

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KOPULA FONKSİYONLARI VE BİR UYGULAMA

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Atilla BİNGÖL
(092133101)

Anabilim Dalı: İstatistik
Program: İstatistiksel Bilgi Sistemleri
Danışman: Doç. Dr. Sinan ÇALIK

OCAK-2012

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KOPULA FONKSİYONLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Atilla BİNGÖL

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 18 Ocak 2012
Tezin Savunulduğu Tarih : 11 Ocak 2012

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Sinan ÇALIK (F.Ü)
Diğer Jüri Üyeleri : Doç. Dr . Sinan ÇALIK (F.Ü)
Yrd. Doç. Dr. Mahmut IŞIK (F.Ü)
Yrd. Doç. Dr. Reşat YILMAZER (F.Ü)

ÖNSÖZ

Bu çalışma da kopula fonksiyonlar teorisi hakkında genel bilgi verilmiştir. Öncelikle çalışmamın oluşumunda ve şekillenmesinde desteğini ve bilgisini benden esirgemeyen danışman hocam Sayın Doç. Dr. Sinan ÇALIK' a ve İstatistik Bölüm hocalarına ve daima yanımda olan aileme saygı ve şükranlarımı sunarım.

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ	II
ÖZET	IV
ABSTRACT	V
ŞEKİLLER LİSTESİ	VI
1. GİRİŞ	1
2. MATERYAL ve METOT	2
2.1. İki Boyutlu Dağılımla	2
2.2. Arşimedyan Kopula Tanımı ve Özellikleri.....	5
2.3. Bazı Bağımlılık Katsayıları	7
2.4. Kopula Tahmin Yöntemleri	10
3. UYGULAMA	19
1.Kendall Tau ve Clayton kopula ailesinin tahmini	19
3. Kendall Tau ve Gumbel Hougaard kopula ailesinin tahmini	23
4. SONUÇ	25
EKLER	26
5. KAYNAKLAR	32

ÖZET

Kopulalar tesadüfi değişkenler arasındaki bağımlılığı modellemek amacıyla kullanılır. Kopula fonksiyonları 1959 yılında ilk Sklar tarafından kullanılmıştır. Kopulalar ile bağımlılık yapısı modelleme, özellikle finansal risk değerlendirmesinde ve aktüerya analizinde yaygın olarak kullanılmaktadır. Son yıllarda kopulaların İstatistiksel özelliklerinin araştırılması artarak sürmekte ve özellikle ekonominin çeşitli alanlarında uygulamaları hızla yaygınlaşmaktadır. Bu çalışmada dolar ve euro'nun 1996-2011 yılları ihracat oranları arasındaki bağımlılık yapısı kopula fonksiyonları tarafından açıklanmaya çalışılmıştır.

Anahtar Kelimeler: İki Boyutlu Dağılım Fonksiyonları, Kopula Fonksiyonu, Bağımlılık yapısı, Kendal Tau, Spearman Rho,.

ABSTRACT

The copulas used to model dependence between variables. Copulas was first used by Sklar in 1959. With copulas modelling dependence structure, especially in the financial risk assessments and actuarial analysis are widely used. In recent years, increasing research of statistical properties of copulas and especially applications in the various fields of economy are becoming increasingly common. In this the export rates between the dollar and the euro during 1996-2011 are explained by the dependency structure of the copula functions.

Key words: Two dimensional distribution functions, Copula functions, Dependence structure, Kendall tau, Spearman Rho.

ŞEKİLLER LİSTESİ

Sayfa No

Şekil 1.1 $\theta= 4,87285$ parametrelili Clayton ailesi için üç boyutlu veri dağılımı.....	19
Şekil 1.2 $\theta= 4,87285$ parametrelili Clayton ailesi ile kendall tau arasındaki ilişki	20
Şekil 1.3 $\theta= 4,87285$ parametrelili Clayton ailesi için dağılım fonksiyonu	20
Şekil 1.4 $\theta= 4,87285$ parametrelili Clayton ailesi için olasılık fonksiyonu	20
Şekil 2.1 $\theta= 0,317774$ parametrelili Ali Mikhail Haq ailesi için üç boyutlu veri dağılımı	21
Şekil 2.2 $\theta= 0,317774$ parametrelili Ali Mikhail Haq ailesi ile Kendall tau arasındaki ilişki	22
Şekil 2.3 $\theta= 0,317774$ parametrelili Ali Mikhail Haq ailesi için dağılım fonksiyonu ...	22
Şekil 2.4 $\theta= 0,317774$ parametrelili Ali Mikhail Haq ailesi için olasılık fonksiyonu	22
Şekil 3.1 $\theta= 3,43642$ parametrelili Gumbel ailesi için üç boyutlu veri dağılımı.....	23
Şekil 3.2 $\theta= 3,43642$ parametrelili Gumbel ailesi ile Kendall tau arasındaki ilişki	23
Şekil 3.3 $\theta= 3,43642$ parametrelili Gumbel ailesi için dağılım fonksiyonu.....	24
Şekil 3.4 $\theta= 3,43642$ parametrelili Gumbel ailesi için olasılık fonksiyonu	24

1. GİRİŞ

İstatistiğin önemli amaçlarından biri örnek verilerinden yararlanarak yığın parametrelerinin tahminine çalışmaktır. Tahmin çabalarında araştırılan konuya göre ele alınan değişkenler arasındaki bağımlılık yapısı öncelikli sorunlardan biri olarak karşımıza çıkar. Rastgele değişkenler arasındaki bağımlılık yapısı hakkında bilgi veren bağımlılık ölçülerini belirlemenin çeşitli yöntemleri vardır. Bu yapıyı araştırırken, hangi ölçünün kullanılacağına çalışılan verinin karakteristik özelliklerine bakarak karar verilir.

Değişkenler arasındaki bağımlılık yapısını belirleme araçlarından biri, değişkenler arasından bağımlı değişken olarak kabul edilecek biri ile bağımsız değişkenler olarak alınacak diğerleri arasındaki matematiksel bağıntıyı ortaya koyan regresyon analizidir. Çoğunlukla uygulanan biçimiyle regresyon analizi, değişkenler arasındaki ilişkilerin doğrusal olduğunu ve hata terimlerinin dağılımının normal olduğunu varsayar. Ancak uygulamada birçok durumda bu varsayımların tamamen sağlanması mümkün olmaz ve bu varsayımlardan az ya da çok sapmalar söz konusu olur.

Değişkenler arasındaki bağımlılık yapısını birçok cebirsel özellikleriyle birlikte belirleyen araçlardan bir diğeri de kapulalardır. Son yıllarda özellikle işletme, finans ve risk analizi gibi alanlarda oldukça yaygın olarak kullanılan kapulalar, özellikle ekonomik değişkenler arasındaki ilişkilerin yanlış yorumlanmasına neden olabilecek Pearson korelasyon katsayısının dezavantajlarını ortadan kaldırır.

2. MATERYAL ve METOT

2.1. İki Boyutlu Dağılımla

Öncelikle bazı notasyonların tanıtılmasına ihtiyaç vardır. R ile $(-\infty, +\infty)$ aralığındaki gerçel sayılar kümesi \bar{R} ile de $[-\infty, +\infty]$ aralığındaki genişletilmiş gerçel sayılar kümesi gösterilsin. Bu durumda $\overline{R^2} = \overline{R} \times \overline{R}$ genişletilmiş gerçel düzlemdir. \bar{R}^2 deki bir dikdörtgen D ile gösterilirse, bu iki kapalı aralığın çarpımı $D = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$ dir. Burada $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_2, y_1), (x_1, y_2)$ noktaları köşegen noktalarıdır. Birim kare I^2 ; $I = [0, 1]$ ' in kartezyen çarpımı olan $I \times I$ ' dir. Bir 2- boyutlu gerçel fonksiyon F , tanım kümesi \bar{R}^2 ' nin altkümesi olan $DomF$ ve değer kümesi R ' nin bir alt kümesi olan $RanF$ şeklindeki fonksiyondur [15].

Tanım (İki değişkenli Dağılım Fonksiyonu)

İki. değişkenli sürekli bir fonksiyonun dağılım fonksiyonu olması için gerek ve yeter koşullar;

1. $\lim_{x_j \rightarrow 0} F(x_1, x_2) = 0, j = 1, 2;$

2. $\forall j$ için, $\lim_{x_j \rightarrow \infty} F(x_1, x_2) = 1,$

3. Tüm (a_1, a_2) ve (b_1, b_2) noktaları için $a_1 \leq b_1, a_2 \leq b_2$ olmak üzere; $F(b_1, b_2) - F(a_1, b_2) - F(b_1, a_2) + F(a_1, a_2) \geq 0$ dörtgen eşitsizliği sağlanmalıdır.

Burada (1) ve (2) koşulları $0 \leq F \leq 1$ olduğunu garantilerken (3) koşulu F 'in 2-artan olduğunu göstermektedir. Bunun yanında eğer F ikinci mertebeden türevlere sahip olmak üzere $((\partial^2 F)/(\partial x_1 \partial x_2)) \geq 0$ ise bu da 2-artanlığın bir göstergesidir [15].

Tanım (Frechet Hoefding Sınırları)

$F(X_1, X_2, \dots, X_m)$ m-boyutlu marjinal fonksiyonları F_1, F_2, \dots, F_m olan ortak dağılım fonksiyonu olsun. Buradaki herhangi bir marjinal fonksiyon tanım kümesi reel sayılar ve değer kümesi $[0, 1]$ olan bir fonksiyon olsun. Ortak dağılım fonksiyonu F üstten ve alttan

sınırlıdır. Bu sınırlara sırasıyla Frechet üst sınırı ve Frechet alt sınırı denir ve bu sınırlar sırasıyla;

$$F(X_1, X_2, \dots, X_m) = \min[F_1, F_2, \dots, F_m] = M$$

$$F(X_1, X_2, \dots, X_m) = \max \left[\sum_{j=1}^m F_j - m + 1, 0 \right] = W$$

fonksiyonlarıdır. Bunun yanında;

$$W = \max \left[\sum_{j=1}^m F_j - m + 1, 0 \right] \leq F(X_1, X_2, \dots, X_m) \leq \min[F_1, F_2, \dots, F_m] = M$$

şeklinde ifade edilir. Üst sınır daima sağlanırken alt sınır sadece $m=2$ durumunda gerçekleşir [13].

Tanım (Kopula Fonksiyonu)

m -boyutlu bir kopula fonksiyonu; tanım kümesi $[0,1]^m$, değer kümesi $[0,1]$ olan ve aşağıdaki özellikleri sağlayan bir fonksiyondur.

1. $\forall n \leq m, \alpha_n \in [0,1]$ için $C(1, \dots, 1, \alpha_n, 1, \dots, 1) = \alpha_n$
2. Eğer herhangi bir $n \leq m$ için $\alpha_n = 0$ ise $C(\alpha_n, \dots, \alpha_n, 1, \dots, 1) = \alpha_n$
3. C m -artandır [1,2, 3, 13]

Teorem

C bir kopula olsun. C kopulası için $\forall (u, v) \in I$ olmak üzere

$$\max(u + v - 1, 0) \leq C(u, v) \leq \min(u, v)$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlikte $M(u, v) = \min\{u, v\}$ ve

$W(u, v) = \max\{u + v - 1, 0\}$ fonksiyonları birer kopuladır. Bu kopulalara sırasıyla Frechet-Hoeffding üst sınırı, Frechet-Hoeffding alt sınırı denir ve

$$W(u, v) \leq C(u, v) \leq M(u, v)$$

eşitsizliğine ise Frechet-Hoeffding eşitsizliği denir. W ve M kopulalar için genel sınırları oluşturur. Diğer önemli kopula da $\Pi(u, v) = uv$ olarak ifade edilen bağımsızlık ya da çarpım kopulasıdır [7].

Aşağıda ifade edilecek teorem kopulalar teorisinin merkezidir. Sklar teoremi çok değişkenli dağılım fonksiyonları ile onların tek değişkenli marjinalleri arasındaki ilişkide kopulaların oynadığı rolü izah eder.

Teorem (Sklar Teoremi)

H , F ve G marjinal dağılımlı bir ortak dağılım fonksiyonu olsun. O zaman öyle bir C kopula fonksiyonu vardırki $\bar{R} = [-\infty, +\infty]$ deki tüm x ve y ler için

$$H(x, y) = C(F(x), G(y))$$

dir. Eğer F ve G sürekli ise C tektir: diğer durumda $RanF \times RanG$ üzerinde tek olarak belirlenir. Burada $RanF$ ve $RanG$, R ' nin alt kümeleri olan değer kümeleridir. Diğer taraftan C bir kopula fonksiyonu ve F , G dağılım fonksiyonları ise H , F ve G marjinal dağılımlı bir ortak dağılım fonksiyonudur [13].

Sonuç

H , marjinalleri F ve G olan bir ortak dağılım fonksiyonu olsun. $F^{(-1)}$, $G^{(-1)}$ sırasıyla bu marjinal fonksiyonların yarı terslerini gösterebilirsin. Buna göre herhangi bir $(u, v) \in I^2$ için

$$C(u, v) = H(F^{(-1)}(x), G^{(-1)}(y))$$

dir [2,7].

Örnek

Gumbel' in R^2 deki iki değişkenli ortak lojistik dağılımı, $H(x, y) = (1 + e^{-x} + e^{-y})^{-1}$ ve marjinalleri sırasıyla $F(x) = (1 + e^{-x})^{-1}$, $G(x) = (1 + e^{-y})^{-1}$ olsun. Buna göre kopulası Sonuç (2.2.1) yardımıyla,

$$\begin{aligned} C(u, v) &= H(F^{(-1)}(x), G^{(-1)}(y)) \\ &= \frac{uv}{u + v - uv} \end{aligned}$$

olur [7, 12].

Tanım (Deneysel Kopula)

$\{(X_k, Y_k)\}, k = 1, 2, \dots, n$ örneği ile ilgili olan ranklar $\{(R_i, S_i)\}$ olsun. I indikatör fonksiyon ve $u, v \in I$ olmak üzere uygun deneysel kopula C_n ,

$$C_n(u, v) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbf{1}\left(\frac{R_k}{n+1} \leq u, \frac{S_k}{n+1} \leq v\right)$$

şeklinde tanımlanır.

$N_{ij}, 1 \leq i, j \leq n$ (x, y) için $x \leq x_i, y \leq y_i$ şeklindeki sıralı nokta çiftinin sayısı olmak üzere deneysel kopulanın alternatif tanımı,

$$C_n\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) = \frac{N_{ij}}{n}$$

şeklindedir [7,12].

2.2. Arşimedyen Kopula Tanımı ve Özellikleri

Çalışmalarda önemli rol oynayacak ve çok faydalı özelliklere sahip olan arşimedyen kopula, kopulaların bir alt sınıfıdır. Sürekli kesin azalan tek değişkenli bir fonksiyon yardımıyla elde edilir. Arşimedyen kopulalar değişkenler arasındaki ilişkinin doğası ve gücü bakımından çeşitliliği olan modellerin temellerini oluşturur. Bu özelliği sayesinde uygulamada çok fazla tercih edilir.

Tanım (Arşimedyen Kopula)

Arşimedyen yaklaşımı, çok değişkenli bir kopulanın, basit tek değişkenli bir fonksiyona, üreticiye indirgenmesine izin verir. Basitlik olması açısından, iki değişkenli bir kopula düşünelim. $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$, sürekli, kesin azalan, konveks ve $\varphi(1) = 0$ olacak şekilde bir fonksiyon olsun. Bir Arşimedyen kopula

$$C(u, v) = \varphi^{-1}(\varphi(u) + \varphi(v)); u, v \in (0, 1]$$

biçiminde yazılabilir. φ 'ye C kopulasının üreticisi denir. Bir üretici bir Arşimedyen kopula belirler. Yukarıda tanımlanan Clayton kopula ve Gumbel kopula birer arşimedyen kopuladır [4,7,11]

Örnek (Frank Ailesi)

$u, v \in I$, $\theta \geq 0$ için üretici fonksiyonu $\gamma(t) = -\ln\left(\frac{\theta^t - 1}{\theta - 1}\right)$, $t \in I$ olan kopula ailesi;

$$C_\theta(u, v) = \frac{1}{\ln\theta} \left[1 + \frac{(\theta^u - 1)(\theta^v - 1)}{\theta - 1} \right]$$

dir.[7]

Örnek (Gumbel-Hougaard Ailesi)

$u, v \in I$, $\theta \geq 1$ için üretici fonksiyonu $\gamma(t) = (-\ln t)^\theta$, $t \in I$ olan kopula ailesi

$$C_\theta(u, v) = e^{-[(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta]^{1/\theta}}$$

dir.[7,12]

Örnek (Clayton Ailesi)

$u, v \in I$, $\theta \geq -1$ üretici fonksiyonu $\gamma(t) = \frac{1}{\theta}(t^{-\theta} - 1)$, $t \in I$ olan kopula ailesi;

$$C_\theta(u, v) = (\max\{(u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1), 0\})^{-1/\theta}$$

şeklinde tanımlanır.[7,12]

Tanım (Çok Değişkenli Kopula)

$C : I^n \rightarrow I$ fonksiyonu n -kopuladır öyle ki,

1. $\forall u \in I^n$ için en az bir u sıfır ise,

$$C(u) = 0$$

ve herhangi bir u_i dışında tüm u lar 1 ise,

$$C(u) = u_i.$$

2. Her $x, y \in I^n$ öyle ki $x \leq y$ için

$$V_C([x, y]) \geq 0.$$

C , n -kopulası tanım kümesi üzerinde düzgün sürekli ve C n - kopulası $n > 2$ ise, C 'nin $2 \leq k < n$ olacak şekilde k - boyutlu marjinaleri I üzerinde düzgün sürekli ve azalmayandır [7,13]

2.3. Bazı Bağımlılık Katsayıları

C kapulasının örneğe dayalı en iyi gösterimi olan C_n örnekleme kapulasından ve bu kapulanın (X, Y) çiftinin bağımlılığını karakterize ettiğinden bahsetmiştik. Dolayısıyla bağımlılığı, hem örnekleme yoluyla ve hem de teorik olarak, sırasıyla C_n ve C 'yi kullanarak ölçmek anlamlı olur. Bu düşüncenin bizi iyi bilinen iki parametre dışı bağımlılık ölçüsü, Spearman'ın ρ 'su ve Kendall'ın τ 'suna nasıl ulaştırdığını açıklayalım ve Pearson Korelasyon Katsayısı ile karşılaştıralım.

Tanım (Pearson Korelasyon Katsayısı)

$(X, Y)^T$ rastgele vektörünün bileşenleri sıfırdan farklı ve sonlu varyansa sahip olsun.

$$r = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X) Var(Y)}}$$

sayısına Pearson korelasyon katsayısı denir. Ayrıca Pearson korelasyon katsayısı kapula cinsinden

$$r = \frac{1}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} \int_0^1 \int_0^1 [C(u, v) - uv] dF_X^{-1}(u) dF_Y^{-1}(v) \quad \text{biçiminde de ifade}$$

edilebilir [7].

Pearson korelasyon katsayısı değişkenler arasındaki doğrusal ilişkiyi ölçer; dolayısıyla çoğunlukla doğrusal korelasyon katsayısı veya kısaca doğrusal korelasyon olarak da anılır. Doğrusal korelasyon, doğrusal bağımlılığın ölçüsüdür. Tam doğrusal bağımlılık durumunda $Y = aX + b$, $a \in R \setminus \{0\}$ için hemen hemen kesin olarak $|r|=1$ olur. Aksi takdirde $-1 < r < 1$ olur. Aynı zamanda doğrusal korelasyon $\alpha, \gamma \in R \setminus \{0\}, \beta, \delta \in R$

için $r(\alpha X + \beta, \gamma Y + \delta) = \text{sign}(\alpha \gamma) r(X, Y)$, özelliğine de sahiptir. Dolayısıyla doğrusal korelasyon, doğrusal dönüşümlerden etkilenmez. A, B ; $m \times n$ boyutlu matrisler, $a, b \in R^m$ ve \mathbf{X}, \mathbf{Y} rastgele n -vektörler olduğundan ve $\text{Cov}(A\mathbf{X} + a, B\mathbf{Y} + b) = A \text{Cov}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) B^T$ olur. Buradan $\alpha \in R^n$ için $\text{Var}(\alpha^T \mathbf{X}) = \alpha^T \text{Cov}(\mathbf{X}) \alpha$, olur; burada $\text{Cov}(\mathbf{X}) = \text{Cov}(\mathbf{X}, \mathbf{X})$ 'dir. Dolayısıyla doğrusal kombinasyonun varyansı tamamen bileşenler arasındaki kovaryanslarla belirlenir [8].

Doğrusal korelasyon yaygın olarak kullanılan, ancak genelde yanlış anlaşılan bir bağımlılık ölçüsüdür. Korelasyon, eliptik dağılımlarda bağımlılığın doğal sayısal ölçüsü olarak uygun olabilir. Bununla birlikte, çoğu rastgele değişkenin ortak dağılımı eliptik değildir ve doğrusal korelasyon kullanımı böyle durumlarda yanıltıcı olabilir [8].

Tanım

$(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ şeklinde iki değişkenli bir kitleden gelen n -birimlik rastgele örnek olsun.

$$r_n = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}} \in [-1, 1].$$

sayısına örnek korelasyon katsayısı denir. Örnek korelasyon katsayısı r_n , yığın korelasyon katsayısı r 'nin yansız bir tahmin edicisidir [11, 13].

Tanım (Spearman'ın R_o 'su)

Bağımlılığı ölçmek için doğal bir düşünce, Pearson'ın yaklaşımını taklit ederek (R_i, S_i) sıra sayıları çiftleri arasındaki korelasyonu veya eşdeğer olarak C_n 'nin destek kümesini oluşturan $(\frac{R_i}{n+1}, \frac{S_i}{n+1})$ arasındaki korelasyonu hesaplamaktır. Bu bizi doğrudan

$$\bar{R} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n R_i = \frac{n+1}{2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S_i = \bar{S} \text{ olmak üzere}$$

$$\rho_n = \frac{\sum_{i=1}^n (R_i - \bar{R})(S_i - \bar{S})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (R_i - \bar{R})^2 \sum_{i=1}^n (S_i - \bar{S})^2}} \in [-1,1]$$

şeklinde gösterilen örneğe ait Spearman'ın ro'suna götürür.
Bu katsayı için daha kolay ve uygun bir biçim,

$$\rho_n = \frac{12}{n.(n+1).(n-1)} \cdot \sum_{i=1}^n R_i.S_i - 3 \cdot \frac{n+1}{n-1}$$

şeklinde olup, örnek korelasyon katsayısı r_n ile aynı formu paylaşır. Bilindiği gibi, Spearman'ın ro'su r_n 'ye benzer şekilde değişkenler bağımsız olduğunda beklenen değerce sıfır olmaktadır. Bununla birlikte ρ_n , örnek korelasyon katsayısı r_n 'e benzer şekilde, eğer değişkenler bağımsız ise sıfırdır [11,13].

Tanım (Kendall'in To'su)

Sıra sayılarına dayanan ve sıkça kullanılan bir diğer bağımlılık ölçüsü de Kendall'in to' sudur. $(X_i, Y_i); i = 1, 2, \dots, n$ rastgele örneğinde P_n uyumlu çiftlerin sayısını, Q_n uyumsuz çiftlerin sayısını göstermek üzere, bu örnekten hesaplanan Kendall'in to'su

$$\tau_n = \frac{P_n - Q_n}{\binom{n}{2}} = \frac{4}{n(n-1)} P_n - 1$$

ile verilir. Burada (X_i, Y_i) ve (X_j, Y_j) çiftleri eğer $(X_i - X_j).(Y_i - Y_j) > 0$ ise uyumlu, $(X_i - X_j).(Y_i - Y_j) < 0$ ise uyumsuz olarak adlandırılır. X ve Y sürekli olduğundan, $(X_i - X_j).(Y_i - Y_j) = 0$ durumu görülmez. $(X_i - X_j).(Y_i - Y_j) > 0$ durumu ancak ve ancak $(R_i - R_j).(S_i - S_j) > 0$ ise gerçekleşeceğinden, τ_n 'nin sıra sayılarının bir fonksiyonu olduğu açıktır. Ayrıca τ_n , C_n örnekleme kapulasının da bir fonksiyonudur. Bu

durumu açıklamak, yani τ_n ile C_n arasındaki ilişkiyi görmek için aşağıda belirtilen fonksiyon tanımlansın:

$$\text{Herhangi iki } i \neq j \text{ için } I_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ eger } X_j < X_i, Y_j < Y_i \text{ ise} \\ 0 \text{ diger durumlarda} \end{cases}$$

ve $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ için $I_{ii} = 1$ olsun [7,10,11,13]

2.4. Kopula Tahmin Yöntemleri

Parametrik bir (C_θ) kopula ailesinin, X ve Y rastgele değişkenleri arasındaki bağımlılık yapısı için seçilmiş bir model olduğunu kabul edelim. Elimizde $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ şeklinde n-birimlik bir rastgele örnek var olsun. Bu örnekten θ nasıl tahmin edilebilir sorusunun cevabı aranacaktır. Bu bölümde θ 'nın bir gerçek sayı ya da çok-boyutlu olmasına bağlı olarak bazı tahmin yöntemlerinden söz edeceğiz.

Parametrik Yöntemler

Bu kesimde Tam En Çok Olabilirlik ve IFM(Marjinallere ilişkin çıkarsama fonksiyonları) yöntemlerini tanıtacağız.

Tam en çok olabilirlik yöntemi

Bu tahmin yöntemini tanıtmadan önce kanonik gösterim olarak adlandırılan gösterimi belirtelim. Bir çok değişkenli dağılımın

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n)) \cdot \prod_{j=1}^n f_j(x_j)$$

biçiminde gösterimi onun kanonik gösterimidir [9].

Bu gösterimde

$$c(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n)) = \frac{\partial^n C(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n))}{\partial F_1(x_1) \cdot \partial F_2(x_2) \dots \partial F_n(x_n)},$$

C kopulasının n . mertebeden kısmî türevi, dolayısıyla c kopula yoğunluğu ve f_j 'ler standart tek değişkenli marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonlarıdır.

Çok değişkenli yoğunluk fonksiyonu için belirtilen bu kanonik gösterim bize kopuların istatistiksel modellenmesi probleminin çözümünün iki adımda yapılabileceğini göstermektedir:

- a. Marjinal dağılımların belirlenmesi
- b. Uygun kopula fonksiyonunun tanımlanması,

$\mathfrak{X} = \{x_{1t}, x_{2t}, \dots, x_{nt}\}_{t=1}^T$ şeklinde gösterilen örnek veri matrisi olsun. Böylece tanımlanacak log-olabilirlik fonksiyonunun gösterimi aşağıdaki gibi olur:

$$l(\theta) = \sum_{i=1}^T \log \{c(F_1(x_{1t}), F_2(x_{2t}), \dots, F_n(x_{nt}))\} + \sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^n \log f_j(x_{jt});$$

burada θ marjinallere ve kopulaya ilişkin parametreler vektörüdür [9].

Eğer, marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonlarının kümesi ve kopula biliniyorsa, yukarıda belirtilen log-olabilirlik fonksiyonu yazılabilir ve en çok olabilirlik tahmin edicisi

$$\hat{\theta}_{MLE} = \max_{\theta \in \Theta} l(\theta) \quad \text{bulunabilir.}$$

Bu kesimde çok değişkenli model (yani kopula) ve bu modelin bütün marjinalleri (yani tek değişkenli olasılık yoğunluk fonksiyonları) için asimptotik en çok olabilirlik teorisinin uygunluk koşullarının sağlandığını varsaydık. Bu uygunluk koşulları altında en çok olabilirlik tahmin edicisi tanımlıdır ve tutarlı, asimptotik etkin bir tahmin edicidir. Ayrıca, asimptotik normal dağılıma sahiptir [9];

$$\sqrt{T}(\hat{\theta}_{MLE} - \theta_0) \rightarrow N(0, \mathfrak{I}^{-1}(\theta_0)).$$

Burada $\mathfrak{I}(\theta_0)$ Fisher'in bilgi matrisi ve θ_0 doğru parametrik değerdir. $\hat{\theta}_{MLE}$ ' in kovaryans matrisi (yani Fisher' in bilgi matrisi), olabilirlik fonksiyonunun negatif Hessian matrisinin tersi ile tahmin edilir.

IFM (marjinallere ilişkin çıkarsama fonksiyonları) Yöntemi

En çok olabilirlik yöntemi için, marjinal dağılımların parametreleri ve kopula tarafından açıklanan bağımlılık yapısının parametreleri gerekeceğinden, özellikle çok boyutlu durumlarda karışık ve zor hesaplanmalar ile karşılaşılır. Fakat, log-olabilirlik fonksiyonuna bakıldığında bu fonksiyonun iki pozitif terimden oluştuğu görülür. Birinci terim kapula yoğunluğu ve onun parametrelerinden oluşurken, ikinci terim marjinallerden ve kapula yoğunluğunun bütün parametrelerini içerir. Tahmin iki adımda yapılır:

Adım 1: Tek değişkenli marjinal dağılımların tahminini yaparak, marjinal parametreleri θ_1 tahmin edilir:

$$\hat{\theta}_1 = \text{ArgMax}_{\theta_1} \sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^n \log f_j(x_{jt}; \theta_1).$$

Adım 2: Elde edilen $\hat{\theta}_1$ ile kopula parametresi θ_2 tahmin edilir:

$$\hat{\theta}_2 = \text{ArgMax}_{\theta_2} \sum_{t=1}^T \log c(F_1(x_{1t}), F_2(x_{2t}), \dots, F_n(x_{nt}); \theta_2, \hat{\theta}_1).$$

Bu yöntem IFM (Marjinallere ilişkin çıkarsama fonksiyonları) yöntemi olarak adlandırılır. IFM adı, 'Inference Functions for Margins' deyiminden gelmektedir [3].

IFM tahmin edicisi $\hat{\theta}_{IFM} = (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)'$ vektörü ile gösterilir.

l log-olabilirlik fonksiyonu, l_j , j. marjinalin log-olabilirlik fonksiyonu, l_c ise kopulanın log-olabilirlik fonksiyonu olsun. O zaman, IFM tahmin edicisi aşağıda belirtilen eşitliğin çözümüdür:

$$\left(\frac{\partial l_1}{\partial \theta_{11}}, \frac{\partial l_2}{\partial \theta_{12}}, \dots, \frac{\partial l_n}{\partial \theta_{1n}}, \frac{\partial l_c}{\partial \theta_2} \right) = 0'.$$

EÇO tahmin edicisi ise aşağıda belirtilen eşitliğin çözümüdür:

$$\left(\frac{\partial l}{\partial \theta_{11}}, \frac{\partial l}{\partial \theta_{12}}, \dots, \frac{\partial l}{\partial \theta_{1n}}, \frac{\partial l}{\partial \theta_2} \right) = 0'.$$

Bu iki tahmin edici genelde birbirine eşit çıkmamaktadır.

IFM tahmin edicisi EÇO tahmin edicisinden daha kolay hesaplanabilmektedir. Bu yüzden, IFM tahmin edicisinin EÇO tahmin edicisine göre asimptotik etkinliğinin araştırılması mantıklı olacaktır. Bunun için, iki tahmin edicinin asimptotik kovaryans matrislerinin karşılaştırılması gerekir.

IFM teorisi, parametreler vektörünün tahmini için uygun sonuç eşitliklerinin kümesinin kullanılmasına dayanan özel bir durumdur. Bu durumdaki her sonuç eşitliği aslında bir skor fonksiyonudur. (yani eşitliğin sol tarafı, her marjinal yoğunluğa ait log-olabilirliğinin kısmî türevinden oluşur.)

EÇO tahmin edicisi gibi, IFM tahmin edicisinin de gereken uygunluk koşulları altında asimptotik normallik özelliğine sahip olduğu Joe tarafından kanıtlanmıştır:

$$\sqrt{T}(\hat{\theta}_{IFM} - \theta_0) \rightarrow N(0, G^{-1}(\theta_0));$$

burada $G(\theta_0)$ Godambe bilgi matrisi ve θ_0 doğru parametrik değerdir [3,9].

l log-olabilirlik fonksiyonu, l_j , j . marjinalin log-olabilirlik fonksiyonunu, l_c ise kapulanın log-olabilirlik fonksiyonu olsun. Böylece skor fonksiyonu,

$$s(\theta) = \left(\frac{\partial l_1}{\partial \theta_{11}}, \frac{\partial l_2}{\partial \theta_{12}}, \dots, \frac{\partial l_n}{\partial \theta_{1n}}, \frac{\partial l_c}{\partial \theta_2} \right)'$$

şeklinde olur.

Godambe bilgi matrisi ise aşağıda belirtilen formu alır;

$$G(\theta_0) = D^{-1}V(D^{-1})';$$

burada

$$D = E\left[\frac{\partial s(\theta)}{\partial \theta}\right], \quad V = E[s(\theta)s(\theta)']$$

şeklindedir. Bu kovaryans matrisinin tahmini için birçok türev hesaplanması gerekmektedir. 1997'de Joe bu tahmin için Jacknife yöntemini ya da diğer Bootstrap yöntemlerinden birini kullanmayı önermiş, IFM tahmin edicisinin EÇÖ tahmin edicisine göre daha etkin olduğunu göstermiştir [3,9].

Yarı-Parametrik Yöntem

En çok sözde olabilirlik yöntemi

Klâsik istatistikte, en çok olabilirlik tahmini, çoğunlukla daha etkin olan ve özellikle θ parametresi çok boyutlu olduğunda bu etkinliğin daha da arttığı momentler yöntemine iyi bir alternatiftir. Bu kesimde bu yaklaşımın, bağımlılık parametresinin sıra sayılarına dayalı olduğu bir tahmine uyarlanması verilecektir. c_θ yoğunluğuna sahip C_θ kopulasının mutlak sürekli olmasını gerektiren en çok sözde olabilirlik yöntemi, basit olarak sıra sayılara dayalı

$$l(\theta) = \sum_{i=1}^n \log \left\{ c_\theta \left(\frac{R_i}{n+1}, \frac{S_i}{n+1} \right) \right\}$$

log-olabilirlik fonksiyonunun maksimum hale getirecek parametrenin tahminini elde eder. Bu yöntemin formu, klâsik log-olabilirlik fonksiyonu

$$l(\theta) = \sum_{i=1}^n \log \{ c_\theta (F(X_i), G(X_i)) \}$$

ifadesinde bilinmeyen F ve G marjinal dağılım fonksiyonlarının yerine

$$F_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n I(X_i \leq x) = \frac{R_i}{n+1}$$
$$G_n(y) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n I(Y_i \leq y) = \frac{S_i}{n+1}$$

Örnekten hesaplanmış değerlerinin tekrar ölçeklenmiş versiyonlarının konulmasıyla elde edilir. En çok sözde olabilirlik yöntemi, daha çok sayısal işlem içerdiği ve c_θ yoğunluğunun var olmasını gerektirdiği için, Kendall'ın τ 'sü ve Spearman'ın ρ 'sünü içeren yöntemlere göre yüzeysel olarak daha az çekiciliğe sahiptir. Bununla birlikte bu yöntem bağımlılık parametresi θ 'nın gerçek sayı olmasını gerektirmediğinden, genelde diğer yöntemlere göre daha fazla uygulanabilir [13].

Parametrik Olmayan Yöntemler

Kendall'ın τ 'süne dayanan yöntem

Bu yöntemin anlaşılmasını kolaylaştırmak için yine,

$$C_\theta(u, v) = uv + \theta uv(1-u)(1-v), \quad u, v \in [0,1], \quad \theta \in [-1,1]$$

Farlie-Gumbel-Morgenstern kopula ailesini göz önüne alalım.

Bu aile için Kendall'ın τ 'sünün teorik değerini

$$\tau = 2\theta/9$$

olarak bulmuştuk ve θ 'nın gerçek sayı olduğundan söz etmiştik. Amacımız θ 'yı tahmin etmek olduğundan,

$$\tilde{\theta}_n = \frac{9}{2} \tau_n$$

sonucuna ulaşabiliriz.

τ_n sıra sayılarına dayanan bir istatistik olduğundan, kullanacağımız yöntemin parametrik olmayan bir yöntem olduğu söylenebilir.

Genel olarak, $\theta = g(\tau)$ şeklinde düzgün bir fonksiyona sahipse, $\tilde{\theta}_n = g(\tau_n)$ şeklinde tanımlanan $\tilde{\theta}_n$ 'nin θ için Kendall'ın t_0 'suna dayalı bir tahmin edici olduğu söylenebilir.

Genest ve Rivest

$$\tilde{W}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n I_{ji} = \frac{1}{n} \# \{j : X_i \leq X_j, Y_i \leq Y_j\}$$

ve

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (W_i + \tilde{W}_i - 2\bar{W})^2$$

olmak üzere $\sqrt{n} \frac{\tau_n - \tau}{4S} \approx N(0,1)$ olduğunu göstermiştir [13].

Delta Metodu uygulandığında, $n \rightarrow \infty$ ise, $\tilde{\theta}_n \approx N(\theta, \frac{1}{n} \{4S \cdot g'(\tau_n)\}^2)$ olur.

Böylece, θ için $1 - \alpha$ güven katsayılı güven aralığı aşağıdaki şekli alır:

$$\tilde{\theta}_n \pm z_{\alpha/2} \frac{1}{\sqrt{n}} 4S \cdot |g'(\tau_n)|$$

Ayrıca Arşimedyen kapula aileleri için,

$$\tau = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)} dt$$

eşitliğinin var olduğu Genest ve Mackay tarafından gösterilmiştir [14].

Spearman'ın ro'suna dayanan yöntem

Bu yöntemi yine, $C_\theta(u, v) = uv + \theta uv(1-u)(1-v)$, $u, v \in [0,1]$, $\theta \in [-1,1]$ şeklinde tanımlanan Farlie-Gumbel-Morgenstern kapula ailesini seçerek örneklendirelim. Bu aile için Spearman'ın ro'sunun teorik değeri $\rho = \theta/3$ olarak bulunmuştur. Bu aile için θ gerçek bir sayıdır ve amacımız θ 'yı tahmin etmek olduğundan yukarıdaki eşitlikten $\tilde{\theta}_n = 3\rho_n$ sonucuna ulaşırız. Öte yandan ρ_n sıra sayılarına dayanan bir istatistik olduğundan, kullanacağımız yöntemin parametrik olmayan bir yöntem olduğu söylenebilir.

Genel olarak, $\theta = h(\rho)$ şeklinde bir fonksiyona sahipse, $\tilde{\theta}_n = g(\rho_n)$ şeklinde tanımlanan $\tilde{\theta}_n$ 'nin θ 'nın Spearman'ın ro'suna dayalı bir tahmin edici olduğu söylenebilir.

Buradan $\rho_n \approx N(\rho, \frac{\sigma^2}{n})$ sonucuna varmışlardır [6].

Kendall'in to'suna dayalı yöntemde olduğu gibi Delta Metodu uygulandığında,

$$\tilde{\theta}_n \approx N(\theta, \frac{1}{n} \{\sigma_n \cdot h'(\rho_n)\}^2)$$

olur; burada σ_n^2 , σ^2 için uygun olan bir tahmin edicidir. Böylece, θ için $1-\alpha$ katsayılı güven aralığı,

$$\tilde{\theta}_n \pm z_{\alpha/2} \frac{1}{\sqrt{n}} \sigma_n |h'(\rho_n)| \text{ olur.}$$

Temelde yatan C kopulasının yerine C_n uygulanırsa, σ^2 için tutarlı bir tahmin edici olan σ_n^2 'nin,

$$\sigma_n^2 = 144(-9A_n^2 + B_n + 2C_n + 2D_n + 2E_n) \text{ şeklinde olduğu göstermiştir.}$$

Burada,

$$A_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{R_i}{n+1} \frac{S_i}{n+1}$$

$$B_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{R_i}{n+1} \right)^2 \left(\frac{S_i}{n+1} \right)^2$$

$$C_n = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{R_i}{n+1} \frac{S_i}{n+1} \cdot I(R_k \leq R_i, S_k \leq S_i) + \frac{1}{4} - A_n$$

$$D_n = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{S_i}{n+1} \frac{S_j}{n+1} \max\left(\frac{R_i}{n+1}, \frac{R_j}{n+1}\right)$$

$$E_n = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{R_i}{n+1} \frac{R_j}{n+1} \max\left(\frac{S_i}{n+1}, \frac{S_j}{n+1}\right)$$

olarak tanımlanmıştır [6].

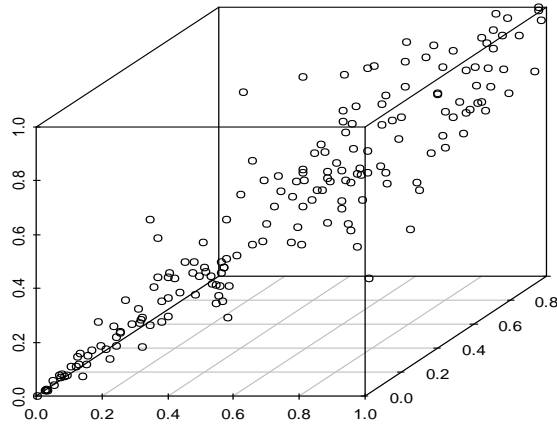
3. UYGULAMA

Çalışmada uygulama olarak euro ve dolar için 1996 ve 2011 yılları arasındaki ihracat oranları arasındaki bağımlılık yapısı Kendall Tau değerine bağlı olarak incelenmiştir. Kendall Tau değeri yardımıyla iki değişken arasındaki bağımlılık yapısına uygun parametreye bağlı olarak kopula aileleri incelenmiştir. Uygun kopula ailesi yardımıyla bu bağımlılık yapısı açıklanmıştır.

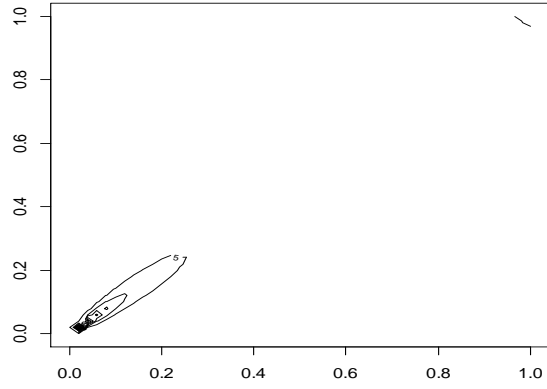
1.Kendall Tau ve Clayton kopula ailesinin tahmini

Kendall Tau ve Clayton kopula ailesi arasındaki bağıntı $\tau_K(\theta) = \frac{\theta}{\theta + 2}$ şeklindedir.

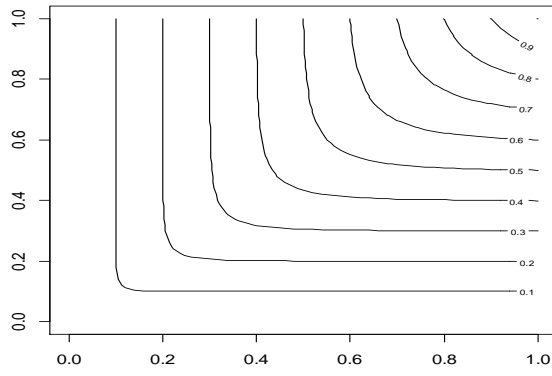
Bu denklemden Kendall Tau değeri 0,709 olarak verecek Clayton ailesinin parametre tahmini $\theta = 4,87285$ olarak elde edilir. $\theta = 4,87285$ için Clayton ailesine ilişkin oluşturulan frekanslara $\chi^2_{\text{hesap}}=101,354$ ve $p=0,443$ olarak elde edilmiştir. Dolayısıyla $p>0,05$ olduğundan H_0 hipotezi kabul edilir. Buna göre verimiz için Clayton ailesi uygun seçimdir.



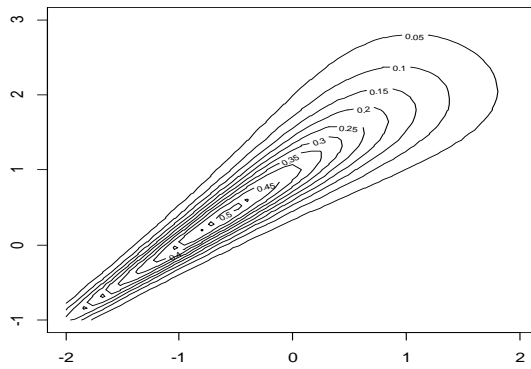
Şekil 1.1 $\theta = 4,87285$ parametrelili Clayton ailesi için üç boyutlu veri dağılımı



Şekil 1.2 $\theta = 4,87285$ parametrelı Clayton ailesi ile kendall tau arasındaki ilişki



Şekil 1.3 $\theta = 4,87285$ parametrelı Clayton ailesi için dağılım fonksiyonu



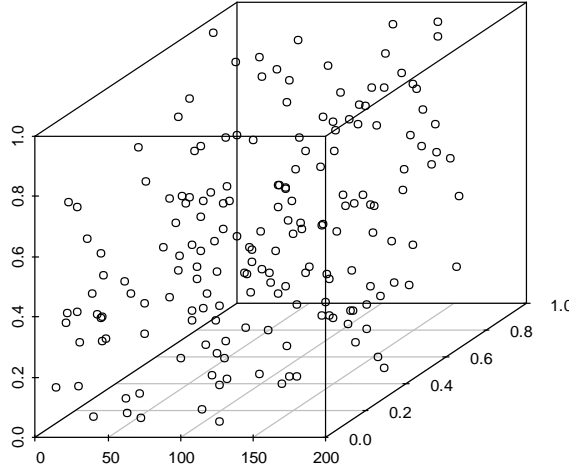
Şekil 1.4 $\theta = 4,87285$ parametrelı Clayton ailesi için olasılık fonksiyonu

2. Kendall Tau ve Ali Mikhail kopula ailesinin tahmini

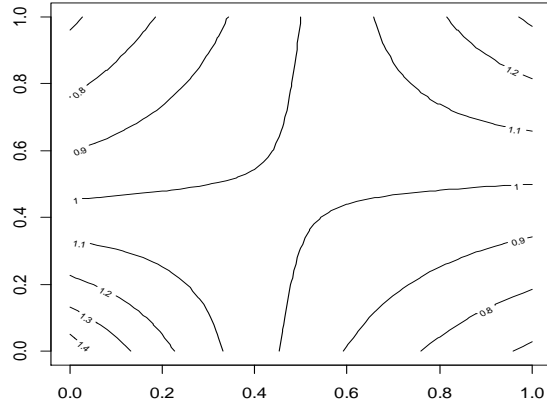
Kendall Tau ve Ali Mikhail Haq kopula ailesi arasındaki bağıntı

$\tau_K(\theta) = \left(\frac{3\theta - 2}{\theta}\right) - \frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{\theta}\right)^2 \ln(1 - \theta)$ şeklindedir. Bu denklemden Kendall Tau değeri

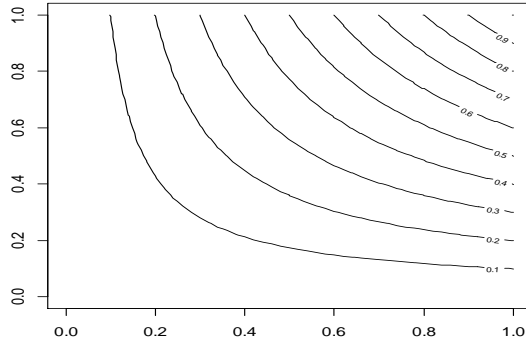
0,709 olarak verecek Ali Mikhail Haq ailesinin parametre tahmini $\theta = 0,317774$ olarak elde edilir. $\theta = 0,317774$ için Ali Mikhail Haq ailesine ilişkin oluşturulan frekanslara göre $\chi^2_{\text{hesap}} = 148,750$ ve $p = 0,290$ olarak elde edilmiştir. Dolayısıyla $p > 0,05$ olduğundan H_0 hipotezi kabul edilir. Buna göre verimiz için Ali Mikhail Haq ailesi uygun seçimdir.



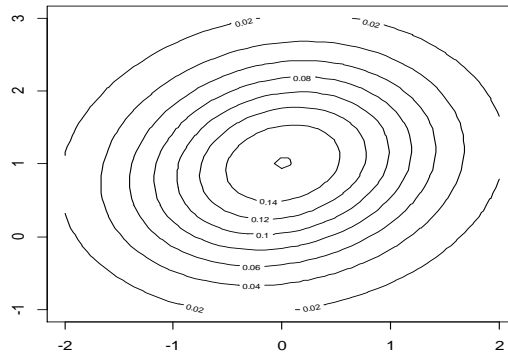
Şekil 2.1 $\theta = 0,317774$ parametrelili Ali Mikhail Haq ailesi için üç boyutlu veri dağılımı



Şekil 2.2 $\theta = 0,317774$ parametrelili Ali Mikhail Haq ailesi ile Kendall tau arasındaki ilişki



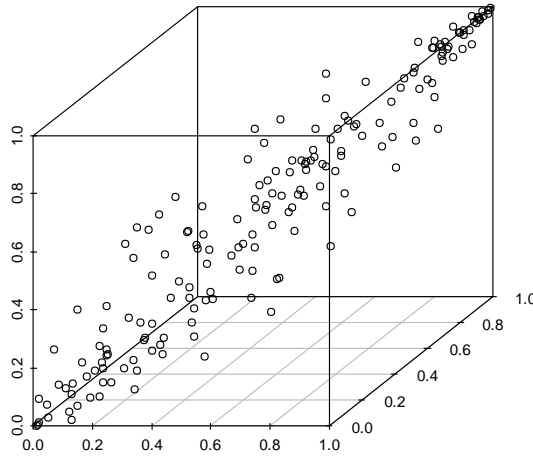
Şekil 2.3 $\theta = 0,317774$ parametrelili Ali Mikhail Haq ailesi için dağılım fonksiyonu



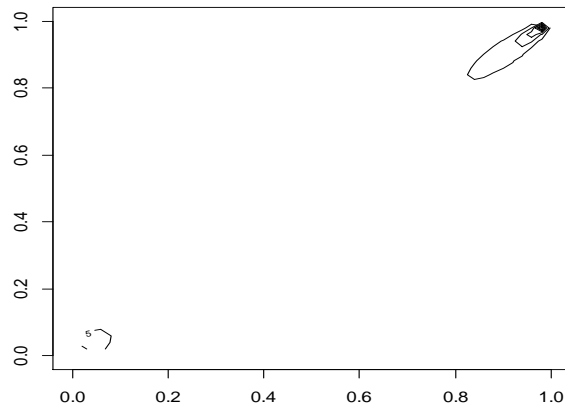
Şekil 2.4 $\theta = 0,317774$ parametrelili Ali Mikhail Haq ailesi için olasılık fonksiyonu

3. Kendall Tau ve Gumbel Hougaard kopula ailesinin tahmini

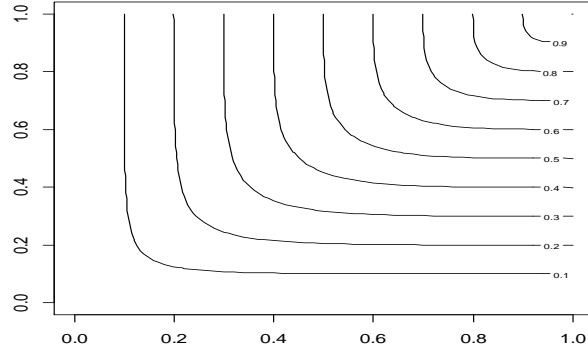
Kendall Tau ve Gumbel Hougaard kopula ailesi arasındaki bağıntı $\tau_K(\theta) = 1 - \theta^{-1}$ şeklindedir. Bu denklemden Kendall Tau değeri 0,709 olarak verecek Gumbel Hougaard ailesinin parametre tahmini $\theta = 3,43642$ olarak elde edilir. $\theta = 3,43642$ için Gumbel Hougaard ailesine ilişkin oluşturulan frekanslara göre $\chi^2_{\text{hesap}} = 110,972$ ve $p = 0,456$ olarak elde edilmiştir. Dolayısıyla $p > 0,05$ olduğundan H_0 hipotezi kabul edilir. Buna göre verimiz için Gumbel Hougaard ailesi uygun seçimdir.



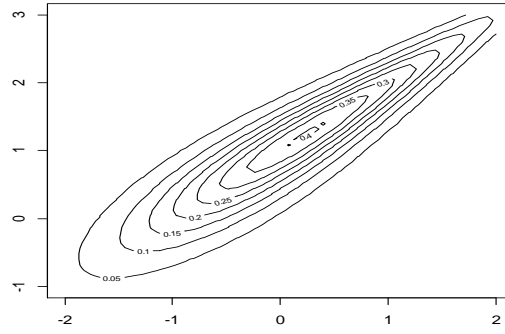
Şekil 3.1 $\theta = 3,43642$ parametrelili Gumbel ailesi için üç boyutlu veri dağılımı



Şekil 3.2 $\theta = 3,43642$ parametrelili Gumbel ailesi ile Kendall tau arasındaki ilişki



Şekil 3.3 $\theta=3,43642$ parametrelı Gumbel ailesi için dağılım fonksiyonu



Şekil 3.4 $\theta=3,43642$ parametrelı Gumbel ailesi için olasılık fonksiyonu

4. SONUÇ

1996 yılı ile 2011 yılına kadar olan zaman diliminde euro ve dolar'ın ihracat oranları arasındaki bağımlılık yapısı Kendall Tau değerine dayanan parametrik olmayan kopula yöntemiyle ortaya konulmaya çalışılmıştır. Elde edilen sonuçlara göre euro ve dolar ihracat oranları arasındaki bağımlılık yapısını açıklamada Gumbel Ali Mikhail Haq ve Clayton ailesinin kullanılabileceği tespit edilmiştir. Bunlardan hesaplanan ki-kare değerlerinden diğerine göre daha küçük hesaplanan, yani en uygun olanının Clayton ailesi olduğu görülmüştür.

EKLER

		DOLAR	EURO
1996	OCAK	0,189869	0,187169
1996	ŞUBAT	0,19284	0,192357
1996	MART	0,217679	0,216321
1996	NİSAN	0,198003	0,198199
1996	MAYIS	0,175894	0,17848
1996	HAZİRAN	0,189234	0,190365
1996	TEMMUZ	0,207444	0,205994
1996	AĞUSTOS	0,210431	0,206704
1996	EYLÜL	0,205529	0,2034
1996	EKİM	0,227781	0,226756
1996	KASIM	0,241572	0,236902
1996	ARALIK	0,259996	0,260383
1997	OCAK	0,221504	0,22799
1997	ŞUBAT	0,201208	0,216782
1997	MART	0,235791	0,257628
1997	NİSAN	0,219544	0,240998
1997	MAYIS	0,237419	0,25985
1997	HAZİRAN	0,230952	0,255392
1997	TEMMUZ	0,232947	0,264277
1997	AĞUSTOS	0,23168	0,271071
1997	EYLÜL	0,240908	0,27487
1997	EKİM	0,258926	0,290651
1997	KASIM	0,273368	0,299639
1997	ARALIK	0,26103	0,293111
1998	OCAK	0,237696	0,272687
1998	ŞUBAT	0,22361	0,256778
1998	MART	0,268424	0,309176
1998	NİSAN	0,207729	0,238827
1998	MAYIS	0,261971	0,295572
1998	HAZİRAN	0,245049	0,278099

1998	TEMMUZ	0,239376	0,272854
1998	AĞUSTOS	0,242412	0,275045
1998	EYLÜL	0,23923	0,259298
1998	EKİM	0,270363	0,281247
1998	KASIM	0,24406	0,261004
1998	ARALIK	0,242595	0,258348
1999	OCAK	0,204049	0,2188
1999	ŞUBAT	0,237762	0,264257
1999	MART	0,260273	0,297322
1999	NİSAN	0,2116	0,246336
1999	MAYIS	0,241134	0,282703
1999	HAZİRAN	0,229945	0,275776
1999	TEMMUZ	0,244316	0,294657
1999	AĞUSTOS	0,210173	0,246641
1999	EYLÜL	0,246353	0,292354
1999	EKİM	0,288045	0,335008
1999	KASIM	0,265204	0,319782
1999	ARALIK	0,24176	0,297993
2000	OCAK	0,230029	0,283641
2000	ŞUBAT	0,245232	0,310776
2000	MART	0,251028	0,324354
2000	NİSAN	0,264212	0,347913
2000	MAYIS	0,253333	0,348992
2000	HAZİRAN	0,251991	0,331199
2000	TEMMUZ	0,247931	0,328935
2000	AĞUSTOS	0,221468	0,304593
2000	EYLÜL	0,260387	0,371539
2000	EKİM	0,243213	0,354324
2000	KASIM	0,270796	0,394619
2000	ARALIK	0,269676	0,37547
2001	OCAK	0,242305	0,322165
2001	ŞUBAT	0,288233	0,369114
2001	MART	0,275859	0,379704

2001	NİSAN	0,283438	0,396439
2001	MAYIS	0,312543	0,444388
2001	HAZİRAN	0,277543	0,405821
2001	TEMMUZ	0,269108	0,390172
2001	AĞUSTOS	0,279474	0,387475
2001	EYLÜL	0,281237	0,386061
2001	EKİM	0,304727	0,419787
2001	KASIM	0,30789	0,431594
2001	ARALIK	0,288233	0,403934
2002	OCAK	0,282492	0,399177
2002	ŞUBAT	0,258272	0,370189
2002	MART	0,316255	0,45064
2002	NİSAN	0,297177	0,419229
2002	MAYIS	0,325073	0,443473
2002	HAZİRAN	0,300193	0,39286
2002	TEMMUZ	0,336289	0,422439
2002	AĞUSTOS	0,322425	0,411343
2002	EYLÜL	0,348679	0,443057
2002	EKİM	0,379332	0,482011
2002	KASIM	0,389352	0,485791
2002	ARALIK	0,351311	0,430566
2003	OCAK	0,382862	0,450845
2003	ŞUBAT	0,316745	0,366148
2003	MART	0,423443	0,488609
2003	NİSAN	0,396782	0,456417
2003	MAYIS	0,418266	0,453787
2003	HAZİRAN	0,411293	0,438765
2003	TEMMUZ	0,458965	0,50269
2003	AĞUSTOS	0,414826	0,462579
2003	EYLÜL	0,445808	0,497252
2003	EKİM	0,522702	0,55726
2003	KASIM	0,4301	0,458984
2003	ARALIK	0,497854	0,506879

2004	OCAK	0,500521	0,499708
2004	ŞUBAT	0,397033	0,391398
2004	MART	0,565353	0,575334
2004	NİSAN	0,54958	0,569871
2004	MAYIS	0,560154	0,586398
2004	HAZİRAN	0,572541	0,588339
2004	TEMMUZ	0,610219	0,620352
2004	AĞUSTOS	0,510037	0,521728
2004	EYLÜL	0,612835	0,626211
2004	EKİM	0,635702	0,636215
2004	KASIM	0,621245	0,598244
2004	ARALIK	0,708676	0,660284
2005	OCAK	0,541434	0,511852
2005	ŞUBAT	0,612342	0,586557
2005	MART	0,7142	0,674321
2005	NİSAN	0,663957	0,63939
2005	MAYIS	0,647607	0,634184
2005	HAZİRAN	0,65425	0,668698
2005	TEMMUZ	0,624447	0,6459
2005	AĞUSTOS	0,60163	0,610307
2005	EYLÜL	0,738297	0,750261
2005	EKİM	0,733737	0,760868
2005	KASIM	0,643853	0,680115
2005	ARALIK	0,785104	0,82598
2006	OCAK	0,556144	0,573217
2006	ŞUBAT	0,656386	0,683767
2006	MART	0,802962	0,833656
2006	NİSAN	0,69949	0,712757
2006	MAYIS	0,762922	0,746816
2006	HAZİRAN	0,846769	0,832741
2006	TEMMUZ	0,765724	0,752708
2006	AĞUSTOS	0,737965	0,718463
2006	EYLÜL	0,824138	0,805934

2006	EKİM	0,746374	0,737377
2006	KASIM	0,936267	0,909118
2006	ARALIK	0,93218	0,880222
2007	OCAK	0,711242	0,683289
2007	ŞUBAT	0,829598	0,792077
2007	MART	0,970546	0,913706
2007	NİSAN	0,900712	0,832029
2007	MAYIS	0,991106	0,913812
2007	HAZİRAN	0,972972	0,904225
2007	TEMMUZ	0,968367	0,880708
2007	AĞUSTOS	0,946584	0,866855
2007	EYLÜL	0,97931	0,879599
2007	EKİM	1,072105	0,941306
2007	KASIM	1,226344	1,042805
2007	ARALIK	1,053556	0,901305
2008	OCAK	1,151955	0,977231
2008	ŞUBAT	1,200244	1,015196
2008	MART	1,238239	0,99695
2008	NİSAN	1,231238	0,973557
2008	MAYIS	1,351935	1,082431
2008	HAZİRAN	1,275299	1,023015
2008	TEMMUZ	1,364662	1,078115
2008	AĞUSTOS	1,196878	0,992872
2008	EYLÜL	1,386084	1,198963
2008	EKİM	1,053415	0,987646
2008	KASIM	1,018003	0,995416
2008	ARALIK	0,836641	0,774417
2009	OCAK	0,854252	0,801827
2009	ŞUBAT	0,913909	0,890313
2009	MART	0,883612	0,845101
2009	NİSAN	0,819278	0,775029
2009	MAYIS	0,795952	0,728941
2009	HAZİRAN	0,902487	0,803223

2009	TEMMUZ	0,981151	0,868144
2009	AĞUSTOS	0,849421	0,74121
2009	EYLÜL	0,918849	0,788021
2009	EKİM	1,093834	0,91971
2009	KASIM	0,964604	0,806853
2009	ARALIK	1,089373	0,929295
2010	OCAK	0,848212	0,740324
2010	ŞUBAT	0,895287	0,814777
2010	MART	1,071159	0,983571
2010	NİSAN	1,018018	0,945107
2010	MAYIS	1,061784	1,049516
2010	HAZİRAN	1,033934	1,053991
2010	TEMMUZ	1,036293	0,921132
2010	AĞUSTOS	0,92348	0,891055
2010	EYLÜL	0,965278	0,92094
2010	EKİM	1,187858	1,066423
2010	KASIM	1,01654	0,919923
2010	ARALIK	1,280924	1,208913

5. KAYNAKLAR

- [1] **Abozou K. T.**, 2007. Copulas in Statistics, *Msc Thesis*, African Institute for Math. Sciences.
- [2] **Alsina C. and Bonet E.**, 1979. On Sums of Uniformly Distributed Random Variables, *Stochastica*, **3**, 2 .
- [3] **Bouyé E.**, 2000. Copulas for Finance A Reading Guide and Some Applications Financial Econometrics, London.
- [4] **Çelebioglu, S.**, 2003. Arşimedyen kapulalar ve bir uygulama, *Selçuk Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Fen Dergisi*, **22**,43-52.
- [5] **De Matteis R.**, 2001. Fiting Copulas To Data, *Diploma thesis*, Institute of Math. of Univesity of Zurich.
- [6] **Genest, C., Rivest, L.**, 1993. Stat. inference procedures for bivariate archimedean copulas, *Journal America Statistic Associative*. **88**, 1034-1043.
- [7] **Gianfausto, S., Carlo D. M., Nathabandu T., Kottegoda and Renzo R.**, 2007. *Extremes In Nature*, Springer.
- [8] **Joe, H.**, 1997. *Multivariate Models and Dependence Concepts* , Chapman & Hall,London.
- [9] **Kotz S., Nadarajah S.**, 2000. *Extreme Value Distributions Theory and Applications*.
- [10] **Kotz S.**, 2001. *Correlation and Dependence*, George Washington University, USA.
- [11] **Özbakiş Y. G.**, 2006. Bazı Kopula Tahmin Yöntemleri ve Bir Uygulama, *Yüksek Lisans Tezi*, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik AnabilimDalı Bilim ANKARA.
- [12] **Metin A.**, 2010. Kopulalar ve Bağımlılık Yapıları *Yüksek Lisans Tezi*, Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik AnabilimDalı Bilim ELAZIĞ
- [13] **Nelsen R.**, 1998. *An introduction to copulas*, Springer.
- [14] **Nelsena R. B, Quesada-Molina J., Rodriguez J. A U'beda-Flores L. M.**, 2006. On the construction of copulas and quasi-copulas with given diagonal Sect., *Mathematics and Economics*, **42**, 473-483.
- [15] **Shabazov A.**, 2005. Olasılık Teorisine Giriş, Birsen Yayınları.
- [16] **Shih J. H., Louis T.A.**, 1995. Inferences on the association parameter in copula models for bivariate survival data, *Biometrics*, **51**, 1384,1399.