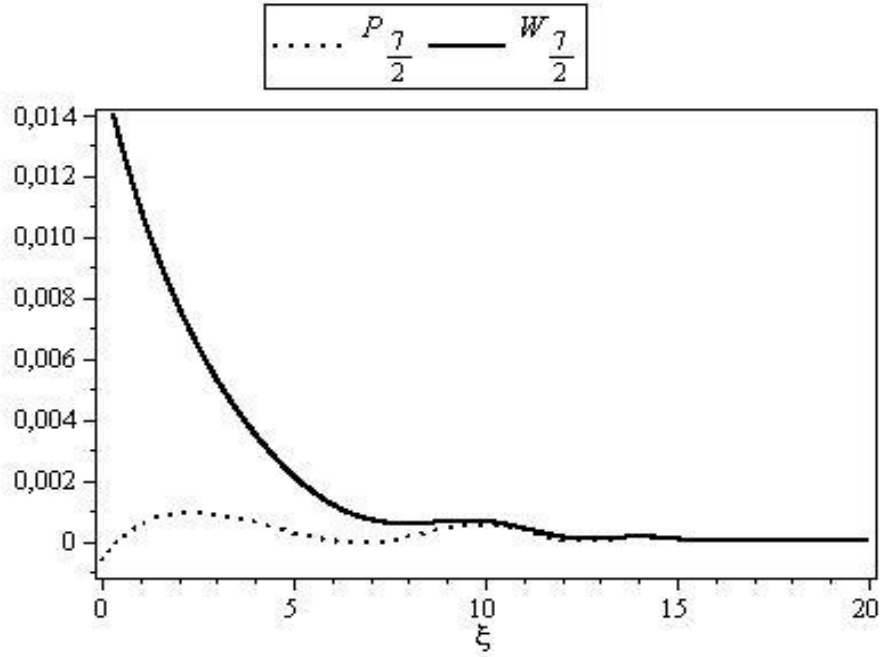
Şekil 5.90. $W_{1/2}$ ve $P_{1/2}$ 'ün $0 \leq \xi \leq \tau$ aralığındaki değişimi. $\tau = 20$ sabit, ξ boyutsuz aksenal koordinat, $n = 0$.



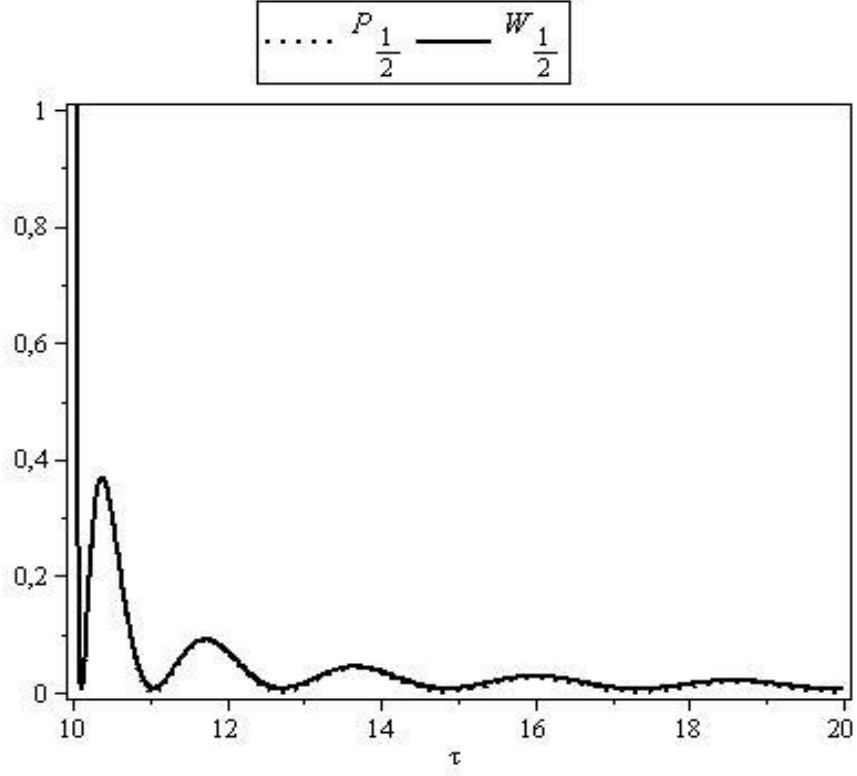
Şekil 5.91. $W_{3/2}$ ve $P_{3/2}$ 'ün $0 \leq \xi \leq \tau$ aralığındaki değişimi. $\tau = 20$ sabit, ξ boyutsuz aksenal koordinat, $n = 1$.



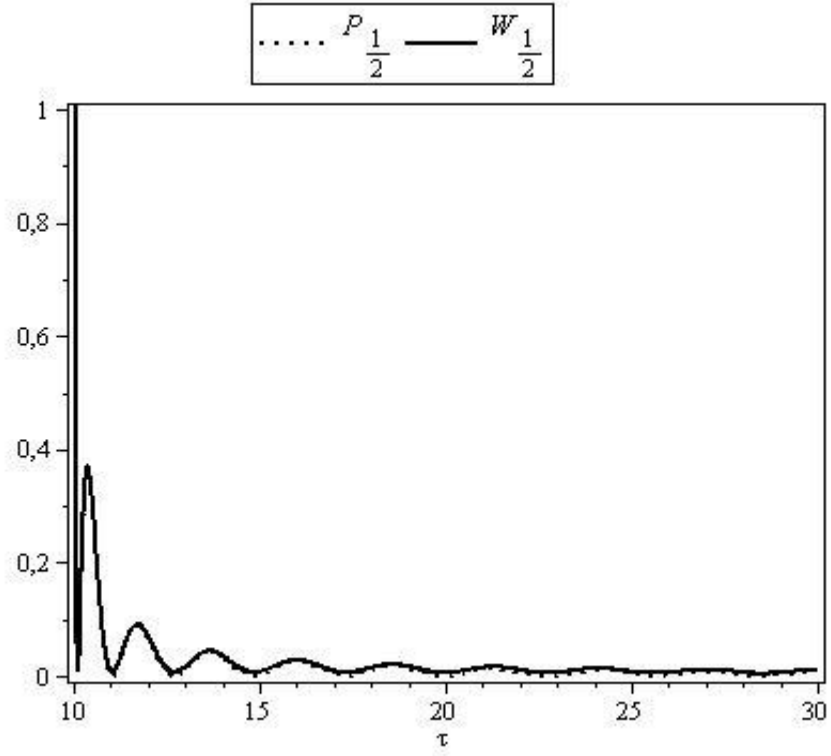
Şekil 5.92. $W_{5/2}$ ve $P_{5/2}$ 'ün $0 \leq \xi \leq \tau$ aralığındaki değişimi. $\tau = 20$ sabit, ξ boyutsuz aksene koordinat, $n = 2$.



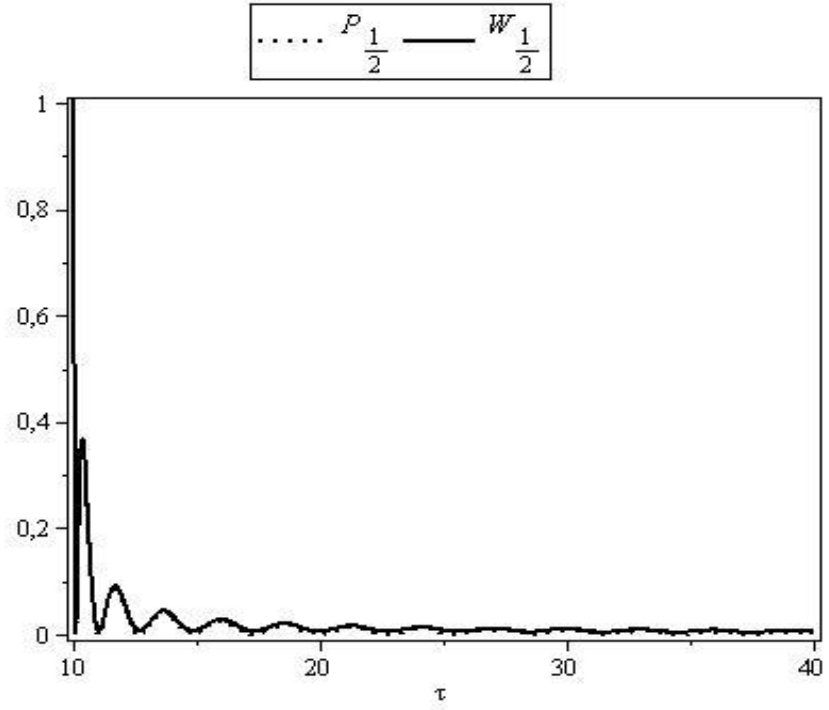
Şekil 5.93. $W_{7/2}$ ve $P_{7/2}$ 'ün $0 \leq \xi \leq \tau$ aralığındaki değişimi. $\tau = 20$ sabit, ξ boyutsuz aksene koordinat, $n = 3$.



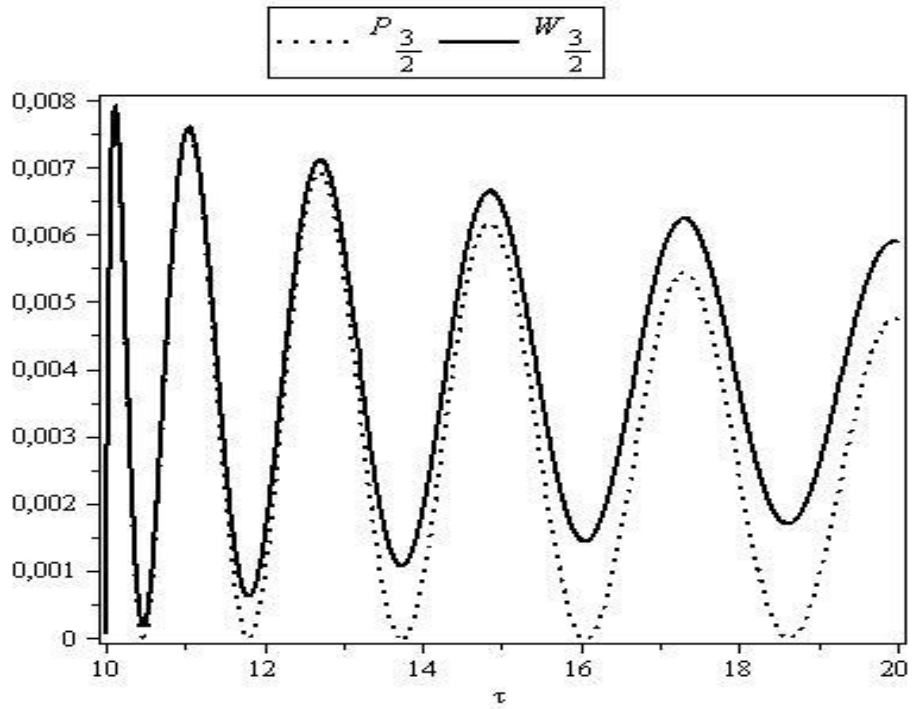
Şekil 5.94. $W_{1/2}$ ve $P_{1/2}$ 'ün $10 \leq \tau \leq 20$ zaman aralığındaki değişimi. $\xi = 10$ sabit, $n = 0$.



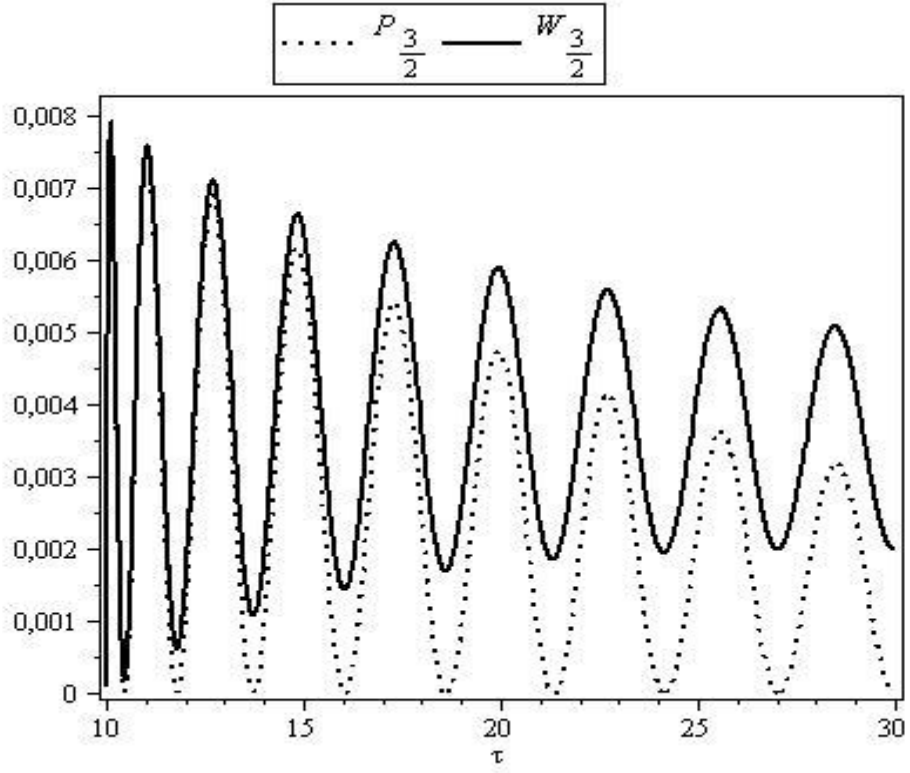
Şekil 5.95. $W_{1/2}$ ve $P_{1/2}$ 'ün $10 \leq \tau \leq 30$ zaman aralığındaki değişimi. $\xi = 10$ sabit, $n = 0$.



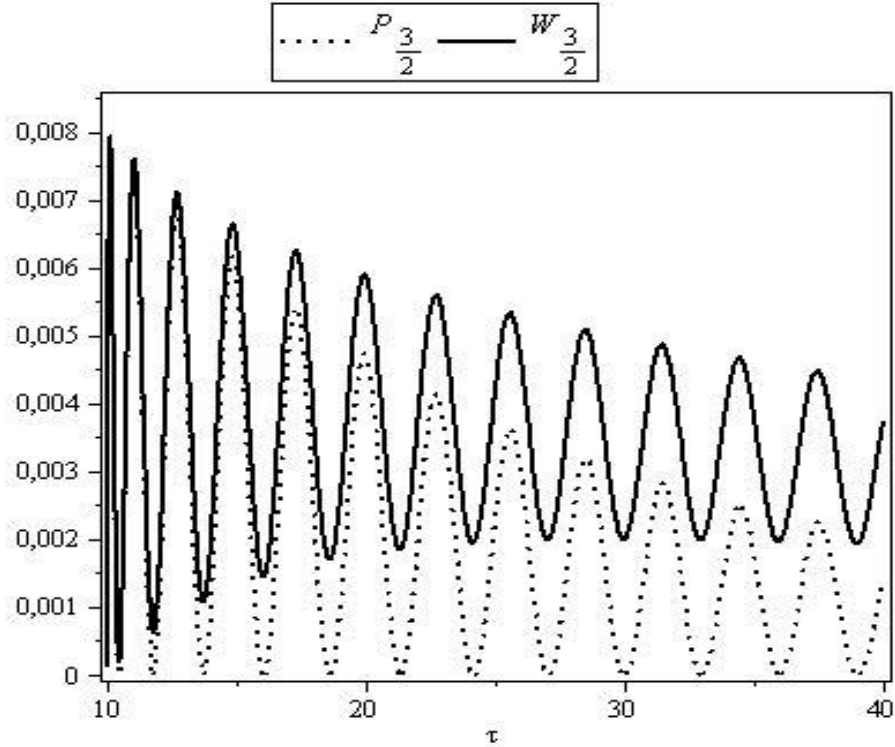
Şekil 5.96. $W_{1/2}$ ve $P_{1/2}$ 'ün $10 \leq \tau \leq 40$ zaman aralığındaki değişimi. $\xi = 10$ sabit, $n = 0$.



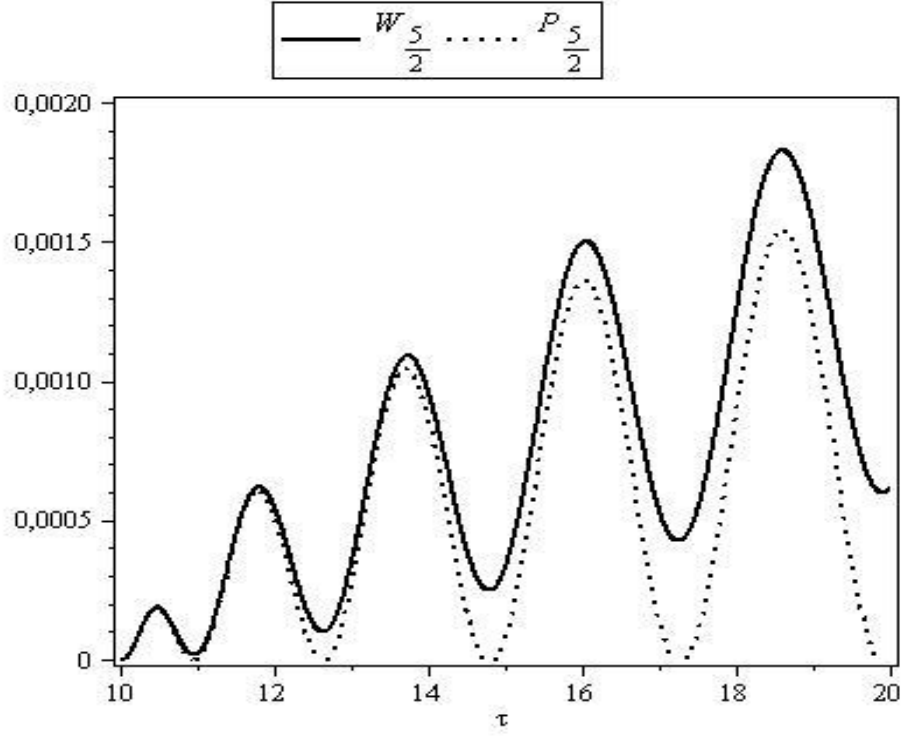
Şekil 5.97. $W_{3/2}$ ve $P_{3/2}$ 'ün $10 \leq \tau \leq 20$ zaman aralığındaki değişimi. $\xi = 10$ sabit, $n = 1$.



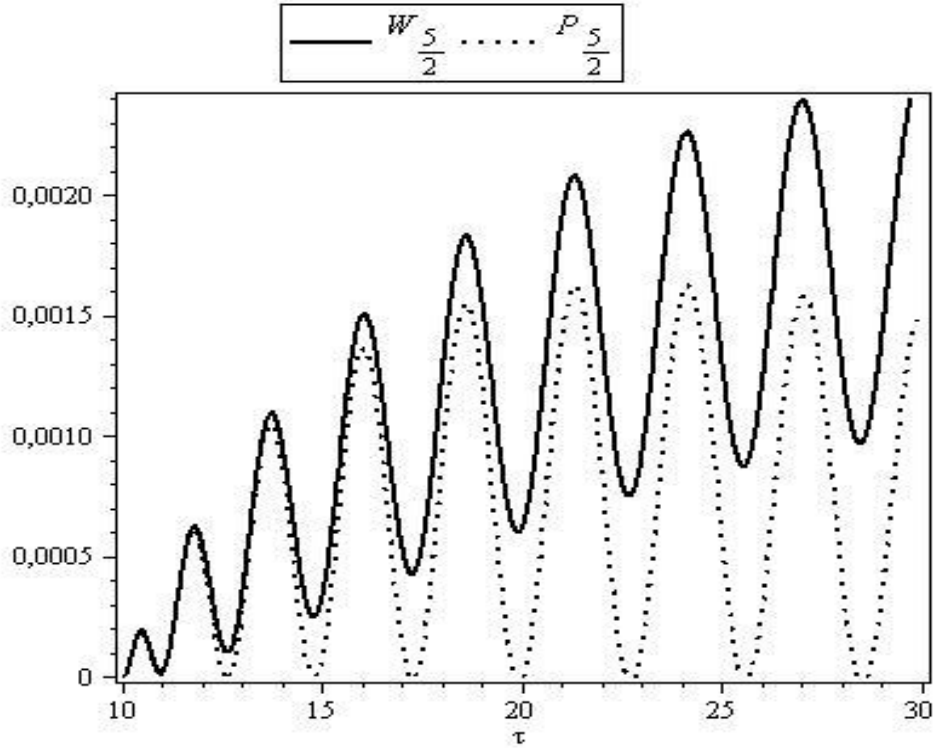
Şekil 5.98. $W_{\frac{3}{2}}$ ve $P_{\frac{3}{2}}$ 'ün $10 \leq \tau \leq 30$ zaman aralığındaki değişimi. $\xi = 10$ sabit, $n = 1$.



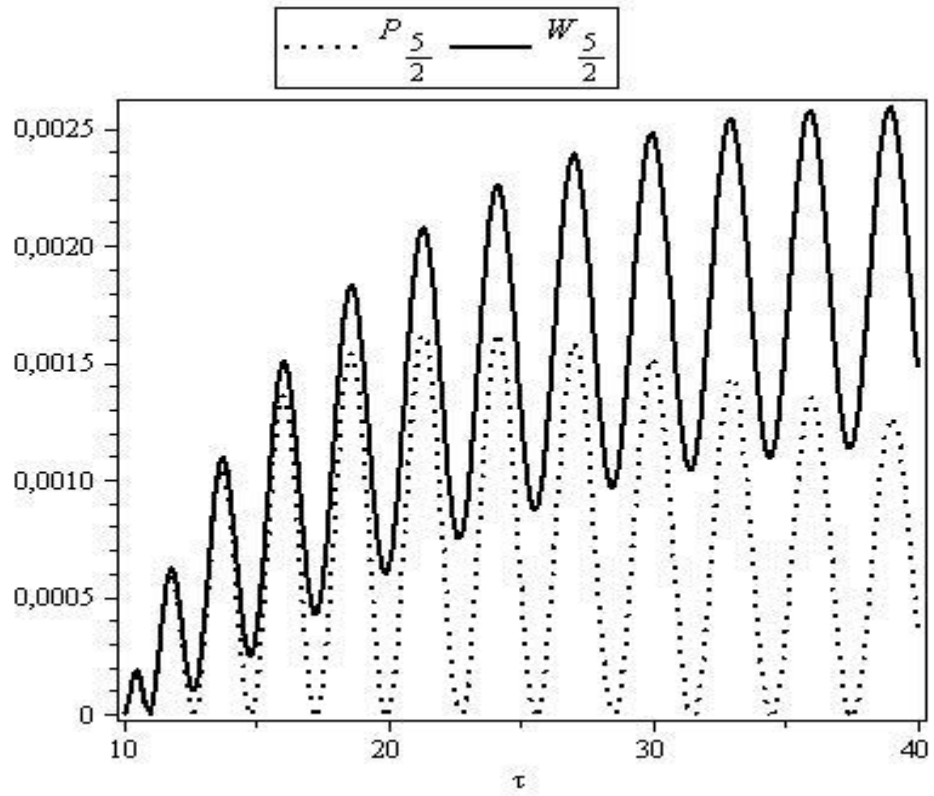
Şekil 5.99. $W_{\frac{3}{2}}$ ve $P_{\frac{3}{2}}$ 'ün $10 \leq \tau \leq 40$ zaman aralığındaki değişimi. $\xi = 10$ sabit, $n = 1$.



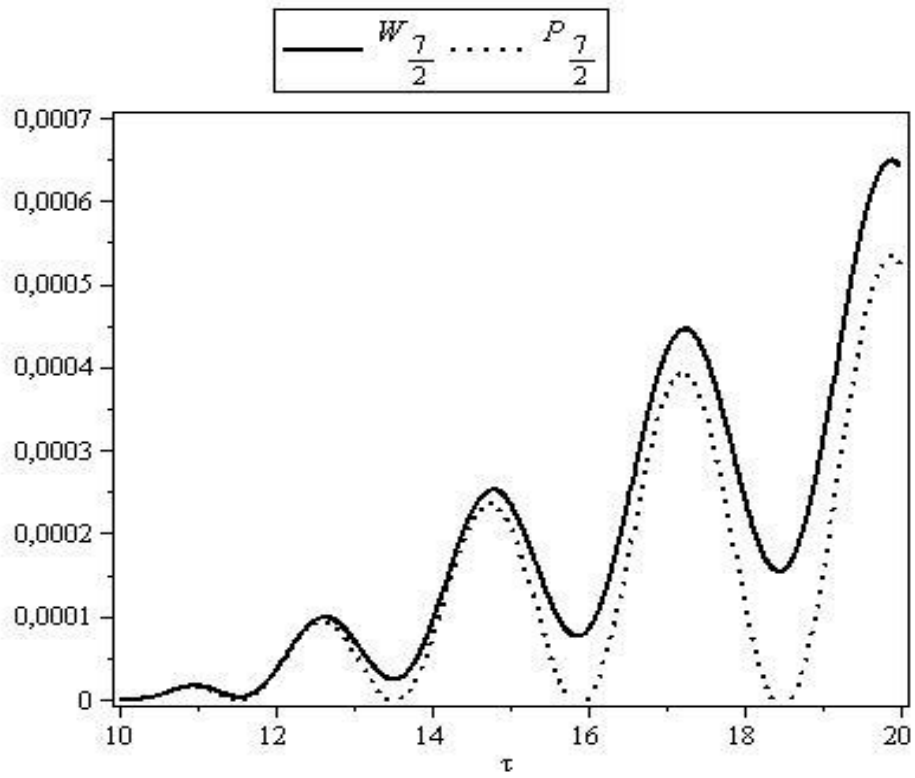
Şekil 5.100. $W_{5/2}$ ve $P_{5/2}$ 'ün $10 \leq \tau \leq 20$ zaman aralığındaki değişimi. $\xi = 10$ sabit, $n = 2$.



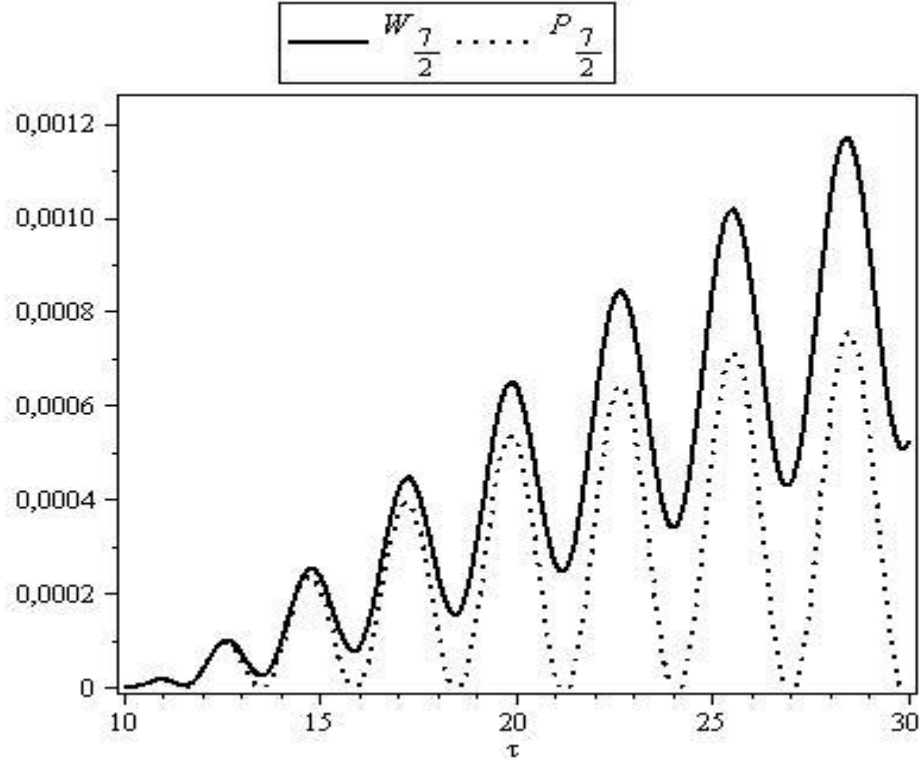
Şekil 5.101. $W_{5/2}$ ve $P_{5/2}$ 'ün $10 \leq \tau \leq 30$ zaman aralığındaki değişimi. $\xi = 10$ sabit, $n = 2$.



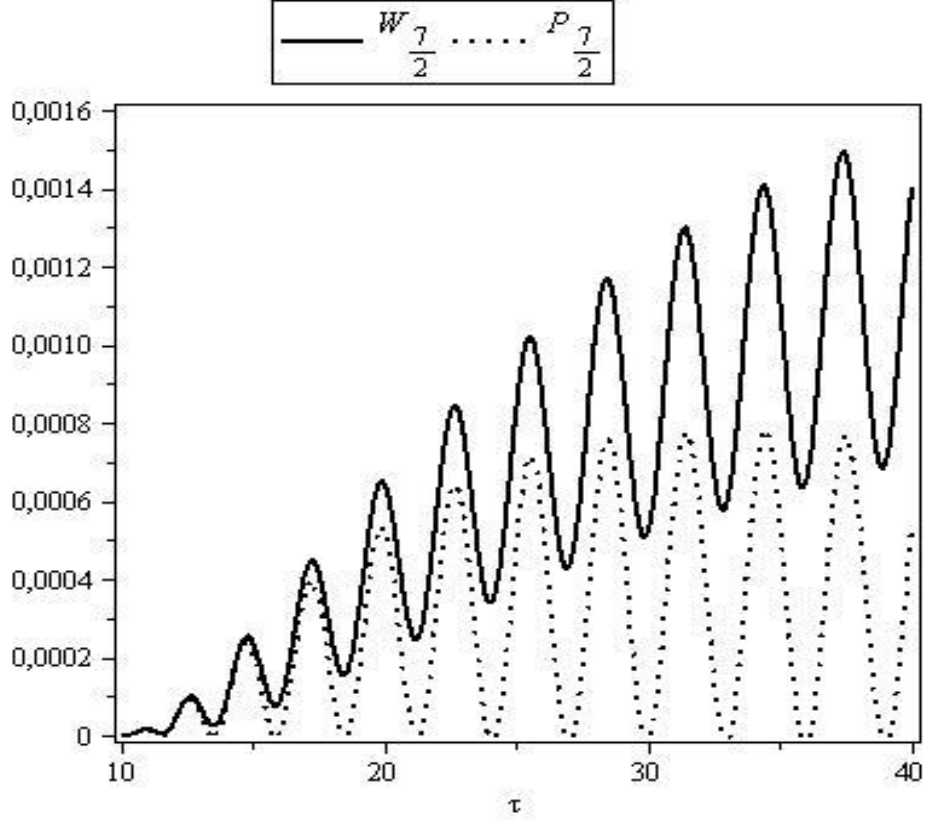
Şekil 5.102. $W_{5/2}$ ve $P_{5/2}$ 'ün $10 \leq \tau \leq 40$ zaman aralığındaki değişimi. $\xi = 10$ sabit, $n = 2$.



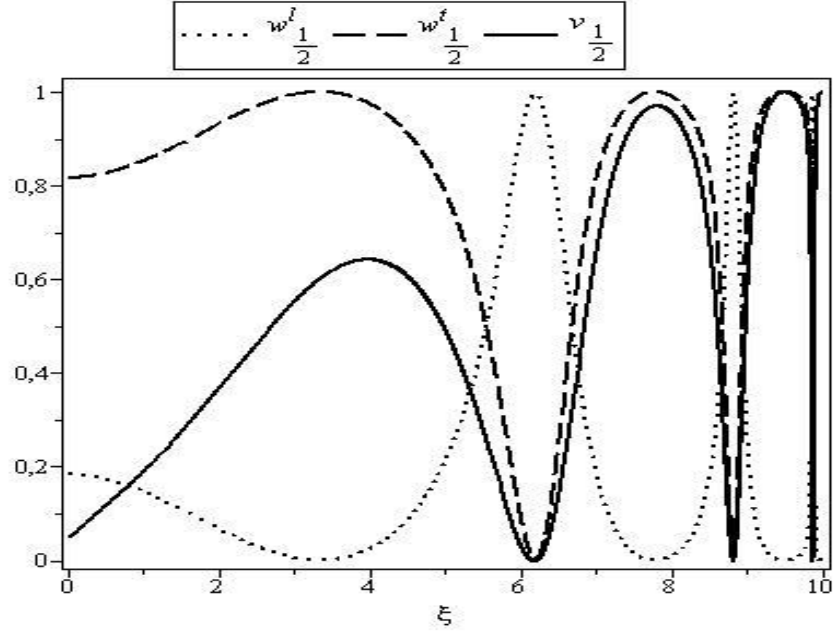
Şekil 5.103. $W_{7/2}$ ve $P_{7/2}$ 'ün $10 \leq \tau \leq 20$ zaman aralığındaki değişimi. $\xi = 10$ sabit, $n = 3$.



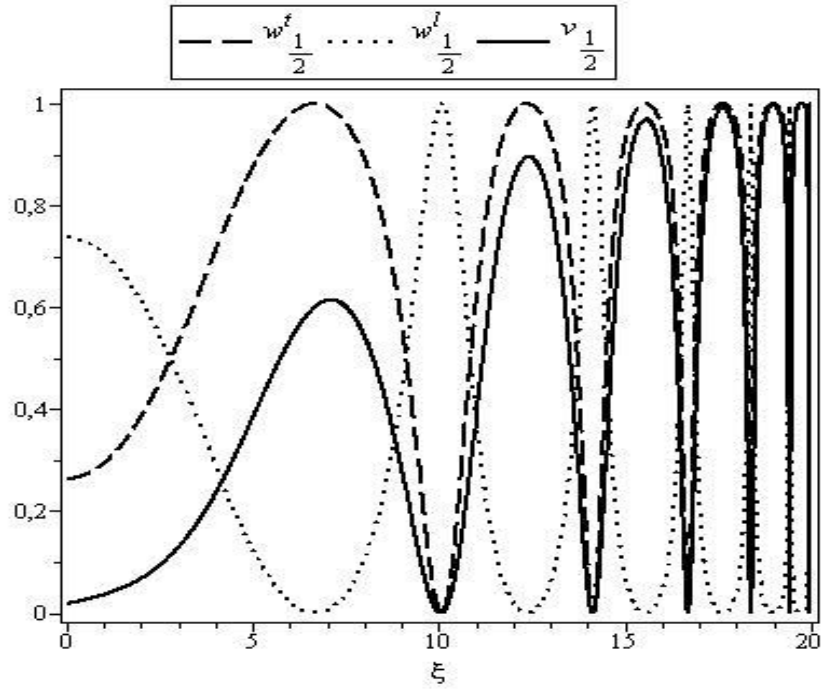
Şekil 5.104. $W_{7/2}$ ve $P_{7/2}$ 'ün $10 \leq \tau \leq 30$ zaman aralığındaki değişimi. $\xi = 10$ sabit, $n = 3$.



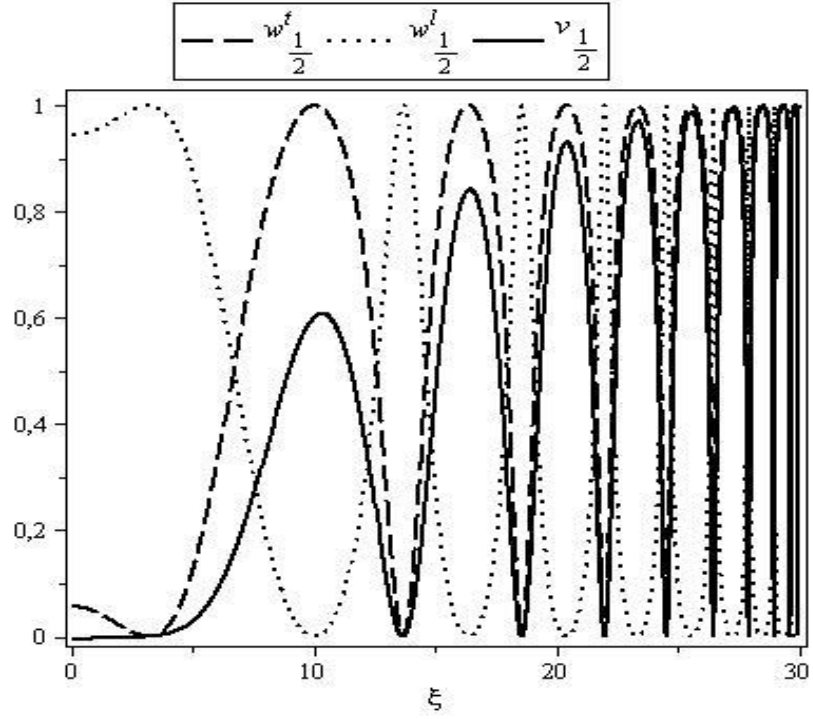
Şekil 5.105. $W_{7/2}$ ve $P_{7/2}$ 'ün $10 \leq \tau \leq 40$ zaman aralığındaki değişimi. $\xi = 10$ sabit, $n = 3$.



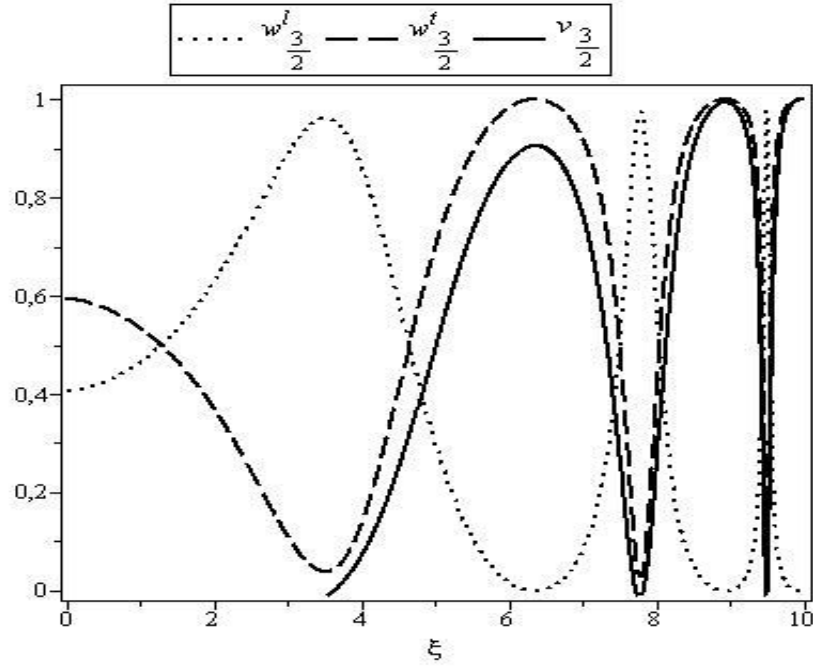
Şekil 5.106. $v_{1/2}$, $w_{1/2}^f$ ve $w_{1/2}^l$ 'nin $0 \leq \xi \leq \tau$ aralığındaki değişimi. $\tau = 10$ sabit, ξ boyutsuz eksenel koordinat.



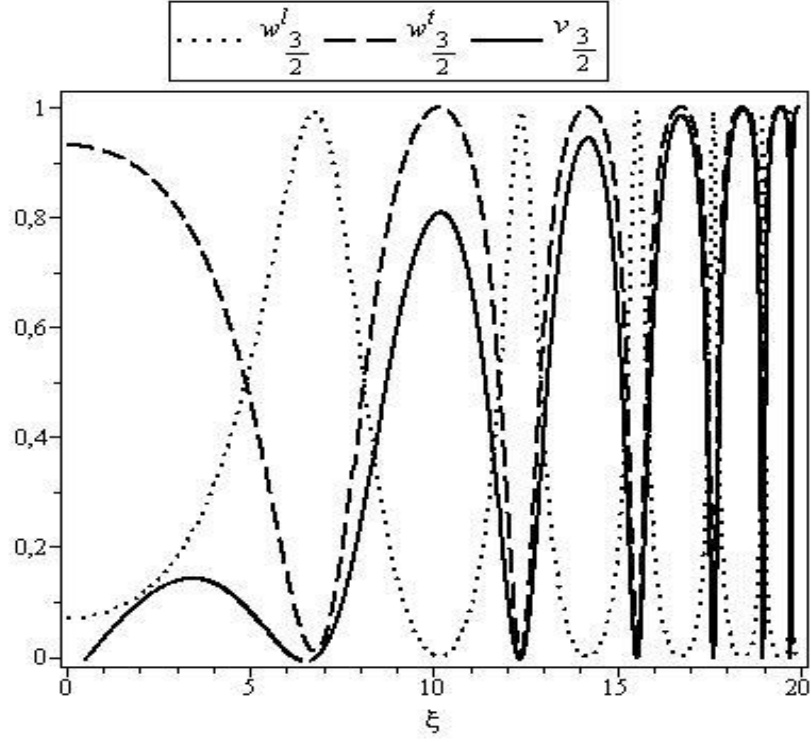
Şekil 5.107. $v_{1/2}$, $w_{1/2}^f$ ve $w_{1/2}^l$ 'nin $0 \leq \xi \leq \tau$ aralığındaki değişimi. $\tau = 20$ sabit, ξ boyutsuz eksenel koordinat.



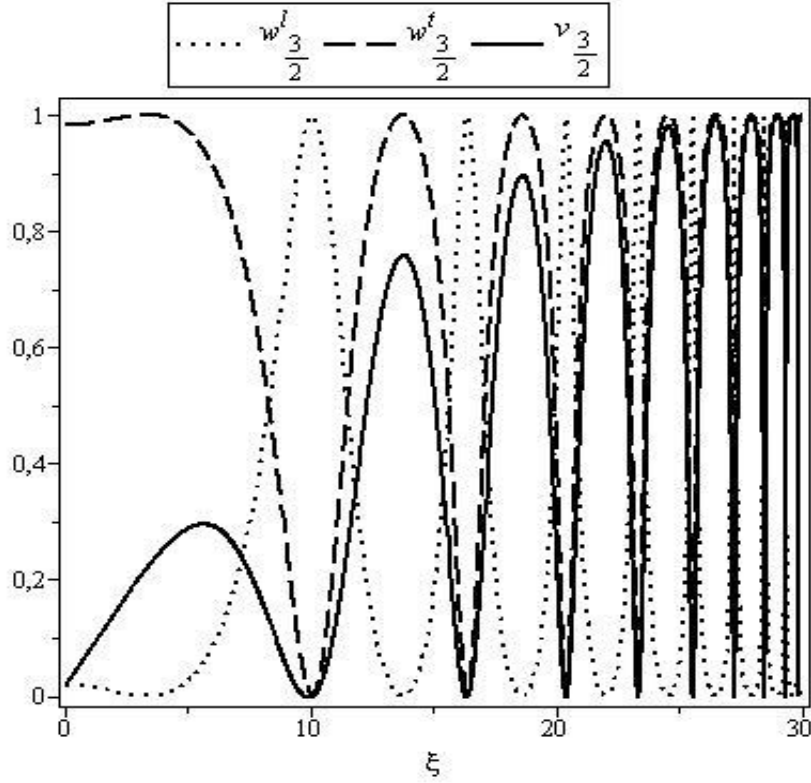
Şekil 5.108. $v_{1/2}$, $w_{1/2}^l$ ve $w_{1/2}^r$ 'nin $0 \leq \xi \leq \tau$ aralığındaki değişimi. $\tau = 30$ sabit, ξ boyutsuz eksenel koordinat.



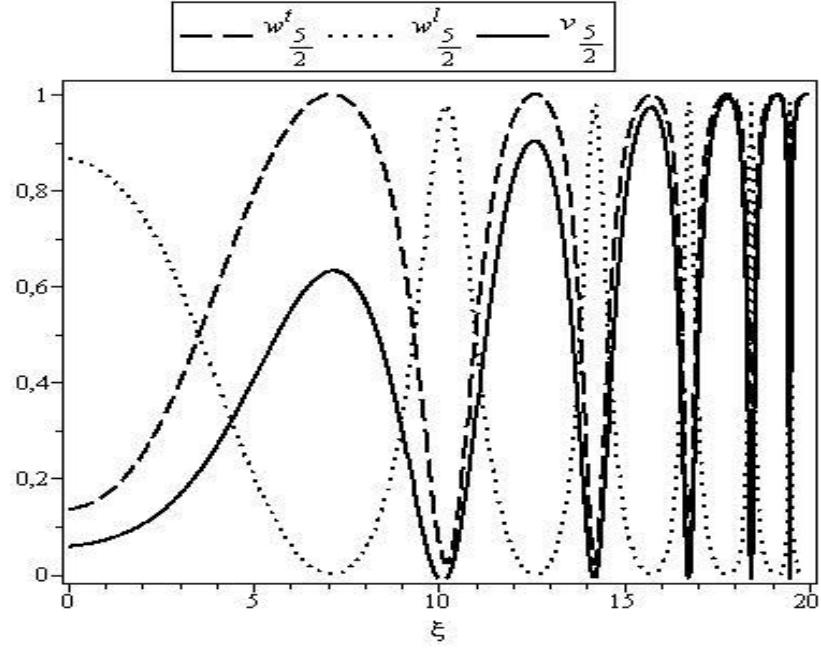
Şekil 5.109. $v_{3/2}$, $w_{3/2}^l$ ve $w_{3/2}^r$ 'nin $0 \leq \xi \leq \tau$ aralığındaki değişimi. $\tau = 10$ sabit, ξ boyutsuz eksenel koordinat.



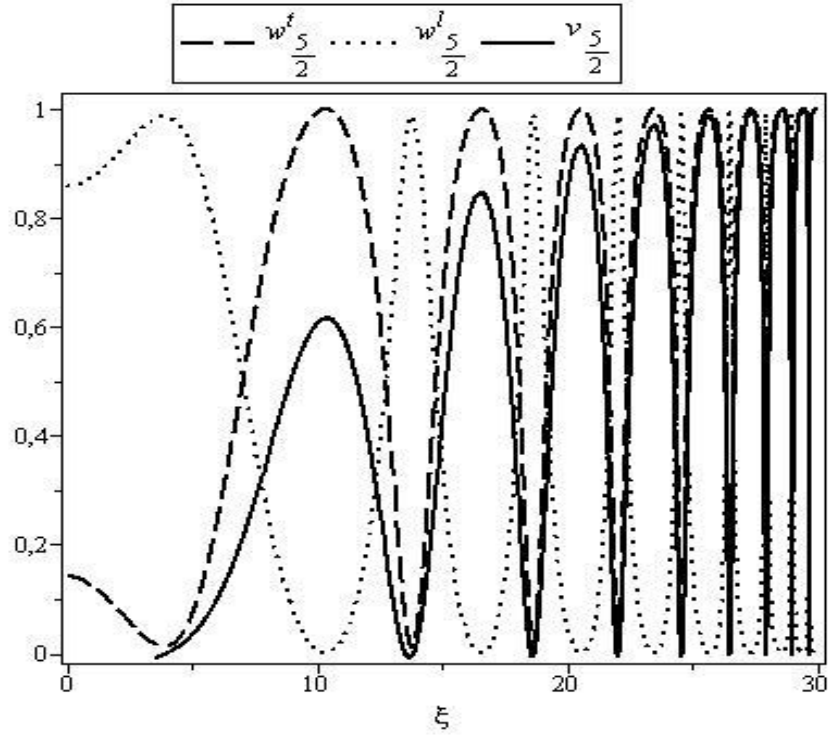
Şekil 5.110. $v_{3/2}$, $w_{3/2}^f$ ve $w_{3/2}^l$ 'nin $0 \leq \xi \leq \tau$ aralığındaki değişimi. $\tau = 20$ sabit, ξ boyutsuz eksenel koordinat.



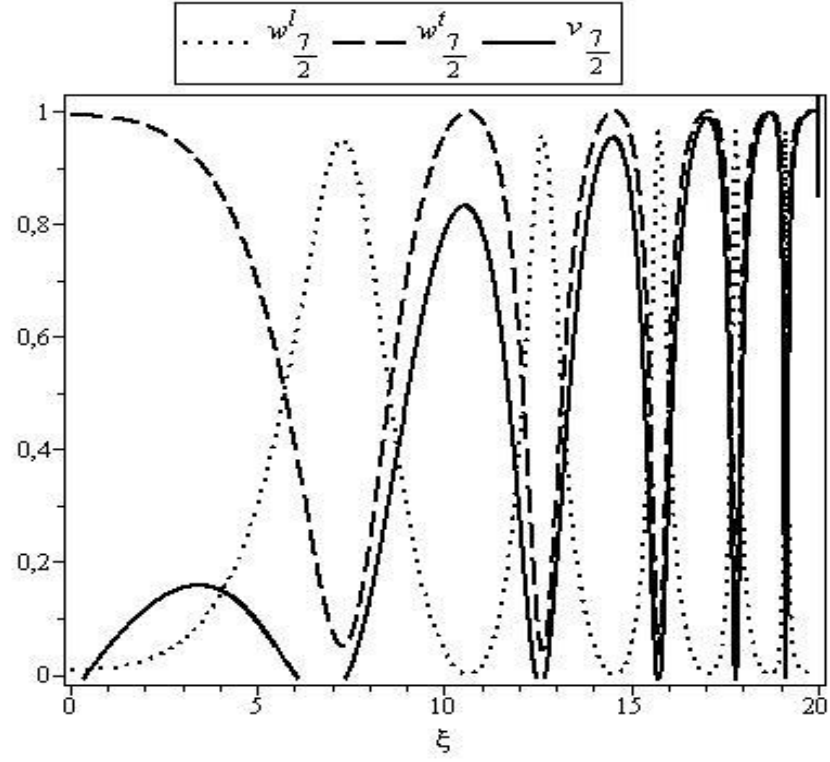
Şekil 5.111. $v_{3/2}$, $w_{3/2}^f$ ve $w_{3/2}^l$ 'nin $0 \leq \xi \leq \tau$ aralığındaki değişimi. $\tau = 30$ sabit, ξ boyutsuz eksenel koordinat.



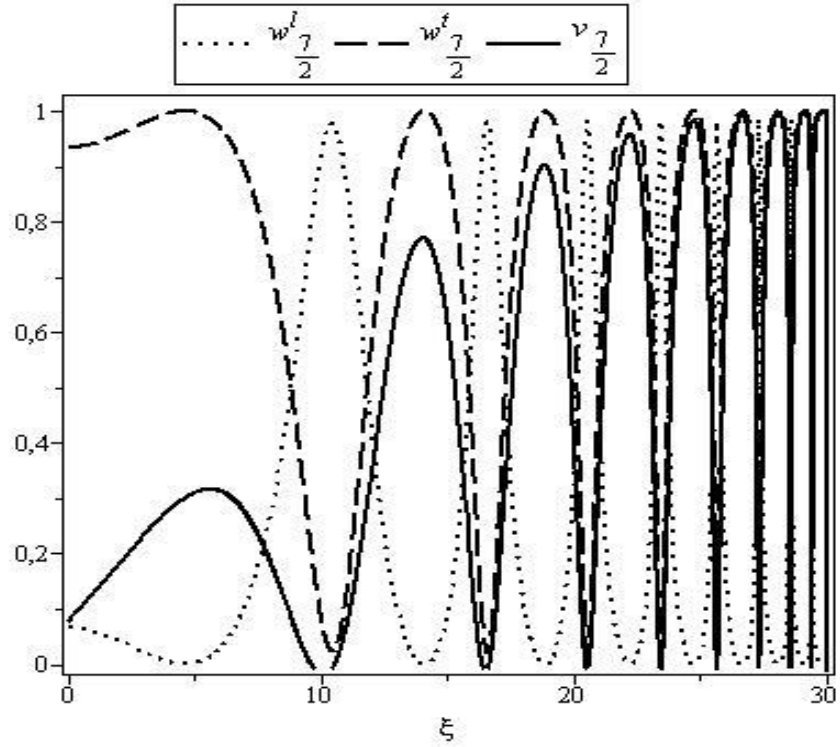
Şekil 5.112. $v_{5/2}$, $w_{5/2}^f$ ve $w_{5/2}^l$ 'nin $0 \leq \xi \leq \tau$ aralığındaki değişimi. $\tau = 20$ sabit, ξ boyutsuz eksenel koordinat.



Şekil 5.113. $v_{5/2}$, $w_{5/2}^f$ ve $w_{5/2}^l$ 'nin $0 \leq \xi \leq \tau$ aralığındaki değişimi. $\tau = 30$ sabit, ξ boyutsuz eksenel koordinat.



Şekil 5.114. $v_{7/2}$, $w_{7/2}^f$ ve $w_{7/2}^l$ 'nin $0 \leq \xi \leq \tau$ aralığındaki değişimi. $\tau = 20$ sabit, ξ boyutsuz eksenel koordinat.



Şekil 5.115. $v_{7/2}$, $w_{7/2}^f$ ve $w_{7/2}^l$ 'nin $0 \leq \xi \leq \tau$ aralığındaki değişimi. $\tau = 30$ sabit, ξ boyutsuz eksenel koordinat.

6. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Çalışmada uygulananları, elde edilen sonuçları derleyip toplamak gerekirse şunlar vurgulanabilir.

Bu çalışmada, zaman-bağımlı mükemmel elektrik iletken dalga kılavuzu yüzeyinde verilen bir kaynak fonksiyonu tarafından üretilen elektromagnetik alan kuvveti problemi Elektromagnetik Teoriye Evrimsel Yaklaşımlar (*ETEY*) adı verilen bir analitik zaman-uzayı yönteminin evrensel prensiplerine bağlı kalınarak tartışılmıştır. Çalışma zaman-uzayında dalga kılavuzu teorisini takdim etmek için teorisyenlerin ve mühendislerin bilimsel görüş ve teorilerine uygun olarak tasarlanmıştır. Problem iki ayrı otonom blok üzerinde şekillenir. Biri modal baz modülü ve diğeri de modal genlik modülüdür. Modal baz zaman-harmonik ve zaman-uzayı modları için yaygındır. Bundan dolayı, zaman-harmonik alan teorisindeki modal bazlar için elde edilen sonuçlar zaman-uzayı çalışmalarında serbestçe kullanılabilir. Bu arada, zaman-uzayı genlikleri çalışmaları Klein-Gordon denkleminin çözülmesine ihtiyaç duyarlar. Bu çalışmada, bu denklemin simetri özellikleri (grup teorisi anlamında) kullanılmıştır. Matematiksel fiziğin özel fonksiyonları ve zaman-bağımlı argümanların gerekliliklerini yerine getirebildiği ölçüde bu yol çok gelecek vaat eden bir yol olarak görünmektedir.

ETEY'in temel prensibi Maxwell denklemlerindeki elektromagnetik alanların bulunmasında ∂_t zaman türevini koruyarak sistemden alanları çekerek Klein-Gordon denkleminde genlikleri ve potansiyelleri de Helmholtz denkleminde elde edip çözüme ulaşmasıdır. Helmholtz denkleminde özdeğerler (özdeğerler operatörün kendine-eş olmasından dolayı reeldir) ve bu özdeğerlere bağlı özfonksiyonlar bulunmuştur. Bu özfonksiyonların sabit katsayıları sınır koşulları altında hesaplanarak normalize edilmiştir. Özfonksiyonların seri halinde çözümü verilmiştir. Klein-Gordon denkleminde zaman-bağımlı modal genliklerin seri çözümleri türetilmiştir. Böylece alanların içerisine gömülü olan genlikler ve potansiyeller yukarıda anılan denklemlerden çekilip bünye denklemlerinde yerine yazılarak alanlara ulaşılmıştır.

Klein-Gordon ve Helmholtz denklemleri modal genlik ve modal baz anlamında birbirinden bağımsız denklemlerdir. Fakat bu iki bağımsız denklem evrim denklemlerinin türetilmesini sağlar.

Yukarıdaki tartışmalarda, Klein-Gordon denklemi nedensellik prensibi altında çözümlenirken ve başlangıç şartlarını sağlarken, Helmholtz denklemi sınır koşullarını sağlar. Her iki denklemde Lorentz dönüşümü altında değişmez kalır.

Çalışmada ayrıca enerji ve enerjideki değişim üzerinde durulmuştur. Eksenel ve enlemsel alan uzantılarında depolanan enerjinin değişiminin enerjik dalga sürecinin formülleri gösterilmiştir. Enerji ve enerjideki değişim, bilinen tamsayı çözümlerinin (tamsayı indisli çözümler) yanı sıra yarı-tamsayı çözümleri de (yarı-tamsayı indisli çözümler) gösterilmiştir. Bu denklemler grafiksel olarak örneklendirilmiş ve zenginleştirilmiştir. Grafiksel sonuçlar enerji ve enerjideki değişimi yarı-tamsayı Bessel fonksiyonları kullanılarak ortaya koymuştur.

KAYNAKLAR

- [1] Aksoy S., Antyufeyeva M., Basaran E., Ergin A. A., Tretyakov O. A., “*Time-Domain Cavity Oscillations Supported by a Temporally Dispersive Dielectric*”, IEEE Transactions on Microwave Theory ve Techniques, vol. 53, issue 8, pp. 2465-2471, Aug. 2005.
- [2] Aksoy S., Tretyakov O. A., “*Study of a Time Variant Cavity System*”, Journal of Electromagnetic Waves ve Applications, vol: 16, no: 11, pp:1535-1553, 2002.
- [3] Aksoy S., Tretyakov O. A., “*Evolution Equations for Analytical Study Digital Signals in Waveguides*”, Journal of Electromagnetic Waves ve Applications, vol: 17, no: 12, pp:1665-1682, 2003.
- [4] Aksoy S., Tretyakov O. A., “*The Evolution Equations in Study of the Cavity Oscillations Excited by a Digital Signal*”, IEEE Transactions on Antennas ve Propagation, vol. 52, no. 1 , pp. 263-270, Jan. 2004.
- [5] Aksoy S., “*Dalga Kılavuzlarında Elektromagnetik Zaman Domeni Analizlerinin Yeni Bir Analitik Metotla İncelenmesi*”, Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü, Doktora Tezi, 2003.
- [6] Baum C. E., Carin L., Stone A. P., “*Ultra-Widebve Short-Pulse Electromagnetics*”, Plenum Press, New York, 1997, vol. 3.
- [7] Bladel J. V., “*Electromagnetic Fields*”, Hemisphere, Washington, 1964.
- [8] Bennett C. L., Ross G. F., “*Time-domain Electromagnetics ve Its Applications*”, Proc. IEEE, vol. 66, pp. 299-318, Mar. 1978.
- [9] Camp M., Garbe H., “*Susceptibility of personal Computer Systems to Electromagnetic Pulses with Double Exponential Character*”, Advances in Radio Science, vol. 2, 63–69, 2004.
- [10] Cramer J. M., Scholtz R. A., Win M. Z., “*On the Analysis of UWB Communication Channels*”, Proceedings of the IEEE Military Communications Conference (IEEE, New York, 1999), vol. 2, pp. 1191–1195.
- [11] Diaz R. E., Alexopoulos N. G., “*An Analytic Continuation Method for the Analysis ve Design of Dispersive Materials*”, IEEE Transactions on Antennas ve Propagation, vol. 45, no. 11, pp. 1602-1610, 1997.

- [12] Dvorak S. L., Dudley D. D., “*Propagation of Ultra-Wide-Band Electromagnetic Pulses Through Dispersive Media*”, IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility, vol. 37, No. 2, pp. 192-200, 1995.
- [13] Erden F., Tretyakov O. A., “*Excitation of the Real-Valued Electromagnetic Fields in a Cavity by a Given Transient Signal*”, Physical Review Series E, vol: 77, pp:056605, 2008.
- [14] Erden F., Tretyakov O. A., “*Solenoidal Eşlenmiş Dejenere Kavite Modlarının Zaman Domeni Salınımları*”, URSI-Türkiye’2004, İkinci Ulusal Kongresi, 08-10 Eylül 2004, Bilkent Üniversitesi, Ankara, Türkiye, pp: 204-206.
- [15] Hillion P., “*Some Comments on Electromagnetic Signals*”, in ed. by A.Lakhtakia, Essays on the formal aspects of electromagnetic theory, World Scientific Publ. Co., Singapore, 1993.
- [16] Harmuth H. F., “*Electromagnetic Transients not Explained by Maxwell’s Equations*”, in ed. by A. Lakhtakia, Essays on the formal aspects of electromagnetic theory, World Scientific Publ. Co., Singapore, 1993.
- [17] Kisun’ko G.V., “*Electrodynamics of Hollow Systems*”, VKAS Press, Leningrad, 1949 (in Russian).
- [18] Kurokawa K., “*The Expansion of Electromagnetic Fields in Cavities*”, IRE Transactions on Microwave Theory ve Techniques, vol:6, pp:178-187, 1958.
- [19] Miller W. Jr. “*Symmetry ve Separation of Variables*”, MA: Addison-Wesley Publication Co., Boston, 1977.
- [20] Müller R., “*Theory of Cavity Resonators*”, in Electromagnetic waveguides ve cavities, G. Goubau (Ed.), ch. 2., Pergamon Press, London, 1961.
- [21] Savic M. S., “*Estimation of the Surge Arrester Outage Rate Caused by Lightning Overvoltages*,” IEEE Trans. on Power Delivery, vol. 20, No. 1, 116–122, Jan. 2005.
- [22] Slater J. C., “*Microwave Electronics*”, Review of Modern Physics, vol.18, No. 4, pp: 441-452, 1946.
- [23] Taflove A., Hagness S., “*Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method*”, Artech House, Boston, 2005.
- [24] Tretyakov O. A. “*Essentials of Nonstationary ve Nonlinear Electromagnetic Field Theory*”, Analytical ve Numerical Methods in Electromagnetic Wave Theory, Hashimoto M., Idemen M., Tretyakov O. A., Science House Company, Tokyo, Japan, 1993.

- [25] Tretyakov O. A., “*Evolutionary Equations for the Theory of Waveguides*”, Proc. IEEE AP-S Int. Symp. Dig., 2465–2471, Seattle, WA, Jun. 1994.
- [26] Tretyakov O. A. ve Akgün O. “*Derivation of Klein-Gordon Equation from Maxwell’s Equations and Study of Relativistic Time-Domain Waveguide Modes*”, Progress In Electromagnetics Research (PIER), vol: 105, pp:171-191, 2010.
- [27] Tretyakov O. A., Erden F., “*Temporal Cavity Oscillations Caused by a Wide-Bve Waveform*”, Progress in Electromagnetics Research B (PIER B), vol: 6, pp:183-204, 2008.
- [28] Tretyakov O. A., Erden F., “*Temporal Cavity Oscillations Caused by a Wide-Bve Double-Exponential Waveform*”, 4th International Workshop on Electromagnetic Wave Scattering (EWS-2006), 18-22 September 2006, Gebze, Kocaeli, Turkey.
- [29] Tretyakov O. A., Erden F., “*Separation of the Instantaneous ve Dynamic Polarizations in Studies of Dispersive Dielectrics*”, The Sixth International Kharkov Symposium on Physics ve Engineering of Microwaves, Millimeter ve Submillimeter Waves (MSMW’07), 25-30 June 2007, Kharkov, Ukraine, vol: 1, pp: 42-48.
- [30] Weyl H., “*The Method of Orthogonal Projection in Potential Theory*”, Duke Math. Journal, vol:7, pp:411-44, 1940.
- [31] Xie W. C., “*Differential Equations For Engineers*”, First published in print format Cambridge University Press The Edinburgh Building, Cambridge CB2 8RU, UK, 2010.
- [32] Zhen J., Hagness S. C., Booske J. H., Mathur S., Meltz M. L., “*FDTD Analysis of a Gigahertz TEM Cell for Ultra-widebve Pulse Exposure Studies of Biological Specimens*”, IEEE Trans. on Biomedical Eng., vol. 53, No. 5, 780–789, May 2006.

ÖZGEÇMİŞ

Emre Eroglu, 1977 yılında İstanbul'un Eyüp ilçesinde doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini İstanbul'da tamamladı. 2000 yılında Uludağ Üniversitesi Matematik Bölümü'nden mezun oldu. 2001 yılında Sakarya Üniversitesi Matematik bölümünde başladığı yüksek lisans öğrenimini 2004 yılında tamamlayarak Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü Matematik bölümünde doktora öğrenimine başladı.

2003 yılından bu yana İstanbul Güngören Güneşlitepe İlköğretim okulunda Matematik öğretmeni olarak görev yapmaktadır.

EKLER

Ek-1. Miller'in Listesi

$f(u,v)=U(u)V(v)$ olmak üzere (40) numaralı denklemin çözümlerinin listesi.

- 1) $\tau = u$ ve $\xi = v$, burada $-\infty < u < \infty$, $-\infty < v < \infty$ olmak üzere $f(u,v)$ üstel fonksiyonların çarpımı.
- 2) $\tau = u \cosh v$ ve $\xi = u \sinh v$ ile $-\infty \leq u < \infty$, $-\infty < v < \infty$ olmak üzere $f(u,v)$ üstel bir fonksiyon ile Bessel fonksiyonunun çarpımı.
- 3) $\tau = (u^2 + v^2)/2$ ve $\xi = uv$ ile $-\infty \leq u < \infty$, $-\infty < v < \infty$ olmak üzere $f(u,v)$ parabolik silindir fonksiyonu.
- 4) $\tau = uv$ ve $\xi = (u^2 + v^2)/2$ ile $-\infty \leq u < \infty$, $-\infty < v < \infty$ olmak üzere $f(u,v)$ parabolik silindir fonksiyonu.
- 5) $\tau + \xi = 2(u+v)$ ve $\tau - \xi = (u-v)^2$ ile $-\infty < u, v < \infty$ olmak üzere $f(u,v)$ Airy fonksiyonu.
- 6) $\tau + \xi = \cosh[(u-v)/2]$ ve $\tau - \xi = \sinh[(u+v)/2]$ ile $-\infty < u, v < \infty$ olmak üzere $f(u,v)$ Mathieu fonksiyonu.
- 7) $\tau + \xi = 2 \sinh(u-v)$ ve $\tau - \xi = \exp(u-v)$ ile $-\infty < u, v < \infty$ olmak üzere $f(u,v)$ Bessel fonksiyonu.
- 8) $\tau + \xi = 2 \cosh(u-v)$ ve $\tau - \xi = \exp(u+v)$ ile $-\infty < u, v < \infty$ olmak üzere $f(u,v)$ Bessel fonksiyonu.
- 9) $\tau = \sinh u \cosh v$ ve $\xi = \cosh u \sinh v$ ile $-\infty < u, v < \infty$ olmak üzere $f(u,v)$ Mathieu fonksiyonu.
- 10) $\tau = \cosh u \cosh v$ ve $\xi = \sinh u \sinh v$ ile $-\infty < u < \infty$, $-\infty \leq v < \infty$ olmak üzere $f(u,v)$ Mathieu fonksiyonu.
- 11) $\tau = \cos u \cos v$ ve $\xi = \sin u \sin v$ ile $0 < u < 2\pi$, $0 \leq v < \pi$ olmak üzere $f(u,v)$ Mathieu fonksiyonu.

Ek-2. Enerjinin Korunumu

(22) ve (23) çözümüne nasıl ulaşıldığı tartışılmalıdır. Özetlenmeye çalışılırsa:

Enerjinin korunumu kanununun derivasyonu *TE* ve *TM* modlarının her ikisi için de aynı şekilde elde edilebilir. Bundan dolayı, \mathbf{E}_m ve \mathbf{H}_m vektör alanlarının bu alanlara ait modların cinslerini belirleyen, sırasıyla $(^h)$ ve $(^e)$ üst simgelerinden kurtulunabilir.

$$\nabla \times \mathbf{E}_m = -\mu_0 \partial_t \mathbf{H}_m \quad \text{ve} \quad \nabla \times \mathbf{H}_m = \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}_m \quad (1)$$

Maxwell denklemlerinin Poynting'in teoremini uygulamak için hazırlanışı,

$$\mathbf{H}_m \cdot \nabla \times \mathbf{E}_m = -\mu_0 \mathbf{H}_m \cdot \partial_t \mathbf{H}_m \quad \text{ve} \quad \mathbf{E}_m \cdot \nabla \times \mathbf{H}_m = \varepsilon_0 \mathbf{E}_m \cdot \partial_t \mathbf{E}_m$$

şeklindedir.

İkinci denklemin birinci denklemden çıkarılmasıyla

$$\mathbf{H}_m \cdot \nabla \times \mathbf{E}_m - \mathbf{E}_m \cdot \nabla \times \mathbf{H}_m = -\mu_0 \mathbf{H}_m \cdot \partial_t \mathbf{H}_m - \varepsilon_0 \mathbf{E}_m \cdot \partial_t \mathbf{E}_m$$

elde edilir.

$$\mathbf{H}_m \cdot \partial_t \mathbf{H}_m = \frac{1}{2} \partial_t (\mathbf{H}_m \cdot \mathbf{H}_m)^2,$$

$$\mathbf{E}_m \cdot \partial_t \mathbf{E}_m = \frac{1}{2} \partial_t (\mathbf{E}_m \cdot \mathbf{E}_m)^2$$

ve

$$\mathbf{H}_m \cdot \nabla \times \mathbf{E}_m - \mathbf{E}_m \cdot \nabla \times \mathbf{H}_m = \nabla \cdot [\mathbf{E}_m \times \mathbf{H}_m]$$

olduğu hatırlanırsa, bundan dolayı (1) denklemi Poynting teoreminin *diferansiyel* formunu

$$\nabla \cdot [\mathbf{E}_m \times \mathbf{H}_m] = -\partial_t \frac{1}{2} [\varepsilon_0 (\mathbf{E}_m \cdot \mathbf{E}_m)^2 + \mu_0 (\mathbf{H}_m \cdot \mathbf{H}_m)^2]$$

olarak verir.

Dalga kılavuzu içinde z_1 ve $z_2 = z_1 + \delta z$, $\delta z > 0$ arasında yer alan sonlu bir V hacimli kesit-alan seçelim. Bir önceki denklemin sol ve sağ tarafları V hacmi üzerinden integre edilip normalize edilirse

$$\frac{1}{V} \int_V \nabla \cdot [\mathbf{E}_m \times \mathbf{H}_m] dv = -\partial_t \frac{1}{2V} \int_V [\varepsilon_0 (\mathbf{E}_m \cdot \mathbf{E}_m)^2 + \mu_0 (\mathbf{H}_m \cdot \mathbf{H}_m)^2] dv \quad (2)$$

elde edilir, burada $V = S(z_2 - z_1)$ ve $dv = ds dz$ dir.

Vektör analizinden Gauss teoreminin sol taraftaki hacim integraline uygulanmasıyla

$$\frac{1}{V} \int_V \nabla \cdot [\mathbf{E}_m \times \mathbf{H}_m] dv = \frac{1}{V} \oint_S \mathbf{N} \cdot \mathbf{P}_m ds$$

elde edilir. Burada $\mathbf{P}_m = [\mathbf{E}_m \times \mathbf{H}_m]$ Poynting vektörü ve \mathbf{N} , V sınırlı S yüzeyinin normal birim vektörüdür.

S yüzeyi $S = S_1 + S_2 + S_w$ yapısından oluşsun. Burada S_1 ve S_2 sırasıyla $z = z_1$ ve $z = z_2$ koordinatlarıyla dalga kılavuzu kesit-alanının içinde ve S_w dalga kılavuzunun yüzeyinde yer alsın. Bundan dolayı,

$$\frac{1}{V} \oint_S \mathbf{N} \cdot \mathbf{P}_m ds = \frac{1}{V} \oint_{S_1} \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{P}_m ds + \frac{1}{V} \oint_{S_2} \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{P}_m ds + \frac{1}{V} \oint_{S_w} \mathbf{n}_w \cdot \mathbf{P}_m ds,$$

$\mathbf{n}_1 = -\mathbf{z}_0$, $\mathbf{n}_2 = +\mathbf{z}_0$ ve \mathbf{n}_w dalga kılavuzu kesit alanının L konturunun birim vektörü olmak üzere, yazılabilir.

$\mathbf{n}_w \cdot \mathbf{P}_m = \mathbf{n}_w \cdot [\mathbf{E}_m \times \mathbf{H}_m] = [\mathbf{n} \times \mathbf{E}_m] \cdot \mathbf{H}_m$ vektör tanımından yazılırsa, \mathbf{E}_m elektrik alanının tanjant bileşeni, mükemmel iletken dalga kılavuzu *yüzeyinde* sadeleştiği için $[\mathbf{n} \times \mathbf{E}_m]_{S_w}$ vektörü sadeleşir. Bundan dolayı,

$$\frac{1}{V} \oint_S \mathbf{N} \cdot \mathbf{P}_m ds = \frac{1}{V} \oint_{S_1} (\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{P}_m|_{z=z_1}) ds + \frac{1}{V} \oint_{S_2} (\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{P}_m|_{z=z_2}) ds$$

elde edilir. Burada Oz eksenini boyunca dalga kılavuzu kesit alanı değiştirilmeyecektir. Bundan dolayı, $S_1 = S_2 = S$.

Bu noktada $\mathbf{P}_m = [\mathbf{E}_m \times \mathbf{H}_m]$ Poynting vektörü için açık formüle ihtiyacımız var. TE modlarında bu etki düşünülün.

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_m &= v_m \langle \partial_\xi h_m(z, t) \rangle \left[\frac{1}{\sqrt{\mu_0}} \nabla_\perp \Psi(\mathbf{r}) \right] + \mathbf{z} \langle h_m(z, t) \rangle \left[v_m^2 \frac{1}{\sqrt{\mu_0}} \Psi(\mathbf{r}) \right] \\ \mathbf{E}_m &= v_m \langle -\partial_\tau h_m(z, t) \rangle \left[\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0}} \nabla_\perp \Psi(\mathbf{r}) \times \mathbf{z} \right] \end{aligned}$$

burada $\tau = v_m ct$, $\xi = v_m z$ dir. Aşağıdaki formül elde edilebilir.

$$\mathbf{P}_m(\mathbf{r}, z, t) = \mathbf{z} c v_m^2 (-\partial_\tau h_m) (\partial_\xi h_m) [(\nabla_\perp \Psi(\mathbf{r}) \cdot \nabla_\perp \Psi(\mathbf{r}))]$$

burada $c = \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ boşlukta ışık hızıdır.

Böylece,

$$\begin{aligned} \frac{1}{V} \oint_S \mathbf{N} \cdot \mathbf{P}_m ds &= c v_m^2 \frac{\mathbf{P}_{mz}(z, t)|_{z=z_1}}{(z_2 - z_1)} (\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{z}) \frac{1}{S} \int_S (\nabla_\perp \Psi(\mathbf{r}) \cdot \nabla_\perp \Psi(\mathbf{r})) ds + \\ &+ c v_m^2 \frac{\mathbf{P}_{mz}(z, t)|_{z=z_2}}{(z_2 - z_1)} (\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{z}) \frac{1}{S} \int_S (\nabla_\perp \Psi(\mathbf{r}) \cdot \nabla_\perp \Psi(\mathbf{r})) ds \end{aligned}$$

burada $\mathbf{P}_{mz}(z, t) = (-\partial_\tau h_m(z, t))(\partial_\xi h_m(z, t))$.

S yüzeyindeki integrali elde etmek için,

$$\nabla_\perp \cdot (\Psi_m \nabla_\perp \Psi_m) = \nabla_\perp \Psi_m \cdot \nabla_\perp \Psi_m + \Psi_m \nabla_\perp^2 \Psi_m \quad (3)$$

vektör tanımı kullanılmalıdır.

Buradan,

$$\nabla_\perp \Psi_m \cdot \nabla_\perp \Psi_m = -\Psi_m \nabla_\perp^2 \Psi_m + \nabla_\perp \cdot (\Psi_m \nabla_\perp \Psi_m)$$

S yüzeyindeki son integrasyon ve iki boyutta Gauss teoreminin kullanılmasıyla

$$\frac{1}{S} \int_S (\nabla_\perp \Psi_m \cdot \nabla_\perp \Psi_m) ds = \frac{v_m^2}{S} \int_S |\Psi_m|^2 ds + \frac{1}{S} \oint_L \Psi_m \partial_n \Psi_m dl = 1$$

elde edilir. Burada L konturu yüzeyinden integral $\partial_n \Psi_m|_L = 0$ Neumann probleminin sınır koşulundan dolayı sadeleşir. Problemdeki normalizasyon koşulu integralin sayısal değerini 1 verir. Bu sonuç (2) denkleminin sol tarafını aşağıdaki gibi basitleştirir.

$$\frac{1}{V} \oint_S \mathbf{N} \cdot \mathbf{P}_m ds = c v_m^2 \frac{(\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{z}) \mathbf{P}_{mz}(z, t)|_{z=z_1} + (\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{z}) \mathbf{P}_{mz}(z, t)|_{z=z_2}}{(z_2 - z_1)}$$

$z_2 = z_1 + \delta z$ olduğunu hatırlayalım. $\delta z \ll 1$ kabul edelim. Bundan dolayı, $\mathbf{P}_{mz}(z, t)|_{z=z_2}$

Taylor kuvvet serisine aşağıdaki gibi açılabilir:

$$\mathbf{P}_{mz}(z, t)|_{z=z_2} = \mathbf{P}_{mz}(z, t)|_{z=z_1} + (\delta z) \partial_z \mathbf{P}_{mz}(z, t)|_{z=z_1} + O((\delta z)^2)$$

Normal birim vektör n ve aksenal koordinat z ,

$$(\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{z})|_{n_1=-z} = -1, (\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{z})|_{n_2=-z} = 1$$

ve z_1 keyfi seçilebildiği için,

$$\frac{(\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{z})\mathbf{P}_{mz}(z, t)|_{z=z_1} + (\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{z})\mathbf{P}_{mz}(z, t)|_{z=z_2}}{(z_2 - z_1)} = \partial_z \mathbf{P}_{mz}(z, t) + O(\delta z)$$

elde edilir. Böylece, (2) denkleminin sol tarafı

$$\frac{1}{V} \int_S \mathbf{N} \cdot \mathbf{P}_m ds = c v_m^2 \partial_z \mathbf{P}_m(z, t) + O(\delta z) \quad (4)$$

şeklinde elde edilir. Burada $\mathbf{P}_m(z, t) = (-\partial_\tau h_m(z, t))(\partial_\xi h_m(z, t))$ dir.

Şimdi bu denklemin sağ tarafı elde edilsin. Bunu elde edebilmek için, önce integralin içinde açık formda var olan terimlere bakılsın,

$$\mu_0 (\mathbf{H}_m \cdot \mathbf{H}_m)^2 = v_m^2 (\partial_\xi h_m)^2 \nabla_\perp \Psi_m(\mathbf{r}) \cdot \nabla_\perp \Psi_m(\mathbf{r}) + h_m^2 v_m^4 |\Psi_m(\mathbf{r})|^2$$

ve

$$\varepsilon_0 (\mathbf{E}_m \cdot \mathbf{E}_m)^2 = v_m^2 (\partial_\tau h_m)^2 [\nabla_\perp \Psi_m(\mathbf{r}) \times \mathbf{z}] \cdot [\nabla_\perp \Psi_m(\mathbf{r}) \times \mathbf{z}]$$

kolayca sağlanabilir ki,

$$[\nabla_\perp \Psi_m \times \mathbf{z}] \cdot [\nabla_\perp \Psi_m \times \mathbf{z}] = \nabla_\perp \Psi_m \cdot \nabla_\perp \Psi_m = -\Psi_m \nabla_\perp^2 \Psi_m + \nabla_\perp \cdot (\Psi_m \nabla_\perp \Psi_m). \quad (5)$$

Tekrar, $z_2 - z_1 = \delta z \ll 1$ kabul edilsin. Bundan dolayı, (2) denklemindeki hacim integrali

$$\frac{1}{2V} \int_V [\varepsilon_0 (\mathbf{E}_m \cdot \mathbf{E}_m)^2 + \mu_0 (\mathbf{H}_m \cdot \mathbf{H}_m)^2] dv =$$

$$v_m^2 \frac{1}{2} \left\{ (\partial_\tau h_m)^2 + (\partial_\xi h_m)^2 + v_m^2 h_m^2 \right\} \frac{1}{\delta z} \int_{z_1}^{z_1+\delta z} dz \frac{v_m^2}{S} \int_S |\psi_m|^2 ds + O(\delta z)$$

şeklinde yazılabilir. Burada, $V = (z_2 - z_1)S$ dir. $\Psi_m(\mathbf{r})$ potansiyelinin normalizasyonunu, bu integral için (2) denkleminin sağ tarafında yer alan ve final sonucunda sergilenen şekliyle hesaba katılın

$$\frac{1}{2V} \int_V [\varepsilon_0 (\mathbf{E}_m \cdot \mathbf{E}_m)^2 + \mu_0 (\mathbf{H}_m \cdot \mathbf{H}_m)^2] dv =$$

$$v_m^2 \frac{1}{2} \left\{ (\partial_\tau h_m)^2 + (\partial_\xi h_m)^2 + v_m^2 h_m^2 \right\} + O(\delta z) \quad (6)$$

$\delta z \rightarrow 0$ limit değerine gitmesiyle Poynting teoreminin (2) integrali içindeki formu aşağıdaki gibi elde edilir:

$$W(\xi, \tau) = \frac{1}{2} \left[(\partial_\tau f)^2 + (\partial_\xi f)^2 + f^2 \right]$$

ve Poynting vektörü

$$P_z(\xi, \tau) = c(-\partial_\tau f)(\partial_\xi f) \quad (7)$$

Bu denklem aşağıdaki denkleme eşdeğerdir:

$$\partial_\xi \left[(\partial_\tau f)(\partial_\xi f) \right] - \frac{1}{2} \partial_\tau \left[(\partial_\tau f)^2 + (\partial_\xi f)^2 + f^2 \right] = 0 \quad (8)$$

Matematik olarak, bu diferansiyel denklem çözümler uzayında $f(\xi, \tau)$ fonksiyonunun *lokal* bir özelliğini tesis eder. Fiziksel olarak bu, zaman uzayında modal elektromagnetik alan “*enerjisinin korunumu*” kanunudur.