T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI LİNEER OLMAYAN KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÖZEL DÖNÜŞÜMLER YARDIMIYLA DALGA ÇÖZÜMLERİ VE BU ÇÖZÜMLERİN ANALİZLERİ

DOKTORA TEZİ

Serbay DURAN

Anabilim Dalı: Matematik

Programı: Uygulamalı Matematik

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Doğan KAYA

NİSAN–2012

T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI LİNEER OLMAYAN KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÖZEL DÖNÜŞÜMLER YARDIMIYLA DALGA ÇÖZÜMLERİ VE BU ÇÖZÜMLERİN ANALİZLERİ

DOKTORA TEZİ

Serbay DURAN
(06221202)

Anabilim Dalı: Matematik
Programı: Uygulamalı Matematik

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Doğan KAYA

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 03.04.2012

NİSAN–2012

T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI LİNEER OLMAYAN KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÖZEL DÖNÜŞÜMLER YARDIMIYLA DALGA ÇÖZÜMLERİ VE BU ÇÖZÜMLERİN ANALİZLERİ

DOKTORA TEZİ

Serbay DURAN
(06221202)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 03.04.2012
Tezin Savunulduğu Tarih: 24.04.2012

Tez Danışmanı:	**Prof. Dr. Doğan KAYA (İTÜCÜ)**
Diğer Jüri Üyeleri:	**Prof. Dr. Etibar PENAHLI (F.Ü)**
	Prof. Dr. Ahmet Refik BAHADIR (İ.Ü)
	Prof. Dr. Necdet ÇATALBAŞ (F.Ü)
	Yrd. Doç. Dr. İbrahim Enam İNAN (F.Ü)

NİSAN-2012

ÖNSÖZ

Bu tezin planlanması ve yürütülmesinde, çalışmalarım süresince benden destek ve ilgilerini esirgemeyen, bilgi ve hoşgörülerinden yararlandığım sayın hocam Prof. Dr. Doğan KAYA'ya şükranlarımı sunmayı bir borç bilirim.

Tez çalışmalarım boyunca benden yardımlarını, desteğini, sabrını ve bilgisini esirgemeyen Yrd. Doç. Dr. İbrahim Enam İNAN, Yrd. Doç. Dr. Yavuz UĞURLU, Bülent KILIÇ ve Fırat Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümünün öğretim elemanlarına teşekkür ederim.

Ayrıca, bu güne kadar bana verdikleri destek, sevgi, saygı ve başarılı olacağıma her zaman inandıkları için Adıyaman Üniversitesindeki tüm hocalarıma ve mesai arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Serbay DURAN

ELAZIĞ–2012

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖNSÖZ II
İÇİNDEKİLER III
ÖZET IV
SUMMARY V
ŞEKİLLER LİSTESİ VI
1. GİRİŞ 1
1.1. Temel Tanımlar..10
2. LİNEER OLMAYAN KISMİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN DALGA ÇÖZÜMLERİ İÇİN BAZI ANALİTİK METOTLAR 15
2.1. Analitik Metotlar ve Analizleri..15
2.1.1. Metotların Tarihçesi 15
3. LİNEER OLMAYAN KISMİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN DALGA ÇÖZÜMLERİ İÇİN BAZI UYGULAMALAR 24
3.1. Burgers Denkleminin Bazı Dalga Çözümleri 26
3.2. KdV Denkleminin Bazı Dalga Çözümleri...33
3.3. Sığ Su Dalga Denklem Sisteminin Bazı Dalga Çözümleri...............................38
4. BURGERS DENKLEMİ, KDV DENKLEMİ VE SIĞ SU DALGA DENKLEM SİSTEMİ İÇİN DALGA ÇÖZÜMLERİNİN GENELLEŞTİRİLMESİ.....................58
5. SONUÇ 63
KAYNAKLAR 64
ÖZGEÇMİŞ 70

ÖZET

Bu çalışma beş bölüm halinde oluşturulmuştur.

Birinci bölümde temel tanımlar verilmiştir.

İkinci bölümde, lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin dalga çözümlerini elde etmek için kullanılan bazı metotların tarihsel olarak analizi yapılmıştır. Bu metotların hepsi göz önüne alınan denklemlerde en yüksek mertebeden lineer olan terim ile en yüksek mertebeden lineer olmayan terimin dengelenmesiyle dengeleme terimini bulma esasına dayanır. Bu yüzden bu metotlar sadece lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlere uygulanabilir. Ayrıca, bu metotlar bir kısmi diferensiyel denklemi bir adi diferensiyel denkleme dönüştürür. Böylece çözüme daha kolay ulaşılabilir.

Üçüncü bölümde, ikinci bölümde analizleri yapılan metotlardan Kudryashov metodundan ilham alarak bu metotta kullanılan Bernoulli yardımcı denklemi üzerinde bazı genişlemeler yapılarak Bernoulli denklemi $F' = BF^n - AF$ şeklinde seçilmiştir. Bu yardımcı denklemde $n = 2$ ve $n = 3$ alınarak Burgers denklemi, KdV denklemi ve sığ su dalga denklem sistemi için bazı dalga çözümleri elde edilmiştir.

Dördüncü bölümde, üçüncü bölümde elde edilen dalga çözümlerinin genelleştirilmesi yapılarak n için formülize edilmiştir.

Beşinci bölümde, bu çalışmada elde edilen sonuçlar literatürde bulunan çalışmalar ile desteklenerek genel bir değerlendirme yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Solitary dalgalar, Solitonlar, Dengeleme terimi, Analitik metot, Dalga çözümü, Kudryashov metot, Burgers denklemi, KdV denklemi, Sığ su dalga denklem sistemi.

SUMMARY

Solutions of Some Nonlinear Partial Differential Equations by Using Special Transformations and Analysis of These Solutions

This study was formed into five sections.

In the first section, the basic definitions were given.

In the second section, historical analysis of some of the methods used to obtain wave solutions of nonlinear partial differential equations was conducted. All these methods are based on finding the balance term, for the equation that take into account, balancing the higher order linear term with higher order nonlinear term. So these methods can be applied only non-linear partial differential equations. Furthermore these methods convert a partial differential equation into an ordinary differential equation. Thus, it can be reached more easily to the solution.

In the third section, from the analyzed methods in second section by taking inspiration to the Kudryashov method, by being made some expansions on the auxiliary Bernoulli equation which is used in this method, Bernoulli equation was chosen in the form of $F' = BF^n - AF$. In this auxiliary, equation by taking $n = 2$ and $n = 3$ some wave solutions have been obtained for Burgers equation, KdV equation and the shallow water wave equation system.

In the fourth section, the wave solutions obtained by the generalization was formulated for n in the third section.

In the fifth section, it was made a general assessment by the obtained results in this study have been supported with the studies in the literature.

Keywords: Solitary waves, Solitons, Balance term, Analytical method, Wave solution, Kudryashov method, Burgers equation, KdV equation, System of the shallow water wave equation.

ŞEKİLLER LİSTESİ

Sayfa No

Şekil 1. Gerilmiş bir ip üzerinde ilerleyen enine dalga…………………………………. 2

Şekil 2. Bir boyutta dalga atmasının sağa doğru v hızı ile ilerlemesi………………….. 3

Şekil 3. Bir solitary dalga……………………………………………………………..… 4

Şekil 4. İki solitonun etkileşimi……………………………………………………..... 6

Şekil 5. (3.10) denkleminin (3.19) çözümü için üç boyutlu dalga görünümü…………...28

Şekil 6. (3.10) denkleminin (3.19) çözümü için iki boyutlu dalga görünümü…………...29

Şekil 7. (3.10) denkleminin (3.37) çözümü için üç boyutlu dalga görünümü……………32

Şekil 8. (3.49) denkleminin (3.56) çözümü için üç boyutlu dalga görünümü……………35

Şekil 9. (3.49) denkleminin (3.56) çözümü için iki boyutlu dalga görünümü…………...36

Şekil 10. (3.49) denkleminin (3.66) çözümü için üç boyutlu dalga görünümü……….…38

Şekil 11. (3.72) denklem sisteminin (3.86) çözümü için üç boyutlu dalga görünümü ..…43

Şekil 12. (3.72) denklem sisteminin (3.86) $u(x,t)$ çözümü için iki boyutlu……………… dalga görünümü…………………..…………………………………………..…44

Şekil 13. (3.72) denklem sisteminin (3.86) $v(x,t)$ çözümü için iki boyutlu……………… dalga görünümü…………………..…………………………………………..…45

Şekil 14. (3.72) denklem sisteminin (3.120) çözümü için üç boyutlu dalga görünümü 54

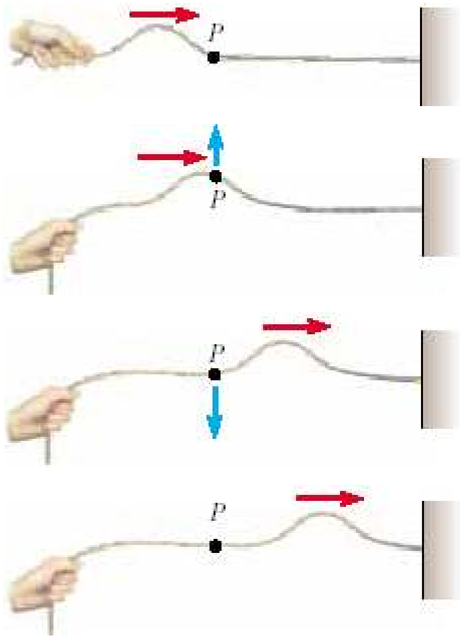
1. GİRİŞ

Günümüz dünyasında hayatımızı etkileyen ve yaşamımıza yön veren birçok olay dalga kavramı ile açıklanır. Deprem esnasında yeryüzündeki hareketler ve bu hareketlenme ile okyanuslarda meydana gelen büyük su dalgaları (tsunami), radyo, televizyon ve cep telefonları gibi hayatımızı kolaylaştıran elektronik cihazların doğasında bulunan elektromanyetik dalgalar, insanlar ve diğer canlılar ile iletişim kurmak için var olan ses dalgaları gibi dalgalar örnek verilebilir. Yukarıda bahsedilen olayların hepsinin matematiksel modellemesi diferensiyel denklemler ile açıklanabilir. Bu diferensiyel denklemlerin çözümleri, modellemesi yapılan olayların doğası hakkında insanlara çok büyük katkılar sağlar. Bu yüzden diferensiyel denklemlerin çözümlerine olan ilgi her geçen gün daha da artmıştır. Bu ilgi ile birlikte diferensiyel denklemlerin çözümlerinde kullanılan birçok teknik ve metot geliştirilmiştir.

Dalga kavramını birçok farklı açıdan ele alabiliriz. Su yüzeyine bakıldığında, su dalgası olarak adlandırılıp görülen olay aslında su yüzeyinin yeni bir düzene geçmesi olarak tarif edilebilir. Bir cisim veya ortamdaki sarsıntıya karşılık gelen olay *dalga* olarak adlandırılabilir. Su dalgası gözlemlendiği zaman, su yüzeyinin yeniden düzenlendiği görülebilir. Eğer su olmasa dalgada olmayacaktır. Sarmal yay olmasa, üzerinde ilerleyen bir dalga olmayacaktır. Ses dalgalarının hava içerisinde bir noktadan diğer bir noktaya ilerlemesi basınç değişimi sonucunda ortaya çıkar. Bu nedenle, bir dalgaya sarsıntının hareketi olarak bakılabilir. Sarsıntının hareketi (yani dalganın kendisi ya da ortamın durumu), parçacıkların hareketi ile karıştırılmamalıdır. Bir havuza bir çakıl taşı atıldığında çakıl taşının oluşturduğu sarsıntı küçük su dalgaları meydana getirir. Bu dalgalar dışarıya doğru hareket ederek havuzun kenarında son bulur. Eğer sarsıntının yakınında yüzen bir yaprağın hareketi dikkatlice izlenirse, onun ilk konumu etrafında aşağı-yukarı hareket ettiği, fakat sarsıntı kaynağından asla uzaklaşmadığı veya ona yaklaşmadığı izlenebilir. Yani, su dalgaları (ya da sarsıntı) bir yerden başka bir yere hareket ederken su onunla birlikte sürüklenmez.

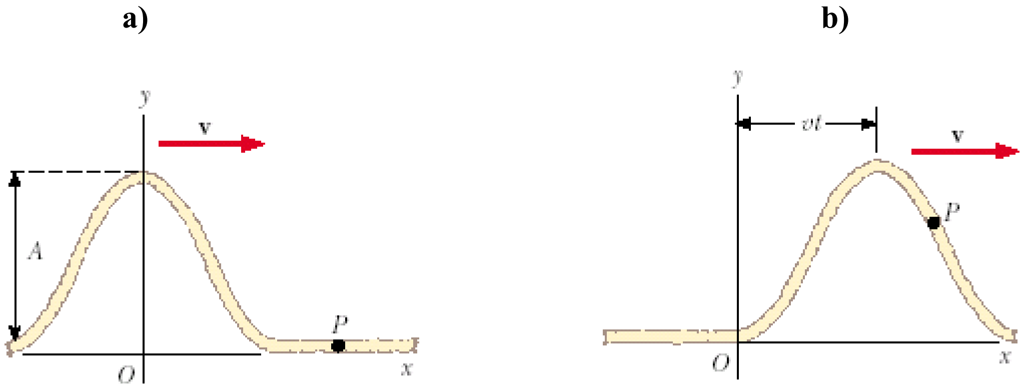
Dalga olayının açıklanmasında kullanılan matematiksel ifadelerin hepsi bütün dalgalarda ortaktır. Dalgaların tanımlanmasında üç fiziksel büyüklük önemli rol oynar. Bunlar dalga boyu, frekans ve dalganın hızıdır. Bir *dalga boyu*, dalga üzerinde özdeş olarak davranan herhangi iki nokta arasındaki minimum uzaklıktır. Örneğin, su dalgalarında dalga boyu, komşu tepeler ya da komşu çukurlar arasındaki uzaklıktır.

Doğadaki olayların çoğu periyodiktir. Periyodik dalgaların frekansı, sarsıntının kendini tekrarlama hızıdır. Her dalga içinde bulunduğu ortamın özelliklerine bağlı olarak belli bir hızla ilerler ya da yayılır. Örneğin, ses dalgaları havada 20^0C de 344 m/s hız ile yayılır, hâlbuki katıların çoğunda 344 m/s den daha büyük hızla yayılmaktadır. Yayılmak için bir ortama ihtiyaç duymayan dalgalar elektromanyetik olanlardır. Bu dalgalar boşlukta $3\times10^8\ m/s$ büyüklüğünde bir hız ile yayılırlar.



Şekil 1. Gerilmiş bir ip üzerinde ilerleyen enine dalga

Dalga hareketini göstermenin bir yolu *Şekil 1* de görüldüğü gibi; gerilmiş ve bir ucu bir yere sabitlenmiş uzun bir ipin diğer ucunu ani olarak hareket ettirmektir. Bu durumda tek bir dalga atması meydana gelir ve belli bir hız ile sağa doğru hareket eder. Bu tip sarsıntıya *ilerleyen dalga* denir. Dalga atması ip boyunca ilerlerken sarsılan ipin her parçası dalga hareketine dik doğrultuda titreşir. Ortamın sarsılan parçacıkları, dalga hızına dik olarak hareket ettiğinde, bu tip ilerleyen dalgaya *enine dalga* denir. Dalgaların başka bir tipine ise *boyuna dalgalar* denir. Bu dalgalarda ortamın parçacıkları, dalganın hareket doğrultusuna paralel bir doğrultuda yer değiştirme yapar.



Şekil 2. Bir boyutta dalga atmasının sağa doğru v hızı ile ilerlemesi **(a)** $t = 0$ da atmanın ifadesi **(b)** t süre sonra şekil değişmez ve yer değiştirme $f(x - vt)$ ile verilir

Şekil 2 de görüldüğü gibi gerilmiş bir ipin üzerinde sabit v hızı ile sağa doğru ilerleyen bir dalga göz önüne alındığında, atma x ekseni boyunca hareket eder ve ipin enine yer değiştirmesi y koordinatı ile ölçülür. Şekil 2a da $t = 0$ anında atmanın konumu ve şekli gösterilmektedir. Bu anda, atmanın şekli ne olursa olsun $y = f(x)$ ifadesi ile temsil edilir. Yani y, x in tanımlı bir fonksiyonudur. Maksimum yer değiştirme $A = y_m$, dalganın genliği adını alır. Dalga atmasının hızı v olduğundan; $t = 0$ anından herhangi bir t zamanına kadar sağa doğru vt uzunluğunda yol alır (Şekil 2b).

Dalga atmasının şekli zamanla değişmez ise, orijini O da olan durgun bir referans sisteminde ölçülen yer değiştirme, bütün zamanlar için y ile temsil edilir. Yani,

$$y = f(x - vt)$$

olur. Benzer şekilde, dalga atması sola doğru ilerler ise, yer değiştirme

$$y = f(x + vt)$$

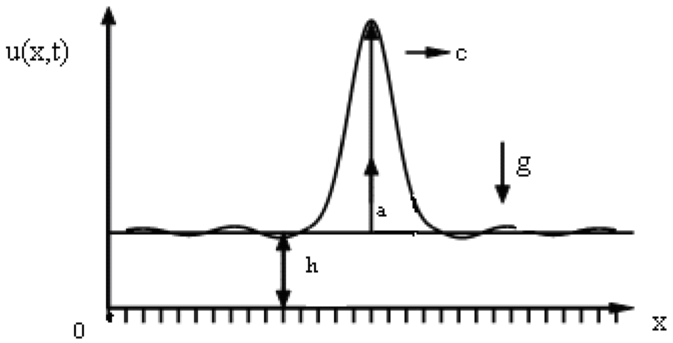
şeklinde yazılır. Görüldüğü üzere dalga fonksiyonu adı verilen y yer değiştirmesi x ve t gibi iki değişkene bağlıdır. Bu nedenle çoğu kez $y(x,t)$ şeklinde yazılır ve "y, x ile t nin fonksiyonu" şeklinde okunur [1].

Bir kısmi diferensiyel denklemde bulunan bağımlı u değişkeni, bir dalganın su yüzeyinden itibaren yüksekliğini veya bir elektromanyetik dalganın boyu gibi fiziksel bir niceliğe karşılık geldiği zaman bağımlı u değişkeninin özelliklerini veya üretimini çalışmak oldukça önemlidir. Bu durum, zamana bağımlı veya dalga denklemlerinin analitik olarak çözülmesi için metotların çalışılmasına yol açmıştır. Buradaki amaç hareket eden dalga çözümlerini bulmaktır. Eğer çözümler üretim esnasında şekillerini değiştirmiyorlar ise bu dalgalara *solitary dalgalar* denir.

Solitary dalgalar ilk olarak John Scott Russell tarafından 1834 yılında gözlemlenmiştir. Russell, Edinburg-Glasgow kanalında dalganın şeklinde herhangi bir değişiklik olmaksızın yavaş bir şekilde hareket eden suyun çıkışını gözlemlemiştir. “Harika dalga aktarımı” olarak nitelendirdiği bu su çıkışını Russell şu şekilde anlatmaktadır: “Ben çift beygir gücüyle giden bir botun, dar bir kanaldan geçerken hareketini gözlemliyordum. Bot aniden durunca kanalda hareketli olan su kütlesinin botun uç kısmının etrafında biriktiğini gördüm. Daha sonra bu su kütlesi arkaya doğru yayıldı. Büyük bir hızla öne doğru tek başına bir su dalgasının meydana geldiğini fark ettim. Bu yuvarlanmış su kütlesinin hızının azalmadan ve formunu değiştirmeden kanal boyunca ilerleyişine devam ettiğini gördüm. Onu at sırtında takip ettim. Ona yetiştiğim zaman saatte yaklaşık 8–9 mil hızla ilerlediğini gördüm. Onu 1–2 mil takip ettikten sonra kanalın dönüşünde kaybettim. Böylece 1834’ün Ağustos ayında Translasyon Dalgası olarak adlandırdığım ilk görüşümü tanıtma şansım oldu” [2]. Dikkate değer bu keşif solitary dalgaları çalışmak ve fiziksel laboratuar deneylerini yapmak için Russell’i motive etmiştir. Russell, deneysel olarak

$$c = \sqrt{g\left(a+h\right)}$$

ilişkisini ortaya çıkarmıştır. Burada Şekil 3 de görüldüğü gibi c solitary dalganın hızını, a su yüzeyi üzerinde dalganın genliğini, h sonlu bir derinliği ve g yerçekimi ivmesini göstermektedir. Solitary dalgalar bundan dolayı yerçekimi dalgaları olarak da adlandırılır.



Şekil 3. Bir solitary dalga

Solitary dalgaların tarihi 1844 yılında John Scott Russell tarafından yapılan deney ve gözlemlerin detaylı bir şekilde rapor edilmesi ile başlar. Başlangıçta Russell’ın çalışmaları bazı çelişkiler taşımış gibi görünse de 1870 yılında Boussinesq ve Rayleigh tarafından yapılan teorik çalışma ile Korteweg ve de Vries tarafından 1895 yılında yayınlanan makale Russell’ın çalışmalarını doğrulamıştır. 1895 yılında Diederik Johannes Korteweg ve doktora öğrencisi Gustav de Vries, KdV denklemi olarak bilinen ve solitary dalgaların varlığında sığ su yüzeyinin yüksekliğini modellemek için lineer olmayan bir kısmi diferensiyel denklemini türetmişlerdir. Ortaya atılan bu KdV denklemi daha sonra birçok fiziksel olayın açıklanmasında kullanılmıştır. En basit bir biçimde tanımlanan KdV denklemi

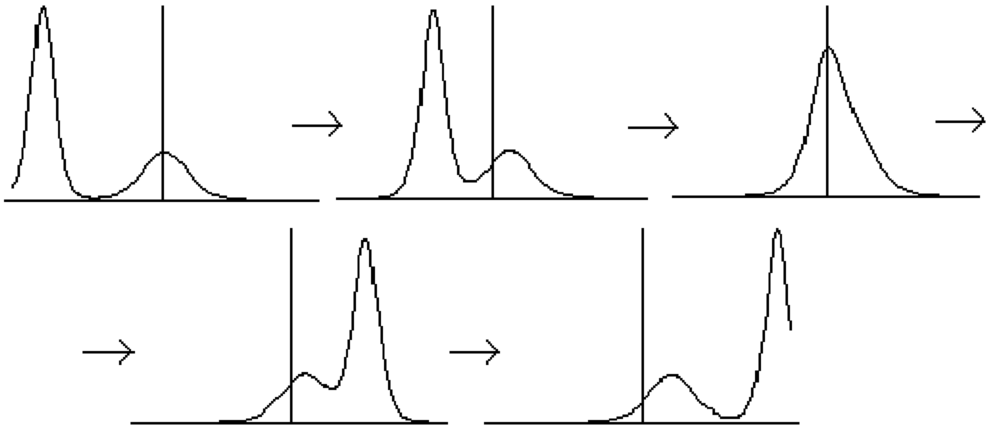
$$u_t(x,t)+6u(x,t)u_x(x,t)+u_{xxx}(x,t)=0,$$

şeklinde yazılabilir [3]. Burada uu_x terimi non-lineerliği ve u_{xxx} terimi ise lineer dağılımı temsil eder. KdV denklemi fizik ve mühendisliğin pek çok dalında zayıf bir şekilde lineer olmayan uzun dalgaların tarifi için bir paradigma olarak yaygın bir şekilde bilinir. Bu denklem pek çok sıvı akışı durumu için uygun bir model olarak kullanılır. Burada, $u(x,t)$ dalga genliğini tanımlayan uygun alan değişkenini, t zamanı, x ise dalganın yayılım yönündeki yer koordinatını göstermektedir. KdV denklemi

$$u(x,t)=aSech^2\left(\gamma\left(x-Vt\right)\right),\ V=2a=4\gamma^2$$

şeklinde solitary dalga çözümlerinin ailesi tarafından karakterize edilir. Burada γ dalga sayısını, V dalganın hızını, a dalganın genliğini göstermektedir.

1960 yıllarına kadar solitary dalgalar gereken ilgiyi görmemiştir. Ancak 1965 yılında Zabusky ve Kruskal [3] solitary dalgaların birbirleriyle etkileşimini incelemişlerdir. Zabusky ve Kruskal, KdV denklemi için yaptıkları sayısal çalışmalar ve bu denklemin integrallenebileceğini göstermeleri ile solitary dalgalara olan ilgiyi tekrar arttırmışlardır. Aynı yıl içerisinde Zabusky ve Kruskal, solitary dalgaların birbirleriyle etkileşim içinde olduğunu keşfetmişlerdir. Bunlara ilaveten, şeklini ve genliğini muhafaza eden bu dalgalar bu etkileşimden ortaya çıktığı gözlemlenmiştir. Özelliklerini koruyan ve bu özelliklerini küçük parçalarına aktarabilen solitary dalgaların keşfi, Zabusky ve Kruskal'ı bu solitary dalgalara solitonlar demek için cesaretlendirmiştir. Bu bilim adamları, solitonlar kavramının doğuşuna damgalarını vurmuşlardır. Aynı zamanda Schrödinger denklemi gibi lineer olmayan dalga denklemleri ile birlikte soliton çözümler bu alanda yapılan çalışmalarda önemli bir rol oynamıştır. Solitonlar ve integrallenebilir sistemlerin modern teorisi matematiğin büyük bir alanı olma yolunda gelişmektedir. Ayrıca soliton teorisi [4,5] pek çok fiziksel alanlarda da uygulama sahasına sahiptir.



Şekil 4. İki solitonun etkileşimi

Şekil 4' te görüldüğü gibi çarpışma esnasında şekillerini koruyan solitary dalgalara *solitonlar* denir. Solitary dalgalar ve solitonlar üretim ve lineer olmayanlık arasında kritik bir dengeden dolayı ortaya çıkmıştır. Soliton kavramı bilimin pek çok alanında bir gerçek olmadan önce dar anlamda lineer olmayanlık çerçevesinde ortaya çıkmıştır. Araştırmacılar, soliton kavramını dünya çapında bilimsel alanın değişik dallarına yaymışlardır. Soliton kavramı plazma fiziği, astrofizik, akışkanlar dinamiği gibi bilimin değişik alanlarındaki rolünden dolayı çalışmaların büyük bir kısmını etkilemiştir.

Diğer taraftan, bir soliton aşağıdaki özellikleri taşıyan bir lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemin bir çözümü olarak tanımlanabilir:

$i)$ Çözüm, sürekli bir dalga formunda olmalıdır.

$ii)$ Çözüm sınırlandırılır, yani; KdV denkleminde elde edilen solitonlar gibi çözüm üstel olarak sıfıra doğru bozulur veya Sine-Gordon denkleminde verilen solitonlar gibi çözüm sonsuzda bir sabite yakınsar.

$iii)$ Soliton, karakterini koruyan diğer solitonlar ile iç etkileşim içinde bulunur.

KdV denklemi ve diğer benzer denklemlerin tek soliton çözümü genellikle tek dalga olarak kullanılır, eğer birden fazla soliton çözüm varsa solitonlar olarak adlandırılır. Diğer bir ifade ile bir soliton diğer bir solitondan sonsuz olarak ayrılıyorsa bir tek dalgadır. Ayrıca, KdV denkleminden başka denklemler için tek dalga çözümü $\sec h^2$ fonksiyonu olmayabilir fakat $\sec h$ veya $\tan^{-1}\left(e^{ax}\right)$ olabilir. Soliton kavramına 1960 yıllarında giriş yapılmasına rağmen solitonların bilimsel araştırmaları 19. yüzyılda John Scott Russell'ın Edinburg kanalında solitary dalgaları keşfi ile başlamıştır. Scott Russell'ın zamanında solitary dalgaların bu tür bir varlığı hakkında birçok tartışma vardı. Fakat günümüzde pek çok lineer olmayan diferensiyel denklemlerin soliton çözümlere sahip olduğu bilinir.

Son zamanlarda soliton kavramı çok yaygın olarak kullanılmaktadır. Hirota [6] bilineer forma indirgeyerek zamana bağlı denklemlerinin N-soliton çözümlerini oluşturmuştur. Bilineer formulasyonu Hirota tarafından ortaya atılmış ve bu formulasyon lineer olmayan denklemlerin çalışılmasında önemli açılımlar sağlamıştır. Nimmo ve Freeman [7], N-soliton çözümlerinin formulasyonuna alternatif olarak N-fonksiyonların Wronskian determinantına giriş yapmışlardır.

Günümüz dünyasında solitonlar çoğu yerde kullanılmaktadır. Herhangi bir sinyal iletiminde, sinyalin zarara uğramadan ve yeterli büyüklükte hedefe ulaşması önemlidir. Normal sinyallerin durumları değişebilir ve genişliklerinde farklılıklar olabilir. Bu lineer dalgalar etrafa yayılabilir ve sinyalleri zayıflayabilir. Solitonlar ise sıradan dalgalara göre genişliklerini değiştirmeden sabit tutabilmektedirler. Soliton dalgalar ile 10.000 km' ye kadar özellikleri değişmeden başarıyla sinyal iletilebilmektedir. Bununla birlikte çarpıştıklarında birbirlerinden etkilenmemekte ve sinyaller optik fiberler boyunca her iki yönde iletilebilmektedir. Sinyaller, gideceği yere orijinal durumlarında ve yeterince anlaşılabilir büyüklükte ulaştırılabilir. Süper pozisyon ilkeleri yokluğu ile meydana gelen zorluktan dolayı son 40 yılda non-lineer sistemlerde devrimsel işlemlerin olduğu görülmüştür. Bunlara, deneylerdeki ilerlemeler, non-lineer sistemlerin bilgisayar simülasyonundaki olağanüstü başarılar ve Hamilton sistemleri üzerine yapılandırılmış metotlarla, ters spectral transformların da kullanıldığı yeni matematiksel analitik araçlar öncülük etmiştir. Olayların tam olarak anlaşılabilmesi için teorik bilgisayar ve deneysel bilim arasındaki sinerji, yeni araştırmaları beraberinde getirecektir.

Bu çalışmada, üçüncü bölümde ele alınan Burgers denklemi [8]

$$u_t + uu_x = \nu u_{xx}, \quad \nu > 0, \tag{1.1}$$

KdV denklemi [3]

$$u_t + \alpha uu_x + u_{xxx} = 0 \tag{1.2}$$

ve sığ su dalga denklem sistemi [9]

$$\begin{aligned} &u_t + u_x v + v_x u + v_{xxx} = 0, \\ &v_t + u_x + vv_x = 0 \end{aligned} \tag{1.3}$$

için dalga çözümleri elde edilmiştir.

Sığ su denklemleri, bir atmosferin yatay yapısını tanımlamak için kullanılabilen hareket denklemlerinin en basit formlarıdır. Bu denklemler yerçekimi ve rotasyonel ivmelere cevap vermede sıkıştırılamayan bir akışın hareketini tanımlar. Sığ su denklemlerinin çözümleri durgun yer çekim dalgaları ve Rossby dalgalarını ihtiva eden hareketin pek çok tipini tarif eder.

1930'lı yılların sonlarına doğru J.M. Burgers türbülans akışın fiziksel davranışının çok önemli bazı özelliklerini elde etmek için çeşitli model denklemleri inceler. Burgers'in düşüncesi, temel fiziğin bazı dallarını yorumlamak amacıyla, Navier-Stokes denklemlerinin basitleştirilmiş hali olan fakat non-lineer konveksiyon ve lineer difüzyonunun temel özelliklerini içeren zamana bağımlı denklemlerini bulmaktır. Burgers, çok ünlü (1939) bir makalesinde aday olabilecek birkaç denklemi inceler ve sonunda non-lineer (1.1) difüzyon denklemine dikkatini verir [10,11]. Bu denklem yarı-parabolik bir kısmi diferensiyel denklem olup Navier-Stokes denklemlerine yaklaştırmalar hiyerarşisindeki önemli rolü nedeniyle fiziksel anlamda hatırı sayılır bir ilgi kaynağı olmuş ve ilk olarak Bateman'nın makalelerinin birinde görülmüştür. Bateman, (1.1) denkleminin iki temel çözümünü verdiği makalesinde ayrıca bu denklemin üzerinde çalışılmasının ilginç olabileceğini belirtmiştir [12]. (1.1) denklemi, türbülansın matematik modeli olarak Burgers (1948-1974) tarafından kapsamlı olarak çalışıldığı için kendi ismi ile anılmıştır [13,14]. Burgers, türbülansın değişik yönlerini inceleyerek bir boyutlu dalgalar için denklemi model problem olarak kullanmayı önermiştir. Burgers denklemi küçük bir parametreyle (ν ile) çarpımı ile birlikte ifade edildiğinde Navier-Stokes denklemlerine benzediği vurgulanmıştır [15]. Denklem birçok alanda model olarak kullanılmıştır. Burgers denklemi, gaz dinamiği [16], akustik [17,18] ve türbülans fenomenini [13] başarılı bir şekilde modeller. Denklemin, Cole [19] tarafından şok dalga teorisi ve türbülans ile ilişkisi, Pospelov [20] tarafından izotropik katılardaki elastik dalgalarla ilişkisi, Goldberg [21] tarafından sonlu genlikli enine hidromagnetik dalgalarla ilişkisi verilmiştir. Bunlara ek olarak, birbirinden çok farklı alanlarda; sayılar teorisi, ısı transferi vb. gibi çeşitli uygulamalarına da sıkça rastlanmaktadır. Burgers denklemi, Cole tarafından [19] lineer ısı denklemine dönüştürüldü ve eş zamanlı olarak bu dönüşüm Hopf tarafından da [22] Cole 'un bu çalışmasından bağımsız olarak bulundu; bu yüzden elde edilen bu önemli dönüşüm Cole-Hopf dönüşümü olarak bilinmektedir. Hopf tarafından tanımlanan bu dönüşüm, aynı zamanda denklemin tam ve açık çözümünü de verir. Burgers denkleminin benzerlik formu altında Riccati denklemi olduğu Rodin [23] tarafından gösterilmiştir. Ames [24], Chu [25], Shvets ve Meleshko [26] tarafından Hopf-Cole dönüşümünün daha genel uygulamaları ele alınmıştır. Burgers denkleminin çözümleri konveksiyon ve difüzyon arasında hassas bir denge sergiler.

Son yıllarda bu analitik çözüm metotlarına ilaveten sayısal çözüm metotları da paralel olarak gelişmektedir. Bunlardan bazıları, uzay zaman elementleri ve karakteristiklerinin birleşimine dayalı olan yeni sonlu elamanlar metodunu Burgers denkleminin sayısal çözümünü bulmak için kullandılar [27]. Buradan integrallenemeyen Backlund dönüşümleri bazı klasik lineer olmayan KdV denklemlerinde olduğu gibi, Burgers denklemi için de Lax çiftleri tanımlandı [28].

Öte yandan, birçok bilimci; Walsh [29], Benton ve Platzman [30], Crighton ve Scott [31], Parker [32], Rodin [33], Larson [34] ve Lardner [35] Burgers denklemi için başlangıç sınır değer problemlerini çalışarak çözümlerinin fiziksel önemini araştırdılar. Bu arada, Benton ve Platzman'nın [30] Burgers denkleminin olası çözümlerinin ayrıntılı bir listesini derlediğini ve fiziksel anlamda ilginç olanları bir arada toplamışlardır.

Daha sonra Öziş ve Özdeş [36] Burgers denkleminin sayısal çözümünü doğrudan varyasyonel metot kullanarak elde edilen çözümün tam çözümüne yakınsayan bir dizi çözüm formunda bir yaklaşık çözüm buldular. Burgers denklemini sınır değer metotları ile birleştiren bir adi diferensiyel denklem sistemine dönüştürerek daha sonra dönüşüm tekniğini uyguladılar [36].

Teknolojideki ilerlemeler sonucu gelişen hızlı ve büyük hafızalı bilgisayarlardan yararlanarak birçok araştırmacı çeşitli sayısal yöntemler ile çözümleri araştırmıştır. Amesve Nucci [37], akışkan denklemlerinin analizini grup yöntemi ile incelerken, bu yöntemle Burgers denklemini de çalıştılar. Sachdev ve Rao [38] modife Burgers denkleminin N -dalga çözümlerini; Chester [39], Abd-el-Malek ve El-Mansi [40] ve Vaganan ve Kumaran [41] ise grup metodunu (1.1) denklemine uygulamışlardır. Bunların yanı sıra Bender ve Boettcher [42], Adomian [43], Gorguis [44] ve Gülsu ve Öziş [45] dahil bazı araştırmacılar da geliştirdikleri yöntemlerin uygulanabilirliğini test etmek ve yeni çözümler bulmak amacıyla Burgers denklemini ele almışlardır.

1.1. Temel Tanımlar

Tanım 1. 1 Bir veya daha fazla bağımlı değişkenin, bir veya daha fazla bağımsız değişkene göre çeşitli mertebeden türevlerini ihtiva eden denklemlere *diferensiyel denklemler* adı verilir.

Bir denklemde belirli bir değişkene göre türev alınıyorsa, o değişkene *bağımsız değişken*, denklemde türevi alınan değişkene ise *bağımlı değişken* denir.

Bir tek bağımsız değişken içeren diferensiyel denkleme *adi diferensiyel* denklem denir ve genel olarak *n. mertebeden adi bir diferensiyel denklem*;

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0, \tag{1.4}$$

şeklinde gösterilir.

İki veya daha fazla bağımsız değişken ihtiva eden diferensiyel denkleme *kısmi diferensiyel denklem* denir ve *n. mertebeden bir kısmi diferensiyel denklem*

$$F\left(x, y, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \ldots, \frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right) = 0 \tag{1.5}$$

olarak yazılır.

Tanım 1. 2 Bir diferensiyel denklem lineer veya lineer olmayan olmak üzere iki şekilde sınıflandırılır. Eğer bir diferensiyel denklemde bağımlı değişken ve türevlerinin katsayıları bağımsız değişken ihtiva ediyor ise bu diferensiyel denkleme *lineer diferensiyel denklem* denir. Eğer bir diferensiyel denklemde bağımlı değişken kendisi veya türevleri ile çarpım ya da bölüm durumunda ise veya bağımlı değişken üstel, trigonometrik ya da logaritmik olarak bulunuyor ise veya bağımlı değişkenin herhangi bir türevinin derecesi iki veya daha büyük ise bu tür diferensiyel denklemlere *lineer olmayan diferensiyel denklem* denir.

Tanım 1. 3 Bir $a < x < b$ aralığında tanımlı bir Φ fonksiyonu $a < x < b$ aralığında bulunan her *x* için tanımlı ve ilk *n. mertebeden türeve sahip fonksiyonu*

$$F\left(x, \Phi(x), \Phi'(x), \ldots, \Phi^{(n)}\right) = 0, \tag{1.6}$$

ise Φ fonksiyonuna (1.4) denkleminin *çözümüdür* denir. Bir adi diferensiyel denklemin genel çözümü, diferensiyel denklemin mertebesi kadar sabit içerir. Çözüm fonksiyonundaki sabitlere verilen her bir değere karşılık bulunan çözüme de *özel çözüm* denir. Bir adi diferensiyel denklemin çözümü eğri ailesine karşılık gelmesine karşın, bir kısmi diferensiyel denklemin çözümü yüzey ailesine karşılık gelir.

Özel olarak, ikinci mertebeden bir diferensiyel denklem göz önüne alındığında bu tip denklemlerin çözümleri iki keyfi sabit içerdiğinden bu sabitleri bulmak için iki ek şart verilmelidir. Bağımlı değişken ve türevleri üzerinde bağımsız değişkenin aynı değeri için verilen şartlara *başlangıç şartları*, bağımsız değişkenin farklı değerleri için verilen şartlar şeklinde ise *sınır şartları* denir. Bir diferensiyel denklemin başlangıç şartları ile incelenmesine *başlangıç değer problemi*, sınır şartları ile incelenmesine *sınır değer problemi* denir.

$$y(x_0) = y_0\,,\ y'(x_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}\,, \tag{1.7}$$

(1.4) ve (1.7) ile birlikte verilen bir problem başlangıç değer veya Cauchy Problemi olarak bilinir. Diğer taraftan

$$y(x_0) = y_0\,,\ y(x_1) = y_1, \ldots, y(x_n) = y_n, \tag{1.8}$$

(1.4) ve (1.8) ile birlikte verilen denkleme sınır değer problemi denir.

Diferensiyel denklem bir fiziksel olayın modeli olduğundan kolaylık olması bakımından genellikle ikinci mertebeden sabit katsayılı bir kısmi diferensiyel denklem alınarak sınıflandırmaya gidilmiştir, ikinci mertebeden bir kısmi diferensiyel denklemin genel hali;

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu + G = 0\,, \tag{1.9}$$

şekliyle verilebilir. Burada A, B, C, D, E, F ve G sabitler olsun. Diğer taraftan $\Delta = B^2 - 4AC$ diskriminantını tanımlayalım.

Diskriminant	Denklem Tipi	Örnek	İsimlendirme
$\Delta > 0$	Hiperbolik	$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$	Dalga Denklemi
$\Delta = 0$	Parabolik	$u_t - k u_{xx} = 0$	Isı Denklemi
$\Delta < 0$	Eliptik	$u_{xx} + u_{yy} = 0$	Laplace Denklemi

Herhangi bir tipteki problemin çözümü, klasik Hadamard testi gereğince aşağıdaki üç şartı sağlarsa problem, "iyi durumlu", en az bir şartı sağlamaz ise "*kötü durumlu*" olarak adlandırılır. Bu şartlar;

Varlık: En az bir çözüm vardır,

Teklik: En çok bir çözüm vardır,

Kararlılık: Çözüm verilere sürekli bağlıdır.

Pratikte bir denklemin çözümünün varlığını tarif etmenin en iyi yolu problemdeki bütün şartları sağlayan ve problemde yerine konduğunda denklemi sağlayan bir çözüm yapılandırmaktır. Eğer çözümün tekliği gösterilirse denklemin çözümü bulunmuş demektir.

Birincisi açık bir mantıksal şart olup, ancak sadece fiziksel problemin bir çözüme sahip olması nedeniyle, matematiksel problemin bir çözüme sahip olacağını kolayca ifade edemeyeceğimiz akılda tutulmalıdır. Fiziksel problem bir tek çözüme sahip olabilir, ancak matematiksel problemin birden çok çözümü de olabilmektedir.

Son şart bir gerek şarttır. Uygulamada, ölçüm yönteminde küçük hatalar olabilir. Dolayısıyla, fiziksel olayı gösteren matematiksel problem için, verilerdeki küçük bir değişme, çözümde en fazla küçük bir değişikliğe yol açabilir.

Örnek olarak,

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \tag{1.10}$$

Laplace denklemini $n > 0$ olmak üzere

$$u(0, y) = 0\,, \qquad u_x(0, y) = \frac{1}{n}\sin y \tag{1.11}$$

Cauchy verileriyle göz önüne alalım. Bu problemin değişkenlere ayrılma yöntemi ile elde edilen çözümü

$$u_1(x, y) = \frac{1}{n^2}\sinh nx \sin y \tag{1.12}$$

şeklindedir. Başlangıç verileri $u(0, y) = 0$ ve $u_x(0, y) = 0$ iken problemin çözümü $u_2 = 0$ aşikar çözümüdür. İki başlangıç verisi arasındaki fark $n \to \infty$ iken

$$\lim_{n\to\infty}\left|n^{-1}\sin y\right| = 0$$

olur. Yani, başlangıç verisinde küçük bir değişiklik olmuştur. Bu başlangıç verisine karşılık gelen çözümler farkının $y = \frac{\pi}{2}$ noktasında, n tek bir pozitif sayı olmak üzere $n \to \infty$ iken limit değerine bakalım;

$$\lim_{n\to\infty}\left|u_1(x, \frac{\pi}{2}) - u_2(x, \frac{\pi}{2})\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sinh nx = \lim_{n\to\infty}\frac{e^{nx} - e^{-nx}}{2n^2} = \infty$$

olur. Yani, başlangıç verilerinde yapılan küçük bir değişiklik çözümde büyük bir değişikliğe yol açmıştır. Böylece (1.10) ve (1.11) ile verilen Cauchy probleminin iyi durumlu olmadığı sonucuna varılır.

(1.10) ile verilen Laplace denkleminin çözümleri harmonik fonksiyonlardır. Yukarıda göz önüne alınan (1.10) denklemi

$$u(x,0)=f(x) \text{ ve } u_x(x,0)=g(x), \tag{1.13}$$

başlangıç şartları ile verilmiş ise probleme *Cauchy problemi*,

$$u(0,t)=p(t) \text{ ve } u(\ell,t)=q(t), \tag{1.14}$$

(1.10) denklemi (1.14) şartları ile verildiğinde, probleme *Dirichlet Problemi*, eğer çözüm bölgesinin sınırında dış normali boyunca çözüm aranıyorsa yani;

$$\frac{\partial u}{\partial n}=f(t), \tag{1.15}$$

şartı ile verilen (1.10) denklemine ise *Neumann Problemi* denir.

Tanım 1. 4 Jacobi eliptik fonksiyonlar eliptik fonksiyonların standart formudur. Bu fonksiyonlar, k eliptik modül olmak üzere $cn(u,k)$, $dn(u,k)$, $sn(u,k)$ olacak şekilde üç temel fonksiyon ile gösterilir. Bu üç temel fonksiyon

$$u=F(\varphi,k)=\int_0^{\varphi}\frac{dt}{\sqrt{1-k^2sin^2t}}, \quad 0<k^2<1,$$

şeklinde verilen birinci tip eliptik integralin versiyonundan ortaya çıkar. Burada $k=\operatorname{mod}u$ ve $\varphi=am(u,k)=am(u)$ olmak üzere Jacobi genliktir ve ayrıca $\varphi=F^{-1}(u,k)=am(u,k)$ ile tanımlanır. Bu açıklamalardan sonra

$$sin(\varphi)=sin(am(u,k))=sn(u,k),$$

$$cos(\varphi)=cos(am(u,k))=cn(u,k),$$

$$\sqrt{1-k^2sin^2(\varphi)}=\sqrt{1-k^2sin^2(am(u,k))}=dn(u,k),$$

eşitlikleri yazılabilir. Burada $k\to 0$ ve $k\to 1$ iken sırası ile bu fonksiyonlar

$$sn(u,0)=sin(u) \qquad sn(u,1)=tanh(u),$$

$$cn(u,0)=cos(u) \qquad cn(u,1)=sech(u),$$

$$dn(u,0)=1 \qquad dn(u,1)=sech(u),$$

olarak tanımlanır. Ayrıca Jacobi eliptik fonksiyonlar üzerinde türev

$$\frac{d}{du}(sn(u))=cn(u)dn(u),$$

$$\frac{d}{du}(cn(u))=-sn(u)dn(u),$$

$$\frac{d}{du}\left(dn(u)\right)=-k^2 sn(u)cn(u),$$

eşitlikleri ile açıklanır. Jacobi eliptik fonksiyonların bu özelliklerinin yanı sıra bu fonksiyonlar arasında

$$sn^2(u)+cn^2(u)=1,$$

$$k^2 sn^2(u)+dn^2(u)=1,$$

bağıntıları vardır.

Tanım 1. 5 Lineer olmayan herhangi bir adi diferensiyel denklemde en yüksek mertebeden lineer olan terim $\frac{d^q u}{d\xi^q}$ ve en yüksek mertebeden lineer olmayan terim $u^p\left(\frac{d^r u}{d\xi^r}\right)^s$ ile verilsin. M dengeleme terimi olmak üzere $M+q=Mp+s\left(M+r\right)$ eşitliği yazılabilir.

2. LİNEER OLMAYAN KISMİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN DALGA ÇÖZÜMLERİ İÇİN BAZI ANALİTİK METOTLAR

Lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin dalga çözümlerini elde etmek için birçok metot son yıllarda yoğun bir şekilde çalışılmaktadır. Karmaşık ve yorucu cebirsel hesaplamalarda araştırmacılara kolaylık sağlayan Maple veya Mathematica gibi sembolik paket programlarının kullanılmasıyla bu denklemlerin dalga çözümlerini elde etmek giderek ilgi çekici hale gelmiştir. Bu bölümde lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin dalga çözümlerinin elde edilmesinde kullanılan bazı analitik metotların tarihsel olarak analizleri verilerek aralarındaki farklılıklara vurgu yapılacaktır.

2.1. Analitik Metotlar ve Analizleri

Fiziksel olayların matematiksel modellemesi genellikle lineer olmayan, zamana bağlı diferensiyel denklemler ile açıklanır. Bu gibi denklemlerin analitik çözümlerini elde etmek büyük bir öneme sahiptir. Çünkü bu tür denklemlerin analitik çözümlerini bulmak o denklemin yapısı ve karakteri hakkında araştırmacılara bilgi verir. Bu tip çözümleri elde etmek için birkaç klasik metot vardır. Bu metotlardan bazılarını şöyle sıralayabiliriz: Hirota'nın bağımlı değişken metodu [46], Bäcklund dönüşümü [47], Cole-Hopf dönüşümü [48], genelleştirilmiş Miura dönüşümü [49], ters saçılma metodu [50], Darboux dönüşümü [51], Painleve açılım metodu [52], homojen balans metodu [53], benzerlik indirgeme metodu [54] ve sine–cosine metodu [55].

Bu klasik metotların dışında lineer olmayan zamana bağlı diferensiyel denklemlerin hareket eden dalga çözümleri *tanh* fonksiyon terimleri ile ifade edilebilir [56,57]. Tanh fonksiyon terimleri orijinal olarak 1990 ve 1991 yıllarında bir *ad hoc* temeli üzerine kullanıldı [58,59].

2.1.1. Metotların Tarihçesi

Malfliet [60], 1992 yılında *tanh metodu* formülize etmiştir. Bu metot, ısı yayılımı, difüzyon reaksiyonu, plazma fiziği, türbülans teorisi, okyanus dinamiği ve biyofizik gibi doğa olaylarını tanımlayan kısmi diferensiyel denklemlerin analitik çözümlerini bulmak için önemli bir rol oynar. Bu teknik ile elde edilen çözümler kapalı *tanh* fonksiyonu formundadır. Bu metodun işleyişi şu şekilde açıklanabilir:

$$H\left(u,u_t,u_x,u_{xx},\ldots\right)=0, \tag{2.1}$$

şeklinde verilen bir kısmi diferensiyel denklem göz önüne alınır. (2.1) denkleminin dalga çözümünü bulmak için $\xi=c(x-\nu t)$ gibi bir koordinat göz önüne alınarak bu koordinata göre (2.1) denklemi

$$H'\left(u,u',u'',\ldots\right)=0\,, \tag{2.2}$$

şeklinde bir adi diferensiyel denkleme dönüştürülerek yeniden yazılır. Burada ν dalga hızını ve c ise $L=c^{-1}$ genişlikli durağan bir dalgayı ifade eder. Genelliği bozmaksızın $c>0$ olarak tanımlanır. Adi diferensiyel denklem elde edildikten sonra $Y=\tanh\left(\xi\right)$ gibi yeni bir bağımsız değişkene giriş yapılır. Bu yeni değişkene göre türevler

$$\frac{d}{d\xi}\rightarrow\left(1-Y^2\right)\frac{d}{dY},$$

$$\frac{d^2}{d\xi^2}\rightarrow\left(1-Y^2\right)\left(-2Y\frac{d}{dY}+\left(1-Y^2\right)\frac{d^2}{dY^2}\right),$$

$$\frac{d^3}{d\xi^3}\rightarrow-2Y\left(1-Y^2\right)\left(-2Y\frac{d}{dY}+\left(1-Y^2\right)\frac{d^2}{dY^2}\right)+\left(1-Y^2\right)^2\left(-2\frac{d}{dY}-2Y\frac{d^2}{dY^2}+\left(1-Y^2\right)\frac{d^3}{dY^3}\right),$$

şeklinde yazılabilir, ayrıca daha yüksek mertebeden türevler benzer şekilde hesaplanabilir. Bu türevler ile birlikte (2.1) denklemi için aranan

$$u\left(x,t\right)=\sum_{m=0}^{M}a_mY^m, \tag{2.3}$$

çözümü, elde edilen adi diferensiyel denklemde yerlerine yazılmasıyla Y^m $\left(m=0,1,2,\ldots,M\right)$ katsayıları yok edilerek cebirsel denklem sistemi bulunur. Bulunan bu cebirsel denklem sisteminde a_m $\left(m=0,1,2,\ldots,M\right)$ katsayıları elde edilir ve bu katsayılar (2.3) serisinde yerlerine yazılarak (2.1) denkleminin dalga çözümü bulunmuş olur. Burada M en yüksek mertebeden lineer olan terim ile lineer olmayan terimlerin dengelenmesiyle bulunabilen parametredir.

2000 yılında Fan [61] *tanh metodu* üzerine çalışmalar yaparak Malfiet tarafından sunulan *tanh* metodundan farklı olarak $Y=\tanh\left(\xi\right)$ çözüm fonksiyonu dışında

$$F'=b+F^2, \tag{2.4}$$

şeklinde bir Riccati diferensiyel denklemini göz önüne alarak bu denklemin çözüm fonksiyonları

$$\begin{cases} F=-\sqrt{-b}\tanh[\sqrt{-b}\xi] \\ F=-\sqrt{-b}\coth[\sqrt{-b}\xi] \end{cases}, \quad b<0 \text{ ise} \tag{2.5}$$

$$F=-\frac{1}{\xi}, \quad b=0 \text{ ise} \tag{2.6}$$

$$\begin{cases} F=\sqrt{b}\tan[\sqrt{b}\xi] \\ F=-\sqrt{b}\cot[\sqrt{b}\xi] \end{cases}, \quad b>0 \text{ ise} \tag{2.7}$$

olmak üzere

$$u(x,t)=\sum_{i=0}^{M} a_i F^i , \tag{2.8}$$

şeklinde (2.1) denkleminin dalga çözümlerini elde etmiştir. Dikkat edilirse Malfiet tarafından sunulan *tanh metodu* ile sadece tanh formunda çözüm elde edilirken Fan tarafından sunulan ve literatürde *genişletilmiş tanh fonksiyon metodu* olarak bilinen bu metot ile $\coth\xi$, $\tanh\xi$, $\cot\xi$ ve rasyonel formunda çözümlerde elde edilir.

2002 yılında Elwakil ve arkadaşları [62] *genişletilmiş tanh fonksiyon metodu* üzerine çalışarak göz önüne alınan Riccati denklemi ve bu denklemin (2.5)-(2.7) ile verilen çözüm fonksiyonları aynı kalmak şartı ile farklı olarak (2.8) ile verilen çözüm yerine

$$u(x,t)=a_0+\sum_{i=1}^{M} a_i F^i + b_i F^{-i} , \tag{2.9}$$

şeklinde bir çözüm kabul ederek yaptıkları bu çalışmayı *değiştirilmiş genişletilmiş tanh fonksiyon metodu* olarak literatüre kazandırmışlardır. Burada $a_0, a_i, b_i\ (i=1,2,...,M)$ sabitlerdir. Elwakil ve arkadaşları bu çalışma ile diğer *tanh* metotlar ile elde edilemeyen yeni tam çözümler elde etmişlerdir. Ayrıca, bu metot ile (2.1) denklemi için çözüm olarak kabul edilen (2.9) eşitliğinde F^{-i} terimi bulunduğundan elde edilen çözümler singüler çözüm veya blow-up davranışı gösterirler.

2003 yılında Zheng ve arkadaşları [63] yukarıda açıklanan ve sırasıyla *tanh metot*, *genişletilmiş tanh fonksiyon metot* ve *değiştirilmiş genişletilmiş tanh fonksiyon metot* üzerine çalışarak bu metotlar ile elde edilen çözümleri de kapsayan daha genel çözümler ile birlikte bu metotlar ile elde edilemeyen yeni çözümler bularak *genelleştirilmiş* *genişletilmiş tanh metodunu* vermişlerdir. Bu metodun bahsedilen diğer metotlardan faklı olan tarafı (2.1) denklemi için kabul edilen çözümün

$$u_i(\xi)=a_{i0}+\sum_{j=1}^{M_i}\left\{a_{ij}F^j+b_{ij}F^{-j}+c_{ij}F^{j-1}\sqrt{b+F^2}+d_{ij}\frac{\sqrt{b+F^2}}{F^j}\right\},\ \left(i=1,2,...,n;\ j=1,2,...M_i\right) \tag{2.10}$$

olarak seçilmesidir. Bu fark dışında metodun işleyişi tamamen diğer *tanh* metotları ile aynıdır. Burada j sayısı i yinci denklemi ve n ise denklemlerin sayısını gösterir. $a_{ij},b_{ij},c_{ij},d_{ij}$ ve b daha sonra belirlenebilen sabitlerdir. Gerçekten, (2.10) eşitliğinde $b_{ij}=c_{ij}=d_{ij}=0,\left(i=1,2,...,n;\ j=1,2,...,M_i\right)$ alınır ise 2000 yılında Fan [61] tarafından sunulan *genişletilmiş tanh fonksiyon metodu* elde edilir. Eğer $c_{ij}=d_{ij}=0,\left(i=1,2,...,n;\ j=1,2,...,M_i\right)$ alınır ise 2002 yılında Elwakil [62] tarafından sunulan *değiştirilmiş genişletilmiş tanh fonksiyon metodu* elde edilir. Görüldüğü gibi 2003 yılında Zheng ve arkadaşları tarafından literatüre kazandırılan *genelleştirilmiş genişletilmiş tanh fonksiyon metodu*, sırası ile *genişletilmiş tanh fonksiyon metot* ve *değiştirilmiş genişletilmiş tanh fonksiyon* metotlarını kapsayan bir metottur.

2004 yılında Chen ve Zhang [64], (2.1) denkleminin hareket eden dalga çözümlerini elde etmek için yukarıda bahsedilen t*anh* metotlarında kullanılan Riccati diferensiyel denklemlerinden farklı olarak

$$\frac{dF}{d\xi}=A+BF+CF^2, \tag{2.11}$$

şeklinde bir Riccati diferensiyel denklemi alarak *geliştirilmiş tanh fonksiyon metodunu* vermişlerdir. (2.11) denkleminin çözümleri olarak göz önüne alınan

1. *Durum*:

$$A=C=1,\ B=0\ \text{ ise }\ F=\tan z, \tag{2.12}$$

2. *Durum*:

$$A=\frac{1}{2},\ B=0,\ C=-\frac{1}{2}\ \text{ ise }\ F=\coth z\pm\operatorname{csc}hz\ \text{ veya }\ F=\tanh z\pm i\operatorname{sec}hz, \tag{2.13}$$

3. *Durum*:

$$A=C=\pm\frac{1}{2},\ B=0\ \text{ ise }\ F=\sec z\pm\tan z\ \text{ veya }\ F=\csc z\pm\cot z, \tag{2.14}$$

4. *Durum*:

$$A=1,\ B=0,\ C=-1 \text{ ise } F=\tanh z \text{ veya } F=\coth z, \tag{2.15}$$

5. *Durum*:

$$A=C=-1,\ B=0 \text{ ise } F=\cot z, \tag{2.16}$$

6. *Durum*:

$$C=0, B\neq 0 \text{ ise } F=\frac{\left(\exp\left(Bz\right)-A\right)}{B}, \tag{2.17}$$

7. *Durum*:

$$A=B=0,\ C\neq 0 \text{ ise } F=-\frac{1}{\left(Cz+c_0\right)}, \tag{2.18}$$

fonksiyonları ile (2.1) denkleminin hareket eden dalga çözümleri yazılabilir. Bu metot ile (2.1) denklemi için aranan çözüm

$$u\left(x,t\right)=\sum_{i=0}^{M} a_i F^i\left(\xi\right), \tag{2.19}$$

şeklinde yazılır.

2004 yılında Kudryashov [65,67] tarafından literatüre kazandırılan bu metot ile (2.1) denkleminin dalga çözümünü bulmak için

$$y(\xi)=a_0+\sum_{i=1}^{m} a_i F^i(\xi), \tag{2.20}$$

formunda bir çözüm aranır. Burada $a_0, a_1, a_2, ..., a_m$ hesaplanacak sabitlerdir. Burada tanh metotlarında kullanılan Riccati denkleminin yerine

$$F' = F^2 - F, \tag{2.21}$$

şeklinde bir Bernoulli denklemi ele alınır ve

$$F=F(\xi)=\frac{1}{1+e^{\xi}}, \tag{2.22}$$

fonksiyonu (2.21) Bernoulli denkleminin bir çözüm fonksiyonudur.

m pozitif tam sayısını yani dengeleme terimini hesaplarken (2.2) denkleminde $y=z^p$ yazılarak tüm terimlerin dereceleri karşılaştırılarak en küçük dereceli iki veya daha fazla terim seçilir. p nin minimum değeri (2.2) denkleminin çözümünün kutbu olarak tanımlanır. Daha sonra y çözümü ve gerekli türevleri

$$y_{\xi} = \sum_{i=1}^{m} a_i i(F-1)F^i, \quad y_{\xi\xi} = \sum_{i=1}^{m} a_i i((i+1)F^2 - (2i+1)F + i)F^i \tag{2.23}$$

(2.2) denkleminde yerlerine yazılarak $F(\xi)$ ye bağlı olan denklem elde edilir. Bu denklemde $F(\xi)$ fonksiyonunun kuvvetlerine göre katsayıları sıfıra eşitlenerek cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu cebirsel denklemin çözülmesi ile $a_0, a_1, a_2, ..., a_m$ sabitleri bulunur [68-72].

Yukarıda bahsedilen ve kısmi diferensiyel denklemlerin dalga çözümlerini veren *tanh* metotlarının yanı sıra aynı zamanda eliptik fonksiyonların yardımı ile kısmi diferensiyel denklemlerin dalga çözümlerini veren metotlarda vardır. Bu metotlar sırası ile 2001 yılında *Jacobi eliptik fonksiyon metodu* [73], 2003 yılında *değiştirilmiş Jacobi eliptik fonksiyon metodu* [74] ve 2004 yılında *genelleştirilmiş Jacobi eliptik fonksiyon metodu* [75] olmak üzere bilim adamları tarafından literatüre kazandırılmıştır.

Yine 2004 yılında Chen ve Zhang [75] tarafından eliptik fonksiyonlar kullanılarak (2.1) denklemi için dalga çözümleri veren genelleştirilmiş Jacobi eliptik fonksiyon metodu sunulmuştur. Bu metodun yukarıda analizleri yapılan metotlardan farklı olan tarafı Riccati denklemi yerine

$$(F')^2 = A + BF^2 + CF^4, \tag{2.24}$$

şeklinde bir yardımcı diferensiyel denkleminin göz önüne alınmasıdır. Burada $F' = \dfrac{dF}{d\xi}$ ve A, B, C sabitlerdir. (2.1) diferensiyel denklemi için

$$u(x,t) = a_0 + \sum_{i=1}^{M} \left[a_i F^i(\xi) + b_i F^{-i}(\xi) \right], \tag{2.25}$$

formunda bir çözüm arandığı kabul edilir. (2.1) denkleminin dalga çözümünü yazmak için kullanılacak olan (2.24) denkleminin çözüm fonksiyonları

$$i) \begin{cases} A = 1 \\ B = -(1+m^2) \\ C = m^2 \end{cases}, \quad F(\xi) = sn\xi, cd\xi, \tag{2.26}$$

$$ii) \begin{cases} A = 1-m^2 \\ B = 2m^2 - 1, \\ C = -m^2 \end{cases} \quad F(\xi) = cn\xi, \tag{2.27}$$

$$iii)\begin{cases}A=m^2-1\\B=2-m^2\\C=-1\end{cases},\quad F(\xi)=dn\xi, \tag{2.28}$$

$$iv)\begin{cases}A=-m^2\left(1-m^2\right)\\B=2m^2-1\\C=1\end{cases},\quad F(\xi)=ds\xi, \tag{2.29}$$

$$v)\begin{cases}A=1-m^2\\B=2-m^2\\C=1\end{cases},\quad F(\xi)=cs\xi, \tag{2.30}$$

$$vi)\begin{cases}A=\dfrac{1}{4}\\B=\dfrac{m^2-2}{2}\\C=\dfrac{m^2}{4}\end{cases},\quad F(\xi)=\frac{sn\xi}{1\pm dn\xi}, \tag{2.31}$$

$$vii\begin{cases}A=\dfrac{m^2}{4}\\B=\dfrac{m^2-2}{2}\\C=\dfrac{m^2}{4}\end{cases},\quad F(\xi)=sn\xi\pm icn\xi,\ \frac{dn\xi}{i\sqrt{1-m^2}sn\xi\pm cn\xi}, \tag{2.32}$$

$$viii\begin{cases}A=\dfrac{1}{4}\\B=\dfrac{1-2m^2}{2}\\C=\dfrac{1}{4}\end{cases},\quad \begin{aligned}F(\xi)=\frac{dn\xi}{mcn\xi\pm i\sqrt{1-m^2}},\ msn\xi\pm idn\xi,\ \frac{sn\xi}{1\pm cn\xi},\\ \frac{cn\xi}{\sqrt{1-m^2}sn\xi\pm dn\xi},\end{aligned} \tag{2.33}$$

$$ix)\begin{cases}A=\dfrac{m^2-1}{4}\\B=\dfrac{m^2+1}{2}\\C=\dfrac{m^2-1}{4}\end{cases},\quad F(\xi)=\frac{dn\xi}{1\pm msn\xi}, \tag{2.34}$$

$$x)\ \begin{cases} A = \dfrac{1-m^2}{4} \\ B = \dfrac{m^2+1}{2} \\ C = \dfrac{1-m^2}{4} \end{cases}, \quad F(\xi) = \frac{cn\xi}{1 \pm sn\xi}, \tag{2.35}$$

$$xi)\ \begin{cases} A = -\dfrac{\left(1-m^2\right)^2}{4} \\ B = \dfrac{m^2+1}{2} \\ C = -\dfrac{1}{4} \end{cases}, \quad F(\xi) = mcn\xi \pm dn\xi, \tag{2.36}$$

$$xii\ \begin{cases} A = \dfrac{1}{4} \\ B = \dfrac{m^2+1}{2} \\ C = \dfrac{\left(1-m^2\right)^2}{4} \end{cases}, \quad F(\xi) = \frac{sn\xi}{dn\xi \pm cn\xi}, \tag{2.37}$$

$$xiii)\ \begin{cases} A = \dfrac{1}{4} \\ B = \dfrac{m^2-2}{2} \\ C = \dfrac{m^4}{4} \end{cases}, \quad F(\xi) = \frac{cn}{\sqrt{1-m^2} \pm dn\xi}, \tag{2.38}$$

olmak üzere Chen ve Zhang [75] tarafından elde edilmiştir.

Yukarıda bahsedilen eliptik fonksiyon metotları üzerine çalışmalar yapılarak 2004 yılında *Jacobi eliptik rasyonel açılım metodu* [76], 2006 yılında *Weierstrass Jacobi eliptik fonksiyon açılım metodu* [77] literatüre kazandırılarak lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin dalga çözümleri elde edilmiştir.

2008 yılında Wang ve arkadaşları tarafından (2.1) denkleminin dalga çözümlerini elde etmek için sunulan $\dfrac{G'}{G}$ *açılım metodunun* [78] yukarıda bahsedilen *tanh* metotlarından farklı olan tarafı Riccati diferensiyel denkleminin yerine $G = G(\xi)$ olmak üzere

$$G'' + \lambda G' + \mu G = 0, \tag{2.39}$$

şeklinde ikinci mertebeden sabit katsayılı lineer bir diferensiyel denkleminin göz önüne alınmasıdır. Ayrıca (2.1) denklemi için

$$u\left(x,t\right)=\sum_{m=0}^{M}a_m\left(\frac{G'}{G}\right)^m, \tag{2.40}$$

olacak şekilde çözüm aranır. (2.40) çözümü yapılırken $\frac{G'}{G}$ fonksiyonunun değeri, (2.39) denkleminin çözümünde hesaplanan G çözüm fonksiyonu yardımıyla elde edilir.

2010 yılında Guo ve Zhou [79] tarafından *genişletilmiş* $\frac{G'}{G}$ *açılım metodu* literatüre kazandırılmıştır. Bu metodun $\frac{G'}{G}$ *açılım metodundan* farklı olan tarafı (2.39) denklemi aynı kalmak şartıyla (2.1) denklemi için çözüm fonksiyonunun

$$u(\xi)=a_0+\sum_{i=1}^{n}\left\{a_i\left(\frac{G'}{G}\right)^i+b_i\left(\frac{G'}{G}\right)^{i-1}\sqrt{\sigma\left(1+\frac{1}{\mu}\left(\frac{G'}{G}\right)^2\right)}\right\}, \tag{2.41}$$

olarak seçilmesidir.

Daha sonra 2010 yılında Lü ve arkadaşları [80] tarafından *genelleştirilmiş* $\frac{G'}{G}$ *açılım metodu* literatüre kazandırılmıştır. Bu metodun $\frac{G'}{G}$ *açılım metodundan* farklı olan tarafı (2.39) denklemi yerine

$$f'=h_0+h_1f+h_2f^2+h_3f^3, \tag{2.42}$$

alınması ve (2.1) denklemi için çözüm fonksiyonunun

$$u(\xi)=A_0+\sum_{i=1}^{m}A_i\left(\frac{f'}{f}\right)^i, \quad A_m\neq 0, \tag{2.43}$$

olarak seçilmesidir.

Bu bölümde, analizleri yapılan analitik metotlardan Kudryashov metodunda kullanılan yardımcı denklem üzerinde, üçüncü bölümde bazı genellemeler yapılarak Kudryashov metodunda elde edilen çözümlerden farklı çözümler elde edilmiştir.

3. LİNEER OLMAYAN KISMİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN DALGA ÇÖZÜMLERİ İÇİN BAZI UYGULAMALAR

İkinci bölümde analizleri yapılan ve lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin dalga çözümlerini veren metotlara bakıldığında hepsinin ortak bir noktası, çözüme ulaşmak için yardımcı bir denklem ve bu denklemin çözümlerinin kullanılmasıdır. Örneğin, tanh metotlarının hepsinde yardımcı bir denklem olarak Riccati diferensiyel denklemi ve versiyonları, Kudryashov metodunda yardımcı denklem olarak Bernoulli denklemi, eliptik fonksiyonlar kullanılarak çözüme ulaşılan Jacobi eliptik fonksiyon metotlarında ise farklı bir Riccati diferensiyel denklemi ve $\frac{G'}{G}$-açılım metodunda ikinci mertebeden sabit katsayılı bir diferensiyel denklem kullanılmıştır. Ayrıca bu metotların birbirlerinden farklı olan taraflarından bir diğeri ise aranılan çözüm formunun farklı olmasıdır.

Bu bölümde, ikinci bölümde analizi yapılan Kudryashov metodunda (2.21) ile verilen Bernoulli denkleminden ilham alarak (2.21) denklemi yerine

$$F' = BF^{n} - AF, \quad n \geq 2, \tag{3.1}$$

şeklinde daha genel bir Bernoulli denklemi göz önüne alınıp bu denklemin çözüm fonksiyonu

$$F(\xi) = \left(\frac{B}{A} + ce^{A(n-1)\xi} \right)^{\frac{1}{1-n}}, \tag{3.2}$$

şeklinde kolayca yazılabilir. Burada *A* ve *B* keyfi sabitler ve $F' = \frac{dF}{d\xi}$ dir. A ve B ye verilecek keyfi değerler ile

1. Durum

$$\begin{cases} A = 1, \\ B = 1, \end{cases} \qquad F(\xi) = \left(1 + cCosh\left[(n-1)\xi\right] + cSinh\left[(n-1)\xi\right]\right)^{\frac{1}{1-n}}. \tag{3.3}$$

2. Durum

$$\begin{cases} A = -1, \\ B = 1, \end{cases} \qquad F(\xi) = \left(-1 + cCosh\left[(1-n)\xi\right] + cSinh\left[(1-n)\xi\right]\right)^{\frac{1}{1-n}}. \tag{3.4}$$

3. Durum

$$\begin{cases} A = i, \\ B = 1, \end{cases} \qquad F(\xi) = \left(\frac{1}{i} + cCos\left[(n-1)\xi\right] + icSin\left[(n-1)\xi\right] \right)^{\frac{1}{1-n}}, \ \left(i^2 = -1\right). \tag{3.5}$$

4. Durum

$$\begin{cases} A=1, \\ B=i, \end{cases} \qquad F(\xi)=\left(i+cCosh\left[(n-1)\xi\right]+cSinh\left[(n-1)\xi\right]\right)^{\frac{1}{1-n}},\ \left(i^2=-1\right). \quad (3.6)$$

5. Durum

$$A=B=i, \qquad F(\xi)=\left(1+cCos\left[(n-1)\xi\right]+icSin\left[(n-1)\xi\right]\right)^{\frac{1}{1-n}},\ \left(i^2=-1\right). \quad (3.7)$$

6. Durum

$$A=B=-i, \qquad F(\xi)=\left(1+cCos\left[(n-1)\xi\right]-icSin\left[(n-1)\xi\right]\right)^{\frac{1}{1-n}},\ \left(i^2=-1\right), \quad (3.8)$$

şeklinde (3.1) denkleminin bazı özel çözümleri yazılabilir. Burada c integrasyon sabitidir. Ayrıca (2.1) denkleminin çözümü

$$F(\xi)=a_0+\sum_{i=1}^{M}a_iF^i(\xi), \quad (3.9)$$

şeklinde aranır.

Dikkat edilirse burada özel olarak birinci durumda olduğu gibi $A=1,\ B=1$ ve $n=2$ alındığı zaman ikinci bölümde analizi yapılan Kudryashov metodunun (2.22) çözüm fonksiyonu ile aynı olduğu görülmektedir. Kudryashov metodunda (2.22) ile elde edilen çözüm fonksiyonu sadece hiperbolik formda olmasına karşılık (3.2) çözüm fonksiyonunda A ve B sabitlerine verilen keyfi değerler ile (3.3)-(3.8) eşitliklerinde görüldüğü üzere hiperbolik olmayan çözümlerde elde edilmiştir.

Bu bölümde, özel olarak $n=2$ ve $n=3$ için (3.1) ve (3.2) eşitlikleri yardımı ile Burgers denklemi [8], KdV denklemi [3] ve sığ su dalga denklem sistemi [9] için dalga çözümleri elde edilmiştir.

Dördüncü bölümde, (3.1) Bernoulli denkleminde n değerine özel değerler vermeden ve ayrıca (3.2) çözüm fonksiyonu yardımı ile Burgers denklemi [8], KdV denklemi [3] ve sığ su dalga denklem sistemi [9] için daha genel (yani n sayısına bağlı) dalga çözümleri elde edilmiştir.

3.1. Burgers Denkleminin Bazı Dalga Çözümleri

Bu kısımda literatürde Burgers denklemi olarak bilinen

$$u_t + \alpha u u_x + u_{xx} = 0, \tag{3.10}$$

denklemini göz önüne alalım [8]. (3.10) denklemi için $\alpha \neq 0,\ k \neq 0$ ve $w \neq 0$ olmak üzere $u(x,t) = u(\xi),\quad \xi = kx + wt$ dönüşümü yapıldığında (3.10) denklemi

$$wu' + k\alpha uu' + k^2 u'' = 0, \tag{3.11}$$

haline dönüşür. (3.11) denkleminin her iki tarafı integre edilirse

$$wu + \frac{k\alpha}{2}u^2 + k^2 u' = 0, \tag{3.12}$$

olarak yazılabilir. Burada integrasyon sabiti sıfır olarak alınmıştır.

$n = 2$ için (3.10) denkleminin dalga çözümlerini araştıralım. (3.12) denkleminde en yüksek mertebeden lineer olan u' terimi ile lineer olmayan u^2 terimlerinin dengelenmesi ile (3.9) eşitliğinde $M = 1$ olarak bulunur. Böylece (3.12) denklemi için

$$u = a_0 + a_1 F, \tag{3.13}$$

şeklinde bir çözüm aranabilir. Bu çözümde (3.12) denkleminde bulunan gerekli türevler alınarak yerlerine yazıldığında A ve B keyfi sabitler olmak üzere

$$\begin{gathered} a_0 w + \frac{1}{2}a_0^2 \alpha k = 0, \\ -Aa_1 k^2 + a_1 w + a_0 a_1 k\alpha = 0, \\ a_1 B k^2 + \frac{1}{2}a_1^2 k\alpha = 0, \end{gathered} \tag{3.14}$$

olacak şekilde cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu cebirsel denklem sistemi Mathematica paket programı yardımı ile çözüldüğünde

$k \neq 0$ ve $w \neq 0$ olmak üzere,

I. Durum:

$$a_0 = 0,\quad a_1 = \pm\frac{2B\sqrt{w}}{\sqrt{A\alpha}},\quad k = \mp\frac{\sqrt{w}}{\sqrt{A}},\quad \alpha \neq 0, A \neq 0, B \neq 0. \tag{3.15}$$

II. Durum:

$$a_0 = \pm\frac{2i\sqrt{Aw}}{\alpha},\quad a_1 = \mp\frac{2iB\sqrt{w}}{\sqrt{A\alpha}},\quad k = \pm\frac{i\sqrt{w}}{\sqrt{A}},\quad \alpha \neq 0, A \neq 0, B \neq 0, i^2 = -1, \tag{3.16}$$

olarak istenilen $n = 2$ için sabitler bulunmuş olur. Bulunan bu sabitler (3.2) eşitliğinde göz önüne alınarak (3.13) eşitliğinde yerlerine yazıldığı zaman (3.10) Burgers denkleminin dalga çözümleri

1. Çözüm:

I. Durum göz önüne alındığında (3.10) denkleminin çözümü

$$u(x,t) = \pm \frac{2B\sqrt{w}}{\sqrt{A}\,\alpha}\left(\frac{B}{A} + cCosh[A\xi] + cSinh[A\xi]\right)^{-1}, \qquad \xi = \mp \frac{\sqrt{w}}{\sqrt{A}}x + wt. \tag{3.17}$$

2. Çözüm:

II. Durum göz önüne alındığında (3.10) denkleminin çözümü

$$u(x,t) = \pm \frac{2i\sqrt{Aw}}{\alpha} \mp \frac{2iB\sqrt{w}}{\sqrt{A}\,\alpha}\left(\frac{B}{A} + cCosh[A\xi] + cSinh[A\xi]\right)^{-1}, \qquad \xi = \pm \frac{i\sqrt{w}}{\sqrt{A}}x + wt,\ i^2 = -1, \tag{3.18}$$

olacak şekilde elde edilir. Burada özel olarak A ve B değerleri için aşağıdaki durumlar göz önüne alındığı zaman

1. Durum için çözümler

(i) $A = 1,\ B = 1$ iken

$$u(x,t) = \mp \frac{2\sqrt{w}}{\alpha\left(1 + cCosh\left[tw \pm \sqrt{wx}\right] + cSinh\left[tw \pm \sqrt{wx}\right]\right)}. \tag{3.19}$$

(ii) $A = -1,\ B = 1$ iken

$$u(x,t) = \mp \frac{2\mathrm{i}\sqrt{w}}{\alpha\left(-1 + cCosh\left[tw \pm \mathrm{i}\sqrt{wx}\right] - cSinh\left[tw \pm \mathrm{i}\sqrt{wx}\right]\right)},\ \left(i^2 = -1\right). \tag{3.20}$$

(iii) $A = i,\ B = 1$ iken

$$u(x,t) = \mp \frac{2(-1)^{3/4}\sqrt{w}}{\alpha\left(cCos\left[tw \pm (-1)^{3/4}\sqrt{wx}\right] + \mathrm{i}\left(-1 + cSin\left[tw \pm (-1)^{3/4}\sqrt{wx}\right]\right)\right)},\left(i^2 = -1\right). \tag{3.21}$$

(iv) $A = 1,\ B = i$ iken

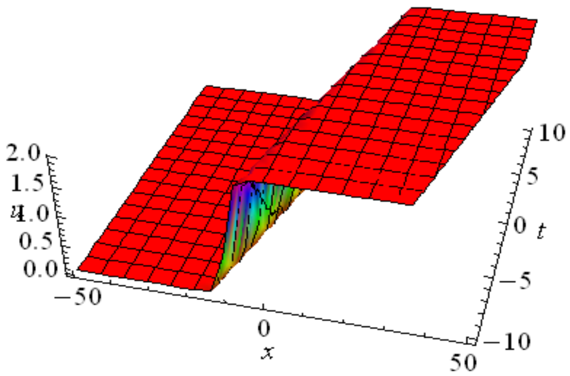
$$u(x,t) = \mp \frac{2\mathrm{i}\sqrt{w}}{\alpha\left(\mathrm{i} + cCosh\left[tw \pm \sqrt{wx}\right] + cSinh\left[tw \pm \sqrt{wx}\right]\right)},\ \left(i^2 = -1\right). \tag{3.22}$$

(v) $A = i,\ B = i$ iken

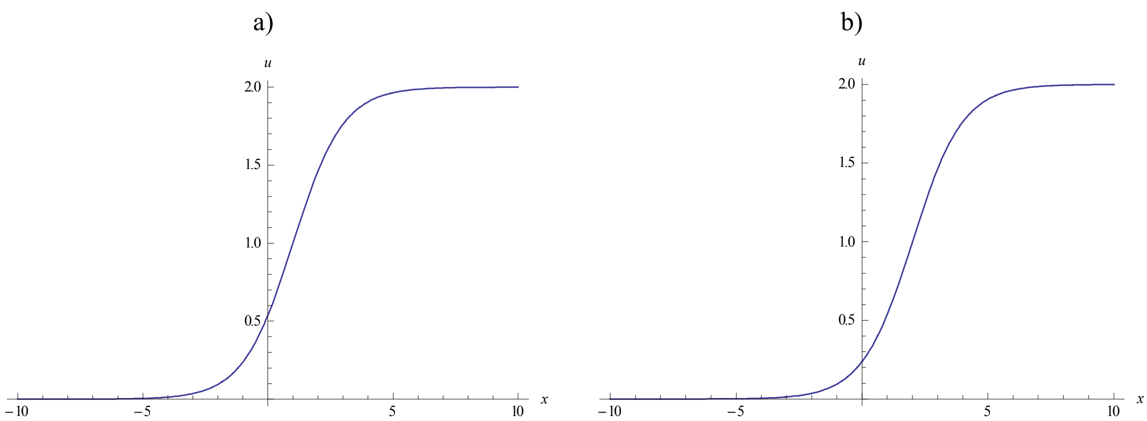
$$u(x,t) = \mp \frac{2(-1)^{1/4}\sqrt{w}}{\alpha\left(1 + cCos\left[tw \mp (-1)^{3/4}\sqrt{w}x\right] + \mathrm{i}cSin\left[tw \mp (-1)^{3/4}\sqrt{w}x\right]\right)},\ \left(i^2 = -1\right). \quad (3.23)$$

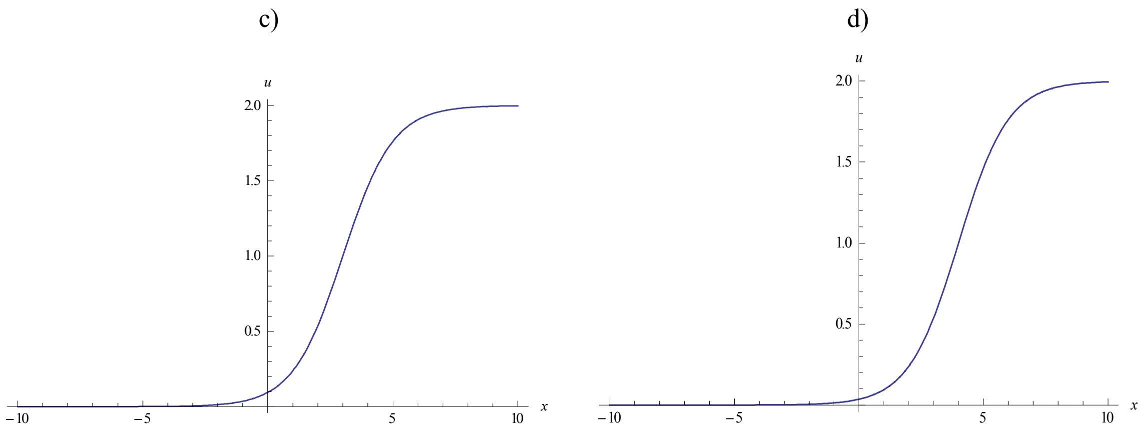
(vi) $A = -i,\ B = -i$ iken

$$u(x,t) = \mp \frac{2(-1)^{3/4}\sqrt{w}}{\alpha\left(1 + cCos\left[tw \mp (-1)^{1/4}\sqrt{w}x\right] - \mathrm{i}cSin\left[tw \mp (-1)^{1/4}\sqrt{w}x\right]\right)},\ \left(i^2 = -1\right). \quad (3.24)$$



Şekil 5. (3.10) denkleminin (3.19) çözümü için üç boyutlu dalga görünümü $(\alpha = 1, w = 1, c = 1)$.





Şekil 6. (3.10) denkleminin (3.19) çözümü için iki boyutlu dalga görünümü $(\alpha=1, w=1, c=1)$,

a) $t=1$, b) $t=2$, c) $t=3$, d) $t=4$.

2. Durum için çözümler

(i) $A=1,\ B=1$ iken

$$u(x,t)=\mp\frac{2\mathrm{i}\sqrt{w}}{\alpha}\left(1-\frac{1}{1+cCosh\left[tw\mp\mathrm{i}\sqrt{wx}\right]+cSinh\left[tw\mp\mathrm{i}\sqrt{wx}\right]}\right),\ \left(i^2=-1\right). \tag{3.25}$$

(ii) $A=-1,\ B=1$ iken

$$u(x,t)=\mp\frac{2}{\alpha}\left(-\sqrt{w}-\frac{\sqrt{w}}{-1+cCosh\left[tw\mp\sqrt{wx}\right]-cSinh\left[tw\mp\sqrt{wx}\right]}\right). \tag{3.26}$$

(iii) $A=i,\ B=1$ iken

$$u(x,t)=\mp\frac{2}{\alpha}\left(\mathrm{i}\sqrt{\mathrm{i}w}-\frac{(-1)^{1/4}\sqrt{w}}{cCos\left[tw\mp(-1)^{1/4}\sqrt{wx}\right]+\mathrm{i}\left(-1+cSin\left[tw\mp(-1)^{1/4}\sqrt{wx}\right]\right)}\right),\ \left(i^2=-1\right). \tag{3.27}$$

(iv) $A=1,\ B=i$ iken

$$u(x,t)=\mp\frac{2\sqrt{w}}{\alpha}\left(\mathrm{i}+\frac{1}{\mathrm{i}+cCosh\left[tw\mp\mathrm{i}\sqrt{wx}\right]+cSinh\left[tw\mp\mathrm{i}\sqrt{wx}\right]}\right),\ \left(i^2=-1\right). \tag{3.28}$$

(v) $A=i,\ B=i$ iken

$$u(x,t)=\mp\frac{2}{\alpha}\left(\mathrm{i}\sqrt{\mathrm{i}w}-\frac{(-1)^{3/4}\sqrt{w}}{1+cCos\left[tw\mp(-1)^{1/4}\sqrt{wx}\right]+\mathrm{i}cSin\left[tw\mp(-1)^{1/4}\sqrt{wx}\right]}\right),\ \left(i^2=-1\right). \tag{3.29}$$

(vi) $A=-i,\ B=-i$ iken

$$u(x,t)=\mp\frac{2}{\alpha}\left(\frac{w}{\sqrt{-\mathrm{i}}\sqrt{w}}-\frac{(-1)^{1/4}\sqrt{w}}{1+cCos\left[tw\mp(-1)^{3/4}\sqrt{wx}\right]-\mathrm{i}cSin\left[tw\mp(-1)^{3/4}\sqrt{wx}\right]}\right),\ \left(i^2=-1\right),\quad (3.30)$$

şeklinde (3.10) denklemi için bazı özel çözümler elde edilmiştir.

$n=3$ için (3.10) denkleminin dalga çözümlerini araştıralım. (3.12) denklemi göz önüne alınırsa dengeleme terimi $M=2$ olarak bulunur. Böylece (3.12) denklemi için

$$u=a_0+a_1F+a_2F^2, \qquad (3.31)$$

şeklinde bir çözüm aranabilir. Bu çözümde (3.12) denkleminde bulunan gerekli türevler alınarak yerlerine yazıldığında

$$\begin{aligned}
&a_0w+\frac{1}{2}a_0^2\alpha k=0,\\
&-Aa_1k^2+a_1w+a_0a_1k\alpha=0,\\
&-2Aa_2k^2+a_2w+\frac{1}{2}a_1^2k\alpha+a_0a_2k\alpha=0,\\
&a_1Bk^2+a_1a_2k\alpha=0,\\
&2a_2Bk^2+\frac{1}{2}a_2^2k\alpha=0,
\end{aligned} \qquad (3.32)$$

olacak şekilde cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu cebirsel denklem sistemi Mathematica paket programı yardımı ile çözüldüğünde

$k\neq 0$ ve $w\neq 0$ olmak üzere,

I. Durum:

$$a_0=0,\quad a_1=0,\quad a_2=\pm\frac{2B\sqrt{2w}}{\sqrt{A\alpha}},\quad k=\mp\frac{\sqrt{w}}{\sqrt{2A}},\quad \alpha\neq 0,\ A\neq 0,\ B\neq 0. \qquad (3.33)$$

II. Durum:

$$a_0=\pm\frac{2i\sqrt{2Aw}}{\alpha},\quad a_1=0,\quad a_2=\mp\frac{2iB\sqrt{2w}}{\sqrt{A\alpha}},\quad k=\pm\frac{i\sqrt{w}}{\sqrt{2A}},\quad \alpha\neq 0, A\neq 0, B\neq 0, i^2=-1, \qquad (3.34)$$

olarak istenilen $n=3$ için sabitler bulunmuş olur. Bulunan bu sabitler (3.2) eşitliğinde göz önüne alınarak (3.31) eşitliğinde yerlerine yazıldığı zaman (3.10) diferensiyel denkleminin dalga çözümleri

1. Çözüm:

I. Durum göz önüne alındığında (3.10) denkleminin çözümü

$$u(x,t)=\pm\frac{2B\sqrt{2w}}{\sqrt{A}\,\alpha}\left(\left(\frac{B}{A}+cCosh[2A\xi]+cSinh[2A\xi]\right)^{-\frac{1}{2}}\right)^{2},$$

$$\xi=\mp\frac{\sqrt{w}}{\sqrt{2A}}x+wt. \tag{3.35}$$

2. Çözüm:

II. Durum göz önüne alındığında (3.10) denkleminin çözümü

$$u(x,t)=\pm\frac{2i\sqrt{2Aw}}{\alpha}\mp\frac{2iB\sqrt{2w}}{\sqrt{A}\,\alpha}\left(\left(\frac{B}{A}+cCosh[2A\xi]+cSinh[2A\xi]\right)^{-\frac{1}{2}}\right)^{2},$$

$$\xi=\pm\frac{i\sqrt{w}}{\sqrt{2A}}x+wt,\ i^2=-1, \tag{3.36}$$

olacak şekilde elde edilir. Burada özel olarak A ve B değerleri için aşağıdaki durumlar göz önüne alındığı zaman

1. Durum için çözümler

(i) $A=1,\ B=1$ iken

$$u(x,t)=\mp\frac{2\sqrt{2}\sqrt{w}}{\alpha\left(1+cCosh\left[2tw\pm\sqrt{2}\sqrt{wx}\right]+cSinh\left[2tw\pm\sqrt{2}\sqrt{wx}\right]\right)}. \tag{3.37}$$

(ii) $A=-1,\ B=1$ iken

$$u(x,t)=\mp\frac{2\mathrm{i}\sqrt{2}\sqrt{w}}{\alpha\left(-1+cCosh\left[2tw\pm\mathrm{i}\sqrt{2}\sqrt{wx}\right]-cSinh\left[2tw\pm\mathrm{i}\sqrt{2}\sqrt{wx}\right]\right)},\ \left(i^2=-1\right). \tag{3.38}$$

(iii) $A=i,\ B=1$ iken

$$u(x,t)=\mp\frac{(2-2\mathrm{i})\sqrt{w}}{\alpha\left(cCos\left[2tw\pm(1-\mathrm{i})\sqrt{wx}\right]+\mathrm{i}\left(-1+cSin\left[2tw\pm(1-\mathrm{i})\sqrt{wx}\right]\right)\right)},\ \left(i^2=-1\right). \tag{3.39}$$

(iv) $A=1,\ B=i$ iken

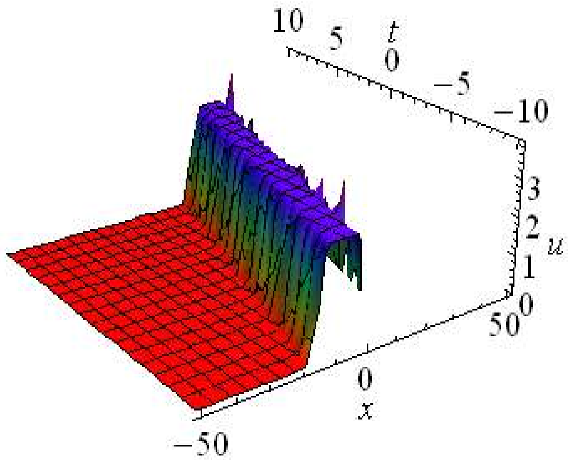
$$u(x,t)=\mp\frac{2\mathrm{i}\sqrt{2}\sqrt{w}}{\alpha\left(\mathrm{i}+cCosh\left[2tw\pm\sqrt{2}\sqrt{wx}\right]+cSinh\left[2tw\pm\sqrt{2}\sqrt{wx}\right]\right)},\ \left(i^2=-1\right). \tag{3.40}$$

(v) $A=i,\ B=i$ iken

$$u(x,t)=\mp\frac{(2+2\mathrm{i})\sqrt{w}}{\alpha\left(1+cCos\left[2tw\pm(1-\mathrm{i})\sqrt{wx}\right]+\mathrm{i}cSin\left[2tw\pm(1-\mathrm{i})\sqrt{wx}\right]\right)},\ \left(i^2=-1\right). \quad (3.41)$$

(vi) $A=-i,\ B=-i$ iken

$$u(x,t)=\mp\frac{(2-2\mathrm{i})\sqrt{w}}{\alpha\left(1+cCos\left[2tw\pm(1+\mathrm{i})\sqrt{wx}\right]-\mathrm{i}cSin\left[2tw\pm(1+\mathrm{i})\sqrt{wx}\right]\right)},\ \left(i^2=-1\right). \quad (3.42)$$



Şekil 7. (3.10) denkleminin (3.37) çözümü için üç boyutlu dalga görünümü $(\alpha=1, w=1, c=1)$.

2. Durum için çözümler

(i) $A=1,\ B=1$ iken

$$u(x,t)=\mp\frac{2\mathrm{i}\sqrt{2}\sqrt{w}}{\alpha}\left(1-\frac{1}{1+cCosh\left[2tw\mp\mathrm{i}\sqrt{2}\sqrt{wx}\right]+cSinh\left[2tw\mp\mathrm{i}\sqrt{2}\sqrt{wx}\right]}\right),\ \left(i^2=-1\right). \quad (3.43)$$

(ii) $A=-1,\ B=1$ iken

$$u(x,t)=\mp\frac{2\sqrt{2}}{\alpha}\left(-\sqrt{w}-\frac{\sqrt{w}}{-1+cCosh\left[2tw\mp\sqrt{2}\sqrt{wx}\right]-cSinh\left[2tw\mp\sqrt{2}\sqrt{wx}\right]}\right),\ \left(i^2=-1\right). \quad (3.44)$$

(iii) $A=i,\ B=1$ iken

$$u(x,t)=\mp\frac{2(-1)^{1/4}\sqrt{2}\sqrt{w}}{\alpha}\left(\mathrm{i}+\frac{1}{\mathrm{i}-cCos\left[2tw\mp(1+\mathrm{i})\sqrt{wx}\right]-\mathrm{i}cSin\left[2tw\mp(1+\mathrm{i})\sqrt{wx}\right]}\right),\ \left(i^2=-1\right). \quad (3.45)$$

(iv) $A=1,\ B=i$ iken

$$u(x,t)=\mp\frac{2\sqrt{2}\sqrt{w}}{\alpha}\left(\mathrm{i}+\frac{1}{\mathrm{i}+cCosh\left[2tw\mp\mathrm{i}\sqrt{2}\sqrt{wx}\right]+cSinh\left[2tw\mp\mathrm{i}\sqrt{2}\sqrt{wx}\right]}\right),\quad \left(i^2=-1\right).\quad (3.46)$$

(v) $A=i,\ B=i$ iken

$$u(x,t)=\mp\frac{2(-1)^{3/4}\sqrt{2}\sqrt{w}}{\alpha}\left(1-\frac{1}{1+cCos\left[2tw+(1+\mathrm{i})\sqrt{wx}\right]+\mathrm{i}cSin\left[2tw+(1+\mathrm{i})\sqrt{wx}\right]}\right),\quad \left(i^2=-1\right).\ (3.47)$$

(vi) $A=-i,\ B=-i$ iken

$$u(x,t)=\mp\frac{2(-1)^{1/4}\sqrt{2}\sqrt{w}}{\alpha}\left(1+\frac{1}{-1-cCos\left[2tw\pm(1-\mathrm{i})\sqrt{wx}\right]+\mathrm{i}cSin\left[2tw\pm(1-\mathrm{i})\sqrt{wx}\right]}\right),\quad \left(i^2=-1\right),\ (3.48)$$

şeklinde (3.10) denklemi için bazı özel çözümler elde edilmiştir.

3.2. KdV Denkleminin Bazı Dalga Çözümleri

Bu kısımda literatürde KdV denklemi olarak bilinen

$$u_t+\alpha uu_x+u_{xxx}=0, \qquad (3.49)$$

denklemini göz önüne alalım [3]. (3.49) denklemi için $u(x,t)=u(\xi),\quad \xi=kx+wt$ dönüşümü yapıldığında (3.49) denklemi

$$wu'+k\alpha uu'+k^3u'''=0, \qquad (3.50)$$

ifadesine dönüşür. (3.50) denkleminin her iki tarafı integre edilirse

$$wu+\frac{k\alpha}{2}u^2+k^3u''=0, \qquad (3.51)$$

elde edilir. Burada integrasyon sabiti sıfır olarak alınmıştır.

$n=2$ için (3.49) denkleminin dalga çözümlerini araştıralım. (3.51) denkleminde en yüksek mertebeden lineer olan u'' terimi ile lineer olmayan u^2 terimlerinin dengelenmesi ile (3.9) eşitliğinde $M=2$ olarak bulunur. Böylece (3.51) denklemi için

$$u=a_0+a_1F+a_2F^2, \qquad (3.52)$$

şeklinde bir çözüm aranabilir. Bu çözümde (3.51) denkleminde bulunan gerekli türevler alınarak yerlerine yazıldığında

$$a_0 w+\frac{1}{2}a_0^2\alpha k=0,$$
$$A^2 a_1 k^3+a_1 w+a_0 a_1 k\alpha=0,$$
$$4A^2 a_2 k^3-3ABa_1 k^3+a_2 w+\frac{1}{2}a_1^2 k\alpha+a_0 a_2 k\alpha=0, \tag{3.53}$$
$$-10Aa_2 Bk^3+2a_1 B^2 k^3+a_1 a_2 k\alpha=0,$$
$$6a_2 B^2 k^3+\frac{1}{2}a_2^2\alpha k=0,$$

olacak şekilde cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu cebirsel denklem sistemi Mathematica paket programı yardımı ile çözüldüğünde

$k\neq 0,\quad w\neq 0$ olmak üzere

$$a_0=0,\quad a_1=\frac{12(-1)^{\frac{2}{3}}Bw^{\frac{2}{3}}}{A^{\frac{1}{3}}\alpha},\quad a_2=-\frac{12(-1)^{\frac{2}{3}}B^2 w^{\frac{2}{3}}}{A^{\frac{4}{3}}\alpha},$$
$$k=\frac{(-1)^{\frac{1}{3}}w^{\frac{1}{3}}}{A^{\frac{2}{3}}},\quad A\neq 0,\quad \alpha\neq 0. \tag{3.54}$$

olarak istenilen $n=2$ için sabitler bulunmuş olur. Bulunan bu sabitler (3.2) eşitliğinde göz önüne alınarak (3.52) eşitliğinde yerlerine yazıldığı zaman (3.49) KdV denkleminin dalga çözümü

$$u(x,t)=\frac{12(-1)^{\frac{2}{3}}Bw^{\frac{2}{3}}}{A^{\frac{1}{3}}\alpha}\left(\frac{B}{A}+cCosh[A\xi]+cSinh[A\xi]\right)^{-1}-$$
$$-\frac{12(-1)^{\frac{2}{3}}B^2w^{\frac{2}{3}}}{A^{\frac{4}{3}}\alpha}\left(\frac{B}{A}+cCosh[A\xi]+cSinh[A\xi]\right)^{-2}, \tag{3.55}$$
$$\xi=\frac{(-1)^{\frac{1}{3}}w^{\frac{1}{3}}}{A^{\frac{2}{3}}}x+wt,$$

olacak şekilde elde edilir. Burada özel olarak A ve B değerleri için aşağıdaki durumlar göz önüne alındığı zaman

(i) $A=1,\ B=1$ iken

$$u(x,t)=\frac{12(-1)^{2/3}cw^{2/3}\left(Cosh\left[tw+(-1)^{1/3}w^{1/3}x\right]+Sinh\left[tw+(-1)^{1/3}w^{1/3}x\right]\right)}{\alpha\left(1+cCosh\left[tw+(-1)^{1/3}w^{1/3}x\right]+cSinh\left[tw+(-1)^{1/3}w^{1/3}x\right]\right)^2}. \tag{3.56}$$

(ii) $A=-1,\ B=1$ iken

$$u(x,t)=\frac{12(-1)^{1/3}cw^{2/3}\left(Cosh\left[tw-(-1)^{2/3}w^{1/3}x\right]-Sinh\left[tw-(-1)^{2/3}w^{1/3}x\right]\right)}{\alpha\left(1-cCosh\left[tw-(-1)^{2/3}w^{1/3}x\right]+cSinh\left[tw-(-1)^{2/3}w^{1/3}x\right]\right)^2}. \quad (3.57)$$

(iii) $A=i,\ B=1$ iken

$$u(x,t)=\frac{12icw^{2/3}\left(Cos\left[tw+w^{1/3}x\right]+iSin\left[tw+w^{1/3}x\right]\right)}{\alpha\left(cCos\left[tw+w^{1/3}x\right]+i\left(-1+cSin\left[tw+w^{1/3}x\right]\right)\right)^2},\left(i^2=-1\right). \quad (3.58)$$

(iv) $A=1,\ B=i$ iken

$$u(x,t)=-\frac{12(-1)^{1/6}cw^{2/3}\left(Cosh\left[tw+(-1)^{1/3}w^{1/3}x\right]+Sinh\left[tw+(-1)^{1/3}w^{1/3}x\right]\right)}{\alpha\left(i+cCosh\left[tw+(-1)^{1/3}w^{1/3}x\right]+cSinh\left[tw+(-1)^{1/3}w^{1/3}x\right]\right)^2},\ \left(i^2=-1\right). \quad (3.59)$$

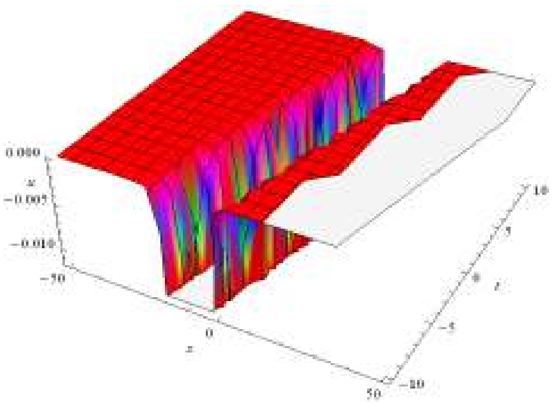
(v) $A=i,\ B=i$ iken

$$u(x,t)=-\frac{12cw^{2/3}\left(Cos\left[tw+w^{1/3}x\right]+iSin\left[tw+w^{1/3}x\right]\right)}{\alpha\left(1+cCos\left[tw+w^{1/3}x\right]+icSin\left[tw+w^{1/3}x\right]\right)^2},\ \left(i^2=-1\right). \quad (3.60)$$

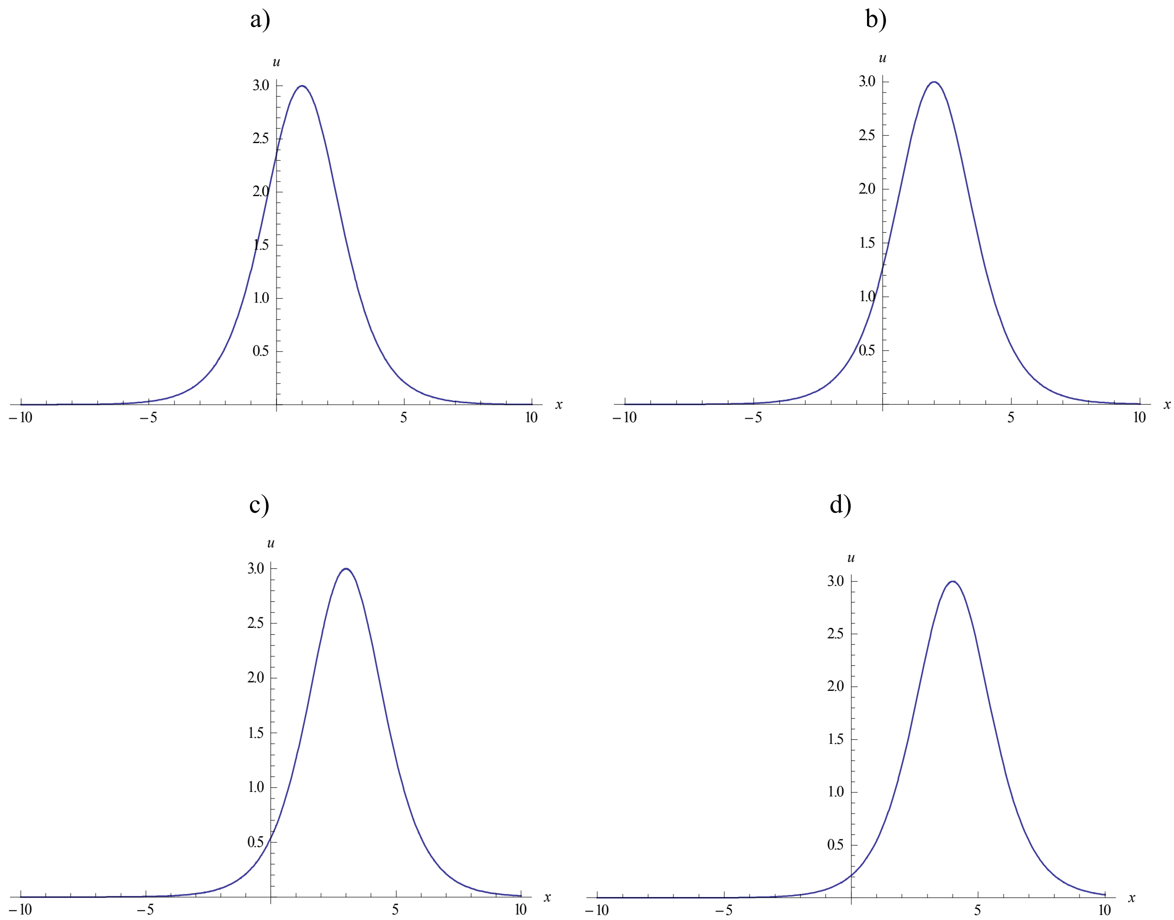
(vi) $A=-i,\ B=-i$ iken

$$u(x,t)=\frac{12(-1)^{1/3}cw^{2/3}\left(Cos\left[tw+(-1)^{2/3}w^{1/3}x\right]-iSin\left[tw+(-1)^{2/3}w^{1/3}x\right]\right)}{\alpha\left(1+cCos\left[tw+(-1)^{2/3}w^{1/3}x\right]-icSin\left[tw+(-1)^{2/3}w^{1/3}x\right]\right)^2},\ \left(i^2=-1\right), \quad (3.61)$$

şeklinde (3.49) denklemi için bazı özel çözümler elde edilmiştir.



Şekil 8. (3.49) denkleminin (3.56) çözümü için üç boyutlu dalga görünümü $(\alpha=1, w=1, c=1)$.



Şekil 9. (3.49) denkleminin (3.56) çözümü için iki boyutlu dalga görünümü $(\alpha = 1, w = 1, c = 1)$,

a) $t = 1$, b) $t = 2$, c) $t = 3$, d) $t = 4$.

$n = 3$ için (3.49) denkleminin dalga çözümlerini araştıralım. (3.51) denklemi göz önüne alınırsa dengeleme terimi $M = 4$ olarak bulunur. Böylece (3.51) denklemi için

$$u = a_0 + a_1F + a_2F^2 + a_3F^3 + a_4F^4, \tag{3.62}$$

şeklinde bir çözüm aranabilir. Bu çözümde (3.51) denkleminde bulunan gerekli türevler alınarak yerlerine yazıldığında

$$a_0w + \frac{1}{2}a_0^2\alpha k = 0,$$

$$A^2a_1k^3 + a_1w + a_0a_1k\alpha = 0,$$

$$4A^2a_2k^3 + a_2w + \frac{1}{2}a_1^2k\alpha + a_0a_2k\alpha = 0,$$

$$9A^2a_3k^3 - 4Aa_1Bk^3 + a_3w + a_1a_2k\alpha + a_0a_3k\alpha = 0,$$

$$16A^2a_4k^3 - 12Aa_2Bk^3 + a_4w + \frac{1}{2}a_2^2k\alpha + a_1a_3k\alpha + a_0a_4k\alpha = 0,$$

$$-24Aa_3Bk^3 + 3a_1B^2k^3 + a_2a_3k\alpha + a_1a_4k\alpha = 0,$$

$$-40Aa_4Bk^3+8a_2B^2k^3+\frac{1}{2}a_3^2k\alpha+a_2a_4k\alpha=0,$$
$$15a_3B^2k^3+a_3a_4k\alpha=0, \tag{3.63}$$
$$24a_4B^2k^3+\frac{1}{2}a_4^2k\alpha=0,$$

olacak şekilde cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu cebirsel denklem sistemi Mathematica paket programı yardımı ile çözüldüğünde

$k\neq 0$ ve $w\neq 0$ olmak üzere

$$a_2=\frac{12(-2)^{\frac{2}{3}}Bw^{\frac{2}{3}}}{A^{\frac{1}{3}}\alpha},\quad a_4=-\frac{12(-2)^{\frac{2}{3}}B^2w^{\frac{2}{3}}}{A^{\frac{4}{3}}\alpha},$$
$$a_0=a_1=a_3=0,\quad k=\frac{(-1)^{\frac{1}{3}}w^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{2}{3}}A^{\frac{2}{3}}},\quad A\neq 0,\quad \alpha\neq 0, \tag{3.64}$$

olarak istenilen $n=3$ için sabitler bulunmuş olur. Bulunan bu sabitler (3.2) eşitliğinde göz önüne alınarak (3.62) eşitliğinde yerlerine yazıldığı zaman (3.49) KdV denkleminin dalga çözümü

$$u(x,t)=\frac{12(-2)^{\frac{2}{3}}Bw^{\frac{2}{3}}}{A^{\frac{1}{3}}\alpha}\left(\frac{B}{A}+cCosh[A\xi]+cSinh[A\xi]\right)^{-1}-$$
$$-\frac{12(-2)^{\frac{2}{3}}B^2w^{\frac{2}{3}}}{A^{\frac{4}{3}}\alpha}\left(\frac{B}{A}+cCosh[A\xi]+cSinh[A\xi]\right)^{-2}, \tag{3.65}$$
$$\xi=\frac{(-1)^{\frac{1}{3}}w^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{2}{3}}A^{\frac{2}{3}}}x+wt,$$

olacak şekilde elde edilir. Burada özel olarak A ve B değerleri için aşağıdaki durumlar göz önüne alındığı zaman

(i) $A=1,\ B=1$ iken

$$u(x,t)=\frac{12(-2)^{2/3}cw^{2/3}\left(Cosh\left[2tw-2^{1/3}w^{1/3}x\right]+Sinh\left[2tw-2^{1/3}w^{1/3}x\right]\right)}{\alpha\left(1+cCosh\left[2tw-2^{1/3}w^{1/3}x\right]+cSinh\left[2tw-2^{1/3}w^{1/3}x\right]\right)^2}. \tag{3.66}$$

(ii) $A=-1,\ B=1$ iken

$$u(x,t)=\frac{12(-2)^{2/3}cw^{2/3}\left(-Cosh\left[2tw+(-2)^{1/3}w^{1/3}x\right]+Sinh\left[2tw+(-2)^{1/3}w^{1/3}x\right]\right)}{\alpha\left(1-cCosh\left[2tw+(-2)^{1/3}w^{1/3}x\right]+cSinh\left[2tw+(-2)^{1/3}w^{1/3}x\right]\right)^2}. \tag{3.67}$$

(iii) $A=i,\ B=1$ iken

$$u(x,t)=-\frac{12(-1)^{5/6}\,2^{2/3}cw^{2/3}}{\alpha\left((-\mathrm{i}+c)Cos\left[tw+\frac{(-1)^{2/3}w^{1/3}x}{2^{2/3}}\right]+\mathrm{i}(\mathrm{i}+c)Sin\left[tw+\frac{(-1)^{2/3}w^{1/3}x}{2^{2/3}}\right]\right)^2},\ (i^2=-1). \quad (3.68)$$

(iv) $A=1,\ B=i$ iken

$$u(x,t)=\frac{12\mathrm{i}(-2)^{2/3}cw^{2/3}\left(Cosh\left[2tw-2^{1/3}w^{1/3}x\right]+Sinh\left[2tw-2^{1/3}w^{1/3}x\right]\right)}{\alpha\left(\mathrm{i}+cCosh\left[2tw-2^{1/3}w^{1/3}x\right]+cSinh\left[2tw-2^{1/3}w^{1/3}x\right]\right)^2},\ (i^2=-1). \quad (3.69)$$

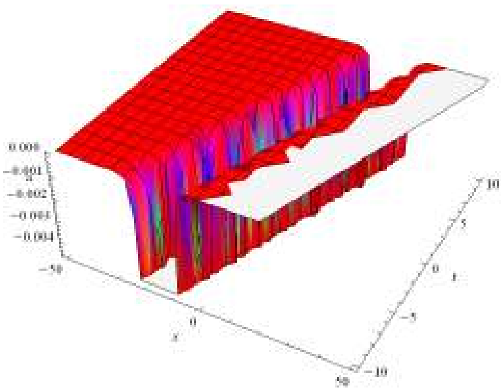
(v) $A=i,\ B=i$ iken

$$u(x,t)=\frac{12(-1)^{1/3}2^{2/3}cw^{2/3}}{\alpha\left((1+c)Cos\left[tw+\frac{(-1)^{2/3}w^{1/3}x}{2^{2/3}}\right]+\mathrm{i}(-1+c)Sin\left[tw+\frac{(-1)^{2/3}w^{1/3}x}{2^{2/3}}\right]\right)^2},\ (i^2=-1). \quad (3.70)$$

(vi) $A=-i,\ B=-i$ iken

$$u(x,t)=-\frac{12(-2)^{2/3}cw^{2/3}\left(Cos\left[2tw-(-2)^{1/3}w^{1/3}x\right]-\mathrm{i}Sin\left[2tw-(-2)^{1/3}w^{1/3}x\right]\right)}{\alpha\left(1+cCos\left[2tw-(-2)^{1/3}w^{1/3}x\right]-\mathrm{i}cSin\left[2tw-(-2)^{1/3}w^{1/3}x\right]\right)^2},\ (i^2=-1). \quad (3.71)$$

şeklinde (3.49) denklemi için bazı özel çözümler elde edilmiştir.



Şekil 10. (3.49) denkleminin (3.66) çözümü için üç boyutlu dalga görünümü $(\alpha=1, w=1, c=1)$.

3.3. Sığ Su Dalga Denklem Sisteminin Bazı Dalga Çözümleri

Bu kısımda farklı bir örnek olarak

$$\begin{aligned} &u_t+u_xv+v_xu+v_{xxx}=0,\\ &v_t+u_x+vv_x=0, \end{aligned} \quad (3.72)$$

şeklinde tanımlanan sığ su dalga denklem sistemini göz önüne alalım [9]. (3.72) denklemi için $u(x,t)=u(\xi)$ ve $v(x,t)=v(\xi)$, $\xi = kx+wt$ dönüşümü yapıldığında (3.72) denklemi

$$\begin{aligned} &wu'+ku'v+kv'u+k^3v'''=0, \\ &wv'+ku'+kvv'=0, \end{aligned} \tag{3.73}$$

sistemine dönüşür. (3.73) denklem sisteminin her iki tarafı integre edilirse

$$\begin{aligned} &wu+kuv+k^3v''=0, \\ &wv+ku+\frac{k}{2}v^2=0, \end{aligned} \tag{3.74}$$

olarak yazılabilir. Burada integrasyon sabiti sıfır olarak alınmıştır. (3.72) denklem sisteminin çözümü,

$$u(x,t)=u(\xi)=\sum_{i=0}^{M_1} a_i F^i, \quad v(x,t)=v(\xi)=\sum_{i=0}^{M_2} b_i F^i, \tag{3.75}$$

formunda ifade edilir.

$n=2$ alınırsa, (3.74) denklem sisteminde en yüksek mertebeden lineer olan terimi ile lineer olmayan terimlerinin dengelenmesi ile $M_1=2$, $M_2=1$ bulunur ve

$$u=a_0+a_1F+a_2F^2, \quad v=b_0+b_1F, \tag{3.76}$$

şeklinde bir çözüm aranabilir. Bu çözüm (3.74) denklem sisteminde yerine yazıldığında

$$\begin{aligned} &a_0b_0k+a_0w=0, \\ &a_1b_0k+a_0b_1k+A^2b_1k^3+a_1w=0, \\ &a_2b_0k+a_1b_1k-3ABb_1k^3+a_2w=0, \\ &a_2b_1k+2B^2b_1k^3=0, \\ &a_0k+\frac{1}{2}b_0^2k+b_0w=0, \\ &a_1k+b_0b_1k+b_1w=0, \\ &a_2k+\frac{1}{2}b_1^2k=0, \end{aligned} \tag{3.77}$$

olacak şekilde cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu cebirsel denklem sistemi Mathematica paket programı yardımı ile çözüldüğünde

$k \neq 0$ ve $w \neq 0$ olmak üzere,

I. Durum:

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 2Bw, \quad a_2 = -\frac{2B^2 w}{A},$$
$$b_0 = \pm 2\sqrt{Aw}, \quad b_1 = \mp \frac{2B\sqrt{Aw}}{A}, \tag{3.78}$$
$$k = \mp \frac{\sqrt{w}}{\sqrt{A}}, \quad A \neq 0.$$

II. Durum:

$$a_0 = 0, \quad a_1 = -2Bw, \quad a_2 = \frac{2B^2 w}{A},$$
$$b_0 = \pm 2i\sqrt{Aw}, \quad b_1 = \mp \frac{2Bi\sqrt{Aw}}{A}, \tag{3.79}$$
$$k = \pm \frac{i\sqrt{w}}{\sqrt{A}}, \quad A \neq 0, \quad i^2 = -1.$$

III. Durum:

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 2Bw, \quad a_2 = -\frac{2B^2 w}{A},$$
$$b_0 = 0, \quad b_1 = \mp \frac{2B\sqrt{Aw}}{A}, \tag{3.80}$$
$$k = \pm \frac{i\sqrt{w}}{\sqrt{A}}, \quad A \neq 0, \quad i^2 = -1.$$

IV. Durum:

$$a_0 = 0, \quad a_1 = -2Bw, \quad a_2 = \frac{2B^2 w}{A},$$
$$b_0 = 0, \quad b_1 = \pm \frac{2Bi\sqrt{Aw}}{A}, \tag{3.81}$$
$$k = \pm \frac{i\sqrt{w}}{\sqrt{A}}, \quad A \neq 0, \quad i^2 = -1,$$

olarak istenilen $n = 2$ için sabitler bulunmuş olur. Bulunan bu sabitler (3.2) eşitliğinde göz önüne alınarak (3.76) eşitliğinde yerlerine yazıldığı zaman (3.72) diferensiyel denklem sisteminin dalga çözümleri

1. Çözüm:

I. Durum göz önüne alındığında (3.72) denkleminin çözümü

$$u(x,t)=2Bw\left(\frac{B}{A}+cCosh[A\xi]+cSinh[A\xi]\right)^{-1}-\frac{2B^2w}{A}\left(\left(\frac{B}{A}+cCosh[A\xi]+cSinh[A\xi]\right)^{-1}\right)^2,$$

$$v(x,t)=\pm 2\sqrt{Aw}\mp\frac{2B\sqrt{Aw}}{A}\left(\frac{B}{A}+cCosh[A\xi]+cSinh[A\xi]\right)^{-1}, \tag{3.82}$$

$$\xi=\mp\frac{\sqrt{w}}{\sqrt{A}}x+wt$$

olacak şekilde elde edilir.

2. Çözüm:

II. Durum göz önüne alındığında (3.72) denkleminin çözümü,

$$u(x,t)=-2Bw\left(\frac{B}{A}+cCosh[A\xi]+cSinh[A\xi]\right)^{-1}+\frac{2B^2w}{A}\left(\left(\frac{B}{A}+cCosh[A\xi]+cSinh[A\xi]\right)^{-1}\right)^2,$$

$$v(x,t)=\pm 2i\sqrt{Aw}\mp\frac{2iB\sqrt{Aw}}{A}\left(\frac{B}{A}+cCosh[A\xi]+cSinh[A\xi]\right)^{-1}, \tag{3.83}$$

$$\xi=\pm\frac{i\sqrt{w}}{\sqrt{A}}x+wt,\ \left(i^2=-1\right).$$

olacak şekilde elde edilir.

3. Çözüm:

III. Durum göz önüne alındığında (3.72) denkleminin çözümü,

$$u(x,t)=2Bw\left(\frac{B}{A}+cCosh[A\xi]+cSinh[A\xi]\right)^{-1}-\frac{2B^2w}{A}\left(\left(\frac{B}{A}+cCosh[A\xi]+cSinh[A\xi]\right)^{-1}\right)^2,$$

$$v(x,t)=\mp\frac{2B\sqrt{Aw}}{A}\left(\frac{B}{A}+cCosh[A\xi]+cSinh[A\xi]\right)^{-1}, \tag{3.84}$$

$$\xi=\pm\frac{\sqrt{w}}{\sqrt{A}}x+wt,$$

olacak şekilde elde edilir.

4. Çözüm:

IV. Durum göz önüne alındığında (3.72) denkleminin çözümü,

$$u(x,t)=-2Bw\left(\frac{B}{A}+cCosh[A\xi]+cSinh[A\xi]\right)^{-1}+\frac{2B^2w}{A}\left(\left(\frac{B}{A}+cCosh[A\xi]+cSinh[A\xi]\right)^{-1}\right)^2,$$

$$v(x,t)=\pm\frac{2iB\sqrt{w}}{\sqrt{A}}\left(\frac{B}{A}+cCosh[A\xi]+cSinh[A\xi]\right)^{-1}, \tag{3.85}$$

$$\xi=\pm\frac{i\sqrt{w}}{\sqrt{A}}x+wt,\ \left(i^2=-1\right),$$

olacak şekilde elde edilir.

Burada özel olarak A ve B değerleri için aşağıdaki durumlar göz önüne alındığı zaman

1. Durum için çözümler

(i) $A=1,\ B=1$ iken

$$u(x,t)=\mp\frac{2cw\left(Cosh\left[tw\pm\sqrt{wx}\right]+Sinh\left[tw\pm\sqrt{wx}\right]\right)}{\left(1+cCosh\left[tw\pm\sqrt{wx}\right]+cSinh\left[tw\pm\sqrt{wx}\right]\right)^2},$$
$$v(x,t)=\mp2\sqrt{w}\left(1-\frac{1}{1+cCosh\left[tw\pm\sqrt{wx}\right]+cSinh\left[tw\pm\sqrt{wx}\right]}\right). \tag{3.86}$$

(ii) $A=-1,\ B=1$ iken

$$u(x,t)=\frac{2cw\left(Cosh\left[tw+\mathrm{i}\sqrt{wx}\right]-Sinh\left[tw+\mathrm{i}\sqrt{wx}\right]\right)}{\left(1-cCosh\left[tw+\mathrm{i}\sqrt{wx}\right]+cSinh\left[tw+\mathrm{i}\sqrt{wx}\right]\right)^2},$$
$$v(x,t)=2\mathrm{i}\sqrt{w}\left(1+\frac{1}{-1+cCosh\left[tw+\mathrm{i}\sqrt{wx}\right]-cSinh\left[tw+\mathrm{i}\sqrt{wx}\right]}\right),\left(i^2=-1\right). \tag{3.87}$$

(iii) $A=i,\ B=1$ iken

$$u(x,t)=\frac{2cw\left(Cos\left[tw+(-1)^{3/4}\sqrt{wx}\right]+\mathrm{i}Sin\left[tw+(-1)^{3/4}\sqrt{wx}\right]\right)}{\left(cCos\left[tw+(-1)^{3/4}\sqrt{wx}\right]+\mathrm{i}\left(-1+cSin\left[tw+(-1)^{3/4}\sqrt{wx}\right]\right)\right)^2},$$
$$v(x,t)=2(-1)^{1/4}\sqrt{w}\left(1+\frac{\mathrm{i}}{cCos\left[tw+(-1)^{3/4}\sqrt{wx}\right]+\mathrm{i}\left(-1+cSin\left[tw+(-1)^{3/4}\sqrt{wx}\right]\right)}\right),\left(i^2=-1\right). \tag{3.88}$$

(iv) $A=1,\ B=i$ iken

$$u(x,t)=\frac{2\mathrm{i}cw\left(Cosh\left[tw-\sqrt{wx}\right]+Sinh\left[tw-\sqrt{wx}\right]\right)}{\left(\mathrm{i}+cCosh\left[tw-\sqrt{wx}\right]+cSinh\left[tw-\sqrt{wx}\right]\right)^2},$$
$$v(x,t)=2\sqrt{w}\left(1-\frac{\mathrm{i}}{\mathrm{i}+cCosh\left[tw-\sqrt{wx}\right]+cSinh\left[tw-\sqrt{wx}\right]}\right),\left(i^2=-1\right). \tag{3.89}$$

(v) $A=i,\ B=i$ iken

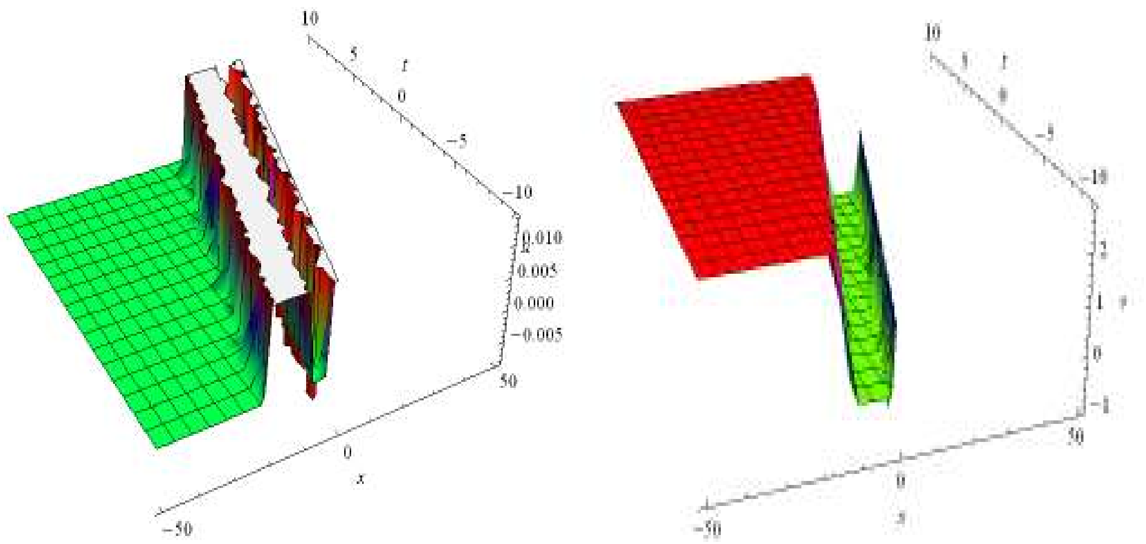
$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{2icw\left(Cos\left[tw+(-1)^{3/4}\sqrt{wx}\right]+iSin\left[tw+(-1)^{3/4}\sqrt{wx}\right]\right)}{\left(1+cCos\left[tw+(-1)^{3/4}\sqrt{wx}\right]+icSin\left[tw+(-1)^{3/4}\sqrt{wx}\right]\right)^2},\\
v(x,t) &= 2(-1)^{1/4}\sqrt{w}\left(1-\frac{1}{1+cCos\left[tw+(-1)^{3/4}\sqrt{wx}\right]+icSin\left[tw+(-1)^{3/4}\sqrt{wx}\right]}\right),\ (i^2=-1).
\end{aligned}
\tag{3.90}
$$

(vi) $A=-i,\ B=-i$ iken

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{-2icwCos\left[tw-(-1)^{1/4}\sqrt{wx}\right]-2cwSin\left[tw-(-1)^{1/4}\sqrt{wx}\right]}{\left(1+cCos\left[tw-(-1)^{1/4}\sqrt{wx}\right]-icSin\left[tw-(-1)^{1/4}\sqrt{wx}\right]\right)^2},\\
v(x,t) &= 2(-1)^{3/4}\sqrt{w}\left(-1+\frac{1}{1+cCos\left[tw-(-1)^{1/4}\sqrt{wx}\right]-icSin\left[tw-(-1)^{1/4}\sqrt{wx}\right]}\right),\ (i^2=-1),
\end{aligned}
\tag{3.91}
$$

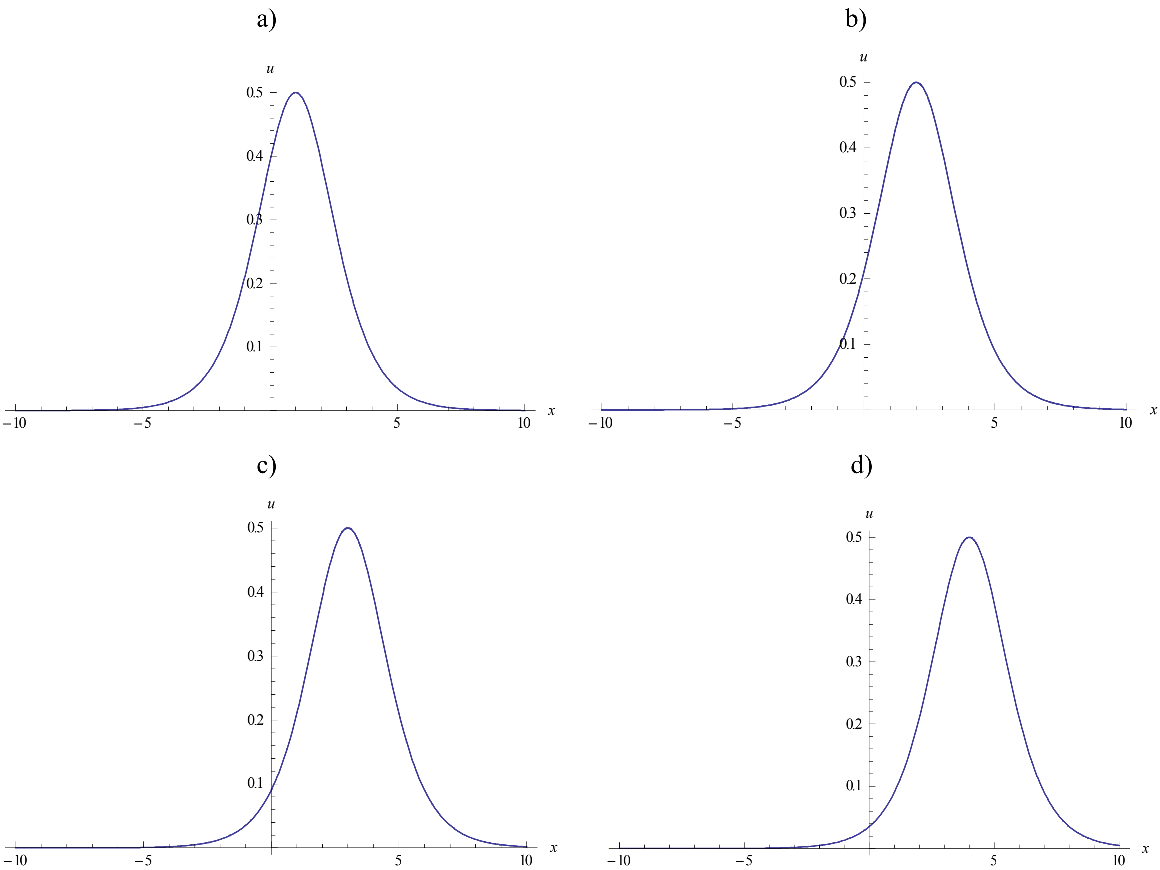
olacak şekilde elde edilir.

a) b)

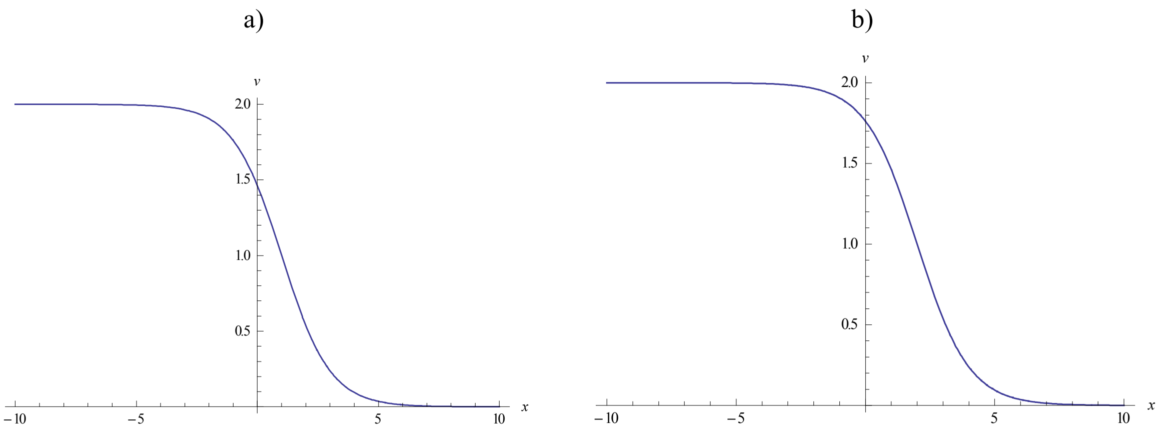


Şekil 11. (3.72) denklem sisteminin (3.86) çözümü için üç boyutlu dalga görünümü

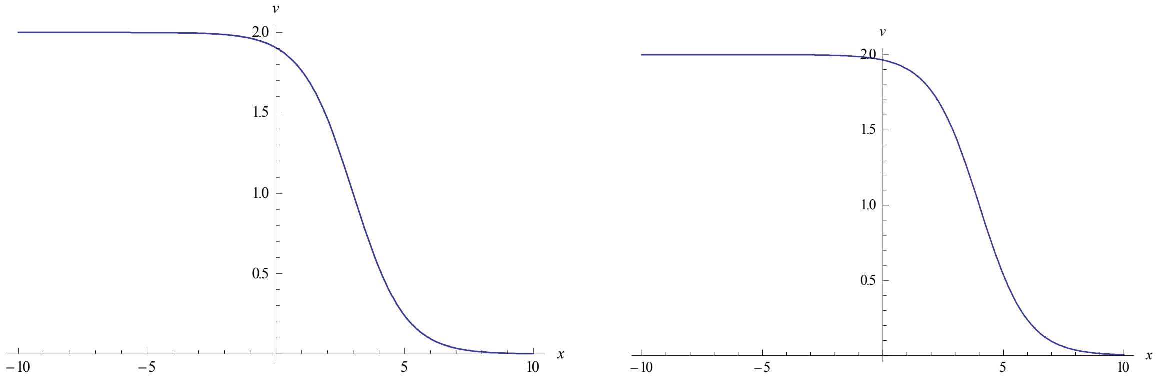
a) $u(x,t)$ için b) $v(x,t)$ için $(\alpha=1, w=1, c=1)$.



Şekil 12. (3.72) denklem sisteminin (3.86) $u(x,t)$ çözümü için iki boyutlu dalga görünümü $(\alpha=1, w=1, c=1)$, a) $t=1$, b) $t=2$, c) $t=3$, d) $t=4$.



c) d)



Şekil 13. (3.72) denklem sisteminin (3.86) $v(x,t)$ çözümü için iki boyutlu dalga görünümü

$(\alpha=1, w=1, c=1)$, a) $t=1$, b) $t=2$, c) $t=3$, d) $t=4$.

2. Durum için çözümler

(i) $A=1,\ B=1$ iken

$$u(x,t)=-\frac{2cw\left(Cosh\left[tw+\mathrm{i}\sqrt{wx}\right]+Sinh\left[tw+\mathrm{i}\sqrt{wx}\right]\right)}{\left(1+cCosh\left[tw+\mathrm{i}\sqrt{wx}\right]+cSinh\left[tw+\mathrm{i}\sqrt{wx}\right]\right)^2},$$
$$v(x,t)=2\mathrm{i}\sqrt{w}\left(1-\frac{1}{1+cCosh\left[tw+\mathrm{i}\sqrt{wx}\right]+cSinh\left[tw+\mathrm{i}\sqrt{wx}\right]}\right),\left(i^2=-1\right). \tag{3.92}$$

(ii) $A=-1,\ B=1$ iken

$$u(x,t)=\frac{2cw\left(-Cosh\left[tw+\sqrt{wx}\right]+Sinh\left[tw+\sqrt{wx}\right]\right)}{\left(1-cCosh\left[tw+\sqrt{wx}\right]+cSinh\left[tw+\sqrt{wx}\right]\right)^2},$$
$$v(x,t)=2\sqrt{w}\left(-1+\frac{1}{1-cCosh\left[tw+\sqrt{wx}\right]+cSinh\left[tw+\sqrt{wx}\right]}\right). \tag{3.93}$$

(iii) $A=i,\ B=1$ iken

$$u(x,t)=-\frac{2cw\left(Cos\left[tw+(-1)^{1/4}\sqrt{wx}\right]+\mathrm{i}Sin\left[tw+(-1)^{1/4}\sqrt{wx}\right]\right)}{\left(cCos\left[tw+(-1)^{1/4}\sqrt{wx}\right]+\mathrm{i}\left(-1+cSin\left[tw+(-1)^{1/4}\sqrt{wx}\right]\right)\right)^2},$$
$$v(x,t)=2(-1)^{1/4}\sqrt{w}\left(\mathrm{i}+\frac{1}{\mathrm{i}-cCos\left[tw+(-1)^{1/4}\sqrt{wx}\right]-\mathrm{i}cSin\left[tw+(-1)^{1/4}\sqrt{wx}\right]}\right),\left(i^2=-1\right). \tag{3.94}$$

(iv) $A=1,\ B=i$ iken

$$u(x,t)=-\frac{2icw\left(Cosh\left[tw+i\sqrt{wx}\right]+Sinh\left[tw+i\sqrt{wx}\right]\right)}{\left(i+cCosh\left[tw+i\sqrt{wx}\right]+cSinh\left[tw+i\sqrt{wx}\right]\right)^{2}},$$
$$v(x,t)=2\sqrt{w}\left(i+\frac{1}{i+cCosh\left[tw+i\sqrt{wx}\right]+cSinh\left[tw+i\sqrt{wx}\right]}\right),\left(i^{2}=-1\right). \tag{3.95}$$

(v) $A=i,\ B=i$ iken

$$u(x,t)=\frac{2cw\left(-iCos\left[tw+(-1)^{1/4}\sqrt{wx}\right]+Sin\left[tw+(-1)^{1/4}\sqrt{wx}\right]\right)}{\left(1+cCos\left[tw+(-1)^{1/4}\sqrt{wx}\right]+icSin\left[tw+(-1)^{1/4}\sqrt{wx}\right]\right)^{2}},$$
$$v(x,t)=2(-1)^{3/4}\sqrt{w}\left(1-\frac{1}{1+cCos\left[tw+(-1)^{1/4}\sqrt{wx}\right]+icSin\left[tw+(-1)^{1/4}\sqrt{wx}\right]}\right),\left(i^{2}=-1\right). \tag{3.96}$$

(vi) $A=-i,\ B=-i$ iken

$$u(x,t)=\frac{2cw\left(iCos\left[tw+(-1)^{3/4}\sqrt{wx}\right]+Sin\left[tw+(-1)^{3/4}\sqrt{wx}\right]\right)}{\left(1+cCos\left[tw+(-1)^{3/4}\sqrt{wx}\right]-icSin\left[tw+(-1)^{3/4}\sqrt{wx}\right]\right)^{2}},$$
$$v(x,t)=2(-1)^{1/4}\sqrt{w}\left(1+\frac{1}{-1-cCos\left[tw+(-1)^{3/4}\sqrt{wx}\right]+icSin\left[tw+(-1)^{3/4}\sqrt{wx}\right]}\right),\left(i^{2}=-1\right). \tag{3.97}$$

3. Durum için çözümler

(i) $A=1,\ B=1$ iken

$$u(x,t)=\frac{2cw\left(Cosh\left[tw+\sqrt{wx}\right]+Sinh\left[tw+\sqrt{wx}\right]\right)}{\left(1+cCosh\left[tw+\sqrt{wx}\right]+cSinh\left[tw+\sqrt{wx}\right]\right)^{2}},$$
$$v(x,t)=-\frac{2\sqrt{w}}{1+cCosh\left[tw+\sqrt{wx}\right]+cSinh\left[tw+\sqrt{wx}\right]}. \tag{3.98}$$

(ii) $A=-1,\ B=1$ iken

$$u(x,t)=\frac{2cw\left(Cosh\left[tw-i\sqrt{wx}\right]-Sinh\left[tw-i\sqrt{wx}\right]\right)}{\left(1-cCosh\left[tw-i\sqrt{wx}\right]+cSinh\left[tw-i\sqrt{wx}\right]\right)^{2}},$$

$$v(x,t)=\frac{2\mathrm{i}\sqrt{w}}{-1+cCosh\left[tw-\mathrm{i}\sqrt{wx}\right]-cSinh\left[tw-\mathrm{i}\sqrt{wx}\right]},\left(i^2=-1\right). \tag{3.99}$$

(iii) $A=i,\ B=1$ iken

$$u(x,t)=\frac{2cw\left(Cos\left[tw-(-1)^{3/4}\sqrt{wx}\right]+\mathrm{i}Sin\left[tw-(-1)^{3/4}\sqrt{wx}\right]\right)}{\left(cCos\left[tw-(-1)^{3/4}\sqrt{wx}\right]+\mathrm{i}\left(-1+cSin\left[tw-(-1)^{3/4}\sqrt{wx}\right]\right)\right)^2},$$

$$v(x,t)=\frac{2(-1)^{3/4}\sqrt{w}}{cCos\left[tw-(-1)^{3/4}\sqrt{wx}\right]+\mathrm{i}(-1+cSin\left[tw-(-1)^{3/4}\sqrt{wx}\right])},\left(i^2=-1\right). \tag{3.100}$$

(iv) $A=1,\ B=i$ iken

$$u(x,t)=\frac{2\mathrm{i}cw\left(Cosh\left[tw+\sqrt{wx}\right]+Sinh\left[tw+\sqrt{wx}\right]\right)}{\left(\mathrm{i}+cCosh\left[tw+\sqrt{wx}\right]+cSinh\left[tw+\sqrt{wx}\right]\right)^2},$$

$$v(x,t)=-\frac{2\mathrm{i}\sqrt{w}}{\mathrm{i}+cCosh\left[tw+\sqrt{wx}\right]+cSinh\left[tw+\sqrt{wx}\right]},\left(i^2=-1\right). \tag{3.101}$$

(v) $A=i,\ B=i$ iken

$$u(x,t)=\frac{2cw\left(-\mathrm{i}Cos\left[tw+(-1)^{1/4}\sqrt{wx}\right]+Sin\left[tw+(-1)^{1/4}\sqrt{wx}\right]\right)}{\left(1+cCos\left[tw+(-1)^{1/4}\sqrt{wx}\right]+\mathrm{i}cSin\left[tw+(-1)^{1/4}\sqrt{wx}\right]\right)^2},$$

$$v(x,t)=\frac{2(-1)^{3/4}\sqrt{w}}{1+cCos\left[tw+(-1)^{1/4}\sqrt{wx}\right]+\mathrm{i}cSin\left[tw+(-1)^{1/4}\sqrt{wx}\right]},\left(i^2=-1\right). \tag{3.102}$$

(vi) $A=-i,\ B=-i$ iken

$$u(x,t)=\frac{-2\mathrm{i}cwCos\left[tw+(-1)^{1/4}\sqrt{wx}\right]-2cwSin\left[tw+(-1)^{1/4}\sqrt{wx}\right]}{\left(1+cCos\left[tw+(-1)^{1/4}\sqrt{wx}\right]-\mathrm{i}cSin\left[tw+(-1)^{1/4}\sqrt{wx}\right]\right)^2},$$

$$v(x,t)=\frac{2(-1)^{3/4}\sqrt{w}}{1+cCos\left[tw+(-1)^{1/4}\sqrt{wx}\right]-\mathrm{i}cSin\left[tw+(-1)^{1/4}\sqrt{wx}\right]},\left(i^2=-1\right). \tag{3.103}$$

4. Durum için çözümler

(i) $A=1,\ B=1$ iken

$$u(x,t)=-\frac{2cw\left(Cosh\left[tw+\mathrm{i}\sqrt{wx}\right]+Sinh\left[tw+\mathrm{i}\sqrt{wx}\right]\right)}{\left(1+cCosh\left[tw+\mathrm{i}\sqrt{wx}\right]+cSinh\left[tw+\mathrm{i}\sqrt{wx}\right]\right)^{2}},$$
$$v(x,t)=\frac{2\mathrm{i}\sqrt{w}}{1+cCosh\left[tw+\mathrm{i}\sqrt{wx}\right]+cSinh\left[tw+\mathrm{i}\sqrt{wx}\right]},\left(i^{2}=-1\right). \tag{3.104}$$

(ii) $A=-1,\ B=1$ iken

$$u(x,t)=\frac{2cw\left(-Cosh\left[tw+\sqrt{wx}\right]+Sinh\left[tw+\sqrt{wx}\right]\right)}{\left(1-cCosh\left[tw+\sqrt{wx}\right]+cSinh\left[tw+\sqrt{wx}\right]\right)^{2}},$$
$$v(x,t)=\frac{2\sqrt{w}}{-1+cCosh\left[tw+\sqrt{wx}\right]-cSinh\left[tw+\sqrt{wx}\right]}. \tag{3.105}$$

(iii) $A=i,\ B=1$ iken

$$u(x,t)=-\frac{2cw\left(Cos\left[tw+(-1)^{1/4}\sqrt{wx}\right]+\mathrm{i}Sin\left[tw+(-1)^{1/4}\sqrt{wx}\right]\right)}{\left(cCos\left[tw+(-1)^{1/4}\sqrt{wx}\right]+\mathrm{i}\left(-1+cSin\left[tw+(-1)^{1/4}\sqrt{wx}\right]\right)\right)^{2}},$$
$$v(x,t)=\frac{2(-1)^{1/4}\sqrt{w}}{cCos\left[tw+(-1)^{1/4}\sqrt{wx}\right]+\mathrm{i}\left(-1+cSin\left[tw+(-1)^{1/4}\sqrt{wx}\right]\right)},\left(i^{2}=-1\right). \tag{3.106}$$

(iv) $A=1,\ B=i$ iken

$$u(x,t)=-\frac{2\mathrm{i}cw\left(Cosh\left[tw+\mathrm{i}\sqrt{wx}\right]+Sinh\left[tw+\mathrm{i}\sqrt{wx}\right]\right)}{\left(\mathrm{i}+cCosh\left[tw+\mathrm{i}\sqrt{wx}\right]+cSinh\left[tw+\mathrm{i}\sqrt{wx}\right]\right)^{2}},$$
$$v(x,t)=-\frac{2\sqrt{w}}{\mathrm{i}+cCosh\left[tw+\mathrm{i}\sqrt{wx}\right]+cSinh\left[tw+\mathrm{i}\sqrt{wx}\right]},\left(i^{2}=-1\right). \tag{3.107}$$

(v) $A=i,\ B=i$ iken

$$u(x,t)=\frac{2cw\left(-\mathrm{i}Cos\left[tw+(-1)^{1/4}\sqrt{wx}\right]+Sin\left[tw+(-1)^{1/4}\sqrt{wx}\right]\right)}{\left(1+cCos\left[tw+(-1)^{1/4}\sqrt{wx}\right]+\mathrm{i}cSin\left[tw+(-1)^{1/4}\sqrt{wx}\right]\right)^{2}},$$
$$v(x,t)=\frac{2(-1)^{3/4}\sqrt{w}}{1+cCos\left[tw+(-1)^{1/4}\sqrt{wx}\right]+\mathrm{i}cSin\left[tw+(-1)^{1/4}\sqrt{wx}\right]},\left(i^{2}=-1\right). \tag{3.108}$$

$(vi)\ A=-i,\ B=-i$ iken

$$u(x,t)=\frac{2cw\left(\mathrm{i}Cos\left[tw+(-1)^{3/4}\sqrt{wx}\right]+Sin\left[tw+(-1)^{3/4}\sqrt{wx}\right]\right)}{\left(1+cCos\left[tw+(-1)^{3/4}\sqrt{wx}\right]-\mathrm{i}cSin\left[tw+(-1)^{3/4}\sqrt{wx}\right]\right)^2},$$
$$v(x,t)=\frac{2(-1)^{1/4}\sqrt{w}}{1+cCos\left[tw+(-1)^{3/4}\sqrt{wx}\right]-\mathrm{i}cSin\left[tw+(-1)^{3/4}\sqrt{wx}\right]},\ \left(i^2=-1\right). \tag{3.109}$$

$n=3$ alınırsa, (3.74) denklem sisteminde en yüksek mertebeden lineer olan terimi ile lineer olmayan terimlerinin dengelenmesi ile $M_1=4$, $M_2=2$ bulunur ve

$$u=a_0+a_1F+a_2F^2+a_3F^3+a_4F^4,\quad v=b_0+b_1F+b_2F^2, \tag{3.110}$$

şeklinde bir çözüm aranabilir. Bu çözüm (3.74) denklem sisteminde yerine yazıldığında

$$\begin{aligned}
&a_0b_0k+a_0w=0,\\
&a_1b_0k+a_0b_1k+A^2b_1k^3+a_1w=0,\\
&a_2b_0k+a_1b_1k+a_0b_2k+4A^2b_2k^3+a_2w=0,\\
&a_3b_0k+a_2b_1k+a_1b_2k-4ABb_1k^3+a_3w=0,\\
&a_4b_0k+a_3b_1k+a_2b_2k-12ABb_2k^3+a_4w=0,\\
&a_4b_1k+a_3b_2k+3B^2b_1k^3=0,\\
&a_4b_2k+8B^2b_2k^3=0,\\
&a_0k+\frac{k}{2}b_0^2+b_0w=0,\\
&a_1k+b_0^2b_1k+b_1w=0,\\
&a_2k+\frac{k}{2}b_1^2+b_0b_2k+b_2w=0,\\
&a_3k+b_1b_2k=0,\\
&a_4k+\frac{k}{2}b_2^2=0,
\end{aligned} \tag{3.111}$$

olacak şekilde cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu cebirsel denklem sistemi Mathematica paket programı yardımı ile çözüldüğünde $k\neq 0$ ve $w\neq 0$ olmak üzere

<u>I. Durum</u>:

$$\begin{aligned}
&a_0=0,\quad a_1=0,\quad a_2=4Bw,\\
&a_3=0,\quad a_4=-\frac{4B^2w}{A},\\
&b_0=\pm 2\sqrt{2Aw},\quad b_1=0,\quad b_2=\mp\frac{2B\sqrt{2Aw}}{A},\\
&k=\mp\frac{\sqrt{w}}{\sqrt{2A}},\quad A\neq 0.
\end{aligned} \tag{3.112}$$

II. Durum:

$$\begin{aligned}
&a_0 = 0, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = -4Bw, \\
&a_3 = 0, \quad a_4 = \frac{4B^2 w}{A}, \\
&b_0 = \pm 2i\sqrt{2Aw}, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = \mp \frac{2iB\sqrt{2Aw}}{A}, \\
&k = \pm \frac{i\sqrt{w}}{\sqrt{2A}}, \quad A \neq 0, \quad i^2 = -1.
\end{aligned} \tag{3.113}$$

III. Durum:

$$\begin{aligned}
&a_0 = 0, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 4Bw, \\
&a_3 = 0, \quad a_4 = -\frac{4B^2 w}{A}, \\
&b_0 = 0, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = \mp \frac{2B\sqrt{2Aw}}{A}, \\
&k = \pm \frac{\sqrt{w}}{\sqrt{2A}}, \quad A \neq 0.
\end{aligned} \tag{3.114}$$

IV. Durum:

$$\begin{aligned}
&a_0 = 0, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = -4Bw, \\
&a_3 = 0, \quad a_4 = \frac{4B^2 w}{A}, \\
&b_0 = 0, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = \pm \frac{2iB\sqrt{2Aw}}{A}, \\
&k = \pm \frac{i\sqrt{w}}{\sqrt{2A}}, \quad A \neq 0 \quad i^2 = -1,
\end{aligned} \tag{3.115}$$

olarak istenilen $n = 3$ için sabitler bulunmuş olur. Bulunan bu sabitler (3.2) eşitliğinde göz önüne alınarak (3.76) eşitliğinde yerlerine yazıldığı zaman (3.72) diferensiyel denklem sisteminin dalga çözümleri

1. Çözüm:

I. Durum göz önüne alındığında (3.72) denkleminin çözümü,

$$u(x,t) = 4Bw\left[\left(\frac{B}{A} + cCosh[2A\xi] + cSinh[2A\xi]\right)^{-\frac{1}{2}}\right]^2 -$$

$$-\frac{4B^2 w}{A}\left[\left(\frac{B}{A} + cCosh[2A\xi] + cSinh[2A\xi]\right)^{-\frac{1}{2}}\right]^4,$$

$$v(x,t) = \pm 2\sqrt{2Aw} \mp \frac{2B\sqrt{2Aw}}{A}\left[\left(\frac{B}{A} + cCosh[2A\xi] + cSinh[2A\xi]\right)^{-\frac{1}{2}}\right]^2, \tag{3.116}$$

$$\xi = \mp \frac{\sqrt{w}}{\sqrt{2A}} x + wt,$$

olacak şekilde elde edilir.

2. Çözüm:

II. Durum göz önüne alındığında (3.72) denkleminin çözümü,

$$\begin{aligned} u(x,t) = -4Bw\left[\left(\frac{B}{A} + cCosh[2A\xi] + cSinh[2A\xi]\right)^{-\frac{1}{2}}\right]^2 + \\ + \frac{4B^2w}{A}\left[\left(\frac{B}{A} + cCosh[2A\xi] + cSinh[2A\xi]\right)^{-\frac{1}{2}}\right]^4, \\ v(x,t) = \pm 2i\sqrt{2Aw} \mp \frac{2iB\sqrt{2Aw}}{A}\left[\left(\frac{B}{A} + cCosh[2A\xi] + cSinh[2A\xi]\right)^{-\frac{1}{2}}\right]^2, \end{aligned} \tag{3.117}$$

$$\xi = \pm \frac{i\sqrt{w}}{\sqrt{2A}} x + wt, \ \left(i^2 = -1\right),$$

olacak şekilde elde edilir.

3. Çözüm:

III. Durum göz önüne alındığında (3.72) denkleminin çözümü,

$$\begin{aligned} u(x,t) = 4Bw\left[\left(\frac{B}{A} + cCosh[2A\xi] + cSinh[2A\xi]\right)^{-\frac{1}{2}}\right]^2 - \\ - \frac{4B^2w}{A}\left[\left(\frac{B}{A} + cCosh[2A\xi] + cSinh[2A\xi]\right)^{-\frac{1}{2}}\right]^4, \\ v(x,t) = \mp \frac{2B\sqrt{2Aw}}{A}\left[\left(\frac{B}{A} + cCosh[2A\xi] + cSinh[2A\xi]\right)^{-\frac{1}{2}}\right]^2, \end{aligned} \tag{3.118}$$

$$\xi = \pm \frac{\sqrt{w}}{\sqrt{2A}} x + wt,$$

olacak şekilde elde edilir.

4. Çözüm:

IV. Durum göz önüne alındığında (3.72) denkleminin çözümü,

$$u(x,t)=-4Bw\left[\left(\frac{B}{A}+cCosh[2A\xi]+cSinh[2A\xi]\right)^{-\frac{1}{2}}\right]^{2}+$$
$$+\frac{4B^{2}w}{A}\left[\left(\frac{B}{A}+cCosh[2A\xi]+cSinh[2A\xi]\right)^{-\frac{1}{2}}\right]^{4},$$
$$v(x,t)=\pm\frac{2iB\sqrt{2Aw}}{A}\left[\left(\frac{B}{A}+cCosh[2A\xi]+cSinh[2A\xi]\right)^{-\frac{1}{2}}\right]^{2},\tag{3.119}$$
$$\xi=\pm\frac{i\sqrt{w}}{\sqrt{2A}}x+wt,\ \left(i^{2}=-1\right),$$

olacak şekilde elde edilir. Burada özel olarak A ve B değerleri için aşağıdaki durumlar göz önüne alındığı zaman

1. Durum için çözümler

(i) $A=1,\ B=1$ iken

$$u(x,t)=\frac{4cw\left(Cosh\left[2tw-\sqrt{2}\sqrt{wx}\right]+Sinh\left[2tw-\sqrt{2}\sqrt{wx}\right]\right)}{\left(1+cCosh\left[2tw-\sqrt{2}\sqrt{wx}\right]+cSinh\left[2tw-\sqrt{2}\sqrt{wx}\right]\right)^{2}},$$
$$v(x,t)=2\sqrt{2}\sqrt{w}\left(1-\frac{1}{1+cCosh\left[2tw-\sqrt{2}\sqrt{wx}\right]+cSinh\left[2tw-\sqrt{2}\sqrt{wx}\right]}\right).\tag{3.120}$$

(ii) $A=-1,\ B=1$ iken

$$u(x,t)=\frac{4cw\left(Cosh\left[2tw+i\sqrt{2}\sqrt{wx}\right]-Sinh\left[2tw+i\sqrt{2}\sqrt{wx}\right]\right)}{\left(1-cCosh\left[2tw+i\sqrt{2}\sqrt{wx}\right]+cSinh\left[2tw+i\sqrt{2}\sqrt{wx}\right]\right)^{2}},$$
$$v(x,t)=2i\sqrt{2}\sqrt{w}\left(1+\frac{1}{-1+cCosh\left[2tw+i\sqrt{2}\sqrt{wx}\right]-cSinh\left[2tw+i\sqrt{2}\sqrt{wx}\right]}\right),\left(i^{2}=-1\right).\tag{3.121}$$

(iii) $A=i,\ B=1$ iken

$$u(x,t)=\frac{4cw\left(Cos\left[2tw-(1-\mathrm{i})\sqrt{wx}\right]+\mathrm{i}Sin\left[2tw-(1-\mathrm{i})\sqrt{wx}\right]\right)}{\left(cCos\left[2tw-(1-\mathrm{i})\sqrt{wx}\right]+\mathrm{i}\left(-1+cSin\left[2tw-(1-\mathrm{i})\sqrt{wx}\right]\right)\right)^{2}},$$
$$v(x,t)=2(-1)^{1/4}\sqrt{2}\sqrt{w}\left(1+\frac{\mathrm{i}}{cCos\left[2tw-(1-\mathrm{i})\sqrt{wx}\right]+\mathrm{i}(-1+cSin\left[2tw-(1-\mathrm{i})\sqrt{wx}\right])}\right),\left(i^{2}=-1\right). \tag{3.122}$$

(iv) $A=1,\ B=i$ iken

$$u(x,t)=\frac{4\mathrm{i}cw\left(Cosh\left[2tw-\sqrt{2}\sqrt{wx}\right]+Sinh\left[2tw-\sqrt{2}\sqrt{wx}\right]\right)}{\left(\mathrm{i}+cCosh\left[2tw-\sqrt{2}\sqrt{wx}\right]+cSinh\left[2tw-\sqrt{2}\sqrt{wx}\right]\right)^{2}},$$
$$v(x,t)=2\sqrt{2}\sqrt{w}\left(1-\frac{\mathrm{i}}{\mathrm{i}+cCosh\left[2tw-\sqrt{2}\sqrt{wx}\right]+cSinh\left[2tw-\sqrt{2}\sqrt{wx}\right]}\right),\ \left(i^{2}=-1\right). \tag{3.123}$$

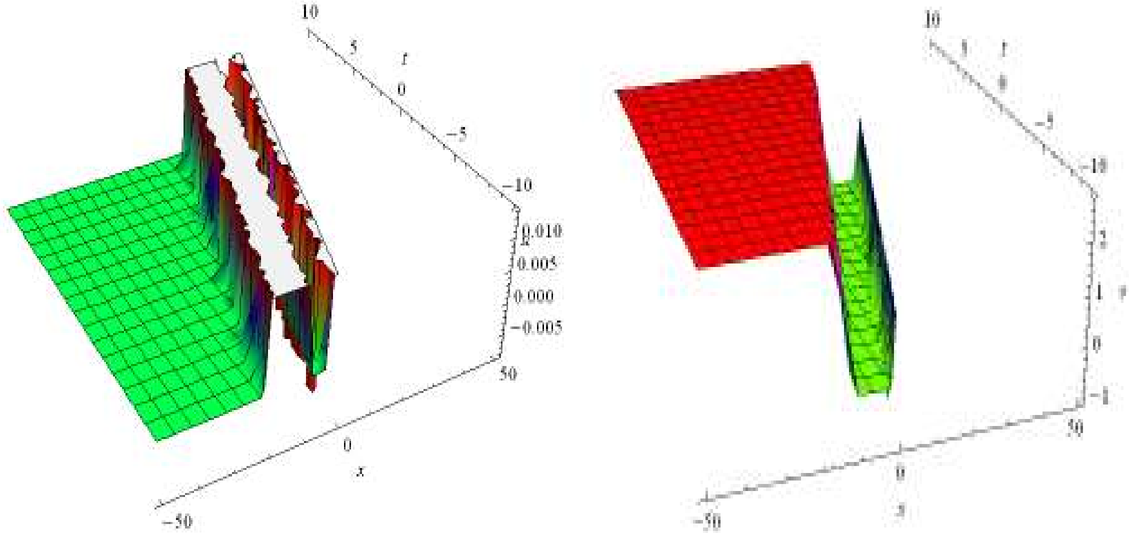
(v) $A=i,\ B=i$ iken

$$u(x,t)=\frac{4\mathrm{i}cw\left(Cos\left[2tw-(1-\mathrm{i})\sqrt{wx}\right]+\mathrm{i}Sin\left[2tw-(1-\mathrm{i})\sqrt{wx}\right]\right)}{\left(1+cCos\left[2tw-(1-\mathrm{i})\sqrt{wx}\right]+\mathrm{i}cSin\left[2tw-(1-\mathrm{i})\sqrt{wx}\right]\right)^{2}},$$
$$v(x,t)=2(-1)^{1/4}\sqrt{2}\sqrt{w}\left(1-\frac{1}{1+cCos\left[2tw-(1-\mathrm{i})\sqrt{wx}\right]+\mathrm{i}cSin\left[2tw-(1-\mathrm{i})\sqrt{wx}\right]}\right),\ \left(i^{2}=-1\right). \tag{3.124}$$

(vi) $A=-i,\ B=-i$ iken

$$u(x,t)=\frac{-4\mathrm{i}cwCos\left[2tw-(1+\mathrm{i})\sqrt{wx}\right]-4cwSin\left[2tw-(1+\mathrm{i})\sqrt{wx}\right]}{\left(1+cCos\left[2tw-(1+\mathrm{i})\sqrt{wx}\right]-\mathrm{i}cSin\left[2tw-(1+\mathrm{i})\sqrt{wx}\right]\right)^{2}},$$
$$v(x,t)=2(-1)^{3/4}\sqrt{2}\sqrt{w}\left(-1+\frac{1}{1+cCos\left[2tw-(1+\mathrm{i})\sqrt{wx}\right]-\mathrm{i}cSin\left[2tw-(1-\mathrm{i})\sqrt{wx}\right]}\right),\ \left(i^{2}=-1\right). \tag{3.125}$$

a) b)



Şekil 14. (3.72) denklem sisteminin (3.120) çözümü için üç boyutlu dalga görünümü

a) $u(x,t)$ için b) $v(x,t)$ için $(\alpha=1, w=1, c=1)$.

2. Durum için çözümler

(i) $A=1,\ B=1$ iken

$$\begin{aligned} u(x,t)&=-\frac{4cw\left(Cosh\left[2tw+\mathrm{i}\sqrt{2}\sqrt{wx}\right]+Sinh\left[2tw+\mathrm{i}\sqrt{2}\sqrt{wx}\right]\right)}{\left(1+cCosh\left[2tw+\mathrm{i}\sqrt{2}\sqrt{wx}\right]+cSinh\left[2tw+\mathrm{i}\sqrt{2}\sqrt{wx}\right]\right)^2},\\ v(x,t)&=2\mathrm{i}\sqrt{2}\sqrt{w}\left(1-\frac{1}{1+cCosh\left[2tw+\mathrm{i}\sqrt{2}\sqrt{wx}\right]+cSinh\left[2tw+\mathrm{i}\sqrt{2}\sqrt{wx}\right]}\right),\left(i^2=-1\right). \end{aligned} \tag{3.126}$$

(ii) $A=-1,\ B=1$ iken

$$\begin{aligned} u(x,t)&=\frac{4cw\left(-Cosh\left[2tw+\sqrt{2wx}\right]+Sinh\left[2tw+\sqrt{2wx}\right]\right)}{\left(1-cCosh\left[2tw+\sqrt{2wx}\right]+cSinh\left[2tw+\sqrt{2wx}\right]\right)^2},\\ v(x,t)&=2\sqrt{2}\sqrt{w}\left(-1+\frac{1}{1-cCosh\left[2tw+\sqrt{2wx}\right]+cSinh\left[2tw+\sqrt{2wx}\right]}\right). \end{aligned} \tag{3.127}$$

(iii) $A=i,\ B=1$ iken

$$\begin{aligned} u(x,t)&=-\frac{4cw\left(Cos\left[2tw+(1+\mathrm{i})\sqrt{wx}\right]+\mathrm{i}Sin\left[2tw+(1+\mathrm{i})\sqrt{wx}\right]\right)}{\left(cCos\left[2tw+(1+\mathrm{i})\sqrt{wx}\right]+\mathrm{i}\left(-1+cSin\left[2tw+(1+\mathrm{i})\sqrt{wx}\right]\right)\right)^2},\\ v(x,t)&=2(-1)^{1/4}\sqrt{2}\sqrt{w}\left(\mathrm{i}+\frac{1}{\mathrm{i}-cCos\left[2tw+(1+\mathrm{i})\sqrt{wx}\right]-\mathrm{i}cSin\left[2tw+(1+\mathrm{i})\sqrt{wx}\right]}\right),\left(i^2=-1\right). \end{aligned} \tag{3.128}$$

(iv) $A=1,\ B=i$ iken

$$u(x,t)=-\frac{4\mathrm{i}cw\left(Cosh\left[2tw+\mathrm{i}\sqrt{2wx}\right]+Sinh\left[2tw+\mathrm{i}\sqrt{2wx}\right]\right)}{\left(\mathrm{i}+cCosh\left[2tw+\mathrm{i}\sqrt{2wx}\right]+cSinh\left[2tw+\mathrm{i}\sqrt{2wx}\right]\right)^2},$$

$$v(x,t)=2\sqrt{2}\sqrt{w}\left(\mathrm{i}+\frac{1}{\mathrm{i}+cCosh\left[2tw+\mathrm{i}\sqrt{2wx}\right]+cSinh\left[2tw+\mathrm{i}\sqrt{2wx}\right]}\right),\left(i^2=-1\right). \tag{3.129}$$

(v) $A=i,\ B=i$ iken

$$u(x,t)=\frac{4cw\left(-\mathrm{i}Cos\left[2tw+(1+\mathrm{i})\sqrt{wx}\right]+Sin\left[2tw+(1+\mathrm{i})\sqrt{wx}\right]\right)}{\left(1+cCos\left[2tw+(1+\mathrm{i})\sqrt{wx}\right]+\mathrm{i}cSin\left[2tw+(1+\mathrm{i})\sqrt{wx}\right]\right)^2},$$

$$v(x,t)=2(-1)^{3/4}\sqrt{2w}\left(1-\frac{1}{1+cCos\left[2tw+(1+\mathrm{i})\sqrt{wx}\right]+\mathrm{i}cSin\left[2tw+(1+\mathrm{i})\sqrt{wx}\right]}\right),\left(i^2=-1\right). \tag{3.130}$$

(vi) $A=-i,\ B=-i$ iken

$$u(x,t)=\frac{4cw\left(\mathrm{i}Cos\left[2tw-(1-\mathrm{i})\sqrt{wx}\right]+Sin\left[2tw-(1-\mathrm{i})\sqrt{wx}\right]\right)}{\left(1+cCos\left[2tw-(1-\mathrm{i})\sqrt{wx}\right]-\mathrm{i}cSin\left[2tw-(1-\mathrm{i})\sqrt{wx}\right]\right)^2},$$

$$v(x,t)=2(-1)^{1/4}\sqrt{2w}\left(1+\frac{1}{-1-cCos\left[2tw-(1-\mathrm{i})\sqrt{wx}\right]+\mathrm{i}cSin\left[2tw-(1-\mathrm{i})\sqrt{wx}\right]}\right),\left(i^2=-1\right). \tag{3.131}$$

3. Durum için çözümler

(i) $A=1,\ B=1$ iken

$$u(x,t)=\frac{4cw\left(Cosh\left[2tw+\sqrt{2wx}\right]+Sinh\left[2tw+\sqrt{2wx}\right]\right)}{\left(1+cCosh\left[2tw+\sqrt{2wx}\right]+cSinh\left[2tw+\sqrt{2wx}\right]\right)^2},$$

$$v(x,t)=-\frac{2\sqrt{2w}}{1+cCosh\left[2tw+\sqrt{2wx}\right]+cSinh\left[2tw+\sqrt{2wx}\right]}. \tag{3.132}$$

(ii) $A=-1,\ B=1$ iken

$$u(x,t)=\frac{4cw\left(Cosh\left[2tw-\mathrm{i}\sqrt{2wx}\right]-Sinh\left[2tw-\mathrm{i}\sqrt{2wx}\right]\right)}{\left(1-cCosh\left[2tw-\mathrm{i}\sqrt{2wx}\right]+cSinh\left[2tw-\mathrm{i}\sqrt{2wx}\right]\right)^2},$$

$$v(x,t)=\frac{2\mathrm{i}\sqrt{2w}}{-1+cCosh\left[2tw-\mathrm{i}\sqrt{2wx}\right]-cSinh\left[2tw-\mathrm{i}\sqrt{2wx}\right]},\left(i^2=-1\right). \tag{3.133}$$

$(iii)\ A=i,\ B=1$ iken

$$u(x,t)=\frac{4cw\left(Cos\left[2tw+(1-\mathrm{i})\sqrt{wx}\right]+\mathrm{i}Sin\left[2tw+(1-\mathrm{i})\sqrt{wx}\right]\right)}{\left(cCos\left[2tw+(1-\mathrm{i})\sqrt{wx}\right]+\mathrm{i}\left(-1+cSin\left[2tw+(1-\mathrm{i})\sqrt{wx}\right]\right)\right)^{2}},$$
$$v(x,t)=-\frac{(2-2\mathrm{i})\sqrt{w}}{cCos\left[2tw+(1-\mathrm{i})\sqrt{wx}\right]+\mathrm{i}(-1+cSin\left[2tw+(1-\mathrm{i})\sqrt{wx}\right])},\left(i^{2}=-1\right). \tag{3.134}$$

$(iv)\ A=1,\ B=i$ iken

$$u(x,t)=\frac{4\mathrm{i}cw\left(Cosh\left[2tw+\sqrt{2wx}\right]+Sinh\left[2tw+\sqrt{2wx}\right]\right)}{\left(\mathrm{i}+cCosh\left[2tw+\sqrt{2wx}\right]+cSinh\left[2tw+\sqrt{2wx}\right]\right)^{2}},$$
$$v(x,t)=-\frac{2\mathrm{i}\sqrt{2w}}{\mathrm{i}+cCosh\left[2tw+\sqrt{2wx}\right]+cSinh\left[2tw+\sqrt{2wx}\right]},\left(i^{2}=-1\right). \tag{3.135}$$

$(v)\ A=i,\ B=i$ iken

$$u(x,t)=\frac{4\mathrm{i}cw\left(Cos\left[2tw+(1-\mathrm{i})\sqrt{wx}\right]+\mathrm{i}Sin\left[2tw+(1-\mathrm{i})\sqrt{wx}\right]\right)}{\left(1+cCos\left[2tw+(1-\mathrm{i})\sqrt{wx}\right]+\mathrm{i}cSin\left[2tw+(1-\mathrm{i})\sqrt{wx}\right]\right)^{2}},$$
$$v(x,t)=-\frac{(2+2\mathrm{i})\sqrt{w}}{1+cCos\left[2tw+(1-\mathrm{i})\sqrt{wx}\right]+\mathrm{i}cSin\left[2tw+(1-\mathrm{i})\sqrt{wx}\right]},\left(i^{2}=-1\right). \tag{3.136}$$

$(vi)\ A=-i,\ B=-i$ iken

$$u(x,t)=\frac{-4\mathrm{i}cwCos\left[2tw+(1+\mathrm{i})\sqrt{wx}\right]-4cwSin\left[2tw+(1+\mathrm{i})\sqrt{wx}\right]}{\left(1+cCos\left[2tw+(1+\mathrm{i})\sqrt{wx}\right]-\mathrm{i}cSin\left[2tw+(1+\mathrm{i})\sqrt{wx}\right]\right)^{2}},$$
$$v(x,t)=-\frac{(2-2\mathrm{i})\sqrt{w}}{1+cCos\left[2tw+(1+\mathrm{i})\sqrt{wx}\right]-\mathrm{i}cSin\left[2tw+(1+\mathrm{i})\sqrt{wx}\right]},\left(i^{2}=-1\right). \tag{3.137}$$

4. Durum için çözümler

$(i)\ A=1,\ B=1$ iken

$$u(x,t)=-\frac{4cw\left(Cosh\left[2tw+\mathrm{i}\sqrt{2wx}\right]+Sinh\left[2tw+\mathrm{i}\sqrt{2wx}\right]\right)}{\left(1+cCosh\left[2tw+\mathrm{i}\sqrt{2wx}\right]+cSinh\left[2tw+\mathrm{i}\sqrt{2wx}\right]\right)^{2}},$$
$$v(x,t)=\frac{2\mathrm{i}\sqrt{2w}}{1+cCosh\left[2tw+\mathrm{i}\sqrt{2wx}\right]+cSinh\left[2tw+\mathrm{i}\sqrt{2wx}\right]},\left(i^{2}=-1\right). \tag{3.138}$$

(ii) $A=-1,\ B=1$ iken

$$u(x,t)=\frac{4cw\left(-Cosh\left[2tw+\sqrt{2wx}\right]+Sinh\left[2tw+\sqrt{2wx}\right]\right)}{\left(1-cCosh\left[2tw+\sqrt{2wx}\right]+cSinh\left[2tw+\sqrt{2wx}\right]\right)^{2}},$$
$$v(x,t)=\frac{2\sqrt{2w}}{-1+cCosh\left[2tw+\sqrt{2wx}\right]-cSinh\left[2tw+\sqrt{2wx}\right]}. \tag{3.139}$$

(iii) $A=i,\ B=1$ iken

$$u(x,t)=-\frac{4cw\left(Cos\left[2tw+(1+\mathrm{i})\sqrt{wx}\right]+\mathrm{i}Sin\left[2tw+(1+\mathrm{i})\sqrt{wx}\right]\right)}{\left(cCos\left[2tw+(1+\mathrm{i})\sqrt{wx}\right]+\mathrm{i}\left(-1+cSin\left[2tw+(1+\mathrm{i})\sqrt{wx}\right]\right)\right)^{2}},$$
$$v(x,t)=\frac{(2+2\mathrm{i})\sqrt{w}}{cCos\left[2tw+(1+\mathrm{i})\sqrt{wx}\right]+\mathrm{i}\left(-1+cSin\left[2tw+(1+\mathrm{i})\sqrt{wx}\right]\right)},\ \left(i^{2}=-1\right). \tag{3.140}$$

(iv) $A=1,\ B=i$ iken

$$u(x,t)=-\frac{4\mathrm{i}cw\left(Cosh\left[2tw+\mathrm{i}\sqrt{2}\sqrt{wx}\right]+Sinh\left[2tw+\mathrm{i}\sqrt{2}\sqrt{wx}\right]\right)}{\left(\mathrm{i}+cCosh\left[2tw+\mathrm{i}\sqrt{2}\sqrt{wx}\right]+cSinh\left[2tw+\mathrm{i}\sqrt{2}\sqrt{wx}\right]\right)^{2}},$$
$$v(x,t)=-\frac{2\sqrt{2}\sqrt{w}}{\mathrm{i}+cCosh\left[2tw+\mathrm{i}\sqrt{2}\sqrt{wx}\right]+cSinh\left[2tw+\mathrm{i}\sqrt{2}\sqrt{wx}\right]},\ \left(i^{2}=-1\right). \tag{3.141}$$

(v) $A=i,\ B=i$ iken

$$u(x,t)=\frac{4cw\left(-\mathrm{i}Cos\left[2tw+(1+\mathrm{i})\sqrt{wx}\right]+Sin\left[2tw+(1+\mathrm{i})\sqrt{wx}\right]\right)}{\left(1+cCos\left[2tw+(1+\mathrm{i})\sqrt{wx}\right]+\mathrm{i}cSin\left[2tw+(1+\mathrm{i})\sqrt{wx}\right]\right)^{2}},$$
$$v(x,t)=-\frac{(2-2\mathrm{i})\sqrt{w}}{1+cCos\left[2tw+(1+\mathrm{i})\sqrt{wx}\right]+\mathrm{i}cSin\left[2tw+(1+\mathrm{i})\sqrt{wx}\right]},\ i^{2}=-1. \tag{3.142}$$

(vi) $A=-i,\ B=-i$ iken

$$u(x,t)=\frac{4cw\left(\mathrm{i}Cos\left[2tw-(1-\mathrm{i})\sqrt{wx}\right]+Sin\left[2tw-(1-\mathrm{i})\sqrt{wx}\right]\right)}{\left(1+cCos\left[2tw-(1-\mathrm{i})\sqrt{wx}\right]-\mathrm{i}cSin\left[2tw-(1-\mathrm{i})\sqrt{wx}\right]\right)^{2}},$$
$$v(x,t)=\frac{(2+2\mathrm{i})\sqrt{w}}{1+cCos\left[2tw-(1-\mathrm{i})\sqrt{wx}\right]-\mathrm{i}cSin\left[2tw-(1-\mathrm{i})\sqrt{wx}\right]},\ \left(i^{2}=-1\right), \tag{3.143}$$

olacak şekilde (3.49) denklemi için bazı çözümler elde edilmiştir.

4. BURGERS DENKLEMİ, KDV DENKLEMİ VE SIĞ SU DALGA DENKLEM SİSTEMİ İÇİN DALGA ÇÖZÜMLERİNİN GENELLEŞTİRİLMESİ

Bu bölümde, üçüncü bölümde ele alınan (3.1) eşitliği göz önüne alınarak Burgers denklemi, KdV denklemi ve sığ su dalga denklem sistemi için n sayısına bağlı dalga çözümleri elde edilmiştir.

İlk olarak (3.10) eşitliği ile verilen Burgers denkleminin (3.1) eşitliği yardımıyla dalga çözümlerini araştıralım. (3.12) denklemi göz önüne alınırsa dengeleme terimi $M = n-1$ olarak bulunur. Böylece (3.12) denklemi için

$$u = a_0 + a_1 F + a_2 F^2 + \ldots + a_{n-1} F^{n-1}, \tag{4.1}$$

şeklinde bir çözüm aranabilir. Bu çözüm ile birlikte (3.12) denkleminde bulunan gerekli türevler alınarak yerlerine yazıldığında

I. Durum:

$a_0 = 0$ olduğunda

$$\begin{gathered} a_1 = a_2 = \ldots = a_{n-2} = 0, \quad , a_{n-1} = \pm \frac{2B\sqrt{(n-1)w}}{\sqrt{A}\alpha}, \\ k = \mp \frac{\sqrt{w}}{\sqrt{(n-1)A}}, \quad A \neq 0, \alpha \neq 0, n \geq 2. \end{gathered} \tag{4.2}$$

II. Durum:

$a_0 \neq 0$ olduğunda $2 \leq m < n, \quad m \in IN^+$ olmak üzere

$$\begin{gathered} a_0 = \pm \frac{2i\sqrt{(n-1)Aw}}{\alpha}, \quad , a_{n-m} = 0, \quad a_{n-1} = \mp \frac{2iB\sqrt{(n-1)w}}{\sqrt{A}\alpha}, \\ k = \pm \frac{i\sqrt{w}}{\sqrt{(n-1)A}}, \quad A \neq 0, \alpha \neq 0, i^2 = -1, \end{gathered} \tag{4.3}$$

katsayıları elde edilir.

Bu durumda (3.10) denkleminin dalga çözümleri

1. <u>Çözüm:</u>

$$\begin{gathered} u(x,t) = \pm \frac{2B\sqrt{(n-1)w}}{\sqrt{A}\,\alpha} \left(\left(\frac{B}{A} + cCosh\left[A(n-1)\xi\right] + cSinh\left[A(n-1)\xi\right] \right)^{\frac{1}{1-n}} \right)^{n-1}, \\ \xi = \mp \frac{\sqrt{w}}{\sqrt{(n-1)A}} x + wt, \quad n \geq 2. \end{gathered} \tag{4.4}$$

2. <u>Çözüm:</u>

$$u(x,t)=\pm\frac{2i\sqrt{(n-1)Aw}}{\alpha}\mp\frac{2iB\sqrt{(n-1)w}}{\sqrt{A}\alpha}\left(\left(\frac{B}{A}+cCosh\left[A(n-1)\xi\right]+cSinh\left[A(n-1)\xi\right]\right)^{\frac{1}{1-n}}\right)^{n-1}, \tag{4.5}$$

$$\xi=\pm\frac{i\sqrt{w}}{\sqrt{(n-1)A}}x+wt,\quad n\geq 2,\quad i^2=-1,$$

olarak bulunur.

İkinci olarak (3.49) eşitliği ile verilen KdV denkleminin (3.1) eşitliği yardımıyla dalga çözümlerini araştıralım. (3.12) denklemi göz önüne alınırsa dengeleme terimi $M=2n-2$ olarak bulunur. Böylece (3.12) denklemi için

$$u=a_0+a_1F+a_2F^2+\ldots+a_{2n-2}F^{2n-2}, \tag{4.6}$$

şeklinde bir çözüm aranabilir. Bu çözüm ile birlikte (3.12) denkleminde bulunan gerekli türevler alınarak yerlerine yazıldığında

$k\neq 0,\quad w\neq 0,\quad m\in(0,n-1),\quad l\in(n-1,2n-2),\quad m,l\in IN^{+}$ olmak üzere,

$$a_{n-1}=\frac{12(1-n)^{\frac{2}{3}}Bw^{\frac{2}{3}}}{A^{\frac{1}{3}}\alpha},\quad a_{2n-2}=-\frac{12(1-n)^{\frac{2}{3}}B^2w^{\frac{2}{3}}}{A^{\frac{4}{3}}\alpha},$$

$$k=\frac{(-1)^{\frac{1}{3}}w^{\frac{1}{3}}}{(n-1)^{\frac{2}{3}}A^{\frac{2}{3}}}, \tag{4.7}$$

$$a_0=a_m=a_l=0,\quad A\neq 0,\quad \alpha\neq 0,\quad n>2,$$

katsayıları elde edilir.

Bu durumda (3.49) denkleminin dalga çözümü

$$u(x,t)=\frac{12(1-n)^{\frac{2}{3}}Bw^{\frac{2}{3}}}{A^{\frac{1}{3}}\alpha}\left(\left(\frac{B}{A}+cCosh\left[A(n-1)\xi\right]+cSinh\left[A(n-1)\xi\right]\right)^{\frac{1}{1-n}}\right)^{n-1}$$
$$-\frac{12(1-n)^{\frac{2}{3}}B^2w^{\frac{2}{3}}}{A^{\frac{4}{3}}\alpha}\left(\left(\frac{B}{A}+cCosh\left[A(n-1)\xi\right]+cSinh\left[A(n-1)\xi\right]\right)^{\frac{1}{1-n}}\right)^{2n-2}, \tag{4.8}$$

$$\xi=\frac{(-1)^{\frac{1}{3}}w^{\frac{1}{3}}}{(n-1)^{\frac{2}{3}}A^{\frac{2}{3}}}x+wt,\quad n>2,$$

olarak bulunur.

Son olarak (3.72) eşitliği ile verilen sığ su dalga denklem sisteminin (3.1) eşitliği yardımıyla dalga çözümlerini araştıralım. (3.74) denklemi göz önüne alınırsa dengeleme terimi $M_1 = 2n-2$ ve $M_2 = n-1$ olarak bulunur. Böylece (3.74) denklemi için

$$u = a_0 + a_1 F + a_2 F^2 + ... + a_{2n-2} F^{2n-2}, \quad v = b_0 + b_1 F + b_2 F^2 + ... + b_{n-1} F^{n-1}, \tag{4.9}$$

şeklinde bir çözüm aranabilir. Bu çözümde (3.74) denkleminde bulunan gerekli türevler alınarak yerlerine yazıldığında

$k \neq 0, \quad w \neq 0, \quad m \in (0, n-1), \quad l \in (n-1, 2n-2), \quad m, l \in IN^+$, $n > 2$ olmak üzere,

I. Durum:

$$\begin{aligned} &a_{n-1} = (2n-2)Bw, \quad a_{2n-2} = -\frac{(2n-2)B^2 w}{A}, \quad b_0 = \pm 2\sqrt{(n-1)Aw}, \\ &b_{n-1} = \mp \frac{2B\sqrt{(n-1)Aw}}{A}, \quad k = \mp \frac{\sqrt{w}}{\sqrt{(n-1)A}}, \\ &a_0 = a_m = a_l = b_m = 0, \quad A \neq 0, \quad \alpha \neq 0. \end{aligned} \tag{4.10}$$

II. Durum:

$$\begin{aligned} &a_{n-1} = -(2n-2)Bw, \quad a_{2n-2} = \frac{(2n-2)B^2 w}{A}, \quad b_0 = \pm 2i\sqrt{(n-1)Aw}, \\ &b_{n-1} = \mp \frac{2iB\sqrt{(n-1)w}}{\sqrt{A}}, \quad k = \pm \frac{i\sqrt{w}}{\sqrt{(n-1)A}}, \\ &a_0 = a_m = a_l = b_m = 0, \quad A \neq 0, \quad \alpha \neq 0, \quad i^2 = -1. \end{aligned} \tag{4.11}$$

III. Durum:

$$\begin{aligned} &a_{n-1} = (2n-2)Bw, \quad a_{2n-2} = -\frac{(2n-2)B^2 w}{A}, \\ &b_{n-1} = \mp \frac{2B\sqrt{(n-1)w}}{\sqrt{A}}, \quad k = \pm \frac{\sqrt{w}}{\sqrt{(n-1)A}}, \\ &a_0 = b_0 = a_m = a_l = b_m = 0, \quad A \neq 0, \quad \alpha \neq 0. \end{aligned} \tag{4.12}$$

IV. Durum:

$$\begin{aligned} &a_{n-1} = -(2n-2)Bw, \quad a_{2n-2} = \frac{(2n-2)B^2 w}{A}, \\ &b_{n-1} = \pm \frac{2iB\sqrt{(n-1)w}}{\sqrt{A}}, \quad k = \pm \frac{i\sqrt{w}}{\sqrt{(n-1)A}}, \\ &a_0 = b_0 = a_m = a_l = b_m = 0, \quad A \neq 0, \quad \alpha \neq 0, \quad i^2 = -1, \end{aligned} \tag{4.13}$$

elde edilir. Bulunan bu sabitler göz önüne alındığı zaman (3. 72) denklem sisteminin dalga çözümleri

1. Çözüm:

I. Durum göz önüne alındığında (3.72) denklem sisteminin çözümü,

$$u(x,t)=(2n-2)Bw\left(\left(\frac{B}{A}+cCosh\left[A(n-1)\xi\right]+cSinh\left[A(n-1)\xi\right]\right)^{\frac{1}{1-n}}\right)^{n-1}-$$

$$-\frac{(2n-2)B^2w}{A}\left(\left(\frac{B}{A}+cCosh\left[A(n-1)\xi\right]+cSinh\left[A(n-1)\xi\right]\right)^{\frac{1}{1-n}}\right)^{2n-2},$$

$$v(x,t)=\pm2\sqrt{(n-1)Aw}\mp\frac{2B\sqrt{(n-1)w}}{\sqrt{A}}\left(\left(\frac{B}{A}+cCosh\left[A(n-1)\xi\right]+cSinh\left[A(n-1)\xi\right]\right)^{\frac{1}{1-n}}\right)^{n-1}, \tag{4.14}$$

$$\xi=\pm\frac{\sqrt{w}}{\sqrt{(n-1)A}}x+wt$$

olacak şekilde elde edilir.

2. Çözüm:

II. Durum göz önüne alındığında (3.49) denklem sisteminin çözümü,

$$u(x,t)=-(2n-2)Bw\left(\left(\frac{B}{A}+cCosh\left[A(n-1)\xi\right]+cSinh\left[A(n-1)\xi\right]\right)^{\frac{1}{1-n}}\right)^{n-1}+$$

$$+\frac{(2n-2)B^2w}{A}\left(\left(\frac{B}{A}+cCosh\left[A(n-1)\xi\right]+cSinh\left[A(n-1)\xi\right]\right)^{\frac{1}{1-n}}\right)^{2n-2}, \tag{4.15}$$

$$v(x,t)=\pm2i\sqrt{(n-1)Aw}\mp\frac{2iB\sqrt{(n-1)w}}{\sqrt{A}}\left(\left(\frac{B}{A}+cCosh\left[A(n-1)\xi\right]+cSinh\left[A(n-1)\xi\right]\right)^{\frac{1}{1-n}}\right)^{n-1},$$

$$\xi=\pm\frac{i\sqrt{w}}{\sqrt{(n-1)A}}x+wt,$$

olacak şekilde elde edilir.

3. Çözüm:

III. Durum göz önüne alındığında (3.49) denklem sisteminin çözümü,

$$u(x,t)=(2n-2)Bw\left(\left(\frac{B}{A}+cCosh\left[A(n-1)\xi\right]+cSinh\left[A(n-1)\xi\right]\right)^{\frac{1}{1-n}}\right)^{n-1}-$$

$$-\frac{(2n-2)B^2w}{A}\left(\left(\frac{B}{A}+cCosh\left[A(n-1)\xi\right]+cSinh\left[A(n-1)\xi\right]\right)^{\frac{1}{1-n}}\right)^{2n-2},$$

$$v(x,t)=\mp\frac{2B\sqrt{(n-1)w}}{\sqrt{A}}\left(\left(\frac{B}{A}+cCosh\left[A(n-1)\xi\right]+cSinh\left[A(n-1)\xi\right]\right)^{\frac{1}{1-n}}\right)^{n-1},$$

$$\xi=\pm\frac{\sqrt{w}}{\sqrt{(n-1)A}}x+wt, \qquad (4.16)$$

olacak şekilde elde edilir.

4. Çözüm:

IV. Durum göz önüne alındığında (3.49) denklem sisteminin çözümü,

$$u(x,t)=-(2n-2)Bw\left(\left(\frac{B}{A}+cCosh\left[A(n-1)\xi\right]+cSinh\left[A(n-1)\xi\right]\right)^{\frac{1}{1-n}}\right)^{n-1}+$$

$$+\frac{(2n-2)B^2w}{A}\left(\left(\frac{B}{A}+cCosh\left[A(n-1)\xi\right]+cSinh\left[A(n-1)\xi\right]\right)^{\frac{1}{1-n}}\right)^{2n-2},$$

$$v(x,t)=\pm\frac{2iB\sqrt{(n-1)w}}{\sqrt{A}}\left(\left(\frac{B}{A}+cCosh\left[A(n-1)\xi\right]+cSinh\left[A(n-1)\xi\right]\right)^{\frac{1}{1-n}}\right)^{n-1}, \qquad (4.17)$$

$$\xi=\pm\frac{i\sqrt{w}}{\sqrt{(n-1)A}}x+wt,$$

olacak şekilde elde edilir.

5. SONUÇ

Lineer veya lineer olmayan adi ve kısmi diferensiyel denklemlerin analitik çözümlerini bulmak fizik, kimya, biyoloji ve mühendislik alanlarında oldukça önemli bir yere sahiptir. Çünkü bir diferensiyel denklemin analitik çözümü o denklemin modellenmesine yol açan olayın karakteri hakkında araştırmacılara pek çok bilgi verir. Bu nedenle lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin analitik çözümlerini veren birçok etkili metot geliştirilmiştir. Bu metotların çoğu sadece lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlere uygulanabilir. Çünkü bu metotların işleyişi “dengeleme terimi” olarak adlandırılan ve en yüksek mertebeden lineer terim ile en yüksek mertebeden lineer olmayan terimin karşılaştırılmasına dayanır.

Lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin dalga çözümlerini bulmak için kullanılan ve ikinci bölümde analizleri yapılan metotlara bakıldığında temelde hepsi, ele alınan kısmi diferensiyel denklemi bir değişken dönüşümü altında adi bir diferensiyel denkleme dönüştürme ve yardımcı bir denklem kullanarak çözüme ulaşma esasına dayanır. Bu metotların birbirlerinden farkı seçilen yardımcı denkleminin ve dolayısıyla kullanılan çözüm fonksiyonunun farklı olmasıdır. Örneğin, tanh fonksiyon metotlarına bakıldığı zaman yardımcı denklem olarak Riccati diferensiyel denklemi kullanılmıştır. Fakat bazı metotlarda Riccati diferensiyel denklemin yerine farklı denklemler kullanılarak çözüme ulaşılmıştır. Jacobi eliptik fonksiyon metoduna bakıldığında Riccati diferensiyel denklemi yerine farklı bir lineer olmayan diferensiyel denklem seçilmiştir. $\frac{G'}{G}$ açılım metodunda Riccati diferensiyel denklemi yerine ikinci mertebeden sabit katsayılı adi bir diferensiyel denklem kullanılmıştır. Kudryashov metodunda ise yardımcı denklem olarak Bernoulli diferensiyel denklemi kullanılmıştır. Yardımcı denklemlerin bu şekilde farklı seçilebilmesinin yanı sıra bu metotların birbirlerinden farklı olan tarafından bir diğeri ise aranılan çözüm fonksiyonunun farklı seçilmesidir.

Biz bu çalışmamızda Kudryashov metodunda yardımcı denklem olarak kullanılan Bernoulli denkleminin katsayılarını genelleştirerek ve bağımlı fonksiyon olan $F(\xi)$ nin derecesini 2 yerine daha genel olarak n seçerek Burgers denklemi, KdV denklemi ve sığ su dalga denklem sistemi için dalga çözümleri elde edildi. İkinci bölümde analizleri yapılan metotlarda kullanılan yardımcı denklemlerin farklı seçilmesi ile daha başka metotlarda türetilebilir.

KAYNAKLAR

[1] **Serway, R., Jewett, J.,** 2004. Physics for Scientists and Engineers, 6th Edition, Thomson, USA.

[2] **Russell, J.S.,** 1844. Report on Waves, 14th meeting of the British Association for the Advancement of Science, London: BAAS.

[3] **Zabusky, N.J., Kruskal, M.D.,** 1965. Interaction of solitons incollisionless plasma and the recurrence of initial states, *Physical Review Letters*, **15**, 240-243.

[4] **Debtnath L.,** 1997. Nonlinear Partial Differential Equations for Scientist and Engineers, Birkhauser, Boston, MA.

[5] **Wazwaz, A.M.,** 2002. Partial Differential Equations: Methods and Applications, Balkema, Rotterdam.

[6] **Hirota, R.,** 1980. Direct methods in soliton theory, In Solitons (Bullogh, R.K. and Caudrey, P.J., eds). Springer, Berlin.

[7] **Nimmo, J.J.C., Freeman, N.C.,** 1984. The use of Bäcklund transformations in obtaining N-soliton solutions in wronskian form, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **17**, 1415-1424.

[8] **Feng, Z., Knobel, R.,** 2006. Traveling waves to a Burgers-Korteweg-de Vries-type equation with higher-order nonlinearities, *Journal of Mathematical Analysis and Applications.* **328**, 1435-1450.

[9] **Inan, I., Kaya, D.,** 2006. Some Exact Solutions to the Potentiial Kadomtsev-Petviashvili Equaition and to a system of shallow water wave equations, *Physics Letters A*, **355**, 314-318.

[10] **Burgers, J.M.,** 1939. Mathematical examples illustrating relations occurring in the theory of turbulent fluid motion, *Verh. KNAW afd. Natuurkunde XVII* **2**, 1-53.

[11] **Burgers, J.M.,** 1940. Application of a model system to illustrate some points of the statistical theory of free turbulence, Proc. Verh. KNAW afd. Natuurkunde XVII, **1**, 2-12.

[12] **Bateman, H.,** 1915. Some recent researchers on the motion of fluids, *Montly Weather Review,* 163-170.

[13] **Burgers, J.M.,** 1948. A mathematical model illustrating the theory of turbulence, *Advances in Applied Mechanics,* **1**, 171-199.

[14] **Burgers, J.M.,** 1974. The Nonlinear Diffusion Equaiton, Dordrecht, Reidel, Boston, 188.

[15] **Burgers, J.M.,** 1950. Correlation problems in a one-dimensional model of turbulence, Proc. Roy. Neth. Acad. Sci. Amsterdam, **53,** 247-260, 393-406, 718-742.

[16] **Lighthill, M.J.,** 1956. Viscosity effects in sound waves of finite amplitude, Surweys in Mechanics, 250-351.

[17] **Blackstock, D.T.,** 1966. Convergence of the Keck-Boyer perturbation solution for plane waves of finite amplitude in a viscous fluid, *Journal Acoustical Society of America,* **39**, 411-413.

[18] **Blackstock, D.T.,** 1966. Connection between the Fay and Fubini solutions for plane sound waves of finite amplitude, *Journal Acoustical Society of America,* **39,** 1019-1026.

[19] **Cole J.D.,** 1951. On a quasilinear parabolic equation occurring in aerodynamics, *Quarterly of Applied Mathematics*, **9**, 225-236.

[20] **Pospelov, L.A.,** 1966. Propagation of finite-amplitude elastic waves, *Soviet Physics Acoustics,* **11**, 302-304.

[21] **Goldberg, A.,** 1962. Finite amplitude waves in magnetohydrodynamics, *Soviet Physics,* The J*ournal of Experimental and Theoretical Physics,* **15**, 179-181.

[22] **Hopf, E.,** 1950. The partial differential equation $u_t + uu_x = vu_{xx}$, *Communications on Pure and Applied Mathematics,* **3**, 201-230.

[23] **Rodin, E.Y.A.,** 1974. Riccati solution for Burgers equation, *Quarterly of Applied Mathematics,* **27**, 541-545.

[24] **Ames, W.F.,** 1972. Nonlinear Partial Differential Equations in Engineering, **1**, Academic Press, New York, 305.

[25] **Chu, C.W.,** 1965. A class of reducible systems of quasi-linear partial differential equations, *Quarterly of Applied Mathematics,* **23**, 257-278.

[26] **Shvets, M.E. and Meleshko, V.P.,** 1965. Numerical algorithm of a solution of the system equations of hydrodynamics of the atmosphere, *Izc. Acad. Sc. USSR Atmosphere Ocean. Phys*ics **1,** 519-520.

[27] **Varoğlu, E. and Finn, W.D.L.,** 1980. Space-time finite elements incorporating characteristic for the Burgers equation, *International Journal for Numerical Methods in Eng*ineering, **16**, 171-184.

[28] **Ames, W.F. and Nucci, M.C.,** 1986. Analysis of fluid equations by group methods, *Journal of Engineering Mathematics*, **20**, 181-187.

[29] **Walsh, R.A.,** 1969. Initial value problems associated with $u\ (x,t) = \delta u_{xx}(x,t) - u(x,t)u_x(x,t)$, *Journal of Mathematics Analysis and Appl*ications, **26**, 235-247.

[30] **Benton, E.R. and Platzman, G.W.**, 1972. A table of solutions of one dimensional Burgers equation, *Quarterly of Applied Mathematics*, **30**, 195-212.

[31] **Crighton, D.G.,** 1979. Model equations of nonlinear acoustics, *Annual Review of Fluid Mechanics,* **11**, 11-23.

[32] **Parker, D.F.,** 1980. The decay of saw-tooth solutions to the Burgers equation, *Proceedings of the Royal Society A*, **369**, 409-424.

[33] **Rodin, E.Y.,** 1970. On some approximate and exact solutions of boundary value problems for Burgers equations, *Journal of Mathematics Analysis and Appl*ications **30,** 401-414.

[34] **Larson, D.A.,** 1978. Transient bounds and time asymptotic behaviour of solutions, *Society for Industrial and Applied Mathematics, Journal Applied Math*ematics, **34**, 93-103.

[35] **Lardner, R.W.**, 1986. Third order solutions of Burgers equation, *Quarterly of Applied Mathematics,* **44**, 293-302.

[36] **Öziş, T. and Özdeş, A.,** 1996. A direct variational methods to Burgers equation, *Journal of Computational Applied Math*ematics, **71**, 163-175.

[37] **Ames, W.F. and Nucci, M.C.,** 1986. Analysis of fluid equations by group methods, *Journal of Engineering Mathematics*, **20**, 181-187.

[38] **Sachdev, P.L. and Rao, C.S**., 2000. N-Wave solution of modified Burgers equation, *Applied Mathematics Letters*, **13**, 1-6.

[39] **Chester, W**., 1977. Continuous transformations and differentialequations, *Journal of the Institute of Math and Its Applications*, **19**, 343-386.

[40] **Abd-el-Malek, M.B. and El-Mansi, S.M.A**., 2000. Group theoretic methods applied to Burgers equation, *Journal of Computational Applied Math*ematics, **115**, 1-12.

[41] **Vaganan, B.M. and Kumaran, M.S.**, 2004. Similarity solutions of the Burgers equation with linear damping, *Applied Mathematics Letters*, **17,** 191-196.

[42] **Bender, C.M. and Boettcher, S.**, 1991. A new perturbative approach to nonlinear partial differential equations, *Journal Mathematics Physics*, 32, **11**, 3031-3038.

[43] **Adomian, G.**, 1998. Solutions of Nonlinear P. D. E, *Applied Mathematics Letters*, **11**, 121-123.

[44] **Gorguis, A.,** 2005. A comparison between Cole-Hopf transformation and the decomposition method for solving Burgers equation, *Applied Mathematics and Computation*, **173**, 126-136.

[45] **Gülsu, M. and Öziş, T.,** 2005. Numerical solution of Burgers equation with restrictive Taylor approximation, *Applied Mathematics and Computation*, **171**, 1192-1200.

[46] **Hu, X.B. and Ma, W.X.,** 2002. Application of Hirota's bilinear formalism to the Toeplitz lattice-some special soliton-like solutions, *Physics Letters A*, **293**, 161-165.

[47] **Shang, Y.,** 2007. Bäcklund transformation, Lax pairs and explicit exact solutions for the shallow water waves equation, *Applied Mathematics and Computation*, **187**, 1286-1297.

[48] **Abourabia, A.M., El Horbaty, M.M.,** 2006. On solitary wave solutions for the two-dimensional nonlinear modified Kortweg–de Vries–Burger equation, *Chaos, Solitons & Fractals*, **29**, 354-364.

[49] **Bock, T.L., Kruskal, M.D.,** 1979. A two-parameter Miura transformation of the Benjamin-Ono equation, *Physics Letters A*, **74**, 173-176.

[50] **Drazin, P.G., Jhonson, R.S.,** 1989. Solitons: An Introduction, Cambridge University Press, Cambridge.

[51] **Matveev, V.B., Salle, M.A.,** 1991. Darboux transformations and solitons, Springer, Berlin.

[52] **Cariello, F., Tabor, M.,** 1989. Painlevé expansions for nonintegrable evolution equations, *Physica D*, **39**, 77-94.

[53] **Fan, E.,** 2000. Two new applications of the homogeneous balance method, *Physics Letters A*, **265**, 353-357.

[54] **Clarkson, P.A.,** 1989. New Similarity Solutions for the Modified Boussinesq Equation, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **22**, 2355-2367.

[55] **Chuntao, Y.,** 1996. A simple transformation for nonlinear waves, *Physics Letters A*, **224**, 77-84.

[56] **Hereman, W., Korpel, A. and Banerjee, P.P.,** 1985. A general physical approach to solitary wave construction from linear solutions, *Wave Motion*, **7**, 283-289.

[57] **Hereman, W., Takaoka, M.,** 1990. Solitary wave solutions of nonlinear evolution and wave equations using a direct method and MACSYMA, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **23**, 4805-4822.

[58] **Lan, H., Wang, K.,** 1990. Exact solutions for two nonlinear equations, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **23**, 3923-3928.

[59] **Lou, S., Huang, G. and Ruan, H.,** 1991. Exact solitary waves in a convicting fluid, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **24**, L587-L590.

[60] **Malfliet, W.,** 1992. Solitary wave solutions of nonlinear wave equations, *American Journal of Physics*, **60**, 650-654.

[61] **Fan, E.,** 2000. Extended tanh-function method and its applications to nonlinear equations, *Physics Letters A*, **277**, 212-218.

[62] **Elwakil, S.A., El-labany, S.K., Zahran, M.A. and Sabry, R.,** 2002. Modified extended tanh-function method for solving nonlinear partial differential equations, *Physics Letters A*, **299**, 179-188.

[63] **Zheng, X., Chen, Y. and Zhang, H.,** 2003. Generalized extended tanh-function method and its application to (1+1)-dimensional dispersive long wave equation, *Physics Letters A*, **311**, 145-157.

[64] **Chen, H., Zhang, H.,** 2004. New multiple soliton solutions to the general Burgers-Fisher equation and the Kuramoto-Sivashinsky equation, *Chaos, Solitons & Fractals*, **19**, 71-76.

[65] **Kudryashov, N.A.**, 1988, Exact soliton solutions of the generalized evolution equation of wave dynamics, *Journal Applied Mathematic and Mechanic*, **52**, 361–365.

[66] **Kudryashov, N.A.**, 1990, Exact solutions of the generalized Kuramoto–Sivashinsky equation, *Physics Letters A* **147**, 287–291.

[67] **Kudryashov, N.A.**, 1991, On types of nonlinear nonintegrable equations with exact solutions*, Physics Letters A* **155**, 269–275.

[68] **Kudryashov, N.A.**, 1993, Singular manifold equations and exact solutions for some nonlinear partial differential equations, *Physics Letters A,* **182**, 356–362.

[69] **Kudryashov,N.A.**, 2004, Nonlinear differential equations with exact solutions expressed via the Weierstrass function, *Zeitschriftfur Naturforschung,* **59**, 443–454.

[70] **Kudryashov, N.A.**, 2004, Analytical theory of nonlinear differential equations. Moskow-Igevsk. Institute of computer investigations: [in Russian].

[71] **Kudryashov, N.A.**, 2011, On one of methods for finding exact solutions of nonlinear differential equations, arXiv:1108.3288v1 [nlin.SI].

[72] **Kudryashov, N.A.,** 2008, Extended simplest equation method for nonlinear differential equations, *Applied Math. and Computation,* **205**, 396-402.

[73] **Fu, Z., Liu, S., and Zhao, Q.,** 2001. New Jacobi elliptic function expansion and new periodic solutions of nonlinear wave equations, *Physics Letters A*, **290**, 72-76.

[74] **Shen S., Pan, Z.,** 2003. A note on the Jacobi elliptic function expansion method, *Physics Letters A*, **308**, 143-148.

[75] **Chen, H.T., Hong-Qing, Z.,** 2004. New double periodic and multiple soliton solutions of the generalized (2 + 1)-dimensional Boussinesq equation, *Chaos, Solitons & Fractals*, **20**, 765-769.

[76] **Chen, Y., Wang, Q. and Li B.,** 2004. Jacobi elliptic function rational expansion method with symbolic computation to construct new doubly periodic solutions of nonlinear evolution equations, *Zeitschrift für Naturforschung A*, **59**, 529-536.

[77] **Chen, Y., Yan, Z.,** 2006. The Weierstrass elliptic function expansion method and its applications in nonlinear wave equations. *Chaos, Solitons & Fractals*, **29**, 948-964.

[78] **Wang, M., Li, X. and Zhang, J.,** 2008. The $\left(\frac{G'}{G}\right)$-expansion method and travelling wave solutions of nonlinear evolution equations in mathematical physics, *Physics Letters A*, **372**, 417-423.

[79] **Guo, S., Zhou, Y.,** 2010. The extended $\left(\frac{G'}{G}\right)$- expansion method and its applications to the Whitham–Broer–Kaup–Like equations and coupled Hirota–Satsuma KdV equations, *Applied Mathematics and Computation*, **215**, 3214-3221.

[80] **Lü, H.L., Liu, X.Q. and Niu, L.,** 2009. A generalized $\left(\frac{G'}{G}\right)$-expansion method and its applications to nonlinear evolution equations, *Applied Mathematics and Computation*, **215**, 3811-3816.

ÖZGEÇMİŞ

1983 yılında Malatya'da doğdum. İlk ve orta öğrenimimi Malatya'da tamamladım. 2000 yılında İnönü Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümüne kayıt yaparak lisans öğrenimime başladım. 2004 yılında mezun oldum. Aynı yıl Fırat Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsünün açmış olduğu Matematik Anabilim Dalının Uygulamalı Matematik programında tezli yüksek lisansa başladım ve 2006 yılında mezun oldum. 2006-2007 yılları arasında Fırat Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsünde, Matematik ortaöğretim alanında tezsiz yüksek lisans yaptım. 2007 yılı bahar döneminde Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünün açmış olduğu Matematik Anabilim Dalının Uygulamalı Matematik programında doktoraya başladım. 2007 yılından beri Adıyaman Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, İlköğretim Matematik anabilim dalında araştırma görevlisi olarak görev yapmaktayım.