

EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

(DOKTORA TEZİ)

DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN
EXPONENTIALLY FITTED METODU İLE
SAYISAL ÇÖZÜMÜ ÜZERİNE

Utku ERDOĞAN

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Turgut ÖZİŞ

Matematik Anabilim Dalı

Bilim Dalı Kodu: 403.06.01

Sunuş Tarihi: 16.02.2012

Bornova-İzmir

2012

Utku ERDOĞAN tarafından DOKTORA tezi olarak sunulan ”**Di-feransiyel Denklemlerin Exponentially Fitted metodu ile sayısal çözümü üzerine**” başlıklı bu çalışma E.Ü. Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği ile E.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Eğitim ve Öğretim Yönergesi’nin ilgili hükümleri uyarınca tarafımızdan değerlendirilerek savunmaya değer bulunmuş ve **16.02.2012** tarihinde yapılan tez savunma sınavında aday oybirliği/oyçokluğu ile başarılı bulunmuştur.

Jüri üyeleri

İmza

Jüri Başkanı : Prof.Dr. Emine MISIRLI

Raportör Üye : Prof.Dr. Ali İhsan NESLİTÜRK

Üye : Prof.Dr. Turgut ÖZİŞ

Üye : Doç.Dr. Gamze TANOĞLU

Üye : Yar.Doç.Dr. Ali DENİZ

ÖZET

DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN “EXPONENTIALLY FITTED” (EF) METODU İLE SAYISAL ÇÖZÜMÜ ÜZERİNE

ERDOĞAN, Utku

Doktora Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Tez Yöneticisi: Prof. Dr. Turgut ÖZİŞ

Şubat 2012, 59 sayfa

Bu tezde literatürde ”Exponentially Fitted” (EF) olarak isimlendirilen metotların aralarındaki ilişkiler incelenmiş ve değişik sınıflardan diferansiyel denklemlere uygulamaları ve çeşitli modifikasyonları ele alınmıştır. Klasik integrasyon yöntemlerinin hemen hemen hepsi belirli derecedeki polinom fonksiyonlar ve onların lineer kombinasyonları için kesin çözümler verir. Fakat bu yöntemler sınır tabaka denklemleri, salınım denklemleri gibi bazı problemlerin çözümünde yetersiz kalmaktadır. Bu tip denklemler için uygun metotlar elde etmenin bir yolu klasik metotlarda çeşitli modifikasyonlar yapmak iken, bir diğer yolu da polinomlar dışında üstel ve (veya) trigonometrik baz fonksiyonları kullanmaktır. Bu şekilde hassasiyeti daha yüksek ve daha kararlı metotlar elde etmek mümkündür. Bu tür metotların türetilmesi zahmetli olduğu için sembolik hesaplama yapan programlar yazılmıştır.

Anahtar Sözcükler: Diferansiyel Denklemler, Sonlu Farklar

ABSTRACT**ON THE NUMERICAL SOLUTIONS OF DIFFERENTIAL
EQUATIONS BY EXPONENTIALLY FITTED (EF) METHODS**

ERDOĞAN, Utku

Ph.D. in Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Turgut ÖZİŞ

February 2012, 59 pages

In this thesis, we consider Exponentially Fitted method and its applications to several types of differential equations and its modifications. Classical integration methods are exact for polynomial functions up to certain degree and their linear combinations. However these methods might be insufficient in the numerical approximations of some problems such as boundary layer problems and oscillatory equations. By some modifications to classical integrators, suitable solvers are able to be designed. Another way is to use exponential and (or) trigonometric functions other than polynomials. In this way, it is possible to obtain higher order and more stable methods. Since it is very tedious to derive these kinds of methods, symbolic programs are developed.

Key Words: Differential Equations, Finite Differences

TEŞEKKÜR

Bu çalışma süresince çalışmalarında bilgi ve görüşlerinden yararlandığım Tez Danışmanım Prof. Dr. Turgut ÖZİŞ e, Hollanda da Groningen Üniversitesindeki bir yıllık ziyaretimde danışmanlığımı yürüten Dr. Fred Wubs'a, tez izleme ve sınav jürilerinde bulunan değerli öğretim üyelerine, benimle bilgi ve tecrübelerini paylaşan bu konuda araştırma yapan diğer bilim adamlarına, ÖYP projesini hayata geçiren Devlet Planlama Teşkilatı'na ve BİDEB 2211 programı ile sunduğu destekten dolayı TÜBİTAK'a teşekkür ederim.

Yaşamımın her döneminde beni destekleyen ve yanımda olan aileme, sıkıntılı dönemlerimde manevi destek sunan tüm dostlarıma, aile dostumuz Veysel UZUNKAŞ'a ve eşim Hatice ERDOĞAN'a saygı ve şükranlarımı bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	v
ABSTRACT	vii
TEŞEKKÜR	ix
ŞEKİLLER DİZİNİ	xiii
ÇİZELGELER DİZİNİ	xiv
1 GİRİŞ	1
2 EF METOTLARINA GENEL BAKIŞ	3
2.1 EF Metotlarının Türetilmesi	3
2.2 EFmultistepGenerate Programı	6
2.3 EF Metotlarında Hata Analizi	8
2.4 EF Metotlarında Kararlılık	10
3 İKİNCİ MERTEBEDEN BAŞLANGIÇ DEĞER PROBLEM- LERİ İÇİN İKİ PARAMETRELİ EF METOTLARI	13
3.1 İki Parametrelî Metotların Oluşturulması	13
3.1.1 İki parametrelî EF Euler metodu	14
3.1.2 Runge Kutta metotları	17
3.2 İki Parametrelî Metotlarda Kararlılık	20

İÇİNDEKİLER (devam)

	<u>Sayfa</u>
4 STANDART OLMAYAN SONLU FARKLAR VE SINIR DEĞER PROBLEMLERİ	22
4.1 Standart Olmayan Sonlu Farklar	22
4.2 Standart Olmayan Sonlu Farklar ve EF	23
4.3 Sınır Değer Problemleri için Standart Olmayan Sonlu Farklar . . .	25
4.3.1 Parametrenin belirlenmesi ve şemaların bilgisayar cebiri ile türe- tilmesi	27
4.3.2 Sayısal örnekler	28
5 BAŞLANGIÇ SINIR DEĞER PROBLEMLERİ İÇİN EF ME- TOTLARI	33
5.1 EF Metotları ile Tam Ayrıklaştırma	33
5.2 Yapay Difüzyon ve EF	35
5.3 Burgers Denklemi için EF Metodu	38
5.3.1 Sayısal örnekler	41
5.3.2 Sonuç	43
6 TARTIŞMA VE ÖNERİLER	45
7 EK AÇIKLAMALAR	47
KAYNAKLAR DİZİNİ	55
ÖZGEÇMİŞ	58

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Şekil</u>	<u>Sayfa</u>
2.1 Şema (19) için kararlılık bölgesi, μ ve ω parametrelerinin reel olduğu var-sayılmıştır.	12
3.1 Denklem 31 in EF ile nümerik çözümü, (x, t) düzlemi, (x, x') düzlemi	16
3.2 λ_1 in reel ve sanal kısımlarının zamana göre değişimi	17
3.3 $h = 0.5$ ve $h = 0.71$ için t nin bir fonksiyonu olan $E_n - E_0$	20
3.4 İki parametrelili EF Euler metodunun kararlılık bölgesi	20
4.1 Reel w ve imajiner w için $\psi(w, 0.1)$ adım uzunluğu fonksiyonları	26
4.2 Örnek 4.3.3 için tam çözüm ($A=-3.708149356$ $B=4.2426640686i$) ve EF çözümü	31
4.3 Örnek 4.3.3 için tam çözüm ($A=-7.4162987111i$ $B=-0.7071067810-0.7071067810i$) ve EF çözümü	32
4.4 Örnek 4.3.3 için tam çözüm ($A= 1112444807$ $B= -24.74873733$) ve EF çözümü	32
4.5 Örnek 4.3.3 için tam çözüm($A=-14.83259742$ $B= -0.3535533905-0.3535533905i$)ve EF çözümü	32
5.1 44 denkleminin tam çözümleri	35
5.2 Merkezi farklarla elde edilen çözümler, $k = 1$ ve $k = 0.01$ için	36
5.3 $k=0.001$ için <i>upwind</i> ile elde edilen çözüm	36
5.4 $\nu = 10^{-5}$, $h = 1/180$, $k = 0.01$ için EF ile çözüm	43
5.5 $\nu = 10^{-6}$, $h = 1/180$, $k = 0.01$ için EF ile çözüm	43

ÇİZELGELER DİZİNİ

<u>Çizelge</u>	<u>Sayfa</u>
4.1 $\lambda = 0.5$ için örnek 4.3.1 in çözümleri	29
4.2 $\lambda = 1$ için örnek 4.3.1 in çözümleri	30
4.3 Numerov metodu ile EF metodunun mutlak hataları	30
5.1 $\nu = 1$ $h = 1/80$ $k = 0.001$ için karşılaştırma	41
5.2 $\nu = 1/10$ için diğer metotlarla karşılaştırma	42
5.3 $\nu = 1/100$ için diğer metotlarla karşılaştırma	42

1 GİRİŞ

Diferansiyel denklemlerin çözümü için kullanılan nümerik şemaların polinom fonksiyonlardan ziyade üstel ya da trigonometrik fonksiyonlar için kesin çözüm verecek şekilde oluşturulması fikri 1950 li yıllara kadar dayanmaktadır. Bu şemalar parametre içerip içermemelerine ya da uygulandıkları problem tiplerine göre sınıflandırılabilirler. Exponential Fitted (EF) metotlarına dair literatürdeki çalışmalar özetlenecek olursa; Gautschi (1961) eğer çözümün bazı özellikleri önceden biliniyorsa bunun nümerik metotlarda etkin bir şekilde kullanılabileceğini öngörerek frekansı önceden bilinen trigonometrik fonksiyonları tam olarak integre eden nümerik şemalar geliştirmiştir. Söz konusu metot bir ω parametresine bağlı olup elde edilen formüller $\omega \rightarrow 0$ iken klasik metotlara indirgenir. Bu doğrultuda yapılan çalışmaların bir derlemesi Ixaru and Berghe (2004) de sunulmuştur. EF metotlarının hata ve kararlılık analizinde kullanılan teknikler (Coleman and Ixaru, 2006, 1996) bu tezi oluşturan çalışmalarda da etkili bir şekilde kullanılmıştır. Runge-Kutta ve çok adımlı metotların EF versiyonları da geliştirilmiş ve Schrodinger denklemi, two body denklemi gibi fizikte önem taşıyan pek çok denkleme uygulanmıştır. (Hollevoet et al., 2009; Berghe et al., 1999; Monovasilis et al., 2010)

Yukarıdakilerden bağımsız bir şekilde Mickens standart olmayan sonlu farklar kavramını ortaya atmıştır. Bu sonlu fark şemalarında h adım uzunluğu olmak üzere, klasik türev formüllerinde paydada bulunan h , h^2 terimleri yerine (Mickens, 2002) de belirtilen kurallara bağlı olarak h nın logaritmik, üstel, trigonometrik v.s fonksiyonları cinsinden ifadeleri yazılmıştır. Bu şekilde klasik metotlara kararlılık açısından üstünlük sağlanmıştır.

EF metotlarının etkin bir şekilde kullanıldığı bir diğer alan da konveksiyon difüzyon denklemleridir. Bu tür denklemlerde konveksiyon terimi difüzyon terimine göre daha baskın ise klasik sonlu fark metotları genelde yakınsak değildir. Bu metotları yakınsak yapabilmek için sonlu fark formüllerine yapay difüzyon terimleri eklenir. Yapay difüzyon teriminin belli biçimleri için EF metotları elde edilir. (Roos et al., 2008; Veldman, 2009)

Bu tezde yukarıda yapılan çalışmalar arasında bir bütünlük kurulmuş ve çeşitli alanlardaki uygulamaları ve modifikasyonları ele alınmıştır.

Bölüm 2 de EF metotları ile ilgili genel bilgiler verilmiş, bu metotların hata analizinde kullanılan teknikler ele alınmış ve P -kararlılık kavramı açıklanmıştır. Ayrıca $y^{(r)} = f(x, y)$, $r = 1, 2, \dots$ tipindeki diferansiyel denklemler için çok adımlı EF metotlarını oluşturan bir MAPLE programı sunulmuştur.

Bölüm 3 de birinci türevi içeren ikinci mertebeden başlangıç değer problemleri için iki parametrelili Euler ve Runge Kutta metotları geliştirilmiş, bu metotların hata ve kararlılık analizleri yapılmıştır.

Bölüm 4 iki noktalı lineer olmayan sınır değer problemleri için EF metotları sınıfına dahil edilebilecek olan standart olmayan sonlu fark şemalarına ayrılmıştır. Bu şemalar da yapay bir parametre içermekte ve parametrenin değeri kesme hatasını minimize edecek şekilde belirlenmektedir. Metodun etkinliği Troesher, Duffing gibi iyi bilinen denklemler üzerinden gösterilmiştir.

Bölüm 5 parametre içermeyen EF metotlarının türetilmesi, bu metotların sınır tabaka problemleri, başlangıç-sınır değer problemlerindeki uygulamalarını içermektedir.

Bölüm 6 da EF metotlarının pratikte uygulanabilirliğine ilişkin tespitler yapılmış ve ilintili konularda üzerinde çalışılabilecek konular tartışılmıştır.

Bölüm 7 de tez süresince geliştirilen bazı bilgisayar programlarının kaynak kodlarına ve tez de ele alınan örnekler için bu programlardan elde edilen çıktılara yer verilmiştir.

2 EF METOTLARINA GENEL BAKIŞ

Giriş bölümünde açıklandığı üzere EF metotları literatürde çok farklı alanlarda ve farklı notasyonlarla karşımıza çıkabilmektedir. Ama yine de bazı araştırmacılar ortak kavramları ve gösterimleri benimsemişlerdir. Bu bölümde

$$y^{(r)} = f(x, y) \quad r = 1, 2, \dots \quad (1)$$

tipindeki denklemlerin nümerik çözümleri için EF metotlarının türetilmesine, bu metotların kesme hatalarının bulunmasına yer verilmiş ve $r = 2$ için P-kararlılık kavramı açıklanmıştır.

2.1 EF Metotlarının Türetilmesi

(1) tipindeki denklemlerin nümerik çözümü hala aktif bir araştırma alanıdır. Klasik metotlar denklemlerin bazı fiziksel özelliklerini korumakta yetersiz kalabilir veya kararlılık koşulları çok kısıtlayıcı olabilir.

EF metotları çözümün üstel ya da trigonometrik bir karakter taşıdığı durumlar için geliştirilmiştir. EF metotlarının türetilmesinde h adım uzunluğuna ve $\mathbf{a}$ parametrelerine bağlı olan $\mathfrak{L}$ operatörü kullanılır. $\mathfrak{L}$, verilen herhangi bir sonlu fark şemasına karşı gelen lineer fark operatörü olarak düşünülebilir. EF nin bazı temel kavramları diferansiyel denklemlerin nümerik çözümündeki en basit tek adımlı metot olan Euler metodu üzerinden açıklanacaktır. Aşamaların daha detaylı açıklamaları (Ixaru and Berghe, 2004) de bulunabilir.

$$y_{n+1} = a_1 y_n + a_2 h f(x_n, y_n) \quad (2)$$

şemasını $y' = f(x, y)$ nin nümerik çözümü için önerelim. Bu şemaya karşılık gelen lineer fark operatörü

$$\mathfrak{L}[h, \mathbf{a}]y(x) = y(x + h) - a_1 y(x) - a_2 h y'(x) \quad (3)$$

olacaktır. $\mathbf{a} = [a_1, a_2]$ katsayıları tamamıyla $y(x)$ baz fonksiyonları tarafından $\mathfrak{L}[h, \mathbf{a}]y(x) = 0$ denklemleri ile belirlenir. Klasik integratörler için bu katsayılar sabit olur iken, EF metotlarında parametreye bağımlıdır.

Eşitlik (3) deki $\mathfrak{L}$ operatörünün $\{1, x, x^2, x^3 \dots\}$ polinomlar kümesine uygulanmasıyla

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}[h, \mathbf{a}]1 &= 1 - a_1 \\ \mathfrak{L}[h, \mathbf{a}]x &= (1 - a_1)x + h(1 - a_2) \\ \mathfrak{L}[h, \mathbf{a}]x^2 &= (1 - a_1)x^2 + 2xh(1 - a_2) + h^2\end{aligned}$$

elde edilir.

Genel olarak herhangi bir $\mathfrak{L}$ için $x = 0$ da $\mathfrak{L}[h, \mathbf{a}]x^m$, ($m = 0, 1, 2, \dots$) ifadeleri momentler olarak adlandırılır ve $L_m(h, \mathbf{a})$ ile gösterilirler. Örneğin, (3) için momentler aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\begin{aligned}L_0(h, \mathbf{a}) &= 1 - a_1 \\ L_1(h, \mathbf{a}) &= h(1 - a_2) \\ L_2(h, \mathbf{a}) &= h^2 \\ &\vdots\end{aligned}$$

$y(x) = y_0 + y_1x + y_2x^2 + y_3x^3 \dots$ seri açılımına $\mathfrak{L}$ lineer operatörü uygulanırsa,

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}[h, \mathbf{a}]y(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} y_m \mathfrak{L}[h, \mathbf{a}]x^m \\ &= L_0(h, \mathbf{a})(y_0 + y_1x + y_2x^2 + y_3x^3 \dots) + L_1(h, \mathbf{a})(y_1 + 2y_2x + 3y_3x^2 + \dots) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} L_m(h, \mathbf{a}) D^m y(x)\end{aligned}\tag{4}$$

elde edilir. Böylece herhangi bir fonksiyonun kuvvet serisi açılımına $\mathfrak{L}$ uygulandığında katsayıları momentlerden oluşan yeni bir seri elde edilir. Böyle bir seri yalnızca EF metotlarının değil, klasik metotların hata analizinde de kullanılabilir.

$\mathfrak{L}[h, \mathbf{a}]x^m = 0$, $m = 0, 1, 2, \dots$ koşulları

$$L_m(h, \mathbf{a}) = 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots, M-1\tag{5}$$

koşullarına denktir. Hangi bazla çalışılırsa çalışılsın, sonlu fark formüllerinin oluşturulmasında ilk aşama (5) sistemini tutarlı ve tek çözümlü yapan en büyük M yi belirlemektir.

Eşitlik (3) e geri dönecek olursak, $\{1, x\}$ için $L_0(h, \mathbf{a}) = 1 - a_1 = 0$ ve $L_1(h, \mathbf{a}) = h(1 - a_2) = 0$ dan $M = 2$ ve $a_1 = a_2 = 1$ olduğu görülür. Momentlerin kullanılmasıyla Adams Moulton ve Adams Bashfort (LeVeque, 2007) gibi çok adımlı metotlar kolaylıkla türetilir. Eşitlik (4) yardımıyla klasik Euler metodunun kesme hatası aşağıdaki gibi bulunabilir.

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}[h, \mathbf{a}]y(x) &= \frac{1}{2}L_2(h, \mathbf{a})y^{(2)}(x) + \frac{1}{6}L_3(h, \mathbf{a})y^{(3)}(x) + \dots \\ \mathfrak{L}[h, \mathbf{a}]y(x) &= \frac{1}{2}h^2y^{(2)}(x) + \frac{1}{6}h^3y^{(3)}(x) + \dots\end{aligned}$$

EF metotlarının türetilmesi için momentlerden daha başka fonksiyonlara da ihtiyaç vardır. μ reel ya da I nin ($I^2 = -1$) reel skaler bir katı olsun. Varsayalım ki

$$\{exp(\pm\mu x), xexp(\pm\mu x), x^2exp(\pm\mu x), \dots\}$$

kümesini tam olarak integre eden sonlu fark formüllerini türetmek istiyoruz. Bu durumda $\mathfrak{L}$ operatörü bu kümenin elemanlarına uygulanmalıdır. İlk olarak

$$E_m = \mathfrak{L}[h, \mathbf{a}]x^m exp(\mu x)|_{x=0}$$

tanımlanır ise , $z = \mu h$ olmak üzere

$$\mathfrak{L}[h, \mathbf{a}]exp(\mu x) = exp(\mu x)(exp(\mu h) - a_1 - a_2\mu h)$$

$$\mathfrak{L}[h, \mathbf{a}]exp(\mu x) = exp(\mu x)(exp(z) - a_1 - a_2z)$$

$$\mathfrak{L}[h, \mathbf{a}]exp(\mu x) = exp(\mu x)E_0(z, \mathbf{a})$$

$$\mathfrak{L}[h, \mathbf{a}]exp(-\mu x) = exp(-\mu x)E_0(z, -\mathbf{a})$$

eşitlikleri elde edilir.

$E_m = \frac{\partial E_{m-1}}{\partial \mu}$, $m = 1, 2, \dots$ rekürsiyonun varlığı kolaylıkla gösterilebilir. $\mathfrak{L}[h, \mathbf{a}]x^k exp(\mu x) = 0$ koşulu, $E_k(z, \mathbf{a}) = 0$ olarak da ifade edilebilir. $z = \mu h$ ve $Z = \mu^2 h^2$ değişkenleri ve $G^\pm(Z, \mathbf{a}) = \frac{1}{2}(E_0(z, \mathbf{a}) \pm E_0(-z, \mathbf{a}))$ fonksiyonu kullanılarak, $E_p(z, \mathbf{a}) = 0$ koşulunun $\frac{\partial^p G^\pm(Z, \mathbf{a})}{\partial Z^p} = 0$ koşuluna denk olduğu gösterilebilir.

Bu yeni fonksiyonlar ve operatörler sayesinde, rekürsif bir yapı ve daha sade gösterim elde edilmiştir. Ayrıca burada tanıtılan kavramlar bu tez projesi kapsamında geliştirilen "EFmultistepGenerate" isimli Maple prosedürünün geliştirilmesine büyük katkılar sağlamıştır.

Eşitlik (2) için $\exp(\pm\mu x)$ baz fonksiyonları seçilir ise, $G^\pm(Z, \mathbf{a}) = 0$ koşullarından, EF Euler formülü

$$y_{n+1} = \cosh(z)y_n + h \frac{\sinh(z)}{z} f(x_n, y_n)$$

elde edilir.

EF formüllerinde μ reel ya da tamamen sanal olabilir. η fonksiyonları sayesinde (Conte et al., 2010) her iki durum da reel Z değişkeni cinsinden aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\eta_{-1}(Z) = \begin{cases} \cos(|Z|^{1/2}) & \text{eğer } Z < 0 \\ \cosh(Z^{1/2}) & \text{eğer } Z \geq 0 \end{cases}$$

$$\eta_0(Z) = \begin{cases} \frac{\sin(|Z|^{1/2})}{|Z|^{1/2}} & \text{eğer } Z < 0 \\ 1 & \text{if } Z = 0 \\ \frac{\sinh(|Z|^{1/2})}{|Z|^{1/2}} & \text{eğer } Z > 0 \end{cases}$$

η fonksiyonları rekürsion bağıntıları ve üreteç diferensiyel denklemler ile türetilir. Bu fonksiyonlar arasında sadeleştirme yapabilen Mathematica programı Conte et al. (2010) da sunulmuştur. Fakat *EFmultistepGenerate* programında tüm sonlu fark formülleri η_0 ve η_{-1} cinsinden ifade edilmiştir.

2.2 EFmultistepGenerate Programı

Bu kısımda *EFmultistepGenerate* prosedürünün altyapısını oluşturan beş adımlı algoritma verilecektir. Bu algoritma (Ixaru and Berghe, 2004) de detaylı bir şekilde açıklanmıştır. Verilen herhangi bir sonlu fark operatörü için muhtemel tüm baz fonksiyonları ve bu baz fonksiyonlarına karşılık gelen tüm sonlu fark formülleri bu algoritma ile türetilir.

i) Uygun bir $\mathfrak{L}[h, \mathbf{a}]$ operatörü için klasik momentleri bul:

$$L_m[h, \mathbf{a}] \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

ii)

$$L_m[h, \mathbf{a}] = 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots, M-1$$

ile verilen cebirsel sistemi tutarlı kılan en büyük M tamsayısını belirle.

iii) $z = \mu h$ ve $Z = z^2$ alarak, $E_0(z, \mathbf{a})$ ifadesini oluştur ve $G^\pm(Z, \mathbf{a})$ ile türevleri olan $G^{\pm(p)}(Z, \mathbf{a})$, $p = 1, 2, \dots$ leri hesapla.

iv) Aşağıda verilen, M adet polinom ve üstel fonksiyondan oluşan baz kümesini K ve P cinsinden belirle. $K+2P = M-3$ denkleminin $K \geq -1$ ve $P \geq -1$ için tamsayı çözümlerine karşılık

$$\{1, x, x^2, \dots, x^k, xexp(\pm\mu x), xexp(\pm\mu x), \dots, x^P exp(\pm\mu x)\}$$

kümesi elde edilir. Her bir baz kümesi (K, P) ikilisi ile karakterize edilir.

$K = -1$ baz kümesinin polinom içermediği anlamına gelirken, $P = -1$ hiçbir üstel fonksiyonun baz kümesine dahil edilmediğini ifade eder.

v) Aşağıdaki cebirsel sistemi çöz.

$$L_k[h, \mathbf{a}] = 0 \quad 0 \leq k \leq K$$

$$G^{\pm(p)}(Z, \mathbf{a}) = 0 \quad 0 \leq p \leq P$$

Bu algoritma *EFmultistepGenerate* isimli Maple prosedürünün temelini oluşturur. Bu program $\mathfrak{L}$ yi, denklemin mertebesi olan r yi, katsayıların seri açılımı isteniyorsa bu serinin terim sayısını girdi olarak alır ve tüm çok adımlı lineer metotları η fonksiyonları cinsinden ifade eder. Her bir şema K ve P ile karakterize edildiğinden, bu tamsayılarla karşılık gelen şemaların katsayıları ve bu katsayıların seri açılımları hesaplama sonunda çıktı olarak yazdırılır. Bu prosedürün kaynak kodları bölüm 7 de verilmiştir.

Örnek 2.2.1 (Berghe and Daele, 2009) ve (Hollevoet et al., 2009) makalelerinde EF Numerov metotları ele alınmıştır. Yazarlar ikinci mertebeden $y'' = f(x, y)$ diferansiyel denklemi için

$$y_{n-1} + a_0 y_n + y_{n+1} = h^2(b_1 f_{n-1} + b_0 f_n + b_1 f_{n+1}) \quad (6)$$

biçimindeki fark şemasını ele almışlardır. Bu şemaya karşılık gelen operatör

$$\mathfrak{L}[h, \mathbf{a}]y(x) = y(x-h) + a_0 y(x) + y(x+h) - h^2(b_1 y''(x-h) + b_0 y''(x) + b_1 y''(x+h))$$

dır. Fakat *EFmultistepGenerate* programı $\mathfrak{L}$ operatörünü MAPLE sözdizimine uygun olarak aşağıdaki biçimde kabul edecektir.

```
L:=y->eval(y,x=x-h)+a[0]*y+eval(y,x=x+h)-h^2*
(b[0]*diff(y,x$2)+b[1]*(eval(diff(y,x$2),x=x+h)
+eval(diff(y,x$2),x=x-h)));
```

Denklem ikinci mertebeden olduğu için,katsayıların beşinci mertebeden seri açılımlarını istediğimizi varsayarak

```
EFmultistepGenerate(L,2,5);
```

komutu ile bölüm 7 de verilen çıktıları elde ederiz.

2.3 EF Metotlarında Hata Analizi

$\Omega = [a, b]$, $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq b$, $g(x)$ negatif olmayan ölçülebilir ağırlık fonksiyonu ve $f(x)$, $g(x)$ e göre integrallenebilir bir fonksiyon olmak üzere

$$\int_a^b g(x)f(x)dx = \sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^{m-1} A_{ki}f^{(k)}(x_i) + E[f] \quad (7)$$

şemasını ele alalım. Burada $L[.]$ operatörü verilen herhangi bir fonksiyonlar kümesinin elemanları için sıfırlanan m . mertebeden lineer diferensiyel operatör olmak üzere , $E[.]$, $L[f] = 0$ diferansiyel denkleminin çözümleri için sıfırlanan ($E[f] = 0$) bir operatördür. Bu şekilde

$$\int_a^b g(x)f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^{m-1} A_{ki}f^{(k)}(x_i) \quad (8)$$

yaklaşımı $L[f] = 0$ denklemini çözümü olan baz fonksiyonları için tam sonuç verecektir. Gerçekten de nümerik analizde sayısal integral, sayısal türev, diferensiyel denklemlerin çözümü için çok adımlı metotlar (8) formunda yazılabilir. Örneğin;

$$y''(0) = a_1(y(h) + y(-h)) + a_2y(0)$$

ile verilen sayısal türev formülü için $g(x) = 0$, $n = 3$, $x_1 = -h = -x_3$,
 $x_2 = 0$, $A_{01} = A_{03} = a_1$, $A_{02} = a_2$, $A_{22} = -1$, $A_{2,1} = A_{2,3} = 0$,
 $A_{1k} = 0$, $k = 1, 2, 3$ olur.

A_{ki} katsayıları bilindikten sonra verilen nümerik formülün kesme hatası $E[f]$ olacaktır. Coleman ve Ixaru (2006), $E[f]$ yi integral formunda ifade etmişlerdir. Genel olarak, $E[f]$ yi bulmak için şöyle bir yol izlenebilir (Coleman and Ixaru, 2006)

1. L operatorünün çekirdeği olan $K(x, z)$ yi $\left[\frac{\partial^k}{\partial x^k} K(x, z) \right]_{x=z} = \delta_{k,m-1}$,
 $(k = 0, 1, 2 \dots m-1)$ koşulları altında bul.
2. $\phi_0(x) = -\int_a^x K(t, x)g(t)dt$ ve $\phi_{i+1}(x) = \phi_i(x) + \sum_{k=0}^{m-1} A_{k,i+1} \left[\frac{\partial^k}{\partial x^k} K(x, z) \right]_{z=x_{i+1}}$,
 $(i = 0, 1 \dots n-1)$ iterasyonu ile ϕ_i fonksiyonlarını türet.
3. $\Phi(x) = \phi_i(x)$, $x_i < x < x_{i+1}$ olmak üzere

$$E[f] = \sum_{i=0}^n \int_{x_i}^{x_{i+1}} \phi_i(x) L[f](x) dx = \int_a^b \Phi(x) L[f](x) dx \quad (9)$$

dir.

Eğer $f \in C^m(a, b)$ ve $\Phi(x)$, (a, b) aralığında işaret değiştirmiyorsa, eşitlik (9) aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$E[f] = L[f](\nu) \int_a^b \Phi(x) dx \quad \nu \in (a, b) \quad (10)$$

Örnek 2.3.1 İkinci mertebeden $y'' = f(x, y)$ denkleminin çözümü için üç adımlı

$$y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1} = \frac{2(\cosh(\lambda h) - 1)}{\lambda^2} f(x_n, y_n) \quad (11)$$

EF metodunu ele alalım. Bölüm 4 de bu şemanın $\{1, x, e^{\lambda x}, e^{-\lambda x}\}$ için tam sonuç verdiği gösterilmiştir. Bu küme $L = (\frac{d^4}{dx^4} - \lambda^2 \frac{d^2}{dx^2})$ operatörünü sıfırlar.
 $x_1 = -h$, $x_2 = 0$, $x_3 = h$ ve $g(x) = 0$, $A_{01} = -1$, $A_{02} = 2$,
 $A_{03} = -1$, $A_{1r} = 0$, $A_{3,r} = 0$, $(r = 1..3)$, $A_{22} = \frac{2(\cosh(\lambda h) - 1)}{\lambda^2}$,

$A_{21} = 0, \quad A_{23} = 0, \quad m = 4$ (L nin mertebesi), $n = 3$ (nokta sayısı) olduğu açıktır. Yukarıda verilen adımları izlersek

$$K(x, t) = A + B(x - t) + Ce^{\lambda(x-t)} + De^{-\lambda(x-t)}$$

$$\left[\frac{\partial^k}{\partial x^k} K(x, z) \right]_{x=z} = \delta_{k,m-1}, \quad k = 0, 1, 2 \dots m - 1 \text{ koşulları ile}$$

$$K(x, t) = \frac{1}{\lambda^2}(x - t) - \frac{1}{2\lambda^3}e^{\lambda(x-t)} + \frac{1}{2\lambda^3}e^{-\lambda(x-t)}$$

bulunur. 2. adımda verilen iterasyon ile

$$\phi_0 = 0$$

$$\phi_1 = -\frac{1}{\lambda^2}(x + h) + \frac{1}{2\lambda^3}e^{\lambda(x+h)} - \frac{1}{2\lambda^3}e^{-\lambda(x+h)}$$

$$\phi_2 = \phi_1 + 2 \frac{x}{\lambda^2} - \frac{e^{\lambda x}}{\lambda^3} + \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda^3} + 2 (\cosh(\lambda h) - 1) \left(-1/2 \frac{e^{\lambda x}}{\lambda} + 1/2 \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} \right) \lambda^{-2}$$

fonksiyonları elde edilir ve eşitlik (10) dan

$$E[y] = -1/2 \left(2h^2 - 4 \frac{\cosh(\lambda h) - 1}{\lambda^2} \right) \lambda^{-2} (y^{iv}(\nu) - \lambda^2 y''(\nu))$$

bulunur.

2.4 EF Metotlarında Kararlılık

Klasik nümerik metotlardaki A- kararlılık, sıfır kararlılık (LeVeque, 2007) gibi kavramlar EF metotlara da uygulanabilir. Fakat EF metotlarındaki parametreye bağımlılık bu tür kararlılık testlerinin direkt olarak uygulanmasını zorlaştırmaktadır. Ayrıca EF metotlarının genelde salınım problemlerine uygulandığını gözönünde bulundurursak bu tür denklemler için farklı bir kararlılık analizi yapılmalıdır. $q = q(t)$ olmak üzere

$$q'' = -q \tag{12}$$

denklemini ele alalım. $p = q'$ değişkeni tanıtılarak denklem (12) birinci mertebeden lineer diferensiyel denklem sistemi

$$q' = p$$

$$p' = -q$$

olarak yazılabilir. Bu sisteme herhangi klasik bir nümerik metot uygulanıldığında $X_n = [q_n \ p_n]^T$ ve G uygulanan nümerik metoda bağlı olan 2×2 boyutunda bir matris olmak üzere

$$X_{n+1} = GX_n \quad (13)$$

şeması elde edilir. Uygun başlangıç koşulları altında (12) denkleminin $\forall t$ için (q, p) faz düzlemindeki çözümü birim çember üzerinde kalır. Şema (13) ün türettiği çözümlerin birim çember üzerinde kalması için gerek şart G matrisinin özdeğerlerinin her ikisinde birim çember üzerinde olmasıdır ($|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$). Bu özelliği sağlamayan herhangi bir nümerik metodun ürettiği çözümler $t \rightarrow \infty$ iken ya sönümlenecektir ya da genlikleri sınırsız bir şekilde büyüyecektir (Strang, 2007).

Yukarıda anlatılanlar periyodik çözümlere sahip diferensiyel denklemlerin nümerik analizinde yeni bir kararlılık biçiminin formal tanımı için motivasyon niteliğindedir. Lambert and Watson (1976) tarafından periyodik ve simetrik başlangıç değer problemleri için ortaya atılan P- kararlılık kavramı, Coleman ve Ixaru (Coleman and Ixaru, 1996) tarafından EF metotları için tekrar gözden geçirilmiştir. P kararlılıkta salınım denklemleri ele alındığından dolayı test denklemi olarak

$$y'' = -\omega^2 y \quad (14)$$

kullanılır. Bu denkleme aşağıdaki biçimde iki adımlı herhangi bir EF metodu uyguladığımızı varsayalım.

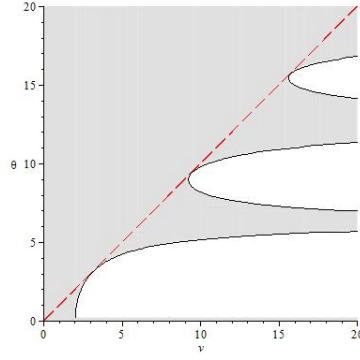
$$y_{n+1} + a_0 y_n + y_{n-1} = h^2 (b_0 f_{n+1} + b_1 f_n + b_2 f_{n-1}) \quad (15)$$

Katsayılar, EF parametresi olan μ ye ve adım uzunluğu h a bağlı olacaktır. $\theta = \mu h$, $\nu = \omega h$ olmak üzere, (14) denklemi için (15) şeması uygulandığında,

$$y_{n+1} - 2R_{nm}(\nu^2; \theta)y_n + y_{n-1} = 0 \quad (16)$$

denklemi elde edilirken, (14) ün tam çözümü

$$y(x_{n+1}) - 2\cos(\nu)y(x_n) + y(x_{n-1}) = 0 \quad (17)$$



Şekil 2.1: Şema (19) için kararlılık bölgesi, μ ve ω parametrelerinin reel olduğu varsayılmıştır.

olduğundan R_{nm} in $\cos \nu$ ye bir yaklaşım olduğu görülebilir. Bu notasyonlara dayanarak aşağıdaki tanımlar verilebilir.

Tanım 2.4.1 $\nu - \theta$ düzleminde $|R_{nm}(\nu^2, \theta)| < 1$ koşulunu sağlayan (ν, θ) ikililerinin oluşturduğu bölge kararlılık bölgesi olarak adlandırılır. $|R_{nm}(\nu^2, \theta)| = 1$ eğrisi ise bu bölgenin sınırı olacaktır. $\square$

Bu tanıma göre, (16) şemasının

$$\zeta^2 - 2R_{nm}(\nu^2, \theta)\zeta + 1 = 0 \quad (18)$$

ile verilen karakteristik denklemi kökleri $|R_{nm}(\nu^2, \theta)| < 1$ için karmaşık düzlemde birim çember üzerinde olacaktır. Bu da Tanım 2.4.1 in, yukarıda matris analizi ile verilen kararlılık tanımı ile tutarlı olduğunu gösterir.

Tanım 2.4.2 $\nu = \omega h$ ve $\theta = \mu h$ olmak üzere kararlılık fonksiyonu R_{nm} olan bir EF metod ele alındığında $\forall \mu, \omega, h$ için $|R_{nm}(\nu^2, \theta)| < 1$ eşitsizliği sağlanıyor ise sözkonusu metot P-kararlıdır denir. $\square$

Örnek 2.4.1 $\{1, x, \sin(\mu x), \cos(\mu x)\}$ fonksiyonları için tam sonuç veren ($\theta = \mu h$)

$$y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1} = \frac{2(1 - \cos(\theta))}{\theta^2} h^2 f_n \quad (19)$$

şeması için kararlılık fonksiyonu $R = 1 - (\omega h)^2 \frac{2(1 - \cos(\theta))}{\theta^2}$ olduğundan bu metodun kararlılık bölgesi şekil (2.1) de görüldüğü gibidir.

3 İKİNCİ MERTEBEDEN BAŞLANGIÇ DEĞER PROBLEMLERİ İÇİN İKİ PARAMETRELİ EF METOTLARI

EF metotlarının çoğu birinci türevi içermeyen $y'' = f(x, y)$ biçimindeki ikinci mertebeden diferensiyel denklemlerin çözümleri için geliştirilmişlerdir.

Bu bölümde ise birinci türevi de içeren otonom

$$x'' = f(x(t), x'(t)) \quad (20)$$

biçimindeki başlangıç değer problemleri için iki parametrelİ EF metotları ele alınmış ve bu parametrelerin hesaplanması için teknikler geliştirilmiştir. Ayrıca bazı test problemlerine uygulanarak bu parametrelerin çözüme etkisi incelenmiştir. Önerilen nümerik şemanın yakınsaması için f üzerinde başlangıç değer problemleri için varlık teklik teoreminin (Ross, 1966) hükümlerine ek olarak kısıtlar konulacaktır.

3.1 İki Parametrelİ Metotların Oluşturulması

Birinci türevi içermeyen $x'' = f(t, x)$ biçimindeki başlangıç değer problemlerinin EF metodu ile çözümünde $\lambda \in \mathbb{R}$ veya $\lambda \in i\mathbb{R}$ olmak üzere $\{e^{\lambda t}, e^{-\lambda t}\}$ elemanlarını içeren baz kümeleri esas alınır. Bu elemanlar

$$x'' - \lambda^2 x = 0$$

denkleminin lineer bağımsız çözümleridir. Bu denkleme birinci türev eklenirse,

$$x'' - cx' + kx = 0 \quad (21)$$

$\{e^{\lambda t}, e^{-\lambda t}\}$ elemanları λ nın hiç bir değeri için denklem (21) nin lineer bağımsız çözümleri olamazlar. Bu durumda iki parametre ile çalışmak daha işlevsel olacaktır. Yani $e^{\lambda t}, e^{-\lambda t}$ elemanları yerine $e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}$ elemanlarını içeren EF şemaları geliştirilmelidir.

3.1.1 İki parametrelili EF Euler metodu

$y' = f(t, y)$ denklemi için

$$y_{n+1} = a_1 y_n + a_2 h f(t_n, y_n) \quad (22)$$

şemasının $e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}$ elemanları için tam çözüm üretmesi istenirse,

$$\mathfrak{L}[h, \mathbf{a}]y(t) = y(t+h) - a_1 y(t) - a_2 h y'(t) \quad (23)$$

operatörü üzerinde

$$L[h, \mathbf{a}]e^{\lambda_1 t} = 0 \quad L[h, \mathbf{a}]e^{\lambda_2 t} = 0$$

koşulları uygulanır ve katsayılar

$$a_1 = \frac{e^{\lambda_1 h} \lambda_2 - e^{\lambda_2 h} \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

$$a_2 = \frac{e^{\lambda_2 h} - e^{\lambda_1 h}}{(\lambda_2 - \lambda_1)h}$$

olarak bulunur. $\lambda_1 \rightarrow 0$ ve $\lambda_2 \rightarrow 0$ iken $a_1 \rightarrow 1$ ve $a_2 \rightarrow 1$ olduğu açıktır.

Parametre seçimi: $x'' = f(t, x)$ biçimindeki başlangıç değer problemlerinin EF şemaları genelde tek bir parametre içerir ve bu parametrenin değerinin belirlenmesi çözümün hassasiyeti ve denklemin ifade ettiği dinamik sistemin bazı niteliksel özelliklerin korunması açısından oldukça önemlidir. Literatürde pek çok yaklaşım vardır. Bazı yazarlar bu parametrenin değerinin sabit olduğunu ve önceden bilindiğini varsayarlar. (Kalogiratos et al., 2009; Monovasilis et al., 2010). Bir diğer yaklaşım da kesme hatasının minimizasyonundan bu parametreyi belirleyecek denklem elde etmektir (Ixaru et al., 2002; Ramos and Vigo-Aguiar, 2010). Enerjiyi koruyan denklemlerin EF ile geometrik nümerik integrasyonunda ise (Daele and Berghe, 2007) Hamiltonian'ın minimizasyonundan parametreyi belirleyecek denklem elde edilebilir. Fakat $x'' = f(x(t), x'(t))$ denkleminde genelde enerji korunmaz ve parametre değerlerinin sabit olması beklenemez. Dolayısıyla her adımda parametrelerin yeni değerlerini belirleyecek olan cebirsel denklemler kesme hatasından belirlenebilir. F ve G sürekli, $\frac{\partial F}{\partial u}, \frac{\partial F}{\partial v}, \frac{\partial G}{\partial u}$ ve $\frac{\partial G}{\partial v}$ türevleri mevcut ve sürekli olmak üzere, şema (22)

$$u' = F(u(t), v(t))$$

$$v' = G(u(t), v(t)) \quad (24)$$

sistemine uygulanırsa

$$\begin{aligned} u_{i+1} &= \frac{e^{\lambda_1 h} \lambda_2 - e^{\lambda_2 h} \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} u_i + \frac{e^{\lambda_2 h} - e^{\lambda_1 h}}{(\lambda_2 - \lambda_1)} F(u_i, v_i) \\ v_{i+1} &= \frac{e^{\lambda_1 h} \lambda_2 - e^{\lambda_2 h} \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} v_i + \frac{e^{\lambda_2 h} - e^{\lambda_1 h}}{(\lambda_2 - \lambda_1)} G(u_i, v_i) \end{aligned} \quad (25)$$

EF ileri Euler şeması elde edilir. Bir önceki bölümde verilen kesme hatası bulma tekniklerini kullanarak,

$$\begin{aligned} \tau_1(t_i) &= \frac{1}{2}(\lambda_1 \lambda_2 u(t_i) - u'(t_i)(\lambda_1 + \lambda_2) + u''(t_i))h^2 + o(h^3) \\ \tau_2(t_i) &= \frac{1}{2}(\lambda_1 \lambda_2 v(t_i) - v'(t_i)(\lambda_1 + \lambda_2) + v''(t_i))h^2 + o(h^3) \end{aligned} \quad (26)$$

elde edilir. h^2 nin katsayılarını sıfıra eşitleyerek hem metodun mertebesini arttırabilir hem de parametreleri verecek cebirsel denklemleri elde edebiliriz.

$$\begin{aligned} \tau_1(t_i) &= \lambda_1 \lambda_2 u(t_i) - u'(t_i)(\lambda_1 + \lambda_2) + u''(t_i) = 0 \\ \tau_2(t_i) &= \lambda_1 \lambda_2 v(t_i) - v'(t_i)(\lambda_1 + \lambda_2) + v''(t_i) = 0 \end{aligned} \quad (27)$$

(27) sisteminde her i adımında $u(t_i)$, $u'(t_i)$, $u''(t_i)$ ve $v(t_i)$, $v'(t_i)$, $v''(t_i)$ değerleri sistem (24) vasıtasıyla hesaplanabileceğine göre (27) eşitlikleri λ_1 ve λ_2 den oluşan, lineer olmayan cebirsel denklem sistemi olarak düşünülebilir. Fakat

$$\begin{aligned} \alpha &= \lambda_1 \lambda_2 \\ \beta &= \lambda_1 + \lambda_2 \end{aligned} \quad (28)$$

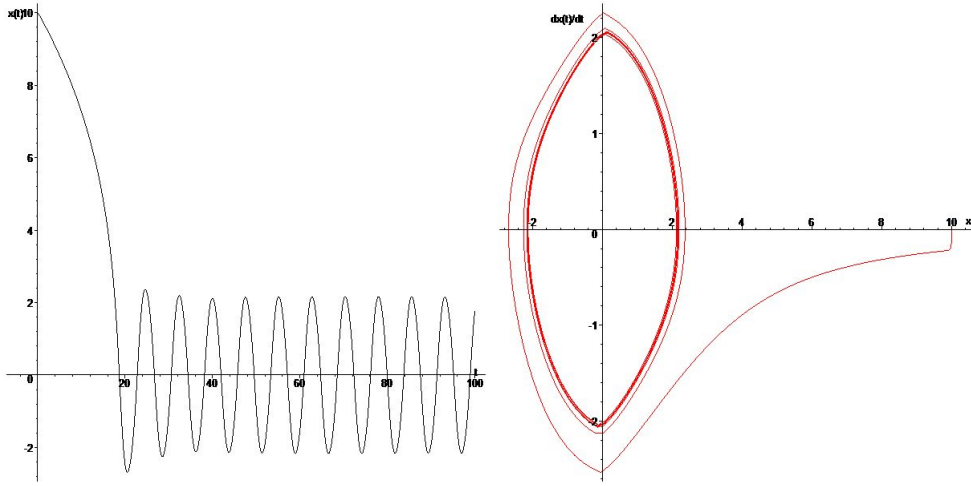
dönüşümleri altında

$$\begin{aligned} \alpha u(t_i) - \beta u'(t_i) &= -u''(t_i) \\ \alpha v(t_i) - \beta v'(t_i) &= -v''(t_i) \end{aligned} \quad (29)$$

2x2 boyutunda lineer denklem sistemi elde edilir. α ve β belirlendikten sonra, eşitlik (28) den λ_1 ve λ_2 nin

$$r^2 - \beta r + \alpha = 0 \quad (30)$$

denkleminin kökleri olacağı açıktır. Bu denklemin köklerinin reel ya da kompleks olmasına bağlı olarak nümerik çözüm her adımda üstel ve/veya trigonometrik fonksiyonlar cinsinden ifade edilebilir. Dolayısıyla, çok farklı tiplerde davranış gösteren diferansiyel denklemler bu metotla integre edilebilir. Nümerik çözümün davranışı ise tamamen parametreler tarafından belirlenir.



Şekil 3.1: Denklem 31 in EF ile nümerik çözümü, (x, t) düzlemi, (x, x') düzlemi

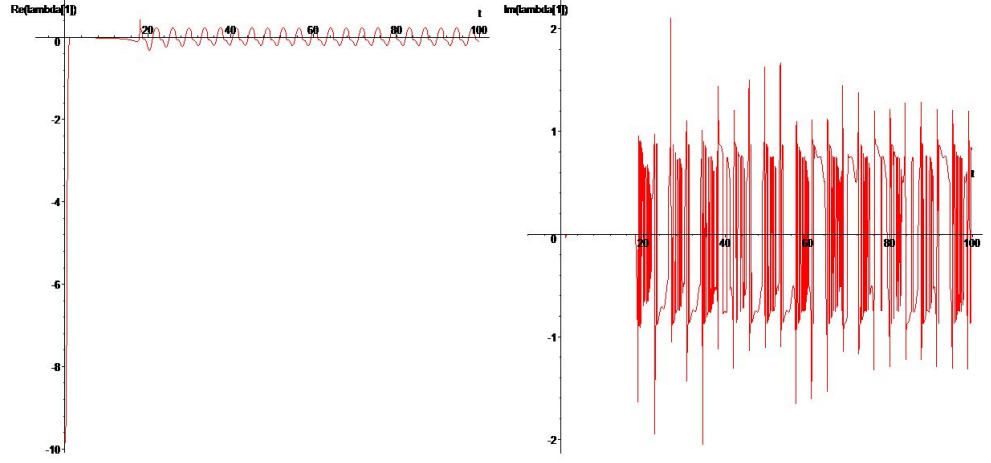
Bu tekniği denklem (20) ye uygulamak için $x = u$ ve $x' = v$ dönüşümleri yapılmalıdır.

Örnek 3.1.1 Küp kök Van der pol denklemini ele alalım.

$$\begin{aligned} x'' + x^{\frac{1}{3}} &= \epsilon(1 - x^2)x' \\ x(0) &= 10 \quad x'(0) = 0, \quad \epsilon = 0.1 \end{aligned} \quad (31)$$

(31) denkleminin faz düzlemindeki çözümleri bir kararlı limit döngüsü oluşturur. Yani başlangıç noktasından bağımsız olarak tüm çözümler faz düzleminde kapalı bir eğriye gider (Ramos, 2006b).

Şekil 3.1 de denklem (31) in çözümünün (x, t) ve (x, x') düzlemlerindeki grafikleri verilmiştir. Şekil 3.2 de ise parametrelerden birinin reel ve sanal kısımlarının zamana göre grafikleri verilmiştir. Dikkat edilirse, çözüm limit döngüsünü yakalayınca kadar monoton davranışlar göstermektedir, dolayısıyla parametre reeldir. Fakat salınım başladığında reel kısım salının genliğini kontrol ederken, sanal kısımda salının frekansını kontrol etmektedir. Benzer şekilde daha yüksek mertebeden çok adımlı metotlar türetmek mümkündür.



Şekil 3.2: λ_1 in reel ve sanal kısımlarının zamana göre değişimi

3.1.2 Runge Kutta metotları

Genel olarak, $y' = f(t, y)$ denklemi için s aşamalı bir Runge Kutta (RK) formülü,

$$\begin{array}{c|ccc} c_1 & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ c_2 & a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_n & a_{n1} & \dots & a_{nn} \\ \hline & b_1 & \dots & b_n \end{array}$$

ile verilen Butcher tablosu üzerinden

$$Y_i = y_n + \sum_{j=1}^s a_{ij} f(t + c_i h, Y_j) \quad j = 1, 2, \dots, s$$

dahili aşamaları,

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{j=1}^s b_j f(t + c_j h, Y_j)$$

ve harici aşaması ile tanımlanır. (LeVeque, 2007)

EF Runge Kutta formüllerinde bazı katsayılar klasik RK formüllerinden direkt alınırken, geri kalan katsayılar üstel ya da trigonometrik fonksiyonları içeren bir baz kümesinin elemanları için tam çözüm verecek şekilde seçilir. Fakat çok adımlı metotlarda olduğu gibi EF Runge Kutta metotlarında da genelde tek parametrelili baz fonksiyonları ele alınmıştır (Berghe et al., 1999, 2000). Bu kısımda iki aşamalı iki parametrelili Runge Kutta metodu

geliştirilecektir. Böylelikle EF Runge Kutta metotları birinci türevi de içeren ikinci mertebeden $x'' = f(x, x')$ biçimindeki başlangıç değer problemlerine de uygulanabilecektir.

$y' = f(t, y)$ birinci mertebeden denklemi için

0	0	0
γ_2	c_2	a_{21}
		$b_1 \quad b_2$

tablosundan

$$Y_1 = f(t_n, y)$$

$$Y_2 = \gamma_2 y_n + h a_{21} f(t_n, Y_1)$$

$$y_{n+1} = y_n + h (b_1 f(t_n, Y_1) + b_2 f(t_n + c_2 h, Y_2)) \quad (32)$$

dahili ve harici aşamalar yazılır. Şema (32) de ikinci eşitlik $\{e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}\}$ elemanlarını integre edecek şekilde, üçüncü eşitlik ise $\{1, e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}\}$ elemanlarını integre edecek şekilde düzenlenir ise,

$$\mathfrak{L}_2[h, \mathbf{a}]y(t) = y(t + c_2 h) - \gamma_2 y(t) - h a_{21} y'(t)$$

$$\mathfrak{L}[h, \mathbf{a}]y(t) = y(t + h) - y(t) - h(b_1 y'(t) + b_2 f(t + c_2 h, Y_2)) \quad (33)$$

operatörleri için

$$\mathfrak{L}_2[h, \mathbf{a}] \exp(\lambda_1 t) = 0$$

$$\mathfrak{L}_2[h, \mathbf{a}] \exp(\lambda_2 t) = 0$$

$$\mathfrak{L}[h, \mathbf{a}] \exp(\lambda_1 t) = 0$$

$$\mathfrak{L}[h, \mathbf{a}] \exp(\lambda_2 t) = 0$$

$$\mathfrak{L}[h, \mathbf{a}] 1 = 0$$

koşullarından katsayılar aşağıdaki gibi belirlenir.

$$\begin{aligned} a_{2,1} &= -\frac{-e^{\lambda_1 c_2 h} + e^{\lambda_2 c_2 h}}{h(\lambda_1 - \lambda_2)} \\ \gamma_1 &= \frac{e^{\lambda_2 c_2 h} \lambda_1 - \lambda_2 e^{\lambda_1 c_2 h}}{\lambda_1 - \lambda_2} \\ b_2 &= -\frac{e^{\lambda_2 h} \lambda_1 - \lambda_1 - e^{\lambda_1 h} \lambda_2 + \lambda_2}{\lambda_1 h (-e^{\lambda_2 c_2 h} + e^{\lambda_1 c_2 h}) \lambda_2} \\ b_1 &= -\frac{\lambda_2 e^{h(\lambda_2 c_2 + \lambda_1)} - e^{\lambda_2 c_2 h} \lambda_2 - \lambda_1 e^{h(\lambda_1 c_2 + \lambda_2)} + e^{\lambda_1 c_2 h} \lambda_1}{\lambda_1 h (-e^{\lambda_2 c_2 h} + e^{\lambda_1 c_2 h}) \lambda_2} \end{aligned}$$

İki adımlı klasik RK metodunda alındığı gibi $c_2 = 2/3$ için kesme hatası

$$\tau = \frac{1}{6}f_{yy}h^3(y''(t_i) - (\lambda_1 + \lambda_2)y'(t_i) + \lambda_1\lambda_2y(t_i)) + o(h^4) \quad (34)$$

olarak bulunur.

Şema (32)

$$u'(t) = F(u(t), v(t))$$

$$v'(t) = G(u(t), v(t))$$

sistemine uygulanırsa kesme hatası

$$\tau_1 = C_1h^3(u''(t_i) - (\lambda_1 + \lambda_2)u'(t_i) + (\lambda_1\lambda_2)u(t_i)) + o(h^4)$$

$$\tau_2 = C_2h^3(v''(t_i) - (\lambda_1 + \lambda_2)v'(t_i) + (\lambda_1\lambda_2)v(t_i)) + o(h^4)$$

olacaktır. Bir önceki kısımda olduğu gibi, h^3 ün katsayıları sıfıra eşitlenerek λ_1, λ_2 parametrelerini belirleyecek denklemler elde edilir. Bölüm 7 de bu kısımda geliştirilen RK tekniği bir MAPLE prosedürü olarak sunulmuştur.

Örnek 3.2.1 Hamiltonian'ı

$$E(p, q) = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\tau^2q^2 - \epsilon\frac{1}{4}q^4$$

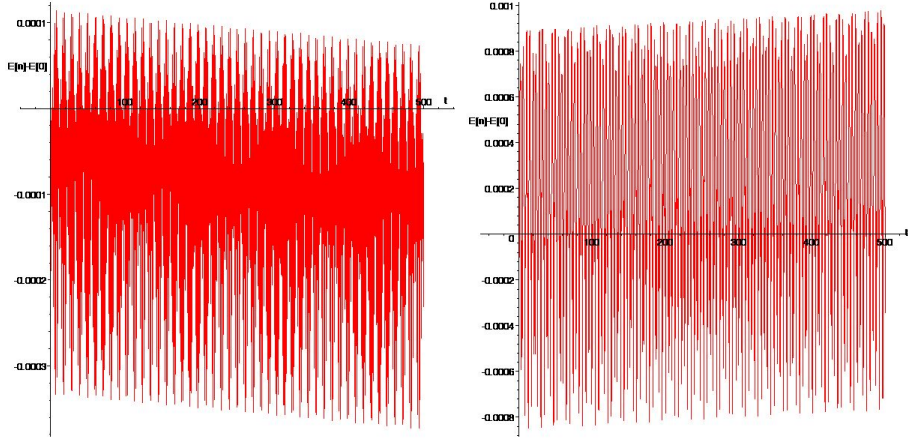
olan bir diferansiyel denklem

$$p' = -\tau^2q + \epsilon q^3 \quad q' = p$$

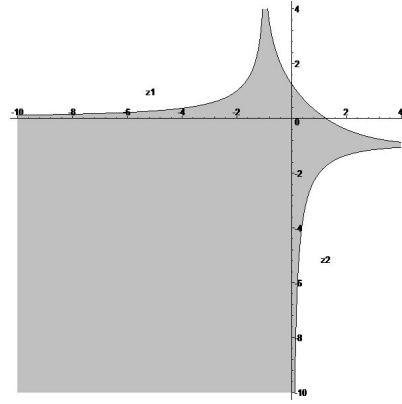
şeklinde ya da başka bir gösterimle

$$q'' + \tau^2q = \epsilon q^3$$

olarak yazılabilir. Burada $\tau = 2$ and $\epsilon = 0.1$ alınarak RK tekniği kullanılmıştır. Örneğin klasik Euler metodunun kararlılık koşulu $|h\omega| < 2$ iken, adım uzunlukları $h = 0.5$ ve $h = 0.71$ alınarak bu koşul ihlal edilmiş fakat şekil 3.3 de görülen kararlı çözümler elde edilmiştir. Bu kısımda sunulan metotlar geometrik integrator (Hairer et al., 2003) olarak geliştirilmemelerine rağmen görece olarak büyük adım uzunlukları için bile Hamiltonian'ın korunumunda başarılı olmuşlardır. Örneğin, $h = 0.5$ için iki parametrelili EF Runge Kutta ile hesaplanan nümerik Hamiltonian, (Daele and Berghe, 2007) de hesaplanandan daha korunumludur.



Şekil 3.3: $h = 0.5$ ve $h = 0.71$ için t nin bir fonksiyonu olan $E_n - E_0$



Şekil 3.4: İki parametrelili EF Euler metodunun kararlılık bölgesi

3.2 İki Parametrelili Metotlarda Kararlılık

Klasik integratörlerin kararlılık analizinde (LeVeque, 2007), herhangi bir tek adımlı metot

$$y' = \lambda y$$

test denkleminde uygulandığında elde edilen

$$y_{n+1} = R(z)y_n \quad z = \lambda h$$

fark denkleminin sınırlı çözümler türetmesi için $|R(z)| < 1$ olması gerekir. Böylece karmaşık düzlemde kararlılık bölgesi belirtilir. Fakat EF metodları parametreye bağlı olduğundan dolayı R sadece z nin değil EF parametrelerinin de fonksiyonu olacaktır. Dolayısıyla kararlılık bölgelerinin görselleştirilmesi bir hayli güçtür.

İki parametrelili EF şeması için

$$y_{n+1} = R(z, z_1, z_2)y_n$$

$$z_1 = \lambda_1 h \quad z_2 = \lambda_2 h$$

ile türetilen nümerik çözümlerin sınırlı olması için $|R(z, z_1, z_2)| < 1$ koşulu ile bir kararlılık bölgesi belirlenir. Her bir parametrenin $\mathbb{C}$ de olduğu gözünde bulundurulursa kararlılık bölgesi 6 boyutludur. Kararlılık bölgesinin genişliği tamamıyla parametrelerin seçimine bağlıdır. Örneğin EF Euler metodunda $z = -1$ ve $z_1 = -1$ olarak alınırsa $\forall z_2 \in \mathbb{C}$ için $|R(-1, -1, z_2)| < 1$ olurken, $z = -1$, $Im(z_1) = Im(z_2) = 0$ için kararlılık bölgesinin $(Re(z_1), Re(z_2))$ düzlemindeki görüntüsü şekil 3.4 da verilmiştir.

Sonuç olarak parametre seçimi iyi yapıldığı sürece EF metotlarının kararlılık analizinde adım uzunluklarına dair ciddi kısıtlamalar olmaz.

4 STANDART OLMAYAN SONLU FARKLAR VE SINIR DEĞER PROBLEMLERİ

Standart olmayan sonlu farklar (Nonstandard finite differences (NSFD)) kavramı Mickens (2002) tarafından ortaya atılmış ve daha sonra pek çok araştırmacı bu kavrama katkıda bulunmuştur (Ramos and Garcia-Lopez, 1997; Anguelov and Lubuma, 2001; Erdogan and Ozis, 2011). Mickens klasik sonlu farklarla türetilen nümerik çözümlerin sözkonusu diferensiyel denklemin tasvir ettiği dinamik sistemin taşıdığı, çözümlerin pozitifliği, sabit noktaların varlığı gibi pek çok özelliği korumadığını ifade etmiştir. Ayrıca bazı salınım problemlerinde açık sonlu fark teknikleri kullanılmak istenirse kararlılık koşulları adım uzunluğu seçiminde çok kısıtlayıcı olabilir (Mickens, 2001a,b). Bu bölümde ilk olarak NSFD tekniği ana hatları ile ifade edilmiş, daha sonra NSFD ile EF metotları arasındaki ilişkiler vurgulanmış ve NSFD metotları belli tipteki sınır değer problemlerinin çözümü için modifiye edilmiştir.

4.1 Standart Olmayan Sonlu Farklar

Mickens (2002) tam çözümü türeten nümerik şemalara tam sonlu fark şemaları adını vermiştir. Birinci mertebeden skaler

$$\frac{du}{dt} = f(u, t, \lambda) \quad u(t_0) = u_0$$

denklemini için $u(t) = \phi(\lambda, u_0, t_0, t)$ olmak üzere tam sonlu fark şeması

$$u_{k+1} = \phi(\lambda, u_k, t_k, t_{k+1})$$

olarak elde edilir.

Örnek 4.1.1

$$\frac{du}{dt} = -\lambda u \quad u(t_0) = u_0$$

denkleminin tam çözümü $u(t) = u_0 e^{-\lambda(t-t_0)}$ olduğundan, tam sonlu fark şeması

$$u_{k+1} = u_k e^{-\lambda h}$$

ya da

$$\frac{u_{k+1} - u_k}{(1 - e^{-\lambda h})/\lambda} = -\lambda u_k$$

olacaktır.

Örnek 4.1.2

$$\frac{du}{dt} = \lambda_1 u - \lambda_2 u^2 \quad u(t_0) = u_0$$

lojistik diferansiyel denklemi için tam sonlu fark şeması

$$\frac{u_{k+1} - u_k}{(e^{-\lambda_1 h} - 1)/\lambda_1} = \lambda_1 u_k - \lambda_2 u_{k+1} u_k$$

ile verilir.

NSFD metotlarında klasik sonlu farklardan farklı olarak payda h ın üstel, trigonometrik, logaritmik v.s fonksiyonları olmakta ve örneğin u_k^2 yerine $u_k u_{k+1}$ gibi terimler yazılabilmektedir. Fakat asıl problem tam çözümün bilinmediği durumlarda nümerik şemaların nasıl oluşturulacağıdır. Mickens bu durumlar için problem bağımlı teknikler önermekte ve genelde uygulanabilir kurallar belirlemeye çalışmaktadır. NSFD şu an için algoritmik bir metot olmaktan uzaktır. Fakat çözümlerin pozitifliğini ve sabit noktaların kararlılığını koruması gibi özellikleri nedeniyle fiziğin bazı alanlarında tercih edilmektedir (Ramos and Garcia-Lopez, 1997; Uddin, 2001).

4.2 Standart Olmayan Sonlu Farklar ve EF

Klasik birinci mertebeden türev için ileri, geri, merkezi fark yaklaşımları sırası ile $D^+ y = \frac{y_{i+1} - y_i}{h}$, $D^- y = \frac{y_i - y_{i-1}}{h}$, $D^0 y = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}$ dır. Bu yaklaşımları elde etmenin bir yolu da katsayıların dondurulmasıdır.

$$y' = f(x, y) \tag{35}$$

denklemini ele alalım. $[a, b]$ aralığı $N + 1$ tane $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ noktaları ile parçalansın ve $h = (b - a)/N$ olsun. f fonksiyonu (x_{i-1}, x_{i+1}) aralığında $x = x_i$ noktasında dondurulursa, $f_i = f(x_i, \tilde{y}_i)$ ve $\tilde{y}(x_i) = \tilde{y}_i$ olmak üzere denklem (35) için bir yaklaşım

$$\frac{d\tilde{y}}{dx} = f_i \tag{36}$$

olacaktır. Denklem (36) için genel çözüm

$$\tilde{y}(x) = f_i x + c$$

olur. c sabitini bulmak için süreklilik koşulları olan $\tilde{y}(x_{i-1}) = \tilde{y}_{i-1}$ ve $\tilde{y}(x_{i+1}) = \tilde{y}_{i+1}$ kullanılırsa

$$\frac{\tilde{y}_{i+1} - \tilde{y}_{i-1}}{2h} = f_i$$

elde edilir. Denklem (36) gözönünde bulundurularak,

$$D^0 \tilde{y} = \frac{\tilde{y}_{i+1} - \tilde{y}_{i-1}}{2h}$$

yazılabilir. Benzer şekilde (x_i, x_{i+1}) aralığında $\tilde{y}(x_i) = \tilde{y}_i$, $\tilde{y}(x_{i+1}) = \tilde{y}_{i+1}$ koşulları ile ileri fark formülü elde edilir. f in alt aralıklarda dondurulması ile bazı dereceden polinomlar için tam sonuç veren nümerik formüller elde edilmiştir. Mickens' in terminolojisi ile konuşmak gerekirse orjinal denklemin kendisi için değil, modifiye edilmiş denklem için tam fark şemaları elde edilmiştir.

EF formüllerini elde etmenin yolu orjinal denklemin farklı bir modifikasyonudur. Denklem (35) de f fonksiyonu (x_i, x_{i+1}) aralığında $x = x_i$ noktasında dondurulup, denklemin üstel çözümler türetmesini sağlayacak terimler eşitliğin her iki yanına eklenir ise, $\tilde{y}(x_i) = \tilde{y}_i$ ve w sabit olmak üzere modifiye edilmiş

$$\tilde{y}' - w\tilde{y} = f_i - w\tilde{y}_i$$

denklemini elde edilir. $\tilde{y}(x_i) = \tilde{y}_i$ ve $\tilde{y}(x_{i+1}) = \tilde{y}_{i+1}$ süreklilik koşulları ile

$$\frac{\tilde{y}_{i+1} - \tilde{y}_i}{\frac{e^{wh} - 1}{w}} = f_i$$

bulunur. Dolayısıyla EF ileri fark formülü

$$\delta_i^+ \tilde{y} = \frac{\tilde{y}_{i+1} - \tilde{y}_i}{\frac{e^{wh} - 1}{w}} \quad (37)$$

olarak elde edilir. $\phi(w, h) = \frac{e^{wh} - 1}{w}$ çarpanı Mickens tarafından da elde edilmiştir. Benzer çarpanlar difüzyon-konveksiyon denklemlerinin nümerik analizinde yapay vizkosite gibi isimlerle karşımıza çıkar (Hundsdofer and Verwer, 2003).

Benzer şekilde EF geri fark formülü aynı modifiye denklem üzerinde $\tilde{y}(x_i) = \tilde{y}_i$ ve $\tilde{y}(x_{i-1}) = \tilde{y}_{i-1}$ koşulları ile

$$\delta_i^- \tilde{y} = \frac{\tilde{y}_i - \tilde{y}_{i-1}}{\frac{1-e^{-wh}}{w}} \quad (38)$$

olarak elde edilir. (37) ve (38) formülleri $1, e^{wx}$ fonksiyonları için tam sonuç verirler. Bu formüllerin kullanımı ile ikinci türeve yaklaşım

$$\delta_i^2 \tilde{y} = \delta_i^+ \delta_i^- \tilde{y} = \frac{\tilde{y}_{i+1} - 2\tilde{y}_i + \tilde{y}_{i-1}}{\frac{2(\cosh(wh)-1)}{w^2}} \quad (39)$$

biçiminde yazılabilir. Eşitlik (39) u türetmenin bir diğer yolu da $y'' = f(x, y)$ denkleminin karşılık gelen

$$\tilde{y}'' - w^2 \tilde{y} = f_i - w^2 \tilde{y}_i$$

modifiye edilmiş denklemin genel çözümü olan

$$\tilde{y}(x) = c_1 e^{wx} + c_2 e^{-wx} + \tilde{y}_i - f_i/w^2$$

üzerinde $\tilde{y}(x_{i-1}) = \tilde{y}_{i-1}$, $\tilde{y}(x_i) = \tilde{y}_i$, $\tilde{y}(x_{i+1}) = \tilde{y}_{i+1}$ koşullarını uygulamaktır. Bu koşullardan elde edilen cebirsel denklemlerden eşitlik (39) tekrar elde edilir.

4.3 Sınır Değer Problemleri için Standart Olmayan Sonlu Farklar

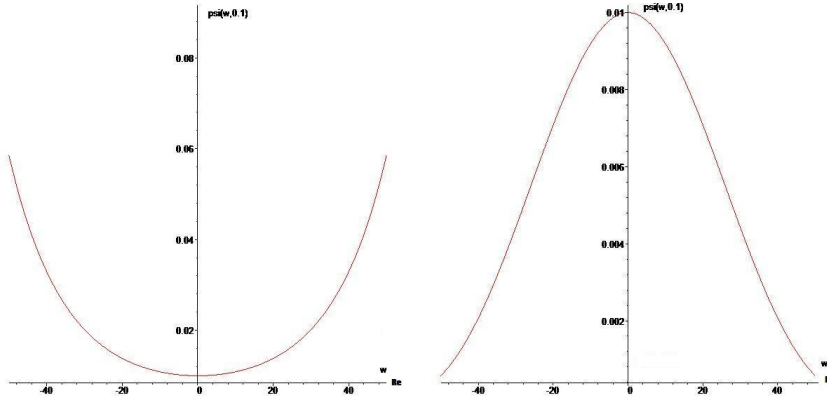
$$y'' = f(x, y) \quad a < x < b \quad y(a) = \alpha \quad y(b) = \beta \quad (40)$$

ile verilen sınır değer problemini ele alalım. Bu problemin çözümlerinin varlık ve tekliği (Ascher et al., 1995) de açıklanmıştır. (40) sınır değer probleminin nümerik çözümünde ikinci türev için eşitlik (39) ile verilen yaklaşım kullanılırsa, adım uzunluğu fonksiyonu $\psi(w, h) = \frac{2(\cosh(wh)-1)}{w^2}$ olmak üzere

$$F[i] := \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{\psi(w, h)} - f(x_i, y_i) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, N-1 \quad (41)$$

$$y_0 = \alpha \quad y_N = \beta$$

şeması elde edilir. w serbest bir parametredir. Fakat ilerleyen kısımlarda her (x_{i-1}, x_{i+1}) aralığında w parametresi y_{i+1} , y_i ve y_{i-1} cinsinden ifade edileceği



Şekil 4.1: Reel w ve imajiner w için $\psi(w, 0.1)$ adım uzunluğu fonksiyonları

için w_i gösterimi tercih edilecektir. Şekil 4.1 de ilk olarak $h = 0.1$ için adım uzunluğu fonksiyonu $\psi(w, 0.1)$ çizilmiştir. w nin tamamen sanal değer alması da sözkonusu olduğu için $(\psi, Im(w))$ grafiği de eklenmiştir. Fakat her iki durumda da $cosh(xI) = cos(x)$ olduğundan ψ daima reeldir. w veya h çok küçük olduğunda bilgisayar aritmetiğinden kaynaklı hatalara meydan vermemek için ψ nin aşağıdaki Taylor açılımı kullanılabilir.

$$\psi(w, h) = h^2 + \frac{h^4 w^2}{12} + \frac{h^6 w^4}{360} + \frac{h^8 w^6}{20160} + \dots$$

Şema (41) in kesme hatası

$$\tau_i = f(x_i, y(x_i)) \left(\frac{h^2}{\psi(w, h)} - 1 \right) + \frac{h^4 y^{(iv)}(x_i)}{12\psi(w, h)} + \frac{h^6 y^{(vi)}(\eta_i)}{360\psi(w, h)} \quad \eta_i \in (x_{i-1}, x_{i+1}) \quad (42)$$

Metodun mertebesi ve hassasiyetine dair aşağıdaki yorumlar yapılabilir.

- i) $w \rightarrow 0$ iken $\psi(w, h) \rightarrow h^2$ dır. Yani şema (41) limit durumunda klasik ikinci türev ayırıklaştırmasına indirgenir.
- ii) w nin herhangi bir değeri için, $h \rightarrow 0$ iken $\phi(w, h) \approx h^2$, dolayısıyla $\tau \rightarrow 0$ olur. Başka bir deyişle, şema (41) tutarlıdır ve ikinci mertebeden hassasiyete sahiptir. Fakat w nin özel seçimleri için hassasiyetin mertebesi arttırılabilir. Böylece klasik şemalara nazaran daha yüksek mertebeden yaklaşımlar elde edilebilir.

Başlangıç değer problemlerinin EF metotları ile çözümleri için kararlılık teorisi geliştirilmiştir. Fakat aynı şey sınır değer problemleri için söylenemez. LeVeque (2007), lineer olmayan bir sınır değer probleminin ayrıklaştırılmasından elde edilen bir fark şemasının kararlılığını Jacobian matrisin tersinin sınırlılığı olarak tanımlamıştır. Aslında bu Jacobian matris ayrıklaştırılmadan ortaya çıkan lineer olmayan cebirsel sistemin Newton metodu ile çözümünde oluşturulan Jacobian matristir.

4.3.1 Parametrenin belirlenmesi ve şemaların bilgisayar cebiri ile türetilmesi

Bir önceki kısımda w nin sabit olduğu ve $y(x)$ den bağımsız olduğu varsayılmıştı. Bu kısımda eşitlik (42) den yararlanarak (40) için optimum bir w bulunacaktır.

Bir şemanın tam sonlu fark şeması olması için yerel kesme hatası (42) nin sıfır olması gerekir. Eşitlik (42) nin ilk iki terimini sıfıra eşitleyerek

$$\tau_i = f(x_i, y(x_i)) \left(\frac{h^2}{\psi(w, h)} - 1 \right) + \frac{h^4 y^{iv}(\eta_i)}{12\psi(w, h)} = 0$$

denklemini elde edilir. Böylece kesme hatasının dördüncü mertebeden olması beklenir. ψ deki $\cosh(wx)$ ifadesi dördüncü dereceye kadar Taylor serisine açılırsa w için analitik bir ifade elde edilir.

$$w_i^2 \approx \frac{y^{iv}(x_i)}{f(x_i, y(x_i))}$$

$w_i \in i\mathbf{R}$ olmasının bir sakıncası yoktur. f in bazı seçimleri için özel durumlarla karşılaşılabilir. Örneğin, f , x in doğrusal bir fonksiyonu ise $w = 0$ olur. f yalnızca y nin doğrusal bir fonksiyonu olduğunda ise w her alt aralıkta sabit olacaktır. Bu durumlar sırasıyla klasik ve EF sonlu fark formüllerine karşılık gelirler.

Şema (41) de w_i parametresi y_{i-1} , y_i , y_{i+1} cinsinden ifade edilmelidir. Bu amaçla $y'' = f(x, y)$ denkleminde faydalananarak $y^{(iv)}$ yalnızca f ve y' cinsinden ifade edilir. Son olarak $y(x_i) = y_i$ ve $y'(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1}))}{2h}$ yaklaşımları ile tamamen nümerik bir formül elde edilir.

Tüm bu hesaplamalar ve modifikasyonlar zahmetli gibi görünse de sembolik hesaplama ile tüm bu süreçler, verilen herhangi bir f için otomatikleştirilebilir. Sayısal hesaplamalar açısından klasik metotlara nazaran, ek bir yük söz konusu olmadığı gibi hassasiyet açısından da tatmin edici sonuçlar elde edilmiştir. Sayısal örnekler kısmındaki her bir sınır değer problemi için aşağıdaki MAPLE kodu ile nümerik şemalar türetilmiştir.

```
>scheme:=proc(f)
  global F,w;
  derivative2:=f:derivative3:=diff(f,x):
  diff(derivative3,x):derivative4:=algsubs(diff(u(x),x$2)=derivative2,%):
  #Third and fourth derivatives of u are computed
  in terms of first and second derivatives via differential equation#
  simplify(derivative4/derivative2):
  #Continuous formula is constructed for w#
  algsubs(diff(u(x),x)=(y[i+1]-y[i-1])/(2*h),%):subs(u(x)=y[i],%):
  subs(x=x[i],%):w:=sqrt(%):
  #w is discretized#
  algsubs(u(x)=y[i],f):discretef:=subs(x=x[i],%):
  #right hand side of equation is discretized#
  F[i]:=w^2*(y[i+1]-2*y[i]+y[i-1])-discretef*2*(cosh(w*h)-1)=0:
  #Full nonstandard discretization of given differential equation#
  print('w'=w):
  print('F[i]'=F[i]):
  return NULL:
end proc:
```

4.3.2 Sayısal örnekler

Örnek 4.3.1 Troesch problemi (B.A and Troesch, 1976) olarak bilinen

$$u''(x) - \lambda \sinh(\lambda u(x)) = 0 \quad 0 < x < 1$$

Çizelge 4.1: $\lambda = 0.5$ için örnek 4.3.1 in çözümleri

	Tam	Decomposition method	HPM	EF	EF nin mutlak
x	Çözüm	(Deeba et al., 2000)	(Feng et al., 2007)	method N=10	hatası
0.1	0,0959443493	0.0959383534	0.0959395656	0,0959443492	5,357E-11
0.2	0,1921287477	0.1921180592	0.1921193244	0,1921287476	1,036E-10
0.3	0,2887944009	0.2887803297	0.2887806940	0,2887944007	1,467E-10
0.4	0,3861848464	0.3861687095	0.3861675428	0,3861848462	1,795E-10
0.5	0,4845471647	0.4845302901	0.4845274183	0,4845471645	1,989E-10
0.6	0,5841332484	0.5841169798	0.5841127822	0,5841332482	2,015E-10
0.7	0,6852011483	0.6851868451	0.6851822495	0,6852011481	1,857E-10
0.8	0,7880165227	0.7880055691	0.7880018367	0,7880165225	1,491E-10
0.9	0,8928542161	0.8928480234	0.8928462193	0,8928542161	9,120E-11

denklemini $u(0) = 0$ and $u(1) = 1$ sınır koşulları ile ele alalım. Bu problem Boyd (2011) tarafından nümerik metotlar için test problemi olarak önerilmiştir ve pek çok kez değişik araştırmacılar tarafından çözülmüştür. Tam çözüm Jacobi elliptik fonksiyonlar cinsinden (Lin et al., 2008) de verilmiştir. MAPLE komutu

```
scheme(lambda*sinh(lambda*u(x)));
```

ile w için ve Troesch denkleminin karşılık gelen nümerik şema ve w formülü türetilir (Bkz Bölüm 7). Oluşan lineer olmayan cebirsel denklem sisteminin Newton metodu ile çözümünden elde edilen sayısal değerler aşağıdaki tablolarda sunulmuştur.

Çizelge 4.1 ve çizelge 4.2 de $\lambda = 0.5$ ve $\lambda = 1$ alınarak değişik tekniklerle elde edilen çözümlerin karşılaştırılması yapılmıştır. Bu kısımda geliştirilen tekniğin Troesch's denklemindeki başarısı açıkça görülmektedir.

Örnek 4.3.2

$$u''(x) - u^2(x) = 2\pi^2 \cos(2\pi x) - \sin^4(\pi x) \quad 0 < x < 1$$

denkleminin $u(0) = u(1) = 0$ sınır koşulları için tam çözümü $u(x) = \sin^2(\pi x)$ dir. Bu problem bir çok çalışmada test problemi olarak kullanılmıştır. MAPLE komutu

Çizelge 4.2: $\lambda = 1$ için örnek 4.3.1 in çözümleri

	Tam	Decomposition method	HPM	EF	EF nin mutlak
x	Çözüm	(Deeba et al., 2000)	(Feng et al., 2007)	method N=10	hatası
0.1	0,0846612565	0.084248760	0.0843817004	0,0846612556	9,303E-10
0.2	0,1701713582	0.169430700	0.1696207644	0,1701713565	1,704E-09
0.3	0,2573939080	0.256414500	0.2565929224	0,2573939059	2,176E-09
0.4	0,3472228551	0.346085720	0.3462107378	0,3472228528	2,232E-09
0.5	0,4405998351	0.439401985	0.4394422743	0,4405998333	1,804E-09
0.6	0,5385343980	0.537365700	0.5373300622	0,5385343971	9,103E-10
0.7	0,6421286091	0.641083800	0.6410104651	0,6421286094	3,015E-10
0.8	0,7526080939	0.751788000	0.7517335467	0,7526080954	1,467E-09
0.9	0,8713625196	0.870908700	0.8708835371	0,8713625215	1,868E-09

Çizelge 4.3: Numerov metodu ile EF metodunun mutlak hataları

x	Numerov metodu	EF	Numerov metodu	EF
	N=20	N=20	N=40	N=40
0.1	2.57287E-06	4.48188E-07	1.61881E-07	2.86207E-08
0.2	1.14519E-05	4.19597E-07	7.16677E-07	2.66314E-08
0.3	2.28275E-05	6.41501E-07	1.42684E-06	4.16857E-08
0.4	3.21025E-05	1.12018E-06	2.00571E-06	7.39232E-08
0.5	3.56489E-05	1.14061E-06	2.22703E-06	7.6087E-08
0.6	3.21025E-05	1.12018E-06	2.00571E-06	7.39343E-08
0.7	2.28275E-05	6.415E-07	1.42684E-06	4.16998E-08
0.8	1.14519E-05	4.19598E-07	7.1668E-07	2.66432E-08
0.9	2.57287E-06	4.48189E-07	1.61882E-07	2.86266E-08

$\text{scheme}(u(x)^2 + 2\pi^2 \cos(2\pi x) - \sin(\pi x)^4);$

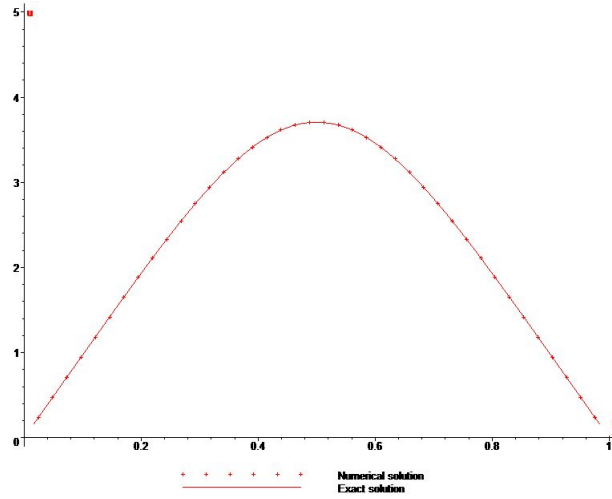
ile w ve nümerik şema formül elde edilir. (Bkz Bölüm 7) Çizelge 4.3 de bu kısımda geliştirilen metot ile dördüncü mertebeden olduğu bilinen Numerov metodunun (LeVeque, 2007) karşılaştırmaları yapılmıştır.

Örnek 4.3.3 Tam çözümü periyodik Jacobi eliptik fonksiyonlar cinsinden

$$u(x) = A \text{JacobiSN}\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x + B\right)A, i\right)$$

olarak ifade edilen

$$u'' + u^3 = 0$$



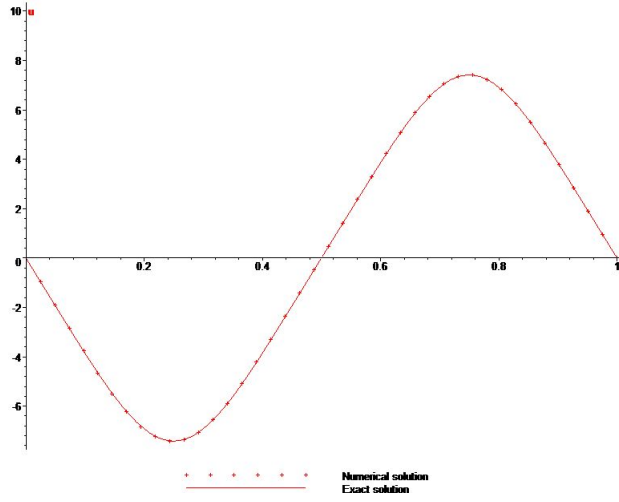
Şekil 4.2: Örnek 4.3.3 için tam çözüm ($A=-3.708149356$ $B=4.2426640686i$) ve EF çözümü

diferansiyel denklemini ele alalım. $0 < x < 1$ aralığında $u(0) = u(1) = 0$ koşullarını sağlayan sonsuz çözüm vardır.

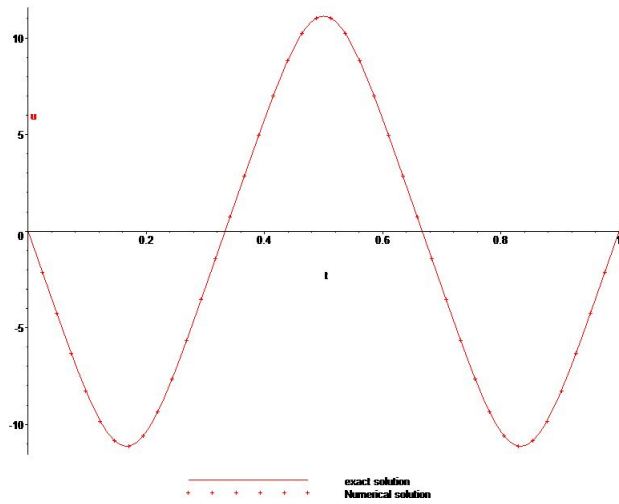
```
scheme(-u(x)^3);
```

komutu ile ve w için formül ve nümerik şema elde edilir. (Bakınız Bölüm 7). $y_0 = y_N = 0$ için oluşan lineer olmayan cebirsel sistemin de sonsuz çözümü vardır. Newton metodunun başlangıç tahminine bağlı olarak çeşitli salınımlı çözümler elde edilir. Uygun bir başlangıç tahmini için şutlama (shooting) tekniği ya da denklemin doğrusallaştırılmış biçiminin çözümü kullanılabilir.

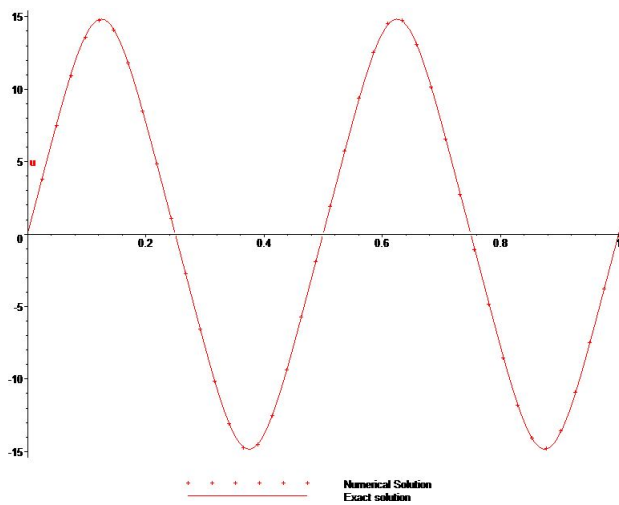
Aşağıdaki grafiklerde bazı tam sonuçların ve EF nümerik çözümlerin grafikleri gösterilmiştir. Başlangıç tahminleri için $u(0) = 0$ ve $u'(0) = 9$, $u'(0) = -38$, $u'(0) = -87$, $u'(0) = 156$ başlangıç koşullarına karşılık gelen problemlerin Runge Kutta çözümleri kullanılmıştır. Bu bölümde geliştirilen metodun salınım yapan çözümlere yakınsadığı gözlenmiştir. Fakat klasik metotlar, salınım yapan çözümlere yakınsama konusunda çok yakın başlangıç tahminleri için bile aynı başarıyı gösterememiştir.



Şekil 4.3: Örnek 4.3.3 için tam çözüm ($A=-7.4162987111i$ $B=-0.7071067810-0.7071067810i$) ve EF çözümü



Şekil 4.4: Örnek 4.3.3 için tam çözüm ($A= 1112444807$ $B= -24.74873733$) ve EF çözümü



Şekil 4.5: Örnek 4.3.3 için tam çözüm ($A=-14.83259742$ $B= -0.3535533905-0.3535533905i$) ve EF çözümü

5 BAŞLANGIÇ SINIR DEĞER PROBLEMLERİ İÇİN EF METOTLARI

Kısmi türevli diferansiyel denklemlerin (KTDD) EF metotları ile çözümüne dair çok fazla çalışma mevcut değildir. Genel olarak yarı ayrıklaştırmaya dayanan iki eğilim mevcuttur. İlkinde önce herhangi bir sayısal metot ile konum türevleri ayrıklaştırılır. Ortaya çıkan adi diferansiyel denklem sistemi için EF metotları kullanılabilir (Vigo-Aguiar et al., 2008). Fakat bu durumda çözümün az sayıda frekansı olmalı ki sayısal işlem yükü yoğun olmasın. Bir diğer yaklaşımda, önce zamanı klasik metotlarla ayrıklaştırıp, her zaman adımında ortaya çıkan konum değişkenine bağlı sabit katsayılı adi diferansiyel denklemleri lineerleştirerek sayısal çözümü üstel fonksiyonların lineer birleşimi şeklinde ifade etmektir (Ramos, 2007). Bu yaklaşım genelde sınır tabaka problemlerinin çözümünde kullanılır.

Bu bölümde ilk olarak yukarıda bahsedilen iki yaklaşıma alternatif olarak verilen KTDD nin tam ayrıklaştırmasında EF metotlarının kullanılmasına yer verilecektir. Daha sonra, EF metotlarının zamandan bağımsız sınır tabaka denklemlerine uygulanmasına değinilecek, son olarak da Burgers denklemi için bir EF metodu geliştirilecektir.

5.1 EF Metotları ile Tam Ayrıklaştırma

Lineer homojen ısı denklemini ele alalım.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (43)$$

Bu denklem başlangıç ve sınır koşulları ile verildiğinde aşağıda açıklanan değişkenlerine ayırma yöntemi (Zwillinger, 1997) kullanılır.

Çözümün $u(x, t) = X(x)T(t)$ biçiminde olduğu kabul edilirse, denklem (43) den

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{T} = \lambda^2$$

yazılabilir.

Konum denklemi $X'' - \lambda^2 X = 0$, zaman denklemi ise $T' - \lambda^2 T = 0$ dir. Konum ve zaman için baz fonksiyonları sırasıyla $e^{\lambda x}$, $e^{-\lambda x}$ ve $e^{\lambda^2 t}$ olacaktır. Dolayısıyla konum frekansı ile ω_s ile zaman frekansı ω_t arasında $\omega_t = \omega_s^2$ ilişkisi vardır. Frekanslar sınır koşulları ile belirlendikten sonra, denklem (43) ün tam çözümü Fourier serileri cinsinden ifade edilir.

Klasik sonlu fark metotlarında nümerik çözümlerin konum zaman frekansları arasındaki ilişki açık olarak görülmez. Fakat EF metotları parametre bağımlı olduğu için bu ilişki açık bir şekilde görülebilir. Örneğin, denklem (43) de zaman türevi için EF ileri fark , konum türevi için EF merkezi fark kullanılır ise

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\frac{e^{\omega_t \delta t} - 1}{\omega_t}} = \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{\frac{2(\cosh(\omega_s \delta x) - 1)}{\omega_s^2}}$$

şeması elde edilir. Önceki bölümlerde olduğu gibi frekans hesabı için

$$\tau = \frac{u(x, t + \delta t) - u(x, t)}{\frac{e^{\omega_t \delta t} - 1}{\omega_t}} - \frac{u(x + \delta x, t) - 2u(x, t) + u(x - \delta x, t)}{\frac{2(\cosh(\omega_s \delta x) - 1)}{\omega_s^2}}$$

$$\tau = \frac{1}{2}(u_{tt} - \omega_t u_t) \delta t + \frac{1}{12}(u_{xx} \omega_s^2 - u_{xxxx}) \delta x^2 + o(\delta t^2, \delta x^3)$$

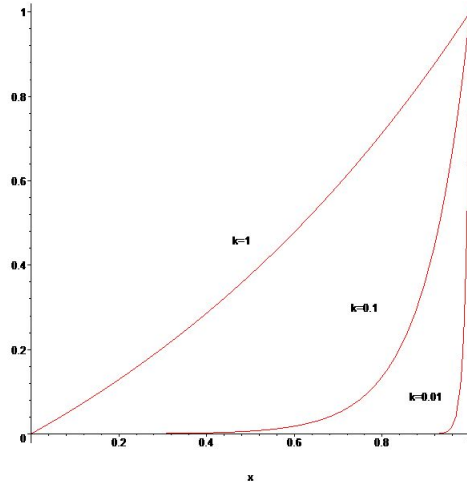
biçiminde hesaplanan kesme hatasının minimizasyonu için δ_t ve δ_x^2 nin katsayıları sıfıra eşitlenir ise

$$\omega_t = \frac{u_{tt}}{u_t}$$

$$\omega_s^2 = \frac{u_{xxxx}}{u_{xx}}$$

elde edilir.

Denklem (43) den hareketle $\omega_t = \omega_s^2$ eşitliği görülür. Sonuç olarak EF metodu denklem (43) ün doğal bir ayrıklaştırmasıdır. Fakat ω_t ve ω_s nın sayısal hesabı zahmetli olduğu için EF metotları ile tam ayrıklaştırma şu haliyle pek kullanışlı değildir. Bu yüzden pratikte yarı ayrıklaştırma metotları kullanılır.



Şekil 5.1: 44 denkleminin tam çözümleri

5.2 Yapay Difüzyon ve EF

Bu kısımda adi diferansiyel denklemlerde sınır tabaka problemlerinin çözümünde EF metotlarının nasıl ortaya çıktığından bahsedilmiştir (Veldman, 2009). Aşağıdaki konveksiyon difüzyon denklemini ele alalım.

$$u \frac{d\phi}{dx} - k \frac{d^2\phi}{dx^2} = 0 \quad \phi(0) = T_0 \quad \phi(L) = T_L \quad 0 < x < L \quad (44)$$

Denklem (44)ün tam çözümü, $Pe = \frac{uL}{k}$, $L = 1$ $T_0 = 0$ $T_L = 1$ ve $u = 1$ için

$$\phi(x) = T_0 + (T_L - T_0) \frac{1 - e^{Pe x/L}}{1 - e^{Pe}}$$

ile verilir. Şekil (5.1) de k nın bazı değerleri için tam çözümün grafiği verilmiştir. Eğer hem birinci hem de ikinci türev için mertebesi iki olan merkezi türev formülleri kullanılır ise

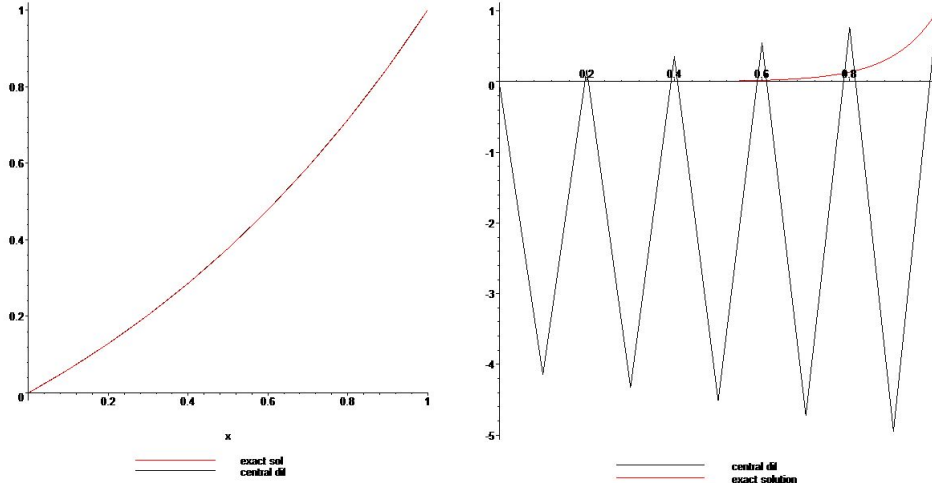
$$\frac{d^2\phi}{dx^2} \approx \frac{\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}}{h^2} \quad \frac{d\phi}{dx} \approx \frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{2h}$$

k nın farklı değerleri için şekil 5.2 elde edilir. İkinci türev için merkezi fark, birinci türev için geri fark kullanılırsa, *upwind* şeması elde edilir.

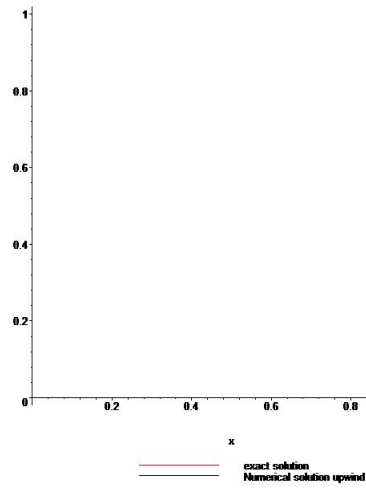
$$\frac{d^2\phi}{dx^2} \approx \frac{\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}}{h^2} \quad \frac{d\phi}{dx} \approx \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{h}$$

Şekil (5.3) de $k = 0.001$ için kararlı, salınım yapmayan çözümler elde edildiği görülmektedir.

Metodun mertebesi bir azalmış fakat kararlı çözümler elde edilmiştir. Bu iyileşmenin nedenleri anlaşılırsa metodun mertebesi daha da arttırılabilir.



Şekil 5.2: Merkezi farklarla elde edilen çözümler, $k = 1$ ve $k = 0.01$ için



Şekil 5.3: $k=0.001$ için *upwind* ile elde edilen çözüm

Eğer *upwind* ayrıklaştırmadaki birinci ve ikinci türev arasındaki

$$u \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{h} = u \frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{2h} - \frac{uh}{2} \frac{\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}}{h^2}$$

ilişkisi gözönüne alınırsa, aslında denklem (44) ün *upwind* ile ayrıklaştırmasının

$$u \frac{d\phi}{dx} - (k + k_a) \frac{d^2\phi}{dx^2} = 0 \quad (45)$$

denkleminin $k_a = \frac{uh}{2}$ için merkezi farkla ayrıklaştırılması olduğu görülür. Burada $k_a = \frac{uh}{2}$ yapay difüzyon katsayısı olarak isimlendirilir. k_a nın ayrıklaştırılmış denklemi salınımlardan nasıl arındırdığını görmek için (Veldman, 2009) a bakınız.

Elbetteki yapay difüzyon için tek seçenek $k_a = \frac{uh}{2}$ değildir.

$$u \frac{d\phi}{dx} - k \frac{d^2\phi}{dx^2} = 0$$

denkleminin tam çözümü

$$\phi(x) = A + Be^{\frac{ux}{k}} \quad (46)$$

dir. $[0, L]$ aralığının düzgün bir $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = L$ parçalanması için eşitlik (46) ya $\phi(x_{i-1}) = \phi_{i-1}$, $\phi(x_i) = \phi_i$, $\phi(x_{i+1}) = \phi_{i+1}$ koşullarının uygulanması ile elde edilen şema aslında $k_a = \frac{uh}{2} \coth(\frac{uh}{2k}) - k$ için denklem (45) den merkezi ayrıklaştırmayla elde edilen şemadır (Roos et al., 2008). Bu şema üstel fonksiyonlar cinsinden ifade edildiği için EF metotlarına dahil edilir. Denklem (44) lineer ve sabit katsayılı olduğu için $k_a = \frac{uh}{2} \coth(\frac{uh}{2k}) - k$ ile elde edilen nümerik çözümler tam çözüme eşittir.

Ele alınan lineer denklemlerin değişken katsayılı olması durumunda, (x_{i-1}, x_{i+1}) aralığında $x = x_i$ de katsayılar dondurularak EF şemaları elde edilebilir (Ramos, 2005). Değişken katsayılı lineer denklemler için bu yaklaşımın kesme hatası ikinci mertebededir (Ledoux, 2007).

Bir sonraki kısımda Burgers denklemi için önce zaman türevi klasik metotlarla ayrıklaştırılacak (Ramos, 2007), ardından ortaya çıkan konuma bağlı adi diferensiyel denklem lineerleştirilerek çözülecektir. Bu teknikte sayısal çözüm üstel fonksiyonlar cinsinden ifade edildiği için bu metotlarda EF metotları sınıfında değerlendirilebilir.

5.3 Burgers Denklemi için EF Metodu

Burgers denklemi türbülansın matematiksel modellemesinde ve şok dalgaları teorisinde uygulama alanı bulduğu için pek çok araştırmacı tarafından ele alınmıştır. Bu denklemin bir boyutlu versiyonu Beteman (1915) tarafından tanıtılmış, daha sonra Burger tarafından

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad 0 < x < 1 \quad t > 0 \quad (47)$$

biçiminde ele alınmıştır. Denklem (47) in bir kaç başlangıç ve sınır koşulu için tam çözümü bilinmektedir. $u(x, t)$, x konumundaki ve t zamanındaki hızı göstermekte, $\nu > 0$ ise Reynolds sayısı (Re) ile ilintili kinematik viskozitedir ($\nu = 1/Re$). Lineer olmayan adveksiyon uu_x ve difüzyon νu_{xx} terimleri dalga devinimini modellerken Re nin çok büyük değerleri için şok dalgaları oluşur. Adveksiyon terimi difüzyon teriminden çok daha baskın olduğunda bir sınır tabakası oluşur. Dolayısıyla bu denklemin çözümü için önerilen tekniğin sınır tabakasındaki ani değişimi yansıtabilmesi gerekir.

Denklem (47) nin

$$u(x, 0) = \sin(\pi x) \quad 0 < x < 1$$

başlangıç koşulu ve

$$u(0, t) = u(1, t) = 0 \quad t > 0$$

homojen sınır koşulları için tam çözümü (Cole, 1951)

$$u(x, t) = 2\pi\nu \frac{\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-n^2\pi^2\nu t} n \sin(n\pi x)}{a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-n^2\pi^2\nu t} n \cos(n\pi x)} \quad (48)$$

$$a_0 = \int_0^1 \exp \{ -(2\pi\nu)^{-1} (1 - \cos(\pi x)) \} dx \quad (49)$$

$$a_n = 2 \int_0^1 \exp \{ -(2\pi\nu)^{-1} (1 - \cos(\pi x)) \} \cos(n\pi x) dx$$

ile verilir.

Ramos (2006a) ikinci mertebeden $x'' = f(t, x, x')$ biçimindeki lineer olmayan adi diferansiyel denklemlerin EF ile çözümünde, verilen denklemi (t_n, x_n, x'_n) civarında Taylor serisine açıp doğrusallaştırarak

$$x'' = f_n + T_n(t - t_n) + J_n(x - x_n) + H_n(x' - x'_n) \quad t_n \leq t \leq t_{n+1}$$

denkleminin tam çözümünü aramıştır. Burada $f_n = f(t_n, x_n, x'_n)$, $T_n = \frac{\partial f}{\partial t}(t_n, x_n, x'_n)$, $H_n = \frac{\partial f}{\partial x}(t_n, x_n, x'_n)$ dır. Ramos bu yaklaşımın bazı durumlarda yapay çözümler türetebildiğini rapor etmiştir. Bu kısımda sunulan yaklaşımda Taylor serisine dayalı bir lineerleştirme uygulanmayacaktır. Bunun yerine u_x in katsayısı olan u nun değeri bir önceki zaman seviyesinden alınacaktır. Bu lineerleştirme tekniği Navier- Stokes denklemlerinin sayısal çözümünde kullanılmaktadır. (Veldman, 2009). Denklem (47) de zaman türevi için geri Euler (Backward Euler) formülü kullanılırsa, $u^n = u(x, t^n)$, $u = u^{n+1}$ ve Δt adım uzunluğu olmak üzere

$$\nu \frac{d^2 u}{dx^2} - u^n \frac{du}{dx} = \frac{u - u^n}{\Delta t}$$

elde edilir. $[0, 1]$ aralığı N eşit parçaya bölünüp u^n değerleri (x_{i-1}, x_{i+1}) aralığının orta noktasında hesaplanır ise

$$\nu \frac{d^2 u}{dx^2} - u_i^n \frac{du}{dx} = \frac{u_i - u_i^n}{\Delta t} \quad x_{i-1} < x < x_{i+1} \quad t^n \leq t \leq t^{n+1} \quad (50)$$

sabit katsayılı lineer diferensiyel denklemi elde edilir.

Durum 1

Eğer $u_i^n \neq 0$ ise denklem (50) nin tam çözümü

$$u(x) = \nu \frac{\exp(u_i^n x / \nu)}{u_i^n} A_i + \frac{x}{\Delta t} \left(1 - \frac{u_i}{u_i^n}\right) + B_i$$

olarak bulunur. A_i ve B_i sabitlerini belirlemek için $u(x_{i-1}) = u_{i-1}$, $u(x_i) = u_i$, $u(x_{i+1}) = u_{i+1}$ koşulları kullanılabilir.

$$\begin{aligned} u_{i-1} &= \nu \frac{\exp(u_i^n x_{i-1} / \nu)}{u_i^n} A_i + \frac{x_{i-1}}{\Delta t} \left(1 - \frac{u_i}{u_i^n}\right) + B_i \\ u_i &= \nu \frac{\exp(u_i^n x_i / \nu)}{u_i^n} A_i + \frac{x_i}{\Delta t} \left(1 - \frac{u_i}{u_i^n}\right) + B_i \\ u_{i+1} &= \nu \frac{\exp(u_i^n x_{i+1} / \nu)}{u_i^n} A_i + \frac{x_{i+1}}{\Delta t} \left(1 - \frac{u_i}{u_i^n}\right) + B_i \end{aligned}$$

A_i ve B_i ilk iki denklem yardımı ile belirlenip üçüncüsünde yerlerine konulursa,

$$f(x) = \nu \frac{\exp(u_i^n x / \nu)}{u_i^n} \quad H_i = \frac{f(x_{i+1})/N + f(x_i)x_{i-1} - f(x_{i-1})x_i}{f(x_{i-1}) - f(x_i)} + x_{i+1}$$

olmak üzere

$$u_{i-1} \left(\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{f(x_{i-1}) - f(x_i)} \right) + u_i \left(\frac{f(x_{i-1}) - f(x_{i+1})}{f(x_{i-1}) - f(x_i)} - \frac{H_i}{u_i^n \Delta t} \right) - u_{i+1} + \frac{H_i}{\Delta t} = 0$$

$$i = 1, 2, \dots, N-1 \quad (51)$$

şeması elde edilir.

Durum 2

Eğer $u_i^n = 0$ ise (50) denkleminde $u(x_{i-1}) = u_{i-1}$, $u(x_i) = u_i$, $u(x_{i+1}) = u_{i+1}$ koşulları ile aşağıdaki şema elde edilir.

$$u_{i-1} - u_i \left(\frac{x_{i+1}^2 - x_{i+1}(x_{i-1} + x_i) + x_i x_{i-1}}{2\nu \Delta t} + 2 \right) + u_{i+1} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, N-1$$

Şema (51), ortalama değer teoremi kullanılarak $\zeta_i \in (x_i, x_{i+1})$

$$u_{i+1} - u_i \left(1 + \frac{f'(\zeta_i)}{f'(\zeta_{i-1})} - \frac{h}{\Delta t u_i^n} \left(1 - \frac{f'(\zeta_i)}{f'(\zeta_{i-1})} \right) \right) + u_{i-1} \left(-\frac{f'(\zeta_i)}{f'(\zeta_{i-1})} \right)$$

$$= \frac{h}{\Delta t} \left(1 - \frac{f'(\zeta_i)}{f'(\zeta_{i-1})} \right) \quad (52)$$

biçiminde yazılırsa analiz etmek daha kolay olacaktır.

Teorem (Smith, 1985)

$$a_i u_{i-1} - c_i u_i + b_i u_{i+1} = -d_i \quad i = 1, 2, \dots, N-1 \quad (53)$$

sisteminde

- $a_i > 0$, $b_i > 0$ ve $c_i > 0$
- $c_i > a_i + b_i$

koşulları sağlanıyorsa, sistem (53) ün çözümü mevcut ve tektir. Ayrıca Gauss eleme metodu söz konusu sisteme uygulandığında kararlı çözümler elde edilir.

□

Çizelge 5.1: $\nu = 1$ $h = 1/80$ $k = 0.001$ için karşılaştırma

x	t	EF metodu	Tam çözüm
0.25	0.1	0.25378	0.25364
	0.15	0.15673	0.1566
	0.2	0.09655	0.09644
	0.25	0.0593	0.05921
0.5	0.1	0.3718	0.37158
	0.15	0.22703	0.22682
	0.2	0.13864	0.13847
	0.25	0.08466	0.08453
0.75	0.1	0.27276	0.27258
	0.15	0.16453	0.16437
	0.2	0.09955	0.09943
	0.25	0.06039	0.06034

Şema (52) ye bakılırsa

$$\begin{aligned}
 a_i &= \exp(\alpha_i) \\
 b_i &= 1 \\
 c_i &= \exp(\alpha_i) \left(1 + \frac{h}{\Delta t u_i^n} \right) + 1 - \frac{h}{\Delta t u_i^n} \\
 d_i &= \exp(\alpha_i) - 1 \\
 \alpha_i &= \frac{u_i^n}{\nu(\zeta_i - \zeta_{i-1})}
 \end{aligned}$$

için yukarıdaki teoremin hipotezlerinin sağlandığı görülür.

5.3.1 Sayısal örnekler

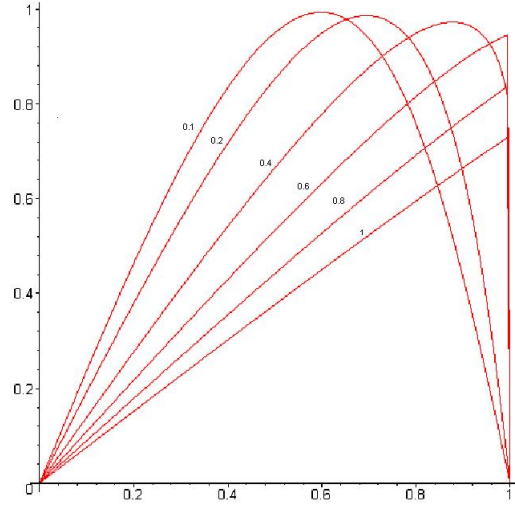
Burgers denkleminin tam çözümü eşitlik (49) da Fourier serileri cinsinden ifade edilmiştir. Fakat bu seri $\nu < 0.001$ için çok yavaş yakınsadığından aşağıdaki tablolarda $\nu = 1$, $\nu = 1/10$, $\nu = 1/100$ için tam çözümle ve literatürdeki diğer çözümlerle karşılaştırmalar verilmiştir. ν değeri küçüldükçe EF metodunun diğer metotlara göre kıyasla daha iyi çözümler türettiği görülebilir.

Çizelge 5.2: $\nu = 1/10$ için diğer metotlarla karşılaştırma

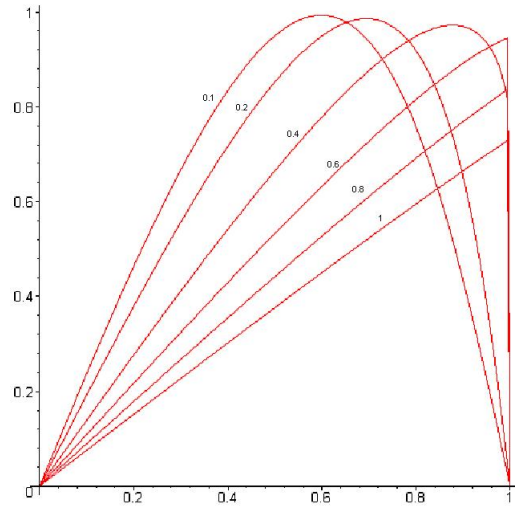
x	t	(Oziş,1996)	Mohan,2006)	(Kutluay,1999)	EF	Tam çözüm
		$h = 0.0125$	$\Delta x = 0.0125$	$N = 40$	$h = 1/256$	
		$\Delta t = 0.00001$	$\Delta t = 0.01$	$\Delta t = 0.01$	$k = 0.002$	
0.25	0.4	0.31429	0.30881	0.30891	0.30898	0.30889
	0.6	0.24373	0.24069	0.24075	0.24078	0.24074
	0.8	0.19758	0.16254	0.19568	0.1957	0.19568
	1	0.16391		0.16257	0.16258	0.16256
	3	0.02743	0.0272	0.02720	0.02726	0.02720
0.5	0.4	0.57636	0.56955	0.56964	0.5696	0.56963
	0.6	0.45169	0.44714	0.44721	0.44722	0.44721
	0.8	0.36245		0.35924	0.35929	0.35924
	1	0.29437	0.29188	0.29192	0.29201	0.29192
	3	0.04057	0.04021	0.04021	0.0403	0.04021
0.75	0.4	0.62592	0.6254	0.62542	0.62491	0.62544
	0.6	0.49034	0.48715	0.48721	0.48719	0.48721
	0.8	0.37713		0.37392	0.37413	0.37392
	1	0.29016	0.28744	0.28776	0.28776	0.28747
	3	0.01334	0.02978	0.02977	0.02988	0.02977

Çizelge 5.3: $\nu = 1/100$ için diğer metotlarla karşılaştırma

x	t	(Kutluay,1999)	Tam çözüm	Mohan,2006	EF
		$N = 40$		$\Delta x = 0.0125$	$h = 1/256$
		$\Delta t = 0.001$		$\Delta t = 0.01$	$k = 0.002$
0.25	0.4	0.34164	0.34191	0.34229	0.34189
	0.6	0.2689	0.26896	0.26902	0.26895
	0.8	0.2215	0.22148		0.22147
	1	0.18825	0.18819	0.18817	0.18819
	3	0.07515	0.07511	0.07511	0.07511
0.5	0.4	0.65606	0.66071	0.66797	0.66038
	0.6	0.52658	0.52942	0.53211	0.52927
	0.8	0.43743	0.43914		0.43906
	1	0.37336	0.37442	0.375	0.37438
	3	0.15015	0.15018	0.15018	0.15017
0.75	0.4	0.90111	0.91026	0.9368	0.90863
	0.6	0.75862	0.76724	0.77724	0.76655
	0.8	0.64129	0.6474		0.64708
	1	0.75862	0.55605	0.55833	0.55588
	3	0.22502	0.22481	0.22485	0.22481



Şekil 5.4: $\nu = 10^{-5}$, $h = 1/180$, $k = 0.01$ için EF ile çözüm



Şekil 5.5: $\nu = 10^{-6}$, $h = 1/180$, $k = 0.01$ için EF ile çözüm

ν parametresinin çok daha küçük değerleri için EF metodunun çalıştığı şekil (5.4) ve şekil (5.5) den görülebilir.

5.3.2 Sonuç

Daha önceki kısımlarda bahsedilen EF metotlarına alternatif olarak bu kısımda zamanın ayrıklaştırılmasından sonra, katsayıların dondurulması ile elde edilen adi diferensiyel denklemin tam çözümünden gelen üstel fonksiyonlardan baz kümesi oluşturulmuştur. Dolayısıyla oluşturulan şema bir parametre içermez. Bu kısımda geliştirilen metot sadece Burgers denklemi için

değil, pek çok sınır tabaka probleminin sayısal çözümü için de etkin bir şekilde kullanılabilir.

6 TARTIŞMA VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında EF metotları ile çeşitli sınıflardan diferansiyel denklemlerin sayısal çözümleri ve bu metotların bazı modifikasyonları ele alınmıştır. EF yöntemleri uygulandıkları problem biçimlerine (başlangıç değer problemi, sınır değer problemi, başlangıç-sınır değer problemi) ve baz fonksiyonlarının parametre içerip içermemelerine bağlı olarak sınıflandırılmıştır. Bu yöntemlerin klasik metotlarla karşılaştırmaları yapılmış ve sayısal örnekler verilmiştir. Genel olarak parametre seçimi stratejileri tartışılmıştır.

EF metotlarının pratikte kullanımı için KTDD ve büyük boyutlu adi diferansiyel denklem sistemlerinin sayısal çözümleri üzerinde durulmalıdır. Aslında literatürde bu doğrultuda "Exponential Time Differencing" (ETD) isimli çalışmalar bulunmaktadır (Cox and Matthews, 2002). ETD şemalarında verilen adi diferansiyel denklem sisteminin lineer ve lineer olmayan kısımları ayrılır. Lineer kısmın tam çözümü hesaplanır, lineer olmayan kısım nümerik integral formülleri ile hesaplanır (Beylkin et al., 1998). Açık ETD yöntemlerinin kararlılık bölgesi, kapalı klasik metotlarınkine benzerdir. Fakat çoğu zaman bu hesaplamalar üstel matrisin hesabını gerektirir ki, bazı özel durumlar dışında bu matrisin nümerik hesabı oldukça zahmetlidir (Moler and Loan, 2003). Bu tezde geliştirilen EF metotlarının büyük boyutlu adi diferansiyel denklem sistemlerine uygulanmasındaki temel zorluk da frekans hesabıdır. Büyük boyutlu lineer olmayan cebirsel denklem sistemlerinin çözümü gerekir. Ayrıca frekans hesabında, çözümün yüksek mertebeden türevlerinin varlığı ve sürekliliği gibi kısıtlar tezde geliştirilen metotların pratikte uygulanabilirliğini zorlaştırmaktadır.

Üzerinde durulması gereken bir diğer mevzu da diferansiyel denklemlerin invariantlarının ve bazı geometrik özelliklerinin sayısal metotlar tarafından korunmasıdır (Hairer et al., 2006). Örneğin bölüm 3 de geliştirilen iki parametrelili EF metotlarının verilen test problemleri için Hamiltonian ın korunumunda gayet başarılı olduğu gözlenmiştir. EF metotları ile geometrik nümerik integrasyon kavramı arasındaki ilişkiyi vurgulayan pek fazla çalışma

mevcut değildir. Fakat Simos ve ekibi enerji korunumlu denklemlerin EF ile çözümünde *phase lag* kavramına yer vermişlerdir. (Anastassi and Simos, 2009; Monovasilis et al., 2010). *Phase lag* ın sıfırlanması veya minimizasyonu ile metodun, faz düzlemindeki görüntüyü korunması amaçlanmaktadır. Bu yönüyle EF metotları ile geometrik integratörler arasındaki ilişkiler irdelenebilir.

7 EK AÇIKLAMALAR

Ek Açıklamalar A

EFMultiStepGenerate

```

> #####
> #This is the source code of the EFMultistepGenerate by Utku ERDOGAN #
> #####
>
> #####
> # The procedure "extract" will be used to extract the coefficients list from the given operator#
> #####
> extract:=proc(f,part)
> global lisst:
> local number, i:
> if part=1 then
>   number:=nops(f)-1:
>   for i from 2 to number+1 do
>     if nops(op(i,f))<>1 then
>       lisst[i-1]:=op(2,op(i,f)):
>     else
>       lisst[i-1]:=op(i,f):
>     end if:
>   end do:
>   lisst:={seq(lisst[j],j=1..number)}:
>
> else
> number:=nops(f):
>
>   for i from 1 to number do
>     if nops(op(i,f))<>1 then
>       lisst[i]:=op(2,op(i,f)):
>     else
>       lisst[i]:=op(i,f):
>     end if:
>   end do:
>   lisst:={seq(lisst[j],j=1..number)}:
>
> end if:
> end proc:
> #####
> # The procedure "expanded" will be used to obtain series expansion of the coefficients#
> #####
> expansion:=proc(f,degree)
> global expanded:
> subs({eta[-1]=cosh(sqrt(Z)),eta[0]=sinh(sqrt(Z))/sqrt(Z)},f):

```

```

> simplify(%):
> expanded:=convert(series(% ,Z=0,degree),polynom):
> end proc:
>
>
> #####
> #This is the main procedure generating EF multistep formulas: #
> #####
> EFMultistepGenerate:=proc(L,ord,deg)
> global solution,M:
> local list1,list2,liste,moment,i,sol,K,P,num,E1,E2,G1,G2,k,scheme:
> #constructing the set of unknown coefficients
> extract(L(1),1):
> list1:=lisst:
> unassign('lisst'):
> extract(eval(op(nops(L(y(x))),L(x^ord)),h=1),2):
> list2:=lisst:
> unassign('lisst'):
> liste:=list1 union list2:
> #step i
> moment:=i->coeff(eval(L(x^i),x=0),h^i):
> moment(0):=eval(L(1)):
> #step ii
> for i from 1 while (sol<>NULL) do
> sol:=solve({seq(moment(j),j=0..i)},liste):
> end do:
> M:=i-1:
> #step iii and iv (computing eta functions)
> K[1]:=M-1:P[1]:=-1:
> for i from 2 while (K[i-1]>-1) do
> K[i]:=K[i-1]-2:
> P[i]:=P[i-1]+1:
> end do:
> num:=i-1:
> collect(eval(L(exp(m*x)),x=0),m):
> subs(m=z/h,%):
> E1[0]:=convert(%,trigh):
> E2[0]:=subs(z=-z,%):
> simplify(E1[0]+E2[0])/2:algsbys(cosh(z)=eta[-1],%):algsbys(sinh(z)=eta[0]*z,%):G1[0]:=algsbys(z^2=Z,%):
> simplify(E1[0]-E2[0])/2:algsbys(cosh(z)=eta[-1],%):algsbys(sinh(z)=eta[0]*z,%):
> G2[0]:=algsbys(z^2=Z,%):
> for i from 1 to P[num] do
> expand(diff(E1[0]+E2[0],z$ i)/2):algsbys(cosh(z)=eta[-1],%):algsbys(sinh(z)=eta[0]*z,%):
> G1[i]:=eval(algsbys(z^2=Z,%),z=1):
> expand(diff(E1[0]-E2[0],z$ i)/2):algsbys(cosh(z)=eta[-1],%):algsbys(sinh(z)=eta[0]*z,%):
> G2[i]:=eval(algsbys(z^2=Z,%),z=1):end do:
> #step v
> for k from 1 to num do
> solution[k]:=solve({seq(moment(i),i=0..K[k]),seq(G1[j],j=0..P[k]),seq(G2[r],r=0..P[k])},liste):
> end do:
> #printing

```

```

> L(u(x)):
> subs({seq(eval(diff(u(x),x$ord),x=x+i*h)=f[n+i],i=-4*ord..4*ord)},%):
> scheme:=subs({seq(u(x+i*h)=y[n+i],i=-4*ord..4*ord)},%=0:
> print(scheme):
> for i from 1 to num do
> print("K=",K[i]," P=",P[i]):
> print(solution[i]):
> print("series expansion"):
> print(seq(lhs(op(j,solution[i]))=expansion(rhs(op(j,solution[i])),deg),j=1..nops(liste))):
> end do:
> end proc:
> save extract,expansion,EFmultistepGenerate,"EFF.m";
>

```

Ek Açıklamalar B

Örnek 2.2.1 in Çıktıları

$$y_{n-1} + a_0 y_n + y_{n+1} - h^2 (b_0 f_n + b_1 (f_{n+1} + f_{n-1})) = 0$$

“K=”, 5, “ P=”, -1

$$\{a_0 = -2, b_0 = \frac{5}{6}, b_1 = \frac{1}{12}\}$$

“series expansion”

$$a_0 = -2, b_0 = \frac{5}{6}, b_1 = \frac{1}{12}$$

“K=”, 3, “ P=”, 0

$$\{a_0 = -2, b_0 = \frac{2 - 2\eta_{-1} + \eta_{-1} Z}{Z(\eta_{-1} - 1)}, b_1 = -\frac{1}{2} \frac{2 + Z - 2\eta_{-1}}{Z(\eta_{-1} - 1)}\}$$

“series expansion”

$$a_0 = -2, b_0 = \frac{5}{6} + \frac{1}{120} Z - \frac{1}{3024} Z^2, b_1 = \frac{1}{12} - \frac{1}{240} Z + \frac{1}{6048} Z^2$$

“K=”, 1, “ P=”, 1

$$\{a_0 = -2, b_1 = \frac{\eta_0 Z + 2 - 2\eta_{-1}}{\eta_0 Z^2}, b_0 = -\frac{2(2\eta_{-1} - 2\eta_{-1}^2 + \eta_0 Z)}{\eta_0 Z^2}\}$$

“series expansion”

$$a_0 = -2, b_1 = \frac{1}{12} - \frac{1}{120} Z + \frac{17}{20160} Z^2, b_0 = \frac{5}{6} + \frac{1}{60} Z + \frac{5}{2016} Z^2$$

“K=”, -1, “ P=”, 2

$$\{b_0 = \frac{2(\eta_{-1}\eta_0 - \eta_{-1}^2 + 2\eta_0^2 Z)}{Z(3\eta_0 + \eta_{-1})}, a_0 = \frac{2(-3\eta_{-1}\eta_0 - \eta_{-1}^2 + 2\eta_0^2 Z)}{3\eta_0 + \eta_{-1}},$$

$$b_1 = \frac{-\eta_0 + \eta_{-1}}{Z(3\eta_0 + \eta_{-1})}\}$$

“series expansion”

$$b_0 = \frac{5}{6} + \frac{1}{40} Z + \frac{17}{2016} Z^2 - \frac{1811}{1814400} Z^3, a_0 = -2 + \frac{1}{240} Z^3 - \frac{1}{2016} Z^4,$$

$$b_1 = \frac{1}{12} - \frac{1}{80} Z + \frac{41}{20160} Z^2 - \frac{1219}{3628800} Z^3$$

Ek Açıklamalar C

İki Parametrelili EF Runge Kutta için Maple Prosedürü

Aşağıda Maple kodu verilen EFRK prosedürü sırasıyla denklemin sağ tarafını ($x = U$, $x' = V$ cinsinden), final zamanı, nokta sayısını, $x(0)$ ve $x'(0)$ ları girdi olarak alır ve $x_i = y[i][1]$ ve $x'_i = y[i][2]$ çıktılarını verir.

```
EFRK:=proc(rrhs,final,N,ic1,ic2)
> global y:
> f:=V:
> g:=rrhs:
> h:=evalf(final/N):
> U1:=f:V1:=g:
> U2:=diff(f,U)*f+diff(f,V)*g:
> V2:=diff(g,U)*f+diff(g,V)*g:
> alpha:=- (U1*V2-U2*V1)/(-U*V1+V*U1):
> beta:=(-U*V2+V*U2)/(-U*V1+V*U1):
> F:= <V,g>:
> c[2]:=2/3:
> y[0]:= <ic1,ic2>:
> for i from 0 to N do
> #parametre hesabi
> denk:=w^2-eval(beta,{U=y[i][1],V=y[i][2]}) *w+eval(alpha,{U=y[i][1],V=y[i][2]}):
> {solve(denk)}:
> mu[1]:=op(1,%):
> mu[2]:=op(2,%):
> #Y2 nin katsayilari
> g[1] := Re((exp(mu[2]*c[2]*h)*mu[1]-mu[2]*exp(mu[1]*c[2]*h))/(mu[1]-mu[2])):
> a[2,1] := Re(-(-exp(mu[1]*c[2]*h)+exp(mu[2]*c[2]*h))/h/(mu[1]-mu[2])):
> Y1:=y[i]:
> Y2:=g[1]*y[i]+h*a[2,1]*eval(F,{U=y[i][1],V=y[i][2]}):
> #external stage katsayilar
> b[2] :=Re( -(-exp(mu[2]*h)*mu[1]+mu[1]+exp(mu[1]*h)*mu[2]-mu[2])/h/mu[1]/(-exp(mu[1]*c[2]*h)+exp(mu[2]*c[2]*h))):
>
> b[1] :=Re( (mu[2]*exp(h*(mu[2]*c[2]+mu[1]))-exp(mu[2]*c[2]*h)*mu[2]-mu[1]*exp(h*(mu[1]*c[2]+mu[2]))+exp(mu[1]*c[2]*h)))/h):
>
> y[i+1]:=y[i]+h*(b[1]*eval(F,{U=Y1[1],V=Y1[2]})+b[2]*eval(F,{U=Y2[1],V=Y2[2]})):
> end do:
> end proc;
```

Ek Açıklamalar D

Örnek 4.3.1 in Çıktıları

$$w = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda^2 (y_{i+1}^2 - 2 y_{i+1} y_{i-1} + y_{i-1}^2 + 4 \cosh(\lambda y_i) h^2)}{h^2}}$$

$$F_i = \frac{1}{4} \frac{\lambda^2 (y_{i+1}^2 - 2 y_{i+1} y_{i-1} + y_{i-1}^2 + 4 \cosh(\lambda y_i) h^2) (y_{i+1} - 2 y_i + y_{i-1})}{h^2} - 2 \lambda$$

$$\sinh(\lambda y_i)$$

$$(\cosh(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda^2 (y_{i+1}^2 - 2 y_{i+1} y_{i-1} + y_{i-1}^2 + 4 \cosh(\lambda y_i) h^2)}{h^2}} h) - 1)$$

Ek Açıklamalar E

Örnek 4.3.2 nin Çıktıları

$$\begin{aligned}
 w &= \frac{1}{2}(-2(-4 y_i^3 h^2 - y_{i+1}^2 + 2 y_{i+1} y_{i-1} - y_{i-1}^2 + 40 \cos(\pi x_i)^2 \pi^2 h^2 \\
 &\quad - 32 \cos(\pi x_i)^4 \pi^2 h^2 + 4 y_i \cos(\pi x_i)^4 h^2 - 8 y_i \pi^2 \cos(2 \pi x_i) h^2 \\
 &\quad + 4 y_i h^2 - 8 y_i \cos(\pi x_i)^2 h^2 + 16 \pi^4 \cos(2 \pi x_i) h^2 - 8 \pi^2 h^2) / (\\
 &\quad (y_i^2 + 2 \pi^2 \cos(2 \pi x_i) - 1 + 2 \cos(\pi x_i)^2 - \cos(\pi x_i)^4) h^2))^{(1/2)} \\
 F_i &= -\frac{1}{2}(-4 y_i^3 h^2 - y_{i+1}^2 + 2 y_{i+1} y_{i-1} - y_{i-1}^2 + 40 \%2 \pi^2 h^2 \\
 &\quad - 32 \%3 \pi^2 h^2 + 4 y_i \%3 h^2 - 8 y_i \pi^2 \%1 h^2 + 4 y_i h^2 - 8 y_i \%2 h^2 \\
 &\quad + 16 \pi^4 \%1 h^2 - 8 \pi^2 h^2)(y_{i+1} - 2 y_i + y_{i-1}) / (\\
 &\quad (y_i^2 + 2 \pi^2 \%1 - 1 + 2 \%2 - \%3) h^2) - 2 (2 \pi^2 \%1 + y_i^2 - \sin(\pi x_i)^4) \\
 &\quad (\cosh(\frac{1}{2}(-2(-4 y_i^3 h^2 - y_{i+1}^2 + 2 y_{i+1} y_{i-1} - y_{i-1}^2 \\
 &\quad + 40 \%2 \pi^2 h^2 - 32 \%3 \pi^2 h^2 + 4 y_i \%3 h^2 - 8 y_i \pi^2 \%1 h^2 + 4 y_i h^2 \\
 &\quad - 8 y_i \%2 h^2 + 16 \pi^4 \%1 h^2 - 8 \pi^2 h^2) / (\\
 &\quad (y_i^2 + 2 \pi^2 \%1 - 1 + 2 \%2 - \%3) h^2))^{(1/2)} h) - 1) \\
 \%1 &:= \cos(2 \pi x_i) \\
 \%2 &:= \cos(\pi x_i)^2 \\
 \%3 &:= \cos(\pi x_i)^4
 \end{aligned}$$

Ek Açıklamalar F

Örnek 4.3.3 nin Çıktıları

$$\begin{aligned}
 w &= \frac{1}{2} \sqrt{-\frac{6(-y_{i+1}^2 + 2y_{i+1}y_{i-1} - y_{i-1}^2 + 2y_i^4 h^2)}{y_i^2 h^2}} \\
 F_i &= -\frac{3}{2} \frac{(-y_{i+1}^2 + 2y_{i+1}y_{i-1} - y_{i-1}^2 + 2y_i^4 h^2)(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1})}{y_i^2 h^2} \\
 &+ 2y_i^3 \left(\cosh \left(\frac{1}{2} \sqrt{-\frac{6(-y_{i+1}^2 + 2y_{i+1}y_{i-1} - y_{i-1}^2 + 2y_i^4 h^2)}{y_i^2 h^2}} h \right) - 1 \right)
 \end{aligned}$$

KAYNAKLAR DİZİNİ

- Anastassi, Z.** and **Simos, T.**, 2009, Numerical multistep methods for the efficient solution of quantum mechanics and related problems, *Physics Reports*, 482–483(0), 1 – 240.
- Anguelov, R.** and **Lubuma, J.M.S.**, 2001, Contributions to the mathematics of the nonstandard finite difference method and applications, *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 17(5).
- Ascher, U.M., Mattheij, R.M., and Russell, R.D.**, 1995, *Numerical Solution of Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations*, SIAM.
- B.A** and **Troesch**, 1976, A simple approach to a sensitive two-point boundary value problem, *Journal of Computational Physics*, 21(3), 279 – 290.
- Berghe, G.V.** and **Daele, M.V.**, 2009, Trigonometric polynomial or exponential fitting approach?, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 233(4), 969 – 979.
- Berghe, G.V., Meyer, H.D., Daele, M.V., and Hecke, T.V.**, 1999, Exponentially-fitted explicit Runge Kutta methods, *Computer Physics Communications*, 123(1-3), 7 – 15.
- Berghe, G., Meyer, H., Daele, M., and Hecke, T.**, 2000, Exponentially fitted Runge–Kutta methods, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 125(1-2), 107 – 115.
- Beteman, H.**, 1915, Some recent researches on the motion of fluids, *Monthly Weather Review*, 43, 163–170.
- Beylkin, G., Keiser, J.M., and Vozovoi, L.**, 1998, A New Class of Time Discretization Schemes for the Solution of Nonlinear PDEs, *Journal of Computational Physics*, 147(2), 362 – 387.
- Boyd, J.**, 2011, One-point pseudospectral collocation for the one-dimensional Bratu equation, *Applied Mathematics and Computation*, 217(12), 5553 – 5565.
- Cole, J.**, 1951, On a quasilinear parabolic equation occuring in aerodynamics, *Quart Appl Math*, 9(3), 225–236.
- Coleman, J.P.** and **Ixaru, L.G.**, 2006, Truncation Errors in Exponential Fitting for Oscillatory Problems, *SIAM J. Numer. Anal.*, 44, 1441–1465.
- Coleman, J.P.** and **Ixaru, L.G.**, 1996, P-stability and exponential-fitting methods for $y'' = f(x, y)$, *IMA Journal of Numerical Analysis*, 16(2), 179–199.
- Conte, D., Esposito, E., Paternoster, B., and Ixaru, L.**, 2010, Some new uses of the functions, *Computer Physics Communications*, 181(1), 128 – 137.
- Cox, S.** and **Matthews, P.**, 2002, Exponential Time Differencing for Stiff Systems, *Journal of Computational Physics*, 176(2), 430 – 455.
- Daele, M.V.** and **Berghe, G.V.**, 2007, Geometric numerical integration by means of exponentially-fitted methods, *Applied Numerical Mathematics*, 57(4), 415 – 435.
- Deeba, E., Khuri, S., and Xie, S.**, 2000, An Algorithm for Solving Boundary Value Problems, *Journal of Computational Physics*, 159(2), 125 – 138.

KAYNAKLAR DİZİNİ (Devam)

- Erdogan, U.** and **Ozis, T.**, 2011, A smart nonstandard finite difference scheme for second order nonlinear boundary value problems, *Journal of Computational Physics*, 230(17), 6464 – 6474.
- Feng, X., Mei, L., and He, G.**, 2007, An efficient algorithm for solving Troesch's problem, *Applied Mathematics and Computation*, 189(1), 500 – 507.
- Gautschi, W.**, 1961, Numerical integration of ordinary differential equations based on trigonometric polynomials, *Numerische Mathematik*, 3, 381–397.
- Hairer, E., Ch. Lubich, C., and G. Wanner, G.**, 2006, *Geometric numerical integration. Structure-preserving algorithms for ordinary differential equations*, Springer.
- Hairer, E., Lubich, C., and Wanner, G.**, 2003, Geometric numerical integration illustrated by the Störmer–Verlet method, *Acta Numerica*, 12, 399–450.
- Hollevoet, D., Van Daele, M., and Vanden Berghe, G.**, 2009, The optimal exponentially-fitted Numerov method for solving two-point boundary value problems, *J. Comput. Appl. Math.*, 230, 260–269.
- Hundsdorfer, W. and Verwer, J.G.**, 2003, *Numerical solution of time dependent advection diffusion reaction equations*, Springer.
- Ixaru, L. and Berghe, G.**, 2004, *Exponential fitting*, Mathematics and its applications, Kluwer Academic Publishers.
- Ixaru, L., Berghe, G.V., and Meyer, H.D.**, 2002, Frequency evaluation in exponential fitting multistep algorithms for ODEs, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 140(1-2), 423 – 434.
- Kalogiratou, Z., Monovasilis, T., and Simos, T.**, 2009, Computation of the eigenvalues of the Schrödinger equation by exponentially-fitted Runge–Kutta–Nyström methods, *Computer Physics Communications*, 180(2), 167 – 176.
- Lambert, J.D. and Watson, I.A.**, 1976, Symmetric Multistep Methods for Periodic Initial Value Problems, *IMA Journal of Applied Mathematics*, 18(2), 189–202.
- Ledoux, V.**, 2007, *Study of Special Algorithms for solving Sturm Liouville and Schrodinger Equations*, Ph.D. thesis, University of Ghent, Belgium.
- LeVeque, R.J.**, 2007, *Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA.
- Lin, Y., Enszer, J.A., and Stadtherr, M.A.**, 2008, Enclosing all solutions of two-point boundary value problems for ODEs, *Computers and Chemical Engineering*, 32(8), 1714 – 1725.
- Mickens, R.**, 2001a, Analytical and Numerical Study of A Non-Standard Finite Difference For The Unplugged Van Der Pol Equation, *Journal of Sound and Vibration*, 245(4), 757 – 761.
- Mickens, R.**, 2001b, Mathematical And Numerical Study of The Duffing-Harmonic Oscillator, *Journal of Sound and Vibration*, 244(3), 563 – 567.
- Mickens, R.**, 2002, Nonstandard Finite Difference Schemes for Differential Equations, *Journal of Difference Equations and Applications*, 8(9), 823–847.
- Moler, C. and Loan, C.V.**, 2003, Nineteen Dubious Ways to Compute the Exponential of a Matrix, Twenty-Five Years Later, *SIAM Review*, 45(1), 3 – 49.

KAYNAKLAR DİZİNİ (Devam)

- Monovasilis, T., Kalogiratos, Z., and Simos, T.**, 2010, Symplectic Partitioned Runge Kutta methods with minimal phase-lag, *Computer Physics Communications*, 181(7), 1251 – 1254.
- Ramos, H. and Vigo-Aguiar, J.**, 2010, On the frequency choice in trigonometrically fitted methods, *Applied Mathematics Letters*, 23(11), 1378 – 1381.
- Ramos, J.**, 2005, Exponentially-fitted methods on layer-adapted meshes, *Applied Mathematics and Computation*, 167(2), 1311 – 1330.
- Ramos, J.**, 2006a, Piecewise-linearized methods for initial-value problems with oscillating solutions, *Applied Mathematics and Computation*, 181(1), 123 – 146.
- Ramos, J.**, 2006b, Piecewise-linearized methods for oscillators with limit cycles, *Chaos, Solitons and Fractals*, 27(5), 1229 – 1238.
- Ramos, J.**, 2007, Numerical methods for nonlinear second-order hyperbolic partial differential equations. II – Rothe's techniques for 1-D problems, *Applied Mathematics and Computation*, 190(1), 804 – 832.
- Ramos, J. and Garcia-Lopez, C.**, 1997, Nonstandard finite difference equations for ODEs and 1-D PDEs based on piecewise linearization, *Applied Mathematics and Computation*, 86(1), 11 – 36.
- Roos, H., Stynes, M., and Tobiska, L.**, 2008, *Robust Numerical Methods for Singularly Perturbed Differential Equations*, number 24 in Springer Series in Computational Mathematics, Springer.
- Ross, S.L.**, 1966, *Introduction to ordinary differential equations*, Blaisdell Pub. Co.
- Smith, G.**, 1985, *Numerical solution of partial differential equations*, Oxford University Press.
- Strang, G.**, 2007, *Computational science and engineering*, Wellesley-Cambridge Press.
- Uddin, R.**, 2001, Comparison of the Nodal Integral Method and Nonstandard Finite-Difference Schemes for the Fisher Equation, *SIAM J. Sci. Comput.*, 22(6), 1926–1942.
- Veldman, A.**, 2009, *Computational Fluid Dynamics*, University of Groningen, The Netherlands.
- Vigo-Aguiar, J., Martín-Vaquero, J., and Ramos, H.**, 2008, Exponential fitting BDF–Runge–Kutta algorithms, *Computer Physics Communications*, 178(1), 15 – 34.
- Zwillinger, D.**, 1997, *Handbook of Differential Equations*, Academic Press.

ÖZGEÇMİŞ

Özlük Bilgileri

- Ad-Soyad: Utku Erdoğan
- Adres : Ege Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü
35100, Bornova, İzmir
- Doğum Tarihi: 01.01.1980
- Doğum Yeri : Selendi/Manisa

Öğrenim Durumu

- 2001-2006 : Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü (Lisans)
- 2006- : Ege Üniversitesi Uygulamalı Matematik A.B.D (ÖYP ile Doktora)

Yayınlar ve Çalıştaylar

- Turgut Öziş, Utku Erdoğan, *An exponentially fitted method for solving Burgers' equation*, Int. J. Numer. Meth. Engng 79 (2009) 696-705
- Utku Erdoğan, Hüseyin Koçak, Turgut Öziş, *An exponentially fitted method for capillary formation tumor angiogenesis problem*, IX. DİNAMİK SİSTEMLER ÇALIŞTAYI, 18-19 Haziran 2009, İzmir
- Erdogan Utku, Öziş Turgut, *A smart nonstandard finite difference scheme for second order nonlinear boundary value problems*, Journal of Computational Physics, 230(17)(2011) 6464-6474
- Turgut Ozis, Utku Erdogan, *Efficient Exponential Fitting Algorithm with Two Fitting Parameters for Oscillation Problems*, NUMERICAL ANALYSIS AND APPLIED MATHEMATICS ICNAAM 2011; doi:10.1063/1.3637936, AIP Conf. Proc. — September 14, 2011 — Volume 1389, pp. 1594-1596
- Utku Erdoğan, Jonas Thies, Fred Wubs, Henk Dijkstra, *Determining (Seasonal) Periodic Orbits in Global Ocean Models Using Continuation Methods*, BIFURCATION and INSTABILITIES IN FLUID DYNAMICS, July 18-21, 2011, Barcelona

Hakemlikler

- International Journal of Computer Mathematics
- Journal of Computational Physics

BURSLAR ve ÖDÜLLER

- TÜBİTAK Bilim Adamı Araştırma Grubu tarafından verilen Yurtiçi Birleştirilmiş Doktora Bursunu doktora öğrenimi süresince (2006-2011) almaya hak kazanmıştır.
- 23/08/2010 -23/08/2011 tarihleri arasında YÖK yurtdışı araştırma bursu ile Hollanda Groningen üniversitesinde çalışmıştır.
- TÜBİTAK Yayın teşvikleri