

CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**HOMOTOPİ ANALİZ METODU' NUN FARKLI TİPTE DİFERANSİYEL
DENKLEMLERE UYGULANIŞI VE ADOMİAN DECOMPOSITION
METODU, DİFERANSİYEL TRANSFORM METODU İLE
KARŞILAŞTIRILMASI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ŞEYMA ERDOĞAN

Anabilim dalı : Matematik

Programı : Uygulamalı Matematik

MANİSA 2012

CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**HOMOTOPİ ANALİZ METODU' NUN FARKLI TİPTE DİFERANSİYEL
DENKLEMLERE UYGULANIŞI VE ADOMİAN DECOMPOSITION
METODU, DİFERANSİYEL TRANSFORM METODU İLE
KARŞILAŞTIRILMASI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ŞEYMA ERDOĞAN

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 20.12.2011

Tezin Savunulduğu Tarih : 06.01.2012

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Necdet BİLDİK (Celal Bayar Üniversitesi)

Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Turgut ÖZİŞ (Ege Üniv. Fen. Fak. Mat. Böl.)

: Doç. Dr. Salih YALÇINBAŞ (Celal Bayar Üniversitesi)

MANİSA 2012

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR	i
ÖZET	ii
ABSTRACT	iii
I.BÖLÜM	
GİRİŞ	1
II. BÖLÜM	
HOMOTOPİ ANALİZ METODU	4
2.1. Homotopi Analiz Çözümü	7
2.1.1. Sıfıncı Derece Deformasyon Denklemi	7
2.1.2. Yüksek Derece Deformasyon Denklemi	9
2.1.3. Yakınsaklık Teoremi	9
2.1.4. Bazı Temel Kurallar	11
III. BÖLÜM	
3.1. DİFERANSİYEL TRANSFORM METODU	13
3.1.1. 1-Boyutlu Diferansiyel Transform Metodu	13
3.2. ADOMIAN DECOMPOSITION METHOD	15
IV. BÖLÜM	
ÖRNEKLER	19
SONUÇ	63
KAYNAKLAR	64
ÖZGEÇMİŞ	65

TEŞEKKÜR

Bu çalıőmanın oluşmasında, planlanmasında ve düzenli bir Şekilde yürütülmesinde, olumlu ve yapıcı eleőtirileriyle bana yön veren, yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen Hocam; Sayın Prof. Dr. Necdet BİLDİK' e, destek ve yardımlarından dolayı Araőtırma Görevlisi Ali KONURALP ve Araőtırma Görevlisi Duygu DÖNMEZ DEMİR' e ve beni daima destekleyen eőim Serkan ERDOĞAN' a sonsuz teőekkürlerimi sunarım.

Şeyma ERDOĞAN

ÖZET

Dört bölümden oluşan bu çalışmada genel olarak adi diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri üzerinde durulmuştur.

Birinci bölümde non-lineer problemlerin çözüm zorluklarından bahsedilmiş ve bazı nümerik metotların avantajlarına yer verilmiştir.

İkinci bölümde ise Homotopi Analiz metodu tanıtılmış, bazı tanım ve teoremler verilerek bir örnek problem üzerinde durulmuştur.

Üçüncü bölümde Adomian ve Diferansiyel Transform Metodu açıklanmıştır.

Dördüncü bölümde bazı lineer ve lineer olmayan problemlerin Homotopi Analiz, Adomian, Diferansiyel Transform metotları ile çözümleri yapılarak tablo, 2-boyutlu ve 3-boyutlu grafikler üzerinde tam çözüme yakınsaklıkları gösterilmiştir.

ABSTRACT

This thesis forms four parts which contains generally numerical solution of ordinary differential equations.

In the first part, the difficulties of the non-linear problems are mentioned related with the subject and also the advantages of the some of the numerical method are given.

In the second part, the Homotopy analysis method is presented, some definitions and theorems are presented and one of the a sample problems is choosen and emphasised.

In the third part, Adomian and Differential Transform Method are described.

In the fourth part, the solution of the linear and non-linear problems are given using by the Homotopy Analysis, Adomian and Differential Transform method and the convergence of the approximate solution to the exact solution are shown on the table and the graphs are scratched in 2-D and 3-dimensional space.

BÖLÜM I

GİRİŞ

Kuvvetli non-lineerliğe sahip non-lineer problemlerin analitik çözümlerini Mathematica, Maple ve bunun gibi program yazılımları olmadan elde etmek genellikle zordur. Yarı analitik yöntemlerde, çözüm serilerinin yakınsaklık bölgesi çoğu zaman fiziksel parametrelere bağlıdır. Bu yarı analitik yaklaşımlar, non-lineerlik kuvvetli olduğunda, çoğu zaman başarısız sonuçlar verir. Pertürbasyon yaklaşımları ise sadece zayıf non-lineerliğe sahip problemler için geçerlidir. Bu tip problemlerin çözümleri bazı tekniklerden farklı olarak, çözüm serilerinin yakınsaklık bölgesini ve hızını kontrol etme imkânı sağlayan "Homotopi Analiz Metodu (HAM)" 1992'de Shijun Liao [1,3,6,7] tarafından verilmiştir. Bu metod aynı zamanda, Adomian ayrışım metodu, Lyapunov küçük yapay parametre metodu[5], d - açılım metodu[2] ve homotopi pertürbasyon metodu [3,4,10] gibi önceden verilmiş nonpertürbatif metodların genel halidir. Yani, önceki metodların genelleştirilmiş veya birleştirilmiş bir teorisi olarak düşünülebilir.

Non-lineer problemler için iyi bilinen ve büyük ölçüde uygulanan pertürbasyon teknikleri gibi bazı analitik teknikler vardır. Pertürbasyon teknikleriyle non-lineer problemlerin birçok önemli özelliği ortaya çıkmıştır. Pertürbasyon tekniklerinin şaşırtıcı başarılarından biri; solar sistemde, tahmin edilen bir noktada, gökyüzündeki 9. Gezegenin keşfidir. Son zamanlarda singüler pertürbasyon teknikleri, 20. yüzyılda teorik ve uygulamalı mekaniklerin on programından biri için dikkate alınır. Bu sebeple pertürbasyon teknikleri, bilim ve mühendisliğin gelişmesinde önemli bir rol oynar.

Pertürbasyon teknikleri, pertürbasyon miktarı olarak adlandırılan değişkenler veya küçük/büyük parametrelerin varlığında uygulanır. Kısaca, pertürbasyon teknikleri, lineer alt problemlerin sonsuz bir sayısı içinde nonlineer bir dönüşüm problemi için pertürbasyon miktarını kullanır ve bu taktirde yaklaşım farklı alt problemlerin çözümlerinin toplamı olur. Açıkça görülüyor ki pertürbasyon miktarının varlığı pertürbasyon tekniklerinin bir köşe taşıdır. Bununla birlikte pertürbasyon miktarı, bazı serisel sınırlamaları olan pertürbasyon tekniklerini getirir. İlk olarak her non-lineer problemin bir pertürbasyon miktarı içermesinin mümkün olduğu, ikinci olarak non-lineer problemlerin analitik yaklaşımlarının güçlü olduğu analiz edilmiştir ve böylece pertürbasyon yaklaşımları sadece zayıf non-lineer problemler için geçerlidir. Örneğin; düzgün bir küreyi dikkate alalım. Akış mekaniğinde bir klasik non-lineer problem Navier-Stokes denklemidir. 1851' de Stokes ilk olarak bu problemi dikkate almış ve birkaç bilim adamı,

pertürbasyon tekniğine karşı lineer teoriler öne sürmüşlerdir. Bununla birlikte bütün bu daha önceki teorik bilgileri deneysel bilgilerle birleştirerek formül oluşturmuşlardır. Böylece White' e göre, yüksek Reynolds sayısını bölge içerisinde genişletmek için akıntının sürüklemesini kullanma fikri başarılı olamamıştır. Bu kısmen pertürbasyon yaklaşımlarının oranı ve yakınsaklık bölgesini belirlemek için pertürbasyon tekniklerinin yeterli olmadığından kaynaklanmış olabilir.

Pertürbasyon tekniğinden farklı birkaç teknik vardır. 1892' de Lyapunov, $A(t)$ bir zaman periyot matrisi olmak üzere;

$$\frac{dx}{dt} = A(t) \cdot x$$

denklemini dikkate almıştır. Lyapunov bu denklem yerine,

$$\frac{dx}{dt} = \epsilon \cdot A(t) \cdot x$$

yazarak yapay bir ϵ parametresi kullanmıştır ve çözümler için ϵ ile ilgili kuvvet serileri hesaplamıştır. Birkaç durumda da $\epsilon = 1$ için serinin yakınsak olduğunu ispatlamıştır. Bu yaklaşım Lyapunov' un küçük-yapay parametre metodu olarak adlandırılır. Bu düşünce daha ilerde Karmishin tarafından δ -açılım metodunu öne sürmek için kullanılmıştır. Karmishin,

$$x^5 + x = 1 \quad (2.1)$$

$$x^{1+\delta} + x = 1 \quad (2.2)$$

denklemlerini kullanarak yapay δ parametresini üretmiştir. Burada δ ' nin kuvvet serileri hesaplanarak sonuçta $\delta = 4$ yazılmış, seriler de Pade yaklaşımlarına dönüştürülerek yeni yaklaşımlar elde edilmiştir. Aslında, δ açılım metodu, Lyapunov' un yapay-küçük parametre metoduna denktir.

Karmishin tarafından,

$$\delta \cdot x^5 + x = 1 \quad (2.3)$$

denklemleriyle verilen yaklaşım, (2.2) denklemleriyle verilen yaklaşımdan daha kötüdür. Pertürbasyon tekniklerine göre yapay-küçük parametre metodu ve δ -açılım metodu, çözümün yakınsaklık bölgesi ve yaklaşık çözümlerin oranını elde etmek için uygun bir yol değildir.

Adomian' s Decomposition metodu, güçlü bir non-lineer problem için kuvvetli bir analitik tekniktir. Bu metod adı ve kısmi diferansiyel denklemler için geçerlidir. Denklemlerin küçük/büyük parametreleri içermemesi sorun değildir. Üstelik Adomian yaklaşım serileri yakınsaktır. Bununla birlikte Adomian

Decomposition metodu bazı sınırlamalara sahiptir. Yaklaşık çözümler, polinomları içeren Adomian Decomposition metodu ile verilir. Genellikle kuvvet serilerinin yakınsaklık bölgeleri küçüktür, böylece hızlanma teknikleri, yakınsaklık bölgelerini genişletmeyi gerektirir. Bu, kuvvet serilerinin bir non-lineer problem yaklaşımı için taban fonksiyonlarının etkin bir cümlesi olmaması anlamına gelir. Fakat Adomian Decomposition metodu, farklı taban fonksiyonlarının özgürce kullanımını sağlamaz. Küçük-yapay parametre metodu ve δ -açılım metoduna benzer olarak, Adomian Decomposition metodu, yakınsaklık bölgesi ve yaklaşık seri çözümlerinin oranını elde etmek için de uygun değildir. Diğer yandan yeterli miktarda serinin terimleri alınmasa bile non-lineer problemlerin yaklaşık çözümlerini bulmak için kullanılan bir metottur. Bu sebeple bazı yeni analitik metotlar geliştirmek gerekir. Bu metotlar;

1. Verilen non-lineer problem herhangi bir küçük/büyük parametreleri içermese bile güçlü non-lineer problemler için geçerli olan metot
2. Yakınsaklık bölgesini ve yaklaşık seri çözümlerinin oranlarını bulmaya uygun yöntemler
3. Non-lineer problemler için farklı taban fonksiyonlarını özgürce kullanmak için uygun yöntemler

olarak ifade edilir.

BÖLÜM II

HOMOTOPİ ANALİZ METODU

Homotopi analiz metodu, farklı tipteki non-lineer denklemlerin seri çözümlerini elde etmek için kullanılan genel bir yarı analitik yaklaşımdır[6,7]. Bu metot cebirsel denklemlerin, adi diferansiyel denklemlerin, integro-diferansiyel denklemlerin vb. çözümlerini bulmak için kullanılır. Pertürbasyon metotlarının aksine, homotopi analiz metodu, küçük /büyük fiziksel parametrelerden bağımsızdır ve metodun uygulanması için problemin küçük /büyük fiziksel parametre içerip içermediği önemli değildir[4,9].

Bütün pertürbasyon metotlarından ve klasik non-pertürbatif metotlardan farklı olarak, homotopi analiz metodu, çözüm serilerinin yakınsaklık bölgesini kontrol etme imkânı sağlar. Homotopi analiz metodu, homotopi pertürbasyon metoduna benzer biçimde, topolojinin temel kavramlarından biri olan homotopiyi kullanır[8]. Bu metotta ele alınan denklemleri çözmek için önce başlangıç yaklaşımını tam çözüme götüren sürekli bir dönüşüm oluşturulur. Bu tip bir sürekli dönüşümü oluşturmak için bir yardımcı lineer operatör seçilir. Bulunan çözüm serisinin yakınsaklığını garantilemek için ise bir yardımcı parametre kullanılır. Bu metot, başlangıç yaklaşımı ve yardımcı lineer operatörlerin seçiminde serbestlik sağlar. Homotopi Analiz metodu yardımıyla zor bir non-lineer problem, böylece daha basit sonsuz sayıda lineer alt probleme dönüştürülür.

Örneğin; A bir non-lineer operatör, t zaman, $u(t)$ bilinmeyen bir fonksiyon olmak üzere,

$$A[u(t)] = 0 \quad (2.1)$$

diferansiyel denklemini ele alalım. $u_0(t)$, $u(t)$ ' nin bir başlangıç yaklaşımı ve L , $f = 0$ olduğunda,

$$Lf = 0 \quad (2.2)$$

şartını sağlayan yardımcı lineer operatör olsun. $q \in [0,1]$, bir gömülü parametre ve $\phi(t,q)$, t ve q ' nin bir fonksiyonu olmak üzere, homotopi;

$$H[\phi(t,q); q] = (1-q)L[\phi(t,q) - u_0(t)] + qA[\phi(t,q)] \quad (2.3)$$

olarak kurulur. $q = 0$ ve $q = 1$ olduğunda

$$H[\phi(t, q); q] \Big|_{q=0} = L[\phi(t, 0) - u_0(t)]$$

ve

$$H[\phi(t, q); q] \Big|_{q=1} = A[\phi(t, 1)]$$

dir. (2.2) ifadesi kullanıldığında,

$$H[\phi(t, q); q] \Big|_{q=0} = 0 \text{ ve } H[\phi(t, q); q] \Big|_{q=1} = 0$$

denklemlerin çözümleri sırasıyla,

$$\phi(t, 0) = u_0(t) \text{ ve } \phi(t, 1) = u(t)$$

biçimindedir. q parametresi 0' dan 1' e kadar değiştiğinde, $H[\phi(t, q); q] = 0$ denkleminin çözümü q parametresine ve $u_0(t)$ başlangıç çözümüne bağlıdır. Homotopinin geleneksel olarak yukarıdaki gibi kurulması, nümerik teknikler açısından yeterli olabilir fakat analitik teknikler açısından yeterli değildir. Çünkü burada L yardımcı operatörü ve başlangıç yaklaşımı özgürce seçilebilir. Daha önemlisi geleneksel yolla kurulan homotopi, yakınsaklık bölgesi ve yaklaşık seri çözümlerinin oranlarını bulmak için uygun olmayabilir. Kısacası; homotopi, homotopi analiz metodunun temelidir. Bununla birlikte alışılmış homotopiyi kullanarak, 0'dan farklı \tilde{h} yardımcı parametresi ve $H(t)$ yardımcı fonksiyonuyla yeni homotopi çeşidi aşağıdaki gibi oluşturulur;

$$\tilde{H}(\phi, q, \tilde{h}, H) = (1 - q) \cdot L[\phi(t, q, \tilde{h}, H) - u_0(t)] - q \cdot \tilde{h} \cdot H(t) \cdot A[\phi(t, q, \tilde{h}, H)] \quad (2.4)$$

Burada görüldüğü gibi (2.4) homotopisi, (2.3)' den daha geneldir. Çünkü (2.3), $\tilde{h} = -1$ ve $H(t) = 1$ olduğunda bu (2.4)' ün özel bir durumudur. Yani

$$H(\phi; q) = \tilde{H}(\phi; q, -1, 1) \quad (2.5)$$

dir. Benzer olarak, q ' nun 0' dan 1' e çeşitlilik gösterdiği gibi, $\phi(t, q, \tilde{h}, H)$ fonksiyonu $u_0(t)$ başlangıç çözümünden orijinal non-lineer problemin $u(t)$ tam çözümüne de süreklilik göstermektedir.

Bununla birlikte;

$$\tilde{H}[\phi(t, q, \tilde{h}, H)] = 0 \quad (2.6)$$

denkleminin $\phi(t, q, \tilde{h}, H)$ çözümü; sadece q parametresine değil, yardımcı \tilde{h} parametresine ve yardımcı $H(t)$ fonksiyonuna da bağlıdır. Böylece $q = 1$ yazıldığında çözüm yardımcı \tilde{h} parametresi ve $H(t)$ fonksiyonuna bağlı olur. Bu, yakınsaklık bölgesini ve yaklaşık seri çözümlerinin oranlarını elde etmek için basit bir yoldur. Homotopi analiz metodu, bu anlayışla daha genel bir metottur ve farklı tipte non-lineer kısmi ve adi diferansiyel denklemler için geçerlidir.

Örneğin; Statik bir durumda bulunan havadaki hava birikintisini dikkate alalım. \tilde{t} süre, $U(\tilde{t})$ tabaka hızı, m kütle ve g yerçekimi ivmesi olsun. a bir sabit olmak üzere, tabakanın hava direncini $a \cdot U^2(\tilde{t})$ olarak kabul edelim. Bu takdirde Newton' un ikinci kuralından,

$$m \cdot \frac{dU(\tilde{t})}{d\tilde{t}} = mg - a \cdot U^2(\tilde{t}) \quad (2.7)$$

dir ve başlangıç şartı da,

$$U(0) = 0 \quad (2.8)$$

biçimindedir. Fiziksel olarak serbest düşme hızı, yerçekiminin U_∞ hızına ulaşmasından dolayı artış gösterir. Böylece $U(\tilde{t})$ çözümü bilinmese bile,

$$U_\infty = \sqrt{\frac{mg}{a}} \quad (2.9)$$

ifadesinden direk olarak U_∞ hızının limiti elde edilebilir. Diğer yandan U_∞ hızı ile U_∞ / g karakteristik hızı ve zaman kullanılarak,

$$\tilde{t} = \frac{U_\infty}{g}, \quad U(\tilde{t}) = U_\infty V(t) \quad (2.10)$$

yazılabilir. Böylece denklem (2.7),

$$\dot{V}(t) + V^2(t) = 1, \quad t \geq 0 \quad (2.11)$$

formuna dönüşür ve bu denklemin başlangıç şartı ise,

$$V(0) = 0 \quad (2.12)$$

biçimindedir. Burada t boyutsuz zamanı ve nokta notasyonu ise, t' ye bağlı olan türevi gösterir. Ayrıca,

$$t \rightarrow +\infty, \tilde{t} \rightarrow \infty, U(\tilde{t}) \rightarrow U_\infty$$

olduğu açıktır. Diğer yandan (2.10) denkleminde,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} V(t) = 1 \quad (2.13)$$

dir. O halde (2.11) ve (2.12) denklemlerinin tam çözümü,

$$V(t) = \tanh(t) \quad (2.14)$$

şeklindedir.

2.1. HOMOTOPI ANALİZ ÇÖZÜMÜ

2.1. 1. Sıfırıncı Derece Deformasyon Denklemi

$V_0(t)$, $V_0(0) = 0$ başlangıç şartını sağlayan $V(t)$ ' nin bir başlangıç tahmini olsun. $q \in [0,1]$ gömülü parametresi 0' dan 1' e değıştikçe $\phi(t,q)$, $V_0(t)$ başlangıç tahmininden $V(t)$ tam çözümüne süreklilik gösterir. Topolojide bu süreklilik, deformasyon olarak adlandırılır. Şimdi $\gamma_1(t) \neq 0$ ve $\gamma_2(t)$ reel fonksiyonlar olmak üzere;

$$L[\phi(t,q)] = \gamma_1(t) \cdot \frac{\partial \phi(t,q)}{\partial t} + \gamma_2(t) \cdot \phi(t,q) \quad (2.15)$$

olacak şekilde bir yardımcı lineer operatör seçilsin. Diğer yandan (2.11) denklemi için non-lineer operatörü,

$$N[\phi(t,q)] = \frac{\partial \phi(t,q)}{\partial t} + \phi^2(t,q) - 1 \quad (2.16)$$

biçiminde tanımlansın. Ayrıca $\hbar \neq 0$ yardımcı parametre ve $H(t) \neq 0$ ise yardımcı fonksiyon olsun. Böylece $q \in [0,1]$ bir parametre olmak üzere,

$$\phi(0; q) = 0 \quad (2.17)$$

şeklinde olan başlangıç şartını da kullanarak

$$(1-q) \cdot L[\phi(t,q) - V_0(t)] = \hbar \cdot q \cdot H(t) \cdot N[\phi(t,q)] \quad (2.18)$$

formunda denklemlerin bir ailesi oluşturulur. Burada \hbar parametresi, yardımcı $H(t)$ fonksiyonu, $V_0(t)$ başlangıç yaklaşımı ve L yardımcı lineer operatörünün özgürce seçildiği belirtilmelidir. Bu özgürlük çok önemlidir ve homotopi analiz metodunun temel taşıdır. $q = 0$ olduğunda (2.18) denklemi,

$$L[\phi(t;0) - V_0(t)] = 0, \quad t \geq 0 \quad (2.19)$$

olur. Başlangıç şartı ise,

$$\phi(0;0) = 0 \quad (2.20)$$

dir. (2.15) denkleme göre (2.19) ve (2.20) denklemlerinin çözümü;

$$\phi(t;0) = V_0(t) \quad (2.21)$$

biçimindedir. $q = 1$ olduğunda (2.18) denklemi,

$$\hbar \cdot H(t) \cdot N[\phi(t;1)] = 0, \quad t \geq 0 \quad (2.22)$$

olur. Başlangıç şartı ise,

$$\phi(0;1) = 0 \quad (2.23)$$

dir. Deformasyon denkleminin $\phi(t; q)$ çözümü $0 \leq q \leq 1$ için mevcuttur ve m . mertebeden türevleri, $m = 1, 2, 3, \dots$ olmak üzere;

$$V_0^{[m]}(t) = \left. \frac{\partial^m \phi(t; q)}{\partial q^m} \right|_{q=0} \quad (2.24)$$

şeklinindedir. Burada $V_0^{[m]}(t)$, m . mertebeden deformasyon türevi olarak adlandırılır. Diğer yandan

$$V_m(t) = \frac{V_0^{[m]}(t)}{m!} = \frac{1}{m!} \left. \frac{\partial^m \phi(t; q)}{\partial q^m} \right|_{q=0} \quad (2.25)$$

olarak tanımlandığında, Taylor teoreminden $\phi(t; q)$;

$$\phi(t; q) = \phi(t; 0) + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m!} \left. \frac{\partial^m \phi(t; q)}{\partial q^m} \right|_{q=0} q^m \quad (2.26)$$

biçiminde kuvvet serisine genişletilebilir. Burada,

$$\phi(t; q) = V_0(t) + \sum_{m=1}^{+\infty} V_m(t) q^m \quad (2.27)$$

dir ve (2.27) serisi homotopi serisi olarak adlandırılır. Eğer $q = 1$ alınırsa bu takdirde seri,

$$\phi(t;1) = V_0(t) + \sum_{m=1}^{+\infty} V_m(t) \quad (2.28)$$

olur. Bu sebeple $\phi(t;1) = V(t)$ denklemini kullanarak,

$$V(t) = V_0(t) + \sum_{m=1}^{+\infty} V_m(t) \quad (2.29)$$

yazılır. Fakat bu seri her zaman $q = 1$ ' de yakınsak olmayabilir. Yani buna karşılık gelen (2.29) serisi iraksak olabilir. Örneğin 1. Derece Newton iterasyon formülü, çoğu zaman iraksak sonuçlar verir. Bunun sebebi ise yukarıdaki yaklaşımın $q = 1$ ' de yakınsak olduğu varsayımına dayanmasıdır. Fakat bu yaklaşım, genelde kuvvetli non-lineerliğe sahip non-lineer problemler için sağlanmaz. Bu sebeple Homotopi Analiz metodunda, bu kısıtlamayı ortadan kaldırmak için Liao, sıfırıncı derece deformasyon denklemini oluştururken, yardımcı $\hbar \neq 0$ parametresini kullanmıştır.

2.1.2. Yüksek Dereceden Deformasyon Denklemi

$$\vec{V}_n = \{V_0(t), V_1(t), V_2(t), \dots, V_n(t)\}$$

vektörü tanımlanmış olsun. (2.18) denkleminin q ' ya göre m kez türevi alınır, $q = 0$ yazılır, daha sonra bu ifade $m!$ ile bölünürse ve başlangıç şartı ise $V_m(0) = 0$ biçiminde tanımlanırsa,

$$L[V_m(t) - \chi_m V_{m-1}(t)] = \hbar H(t) R_m(\vec{V}_{m-1}) \quad (2.30)$$

denklemini elde edilir. Burada,

$$R_m(\vec{V}_{m-1}) = \frac{1}{(m-1)!} \left. \frac{\partial^{m-1} N[\phi(t,q)]}{\partial q^{m-1}} \right|_{q=0} \quad (2.31)$$

ve

$$\chi_m = \begin{cases} 0 & m \leq 1 \\ 1 & m > 1 \end{cases} \quad (2.32)$$

dir. Böylece (2.31) denkleminde;

$$R_m(\vec{V}_{m-1}) = \dot{V}_{m-1}(t) + \sum_{j=0}^{m-1} V_j(t) \cdot V_{m-1-j}(t) - (1 - \chi_m) \quad (2.33)$$

bulunur. Bu takdirde (2.30) ile ifade edilen yüksek dereceden deformasyon denkleminin $V_m(t)$ çözümü Mathematica, Maple, Matlab ve bunun gibi yazılımlarla kolayca elde edilebilir.

2.1.3. Yakınsaklık Teoremi

(2.29) serisi yakınsak olduğu sürece, $V_m(t)$; (2.12) ve (2.30) yüksek mertebeden deformasyon denklemleriyle gösterilmesinden dolayı (2.32) ve (2.33) tanımları altında (2.11) ve (2.12) denklemlerinin bir tam çözümü olmalıdır [1].

İspat: Eğer,

$$\sum_{m=0}^{+\infty} V_m(t)$$

serisi yakınsaksa,

$$S(t) = \sum_{m=0}^{+\infty} V_m(t)$$

biçiminde yazılabilir. Bu ifade,

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} V_m(t) = 0 \quad (2.34)$$

durumunda geçerlidir. Ayrıca χ_m ' in (2.32) tanımı kullanılarak,

$$\sum_{m=1}^n [V_m(t) - \chi_m V_{m-1}(t)] = V_1 + (V_2 - V_1) + (V_3 - V_2) + \dots + (V_n - V_{n-1}) = V_n(t)$$

yazılır. Buradan da (2.34) denklemini kullanarak,

$$\sum_{m=1}^{+\infty} [V_m(t) - \chi_m V_{m-1}(t)] = \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n(t) = 0$$

bulunur. Diğer taraftan yukarıdaki ifade ve (2.15) tanımından,

$$\sum_{m=1}^{+\infty} L[V_m(t) - \chi_m V_{m-1}(t)] = L \sum_{m=1}^{+\infty} [V_m(t) - \chi_m V_{m-1}(t)] = 0$$

olur. Yukarıdaki denklem ile denklem (2.30)' dan,

$$\sum_{m=1}^{+\infty} L[V_m(t) - \chi_m V_{m-1}(t)] = \hbar \cdot H(t) \cdot \sum_{m=1}^{+\infty} R_m(\vec{V}_{m-1}) = 0$$

elde edilir. Ayrıca $\hbar \neq 0$, $H(t) \neq 0$ olduğundan;

$$\sum_{m=1}^{+\infty} R_m(\vec{V}_{m-1}) = 0 \quad (2.35)$$

yazılır. Böylece (2.33) denkleminde,

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{+\infty} R_m(\vec{V}_{m-1}) &= \sum_{m=1}^{+\infty} [\dot{V}_{m-1}(t) + \sum_{j=0}^{m-1} V_j(t) \cdot V_{m-1-j}(t) - (1 - \chi_m)] \\ &= \sum_{m=0}^{+\infty} \dot{V}_m(t) - 1 + \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{j=0}^{m-1} V_j(t) \cdot V_{m-1-j}(t) \\ &= \sum_{m=0}^{+\infty} \dot{V}_m(t) - 1 + \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{m=j+1}^{+\infty} V_j(t) \cdot V_{m-1-j}(t) \\ &= \sum_{m=0}^{+\infty} \dot{V}_m(t) - 1 + \sum_{j=0}^{+\infty} V_j(t) \sum_{i=0}^{+\infty} V_i(t) \\ &= \dot{S}(t) + S^2(t) - 1 \end{aligned} \quad (2.36)$$

bulunur. Eğer burada (2.12) başlangıç şartı kullanılırsa,

$$S(0) = \sum_{m=0}^{+\infty} V_m(0) = V_0(0) + \sum_{m=1}^{+\infty} V_m(0) = V_0(0) = 0$$

dır. Bu sebeple, yukarıdaki iki ifadeye göre $S(t)$, (2.11) ve (2.12) denklemlerinin tam çözümü olmak zorundadır. Bu da ispatı tamamlar.

$\gamma_1(t) \neq 0$ ve $\gamma_2(t)$ farklı fonksiyonlar olmak üzere yukarıdaki teorem daha genel bir formda (2.15) ile tanımlanan yardımcı L lineer operatörü için geçerlidir. Yukarıda bahsedilen ve ispatı verilen yakınsaklık teoremi oldukça önemlidir. Çünkü bu teorem yaklaşık serilerin yakınsaklığını garanti altına almak için temeldir. Böylece (2.29) serilerinin yakınsaklığının yardımcı \hbar parametresine, yardımcı

$H(t)$ fonksiyonuna, $V_0(t)$ başlangıç tahminine ve yardımcı L lineer operatörüne bağlı olduğu açıktır. Homotopi Analiz metodu, bütün bu ifadelerin serbestçe seçimini gerektirir. Böylece $h, H(t), V_0(t), L$ serileri $0 \leq t \leq t_0$ bölgesinde yakınsak olacak şekilde özgürce seçilir ve bu bölgede tam çözüme yakınsak olmak zorundadır.

2.1.4. Bazı Temel Kurallar

Yukarıda ifade edildiği gibi, sıfırıncı dereceden deformasyon denklemini oluşturmak için; L yardımcı lineer operatör, $V_0(t)$ başlangıç yaklaşımı ve $H(t)$ yardımcı fonksiyonu özgürce seçilir. Teorik olarak birçok farklı $H(t)$ yardımcı fonksiyonları, $V_0(t)$ başlangıç yaklaşımları ve L yardımcı lineer operatörleri de ayrıca seçilebilir.

Bir non-lineer problem verildiğinde analitik yaklaşım, taban fonksiyonları cümlesinin çözümü olarak ifade edilir. Taban fonksiyonlarının çeşidi bir non-lineer probleme yaklaşım için oldukça önemlidir. Operatörlerin özgürce seçiminden, farklı taban fonksiyonlarıyla gösterilen $V(t)$ ' nin bazı çözüm ifadeleri elde edilebilir. Bazı durumlarda, sınır/başlangıç şartlarının ve non-lineerliğinin çeşidinin belirlenmesiyle, taban fonksiyonların çeşitlerinin çözüme uygun olup olmadığı anlaşılabilir. Örneğin;

$$\{e_k(t) \mid k = 0, 1, 2, \dots\} \quad (2.37)$$

ifadesi, bu bölümde dikkate alınan örnek problem için taban fonksiyonlarının bir cümlesi olsun. Bu durumda $H(t)$ yardımcı fonksiyonu, $V_0(t)$ başlangıç yaklaşımı ve L yardımcı lineer operatörü, yüksek mertebeden deformasyon denkleminde karşılık gelen bütün çözümlerin mevcut olması halinde seçilmek zorundadır. Bu operatörlerin seçimi, çözüm varlığı kuralı olarak adlandırılan temel bir kuraldır. Bu kural, homotopi analiz metodunun oluşmasında büyük rol oynar.

Yukarıda ifade edildiği gibi, $f(x)$ reel fonksiyonu farklı taban fonksiyonları olarak gösterilebilir. Böylece, çözümün varlığı kuralları değişik tipte olup, bu takdirde verilen bir non-lineer problem için bu farklı tipteki düşünce tarzı doğru yaklaşımları verebilir. Bu durumda taban fonksiyonlarının en doğru seçimiyle en iyi sonuç elde edilebilir.

$H(t)$ yardımcı fonksiyonunun seçimini kısıtlamak için, katsayı ergodikliği kuralı olarak adlandırılan bir kural gereklidir. Çözüm ifadesindeki bütün katsayılar, taban fonksiyonları cümlesinin bütünlüğünü (tamlığını) sağlamak amacıyla değiştirilir. Bazı durumlarda çözümün varlığı kuralı ve katsayı ergodikliği kuralından yardımcı fonksiyonlar tek olarak belirlenir. Yüksek dereceden deformasyon denklemlerinin kapalı olduğu ve çözümlerinin mevcut olduğu açıktır. Bu, çözümün varlığı kuralı olarak adlandırılır. Çözümün varlığı kuralı ve katsayı ergodikliği kuralı, homotopi analiz metodunun basit uygulamalarında önemli bir rol oynar.

BÖLÜM III

3.1. DIFFERENTIAL TRANSFORMED METODU

Bu metotta,

$$F(t, y, y') = 0 \quad (3.1)$$

formundaki diferansiyel sistemleri ele alınır. Eğer $\frac{\partial F}{\partial y'}$ regular ise, bu takdirde (3.1) denklemi adi

diferansiyel denklem (ODE) olarak, diğer taraftan $\frac{\partial F}{\partial y'}$ singular ise (3.1) denklemi diferansiyel cebirsel

denklem (DAE) olarak tanımlanır. Son on yıldır, bu metot sadece diferansiyel cebirsel denklemlerin çözümlerinde değil, ayrıca elektriksel ağlar, katı cisimlerin sınırlı mekanik sistemleri, kontrol sistemleri gibi problemlere de uygulanabilir olduğu gözlemlenmiştir. Bazı çalışmalarda, konuyla bağlantılı olarak, DAE' ler indeksleriyle sınıflandırılmıştır. Diferansiyel indeks, (3.1) denklemini ODE' ye dönüştürmek için diferansiyellenen miktarın minimum sayısıdır. DAE' lerin çözümü için bazı nümerik metotlar geliştirilmiştir. Fakat bu metotlar, sadece özel düzenlemeler gerektiren düşük indekse sahip problemler için uygundur.

Son zamanlarda DAE' lerin çözümleri Padé serileriyle dikkate alınmıştır. Bununla birlikte Diferansiyel Transform Metot (DTM), Padé yaklaşım serilerinden daha kolaydır. Basit çalışmalarla güvenilir sonuçlar elde edilmesine rağmen, bu metot kullanılarak birçok zorlukların üstesinden gelinebilmektedir.

DTM, ilk olarak elektrikli devre problemlerinde yer alan lineer ve non-lineer problemleri çözmek için Zhou tarafından ortaya atılmıştır. Daha sonra Chen ve Ho kısmi diferansiyel denklemler için ve Ayaz [12] ise diferansiyel denklem sistemleri için bu metodu geliştirmiştir. Bu çalışmada $A(t)$ singüler fonksiyon olmak üzere değişken katsayılı,

$$A(t) \cdot X'(t) + B(t) \cdot X(t) = f(t)$$

sistem dikkate alınacaktır.

3.1.1. 1-Boyutlu Diferansiyel Transform Metodu

$y(x)$ fonksiyonunun diferansiyel transformu,

$$Y(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k y(x)}{dx^k} \right]_{x=0} \quad (3.2)$$

olarak tanımlanır. (3.2) denkleminde $y(x)$ orijinal fonksiyon ve $Y(k)$, T-fonksiyon olarak tanımlanan transformed fonksiyonudur. $Y(k)$ ' nın ters diferansiyel dönüşümü,

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k Y(k) \quad (3.3)$$

biçiminde ifade edilir. (3.2) ve (3.3) denklemlerinden,

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \left[\frac{d^k y(x)}{dx^k} \right]_{x=0} \quad (3.4)$$

elde edilir. Burada (3.4) denklemini, diferansiyel transform kavramının Taylor serisine genişletilerek elde edildiğini gösterir.

Orijinal Fonksiyon	Transformed Fonksiyon
$y(x) = u(x) \pm v(x)$	$Y(k) = U(k) \pm V(k)$
$y(x) = c \cdot w(x)$	$Y(k) = c \cdot W(k)$
$y(x) = dw/dx$	$Y(k) = (k+1) \cdot W(k+1)$
$y(x) = d^j w/dx^j$	$Y(k) = (k+1) \cdot (k+2) \dots (k+j) \cdot W(k+j)$
$y(x) = u(x) \cdot v(x)$	$Y(k) = \sum_{r=0}^k U(r) \cdot V(k-r)$
$y(x) = x^j$	$Y(k) = \delta(k-j) = \begin{cases} 1 & , k = j \\ 0 & , k \neq j \end{cases}$

Tablo 3.1

Bununla birlikte türevler ile ilgili bağıntılar, orijinal fonksiyonların transformed denklemleriyle tanımlanan iterasyonlar yardımıyla hesaplanır. Bu çalışmada orijinal fonksiyonu göstermek için küçük harf, transformed fonksiyonunu göstermek için ise büyük harf kullanılmıştır.

(3.2) ve (3.3) denklemlerinin tanımlarından, Tablo 3.1' de gösterilen basit matematik işlemleriyle, transformed fonksiyonlarına uygun ispatları yapmak kolaydır. Uygulamalarda, $y(x)$ fonksiyonu sonlu serilerle ifade edilir ve (3.2) denklemi,

$$y(x) = \sum_{k=0}^m x^k Y(k) \quad (3.5)$$

olarak yazılabilir[12].

3.2. ADOMIAN DECOMPOSITION METHOD

Lineer olmayan problemlerin Adomian Decomposition metodu ile çözümünde; lineerleştirme, pertürbasyon, kapalı yaklaşım veya kesikleme (discretizasyon) metotları uygulanmamakla birlikte, lineer olmayan denklemlerin oldukça geniş bir kısmında analitik yaklaşımın sağlandığı görülür. Genellikle bir lineer olmayan problemin istenilen kapalı formda analitik çözümünün yapılabilmesi için bazı sınırlandırma kabullerinin yapılması gerekmektedir. Sonuç olarak, bu hal sık sık karşımıza çıkmasına rağmen, fiziksel olarak geçerli olmayabilir. Diğer bir deyişle, daha basit matematiksel problemin çözümü bu düşünce ile problemin gerçek çözümüne iyi bir yaklaşım olmayabilir. Bu durumda zayıf non-lineerlik ve küçük bir pertürbasyon genel kabuldendir. Bununla beraber genelde lineer olmayan denklemlerle karşılaşmak doğal olup, belirsizliğin önemsizmediği limit durumları özellikle dikkate alınmalıdır. Benzer olarak lineerlik, pertürbasyon teorisinin uygun olduğu durumlarda kullanıldığı gibi, çok küçük limit durumlarında da göz önüne alınmalıdır[11].

Lineer ve lineer olmayan terimlerin her ikisini de içeren genel bir lineer olmayan adi diferansiyel operatör F olmak üzere;

$$Fu(t) = g(t) \quad (3.6)$$

biçiminde alınsın. Burada L , tersi alınabilen ve R de lineer operatörün kalanı olmak üzere, lineer terimler $L + R$ biçiminde yazılır. Kolaylık için burada L , en yüksek dereceden türev operatörü olarak alınabilir. Böylece Nu lineer olmayan terimleri göstermek üzere denklem,

$$Lu + Ru + Nu = g \quad (3.7)$$

şeklinde yazılabilir. Buradan

$$Lu = g - Ru - Nu \quad (3.8)$$

bulunur. L tersinir olduğundan, böylece

$$L^{-1}Lu = L^{-1}g - L^{-1}R - L^{-1}Nu \quad (3.9)$$

elde edilir.

Eğer bu bir başlangıç değer problemine karşılık geliyorsa, bu takdirde L^{-1} ; t_0 dan t ye kadar tanımlı bir integral operatörü olabilir. Eğer L ikinci dereceden bir operatör ise, L^{-1} iki katlı integral operatörüdür ve

$$L^{-1}Lu = u - u(t_0) - (t - t_0)u'(t_0) \quad (3.10)$$

biçimindedir. Sınır değer problemleri için (ve eğer istenirse başlangıç değer problemleri için de aynı şekilde), belirsiz integraller kullanılır ve sabitler ise verilen koşullardan bulunur. Yukarıda verilen (3.9) denklemden u çözümlürse,

$$u = A + Bt + L^{-1}g - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu \quad (3.11)$$

biçiminde olur.

Burada A_n 'ler Adomian polinomları olmak üzere, Nu lineer olmayan terim önce $\sum_{n=0}^{\infty} A_n$ ' e eşitlenir. Daha sonra u , $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ ' e ayrıştırılır ve $A + Bt + L^{-1}g$ ifadesi u_0 olarak tanımlanırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = u_0 - L^{-1}R \sum_{n=0}^{\infty} u_n - L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \quad (3.12)$$

yazılır. Sonuç olarak,

$$\begin{aligned} u_1 &= -L^{-1}Ru_0 - L^{-1}A_0 \\ u_2 &= -L^{-1}Ru_1 - L^{-1}A_1 \\ &\vdots \\ u_{n+1} &= -L^{-1}Ru_n - L^{-1}A_n \end{aligned} \quad (3.13)$$

ifadesi elde edilir.

Böylece A_n polinomları her bir lineer olmayan terim için elde edilir. Burada A_0 sadece u_0 ' a, A_1 sadece u_0 ve u_1 ' e, A_2 de sadece u_0, u_1, u_2 ' ye bağlıdır ve bu şekilde polinomlar u ' lara bağlı olarak ifade edilirler. Buradan da u_n bileşenlerinin hepsi hesaplanarak, sonuçta $u = \sum_{i=0}^n u_i$ bulunur. Eğer seri yakınsaksa, $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n = \sum_{i=0}^{\infty} u_i = u$ olmak üzere n -terim kısmi toplamı $\phi_n = \sum_{i=0}^{n-1} u_i$ bulunur. Bu ise bir yaklaşık çözümdür. Eğer $f(u, u', u'', \dots)$ veya $f(g(u))$ şeklinde ise karmaşık non-lineerlikleri için A_n ' ler hesaplanabilir. Örneğin, e^{-x^2} non-lineerliği için

$$\begin{aligned} A_0 &= e^{-x_0^2} \\ A_1 &= -2x_0 x_1 e^{-x_0^2} \\ A_2 &= \{2x_0^2 x_1^2 - x_1^2 - 2x_0 x_2\} \cdot e^{-x_0^2} \\ &\vdots \end{aligned} \quad (3.14)$$

şeklinde elde edilir. Eğer $x = k + e^{-x^2}$ alınırsa ϕ_4 yaklaşık çözümündeki hata %0.001' den daha azdır. Burada zayıf non-lineer kabulü yapılmadığından veya lineerleştirme gerçekleştirilmediğinden dolayı, çözümler fiziksel olarak sadeleştirme kabullerine dayanan diğer yaklaşım metotları ile bulunanlardan daha doğru olmaya meyillidir. Ayrıca, eğer istenirse sayısal değerler hesaplanabilir olup, yakınsamayı görmek ise kolaylaşır.

Burada polinomlar A_n veya \hat{A}_n olarak tanımlanır. Daha sonra $Nu \equiv f(u)$ non-lineer terimini içeren ve çözümü $u(x)$ olan denklem ele alınır. Böylece $Nu \equiv f(u) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{A}_n$ olmak üzere

\hat{A}_n polinomları,

$$\hat{A}_0 = f(u_0)$$

$$\hat{A}_1 = u_1 \frac{d}{du_0} f(u_0) + \frac{u_1^2}{2!} \frac{d^2}{du_0^2} f(u_0) + \frac{u_1^3}{3!} \frac{d^3}{du_0^3} f(u_0) + \dots = (e^{u_1 \frac{d}{du_0} f(u_0)} - 1)$$

$$\hat{A}_2 = u_2 \frac{d}{du_0} f(u_0) + \frac{u_2^2}{2!} \frac{d^2}{du_0^2} f(u_0) + \dots + u_1 u_2 \frac{d^2}{du_0^2} f(u_0) + \frac{u_1^2 u_2 + u_2^2 u_1}{2} \frac{d^3}{du_0^3} f(u_0) + \dots$$

$$= (e^{u_2 \frac{d}{du_0} f(u_0)} - 1) + (e^{u_2 \frac{d}{du_0} f(u_0)} - 1)(e^{u_1 \frac{d}{du_0} f(u_0)} - 1)$$

\vdots

biçiminde ifade edilir. Böylece,

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^n \hat{A}_i &= f(u_0) + (u_1 + u_2 + \dots + u_n) \frac{df}{du_0} + \dots \\ &\cong f(u_0) + (u - u_0) \frac{df}{du_0} + \dots\end{aligned}\quad (3.15)$$

elde edilir. Yani burada $\sum_{i=0}^n u_i \cong \sum_{i=1}^{\infty} u_i$ olduğundan kısmi toplam, $u_0(t)$ fonksiyonu civarındaki Taylor

açılımının temel terimlerini içermektedir. Böylece, $\hat{A}_0, \hat{A}_1, \hat{A}_2, \dots, \hat{A}_n$ 'in ilk $n+1$ teriminin toplamı

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(u - u_0)^n}{n!} \frac{d^n f}{du_0^n} = e^{(u - u_0) \frac{d}{du_0}} f(u_0)$, a yakınsar. Bu formül ile A_n polinomlarının hızlandırılmış şekli de

tanımlanmış olmaktadır. Bu formülde paydada bulunan $n!$ ile çarpılan terimler bazı n 'lerden sonra ihmal edildiğinde, bulunan $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$ 'lerin kümesi daha yavaş yakınsamasına rağmen metodun kullanımı bu sayede daha uygun olacaktır.

Bu düşüncelerin ışığı altında Adomian polinomları,

$$\begin{aligned}A_0 &= f(u_0) \\ A_1 &= u_1 \frac{d}{du_0} f(u_0) \\ A_2 &= u_2 \frac{d}{du_0} f(u_0) + \frac{u_1^2}{2!} \frac{d^2}{du_0^2} f(u_0) \\ A_3 &= u_3 \frac{d}{du_0} f(u_0) + u_1 u_2 \frac{d^2}{du_0^2} f(u_0) + \frac{u_1^3}{3!} \frac{d^3}{du_0^3} f(u_0) \\ &\vdots\end{aligned}\quad (3.16)$$

şeklinde oluşturulur [11].

BÖLÜM IV

ÖRNEKLER

Örnek 4.1. $y' = \frac{y \cdot \cos x}{1+2y^2}$, $y(0) = 1$ denklemini Homotopi Analiz metodu ile çözelim:

Çözümü kolaylaştırmak için eğer denklem düzenlenirse;

$$y' \cdot (1+2y^2) - y \cdot \cos x = 0$$

şeklini alır. Şimdi başlangıç şartına uygun olacak şekilde başlangıç yaklaşımı $y_0(x) = 1$ olarak

seçilsin. Buna ilaveten yardımcı lineer operatör $L[\phi(x; q)] = \frac{\partial \phi(x; q)}{\partial x}$ ve non-lineer operatör ise

$$N[\phi(x; q)] = \frac{\partial \phi(x; q)}{\partial x} \cdot [1 + 2[\phi(x; q)]^2] - \phi(x; q) \cdot \cos x$$

olsun. Böylece $q \in [0, 1]$ gömülü parametre, $h \neq 0$ bir yardımcı parametre ve $H(t) \neq 0$ bir yardımcı fonksiyon olmak üzere sıfıncı dereceden deformasyon denklemi,

$$(1-q) \cdot L[\phi(x; q) - y_0(x)] = q \cdot h \cdot H(x) \cdot N[\phi(x; q)]$$

biçiminde ifade edilir. Burada

$$q = 0 \text{ için } \phi(x; 0) = y_0(x)$$

$$q = 1 \text{ için } \phi(x; 1) = y(x)$$

bulunur. Diğer yandan

$$y_m(x) = \frac{1}{m!} \frac{\partial^m \phi(x; q)}{\partial q^m} \Big|_{q=0}, \quad \phi(x; q) = \phi(x; 0) + \sum_{m=1}^{+\infty} y_m(x) \cdot q^m, \quad \bar{y}_n(x) = \{y_0(x), y_1(x), \dots, y_n(x)\}$$

denklemlerine göre sıfıncı dereceden deformasyon denkleminin m defa q' ya göre türevinin alınıp $m!$ ile bölünmesiyle m . mertebeden deformasyon denklemi

$$L[y_m(x) - \chi_m y_{m-1}(x)] = h \cdot H(x) \cdot R_m[\bar{y}_{m-1}(x)]$$

biçiminde elde edilir. Burada başlangıç şartı $y_m(0) = 1$ ' dir. Bu denklem çözüldüğünde,

$$y_m(x) = \chi_m y_{m-1}(x) + \hbar \cdot \int_0^x H(x) \cdot R_m[\bar{y}_{m-1}(x)] \cdot dx \quad (4.1)$$

olur. Burada,

$$R_m[\bar{y}_{m-1}(x)] = y_{m-1}'(x) \cdot [1 + 2 \sum_{i=0}^{m-1} y_i(x) \cdot y_{m-1-i}(x)] - y_{m-1}(x) \cdot \cos x$$

dir. m yerine sırasıyla 1,2,3,... yazılarak $R_1[\bar{y}_0(x)], R_2[\bar{y}_1(x)], \dots$ ifadeleri bulunur ve bulunan bu değerler (4.1) denkleminde yerine yazılırsa,

$$y_0(x) = 1$$

$$y_1(x) = 1 - \hbar \cdot \sin x$$

$$y_2(x) = 1 + \left(\frac{4\hbar^3 + \hbar^2}{4} \right) - (5\hbar^2 + 2\hbar) \cdot \sin x - \left(\frac{4\hbar^3 + \hbar^2}{4} \right) \cdot \cos(2x)$$

⋮

şeklinde çözüm elde edilir.

Differential Transform Metodu ile Çözüm:

Model olarak alınan diferansiyel denklem düzenlendiğinde,

$$y' + 2y' y^2 - y \cos(x) = 0 \quad (4.2)$$

olur. (4.2) denkleminin transformu alınır

$$Y(k+1) = \frac{1}{k+1} \left[\sum_{r=0}^k Y(r) \cos(k-r) - 2 \left[\sum_{r=0}^k \left(\sum_{r=0}^k (r+1) Y(r+1) Y(k-r) \right) Y(k-r) \right] \right] \quad (4.3)$$

elde edilir. (4.3) denkleminde $k = 0, 1, \dots$ yazıldığında,

$$Y(1) = \frac{1}{3}, Y(2) = \frac{(1/9) + 3\cos 1}{22}, \dots$$

bulunur. Bu katsayılar yerine yazıldığında,

$$y(x) = 1 + \frac{1}{3}x + \left(\frac{(1/9) + 3\cos 1}{22} \right) x^2 + \dots$$

seri biçimindeki sonuca ulaşılır.

Adomian Decomposition Metodu ile Çözüm:

$y' = \cos(x)y - 2y^2y'$ diferansiyel denkleminin yaklaşık çözümünü ADM ile bulmak için başlangıç koşulu $y(0) = 1$ ' den $x_0 = 0$ ve $y_0 = 1$ biçiminde alınır.

Bu denklem aşağıdaki gibi

$$L_x u = \cos(x)u - 2u^2 u_x = \cos(x)u - 2N(u) \quad (4.4)$$

operatör formunda yazılır. Burada $L_x = \frac{\partial}{\partial x}$ lineer operatör ve lineer olmayan terim ise

$N(u) = u^2 u_x$ olarak ifade edilmektedir. Ayrıca yine L_x^{-1} integral operatörü olup $L_x^{-1} = \int_0^x (\cdot) dx$

şeklinde gösterilir. (4.4) denkleminin her iki tarafına soldan L_x^{-1} uygulanırsa,

$$L_x^{-1} [L_x (u_x)] = L_x^{-1} [\cos(x)u - 2u^2 u_x] = L_x^{-1} [\cos(x)u - 2N(u)] \quad (4.5)$$

elde edilir. Buradan

$$u(x) = u_0(x) + L_x^{-1} [\cos(x)u - 2N(u)] \quad (4.6)$$

olur. Böylece $N(u) = u^2 u_x = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$ şeklinde tanımlanarak, A_n Adomian polinomlarının ilk dört

terimi

$$\begin{aligned}
A_0 &= F(u_0) \\
A_1 &= u_1 F'(u_0) \\
A_2 &= u_2 F'(u_0) + \frac{1}{2} u_1^2 F''(u_0) \\
A_3 &= u_3 F'(u_0) + u_1 u_2 F''(u_0) + \frac{1}{3!} u_1^3 F'''(u_0) \\
A_4 &= u_4 F'(u_0) + \left(\frac{1}{2!} u_2^2 + u_1 u_3 \right) F''(u_0) + \frac{1}{2!} u_1^2 u_2 F'''(u_0) + \frac{1}{4!} u_1^4 F^{(4)}(u_0)
\end{aligned} \tag{4.7}$$

biçiminde oluşturulur. Bu takdirde $k \geq 0$ için (4.6) denklemi,

$$\begin{cases} u_0(x) = 1 \\ u_{k+1}(x) = L_x^{-1}[\cos(x)u_k - 2A_k] \end{cases} \tag{4.8}$$

biçiminde bir rekürans bağıntısı ile ifade edilebilir. Bu bağıntı kullanılarak

$$\begin{aligned}
u_0 &= 1 \\
u_1 &= \int_0^x [\cos(x)u_0 - 2A_0] dx = \sin(x) \\
u_2 &= \int_0^x [(\cos(x)u_1 - 2A_1)] dx = \frac{\sin(x)^2}{2} \\
u_3 &= \int_0^x [(\cos(x)u_2 - 2A_2)] dx = \frac{\sin(x)^3}{6} \\
u_4 &= \int_0^x [(\cos(x)u_3 - 2A_3)] dx = \frac{\sin(x)^4}{24} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

şeklindeki ayrışım serisinin ilk dört terimi bulunur. Böylece bulunan $u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, \dots$ terimleri için verilen denklemin yaklaşık çözümü

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \dots \\
&= 1 + \sin(x) + \frac{\sin(x)^2}{2} + \frac{\sin(x)^3}{6} + \frac{\sin(x)^4}{24} + \dots
\end{aligned}$$

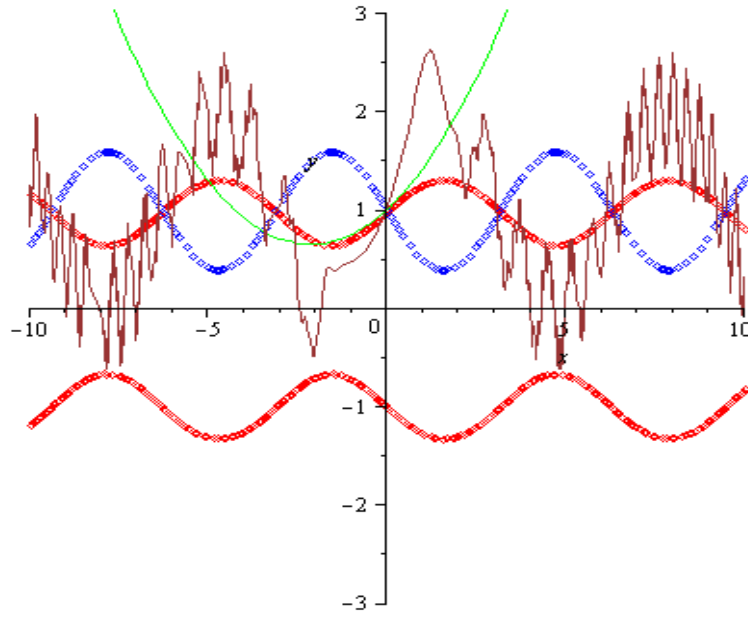
olarak elde edilir.

Şimdi ise model problemin Homotopi Analiz, DTM, Adomian metotları ile çözümü yanında bunun tam çözümünü $X = 0.1$ için tablo ile gösterip, şeklini ise 2-boyutlu ve 3-boyutlu grafik üzerinde karşılaştıralım:

Tablo 4.1. Homotopi Analiz, DTM ve Adomian Metodu Çözümlerinin Tam Çözüm ile Karşılaştırılması

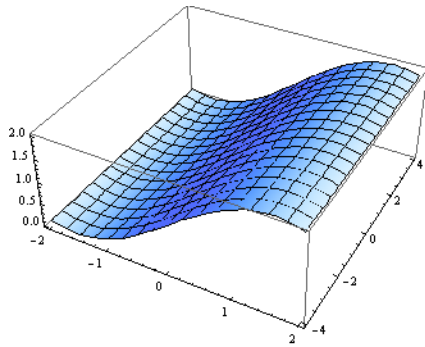
\hbar	Homotopi Analiz Çözümü	DTM Çözümü	Adomian Çözümü	Tam Çözüm	Homotopi Analiz Çözümü için Mutlak Hata	DTM Çözümü için Mutlak Hata	Adomian Çözümü için Mutlak Hata
-1.0	0.685550	1.03412	1.105	1.03309	3.4754×10^{-1}	1.03×10^{-3}	7.191×10^{-2}
-0.9	0.764880	1.03412	1.105	1.03309	2.68210×10^{-1}	1.03×10^{-3}	7.191×10^{-2}
-0.8	0.833250	1.03412	1.105	1.03309	1.99840×10^{-1}	1.03×10^{-3}	7.191×10^{-2}
-0.7	0.890780	1.03412	1.105	1.03309	1.32310×10^{-1}	1.03×10^{-3}	7.191×10^{-2}
-0.6	0.937588	1.03412	1.105	1.03309	$9,5502 \times 10^{-2}$	1.03×10^{-3}	7.191×10^{-2}
-0.5	0.973796	1.03412	1.105	1.03309	5.9294×10^{-2}	1.03×10^{-3}	7.191×10^{-2}
-0.4	0.999522	1.03412	1.105	1.03309	3.3568×10^{-2}	1.03×10^{-3}	7.191×10^{-2}
-0.3	1.014890	1.03412	1.105	1.03309	1.8200×10^{-2}	1.03×10^{-3}	7.191×10^{-2}
-0.2	1.020010	1.03412	1.105	1.03309	1.3080×10^{-2}	1.03×10^{-3}	7.191×10^{-2}
-0.1	1.015000	1.03412	1.105	1.03309	1.8090×10^{-2}	1.03×10^{-3}	7.191×10^{-2}

Tablo 4.1' de görüldüğü gibi $X = 0.1$ için Homotopi Analiz metodu ile çözüm $\hbar = -0.2$ noktasında tam çözüme en iyi şekilde yakınsamaktadır. Bu noktadan sonra artan değerler verildiğinde sonucun tam çözümden uzaklaştığı görülür. Şekilden de görüleceği üzere $X = 0.1$ noktası üzerinde en iyi yakınsamayı ise DTM çözümü vermiştir.

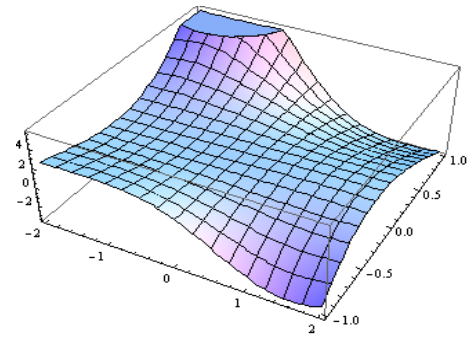


Şekil 4.1: Grafikte kırmızı renkle gösterilen şekil tam çözümün, mavi renk ile gösterilen şekil Homotopi Analiz çözümünün, yeşil renk ile gösterilen şekil DTM çözümünün, kahverengi ile gösterilen şekil ise Adomian çözümünün grafiğidir.

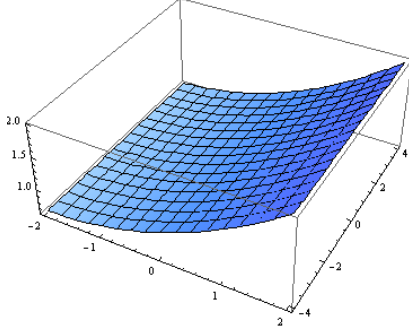
Çözümlerin üç boyutlu grafikleri aşağıda gösterilen şekillerdeki gibidir:



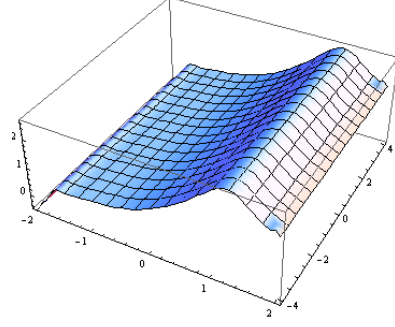
TAM ÇÖZÜM



HOMOTOPİ ANALİZ ÇÖZÜMÜ



DTM ÇÖZÜMÜ



ADOMIAN ÇÖZÜMÜ

Örnek 4.2. Başlangıç şartı $y(0) = 1$ olan $y' = 2xy^2$ denklemini Homotopi Analiz metodu ile çözelim.

Taban fonksiyonu $\{x^m + 1 \mid m = 1, 2, 3, \dots\}$ olarak alıp $y(x)$ çözümünü $y(x) = \sum_{m=1}^{+\infty} a_m(x^m + 1)$ ile gösterelim. Verilen başlangıç şartına uygun olacak şekilde başlangıç yaklaşımı $y_0(x) = x^2 + 1$ ve $H(x) = 1$ olarak seçilsin. Buna ilaveten yardımcı lineer operatör $L[\phi(x; q)] = \frac{\partial \phi(x; q)}{\partial x}$ ve non-lineer operatör ise

$$N[\phi(x; q)] = \frac{\partial \phi(x; q)}{\partial x} - 2x[\phi(x; q)]^2$$

olsun. Böylece $q \in [0, 1]$ gömülü parametre, $\hbar \neq 0$ bir yardımcı parametre ve $H(t) \neq 0$ bir yardımcı fonksiyon olmak üzere sıfıncı dereceden deformasyon denklemi;

$$(1 - q) \cdot L[\phi(x; q) - y_0(t)] = q \cdot \hbar \cdot H(x) \cdot N[\phi(x; q)]$$

biçiminde ifade edilir. Burada

$$q = 0 \text{ için } \phi(x; 0) = y_0(x)$$

$$q = 1 \text{ için } \phi(x; 1) = y(x)$$

bulunur. Diğer yandan

$$y_m(x) = \frac{1}{m!} \left. \frac{\partial^m \phi(x; q)}{\partial q^m} \right|_{q=0}, \quad \phi(x; q) = \phi(x; 0) + \sum_{m=1}^{+\infty} y_m(x) \cdot q^m, \quad \vec{y}_n(x) = \{y_0(x), y_1(x), \dots, y_n(x)\}$$

denklemlerine göre sıfırıncı dereceden deformasyon denkleminin m defa q' ya göre türevinin alınıp son olarak $m!$ ile bölünmesiyle m . mertebeden deformasyon denklemi

$$\mathcal{L}[y_m(x) - \chi_m y_{m-1}(x)] = \hbar \cdot H(x) \cdot R_m[\vec{y}_{m-1}(x)]$$

biçiminde elde edilir. Burada başlangıç şartı $y_m(0) = 1$ dir. Bu denklem çözüldüğünde,

$$y_m(x) = \chi_m y_{m-1}(x) + \hbar \cdot \int_0^x H(x) \cdot R_m[\vec{y}_{m-1}(x)] \cdot dx \quad (4.9)$$

olur. Burada

$$R_m[\vec{y}_{m-1}(x)] = y_{m-1}'(x) - 2x \cdot \sum_{i=0}^{m-1} y_i(x) \cdot y_{m-1-i}(x)$$

dir. m yerine sırasıyla $1, 2, 3, \dots$ yazılarak $R_1[\vec{y}_0(x)]$, $R_2[\vec{y}_1(x)]$, \dots ifadeleri bulunur ve bulunan değerler (4.9) denkleminde yerine yazılırsa,

$$y_0(x) = x^2 + 1$$

$$y_1(x) = 1 - \hbar x^4 - \frac{\hbar}{3} x^6$$

$$y_2(x) = 1 - 2\hbar x^2 - (\hbar^2 + \hbar + 1)x^4 + \left(\frac{\hbar^2 - \hbar}{3}\right)x^6 + \frac{2\hbar^2}{3}x^8 + \frac{2\hbar^2}{15}x^{10}$$

⋮

şeklinde çözüm elde edilir.

Differential Transform Metodu ile Çözüm:

Model olarak alınan diferansiyel denklem düzenlendiğinde,

$$y' - 2xy^2 = 0 \quad (4.10)$$

olur. (4.10) denkleminin transformu alınır,

$$Y(k+1) = \frac{2}{k+1} \left[\sum_{r=0}^k \left(\sum_{r=0}^k \delta(r-1) Y(k-r) \right) \cdot Y(k-r) \right] \quad (4.11)$$

elde edilir. (4.11) denkleminde $k = 0, 1, \dots$ yazıldığında,

$$Y(1) = 0, \quad Y(2) = 4, \quad Y(3) = 0, \quad Y(4) = 32, \dots$$

bulunur. Bu katsayılar yerine yazıldığında,

$$y(x) = 1 + 4x^2 + 32x^4 + \dots$$

seri biçimindeki sonuca ulaşılır.

Adomian Decomposition Metodu ile Çözüm:

Bu diferansiyel denklemin yaklaşık çözümünü ADM ile bulmak için başlangıç koşulu $y(0) = 1$ den $x_0 = 0$ ve $y_0 = 1$ biçiminde alınır.

Bu denklem aşağıdaki gibi

$$L_x u = 2xu^2 = 2xN(u) \quad (4.12)$$

operatör formunda yazılır. Burada $L_x = \frac{\partial}{\partial x}$ lineer operatör ve lineer olmayan terim ise $N(u) = u^2$

olarak ifade edilmektedir. Ayrıca yine L_x^{-1} integral operatörü olup $L_x^{-1} = \int_0^x (\cdot) dx$ şeklinde gösterilir.

(4.12) denkleminin her iki tarafına soldan L_x^{-1} uygulanırsa

$$L_x^{-1} [L_x(x)] = L_x^{-1} [2xu^2] = L_x^{-1} [2xN(u)] \quad (4.13)$$

elde edilir. Buradan

$$u(x) = u_0(x) + L_x^{-1} [2xu^2] = u_0(x) + L_x^{-1} [2xN(u)] \quad (4.14)$$

olur. Böylece $N(u) = u^2 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$, şeklinde tanımlanarak A_n Adomian polinomlarının ilk dört terimi,

$$\begin{aligned}
A_0 &= F(u_0) \\
A_1 &= u_1 F'(u_0) \\
A_2 &= u_2 F'(u_0) + \frac{1}{2} u_1^2 F''(u_0) \\
A_3 &= u_3 F'(u_0) + u_1 u_2 F''(u_0) + \frac{1}{3!} u_1^3 F'''(u_0) \\
A_4 &= u_4 F'(u_0) + \left(\frac{1}{2!} u_2^2 + u_1 u_3 \right) F''(u_0) + \frac{1}{2!} u_1^2 u_2 F'''(u_0) + \frac{1}{4!} u_1^4 F^{(4)}(u_0)
\end{aligned} \tag{4.15}$$

biçiminde oluşturulur. Bu takdirde $k \geq 0$ için (4.14) denklemini

$$\begin{cases} u_0(x) = 1 \\ u_{k+1}(x) = L_x^{-1}[(2xA_k)] \end{cases} \tag{4.16}$$

biçiminde bir rekürans bağıntısı ile ifade edilebilir. Bu bağıntı kullanılarak

$$\begin{aligned}
u_0 &= 1 \\
u_1 &= \int_0^x [(2xA_0)] dx = \int_0^x [(2xu_0^2)] dx = x^2 \\
u_2 &= \int_0^x [(2xA_1)] dx = \int_0^x [(2x(2u_0u_1))] dx = x^4 \\
u_3 &= \int_0^x [(2xA_2)] dx = \int_0^x [(2x(2u_0u_2 + u_1^2))] dx = x^6 \\
u_4 &= \int_0^x [(2xA_3)] dx = \int_0^x [(2x(u_2^2 + 2u_1u_2))] dx = x^8 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

şeklindeki ayrışım serisinin ilk dört terimi bulunur. Böylece bulunan u_0, u_1, u_2, u_3, u_4 terimleri için verilen denklemin yaklaşık çözümü

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \dots \\
&= 1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + \dots
\end{aligned}$$

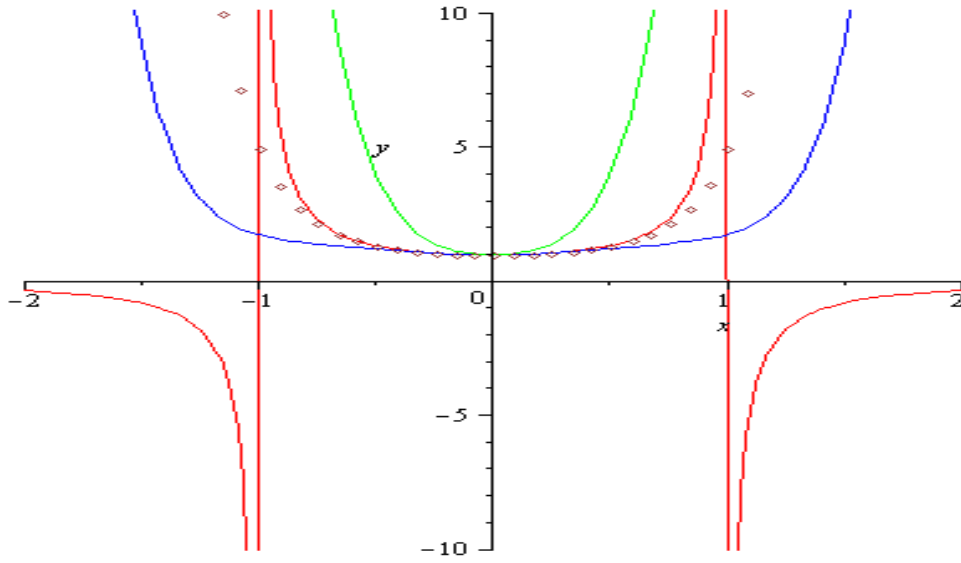
olarak elde edilir.

Şimdi ise model problemin Homotopi Analiz, DTM, Adomian metotları ile çözümü yanında bunun tam çözümünü $x = 0.1$ için tablo ile gösterip, şeklini ise 2-boyutlu ve 3-boyutlu grafik üzerinde karşılaştıralım:

Tablo 4.2. Homotopi Analiz, DTM ve Adomian Metodu Çözümlerinin Tam Çözüm ile Karşılaştırılması

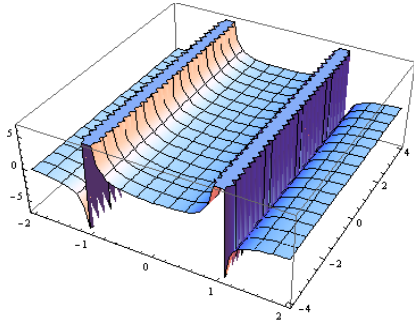
\hbar	Homotopi Analiz Çözümü	DTM Çözümü	Adomian Çözümü	Tam Çözüm	Homotopi Analiz Çözümü için Mutlak Hata	DTM Çözümü için Mutlak Hata	Adomian Çözümü için Mutlak Hata
-1	1.01990	1.0432	1.0101	1.0101	9.80×10^{-3}	3.31×10^{-2}	0
-0.9	1.01791	1.0432	1.0101	1.0101	7.81×10^{-3}	3.31×10^{-2}	0
-0.8	1.01592	1.0432	1.0101	1.0101	5.82×10^{-3}	3.31×10^{-2}	0
-0.7	1.01392	1.0432	1.0101	1.0101	3.82×10^{-3}	3.31×10^{-2}	0
-0.6	1.01192	1.0432	1.0101	1.0101	1.82×10^{-3}	3.31×10^{-2}	0
-0.54	1.01073	1.0432	1.0101	1.0101	6.30×10^{-4}	3.31×10^{-2}	0
-0.51	1.01013	1.0432	1.0101	1.0101	0.30×10^{-4}	3.31×10^{-2}	0
-0.508	1.01009	1.0432	1.0101	1.0101	$0,10 \times 10^{-4}$	3.31×10^{-2}	0
-0.5089	1.01010	1.0432	1.0101	1.0101	0	3.31×10^{-2}	0

Tablo 4.2' de görüldüğü gibi verilen model problemin $x = 0.1$ için Homotopi Analiz metodu ile çözümü, $\hbar = -0.5089$ noktasında tam çözüme en iyi biçimde yakınsamaktadır. Bu noktadan sonra artan değerler verildiğinde sonucun tam çözümden uzaklaştığı görülür. Şekilden de görüleceği üzere $x = 0.1$ noktası üzerinde en iyi yakınsamayı ise Adomian metodu ile çözüm vermiştir.

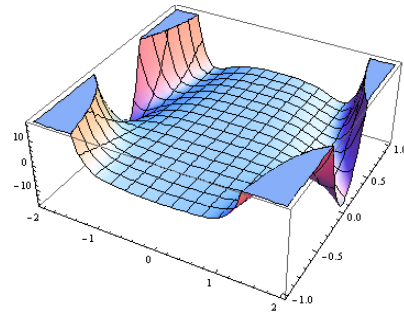


Şekil 4.2: Grafikte kırmızı renkle gösterilen şekil tam çözümün, mavi renk ile gösterilen şekil Homotopi Analiz çözümünün, yeşil renk ile gösterilen şekil DTM çözümünün, pembe kesikli çizgilerle gösterilen şekil ise Adomian çözümünün grafiğidir.

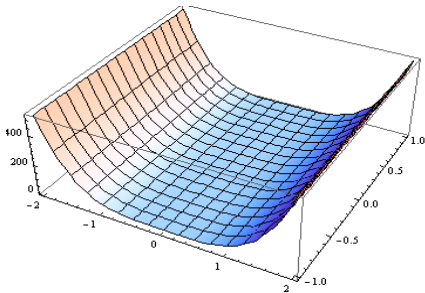
Çözümlerin üç boyutlu grafikleri aşağıda gösterilen şekillerdeki gibidir:



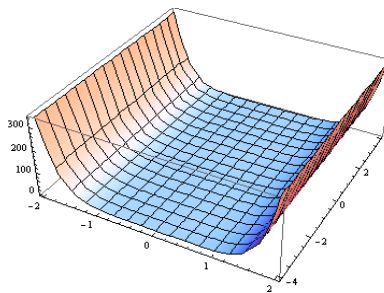
TAM ÇÖZÜM



HOMOTOPİ ANALİZ ÇÖZÜMÜ



DTM ÇÖZÜMÜ



ADOMIAN ÇÖZÜMÜ

Örnek 4.3. $y'' + 4y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ denklemini Homotopi Analiz metodu ile çözelim:

Başlangıç şartına uygun olacak şekilde başlangıç yaklaşımı $y_0(x) = \sin x$ olarak seçilsin. Buna

ilaveten yardımcı lineer operatör $L[\phi(x; q)] = \frac{\partial^2 \phi(x; q)}{\partial x^2}$ ve non-lineer operatör ise

$$N[\phi(x; q)] = \frac{\partial^2 \phi(x; q)}{\partial x^2} + 4 \cdot \phi(x; q)$$

olsun. Böylece $q \in [0, 1]$ gömülü parametre, $h \neq 0$ bir yardımcı parametre ve $H(t) \neq 0$ bir yardımcı fonksiyon olmak üzere sıfıncı dereceden deformasyon denklemi,

$$(1 - q) \cdot L[\phi(x; q) - y_0(t)] = q \cdot h \cdot H(x) \cdot N[\phi(x; q)]$$

biçiminde ifade edilir. Burada

$$q = 0 \text{ için } \phi(x; 0) = y_0(x)$$

$$q = 1 \text{ için } \phi(x; 1) = y(x)$$

bulunur. Diğer yandan

$$y_m(x) = \frac{1}{m!} \left. \frac{\partial^m \phi(x; q)}{\partial q^m} \right|_{q=0}, \quad \phi(x; q) = \phi(x; 0) + \sum_{m=1}^{+\infty} y_m(x) \cdot q^m, \quad \vec{y}_n(x) = \{y_0(x), y_1(x), \dots, y_n(x)\}$$

denklemlerine göre sıfıncı dereceden deformasyon denkleminin m defa q ' ya göre türevinin alınıp $m!$ ile bölünmesiyle m . mertebeden deformasyon denklemi

$$L[y_m(x) - \chi_m y_{m-1}(x)] = h \cdot H(x) \cdot R_m[\vec{y}_{m-1}(x)]$$

biçiminde elde edilir. Burada başlangıç şartı $y_m(0) = 0$, $y_m'(0) = 1$ ' dir. Bu denklem çözüldüğünde,

$$y_m(x) = \chi_m y_{m-1}(x) + h \cdot \int_0^x \int_0^x H(x) \cdot R_m[\vec{y}_{m-1}(x)] \cdot dx dx \quad (4.17)$$

olur. Burada,

$$R_m[\vec{y}_{m-1}(x)] = y_{m-1}''(x) + 4 \cdot y_{m-1}(x)$$

dir. m yerine sırasıyla $1, 2, 3, \dots$ yazılarak $R_1[\bar{y}_0(x)], R_2[\bar{y}_1(x)], \dots$ ifadeleri bulunur ve bulunan bu değerler (4.17) denkleminde yerine yazılırsa,

$$y_0(x) = \sin x$$

$$y_1(x) = -3\hbar \cdot \sin x + 3\hbar x + x$$

$$y_2(x) = (1 + 3\hbar - 9\hbar^2) \cdot x + (2\hbar^2 + \frac{2\hbar}{3}) \cdot x^3 + (9\hbar^2 - 3\hbar) \cdot \sin x$$

⋮

şeklinde çözüm elde edilir.

Adomian Decomposition Metodu ile Çözüm:

$y'' + 4y = 0$ diferansiyel denkleminin yaklaşık çözümünü ADM ile bulmak için başlangıç koşulu $y(0) = 0, y'(0) = 1$ den $y_0(x) = x$ biçiminde alınır. Bu denklem aşağıdaki gibi

$$L_x y = -4 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} y_n$$

operatör formunda yazılır. Burada $L_x = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ lineer operatör olarak ifade edilmektedir. Ayrıca yine L_x^{-1}

integral operatörü olup $L_x^{-1} = \int_0^x \int_0^x (\cdot) dx$ şeklinde gösterilir. (4.18) denkleminin her iki tarafına soldan

L_x^{-1} uygulanırsa,

$$L^{-1} L y = -4 \cdot L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} y_n \quad (4.19)$$

elde edilir. Buradan

$$y(x) = y_0(x) - L^{-1} \left[4 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} y_n \right] \quad (4.20)$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned}
y_1(x) &= -L^{-1}[4 \cdot y_0] \\
y_2(x) &= -L^{-1}[4 \cdot y_1] \\
y_3(x) &= -L^{-1}[4 \cdot y_2] \\
&\vdots
\end{aligned}$$

yazılarak,

$$\begin{aligned}
y_0(x) &= x \\
y_1(x) &= -\frac{2}{3} \cdot x^3 \\
y_2(x) &= \frac{2}{15} \cdot x^5 \\
y_3(x) &= -\frac{4}{315} \cdot x^7 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

olarak ayrışım serisinin ilk dört terimi bulunur. Böylece bulunan y_0, y_1, y_2, y_3, y_4 terimleri için verilen denklemin yaklaşık çözümü,

$$\begin{aligned}
y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x) = y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + \dots \\
&= x - \frac{2}{3} \cdot x^3 + \frac{2}{15} \cdot x^5 - \frac{4}{315} \cdot x^7 + \dots
\end{aligned}$$

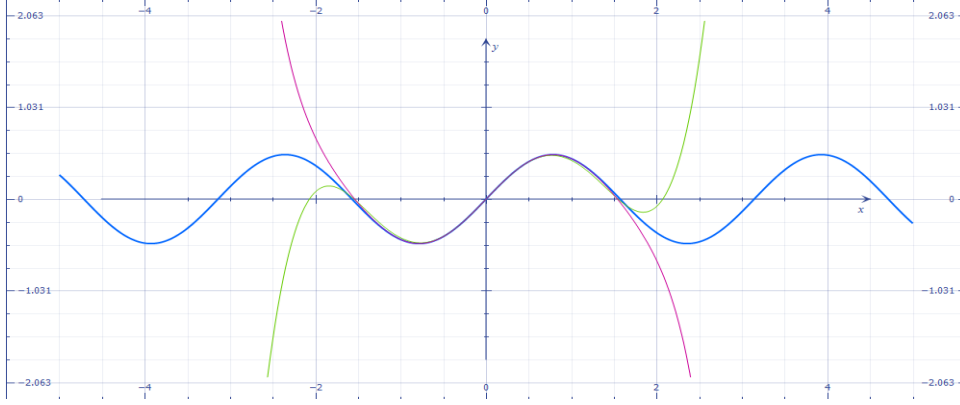
olarak elde edilir.

Şimdi ise model problemin Homotopi Analiz, Adomian metotları ile çözümü yanında bunun tam çözümünü $x=1$ için tablo ile gösterip, şeklini ise 2-boyutlu ve 3-boyutlu grafik üzerinde karşılaştıralım:

Tablo 4.3. Homotopi Analiz ve Adomian Metodu Çözümlerinin Tam Çözüm ile Karşılaştırılması

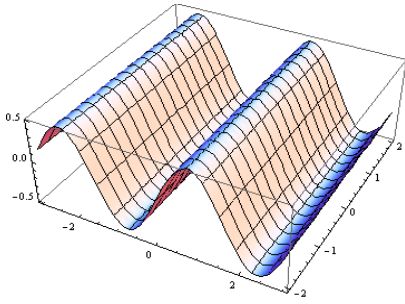
\hbar	Homotopi Analiz Çözümü	Adomian Çözümü	Tam Çözüm	Homotopi Analiz Çözümü için Mutlak Hata	Adomian Çözümü için Mutlak Hata
-1	0.430985	0.453968	0.454649	2.3664×10^{-2}	6.81×10^{-4}
-0.9	0.436295	0.453968	0.454649	1.8354×10^{-2}	6.81×10^{-4}
-0.8	0.453070	0.453968	0.454649	1.5790×10^{-3}	6.81×10^{-4}
-0.79311	0.454648	0.453968	0.454649	1.0000×10^{-6}	6.81×10^{-4}
-0.793105	0.454649	0.453968	0.454649	0	6.81×10^{-4}

Tablo 4.3' de görüldüğü gibi $x=1$ için Homotopi Analiz metodu ile çözüm $\hbar = -0.793105$ noktasında tam çözüme en iyi yakınsamaktadır. Bu noktadan sonra artan değerler verildiğinde sonucun tam çözümden uzaklaştığı görülür. Şekilden de görüleceği üzere $x=1$ noktası üzerinde de en iyi yakınsamayı ise ADM çözümü vermiştir.

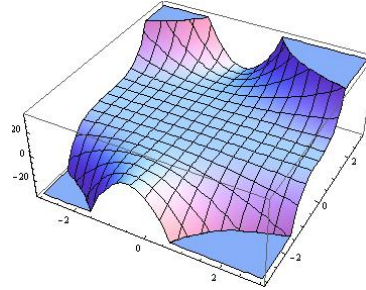


Şekil 4.3: Grafikte mavi renkle gösterilen şekil tam çözümün, yeşil renk ile gösterilen şekil Homotopi Analiz çözümünün, pembe renk ile gösterilen şekil ise Adomian çözümünün grafiğidir.

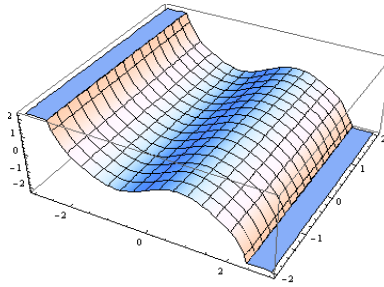
Çözümlerin üç boyutlu grafikleri aşağıda gösterilen şekillerdeki gibidir:



TAM ÇÖZÜM



HOMOTOPİ ANALİZ ÇÖZÜMÜ



ADOMİAN ÇÖZÜMÜ

Örnek 4.4. $y' + xy = 1$, $y(0) = 1$ denklemini Homotopi Analiz metodu ile çözelim:

Başlangıç şartına uygun olacak şekilde başlangıç yaklaşımı $y_0(x) = x - 1$ olarak seçilsin.

Yardımcı lineer operatör $L[\phi(x; q)] = \frac{\partial \phi(x; q)}{\partial x}$ ve non-lineer operatör ise

$$N[\phi(x; q)] = \frac{\partial \phi(x; q)}{\partial x} + x \cdot \phi(x; q) - 1$$

olsun. Böylece $q \in [0, 1]$ gömülü parametre, $h \neq 0$ bir yardımcı parametre ve $H(x) = -1$ bir yardımcı fonksiyon olmak üzere sıfıncı dereceden deformasyon denklemi,

$$(1 - q) \cdot L[\phi(x; q) - y_0(x)] = q \cdot h \cdot H(x) \cdot N[\phi(x; q)]$$

biçiminde ifade edilir. Burada

$$q = 0 \text{ için } \phi(x; 0) = y_0(x)$$

$$q = 1 \text{ için } \phi(x; 1) = y(x)$$

bulunur. Diğer yandan

$$y_m(x) = \frac{1}{m!} \left. \frac{\partial^m \phi(x; q)}{\partial q^m} \right|_{q=0}, \quad \phi(x; q) = \phi(x; 0) + \sum_{m=1}^{+\infty} y_m(x) \cdot q^m, \quad \bar{y}_n(x) = \{y_0(x), y_1(x), \dots, y_n(x)\}$$

denklemlerine göre sıfıncı dereceden deformasyon denkleminin m defa q ' ya göre türevinin alınıp $m!$ ile bölünmesiyle m . mertebeden deformasyon denklemi

$$L[y_m(x) - \chi_m y_{m-1}(x)] = h \cdot H(x) \cdot R_m[\bar{y}_{m-1}(x)]$$

biçiminde elde edilir. Burada başlangıç şartı $y_m(0) = 1$ ' dir. Bu denklem çözüldüğünde,

$$y_m(x) = \chi_m y_{m-1}(x) + h \cdot \int_0^x H(x) \cdot R_m[\bar{y}_{m-1}(x)] \cdot dx \quad (4.21)$$

olur. Burada,

$$R_m[\vec{y}_{m-1}(x)] = y_{m-1}'(x) + x \cdot y_{m-1}(x) - (1 - \chi_m)$$

dir. m yerine sırasıyla 1,2,3,... yazılarak $R_1[\vec{y}_0(x)], R_2[\vec{y}_1(x)], \dots$ ifadeleri bulunur ve bulunan bu değerler (4.21) denkleminde yerine yazılırsa,

$$y_0(x) = x - 1$$

$$y_1(x) = \hbar \cdot \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) + 1$$

$$y_2(x) = 1 - \hbar^2 \cdot \frac{x^2}{2} + (\hbar^2 - \hbar) \cdot \frac{x^3}{3} - \hbar^2 \cdot \frac{x^4}{8} + \hbar^2 \cdot \frac{x^5}{15}$$

⋮

şeklinde çözüm elde edilir.

Differential Transform Metodu ile Çözüm:

Verilen model denklemin transformu alınır,

$$Y(k+1) = \frac{1}{k+1} \left[1 - \sum_{r=0}^k \delta(r-1) \cdot Y(k-r) \right] \quad (4.22)$$

elde edilir. (4.22) denkleminde $k = 0, 1, \dots$ yazıldığında,

$$Y(1) = 1, Y(2) = 0, Y(3) = 0, Y(4) = \frac{1}{4}, Y(5) = \frac{1}{5}, Y(6) = \frac{1}{8}, \dots$$

bulunur. Bu katsayılar yerine yazıldığında,

$$y(x) = 1 + x + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^6}{8} + \dots$$

seri biçimindeki sonuca ulaşılır.

Adomian Decomposition Metodu ile Çözüm:

$y' + xy = 1$ diferansiyel denkleminin yaklaşık çözümünü ADM ile bulmak için başlangıç koşulu $y(0) = 1$ den $y_0(x) = 1$ alınabilir. Bu denklem aşağıdaki gibi

$$L_x y + x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} y_n = 1 \quad (4.23)$$

operatör formunda yazılır. Burada $L_x = \frac{\partial y}{\partial x}$ lineer operatör olarak ifade edilmektedir. Ayrıca yine L_x^{-1}

integral operatörü olup $L_x^{-1} = \int_0^x (\cdot) dx$ şeklinde gösterilir. (4.23) denkleminin her iki tarafına soldan

L_x^{-1} uygulanırsa,

$$L_x^{-1} L_x y + L_x^{-1} [x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} y_n] = L_x^{-1} [1] \quad (4.24)$$

elde edilir. Buradan

$$y(x) = y_0(x) + L_x^{-1} [1] - L_x^{-1} \left[x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} y_n \right] \quad (4.25)$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned} y_1(x) &= -L_x^{-1} [x \cdot y_0] \\ y_2(x) &= -L_x^{-1} [x \cdot y_1] \\ y_3(x) &= -L_x^{-1} [x \cdot y_2] \\ &\vdots \end{aligned}$$

yazılarak,

$$y_0(x) = 1$$

$$y_1(x) = -\frac{x^2}{2}$$

$$y_2(x) = \frac{x^4}{8}$$

$$y_3(x) = -\frac{x^6}{48}$$

$$y_4(x) = \frac{x^8}{384}$$

$$\vdots$$

olarak ayrışım serisinin ilk dört terimi bulunur. Böylece bulunan $y_0, y_1, y_2, y_3, \dots$ terimleri için verilen denklemin yaklaşık çözümü

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x) = y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + \dots \\ &= 1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{48} + \frac{x^8}{384} + \dots \end{aligned}$$

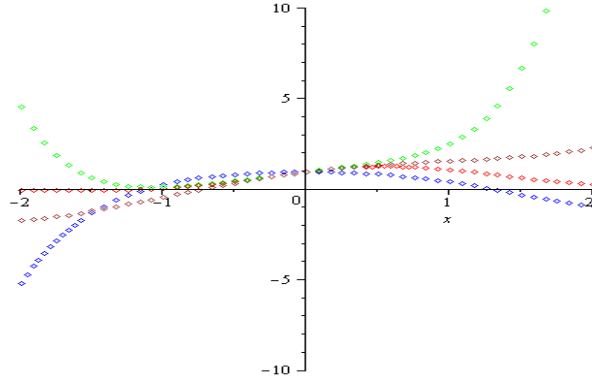
olarak elde edilir.

Şimdi ise model problemin Homotopi Analiz, Adomian metotları ile çözümü yanında bunun tam çözümünü $x = 0.1$ için tablo ile gösterip, şeklini ise 2-boyutlu ve 3-boyutlu grafik üzerinde karşılaştıralım:

Tablo 4. 4. Homotopi Analiz ve Adomian Metodu Çözümlerinin Tam Çözüm ile Karşılaştırılması

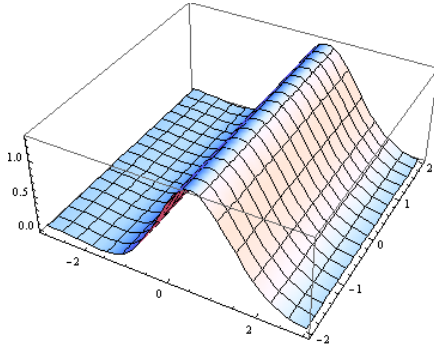
\hbar	Homotopi Analiz Çözümü	Adomian Çözümü	DTM Çözümü	Tam Çözüm	Homotopi Analiz Çözümü için Mutlak Hata	Adomian Çözümü için Mutlak Hata	DTM Çözümü için Mutlak Hata
-1	0.995655	1.09468	1.10003	1.09435	9.8695×10^{-2}	3.3×10^{-4}	5.68×10^{-3}
-0.9	0.996510	1.09468	1.10003	1.09435	9.7840×10^{-2}	3.3×10^{-4}	5.68×10^{-3}
-0.8	0.997272	1.09468	1.10003	1.09435	9.7078×10^{-2}	3.3×10^{-4}	5.68×10^{-3}
-0.7	0.997941	1.09468	1.10003	1.09435	9.6409×10^{-2}	3.3×10^{-4}	5.68×10^{-3}
-0.6	0.998516	1.09468	1.10003	1.09435	9.5834×10^{-2}	3.3×10^{-4}	5.68×10^{-3}
-0.5	0.998997	1.09468	1.10003	1.09435	9.5353×10^{-2}	3.3×10^{-4}	5.68×10^{-3}
-0.4	0.999385	1.09468	1.10003	1.09435	9.4965×10^{-2}	3.3×10^{-4}	5.68×10^{-3}
-0.3	0.999679	1.09468	1.10003	1.09435	9.4671×10^{-2}	3.3×10^{-4}	5.68×10^{-3}
-0.2	0.999880	1.09468	1.10003	1.09435	9.4470×10^{-2}	3.3×10^{-4}	5.68×10^{-3}
-0.1	0.999987	1.09468	1.10003	1.09435	9.4363×10^{-2}	3.3×10^{-4}	5.68×10^{-3}
0	10000000	1.09468	1.10003	1.09435	9.4350×10^{-2}	3.3×10^{-4}	5.68×10^{-3}
0.1	0.999920	1.09468	1.10003	1.09435	9.4430×10^{-2}	3.3×10^{-4}	5.68×10^{-3}

Tablo 4.4' de görüldüğü gibi $x = 0.1$ için Homotopi Analiz metodu ile çözüm $\hbar = 0$ noktasında tam çözüme en iyi yakınsamaktadır. Bu noktadan sonra artan değerler verildiğinde sonucun tam çözümden uzaklaştığı görülür. Şekilden de görüleceği üzere $x = 0.1$ noktası üzerinde de en iyi yakınsamayı ise ADM çözümü vermiştir.

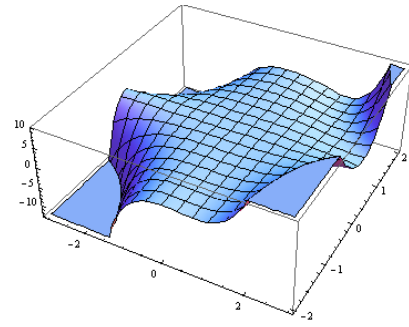


Şekil 4.4: Grafikte kırmızı renkle gösterilen şekil tam çözümün, mavi renk ile gösterilen şekil Homotopi Analiz çözümünün, yeşil renk ile gösterilen şekil DTM çözümünün, mor renk ile gösterilen şekil ise Adomian çözümünün grafiğidir.

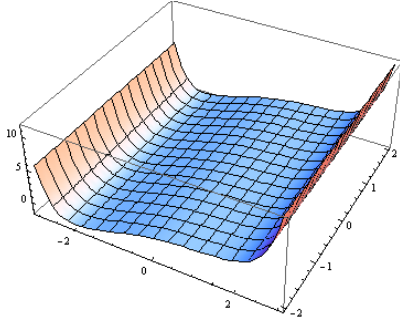
Çözümlerin üç boyutlu grafikleri aşağıda gösterilen şekillerdeki gibidir:



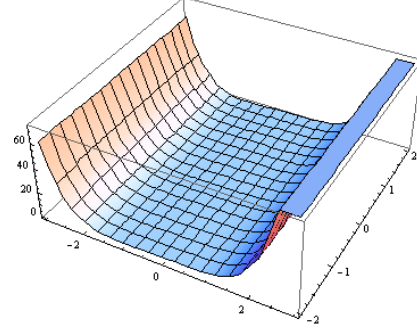
TAM ÇÖZÜM



HOMOTOPİ ANALİZ ÇÖZÜMÜ



ADOMIAN ÇÖZÜMÜ



DTM ÇÖZÜMÜ

Örnek 4.5. $y' = \frac{2x}{1+2y}$, $y(2) = 0$ denklemini Homotopi Analiz metodu ile çözelim:

Başlangıç şartına uygun olacak şekilde başlangıç yaklaşımı $y_0(x) = x^2 - 4$ olarak seçilsin.

Buna ilaveten yardımcı lineer operatör $L[\phi(x; q)] = \frac{\partial \phi(x; q)}{\partial x}$ ve non-lineer operatör ise

$$N[\phi(x; q)] = \frac{\partial \phi(x; q)}{\partial x} + 2 \cdot \frac{\partial \phi(x; q)}{\partial x} \cdot \phi(x; q) - 2x$$

olsun. Böylece $q \in [0, 1]$ gömülü parametre, $h \neq 0$ bir yardımcı parametre ve $H(x) = 1$ bir yardımcı fonksiyon olmak üzere sıfırıncı dereceden deformasyon denklemi,

$$(1 - q) \cdot L[\phi(x; q) - y_0(x)] = q \cdot h \cdot H(x) \cdot N[\phi(x; q)]$$

biçiminde ifade edilir. Burada

$$q = 0 \text{ için } \phi(x; 0) = y_0(x)$$

$$q = 1 \text{ için } \phi(x; 1) = y(x)$$

bulunur. Diğer yandan

$$y_m(x) = \frac{1}{m!} \left. \frac{\partial^m \phi(x; q)}{\partial q^m} \right|_{q=0}, \quad \phi(x; q) = \phi(x; 0) + \sum_{m=1}^{+\infty} y_m(x) \cdot q^m, \quad \bar{y}_n(x) = \{y_0(x), y_1(x), \dots, y_n(x)\}$$

denklemlerine göre sıfırıncı dereceden deformasyon denkleminin m defa q ' ya göre türevinin alınıp $m!$ ile bölünmesiyle m . mertebeden deformasyon denklemi

$$L[y_m(x) - \chi_m y_{m-1}(x)] = \hbar \cdot H(x) \cdot R_m[\bar{y}_{m-1}(x)]$$

biçiminde elde edilir. Burada başlangıç şartı $y_m(0) = 1$ ' dir. Bu denklem çözüldüğünde,

$$y_m(x) = \chi_m y_{m-1}(x) + \hbar \cdot \int_0^x H(x) \cdot R_m[\bar{y}_{m-1}(x)] \cdot dx \quad (4.26)$$

olur. Burada,

$$R_m[\bar{y}_{m-1}(x)] = y_{m-1}'(x)[1 + 2y_{m-1}(x)] - 2x$$

dir. m yerine sırasıyla 1,2,3,... yazılarak $R_1[\bar{y}_0(x)]$, $R_2[\bar{y}_1(x)]$,... ifadeleri bulunur ve bulunan bu değerler (4.26) denkleminde yerine yazılırsa,

$$y_0(x) = x^2 - 4$$

$$y_1(x) = \hbar \cdot (x^4 - 8x^2 + 16)$$

$$y_2(x) = \hbar^2 x^8 - 16\hbar^3 x^6 + (96\hbar^3 + \hbar^2 + \hbar) \cdot x^4 - (8\hbar^2 + 256\hbar^3 + 9\hbar) \cdot x^2 + 20\hbar - 240\hbar^2 + 512\hbar^3$$

⋮

şeklinde çözüm elde edilir.

Differential Transform Metodu ile Çözüm:

Verilen model denklemin transformu alınır,

$$Y(k+1) = \frac{2}{k+1} \left[\delta(k-1) - \sum_{r=0}^k Y(r) \cdot (k-r+1) \cdot Y(k-r+1) \right] \quad (4.27)$$

elde edilir. (4.27) denkleminde $k = 0, 1, \dots$ yazıldığında,

$$Y(0) = -\frac{1}{2}, Y(1) = 1, \dots$$

bulunur. Bu katsayılar yerine yazıldığında,

$$y(x) = -\frac{1}{2} + x$$

seri biçimindeki sonuca ulaşılır.

Adomian Decomposition Metodu ile Çözüm:

$y' = \frac{2x}{1+2y}$ diferansiyel denkleminin yaklaşık çözümünü ADM ile bulmak için başlangıç koşulu

$y(2) = 0$ den $y_0(x) = x - 2$ alınabilir. Bu denklem aşağıdaki gibi

$$L_x y + 2 \cdot Ny = 2x \quad (4.28)$$

operatör formunda yazılır. Burada $L_x = \frac{\partial y}{\partial x}$ lineer operatör ve lineer olmayan terim ise

$N(u) = u_x \cdot u$ olarak ifade edilmektedir. Ayrıca yine L_x^{-1} integral operatörü olup $L_x^{-1} = \int_0^x (\cdot) dx$

şeklinde gösterilir. (4.28) denkleminin her iki tarafına soldan L_x^{-1} uygulanırsa,

$$L_x^{-1} L_x y + 2 \cdot L_x^{-1} [Ny] = L_x^{-1} [2x] \quad (4.29)$$

elde edilir. Buradan

$$y(x) = y_0(x) + L_x^{-1} [2x] - L_x^{-1} \left[2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} A_n \right] \quad (4.30)$$

olur. Böylece $N(u) = u_x \cdot u = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$ şeklinde tanımlanarak, A_n Adomian polinomlarının ilk dört

terimi

$$A_0 = F(u_0)$$

$$A_1 = u_1 F'(u_0)$$

$$A_2 = u_2 F'(u_0) + \frac{1}{2} u_1^2 F''(u_0)$$

$$A_3 = u_3 F'(u_0) + u_1 u_2 F''(u_0) + \frac{1}{3!} u_1^3 F'''(u_0)$$

$$A_4 = u_4 F'(u_0) + \left(\frac{1}{2!} u_2^2 + u_1 u_3 \right) F''(u_0) + \frac{1}{2!} u_1^2 u_2 F'''(u_0) + \frac{1}{4!} u_1^4 F^{(4)}(u_0)$$

biçiminde oluşturulur. Burada

$$y_1(x) = -L^{-1}[2 \cdot A_0]$$

$$y_2(x) = -L^{-1}[2 \cdot A_1]$$

$$y_3(x) = -L^{-1}[2 \cdot A_2]$$

⋮

yazılarak,

$$y_0(x) = x - 2$$

$$y_1(x) = -x^2 + 4x$$

$$y_2(x) = \frac{2}{3} x^3 - 4x^2$$

⋮

şeklindeki ayrışım serisinin ilk üç terimi bulunur. Böylece bulunan y_0, y_1, y_2, \dots terimleri için verilen denklemin yaklaşık çözümü

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x) = y_0 + y_1 + y_2 + \dots \\ &= -2 + 5x - 4x^2 + \frac{2}{3} x^3 + \dots \end{aligned}$$

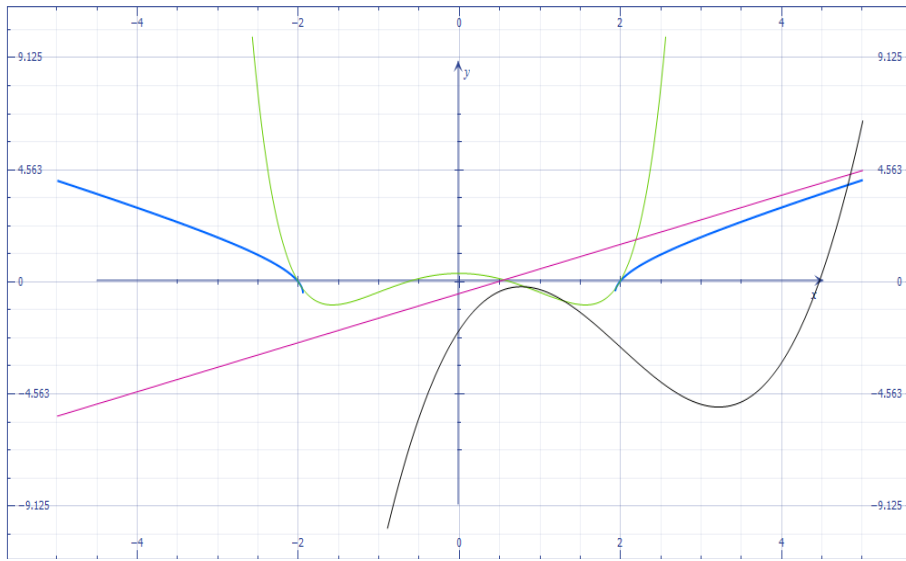
olarak elde edilir.

Şimdi ise model problemin Homotopi Analiz, DTM, Adomian metotları ile çözümü yanında bunun tam çözümünü $x = 3$ için tablo ile gösterip, şeklini ise 2-boyutlu ve 3-boyutlu grafik üzerinde karşılaştıralım:

Tablo 4.5. Homotopi Analiz, DTM ve Adomian Metodu Çözümlerinin Tam Çözüm ile Karşılaştırılması

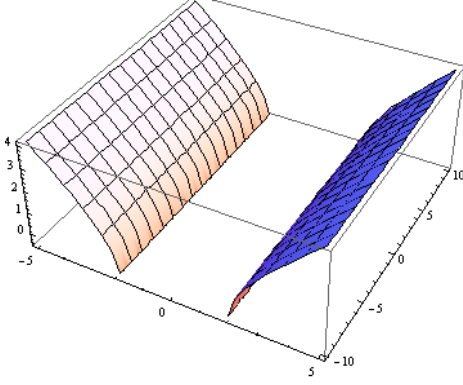
\hbar	Homotopi Analiz Çözümü	Adomian Çözümü	DTM Çözümü	Tam Çözüm	Homotopi Analiz Çözümü için Mutlak Hata	Adomian Çözümü için Mutlak Hata	DTM Çözümü için Mutlak Hata
-0.01	0.438680	-5	2.5	1.791288	0.1352608×10^1	0.6791288×10^1	7.08712×10^{-1}
-0.018	1.724050	-5	2.5	1.791288	6.7238000×10^{-2}	0.6791288×10^1	7.08712×10^{-1}
-0.0182	1.766990	-5	2.5	1.791288	2.4298000×10^{-2}	0.6791288×10^1	7.08712×10^{-1}
-0.0183	1.790840	-5	2.5	1.791288	4.4800000×10^{-4}	0.6791288×10^1	7.08712×10^{-1}
-0.018312	1.791270	-5	2.5	1.791288	1.8000000×10^{-5}	0.6791288×10^1	7.08712×10^{-1}
-0.01831201	1.791288	-5	2.5	1.791288	0	0.6791288×10^1	7.08712×10^{-1}

Tablo 4.5' de görüldüğü gibi $x = 3$ için Homotopi Analiz metodu ile çözüm $\hbar = -0.01831201$ noktasında tam çözüme en iyi yakınsamaktadır. Bu noktadan sonra artan değerler verildiğinde sonucun tam çözümden uzaklaştığı görülür. Şekilden de görüleceği üzere $x = 3$ noktası üzerinde de en iyi yakınsamayı ise Homotopi Analiz çözümü vermiştir.

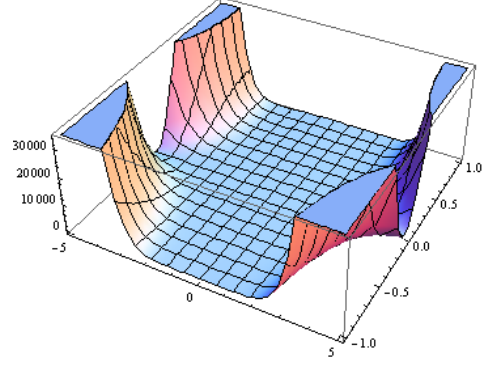


Şekil 4.5: Grafikte mavi renkle gösterilen şekil tam çözümün, yeşil renk ile gösterilen şekil Homotopi Analiz çözümünün, pembe renk ile gösterilen şekil DTM çözümünün, siyah renk ile gösterilen şekil ise Adomian çözümünün grafiğidir.

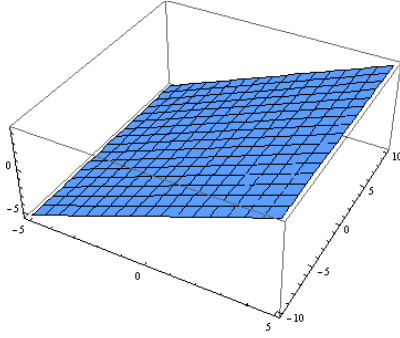
Çözümlerin üç boyutlu grafikleri aşağıda gösterilen şekillerdeki gibidir:



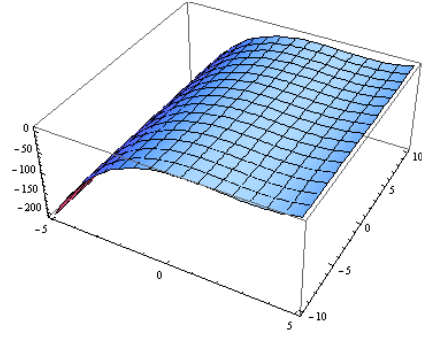
TAM ÇÖZÜM



HOMOTOPİ ANALİZ ÇÖZÜMÜ



DTM ÇÖZÜMÜ



ADOMIAN ÇÖZÜMÜ

Örnek 4.6. $y' = \frac{x^2}{y \cdot (1+x^3)}$, $y(0) = 1$ denklemini Homotopi Analiz metodu ile çözelim:

Başlangıç şartına uygun olacak şekilde başlangıç yaklaşımı $y_0(x) = 1$ olarak seçilsin. Buna

ilaveten yardımcı lineer operatör $L[\phi(x; q)] = \frac{\partial \phi(x; q)}{\partial x}$ ve non-lineer operatör ise

$$N[\phi(x; q)] = \frac{\partial \phi(x; q)}{\partial x} \cdot \phi(x; q) \cdot [1 + x^3] - x^2$$

olsun. Böylece $q \in [0,1]$ gömülü parametre, $h \neq 0$ bir yardımcı parametre ve $H(x) = 1$ bir yardımcı fonksiyon olmak üzere sıfıncı dereceden deformasyon denklemi,

$$(1-q) \cdot \mathcal{L}[\phi(x;q) - y_0(t)] = q \cdot \hbar \cdot H(x) \cdot \mathcal{M}[\phi(x;q)]$$

biçiminde ifade edilir. Burada

$$q = 0 \text{ için } \phi(x;0) = y_0(x)$$

$$q = 1 \text{ için } \phi(x;1) = y(x)$$

bulunur. Diğer yandan

$$y_m(x) = \frac{1}{m!} \left. \frac{\partial^m \phi(x;q)}{\partial q^m} \right|_{q=0}, \quad \phi(x;q) = \phi(x;0) + \sum_{m=1}^{+\infty} y_m(x) \cdot q^m, \quad \vec{y}_n(x) = \{y_0(x), y_1(x), \dots, y_n(x)\}$$

denklemlerine göre sıfıncı dereceden deformasyon denkleminin m defa q ' ya göre türevinin alınıp $m!$ ile bölünmesiyle m . mertebeden deformasyon denklemi

$$\mathcal{L}[y_m(x) - \chi_m y_{m-1}(x)] = \hbar \cdot H(x) \cdot R_m[\vec{y}_{m-1}(x)]$$

biçiminde elde edilir. Burada başlangıç şartı $y_m(0) = 1$ ' dir. Bu denklem çözüldüğünde,

$$y_m(x) = \chi_m y_{m-1}(x) + \hbar \cdot \int_0^x H(x) \cdot R_m[\vec{y}_{m-1}(x)] \cdot dx \quad (4.31)$$

olur. Burada,

$$R_m[\vec{y}_{m-1}(x)] = y_{m-1}'(x) \cdot y_{m-1}(x) \cdot (1+x^3) - x^2$$

dir. m yerine sırasıyla 1,2,3,... yazılarak $R_1[\vec{y}_0(x)], R_2[\vec{y}_1(x)], \dots$ ifadeleri bulunur ve bulunan bu değerler (4.31) denkleminde yerine yazılırsa,

$$y_0(x) = 1$$

$$y_1(x) = -\hbar \cdot \frac{x^3}{3} + 1$$

$$y_2(x) = 1 + \left(\frac{-\hbar^2 - 2\hbar}{3} \right) \cdot x^3 + \frac{\hbar^3 - 3\hbar^2}{18} \cdot x^6 + \frac{\hbar^3}{27} \cdot x^9$$

⋮

şeklinde çözüm elde edilir.

Differential Transform Metodu ile Çözüm:

Verilen model denklemin transformu alınır,

$$\sum_{r=0}^k (r+1) \cdot Y(r+1) \cdot Y(k-r) + \sum_{r=0}^k \left[\left(\sum_{r=0}^k (r+1) \cdot Y(r+1) \cdot Y(k-r) \right) \cdot \delta(k-3-r) \right] - \delta(k-2) = 0 \quad (4.32)$$

elde edilir. (4.32) denkleminde $k = 0, 1, \dots$ yazıldığında,

$$Y(0) = 1, Y(1) = 0, Y(2) = 0, Y(3) = 1/3, Y(4) = 0, \dots$$

bulunur. Bu katsayılar yerine yazıldığında,

$$y(x) = 1 + \frac{1}{3} x^3$$

seri biçimindeki sonuca ulaşılır.

Adomian Decomposition Metodu ile Çözüm:

$y' = \frac{x^2}{y \cdot (1+x^3)}$ diferansiyel denkleminin yaklaşık çözümünü ADM ile bulmak için başlangıç koşulu

$y(0) = 1$ den $y_0(x) = 1$ alınabilir. Bu denklem aşağıdaki gibi

$$L_x y = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \quad (4.33)$$

operatör formunda yazılır. Burada $L_x = \frac{\partial y}{\partial x}$ lineer operatör ve lineer olmayan terim ise $N(y) = y^{-1}$

olarak ifade edilmektedir. Ayrıca yine L_x^{-1} integral operatörü olup $L_x^{-1} = \int_0^x (\cdot) dx$ şeklinde gösterilir.

(4.33) denkleminin her iki tarafına soldan L_x^{-1} uygulanırsa,

$$L_x^{-1} L_x y = L_x^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n + y_0(x) \quad (4.34)$$

elde edilir. Buradan

$$y(x) = y_0(x) + L_x^{-1} \left[\sum_{n=0}^{\infty} A_n \right] \quad (4.35)$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned} y_1(x) &= L_x^{-1}[A_0] \\ y_2(x) &= L_x^{-1}[A_1] \\ y_3(x) &= L_x^{-1}[A_2] \\ &\vdots \end{aligned}$$

yazılarak,

$$\begin{aligned} y_0(x) &= 1 \\ y_1(x) &= -\frac{1}{3} \cdot \ln |1 + x^3| \\ y_2(x) &= -\frac{1}{18} \cdot (\ln |1 + x^3|)^2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

şeklindeki ayrışım serisinin ilk üç terimi bulunur. Bulunan y_0, y_1, y_2, \dots terimleri için verilen denklemin yaklaşık çözümü

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x) = y_0 + y_1 + y_2 + \dots \\ &= 1 + \frac{1}{3} \cdot \ln |1 + x^3| - \frac{1}{18} (\ln |1 + x^3|)^2 + \dots \end{aligned}$$

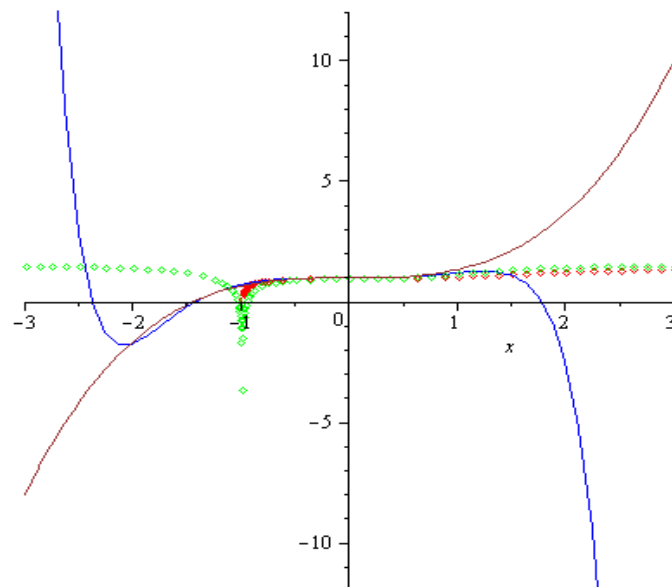
olarak elde edilir.

Şimdi ise model problemin Homotopi Analiz, DTM, Adomian metotları ile çözümü yanında bunun tam çözümünü $x = 0.1$ için tablo ile gösterip, şeklini ise 2-boyutlu ve 3-boyutlu grafik üzerinde karşılaştıralım:

Tablo 4.6. Homotopi Analiz, DTM ve Adomian Metodu Çözümlerinin Tam Çözüm ile Karşılaştırılması

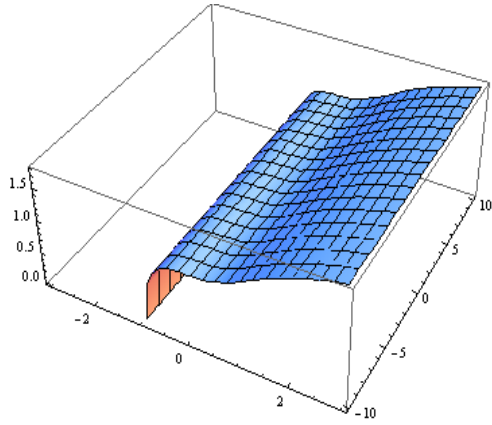
\hbar	Homotopi Analiz Çözümü	Adomian Çözümü	DTM Çözümü	Tam Çözüm	Homotopi Analiz Çözümü için Mutlak Hata	Adomian Çözümü için Mutlak Hata	DTM Çözümü için Mutlak Hata
-0.1	1.00006	1.00033	1.00033	1.00033	2.7×10^{-4}	0	0
-0.2	1.00012	1.00033	1.00033	1.00033	2.1×10^{-4}	0	0
-0.3	1.00017	1.00033	1.00033	1.00033	1.6×10^{-4}	0	0
-0.4	1.00021	1.00033	1.00033	1.00033	1.2×10^{-4}	0	0
-0.5	1.00025	1.00033	1.00033	1.00033	0.8×10^{-4}	0	0
-0.6	1.00028	1.00033	1.00033	1.00033	0.5×10^{-4}	0	0
-0.7	1.00030	1.00033	1.00033	1.00033	0.3×10^{-4}	0	0
-0.8	1.00032	1.00033	1.00033	1.00033	0.1×10^{-4}	0	0
-0.9	1.00033	1.00033	1.00033	1.00033	0	0	0
-1	1.00033	1.00033	1.00033	1.00033	0	0	0

Tablo 4.6' de görüldüğü gibi $x = 0.1$ için Homotopi Analiz metodu ile çözüm $x = -0.9$ noktasında tam çözüme en iyi yakınsamaktadır. Bu noktadan sonra artan değerler verildiğinde sonucun tam çözümden uzaklaştığı görülür. Şekilden de görüleceği üzere $x = 0.1$ noktası üzerinde de en iyi yakınsamayı ise DTM ve Adomian çözümleri vermiştir.

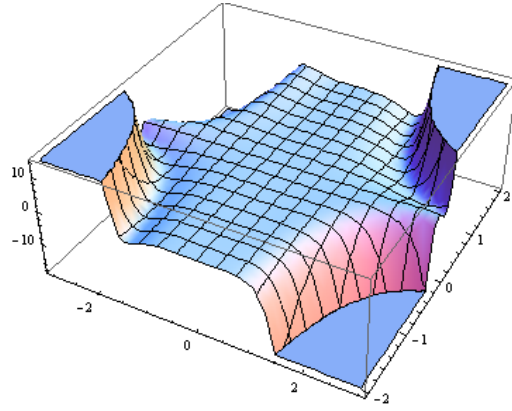


Şekil 4.6: Grafikte kırmızı renkle gösterilen şekil tam çözümün, mavi renk ile gösterilen şekil Homotopi Analiz çözümünün, mor renk ile gösterilen şekil DTM çözümünün, yeşil renk ile gösterilen şekil ise Adomian çözümünün grafiğidir.

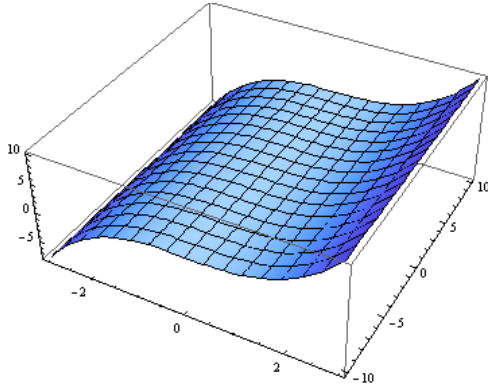
Çözümlerin üç boyutlu grafikleri aşağıda gösterilen şekillerdeki gibidir:



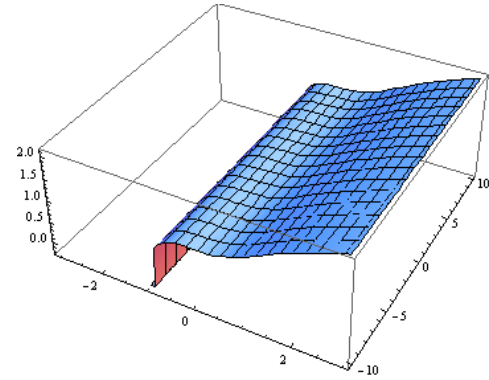
TAM ÇÖZÜM



HOMOTOPİ ANALİZ ÇÖZÜMÜ



DTM ÇÖZÜMÜ



ADOMİAN ÇÖZÜMÜ

Örnek 4.7. $y''+4y'+5y=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$ denklemini Homotopi Analiz metodu ile çözelim:

Başlangıç şartına uygun olacak şekilde başlangıç yaklaşımı $y_0(x)=1$ olarak seçilsin. Buna ilaveten yardımcı lineer operatör $L[\phi(x;q)] = \frac{\partial^2 \phi(x;q)}{\partial x^2}$ ve non-lineer operatör ise

$$N[\phi(x;q)] = \frac{\partial^2 \phi(x;q)}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial \phi(x;q)}{\partial x} + 5\phi(x;q)$$

olsun. Böylece $q \in [0,1]$ gömülü parametre, $h \neq 0$ bir yardımcı parametre ve $H(x)=1$ bir yardımcı fonksiyon olmak üzere sıfırncı dereceden deformasyon denklemi,

$$(1-q) \cdot L[\phi(x;q) - y_0(x)] = q \cdot h \cdot H(x) \cdot N[\phi(x;q)]$$

biçiminde ifade edilir.

$$q=0 \text{ için } \phi(x;0) = y_0(x)$$

$$q=1 \text{ için } \phi(x;1) = y(x)$$

bulunur. Diğer yandan

$$y_m(x) = \frac{1}{m!} \left. \frac{\partial^m \phi(x;q)}{\partial q^m} \right|_{q=0}, \quad \phi(x;q) = \phi(x;0) + \sum_{m=1}^{+\infty} y_m(x) \cdot q^m, \quad \bar{y}_n(x) = \{y_0(x), y_1(x), \dots, y_n(x)\}$$

denklemlerine göre sıfırncı dereceden deformasyon denkleminin m defa q ' ya göre türevinin alınıp $m!$ ile bölünmesiyle m . mertebeden deformasyon denklemi

$$L[y_m(x) - \chi_m y_{m-1}(x)] = h \cdot H(x) \cdot R_m[\bar{y}_{m-1}(x)]$$

biçiminde elde edilir. Burada başlangıç şartı $y_m(0) = 1$ ' dir. Bu denklem çözüldüğünde,

$$y_m(x) = \chi_m y_{m-1}(x) + h \cdot \int_0^x \int_0^x H(x) \cdot R_m[\bar{y}_{m-1}(x)] \cdot dx dx \quad (4.36)$$

olur. Burada,

$$R_m[\bar{y}_{m-1}(x)] = y_{m-1}''(x) + 4y_{m-1}'(x) + 5y_{m-1}(x)$$

dir. m yerine sırasıyla 1,2,3,... yazılarak $R_1[\bar{y}_0(x)], R_2[\bar{y}_1(x)], \dots$ ifadeleri bulunur ve bulunan bu değerler (4.36) denkleminde yerine yazılırsa,

$$y_0(x) = 1$$

$$y_1(x) = 1 + \frac{5h}{2} x^2$$

$$y_2(x) = 1 + (5h + \frac{5h^2}{2}) \cdot x^2 + \frac{10h^2}{3} \cdot x^3 + \frac{25h^2}{24} \cdot x^4$$

⋮

şeklinde çözüm elde edilir.

Adomian Decomposition Metodu ile Çözüm:

$y'' + 4y' + 5y = 0$ diferansiyel denkleminin yaklaşık çözümünü ADM ile bulmak için başlangıç koşulu $y(0) = 1$ ve $y'(0) = 0$ den $y_0(x) = 1$ alınabilir. Bu denklem aşağıdaki gibi

$$L_x y + 4 \cdot \left(\frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} y_n \right) + 5 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} y_n = 0 \quad (4.37)$$

operatör formunda yazılır. Burada $L_x = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ lineer operatör olarak ifade edilmektedir. Ayrıca yine L_x^{-1}

integral operatörü olup $L_x^{-1} = \int_0^x \int_0^x (\cdot) dx$ şeklinde gösterilir. (4.37) denkleminin her iki tarafına soldan

L_x^{-1} uygulanırsa,

$$L_x^{-1} L_x y + 4 \cdot L_x^{-1} \left(\frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} y_n \right) + 5 \cdot L_x^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} y_n = L_x^{-1} [0] \quad (4.38)$$

elde edilir. Buradan

$$y(x) = y_0(x) - L^{-1} \left(4 \cdot \left(\frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} y_n \right) \right) - L^{-1} \left[5 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} y_n \right] \quad (4.39)$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned} y_1(x) &= -L^{-1}[4 \cdot y_0'(x) + 5 \cdot y_0(x)] \\ y_2(x) &= -L^{-1}[4 \cdot y_1'(x) + 5 \cdot y_1(x)] \\ y_3(x) &= -L^{-1}[4 \cdot y_2'(x) + 5 \cdot y_2(x)] \\ &\vdots \end{aligned}$$

yazılarak,

$$\begin{aligned} y_0(x) &= 1 \\ y_1(x) &= -\frac{5}{2} \cdot x^2 \\ y_2(x) &= \frac{10}{3} \cdot x^3 + \frac{25}{24} \cdot x^4 \\ y_3(x) &= -\frac{10}{3} \cdot x^4 - \frac{5}{3} \cdot x^5 - \frac{25}{144} \cdot x^6 \\ &\vdots \end{aligned}$$

şeklindeki ayrışım serisinin ilk üç terimi bulunur. Bulunan $y_0, y_1, y_2, y_3, \dots$ terimleri için verilen denklemin yaklaşık çözümü

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x) = y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + \dots \\ &= 1 - \frac{5}{2} \cdot x^2 + \frac{10}{3} \cdot x^3 - \frac{55}{24} \cdot x^4 - \frac{5}{3} \cdot x^5 - \frac{25}{144} \cdot x^6 + \dots \end{aligned}$$

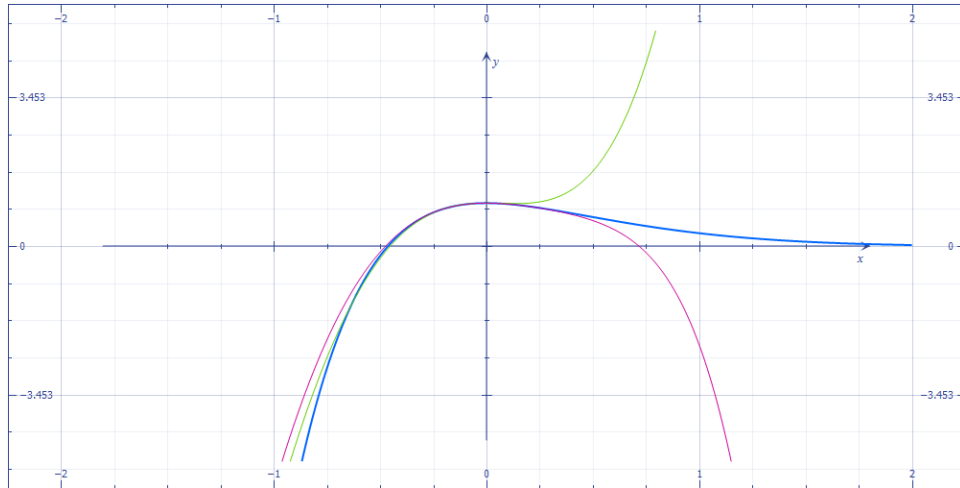
olarak elde edilir.

Şimdi ise model problemin Homotopi Analiz, Adomian metotları ile çözümü yanında bunun tam çözümünü $x = 0.1$ için tablo ile gösterip, şeklini ise 2-boyutlu ve 3-boyutlu grafik üzerinde karşılaştıralım:

Tablo 4.7. Homotopi Analiz ve Adomian Metodu Çözümlerinin Tam Çözüm ile Karşılaştırılması

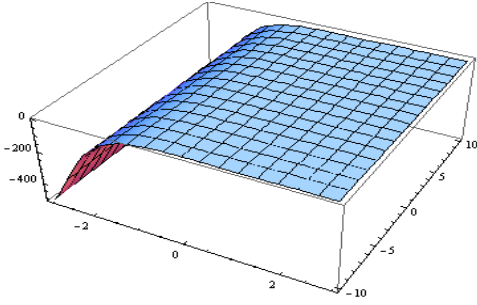
\hbar	Homotopi Analiz Çözümü	Adomian Çözümü	Tam Çözüm	Homotopi Analiz Çözümü için Mutlak Hata	Adomian Çözümü için Mutlak Hata
-0.1	0.995284	0.978087	0.978114	1.7170×10^{-2}	2.7×10^{-5}
-0.2	0.991138	0.978087	0.978114	1.3024×10^{-2}	2.7×10^{-5}
-0.3	0.987559	0.978087	0.978114	9.4450×10^{-3}	2.7×10^{-5}
-0.4	0.984550	0.978087	0.978114	6.4360×10^{-3}	2.7×10^{-5}
-0.5	0.982109	0.978087	0.978114	3.9950×10^{-3}	2.7×10^{-5}
-0.6	0.980238	0.978087	0.978114	2.1240×10^{-3}	2.7×10^{-5}
-0.7	0.978934	0.978087	0.978114	8.2000×10^{-4}	2.7×10^{-5}
-0.8	0.978200	0.978087	0.978114	8.6000×10^{-5}	2.7×10^{-5}
-0.81	0.978158	0.978087	0.978114	4.4000×10^{-5}	2.7×10^{-5}
-0.82	0.978121	0.978087	0.978114	7.0000×10^{-6}	2.7×10^{-5}
-0.822	0.978115	0.978087	0.978114	1.0000×10^{-6}	2.7×10^{-5}
-0.8221	0.978114	0.978087	0.978114	0	2.7×10^{-5}

Tablo 4.7' de görüldüğü gibi $x = 0.1$ için Homotopi Analiz metodu ile çözüm $x = -0.8221$ noktasında tam çözüme en iyi yakınsamaktadır. Bu noktadan sonra artan değerler verildiğinde sonucun tam çözümden uzaklaştığı görülür.

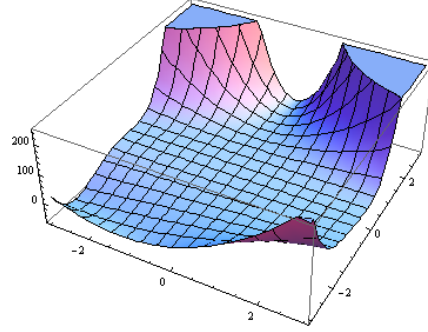


Şekil 4.7: Grafikte mavi renkle gösterilen şekil tam çözümün, yeşil renk ile gösterilen şekil Homotopi Analiz çözümünün, pembe renk ile gösterilen şekil ise Adomian çözümünün grafiğidir.

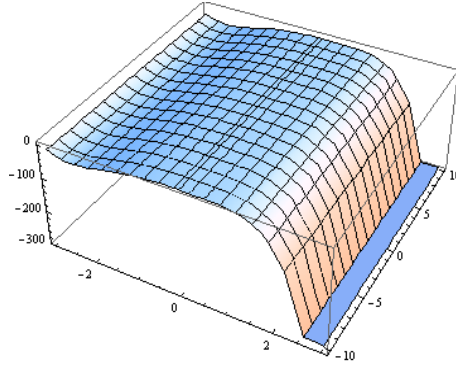
Çözümlerin üç boyutlu grafikleri aşağıda gösterilen şekillerdeki gibidir:



TAM ÇÖZÜM



HOMOTOPİ ANALİZ ÇÖZÜMÜ



ADOMİAN ÇÖZÜMÜ

Örnek 4.8. $y' = \frac{2x}{y \cdot (1+x^2)}$, $y(0) = -2$ denklemini Homotopi Analiz metodu ile çözelim:

Başlangıç şartına uygun olacak şekilde başlangıç yaklaşımı $y_0(x) = x - 2$ olarak seçilsin. Buna

ilaveten yardımcı lineer operatör $L[\phi(x; q)] = \frac{\partial \phi(x; q)}{\partial x}$ ve non-lineer operatör ise

$$N[\phi(x; q)] = \frac{\partial \phi(x; q)}{\partial x} \cdot \phi(x; q) \cdot [1 + x^2] - 2x$$

olsun. Böylece $q \in [0, 1]$ gömülü parametre, $h \neq 0$ bir yardımcı parametre ve $H(x) = 1$ bir yardımcı fonksiyon olmak üzere sıfıncı dereceden deformasyon denklemi,

$$(1 - q) \cdot L[\phi(x; q) - y_0(t)] = q \cdot h \cdot H(x) \cdot N[\phi(x; q)]$$

biçiminde ifade edilir. Burada

$$q = 0 \text{ için } \phi(x;0) = y_0(x)$$

$$q = 1 \text{ için } \phi(x;1) = y(x)$$

bulunur. Diğer yandan

$$y_m(x) = \frac{1}{m!} \left. \frac{\partial^m \phi(x;q)}{\partial q^m} \right|_{q=0}, \quad \phi(x;q) = \phi(x;0) + \sum_{m=1}^{+\infty} y_m(x) \cdot q^m, \quad \vec{y}_n(x) = \{y_0(x), y_1(x), \dots, y_n(x)\}$$

denklemlerine göre sıfırıncı dereceden deformasyon denkleminin m defa q ' ya göre türevinin alınıp $m!$ ile bölünmesiyle m . mertebeden deformasyon denklemi

$$L[y_m(x) - \chi_m y_{m-1}(x)] = \hbar \cdot H(x) \cdot R_m[\vec{y}_{m-1}(x)]$$

biçiminde elde edilir. Burada başlangıç şartı $y_m(0) = -2$ ' dir. Bu denklem çözüldüğünde,

$$y_m(x) = \chi_m y_{m-1}(x) + \hbar \cdot \int_0^x H(x) \cdot R_m[\vec{y}_{m-1}(x)] \cdot dx \quad (4.40)$$

olur. Burada,

$$R_m[\vec{y}_{m-1}(x)] = y_{m-1}'(x) \cdot y_{m-1}(x) \cdot (1+x^2) - 2x$$

dir. m yerine sırasıyla 1,2,3,... yazılarak $R_1[\vec{y}_0(x)], R_2[\vec{y}_1(x)], \dots$ ifadeleri bulunur ve bulunan bu değerler (4.40) denkleminde yerine yazılırsa,

$$y_0(x) = x - 2$$

$$y_1(x) = \hbar \cdot \left[\frac{x^4}{4} - x^3 - \frac{x^2}{2} - 2x \right] - 2$$

⋮

şeklinde çözüm elde edilir.

Differential Transform Metodu ile Çözüm:

Verilen model denklemin transformu alınır,

$$\sum_{r=0}^k (r+1) \cdot Y(r+1) \cdot Y(k-r) + \sum_{r=0}^k \left[\left(\sum_{r=0}^k (r+1) \cdot Y(r+1) \cdot Y(k-r) \right) \cdot \delta(k-2-r) \right] - 2\delta(k-1) = 0 \quad (4.41)$$

elde edilir. (4.41) denkleminde $k = 0, 1, \dots$ yazıldığında,

$$Y(0) = -2, Y(1) = 0, Y(2) = -1/2, Y(3) = 0, Y(4) = 5/16, \dots$$

bulunur. Bu katsayılar yerine yazıldığında,

$$y(x) = -2 - \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{5}{16} \cdot x^4 + \dots$$

seri biçimindeki sonuca ulaşılır.

Adomian Decomposition Metodu ile Çözüm:

$y' = \frac{2x}{y \cdot (1+x^2)}$ diferansiyel denkleminin yaklaşık çözümünü ADM ile bulmak için başlangıç koşulu

$y(0) = -2$ den $y_0(x) = -2$ alınabilir. Burada $L_x = \frac{\partial y}{\partial x}$ lineer operatör ve lineer olmayan terim ise

$N(y) = y^{-1}$ olarak ifade edilmektedir. Ayrıca yine L_x^{-1} integral operatörü olup $L_x^{-1} = \int_0^x (\cdot) dx$ şeklinde

gösterilir. Lineer olmayan terim $\sum_{n=0}^{\infty} A_n$ 'e eşitlenip, model olarak alınan denklem operatör formunda yazıldığında,

$$L_x y = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \quad (4.42)$$

olur. (4.42) denkleminin her iki tarafına soldan L_x^{-1} uygulanırsa,

$$L_x^{-1} L_x y = L_x^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n + y_0(x) \quad (4.43)$$

elde edilir. Buradan

$$y(x) = y_0(x) + L^{-1} \left[\sum_{n=0}^{\infty} A_n \right] \quad (4.44)$$

dir. Böylece

$$y_1(x) = L^{-1}[A_0]$$

$$y_2(x) = L^{-1}[A_1]$$

$$y_3(x) = L^{-1}[A_2]$$

⋮

yazılarak,

$$y_0(x) = -2$$

$$y_1(x) = -\frac{1}{2} \cdot \ln |1 + x^2|$$

$$y_2(x) = \frac{1}{16} \cdot (\ln |1 + x^2|)^2$$

⋮

şeklindeki ayrışım serisinin ilk üç terimi bulunur. Bulunan y_0, y_1, y_2 terimleri için verilen denklemin yaklaşık çözümü

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x) = y_0 + y_1 + y_2 + \dots$$

$$= -2 - \frac{1}{2} \cdot \ln |1 + x^2| + \frac{1}{16} (\ln |1 + x^2|)^2 + \dots$$

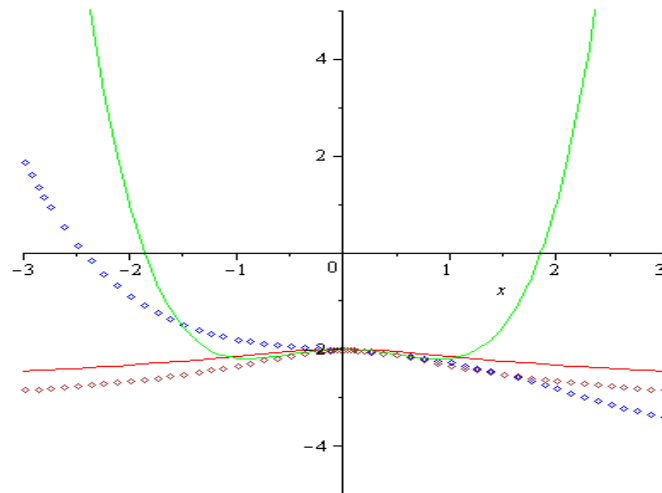
olarak elde edilir.

Şimdi ise model problemin Homotopi Analiz, DTM, Adomian metotları ile çözümü yanında bunun tam çözümünü $x = 0.1$ için tablo ile gösterip, şeklini ise 2-boyutlu ve 3-boyutlu grafik üzerinde karşılaştıralım:

Tablo 4.8. Homotopi Analiz, DTM ve Adomian Metodu Çözümlerinin Tam Çözüm ile Karşılaştırılması

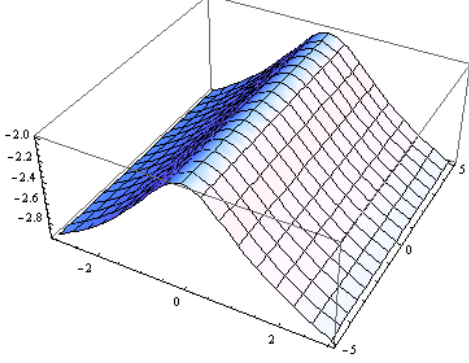
\hbar	Homotopi Analiz Çözümü	Adomian Çözümü	DTM Çözümü	Tam Çözüm	Homotopi Analiz Çözümü için Mutlak Hata	Adomian Çözümü için Mutlak Hata	DTM Çözümü için Mutlak Hata
-1	-1.79403	-2.00497	-2.00497	-2.00497	2.1094×10^{-1}	0	0
-0.8	-1.83522	-2.00497	-2.00497	-2.00497	1.6965×10^{-1}	0	0
-0.6	-1.87642	-2.00497	-2.00497	-2.00497	1.2855×10^{-1}	0	0
-0.4	-1.91761	-2.00497	-2.00497	-2.00497	8.7360×10^{-1}	0	0
-0.2	-1.95881	-2.00497	-2.00497	-2.00497	4.6160×10^{-1}	0	0
-0.1	-1.97940	-2.00497	-2.00497	-2.00497	2.5570×10^{-1}	0	0
0.02	-2.00412	-2.00497	-2.00497	-2.00497	8.5000×10^{-1}	0	0
0.024	-2.00494	-2.00497	-2.00497	-2.00497	3.0000×10^{-1}	0	0
0.02412	-2.00497	-2.00497	-2.00497	-2.00497	0	0	0

Tablo 4.8' de görüldüğü gibi $x = 0.1$ için Homotopi Analiz metodu ile çözüm $x = 0.02412$ noktasında tam çözüme en iyi yakınsamaktadır. Bu noktadan sonra artan değerler verildiğinde sonucun tam çözümden uzaklaştığı görülür.

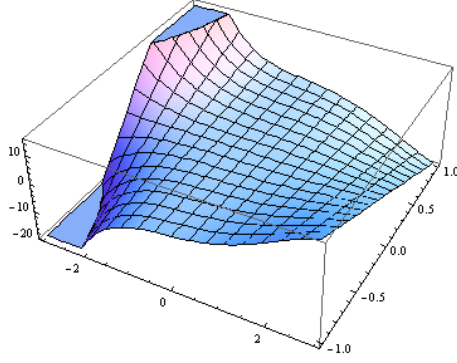


Şekil 4.8: Grafikte kırmızı renk ile gösterilen şekil tam çözümün, mavi renk ile gösterilen şekil Homotopi Analiz çözümünün, yeşil renk ile gösterilen şekil DTM çözümünün, mor renk ile gösterilen şekil ise Adomian çözümünün grafiğidir.

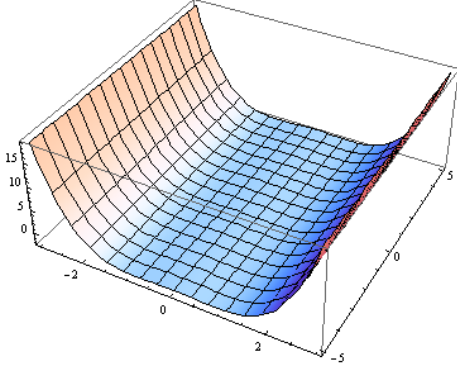
Çözümlerin üç boyutlu grafikleri aşağıda gösterilen şekillerdeki gibidir:



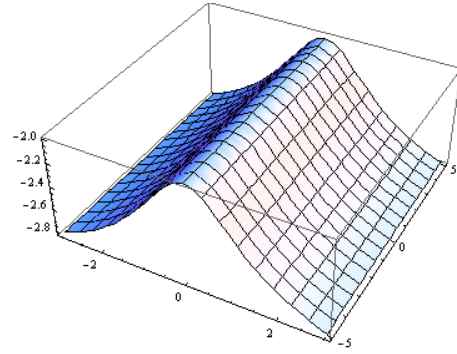
TAM ÇÖZÜM



HOMOTOPİ ANALİZ ÇÖZÜMÜ



DTM ÇÖZÜMÜ



ADOMİAN ÇÖZÜMÜ

Örnek 4.9. $y' = \frac{x^2 - 1}{y^2 + 1}$, $y(-1) = 1$ denklemini Homotopi Analiz metodu ile çözelim:

Başlangıç şartına uygun olacak şekilde başlangıç yaklaşımı $y_0(x) = \cos(x + 1)$ olarak seçilsin.

Buna ilaveten yardımcı lineer operatör $L[\phi(x; q)] = \frac{\partial \phi(x; q)}{\partial x}$ ve non-lineer operatör ise

$$N[\phi(x; q)] = \frac{\partial \phi(x; q)}{\partial x} \cdot (\phi^2(x; q) + 1) - x^2 + 1$$

olsun. Böylece $q \in [0,1]$ gömülü parametre, $h \neq 0$ bir yardımcı parametre ve $H(x) = 1$ bir yardımcı fonksiyon olmak üzere sıfıncı dereceden deformasyon denklemi,

$$(1-q) \cdot L[\phi(x; q) - y_0(x)] = q \cdot h \cdot H(x) \cdot N[\phi(x; q)]$$

biçiminde ifade edilir. Burada

$$q = 0 \text{ için } \phi(x; 0) = y_0(x)$$

$$q = 1 \text{ için } \phi(x; 1) = y(x)$$

bulunur. Diğer yandan

$$y_m(x) = \frac{1}{m!} \left. \frac{\partial^m \phi(x; q)}{\partial q^m} \right|_{q=0}, \quad \phi(x; q) = \phi(x; 0) + \sum_{m=1}^{+\infty} y_m(x) \cdot q^m, \quad \vec{y}_n(x) = \{y_0(x), y_1(x), \dots, y_n(x)\}$$

denklemlerine göre sıfıncı dereceden deformasyon denkleminin m defa q ' ya göre türevinin alınıp $m!$ ile bölünmesiyle m . mertebeden deformasyon denklemi

$$L[y_m(x) - \chi_m y_{m-1}(x)] = h \cdot H(x) \cdot R_m[\vec{y}_{m-1}(x)]$$

biçiminde elde edilir. Burada başlangıç şartı $y_m(-1) = 1$ ' dir. Bu denklem çözüldüğünde,

$$y_m(x) = \chi_m y_{m-1}(x) + h \cdot \int_0^x H(x) \cdot R_m[\vec{y}_{m-1}(x)] \cdot dx \quad (4.45)$$

olur. Burada,

$$R_m[\vec{y}_{m-1}(x)] = y_{m-1}'(x) \cdot \left[\sum_{i=0}^{m-1} y_i(x) \cdot y_{m-1-i}(x) + 1 \right] - x^2 + 1$$

dir. m yerine sırasıyla $1, 2, 3, \dots$ yazılarak $R_1[\vec{y}_0(x)], R_2[\vec{y}_1(x)], \dots$ ifadeleri bulunur ve bulunan bu değerler (4.45) denkleminde yerine yazılırsa,

$$y_0(x) = \cos(x+1)$$

$$y_1(x) = \hbar \cdot \left[\frac{\cos^3(x+1)}{3} + \cos(x+1) - \frac{x^3}{3} + x \right] + 1$$

$$\vdots$$

şeklinde çözüm elde edilir.

Adomian Decomposition Metodu ile Çözüm:

$y' = \frac{x^2 - 1}{y^2 + 1}$ diferansiyel denkleminin yaklaşık çözümünü ADM ile bulmak için başlangıç koşulu

$y(-1) = 1$ den $y_0(x) = -x$ alınabilir. Burada $L_x = \frac{\partial y}{\partial x}$ olarak ifade edilmektedir. Ayrıca yine L_x^{-1}

integral operatörü olup $L_x^{-1} = \int_0^x (\cdot) dx$ şeklinde gösterilir. Lineer olmayan terim $\sum_{n=0}^{\infty} A_n$ 'e eşitlenir ve model olarak alınan denklem

$$L_x y = x^2 - 1 - \sum_{n=0}^{\infty} A_n \quad (4.46)$$

şeklinde operatör formunda yazılır. (4.46) denkleminin her iki tarafına soldan L_x^{-1} uygulanırsa,

$$L_x^{-1} L_x y = L_x^{-1} [x^2 - 1] - L_x^{-1} \left[\sum_{n=0}^{\infty} A_n \right] \quad (4.47)$$

elde edilir. Buradan

$$y(x) = y_0(x) + L_x^{-1} [x^2 - 1] - L_x^{-1} \left[\sum_{n=0}^{\infty} A_n \right] \quad (4.48)$$

olur. Böylece

$$y_1(x) = -L_x^{-1} [A_0]$$

$$y_2(x) = -L_x^{-1} [A_1]$$

$$y_3(x) = -L_x^{-1} [A_2]$$

$$\vdots$$

yazılarak,

$$\begin{aligned} y_0(x) &= -x \\ y_1(x) &= \frac{x^3}{3} \\ y_2(x) &= \frac{2}{15}x^5 \\ y_3(x) &= \frac{17}{315}x^7 \\ &\vdots \end{aligned}$$

olarak ayrışım serisinin ilk dört terimi bulunur. Böylece bulunan y_0, y_1, y_2, y_3 terimleri için verilen denklemin yaklaşık çözümü

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x) = y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + \dots \\ &= -2x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \dots \end{aligned}$$

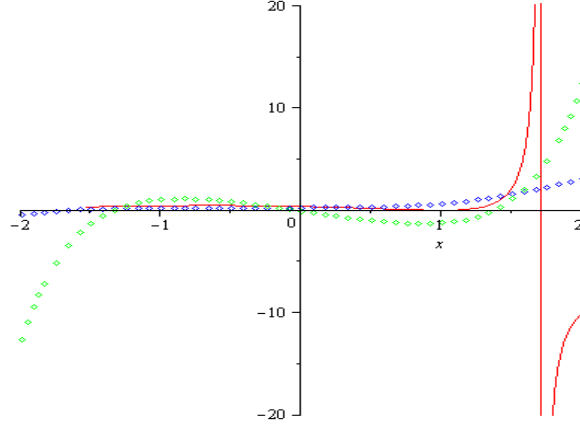
olarak elde edilir.

Şimdi ise model problemin Homotopi Analiz, Adomian metotları ile çözümünü yanında bunun tam çözümünü $x = 0.1$ için tablo ile gösterip, şeklini ise 2-boyutlu ve 3-boyutlu grafik üzerinde karşılaştıralım:

Tablo 4.9. Homotopi Analiz ve Adomian Metodu Çözümlerinin Tam Çözüm ile Karşılaştırılması

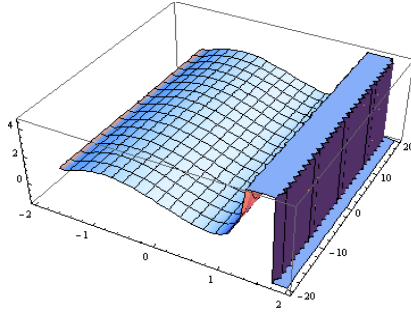
\hbar	Homotopi Analiz Çözümü	Adomian Çözümü	Tam Çözüm	Homotopi Analiz Çözümü için Mutlak Hata	Adomian Çözümü için Mutlak Hata
-1	0.415628	-0.199332	0.345822	6.9806×10^{-2}	5.45154×10^{-1}
-1.1	0.357191	-0.199332	0.345822	1.1369×10^{-2}	5.45154×10^{-1}
-1.111	0.350763	-0.199332	0.345822	4.9410×10^{-3}	5.45154×10^{-1}
-1.114	0.349010	-0.199332	0.345822	3.1880×10^{-3}	5.45154×10^{-1}
-1.116	0.347841	-0.199332	0.345822	2.0190×10^{-3}	5.45154×10^{-1}
-1.118	0.346672	-0.199332	0.345822	8.5000×10^{-4}	5.45154×10^{-1}
-1.1194	0.345854	-0.199332	0.345822	3.2000×10^{-5}	5.45154×10^{-1}
-1.119455	0.345822	-0.199332	0.345822	0	5.45154×10^{-1}

Tablo 4.9' de görüldüğü gibi $x = 0.1$ için Homotopi Analiz metodu ile çözüm $x = -1.119455$ noktasında tam çözüme en iyi yakınsamaktadır. Bu noktadan sonra artan değerler verildiğinde sonucun tam çözümden uzaklaştığı görülür. $x = 0.1$ noktası üzerinde de en iyi yakınsamayı ise Homotopi Analiz çözümü vermiştir.

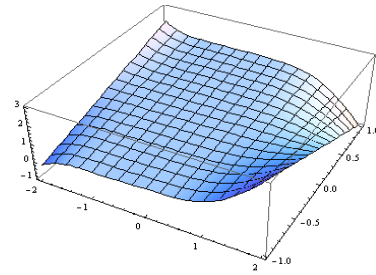


Şekil 4.9: Grafikte kırmızı renkle gösterilen şekil tam çözümün, mavi renk ile gösterilen şekil Homotopi Analiz çözümünün, yeşil renk ile gösterilen şekil Adomian çözümünün grafiğidir.

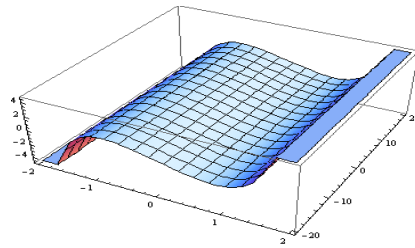
Çözümlerin üç boyutlu grafikleri aşağıda gösterilen şekillerdeki gibidir:



TAM ÇÖZÜM



HOMOTOPİ ANALİZ ÇÖZÜMÜ



ADOMIAN ÇÖZÜMÜ

SONUÇ

Lyapunov' un yapay küçük parametre metodu, δ - açılım metodu, Adomian Decomposition metodu, Diferansiyel Dönüşüm metodu ve Homotopi Analiz metodu gibi metotlar bazı dezavantajlara sahip olmalarına karşın, pertürbasyon veya pertürbasyon uygulanmayan metotlar ile karşılaştırıldığında Homotopi Analiz metodu farklı taban fonksiyonları ile verilen bir lineer olmayan problemin çözümünde bazı kolaylıkları da ortaya koyar. Böylece taban fonksiyonlarının özel bir cümlesi seçilerek bir lineer olmayan probleme daha etkili bir biçimde yaklaşılabilir. Çünkü yakınsaklık bölgesi ve serilerin oranı, çözümde kullanılan taban fonksiyonlarıyla belirlenir.

Homotopi Analiz metodu; başlangıç yaklaşımı, yardımcı lineer operatör, yardımcı fonksiyon ve yardımcı \hbar parametresinin seçiminde bize büyük bir serbestlik sağlar. Sadece, çözüm serilerinin yakınsaklığını sağlamak için özel başlangıç yaklaşımları, yardımcı lineer operatörler, yardımcı fonksiyonlar ve özel \hbar değerlerinin seçimi üzerine odaklanılır.

Bunun yanında yaklaşık çözümler içerisinde Adomian' s Decomposition metodu, tüm metotlar içerisinde tam çözüme en iyi yaklaşımı veren metot olup, ikinci derecede en iyi yaklaşımı ise Homotopi Analiz metodu ortaya koymaktadır. DTM ise çoğu zaman diğer metotlar ile karşılaştırıldığında en az yaklaşımı gerçekleştiren metot olarak gözlemlenmiştir.

KAYNAKLAR

- [1] S.J. Liao, Comparison between the Homotopy Analysis Method and Homotopy Perturbation Method, *Appl. Math. Comput.*, 169, 2005.
- [2] A.V. Karmishin, A.I. Zhukov, V.G. Kolosov, *Methods of Dynamics Calculation and Testing for Thin-walled Structures*, Mashinostroyenie, Moscow, 1990.
- [3] S.J. Liao, An Explicit, Totally Analytic Approximation of Blasius' Viscous Flow Problems, *Int. J. Non-Linear Mech.*, 34, pp: 759–778, 1999.
- [4] M. Ayub, A. Rasheed, T. Hayat, Exact Flow of a Third Grade Fluid Past a Porous Plate using Homotopy Analysis Method, *Int. J. Eng. Sci.*, 41 pp:2091-2103, 2003.
- [5] A.M. Lyapunov, *General Problem on Stability of Motion (English Translation)*, Taylor and Francis, London, 1992.
- [6] S.J. Liao, *The Proposed Homotopy Analysis Technique for the Solution of Non-linear Problems*, Ph. D. Thesis, Shanghai Jiao Tong University, 1992.
- [7] S.J. Liao, *Beyond Perturbation: Introduction to the Homotopy Analysis Method*, Chapman and Hall/CRC Press, Boca Raton, 2003.
- [8] S.J. Liao, On the Homotopy Analysis Method for Non-linear Problems, *Appl. Math. Comput.* 147, pp: 499–513, 2004.
- [9] A.H. Nayfeh, *Perturbation Methods*, John Wiley and Sons, New York, 2000.
- [10] A.M. Siddiquia, R. Mahmoodb, Q.K. Ghorib, Homotopy Perturbation Method for Thin Film Flow of a Fourth Grade Fluid Down a Vertical Cylinder, *Phys. Lett. A* 352, pp: 404–410, 2006
- [11] Hatice Bayramođlu, *Dalga Denklemlerinin Decomposition Metod ile Çözümü Üzerine*, Yüksek Lisans Tezi, Celal Bayar Üniversitesi, Manisa, 2001.
- [12] F. Ayaz, Solution of the system of differential equations by differential transform method, *Applied Mathematics and Computation*, 147, pp. 547-567, 2004.

ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı : Şeyma ERDOĞAN

Baba Adı : Mehmet Ali

Ana Adı : Hülya

Doğum Tarihi : 19 / 09 / 1987

Doğum Yeri : İskenderun / HATAY

19.09.1987 yılında İskenderun' da doğdum. İlkokulu Dumlupınar İlköğretim Okulun' da, ortaokulu İnönü İlköğretim Okulu' nda, Liseyi Şemsettin Mursaloğlu Lisesi' nde okudum. 2005 yılında Celal Bayar Üniversitesi Fen- Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nü kazandım. Dört yıllık eğitimim sonunda Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Uygulamalı Matematik Programı'nda Yüksek Lisansa başladım.