



**FARKLI TÜRDE KONVEKS FONKSİYONLAR
İÇİN UYUMLU KESİRLİ İNTEGRALLER
İÇEREN EŞİTSİZLİKLER**

Abdüllatif YALÇIN

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı

Doç. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR

2016

Her hakkı saklıdır

AĞRI İBRAHİM ÇEÇEN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**FARKLI TÜRDE KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN UYUMLU KESİRLİ
İNTEGRALLER İÇEREN EŞİTSİZLİKLER**



Abdüllatif YALÇIN

MATEMATİK ANABİLİM DALI
ANALİZ VE FONKSİYONLAR TEORİSİ BİLİM DALI

AĞRI
2016

Her hakkı saklıdır

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE

Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğine göre hazırlamış olduğum “**Farklı Türden Konveks Fonksiyonlar İçin Uyumlu Kesirli İntegraller İçeren İntegral Eşitsizlikler**” adlı yüksek lisans tezinin içerdiği yenilik ve sonuçları başka bir yerden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu ve bu tezi Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nden başka bir bilim kuruluna akademik gaye ve ünvan almak amacıyla vermediğimi beyan ederim.

Δ Tezimin tamamı her yerden erişime açılabilir.

Lisansüstü Eğitim-Öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca gereğinin yapılmasını arz ederim.

15/12/2016

Abdüllatif YALÇIN

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

FARKLI TÜRDEN KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN UYUMLU KESİRLİ İNTEGRALLER İÇEREN İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLER

Abdüllatif YALÇIN

Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR

Bu tezde, eşitsizlik teorisiyle yakından ilişkili konveks fonksiyon kavramı ve konvekslik türleri tanıtılmıştır. Konveks fonksiyon tanımı ile ortalamalar arasındaki ilişkiden yola çıkılarak bazı özelliklere yer verilmiştir. Öncelikle kesirli türevler ve integrallerden bahsedilmiş olup ardından uyumlu kesirli türev ve integrallerin tanımı verilmiştir. Uyumlu kesirli türev ve integraller için temel kavramlar yeniden hatırlanmıştır. Uyumlu kesirli integraller yardımıyla ispat edilmiş ve literatürde mevcut olan bazı eşitsizlikler sunulmuştur. Araştırma bulgularında ise uyumlu kesirli integraller içeren iki yeni integral eşitliği inşa edilmiştir. Bu integral eşitlikleri ve Hölder, Power-mean gibi çeşitli integral eşitsizlikleri yardımıyla uyumlu kesirli integraller için integral eşitsizlikler elde edilmiştir.

2016, 67 sayfa

Anahtar Kelimeler: Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler, Hölder eşitsizliği, Power-mean eşitsizliği, konveks fonksiyonlar, uyumlu kesirli integraller.

ABSTRACT

Master

INTEGRAL INEQUALITIES FOR DIFFERENT KINDS OF CONVEX FUNCTIONS VIA CONFORMABLE FRACTIONAL INTEGRALS

Abdüllatif YALÇIN

Ağrı İbrahim Çeçen University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR

In this thesis, convex functions that has a close relation to inequality theory and kinds of convexity have been introduced. Some properties have been placed by starting with the relationship between definition of convex functions and means. Primarily, the concepts of fractional derivative and fractional integrals have been mentioned and later the definition of conformable fractional derivative and integrals have been given. The basic concepts of conformable fractional derivative and integrals have been recalled. Some inequalities that have been proved via conformable fractional integrals which have been presented in the literature. In the findings section, two new integral identity that are include conformable fractional integrals have been established. Finally, some new integral inequalities have been obtained via conformable fractional integrals and some integral inequalities such as Hölder and Power-mean integral inequalities.

2016, 67 pages

Keywords: Hermite-Hadamard type inequalities, Hölder inequality, Power-mean inequality, convex functions, conformable fractional integrals.

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünde yapılmıştır.

Yüksek Lisans çalışmam boyunca, tez konumu belirleyip bu konuda çalışmamı sağlayan, bana rehberlik eden, engin tecrübesiyle ve değerli bilgileriyle çalışmalarım da etkin katkısı bulunan ve tüm babacanlığı ile beni her zaman destekleyen ve yönlendiren saygıdeğer danışman hocam,

Sayın Doç. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR'e;

teşekkür ve şükranlarımı sunarım.

Yüksek lisans sürecinde bana yardımcı olan Sayın Yrd. Doç. Dr. Alper EKİNCİ'ye, Yrd. Doç. Dr. Ahmet Selçuk AKDEMİR'e, ve değerli arkadaşlarım Sayın Fatma POLAT'a, Sayın Ayşenur ATMIŞ'a teşekkür ederim.

Öğrenim hayatım boyunca kendilerinden görmüş olduğum destek ve güvenden dolayı aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Abdüllatif YALÇIN
2016

SİMGELER DİZİNİ

$\Gamma(z)$	Gama fonksiyonu
J_{α}^a	Sol Riemann-Liouville kesirli integrali
D_{α}^a	Sol Riemann-Liouville kesirli türevi
${}^c D_{\alpha}^a$	Sol Caputo kesirli türevi
${}^{(k)} D_{\alpha}^a$	$k\alpha$ mertebeli dizisel Riemann-Liouville kesirli türev
T_{α}	Uyumlu kesirli türev
T_{α}^a	Sol uyumlu kesirli türev
${}^b T_{\alpha}$	Sağ uyumlu kesirli türev
I_{α}^a	Sol uyumlu kesirli integral
${}^b I_{\alpha}$	Sağ uyumlu kesirli integral
${}^{(n)} T_{\alpha}^a$	n . mertebeden sol dizisel uyumlu kesirli türev
${}^b T_{\alpha}^{(n)}$	n . mertebeden sağ dizisel uyumlu kesirli türev
$<$	Küçüktür
$>$	Büyüktür
\leq	Küçük veya Eşittir
\geq	Büyük veya Eşittir
\subset	Alt Küme
\subseteq	Alt Kümesi veya Eşit
\supseteq	Kapsar veya Eşit
\cup	Birleşim
\cap	Kesişim
\in	Elemanıdır
\mathbb{R}	Reel Sayılar Kümesi
\mathbb{R}^n	n –boyutlu Euclidean Uzay
I	\mathbb{R} 'de Bir Aralık

I°	I 'nın İçi
$L_1([a, b])$	$[a, b]$ Aralığında İntegrallenebilen Fonksiyonların Kümesi
f'	f Fonksiyonunun Birinci Mertebeden Türevi
$SX(h, I)$	h –konveks Fonksiyonların Sınıfı
$SV(h, I)$	h –konkav Fonksiyonlar Sınıfı
$K_m(b)$	m –konveks Fonksiyonların Sınıfı
$K_m^\alpha(b)$	(α, m) –konveks Fonksiyonların Sınıfı
K_s^2	İkinci Anlamda s –konveks Fonksiyonların Sınıfı
Max	Maksimum
Min	Minimum

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. Konveks küme.....	13
Şekil 2.2. Konveks olmayan küme	13
Şekil 2.3. Aralık üzerinde konveks fonksiyon ($f(x) = x $).....	15
Şekil 2.4. Konveks fonksiyon.....	15
Şekil 2.5. Quasi-konveks olup konveks olmayan fonksiyon	21
Şekil 2.6. Quasi-konveks olmayan fonksiyon.....	21

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	iv
ABSTRACT	v
ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR	vi
SİMGELER DİZİNİ	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ	ix
1. GİRİŞ	1
2. KURAMSAL TEMELLER.....	5
2.1. Konveks Fonksiyonlarla İlgili Temel Tanım ve Özellikler	5
2.2. Farklı Türden Bazı Konveks Fonksiyon Sınıfları.....	12
2.3. Kesirli Türevler ve Kesirli İntegraller	21
2.3.1. Riemann-Liouville kesirli türevleri ve kesirli integralleri.....	21
2.3.2. Caputo kesirli türevleri.....	22
3. MATERYAL ve YÖNTEM.....	23
3.1. Uyumlu Kesirli Türevin Analizi	40
4. ARAŞTIRMA BULGULARI	49
4.1. Farklı Türden Konveks Fonksiyonlar İçin Elde Edilen Uyumlu Kesirli İntegral Eşitsizlikler	49
5. TARTIŞMA ve SONUÇ	63
KAYNAKLAR.....	64
ÖZGEÇMİŞ	67

1. GİRİŞ

L'Hospital tarafından Leibniz'e, türev operatörünün kesirli olmasının anlamının sorulduğu mektupla (Ross 1977) matematik literatürüne giren kesirli türevler (fractional derivatives), günümüzde pek çok alanda kendini göstermektedir. Kesirli türevler üzerine ortaya atılan bu soru, 300 yıldan daha fazla bir zamandır Liouville, Riemann, Weyl, Fourier, Laplace, Lagrange, Euler, Abel, Lacroix, Grünwald ve Letnikov gibi ünlü birçok matematikçinin de üzerinde çalıştığı bir konu olmuştur (Loverro 2004). O günden bu yana hızla artan bir biçimde, kesirli diferansiyel denklemler iletim hatları teorisi, sıvıların kimyasal analizi, ısı transferi, difüzyon, Schrödinger denklemi, malzeme bilimi, akışkanlar, elektrokimya, fraktal süreçler ve fazlasını da içine alan birçok uygulama alanı bulmuştur (Bayın 2004). Kesirli hesap tekniğinin matematik uygulamalarının çoğu 20.yy bitmeden ortaya koyulmuştur fakat mühendislik ve bilimsel uygulamalarda heyecan verici başarılar elde etmesi ancak geçtiğimiz yüz yıl içerisinde gerçekleşebilmiştir.

Kesirli diferansiyel hesap tekniği, fiziksel olayları açıklamak için yapılan matematiksel yaklaşımlara yeni bir boyut kazandırmasının yanı sıra, fiziksel olayların yorumlarına da katkıda bulunmuştur. Fiziksel olayları betimleyen diferansiyel denklemlerin mertebeleri, ele alınan fiziksel olaydaki değişim hızını belirlemektedir. Bu noktada kesirli mertebeden diferansiyel, tamsayı mertebeden diferansiyel denklemlerin bazı fiziksel olayları açıklamaktaki zayıflıklarını kapatmakla birlikte fiziksel olayın karakterinin anlaşılmasında da büyük bir rol oynamaktadır.

Literatürde kesirli türevin birçok tanımı mevcuttur. Bu tanımların birçoğu kesirli türev tanımını yaparken integral formundan yararlanmaktadır. Bu şekildeki tanımlardan en meşhur olanları Riemann-Liouville ve Caputo tanımlarıdır. Diğer bir meşhur tanım olan Grünwald-Letnikov tanımı kesirli türevin tanımı için bir limit formundan yararlanır. Bu kesirli türev tanımlarıyla alakalı literatürde birçok çalışma mevcuttur.

Yukarıda adı geçen kesirli türev tanımları da dahil literatürdeki bütün kesirli türev tanımlarının klasik türev tanımından aldıkları tek ortak özellik lineer olma özelliğidir (Khalil *et al.* 2014). Bunun dışındaki özelliklerle alakalı olarak bir uyum genellikle söz konusu değildir. Mesela sabitin kesirli türevi Riemann-Liouville kesirli türev tanımı için sıfır

olmamaktadır. Yine klasik türevdeki iki fonksiyonun çarpımının ve bölümünün türevi formülü bütün kesirli türevler için geçerli değildir. Buna benzer olarak yine bütün kesirli türev tanımları klasik türevdeki zincir kuralını sağlamaz.

Son zamanlarda klasik türevin doğal genişletilmesi olarak görülen kesirli türevin yeni bir tanımı verildi (Khalil *et al.* 2014). Bu yeni tanım klasik türeve uyumuyla dikkat çekmektedir. Yukarıda sayılan ve diğer kesirli türevler için sağlanmayan, çarpım kuralı ve bölüm kuralı bu yeni kesirli türev tanımı için sağlanmaktadır. Zincir kuralı ise klasik türevdeki kurala çok yakın olarak yazılabilmektedir. Uyumlu kesirli türev (conformable fractional derivative) olarak adlandırılan bu yeni kesirli türev tanımı, sağladığı bu özelliklerden dolayı büyük bir ilgiyi üzerine çekmiş ve kısa zamanda bu yeni tanımla alakalı birçok çalışma yapılmıştır.

Bazı yazarlar (Ortiguera and Machado 2015) tarafından uyumlu kesirli türevin gerçekten kesirsel bir operatör olup olmadığı tartışıldı. Bugün bu soru hala tartışmaya açık görülüyor. Belki de bu konu felsefik bir konudur (Batarfi *et al.* 2015). Ayrıca bu yeni tanım bir kesirli türev tanımı olmasa bile kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin çözümü için bir dönüşüm olarak düşünülebilir (Çenesiz and Kurt 2015). Anlaşılacağı üzere bu tartışma, bu yeni teoriye hangi ismin verileceği üzerine yapılan bir tartışmadır. Herhalükarda bu yeni kesirli türev tanımı üzerinde çalışılmayı hak eden bir konu olarak karşımızda durmaktadır.

Khalil *et al.* (2014) tarafından ortaya atılan bu yeni tanım klasik türevdekine benzer bir limit formuna sahiptir. Khalil ve arkadaşları yaptıkları çalışmada bu yeni kesirli türev tanımının (ya da dönüşümünün) çarpım kuralını ve bölüm kuralını sağladığını ispat ettiler. Ayrıca onlar yaptıkları çalışmada uyumlu kesirli mertebeden diferansiyellenebilen fonksiyonlar için Rolle teoremi ve ortalama değer teoremini ifade ettiler. Uyumlu kesirli türev analizi, Abdeljawad (2015) tarafından geliştirildi. Abdeljawad yapmış olduğu çalışmada bu yeni tanım için sol ve sağ uyumlu kesirli türev kavramlarını, kesirsel zincir kuralını ve Gronwall eşitsizliğini sundu. Ayrıca uyumlu kesirli mertebeden dizisel türev kavramını, $0 < \alpha \leq 1$ için iki tür kesirsel kısmi integrasyon formüllerini, uyumlu kesirsel kuvvet seri açılımını, kesirsel Taylor eşitsizliğini ve son olarak kesirsel Laplace dönüşümünü verdi.

Konvekslik kavramı ilk olarak Hermite tarafından Ekim 1881'de elde edilen bir sonucun, 1883 yılında Mathesis adlı dergide yayınlanmasıyla ortaya çıkmıştır. Hadamard'ın 1893

yılındaki çalışmasında konveksliğe rastlansa da konveks fonksiyonların sistematik olarak çalışılması 1905-1906 yıllarında J.L.W.V. Jensen ile başlar.

Konveksliğin tanımı eşitsizlikle ifade edildiğinden ve matematik bir bakıma karşılaştırma olduğundan Konveks Fonksiyonlar Teorisinde eşitsizliklerin önemli bir yeri vardır. Hardy, Littlewood, Pólya, Beckenbach, Bellman, Mitrinović, Pachpatte, Pečarić ve Fink gibi matematikçiler Konveks Fonksiyonlar ile Eşitsizlikler Teorisi'ni bir arada inceleyerek çeşitli kitaplar ve çok sayıda makaleler yayınlamışlardır. Bu tür eşitsizlikleri konu alan ilk temel çalışma 1934'te Hardy, Littlewood ve Pólya tarafından yazılan "Inequalities" adlı kitaptır (Hardy *et al.* 1952). İkinci çalışma ise E.F. Beckenbach ve R. Bellman tarafından 1961'de yazılan 1934-1960 yılları arasında elde edilen yeni eşitsizliklerin sonuçlarını içeren ve yine "Inequalities" adı verilen kitaptır (Beckenbach and Bellman 1961). Bunu Mitrinović'in 1970 yılında yayınladığı ve ilk iki kitapta bulunmayan farklı konulara da yer verdiği "Analytic Inequalities" isimli kitabı takip eder (Mitrinović 1970).

Konveks Fonksiyonlar Teorisi ile ilişkili olan Eşitsizlik Teorisi C.F. Gauss, A.L. Cauchy ve P.L. Čebyşev ile gelişmeye başlamıştır. 19.-20. yy'da bulunan eşitsizliklerin bir kısmı konveks fonksiyonlarla ilişkilendirilerek temel eşitsizlikler haline gelmiştir. Bunların en önemlileri 1881 yılında Hermite tarafından elde edilen Hermite-Hadamard eşitsizliği ve 1938 yılında Ostrowski tarafından elde edilen Ostrowski eşitsizliğidir. Hermite-Hadamard eşitsizliği ile ilgili çalışmaların büyük bir kısmı S.S. Dragomir ve C.E.M. Pearce tarafından 2000 yılında yazılmış olan "Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications" isimli kaynakta bir araya getirilmiştir (Dragomir and Pearce 2000). Konveks fonksiyonlar için eşitsizlikler üzerine yoğun çalışan diğer matematikçiler M.E. Özdemir, U.S. Kırmacı, R. Agarwal, G. Anastassiou, G.V. Milovanovic, A.M. Fink, A.W. Roberts, D.E. Varberg, N.S. Barnett, H. Yıldırım, M.Z. Sarıkaya, N. Ujević, S. Varošanec, P.S. Bullen, P. Cerone, G. Toader, M. Alomari, F. Qi, C.E.M. Pearce, M. Darus, M.K. Bakula, J. Pečarić, E. Set, A.O. Akdemir, H. Kavurmacı Önalın, M. Avcı Ardıç, M. Gürbüz, A. Ekinci, Ç. Yıldız şeklinde sıralanabilir.

"Inequalities and Applications" başlıklı doktora tezinde integral eşitsizlikleri üzerine uygulamalar yazılmış ve ortalamalar üzerine farklı sonuçlar elde edilmiştir. Bunun yanında Cauchy-Schwartz, Bessel ve Jensen eşitsizlikleri üzerine çalışmalar yapılmıştır (Rooi 2003).

“Bazı Farklı Türden Konveks Fonksiyonlar İçin İntegral Eşitsizlikleri” başlıklı doktora tezinde $E - konveks$ ve $E - m - konveks$ fonksiyonlar ile birlikte farklı türden $E - konveks$ ve $E - m - konveks$ fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipli ve diğer bazı farklı türden konveks fonksiyonlar olan $m - konveks$, $(\alpha, m) - konveks$, $log - konveks$, $quasi - konveks$, $s - konveks$, $r - konveks$ ve $h - konveks$ fonksiyonlar için yeni integral eşitsizlikleri verilmiştir. Bunların yanı sıra bazı genelleştirmeler de elde edilmiştir (Set 2010).

“Several Inequalities of Hermite-Hadamard, Ostrowski and Simpson Type for $s - Convex$, $quasi - Convex$ and $r - Convex$ Mappings and Applications” başlıklı doktora tezinde $s - konveks$, $quasi - konveks$ ve konveks fonksiyon sınıfları kullanılarak Hermite-Hadamard, Ostrowski ve Simpson tipli integral eşitsizlikleri elde edilmiştir ve bu eşitsizlikler için uygulamalar verilmiştir (Alomari 2011).

“Quasi Konveks Fonksiyonlar İçin Eşitsizlikler Ve Uygulamaları” başlıklı yüksek lisans tezinde $quasi - konveks$ fonksiyonlar için yapılan geniş bir literatür taramasının yanısıra, $quasi - konveks$ fonksiyonlar için Hermite-Hadamard, Ostrowski ve Simpson tipli eşitsizlikler elde edilmiştir. Daha sonra elde edilen eşitsizlikler için sonuçlar ve bu sonuçlara bağlı özel uygulamalar verilmiştir (Yıldız 2011).

“Bazı Farklı Türden Konveks Fonksiyonlar İçin Ostrowski ve Hermite-Hadamard Tipli İntegral Eşitsizlikler” başlıklı doktora tezinde farklı türden konveks fonksiyon sınıfları kullanılarak yeni baskın konveks fonksiyon kavramları tanımlanmış, bu yeni fonksiyon sınıfları için Hermite-Hadamard tipli integral eşitsizlikleri edilmiştir. Konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipli; konveks ve konveks fonksiyonlar için Ostrowski tipli yeni integral eşitsizlikleri elde edilmiştir ve elde edilen bazı eşitsizlikler için uygulamalar verilmiştir. (Kavurmacı 2012), “ n . mertebeden türevlenebilen konveks fonksiyonlar için integral eşitsizlikleri” başlıklı doktora tezinde Fejér eşitsizliği kullanılarak yeni teoremler ispatlanmış, g 'nin özel değerleri için yeni sonuçlar elde edilmiştir. Ayrıca n . mertebeden türevlenebilen fonksiyonlar için Lemmalar yazılmış ve bu Lemmalar kullanılarak yeni genelleştirmeler yapılmıştır.(Yıldız 2014).

2. KURAMSAL TEMELLER

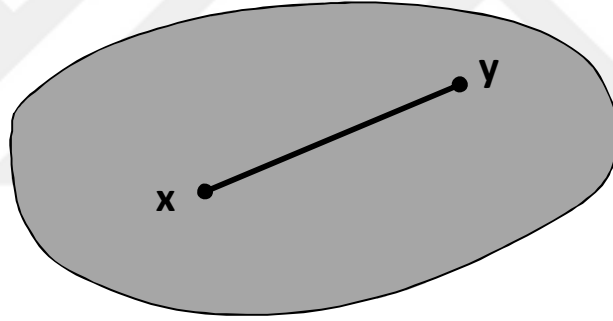
2.1. Konveks Fonksiyonlarla İlgili Temel Tanım ve Özellikler

Bu çalışmada kullanılacak bazı temel tanımlar aşağıda verilmiştir.

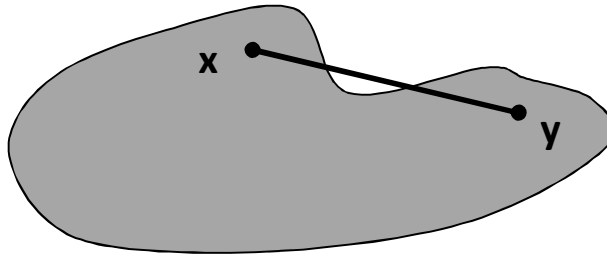
Tanım 2.1.1. “Konveks Küme: L bir lineer uzay $A \subseteq L$ ve $x, y \in A$ keyfi olmak üzere

$$B = \{z \in L: z = tx + (1 - t)y, \quad 0 \leq t \leq 1\} \subseteq A$$

ise A kümesine konveks küme denir. Eğer $z \in B$ ise $z = tx + (1 - t)y$ eşitliğindeki x ve y 'nin katsayıları için $t + (1 - t) = 1$ bağıntısı her zaman doğrudur. Bu sebeple konveks küme tanımındaki $t, 1 - t$ yerine $t + k = 1$ şartını sağlayan ve negatif olmayan t, k reel sayıları alınabilir. Geometrik olarak B kümesi uç noktaları x ve y olan bir doğru parçasıdır. Bu durumda sezgisel olarak konveks küme, boş olmayan ve herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçasını ihtiva eden kümedir” (Bayraktar 2000).



Şekil 2.1. Konveks küme



Şekil 2.2. Konveks olmayan küme

Tanım 2.1.2. “(J –Konveks Fonksiyon) I, \mathbb{R} 'de bir aralık olmak üzere her $x, y \in I$ için

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna I üzerinde Jensen anlamında konveks veya J –konveks fonksiyon denir” (Mitrinović 1970).

Tanım 2.1.3. “(Kesin J –Konveks Fonksiyon) Her $x, y \in I$ ve $x \neq y$ için

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

oluyorsa f fonksiyonuna I üzerinde kesin J –konveks fonksiyon denir” (Mitrinović 1970).

Tanım 2.1.4. “(Konveks Fonksiyon): I, \mathbb{R} 'de bir aralık ve $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere her $x, y \in I$ ve $\alpha \in [0,1]$ için,

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$$

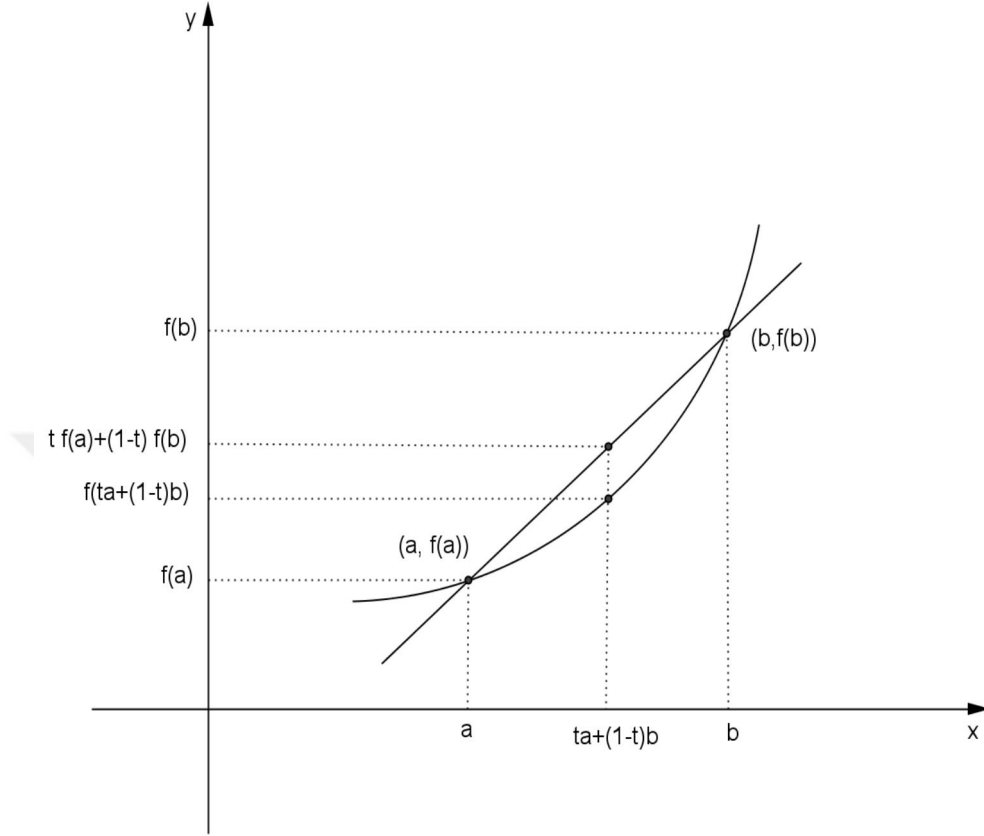
şartını sağlayan f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir.” (Pečarić *et al.* 1992).

Eğer $\alpha \in (0,1)$ aralığında alınırsa bu durumda

$$f(\alpha x + (1 - t)y) < \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$$

olur. Bu f fonksiyonuna da strictly konveks fonksiyon denir. “ $-f$ ” konveks (strictly konveks) ise o zaman f ' ye konkav (strictly konkav) denir.

Konveks fonksiyonun geometrik anlamı aşağıdaki gibidir:



Şekil 2.3. Konveks fonksiyon

Geometrik olarak $ta + (1 - t)b$ noktasında; f 'nin eğri üzerinde aldığı değer $(a, f(a))$ ve $(b, f(b))$ noktalarını birleştiren doğru parçasının üzerinde aldığı değerden her zaman daha küçüktür, yani bu iki noktayı birleştiren kiriş (doğru parçası) her zaman eğrinin $[a, b]$ aralığında kalan kısmının üzerinde veya üstündedir.

Şekil 2.3. den de görüldüğü gibi $t \in [0, 1]$ olduğundan $tf(a) \leq f(a)$ dir. Benzer şekilde $(1 - t)f(b) \leq f(b)$ dir. Yani $tf(a)$, $f(a)$ 'nın $(1 - t)f(b)$ de $f(b)$ 'nin altındadır.

Dolayısıyla $tf(a) + (1 - t)f(b)$, $f(a)$ ile $f(b)$ arasında olur. Konkav fonksiyon için kiriş f 'nin grafiğinin $[a, b]$ aralığında kalan kısmının üzerinde veya altındadır.

Teorem 2.1.1. “(Üçgen Eşitsizliği): Herhangi bir x, y reel sayıları için

$$|x + y| \leq |x| + |y|,$$

$$||x| - |y|| \leq |x - y|,$$

$$||x| - |y|| \leq |x + y|,$$

ve tümevarım metoduyla

$$|x_1 + \dots + x_n| \leq |x_1| + \dots + |x_n|$$

eşitsizlikleri geçerlidir” (Mitrinović *et al.* 1993).

Teorem 2.1.2. “(Üçgen Eşitsizliğinin İntegral Versiyonu): $f, [a, b]$ aralığında sürekli reel değerli bir fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \quad (a < b)$$

eşitsizliği geçerlidir” (Mitrinović *et al.* 1993).

Örnek 2.1.1. $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x|$ fonksiyonu I üzerinde konveks fonksiyondur.

Çözüm: f 'nin konveks olduğunu göstermek için $x, y \in I$ ve $\alpha \in [0,1]$ için

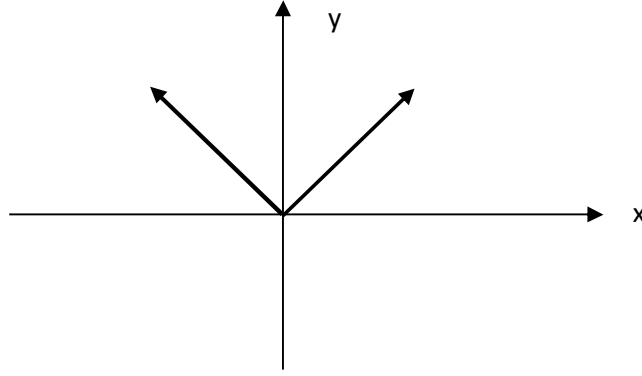
$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$$

olduğunu göstermeliyiz. Buna göre

$$\begin{aligned} f(\alpha x + (1 - \alpha)y) &= |\alpha x + (1 - \alpha)y| \\ &\leq \alpha + |(1 - \alpha)y| \quad (\text{üçgen eşitsizliğinden}) \\ &= \alpha|x| + (1 - \alpha)|y| \\ &= \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y) \end{aligned}$$

elde edilir. İlk ve son ifadeden f fonksiyonunun konveksliği ispatlanmış olur

$f(x) = |x|$ fonksiyonu $x = 0$ da türeve sahip olmamasına rağmen konveks fonksiyondur.



Şekil 2.4 Aralık üzerinde konveks fonksiyon

Sonuç 2.1.1. “ $x, y \in \mathbb{R}$ ve $p + q > 0$ olmak üzere

$$f\left(\frac{px + qy}{p + q}\right) \leq \frac{pf(x) + qf(y)}{p + q}$$

eşitsizliği (2.1) eşitsizliğine denktir” (Mitrinović *et al.* 1993).

Teorem 2.1.3. “(Hölder Eşitsizliği): $a = (a_1, \dots, a_n)$ ve $b = (b_1, \dots, b_n)$ reel veya kompleks sayıların iki n –lisi olsun. Bu takdirde

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

olmak üzere

(a) $p > 1$ ise,

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^q \right)^{\frac{1}{q}},$$

(b) $p < 0$ veya $q < 0$ ise,

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \geq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizlikleri geçerlidir” (Mitrinović 1970).

Teorem 2.1.4. “(İntegraller için Hölder Eşitsizliği): $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. f ve g , $[a, b]$ aralığında tanımlı ve integrallenebilen iki fonksiyon olsun. $|f|^p$ ve $|g|^q$, $[a, b]$ aralığında integrallenebilen fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir” (Mitrinović *et al.* 1993)

Tanım 2.1.5. “(Süreklilik): $f: S \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in S$ ve $\varepsilon > 0$ verilmiş olsun.

$$x \in S \text{ ve } |x - x_0| < \delta \text{ için } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa f , x_0 'da süreklidir denir” (Bayraktar 2010).

Tanım 2.1.6. “(Düzgün Süreklilik): $f: S \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu ve $\varepsilon > 0$ sayısı verilmiş olsun. $|x_1 - x_2| < \delta$ şartını sağlayan her $x_1, x_2 \in S$ için $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa f , S 'de düzgün süreklidir denir” (Bayraktar 2010).

Tanım 2.1.7. “(Lipschitz Şartı): $f: S \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$$

olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı varsa f , S 'de Lipschitz şartını sağlıyor denir” (Bayraktar 2010).

Sonuç 2.1.2. “ f , S 'de Lipschitz şartını sağlıyorsa f , S 'de düzgün süreklidir” (Bayraktar 2010).

Teorem 2.1.5. $[a, b] \subseteq I$ olsun. Eğer $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon ise f Lipschitz şartını sağlar. Sonuç olarak f , $[a, b]$ aralığında mutlak sürekli ve I 'de süreklidir (Pečarić *et al.* 1992).

Teorem 2.1.6. “ f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında konveks ise

a. f , (a, b) aralığında süreklidir ve

b. f , $[a, b]$ aralığında sınırlıdır” (Azpeitia 1994).

Tanım 2.1.8. “(Artan ve Azalan Fonksiyonlar): f , I aralığında tanımlı bir fonksiyon ve x_1, x_2 de I 'da iki nokta olsun. Bu durumda

- (a) $x_2 > x_1$ iken $f(x_2) > f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde artandır,
 - (b) $x_2 > x_1$ iken $f(x_2) < f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde azalandır,
 - (c) $x_2 > x_1$ iken $f(x_2) \geq f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde azalmayandır,
 - (d) $x_2 > x_1$ iken $f(x_2) \leq f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde artmayandır
- Denir” (Adams and Essex 2010).

Teorem 2.1.7. “ J açık bir aralık ve $J \subseteq I$ olmak üzere f , I üzerinde sürekli ve J üzerinde diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda

- (a) Her $x \in J$ için $f'(x) > 0$ ise f fonksiyonu I üzerinde artandır.
- (b) Her $x \in J$ için $f'(x) < 0$ ise f fonksiyonu I üzerinde azalandır.
- (c) Her $x \in J$ için $f'(x) \geq 0$ ise f fonksiyonu I üzerinde azalmayandır.
- (d) Her $x \in J$ için $f'(x) \leq 0$ ise f fonksiyonu I üzerinde artmayandır.” (Adams and Essex 2010).

Aşağıda konveks fonksiyonların türevleri ile artanlık (azalanlık) arasındaki ilişkiyi içeren sonuç ve teoremler verilmiştir.

Sonuç 2.1.3. “ f, g konveks fonksiyonlar ve g aynı zamanda artan ise $g \circ f$ fonksiyonu konvektir” (Roberts and Varberg 1973).

Teorem 2.1.8. “Eğer $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ konveks (kesin konveks) bir fonksiyon ise $f'_+(x)$ ve $f'_-(x)$ var ve bu fonksiyonlar I° de artandır (kesin artandır)” (Pečarić *et al.* 1992).

Teorem 2.1.9. “ f fonksiyonu (a, b) aralığında diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda f fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter şart f' nin artan (kesin artan) olmasıdır” (Pečarić *et al.* 1992).

Teorem 2.1.10. “ f fonksiyonunun I açık aralığında ikinci türevi varsa, f fonksiyonunun bu aralık üzerinde konveks (kesin konveks) olması için gerek ve yeter şart $x \in I$ için

$$f''(x) \geq (>)0$$

olmasıdır” (Pečarić *et al.* 1992).

2.2 Farklı Türden Bazı Konveks Fonksiyon Sınıfları

Çeşitli konveks fonksiyon türleri vardır. Bunlardan en çok bilinen ve literatürde bu konuda çalışanlar tarafından sık kullanılan konveks fonksiyon türleri şunlardır:

Tanım 2.2.1. “(Quasi-Konveks Fonksiyon): $S \subset \mathbb{R}^n$ boştan farklı bir küme ve $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $\forall x, y \in S$ ve $\alpha \in [0,1]$ için

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \max\{f(x), f(y)\}$$

ise f 'ye *quasi* –konveks fonksiyon denir” (Dragomir and Pearce 1998).

Eğer

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) < \max\{f(x), f(y)\}$$

ise f 'ye *strictly quasi* –konveks fonksiyon denir. Aynı şartlar altında

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \geq \max\{f(x), f(y)\}$$

ise f 'ye *quasi* –konkav fonksiyon ve

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) > \max\{f(x), f(y)\}$$

ise f 'ye *strictly quasi* –konkav fonksiyon denir (Dragomir and Pearce 1998).

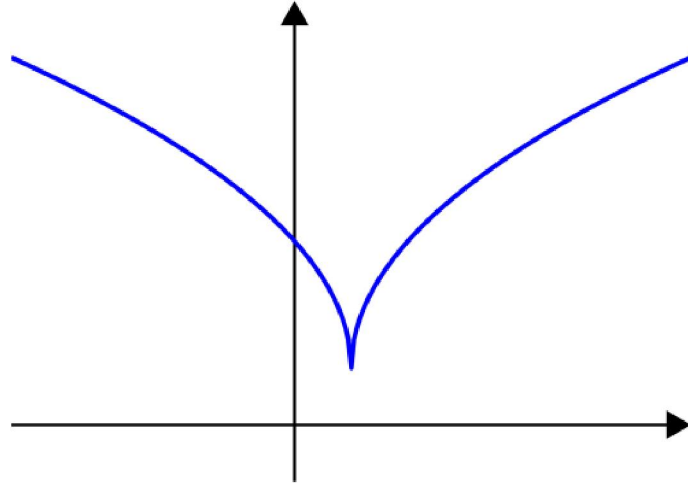
Tanım 2.2.2. “ f hem *quasi* –konveks hem de *quasi* –konkav ise f 'ye *quasi* –monotonik denir” (Greenberg and Pierskalla 1971).

Sonuç 2.2.1. “Herhangi bir konveks fonksiyon *quasi* –konveks fonksiyondur. Fakat tersi her zaman doğru değildir. Yani *quasi* –konveks olup konveks olmayan fonksiyonlar vardır.

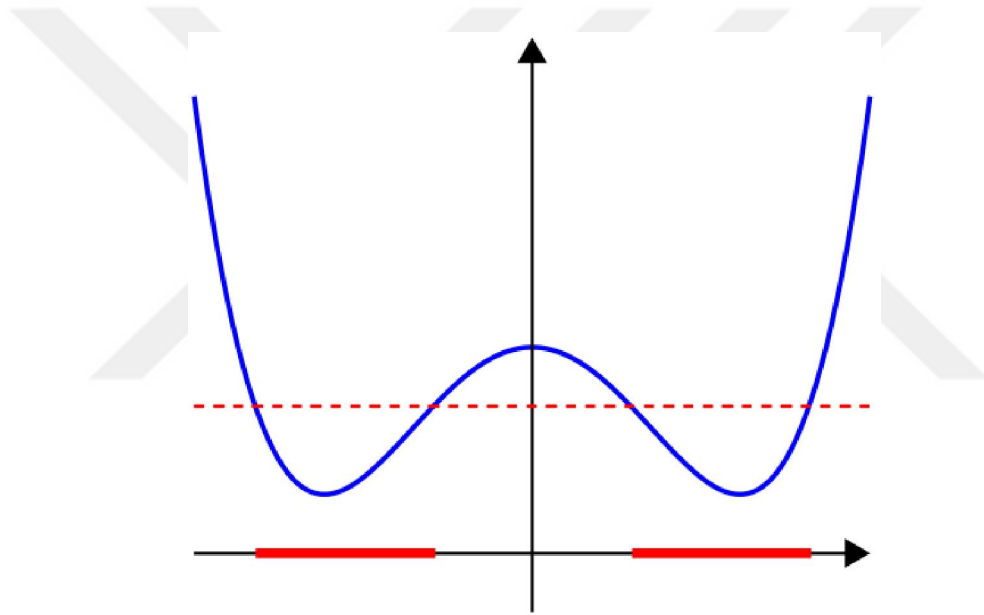
Örneğin $g: [-2,2] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$g(t) = \begin{cases} 1, & t \in [-2, -1] \\ t^2, & t \in (-1, 2] \end{cases}$$

fonksiyonu $[-2,2]$ aralığında konveks değildir. Fakat g fonksiyonu $[-2,2]$ aralığında *quasi* –konveks fonksiyondur” (Ion 2007).



Şekil 2.5. Quasi-konveks olup konveks olmayan fonksiyon



Şekil 2.6. Quasi-konveks olmayan fonksiyon

Quasi-konveks olmayan bir fonksiyon: Fonksiyonun tanım kümesinde, değerleri kırmızı kesik çizginin altında kalan noktalar, iki kırmızı aralığın birleşimidir ve fonksiyon bu noktaların birleşiminde konveks değildir.

Tanım 2.2.3. “(Wright-Konveks Fonksiyon): $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $y > x, \alpha > 0$ şartları altında her bir $y + \alpha, x \in I$ için

$$f(x + \alpha) - f(x) \leq f(y + \alpha) - f(y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f 'ye $I \subseteq \mathbb{R}$ 'de Wright-konveks fonksiyon denir” (Dragomir and Pearce 1998).

Tanım 2.2.4. “(Wright-Quasi-Konveks Fonksiyon): $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $y > x$, $\alpha > 0$ şartları altında $\forall x, y, y + \alpha \in I$ ve $\forall \alpha \in [0,1]$ için

$$\frac{1}{2}[f(tx + (1-t)y) + f((1-t)x + ty)] \leq \max\{f(x), f(y)\}$$

veya

$$\frac{1}{2}[f(y) + f(x + \alpha)] \leq \max\{f(x), f(y + t)\}$$

eşitsizliklerinden biri sağlanıyorsa f 'ye $I \subseteq \mathbb{R}$ 'de Wright-quasi-konveks fonksiyon denir” (Dragomir and Pearce 1998).

Tanım 2.2.5. “(J –Quasi-Konveks Fonksiyon): $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x, y \in I$ için

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \max\{f(x), f(y)\}$$

şartını sağlıyorsa f fonksiyonuna $J - quasi -konveks$ denir” (Dragomir and Pearce 2000).

Tanım 2.2.6. “(Log-Konveks Fonksiyon): I, \mathbb{R} 'de bir aralık ve $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Her $x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f(tx + (1-t)y) \leq f^t(x)f^{1-t}(y)$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna Log-konveks denir” (Pečarić *et al.* 1992).

Tanım 2.2.7 “(Godunova-Levin Fonksiyonu): $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ negatif olmayan bir fonksiyon, $\forall x, y \in I, t \in (0,1)$ olmak üzere

$$f(tx + (1-t)y) \leq \frac{f(x)}{t} + \frac{f(y)}{1-t}$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna Godunova-Levin fonksiyon veya $Q(I)$ sınıfına aittir denir.

Bu tanıma denk olarak;

$$f \in Q(I) \text{ ve } x, y, z \in I \text{ ise bu takdirde}$$

$$f(x)(x - y)(x - z) + f(y)(y - x)(y - z) + f(z)(z - x)(z - y) \geq 0$$

eşitsizliği sağlanır” (Godunova and Levin 1985).

Tanım 2.2.8. “(P –Fonksiyonu): $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ negatif olmayan bir fonksiyon olsun.

$\forall x, y \in I, t \in [0,1]$ olmak üzere;

$$f(tx + (1 - t)y) \leq f(x) + f(y)$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna P –fonksiyonu veya $P(I)$ sınıfına aittir denir” (Dragomir *et al.* 1995).

Tanım 2.2.9. “(m –Konveks Fonksiyon): $f: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ve $b > 0$ olsun. Her $x, y \in [0, b]$, $\alpha \in [0,1]$ ve $m \in [0,1]$ için

$$f(\alpha x + m(1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + m(1 - \alpha)f(y)$$

şartı sağlanıyorsa f fonksiyonuna m –konvekstir denir” (Toader 1984).

$-f$ fonksiyonu m –konveks ise bu takdirde f fonksiyonu m –konkavdır. Ayrıca $f(0) \leq 0$ için $[0, b]$ aralığında tanımlı tüm m –konveks fonksiyonların sınıfı $K_m(b)$ ile gösterilir. Eğer $m = 1$ alınırsa $[0, b]$ üzerinde m –konveks fonksiyon bilinen konveks fonksiyona dönüşür.

Tanım 2.2.10. “(Birinci Anlamda s –Konveks Fonksiyon): $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ ve $0 < s \leq 1$ olsun. $\alpha^s + \beta^s = 1$ olmak üzere her $u, v \in \mathbb{R}_+$ ve her $\alpha, \beta \geq 0$ için

$$f(\alpha u + \beta v) \leq \alpha^s f(u) + \beta^s f(v)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna birinci anlamda s –konveks fonksiyon denir” (Orlicz 1961).

Tanım 2.2.11. “(İkinci Anlamda s –Konveks Fonksiyon): $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ ve $0 < s \leq 1$ olsun. $\alpha, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1$ olmak üzere her $u, v \in \mathbb{R}_+$ için

$$f(\alpha u + \beta v) \leq \alpha^s f(u) + \beta^s f(v)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna ikinci anlamda s –konveks fonksiyon denir. İkinci anlamda s –konveks fonksiyonların sınıfı K_s^2 ile gösterilir” (Breckner 1978).

Yukarıda verilen her iki s –konvekslik tanımı $s = 1$ için bilinen konveksliğe dönüşür.

Örnek 2.2.1. “ $s \in (0,1)$ ve $a, b, c \in \mathbb{R}$ olsun. $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f(t) = \begin{cases} a, & t = 0 \\ bt^s + c, & t > 0 \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Bu takdirde

- (i) $b \geq 0$ ve $0 \leq c \leq a$ ise $f \in K_s^2$ dir.
- (ii) $b > 0$ ve $c < 0$ ise $f \notin K_s^2$ dir” (Hudzik and Maligranda 1994).

Tanım 2.2.12. “(**h –Konveks Fonksiyon**): $h: J \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pozitif bir fonksiyon olsun. Her $x, y \in I$, $\alpha \in (0,1)$ için

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq h(\alpha)f(x) + h(1 - \alpha)f(y) \quad (2.3)$$

şartını sağlayan negatif olmayan $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna h –konveks fonksiyon veya $SX(h, I)$ sınıfına aittir denir” (Varošanec 2007).

“(2.3) eşitsizliğinin tersini doğrulayan $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna h –konkav fonksiyon denir yani $f \in SV(h, I)$ ’dir” (Varošanec 2007).

“Bu tanımdan açıkça şu sonuçlar çıkarılabilir: $h(\alpha) = \alpha$ ise tüm negatif olmayan konveks fonksiyonlar $SX(h, I)$ sınıfına ve eşitsizliğin yön değiştirmesi durumunda tüm negatif olmayan konkav fonksiyonlar $SV(h, I)$ sınıfına aittir; $h(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$ ise $SX(h, I) = Q(I)$ sınıfına aittir; $h(\alpha) = 1$ ise $SX(h, I) \supseteq P(I)$ ’dir; $s \in (0,1)$ olmak üzere $h(\alpha) = \alpha^s$ ise $SX(h, I) \supseteq K_s^2$ ’dir” (Varošanec 2007).

Tanım 2.2.13. “(**Starshaped Fonksiyon**): $b > 0$ olmak üzere $f: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, her $x \in [0, b]$ ve $\alpha \in [0,1]$ için

$$f(\alpha x) \leq \alpha f(x)$$

şartını sağlıyorsa bu fonksiyona starshaped fonksiyon denir” (Toader 1984).

Tanım 2.2.14. “(Geometrik Konveks Fonksiyon) $f: I \subset \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ fonksiyonu verilsin. Eğer f fonksiyonu, her $x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f(x^t y^{1-t}) \leq [f(x)]^t [f(y)]^{1-t}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonuna geometrik konveks fonksiyon denir” (Zhang *et al.* 2012).

Tanım 2.2.15. “(s – Geometrik Konveks Fonksiyon) $f: I \subset \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ fonksiyonu verilsin. Eğer f fonksiyonu, her $x, y \in I$, $s \in (0,1]$ ve $\alpha \in [0,1]$ için

$$f(x^\alpha y^{1-\alpha}) \leq [f(x)]^{\alpha^s} [f(y)]^{(1-\alpha)^s}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonuna s –geometrik konveks fonksiyon denir” (Zhang *et al.* 2012).

$s = 1$ için, s –geometrik konveks fonksiyon tanımının geometrik konveks fonksiyon tanımına dönüşeceği açıktır.

Tanım 2.2.16. (Harmonik Konveks Fonksiyon) $I \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ bir açık aralık olsun. $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere eğer $\forall x, y \in I$ ve $\alpha \in [0,1]$ için

$$f\left(\frac{xy}{\alpha x + (1-\alpha)y}\right) \leq \alpha f(y) + (1-\alpha)f(x)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonuna harmonik konveks fonksiyon denir.

Tanım 2.2.17. “(Ortalama Fonksiyonu) M fonksiyonu $M: (0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ şeklinde verilsin. Eğer

- (1) $M(x, y) = M(y, x)$
- (2) $M(x, x) = x$
- (3) $x < M(x, y) < y, x < y$
- (4) $M(ax, ay) = aM(x, y), a > 0$

şartları sağlanıyorsa M fonksiyonuna ortalama fonksiyonu denir” (Anderson et al. 2007).

Örnek 2.2.2

“(1) $M(x, y) = A(x, y) = \frac{x+y}{2}$ Aritmetik ortalama

(2) $M(x, y) = G(x, y) = \sqrt{xy}$ Geometrik ortalama

(3) $M(x, y) = H(x, y) = 1/A(1/x, 1/y)$ Harmonik ortalama

(4) $M(x, y) = L(x, y) = \frac{x-y}{\log x - \log y}, x \neq y$ için ve $L(x, x) = x$ Logaritmik ortalama

(5) $M(x, y) = I(x, y) = \left(\frac{1}{e}\right) \left(\frac{x^x}{y^y}\right)^{\frac{1}{x-y}}, x \neq y$ ve $I(x, x) = x$ Identrik ortalama” (Anderson et al. 2007).

Tanım 2.2.18. “(MN- Konveks (Konkav) fonksiyon): $f: I \rightarrow (0, \infty)$ sürekli fonksiyonu verilsin. $I \subseteq (0, \infty)$ ve M, N herhangi iki ortalama fonksiyonu olsun. Eğer $\forall x, y \in I$ için

$$f(M(x, y)) \leq (\geq) N(f(x), f(y))$$

şartı sağlanıyor ise f fonksiyonuna MN –konveks(konkav) fonksiyonu denir” (Anderson 2007).

Teorem 2.2.1. “ $I \subseteq (0, \infty)$ ve $f: I \rightarrow (0, \infty)$ sürekli fonksiyonu verilsin. (4)-(9) seçenekleri için $I = (0, b)$, $0 < b < \infty$ olarak verilsin.

(1) f nin AA –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart f nin konveks (konkav) olmasıdır.

(2) f nin AG –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $\log f$ nin konveks (konkav) olmasıdır.

(3) f nin AH –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $1/f$ nin konveks (konkav) olmasıdır.

(4) f nin GA –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $f(be^{-t})$ nin $(0, \infty)$ üzerinde konveks (konkav) olmasıdır.

(5) f nin GG –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $f(be^{-t})$ nin $(0, \infty)$ üzerinde konveks (konkav) olmasıdır.

(6) f nin GH –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $1/f(be^{-t})$ nin $(0, \infty)$ üzerinde konveks (konkav) olmasıdır.

(7) f nin HA –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $f(1/x)$ nin $(1/b, \infty)$ üzerinde konveks (konkav) olmasıdır.

(8) f nin HG –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $\log f(1/x)$ nin $(1/b, \infty)$ üzerinde konveks (konkav) olmasıdır.

(9) f nin HH –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $1/f(1/x)$ nin $(1/b, \infty)$ üzerinde konveks (konkav) olmasıdır” (Anderson 2007).

Teorem 2.2.2. “ $I \subseteq (0, \infty)$ ve $f: I \rightarrow (0, \infty)$ diferensiyellenebilir fonksiyonu verilsin. (4)-(9) seçenekleri için $I = (0, b)$, $0 < b < \infty$ olarak verilsin.

(1) f nin AA –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $f'(x)$ nin artan (azalan) olmasıdır.

(2) f nin AG –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $f'(x)/f(x)$ nin artan (azalan) olmasıdır.

(3) f nin AH –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $f'(x)/f(x)^2$ nin artan (azalan) olmasıdır.

(4) f nin GA –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $xf'(x)$ nin artan (azalan) olmasıdır.

(5) f nin GG –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $xf'(x)/f(x)$ nin artan (azalan) olmasıdır.

(6) f nin GH –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $xf'(x)/f(x)^2$ nin artan (azalan) olmasıdır.

(7) f nin HA –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $x^2f'(x)$ nin artan (azalan) olmasıdır.

(8) f nin HG –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $x^2f'(x)/f(x)$ nin artan (azalan) olmasıdır.

(9) f nin HH –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $x^2f'(x)/f(x)^2$ nin artan (azalan) olmasıdır” (Anderson 2007).

2.3. Kesirli Türevler ve Kesirli İntegraller

Kesirli mertebeden türevlerin birbirinden farklı ve birbiriyle uyuşmayan birçok tanımı literatürde mevcuttur. Fakat literatür incelediğinde, bu tanımların aslında Riemann-Liouville türev tanımının genelleştirilmiş şekli ve varyantları yada belirli şartlar altında Riemann-Liouville türev tanımı ile bağlantılı olduğu görülür. Bu tanımlar arasındaki temel fark ele alınan fonksiyonların tanım kümesi ve seçilen yardımcı parametrelerdir (Li 2003).

Kesirli türev tanımları arasında en çok kullanılan Riemann-Liouville ve Caputo türev tanımıdır.

2.3.1. Riemann-Liouville kesirli türevleri ve kesirli integralleri

Tanım 2.3.1.1. $\alpha > 0$ olmak üzere α mertebeden Riemann-Liouville integral operatörü J

$$(J_{\alpha}^a f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad t > a \quad (2.5)$$

$$(J_0^a f)(t) = f(t) \quad (2.6)$$

biçiminde tanımlanır.

f , $t \geq a$ için sürekli olsun. $\alpha, \beta > 0$, ve $\gamma > -1$ olmak üzere, Riemann-Liouville integral operatörünün bazı özellikleri aşağıdaki gibidir:

a. $(J_{\alpha}^a J_{\beta}^a f)(t) = (J_{\alpha+\beta}^a f)(t) \quad (2.7)$

b. $(J_{\alpha}^a J_{\beta}^a f)(t) = (J_{\beta}^a J_{\alpha}^a f)(t) \quad (2.8)$

c. $J_{\alpha}^a t^{\gamma} = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)} t^{\alpha+\gamma} \quad (2.9)$

Tanım 2.3.1.2. Riemann-Liouville kesirli türev operatörü, $\alpha > 0$, $a \in \mathbb{R}$, $t > a$ ve $m - 1 < \alpha \leq m$ için,

$$(D_{\alpha}^a f)(t) = \frac{d^m}{dt^m} \left[\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^t \frac{f(x)}{(t-x)^{\alpha-m+1}} dx \right]$$

olarak tanımlanır.

2.3.2. Caputo kesirli türevleri

Caputo türev tanımı detaylı bir şekilde M. Caputo tarafından ve bazı kaynaklarda verilmiştir (Caputo 1967; Kılbas *et al.* 2006).

Tanım 2.3.2.1. “ $m - 1 < \alpha \leq m$, $m \in \mathbb{N}$, $x > a$ olmak üzere, $f(t)$ fonksiyonunun α mertebeden ($\alpha > 0$) Caputo türev tanımı,

$$({}^c D_{\alpha}^a f)(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^t (t-x)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(x) dx \quad (2.10)$$

biçiminde tanımlanır.”

“Ayrıca $m - 1 < \alpha \leq m$, $m \in \mathbb{N}$, $t > a$ ve $f \in C^{m-1}$, $\alpha \geq -1$ olmak üzere Caputo türev tanımına ait,

$$a. ({}^c D_{\alpha}^a J_{\alpha}^a f)(t) = f(t) \quad (2.11)$$

$$b. (J_{\alpha}^a {}^c D_{\alpha}^a f)(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)} \frac{(t-a)^k}{k!} \quad (2.12)$$

özellikleri de verilebilir.”

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu bölümde uyumlu kesirli türevin analiziyle alakalı bazı temel kavramlar verilecektir. (Khalil *et al.* 2014; Abdeljawad 2015).

Tanım 3.1. “ $f: [0, \infty) \rightarrow R$ bir fonksiyon olsun. Bütün $t > 0$ ve $\alpha \in (0,1)$ için f fonksiyonunun “uyumlu kesirli türev” diye adlandırılan α mertebeli kesirli türevi,

$$T_\alpha(f)(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}$$

olarak tanımlanır. Eğer f fonksiyonu $a > 0$ olmak üzere bazı $(0, a)$ aralığında α diferansiyellenebilir ve $\lim_{t \rightarrow 0^+} f^{(\alpha)}(t)$ oluşursa o zaman,

$$f^{(\alpha)}(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f^{(\alpha)}(t)$$

olur. f nin α mertebeden uyumlu kesirli türevini göstermek için bazen $T_\alpha(f)(t)$ yerine $f^{(\alpha)}(t)$ yazılacaktır. Ayrıca, α mertebeden uyumlu kesirli türev mevcutsa bu durum için f , α diferansiyellenebilir denilecektir. Bu tanımın bir sonucu olarak aşağıdaki teorem yazılabilir.”

Teorem 3.1. “Bir $f: [0, \infty) \rightarrow R$ fonksiyonu $t_0 > 0$ da $\alpha \in (0,1)$ için α diferansiyellenebilirse, f fonksiyonu t_0 noktasında süreklidir.”

İspat:

$$f(t_0 + \varepsilon t_0^{1-\alpha}) - f(t_0) = \frac{f(t_0 + \varepsilon t_0^{1-\alpha}) - f(t_0)}{\varepsilon} \varepsilon$$

tanımından

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [f(t_0 + \varepsilon t_0^{1-\alpha}) - f(t_0)] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + \varepsilon t_0^{1-\alpha}) - f(t_0)}{\varepsilon} \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon$$

yazılır. $h = \varepsilon t_0^{1-\alpha}$ alınırsa

$$\lim_{h \rightarrow 0} [f(t_0 + h) - f(t_0)] = f^{(\alpha)}(t_0) \cdot 0$$

olur. Böylece

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(t_0 + h) = f(t_0)$$

olur. Bu ise f fonksiyonunun t_0 noktasında sürekli olduğunu ifade eder.

Teorem 3.2. “ $\alpha \in (0, 1]$ için f ve g , $t > 0$ noktasında α diferansiyellenebilir olsun. O halde

1. $\forall a, b \in R$ için $T_\alpha(af + bg) = aT_\alpha(f) + bT_\alpha(g)$ dir.
2. $\forall p \in R$ için $T_\alpha(t^p) = pt^{p-\alpha}$ dir.
3. Tüm $f(t) = \lambda$ biçimindeki sabit fonksiyonlar için $T_\alpha(\lambda) = 0$ dir.
4. $T_\alpha(fg) = fT_\alpha(g) + gT_\alpha(f)$.
5. $T_\alpha(f/g) = \frac{gT_\alpha(f) - fT_\alpha(g)}{g^2}$.
6. Ek olarak eğer f diferansiyellenebilirse $T_\alpha(f) = t^{1-\alpha} \frac{df}{dt}(t)$ dir.”

İspat: (1), (2) ve (3) ün ispatları direkt tanımdan görülebilir. Burada (4), (5) ve (6) nın ispatları verilecektir.

(4) $t > 0$ için

$$\begin{aligned}
T_\alpha(fg)(t) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha})g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)g(t)}{\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha})g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) + f(t)g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)g(t)}{\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon} g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) \right) + f(t) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - g(t)}{\varepsilon} \\
&= T_\alpha f(t) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) + f(t) T_\alpha g(t)
\end{aligned}$$

yazılabilir. g fonksiyonu t de sürekli olduğu için $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) = g(t)$ dir.

(5) $t > 0$ için

$$\begin{aligned}
T_\alpha \left(\frac{f}{g} \right) (t) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha})}{g(t + \varepsilon t^{1-\alpha})} - \frac{f(t)}{g(t)}}{\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha})g(t) - f(t)g(t) + f(t)g(t) - f(t)g(t + \varepsilon t^{1-\alpha})}{g(t + \varepsilon t^{1-\alpha})g(t)\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{[f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)]g(t) - [g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - g(t)]f(t)}{g(t + \varepsilon t^{1-\alpha})g(t)\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\frac{[f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)]}{\varepsilon} g(t) - \frac{[g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - g(t)]}{\varepsilon} f(t)}{g(t + \varepsilon t^{1-\alpha})g(t)} \\
&= \frac{T_\alpha f(t)g(t) - T_\alpha g(t)f(t)}{\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g(t + \varepsilon t^{1-\alpha})g(t)}
\end{aligned}$$

yazılabilir. g fonksiyonu t de sürekli olduğu için $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) = g(t)$ dir.

(6) Bu özelliğin ispatı için Tanım 3.1 de $h = \varepsilon t^{1-\alpha}$ dönüşümü yapalım. Bu durumda

$$T_\alpha f(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{ht^{\alpha-1}} \\
&= t^{1-\alpha} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \\
&= t^{1-\alpha} \frac{df}{dt}(t)
\end{aligned}$$

olduğu kolayca görülür.

Teorem 3.3. “(Uyumlu Kesirli Diferansiyellenebilen Fonksiyonlar İçin Rolle Teoremi):

$a > 0$ olmak üzere $f: [a, b] \rightarrow R$ fonksiyonu

- i. $[a, b]$ aralığında sürekli,
- ii. $\alpha \in (0,1)$ için α diferansiyellenebilir,
- iii. $f(a) = f(b)$

koşullarını sağlasın. Bu taktirde $f^{(\alpha)}(c) = 0$ olacak şekilde bir $c \in (a, b)$ vardır.”

İspat: f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli ve $f(a) = f(b)$ olduğu için bir $c \in (a, b)$ yerel ekstremum noktasına sahiptir. Genelliği bozmaksızın c noktasının bir yerel minimum nokta olduğunu kabul edelim. Böylece

$$f^{(\alpha)}(c) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{f(c+\varepsilon c^{1-\alpha}) - f(c)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^-} \frac{f(c+\varepsilon c^{1-\alpha}) - f(c)}{\varepsilon}$$

yazılabilir. Fakat, ilk limit negatif, ikinci limit ise pozitif değildir. O halde, $f^{(\alpha)}(c) = 0$ dır.

Teorem 3.4. “(Uyumlu Kesirli Diferansiyellenebilen Fonksiyonlar İçin Ortalama Değer Teoremi): $a > 0$ olmak üzere $f: [a, b] \rightarrow R$ sürekli ve bazı $\alpha \in (0,1)$ için α diferansiyellenebilir olsun. Bu durumda

$$f^{(\alpha)}(c) = \frac{f(b) - f(a)}{\frac{1}{\alpha}b^\alpha - \frac{1}{\alpha}a^\alpha}$$

olacak şekilde bir $c \in (a, b)$ vardır.”

İspat: k bir sabit sayı olmak üzere $g: [a, b] \rightarrow R$, $g(t) = f(t) + k\frac{1}{\alpha}t^\alpha$ fonksiyonunu tanımlayalım. Bu fonksiyon da $[a, b]$ aralığında sürekli ve her $t \in (a, b)$ için α diferansiyellenebilirdir. Şimdi k sabiti $g(a) = g(b)$ olacak şekilde seçilirse $f(a) + k\frac{1}{\alpha}a^\alpha = f(b) + k\frac{1}{\alpha}b^\alpha$ olup

$$k = -\frac{f(b) - f(a)}{\frac{1}{\alpha}b^\alpha - \frac{1}{\alpha}a^\alpha}$$

yazılabilir. O halde $g(t) = f(t) - \frac{f(b)-f(a)}{\frac{1}{\alpha}b^\alpha - \frac{1}{\alpha}a^\alpha} \left(\frac{1}{\alpha}t^\alpha\right)$ olur. Bu fonksiyon Rolle teoreminin bütün şartlarını sağlar. Dolayısıyla (a, b) aralığında öyle bir c sayısı vardır ki $g^{(\alpha)}(c) = 0$ dır. Buradan

$$f^{(\alpha)}(c) - \frac{f(b) - f(a)}{\frac{1}{\alpha}b^\alpha - \frac{1}{\alpha}a^\alpha} = 0 \Rightarrow f^{(\alpha)}(c) = \frac{f(b) - f(a)}{\frac{1}{\alpha}b^\alpha - \frac{1}{\alpha}a^\alpha}$$

elde edilir. Burada $T_\alpha \left(\frac{1}{\alpha}t^\alpha\right) = 1$ özelliği kullanılmıştır.

Tanım 3.2. “ $f: [a, \infty) \rightarrow R$ bir fonksiyon olsun. $0 < \alpha \leq 1$ için f fonksiyonunun α mertebeli sol uyumlu kesirli türevi

$$(T_\alpha^a f)(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon(t-a)^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}$$

olarak tanımlanır. Eğer (a, b) aralığında $(T_\alpha^a f)(t)$ mevcutsa $(T_\alpha^a f)(a) = \lim_{t \rightarrow a^+} (T_\alpha^a f)(t)$ olur.”

Tanım 3.3. “ $f: (-\infty, b] \rightarrow R$ bir fonksiyon olsun. $0 < \alpha \leq 1$ için f fonksiyonunun α mertebeli sağ uyumlu kesirli türevi

$$({}^b T_\alpha f)(t) = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon(b-t)^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}$$

olarak tanımlanır. Eğer (a, b) aralığında $({}^b T_\alpha f)(t)$ mevcutsa $({}^b T_\alpha f)(b) = \lim_{t \rightarrow b^-} ({}^b T_\alpha f)(t)$ olur.”

Eğer f fonksiyonu diferansiyellenebilir ise $(T_\alpha^a f)(t) = (t-a)^{1-\alpha} f'(t)$ ve $({}^b T_\alpha f)(t) = -(b-t)^{1-\alpha} f'(t)$ dir.

Tanım 3.4. “ $\alpha \in (n, n+1]$ ve $\beta = \alpha - n$ olsun. $f: [a, \infty) \rightarrow R$ fonksiyonunun α mertebeli sol uyumlu kesirli türevi

$$(T_\alpha^a f)(t) = (T_\beta^a f^{(n)})(t)$$

olarak tanımlanır. Böylece α mertebeli sol uyumlu kesirli türevin var olabilmesi için f fonksiyonunun n kez türevlenebilir olması gerekir.”

Benzer olarak $\alpha \in (n, n+1]$ ve $\beta = \alpha - n$ olsun. $f: (-\infty, b] \rightarrow R$ fonksiyonunun α mertebeli sağ uyumlu kesirli türevi

$$({}^b T_\alpha f)(t) = (-1)^{n+1} ({}^b T_\beta f^{(n)})(t)$$

olarak tanımlanır.

Tanım 3.5. “ $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere α mertebeli sol uyumlu kesirli integral

$$(I_{\alpha}^a f)(t) = \int_a^t f(x) d_{\alpha}(x, a) = \int_a^t (x - a)^{\alpha-1} f(x) dx$$

olarak tanımlanır. Benzer olarak $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere α mertebeden sağ uyumlu kesirli integral,

$$({}^b I_{\alpha} f)(t) = \int_t^b f(x) d_{\alpha}(b, x) = \int_t^b (b - x)^{\alpha-1} f(x) dx$$

olarak tanımlanır.”

Lemma 3.1. “ $f: [a, \infty) \rightarrow R$ sürekli bir fonksiyon ve $0 < \alpha \leq 1$ olsun. Bu takdirde bütün $t > a$ için

$$T_{\alpha}^a I_{\alpha}^a f(t) = f(t)$$

olur. Sağ durumda benzer olarak verilebilir.”

Lemma 3.2. “ $f: (-\infty, b] \rightarrow R$ sürekli bir fonksiyon ve $0 < \alpha \leq 1$ olsun. Bu takdirde bütün $t < b$ için

$${}^b T_{\alpha} {}^b I_{\alpha} f(t) = f(t)$$

olur.”

Tanım 3.6. “ $\alpha \in (n, n + 1]$ olsun. Bu takdirde $f: [a, \infty) \rightarrow R$ fonksiyonunun α mertebeli sol uyumlu kesirli integrali

$$(I_{\alpha}^a f)(t) = I_{n+1}^a((t - a)^{\beta-1} f) = \frac{1}{n!} \int_a^t (t - x)^n (x - a)^{\beta-1} f(x) dx$$

olarak tanımlanır.”

Eğer $\alpha = n + 1$ ise bu takdirde $\beta = \alpha - n = n + 1 - n = 1$ olur. Böylece

$$(I_{\alpha}^a f)(t) = (I_{n+1}^a f)(t) = \frac{1}{n!} \int_a^t (t-x)^n f(x) dx$$

olur. Bu ise $(a, t]$ aralığında $n + 1$ kez f fonksiyonunun tekrarlı integralinin Cauchy formülü ile yazılımıdır.

$\alpha > 0$ mertebeli sol Riemann-Liouville kesirli integralinin

$$(J_{\alpha}^a f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-x)^{\alpha-1} f(x) dx$$

olarak tanımlandığı biliniyor. $\alpha = n + 1$, $n = 0, 1, 2 \dots$ için

$$(I_{\alpha}^a f)(t) = (J_{\alpha}^a f)(t)$$

olduğu görülür.

Örnek 3.1. $\alpha, \mu > 0$ için

$$J_{\alpha}^a((t-a)^{\mu-1})(t) = \frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(\alpha + \mu)} (t-a)^{\alpha+\mu-1}$$

olduğu bilinmektedir. Şimdi $(t-a)^{\mu-1}$ fonksiyonunun $\alpha \in (n, n+1]$ için uyumlu kesirli integralini bulalım. μ , $\alpha + \mu - n - 1 > 0$ olacak şekilde bir reel sayı olsun. Tanım 3.6 dan

$$(J_{\alpha}^a((t-a)^{\mu-1}))(t) = (I_{n+1}^a((t-a)^{\alpha+\mu-n-2}))(t)$$

yazılır. Ayrıca Riemann-Liouville kesirli integralin özelliğinden

$$(I_{n+1}^a((t-a)^{\alpha+\mu-n-2}))(t) = (J_{n+1}^a((t-a)^{\alpha+\mu-n-2}))(t)$$

eşitliği de yazılabilir. Böylelikle

$$(I_\alpha^a((t-a)^{\mu-1}))(t) = (J_{n+1}^a((t-a)^{\alpha+\mu-n-2}))(t) = \frac{\Gamma(\alpha+\mu-n-1)}{\Gamma(\alpha+\mu)}(t-a)^{\alpha+\mu-1}$$

olur. Benzer şekilde bu tip fonksiyonların sağ uyumlu kesirli integrali

$$\left({}^b I_\alpha((b-t)^{\mu-1})\right)(t) = \left({}^b J_{n+1}((b-t)^{\alpha+\mu-n-2})\right)(t) = \frac{\Gamma(\alpha+\mu-n-1)}{\Gamma(\alpha+\mu)}(b-t)^{\alpha+\mu-1}$$

olarak bulunur. Buradan da anlaşılıyor ki: Riemann-Liouville kesirli integrali ile uyumlu kesirli integral bir polinom fonksiyonuna uygulandığında bir sabit farkıyla aynı sonucu verirler.

Teorem 3.5. “ $f: [a, \infty) \rightarrow R$ bir fonksiyon ve $1 < \alpha + \mu \leq 2$ olacak şekilde $0 < \alpha, \mu \leq 1$ olsun. Bu takdirde

$$(I_\alpha I_\mu f)(t) = \frac{t^\mu}{\mu} (I_\alpha f)(t) + \frac{1}{\mu} (I_{\alpha+\mu} f)(t) - \frac{t}{\mu} \int_0^t x^{\alpha+\mu-2} f(x) dx$$

olur.”

İspat: Tanım 3.6 dan

$$(I_{\alpha+\mu} f)(t) = (I_2 x^{\alpha+\mu-2} f(x))(t) = \int_0^t (t-x)x^{\alpha+\mu-2} dx$$

yazılır. Şimdi, integral mertebelerinin yer değiştirmesi yardımıyla ispatı tamamlayalım:

$$\begin{aligned}
(I_\alpha I_\mu f)(t) &= \int_0^t \left(\int_0^{t_1} f(x) x^{\alpha-1} dx \right) t_1^{\mu-1} dt_1 \\
&= \int_0^t f(x) x^{\alpha-1} \left(\int_x^t t_1^{\mu-1} dt_1 \right) dx \\
&= \int_0^t f(x) x^{\alpha-1} \left[\frac{t^\mu}{\mu} - \frac{x^\mu}{\mu} \right] dx \\
&= \frac{t^\mu}{\mu} (I_\alpha f)(t) + \frac{1}{\mu} \left[(I_{\alpha+\mu} f)(t) - t \int_0^t x^{\alpha+\mu-2} f(x) dx \right].
\end{aligned}$$

Riemann-Liouville sol ve sağ kesirli integral için Q -operatörünün işlevinin $f: [a, b] \rightarrow R$, $Qf(t) = f(a + b - t)$ için

$$QJ_\alpha^a f(t) = {}^b J_\alpha Qf(t)$$

olduğu biliniyor.

Şimdi, $\alpha \in (n, n + 1]$ için uyumlu kesirli integral için bu durum incelenirse

$$QI_\alpha^a f(t) = QJ_{n+1}^a \left((t-a)^{\alpha-n-1} f(t) \right) = {}^b J_{n+1} \left((b-t)^{\alpha-n-1} f(a+b-t) \right) = {}^b I_\alpha Qf(t)$$

olduğu görülür. Yani, Q -operatörü burada da aynı işlevi görür.

Lemma 3.3. “ $f: [a, \infty) \rightarrow R$ bir fonksiyon, $f^{(n)}(t)$ sürekli ve $\alpha \in (n, n + 1]$ olsun. Bu durumda, $\forall t > a$ için

$$T_\alpha^a I_\alpha^a f(t) = f(t)$$

olur.”

İspat: Tanım 2.4 den

$$\begin{aligned} T_\alpha^a I_\alpha^a f(t) &= T_\beta^a \left(\frac{d^n}{dt^n} I_\alpha^a f(t) \right) = T_\beta^a \left(\frac{d^n}{dt^n} I_{n+1}^a \left((t-a)^{\beta-1} f(t) \right) \right) \\ &= T_\beta^a \left(I_1^a \left((t-a)^{\beta-1} f(t) \right) \right) = T_\beta^a I_\beta^a f(t) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, Lemma 3.1 den sonuç görülür. Benzer olarak Lemma 3.2 de Lemma 3.4 deki gibi genelleştirilebilir.

Lemma 3.4. “ $f: (-\infty, b] \rightarrow R$ bir fonksiyon, $f^{(n)}(t)$ sürekli ve $\alpha \in (n, n+1]$ olsun. Bu durumda $\forall t < b$ için

$${}^b T_\alpha^a {}^b I_\alpha f(t) = f(t)$$

olur.”

Lemma 3.5. “ $f: [a, \infty) \rightarrow R$ diferansiyellenebilen bir fonksiyon ve $0 < \alpha \leq 1$ olsun. Bu takdirde $\forall t > a$ için

$$I_\alpha^a T_\alpha^a f(t) = f(t) - f(a)$$

olur.”

İspat: Tanım 3.5 den

$$I_\alpha^a T_\alpha^a f(t) = \int_a^t (x-a)^{\alpha-1} T_\alpha^a f(x) dx$$

yazılır. f diferansiyellenebilir olduğundan

$$I_\alpha^a T_\alpha^a f(t) = \int_a^t (x-a)^{\alpha-1} (x-a)^{1-\alpha} f'(x) dx = f(t) - f(a)$$

sonucu elde edilir. Lemma 3.5 daha yüksek mertebeler için aşağıdaki gibi genelleştirebilir.

Lemma 3.6. “ $\alpha \in (n, n + 1]$ ve $f: [a, \infty) \rightarrow R$, $(n + 1)$ kez diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Bu takdirde $\forall t > a$ için

$$I_{\alpha}^a T_{\alpha}^a f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^k}{k!}$$

olur.”

İspat: Tanım 3.4, Tanım 3.6 ve f fonksiyonunun $(n + 1)$ kez diferansiyellenebilen bir fonksiyon olmasından aşağıdaki eşitlikler yazılabilir:

$$\begin{aligned} I_{\alpha}^a T_{\alpha}^a f(t) &= I_{n+1}^a \left((t-a)^{\beta-1} T_{\beta}^a f^{(n)}(t) \right) = I_{n+1}^a \left((t-a)^{\beta-1} (t-a)^{1-\beta} f^{(n+1)}(t) \right) \\ &= I_{n+1}^a \left(f^{(n+1)}(t) \right) \end{aligned}$$

Sonra kısmi integrasyon uygulanarak ispat tamamlanır. Benzer olarak sağ durum aşağıdaki gibi verilebilir.

Lemma 3.7. “ $\alpha \in (n, n + 1]$ ve $f: (-\infty, b] \rightarrow R$, $(n + 1)$ kez diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Bu takdirde $\forall t < b$ için

$${}^b I_{\alpha} {}^b T_{\alpha} f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k f^{(k)}(b)(b-t)^k}{k!}$$

olur.”

Teorem 3.6. “(Zincir Kuralı): $\alpha \in (0,1]$ ve $f, g: [a, \infty) \rightarrow R$ (sol) α diferansiyellenebilen fonksiyonlar olsun. $h(t) = f(g(t))$ olmak üzere bütün $t \neq a$ ve $g(t) \neq 0$ için $h(t)$, (sol) α diferansiyellenebilirdir ve

$$(T_\alpha^a h)(t) = (T_\alpha^a f)(g(t)) \cdot (T_\alpha^a g)(t) \cdot g(t)^{\alpha-1}$$

şeklindedir. Eğer $t = a$ ise

$$(T_\alpha^a h)(t) = \lim_{t \rightarrow a^+} (T_\alpha^a f)(g(t)) \cdot (T_\alpha^a g)(t) \cdot g(t)^{\alpha-1}$$

olur.”

İspat: Tanım 3.2 de $u = t + \varepsilon(t - a)^{1-\alpha}$ değişken değiştirmesi yapılır ve g fonksiyonunun sürekli olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned} (T_\alpha^a h)(t) &= \lim_{u \rightarrow t} \frac{f(g(u)) - f(g(t))}{(u - t)} (t - a)^{1-\alpha} \\ &= \lim_{u \rightarrow t} \frac{f(g(u)) - f(g(t))}{(g(u) - g(t))} \cdot \lim_{u \rightarrow t} \frac{g(u) - g(t)}{u - t} (t - a)^{1-\alpha} \\ &= \lim_{g(u) \rightarrow g(t)} \frac{f(g(u)) - f(g(t))}{(g(u) - g(t))} g(t)^{1-\alpha} \cdot T_\alpha^a g(t) \cdot g(t)^{\alpha-1} \\ &= (T_\alpha^a f)(g(t)) \cdot (T_\alpha^a g)(t) \cdot g(t)^{\alpha-1} \end{aligned}$$

olur.

Lemma 3.8. “ $f: [a, \infty) \rightarrow R$, iki kez diferansiyellenebilen bir fonksiyon ve $1 < \alpha + \mu \leq 2$ olacak şekilde $0 < \alpha, \beta \leq 1$ olsun. Bu durumda

$$(T_\alpha^a T_\beta^a f)(t) = T_{\alpha+\beta}^a f(t) + (1 - \beta)(t - a)^{-\beta} T_\alpha^a f(t)$$

olur.”

İspat: f , fonksiyonu iki kez türevlenebildiği için

$$(T_\alpha^a T_\beta^a f)(t) = T_\alpha^a \left((t-a)^{1-\beta} f'(t) \right)$$

yazılabilir. Elde edilen bu eşitliğe uyumlu kesirli türevler için geçerli olan çarpım kuralı uygulanırsa

$$(T_\alpha^a T_\beta^a f)(t) = (1-\beta)(t-a)^{-\beta}(t-a)^{1-\alpha} f'(t) + (t-a)^{1-\beta} T_\alpha^a(f'(t))$$

elde edilir. f fonksiyonu iki kez türevlenebildiği için $T_\alpha^a(f'(t)) = (t-a)^{1-\beta} f''(t)$ yazılabilir. Böylece

$$(T_\alpha^a T_\beta^a f)(t) = (1-\beta)(t-a)^{-\beta}(t-a)^{1-\alpha} f'(t) + (t-a)^{2-(\alpha+\beta)} f''(t)$$

elde edilir. $T_\alpha^a f(t) = (t-a)^{1-\alpha} f'(t)$ ve $T_{\alpha+\beta}^a f(t) = (t-a)^{2-(\alpha+\beta)} f''(t)$ olduğundan

$$(T_\alpha^a T_\beta^a f)(t) = T_{\alpha+\beta}^a f(t) + (1-\beta)(t-a)^{-\beta} T_\alpha^a f(t)$$

ifadesi elde edilir.

Teorem 3.7. “ fg , türevlenebilir olacak şekilde $f, g: [a, b] \rightarrow R$ iki fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$\int_a^b f(t) T_\alpha^a g(t) d_\alpha(t, a) = fg \Big|_a^b - \int_a^b g(t) T_\alpha^a f(t) d_\alpha(t, a)$$

olur.”

İspat: Lemma 3.5 den

$$\int_a^b T_\alpha^a (fg)(t) d_\alpha(t, a) = fg \Big|_a^b$$

yazılabilir. Ayrıca Teorem 3.2 (4) den

$$\int_a^b (T_\alpha^a f(t)g(t) + f(t)T_\alpha^a g(t)) d_\alpha(t, a) = fg \Big|_a^b$$

yazılır. Buradan da

$$\int_a^b f(t)T_\alpha^a g(t)d_\alpha(t, a) = fg \Big|_a^b - \int_a^b g(t)T_\alpha^a f(t)d_\alpha(t, a)$$

olduğu görülür.

Lemma 3.9. “ $0 < \alpha \leq 1$ ve $f, g: [a, b] \rightarrow R$ iki fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$\int_a^b I_\alpha^a(f(t))g(t)d\alpha(b, t) = \int_a^b f(t) {}^bI_\alpha(g(t))d\alpha(t, a)$$

olur.”

İspat: Tanım 3.5 den

$$\int_a^b I_\alpha^a(f(t))g(t)d\alpha(b, t) = \int_a^b \left(\int_a^t (x - a)^{\alpha-1} f(x) dx \right) g(t)(b - t)^{\alpha-1} dt$$

elde edilir. Buradan da integrallerin mertebelerini değiştirerek

$$\int_a^b I_\alpha^a(f(t))g(t)d\alpha(b, t) = \int_a^b f(t) {}^bI_\alpha(g(t))d\alpha(t, a)$$

olduğu görülür.

Teorem 3.8. “ $f, g: [a, b] \rightarrow R$ türevlenebilen iki fonksiyon ve $0 < \alpha \leq 1$ olsun. Bu durumda

$$\int_a^b T_\alpha^a (f(t))g(t)d_\alpha(t, a) = \int_a^b f(t) {}^b I_\alpha (g(t))d_\alpha(b, t) + fg \Big|_a^b$$

olur.”

İspat: Lemma 3.7 den ve g fonksiyonunun türevlenebilir olmasından,

$$\begin{aligned} \int_a^b T_\alpha^a (f(t))g(t)d_\alpha(t, a) \\ = \int_a^b T_\alpha^a (f(t)) {}^b I_\alpha {}^b T_\alpha g(t)d_\alpha(t, a) + g(b) \int_a^b T_\alpha^a (f(t))d_\alpha(t, a) \end{aligned}$$

yazılır. Şimdi, Lemma 3.9 uygulanırsa,

$$\int_a^b T_\alpha^a (f(t))g(t)d_\alpha(t, a) = \int_a^b I_\alpha^a T_\alpha^a (f(t)) {}^b T_\alpha (g(t))d_\alpha(t, a) + g(b)I_\alpha^a T_\alpha^a (f(t))$$

elde edilir. Son olarak f türevlenebilir olduğu için $I_\alpha^a T_\alpha^a (f(t)) = f(t) - f(a)$ ve g türevlenebilir olduğu için ${}^b I_\alpha {}^b T_\alpha g(t) = g(t) - g(b)$ olup bu ifadeler yerlerine yazılarak ispat tamamlanır.

Tanım 3.7. “ $0 < \alpha < 1$ ve $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$ olsun. Bu durumda n . mertebeden sol dizisel uyumlu kesirli türev

$${}^{(n)}T_\alpha^a f(t) = T_\alpha^a T_\alpha^a \dots T_\alpha^a f(t)$$

biçiminde tanımlanır. Burada T_α^a , n kez tekrar etmektedir. Benzer şekilde n . mertebeden sağ dizisel uyumlu kesirli türev

$${}^b T_\alpha^{(n)} f(t) = {}^b T_\alpha {}^b T_\alpha \dots {}^b T_\alpha f(t)$$

şeklindedir.”

Teorem 3.9. “ f fonksiyonu bazı $0 < \alpha \leq 1$ için bir t_0 noktası civarında sonsuz bir şekilde α diferansiyellenebilir olsun. Bu takdirde f fonksiyonu

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(T_{\alpha}^{t_0} f)^{(k)}(t_0)(t-t_0)^{\alpha k}}{\alpha^k k!}, \quad t_0 < t < t_0 + R^{1/\alpha}, \quad R > 0$$

biçiminde kesirsel kuvvet seri açılımına sahiptir. Burada $(T_{\alpha}^{t_0} f)^{(k)}(t_0)$ ifadesi k defa art arda uyumlu kesirli türevin uygulanması manasındadır.”

İspat: $t_0 < t < t_0 + R^{1/\alpha}$, $R > 0$ olmak üzere $f(t) = c_0 + c_1(t-t_0)^{\alpha} + c_2(t-t_0)^{2\alpha} + \dots$ olsun. Bu takdirde $f(t_0) = c_0$ olur. f fonksiyonuna $T_{\alpha}^{t_0}$ uygulanırsa t_0 noktası için $(T_{\alpha}^{t_0} f)(t_0) = \alpha c_1$ olur ve böylece $c_1 = \frac{(T_{\alpha}^{t_0} f)(t_0)}{\alpha}$ olur. Bu şekilde devam edilerek f fonksiyonuna n defa $T_{\alpha}^{t_0}$ uygulanırsa $(T_{\alpha}^{t_0} f)^{(n)}(t_0) = c_n \alpha(2\alpha) \dots (n\alpha) = c_n \alpha^n n!$ olur ve böylece $c_n = \frac{(T_{\alpha}^{t_0} f)^{(n)}(t_0)}{\alpha^n n!}$ olur. Böylece ispat tamamlanır.

3.1. Uyumlu Kesirli Türevin Analizi

Bu bölümde, bu yeni kesirli türev tanımının analizine katkı sağlayan bazı toeremler verilmiştir.

Teorem 3.1.1. “(Uyumlu Kesirli Türevler İçin Genelleştirilmiş Ortalama Değer Teoremi):

$a > 0$ olmak üzere f ve g fonksiyonları $[a, b]$ aralığında sürekli ve (a, b) aralığında α diferansiyellenebilir olsun. Ayrıca, her $t \in (a, b)$ için $g^{(\alpha)}(t) \neq 0$ olsun. Bu takdirde (a, b) aralığında

$$\frac{f^{(\alpha)}(c)}{g^{(\alpha)}(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

olacak şekilde en az bir c noktası vardır.”

İspat: İspatı, klasik türevde verilen ispat gibidir.

Teorem 3.1.2. “ $a > 0$ olmak üzere $f: [a, b] \rightarrow R$ sürekli monoton artan bir fonksiyon olsun. Eğer $a < c < b$ ve $f'(c) \neq 0$ ise f^{-1} ters fonksiyonu $d = f(c)$ noktasında α diferansiyellenebilirdir ve

$$(f^{-1})^{(\alpha)}(d) = (dc)^{1-\alpha} \frac{1}{f^{(\alpha)}(c)}$$

dir.”

İspat: Uyumlu kesirli türevin tanımından,

$$(f^{-1})^{(\alpha)}(d) = \frac{f^{-1}(d + \varepsilon d^{1-\alpha}) - f^{-1}(d)}{\varepsilon}$$

yazılabilir. $f^{-1}(d + \varepsilon d^{1-\alpha}) = t$ denirse $f(t) = d + \varepsilon d^{1-\alpha}$ ve $d = f(c)$ olduğundan $f^{-1}(d) = c$ olur. Dolayısıyla

$$(f^{-1})^{(\alpha)}(d) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{t - c}{\frac{f(t) - f(c)}{d^{1-\alpha}}}$$

yazılabilir. Buradan da

$$(f^{-1})^{(\alpha)}(d) = d^{1-\alpha} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{f(t) - f(c)}{t - c}}$$

$$(f^{-1})^{(\alpha)}(d) = d^{1-\alpha} \frac{1}{f'(c)}$$

elde edilir. Son olarak, f fonksiyonu c noktasında türevlenebildiği için

$$f^{(\alpha)}(c) = c^{1-\alpha} f'(c)$$

yazılabilir. Buna göre

$$(f^{-1})^{(\alpha)}(d) = (dc)^{1-\alpha} \frac{1}{f^{(\alpha)}(c)}$$

olacaktır.

Örnek 3.1.1. “ e^t fonksiyonunun ters fonksiyonu için $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere $t = 1$ noktasındaki α mertebeli uyumlu kesirli türevini bulunuz.”

Çözüm: e^t fonksiyonunun tersinin $\ln t$ olduğu biliniyor. Önce, $\ln t$ fonksiyonunun α mertebeli uyumlu kesirli türevi bulunup verilen teoremdeki sonuçla karşılaştırılacaktır. Uyumlu kesirli türev tanımına göre

$$T_{\alpha}(lnt) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - lnt}{\varepsilon}$$

yazılabilir. Logaritmanın özelliğinden

$$T_{\alpha}(lnt) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \varepsilon t^{-\alpha})}{\varepsilon}$$

olur. $\varepsilon t^{-\alpha} = k$ denirse $\varepsilon \rightarrow 0$ iken $k \rightarrow 0$ olup

$$T_{\alpha}(lnt) = t^{-\alpha} \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + k)}{k} = t^{-\alpha} \lim_{k \rightarrow 0} \ln(1 + k)^{1/k} = t^{-\alpha}$$

elde edilir. Bulunan bu sonuç, teoreme uyumludur. Çünkü, $c = 1$ için $d = e$ dir. e^t fonksiyonunun c noktası için α mertebeli uyumlu kesirli türevi

$$f^{(\alpha)}(c) = c^{1-\alpha} e^c$$

şeklindedir. Dolayısıyla

$$f^{(\alpha)}(1) = e$$

olur. Bütün bu yazılanlara göre

$$(f^{-1})^{(\alpha)}(e) = e^{1-\alpha} \frac{1}{e} = e^{-\alpha}$$

olacaktır.

Teorem 3.1.3. “ $f: (0, \infty) \rightarrow R$, $y = f(t)$ fonksiyonu bir $x > 0$ parametresi yardımıyla $t = h(x)$ ve $y = k(x)$ olarak verilsin. $h, k: (0, \infty) \rightarrow R$ fonksiyonları α diferansiyellenebilir olmak üzere,

$$T_\alpha(f)(t) = t^{1-\alpha} \frac{T_\alpha(k)(x)}{T_\alpha(h)(x)}$$

olur.”

İspat: $t = h(x)$ ve $y = k(x)$, α diferansiyellenebilir olduğundan

$$\Delta t = h(x + \varepsilon x^{1-\alpha}) - h(x)$$

$$\Delta y = k(x + \varepsilon x^{1-\alpha}) - k(x)$$

olarak yazılabilir. f fonksiyonunun α mertebeli uyumlu kesirli türevi

$$T_\alpha(f)(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}$$

olduğundan pay ve payda $t^{1-\alpha}$ ile çarpılırsa

$$T_\alpha(f)(t) = t^{1-\alpha} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon t^{1-\alpha}}$$

olur. Son eşitlik de

$$T_\alpha(f)(t) = t^{1-\alpha} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

olarak yazılabilir. Δy ve Δt ifadelerinin değerleri yerine yazılarak devam edilirse,

$$\begin{aligned} T_\alpha(f)(t) &= t^{1-\alpha} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = t^{1-\alpha} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{k(x + \varepsilon x^{1-\alpha}) - k(x)}{h(x + \varepsilon x^{1-\alpha}) - h(x)} \\ &= t^{1-\alpha} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\frac{k(x + \varepsilon x^{1-\alpha}) - k(x)}{\varepsilon}}{\frac{h(x + \varepsilon x^{1-\alpha}) - h(x)}{\varepsilon}} \end{aligned}$$

$$= t^{1-\alpha} \frac{T_\alpha(k)(x)}{T_\alpha(h)(x)}$$

elde edilir.

Örnek 3.2. $y = 4x$ ve $t = 2x$ olmak üzere $y = f(t)$ fonksiyonun α mertebeli uyumlu kesirli türevini bulunuz.

Çözüm: Teorem 4.3 den

$$T_\alpha(f)(t) = t^{1-\alpha} \frac{T_\alpha(y)(x)}{T_\alpha(t)(x)} = t^{1-\alpha} \frac{4x^{1-\alpha}}{2x^{1-\alpha}} = 2t^{1-\alpha}$$

olur. Gerçekten de eğer parametre yok edilecek olursa fonksiyon $y = 2t$ olarak bulunur. Şimdi, bu fonksiyon için α mertebeli uyumlu kesirli türev alınırsa

$$T_\alpha(f)(t) = 2t^{1-\alpha}$$

olduğu görülür.

Teorem 3.1.4. “ $F(t, y) = 0$ bağıntısıyla verilen kapalı fonksiyonun α mertebeli uyumlu kesirli türevi

$$T_\alpha(y)(t) = -y^{1-\alpha} \frac{\frac{\partial T_\alpha(F)(t, y)}{\partial t^\alpha}}{\frac{\partial T_\alpha(F)(t, y)}{\partial y^\alpha}}$$

olur.”

İspat: İki değişkenli fonksiyonlar için zincir kuralı formülü kullanılarak

$$\frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial t} = 0$$

yazılabilir. Fakat buradaki türev uyumlu kesirli türev olduğundan, uyumlu kesirli türevler için geçerli olan zincir kuralı kullanılmalıdır. Uyumlu kesirli türev için zincir kuralı hatırlanacak olursa $h(t) = f(g(t))$ olmak üzere

$$(T_\alpha h)(t) = (T_\alpha f)(g(t)) \cdot (T_\alpha g)(t) \cdot g(t)^{\alpha-1}$$

şeklindedir. Bu formülden

$$\frac{\partial T_\alpha(F)}{\partial y^\alpha} T_\alpha(y) y^{\alpha-1} + \frac{\partial T_\alpha(F)}{\partial t^\alpha} = 0$$

olduğu görülür. Buradan da $T_\alpha(y)$ yalnız bırakılırsa istenilen sonuca ulaşılır.

Örnek 3.1.3. $F(t, y) = t^2 + 3y^2t - 8t + 4y - 1$ kapalı fonksiyonu için $T_\alpha(y)$ yi bulunuz.

Çözüm:

$$T_\alpha(y)(t) = -y^{1-\alpha} \frac{\frac{\partial T_\alpha(F)(t, y)}{\partial t^\alpha}}{\frac{\partial T_\alpha(F)(t, y)}{\partial y^\alpha}}$$

olduğundan

$$T_\alpha(y)(t) = -y^{1-\alpha} \frac{2t^{2-\alpha} - 8t^{1-\alpha} + t^{1-\alpha} 3y^2}{6y^{2-\alpha}t + 4y^{1-\alpha}}$$

yazılabilir. Gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$T_{\alpha}(y)(t) = -\frac{2t^{2-\alpha} - 8t^{1-\alpha} + t^{1-\alpha}3y^2}{6yt + 4}$$

olur. Bulunan bu sonuç direkt işlem yapılarak da görülebilir:

$$t^2 + 3y^2t - 8t + 4y - 1 = 0$$

$$2t^{2-\alpha} + 6y^{2-\alpha}T_{\alpha}(y) \cdot y^{\alpha-1} \cdot t + t^{1-\alpha} \cdot 3y^2 - 8t^{1-\alpha} + 4T_{\alpha}(y) = 0$$

$$T_{\alpha}(y)(6yt + 4) = -(2t^{2-\alpha} + t^{1-\alpha} \cdot 3y^2 - 8t^{1-\alpha})$$

olup,

$$T_{\alpha}(y) = -\frac{(2t^{2-\alpha} + t^{1-\alpha} \cdot 3y^2 - 8t^{1-\alpha})}{(6yt + 4)}$$

olduğu görülür.

3.2. Uyumlu Kesirli İntegraller Yardımıyla Elde Edilmiş Sonuçlar

Teorem 3.2.1. “ $f, g: [a, b] \rightarrow R$ fonksiyonları verilsin ve $0 \leq a < b$ olmak üzere $f, g, fg \in L[a, b]$ olsun. Eğer f fonksiyonu konveks ve negatif olmayan bir fonksiyon, g fonksiyonu ise $s \in [0,1]$ için s –konveks ise bu takdirde uyumlu kesirli integraller için

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(b-a)^{\alpha}} \left[I_{\alpha}^a f(b)g(b) + {}^b I_{\alpha} f(a)g(a) \right] \\ & \leq \frac{M(a,b)}{n!} \left[B(n+s+2, \alpha-n) + B(n+1, \alpha-n+s+1) \right] \\ & + \frac{N(a,b)}{n!} \left[B(n+2, \alpha-n+s) + B(s+n+1, \alpha-n+1) \right] \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir ve

$\alpha \in (n, n+1]$, $M(a,b) = f(a)g(a) + f(b)g(b)$, $N(a,b) = f(a)g(b) + f(b)g(a)$ şeklindedir” (Set vd. 2016).

Sonuç 3.2.1. “Teoremin şartları altında $f(x) = 1$ olarak seçilirse,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(b-a)^\alpha} \left[I_\alpha^a f(b)g(b) + {}^b I_\alpha f(a)g(a) \right] \\ & \leq \frac{g(a) + g(b)}{n!} \left[B(n+s+2, \alpha-n) + B(n+1, \alpha-n+s+1) \right] \\ & \quad + \frac{g(a) + g(b)}{n!} \left[B(n+2, \alpha-n+s) + B(s+n+1, \alpha-n+1) \right] \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir” (Set vd. 2016).

Teorem 3.2.2. “ $f, g: [a, b] \rightarrow R$ fonksiyonları verilsin ve $0 \leq a < b$ olmak üzere $f, g, fg \in L[a, b]$ olsun. Eğer f fonksiyonu s_1 –konveks ve g fonksiyonu s_2 –konveks ise $(s_1, s_2 \in [0,1])$, bu takdirde uyumlu kesirli integraller için

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(b-a)^\alpha} \left[I_\alpha^a f(b)g(b) + {}^b I_\alpha f(a)g(a) \right] \\ & \leq \frac{1}{n!} M(a, b) \left[B(s_1 + s_2 + n + 1, \alpha - n) + B(n + 1, s_1 + s_2 + \alpha - n) \right] \\ & \quad + \frac{1}{n!} N(a, b) \left[B(n + s_1 + 1, \alpha - n + s_2) + B(n + s_2 + 1, \alpha - n + s_1) \right] \end{aligned}$$

Eşitsizliği geçerlidir ve $\alpha \in (n, n + 1]$,

$M(a, b) = f(a)g(a) + f(b)g(b)$, $N(a, b) = f(a)g(b) + f(b)g(a)$ şeklindedir” (Set vd. 2016).

Teorem 3.2.3. “ $f, g: [a, b] \rightarrow R$ fonksiyonları verilsin ve $0 \leq a < b$ olmak üzere $f, g, fg \in L[a, b]$ olsun. Eğer f fonksiyonu konveks ve negatif olmayan bir fonksiyon, g fonksiyonu ise $s \in [0,1]$ için s –konveks ise bu takdirde uyumlu kesirli integraller için

$$\begin{aligned} & 2^s B(n+1, \alpha-n) f\left(\frac{a+b}{2}\right) g\left(\frac{a+b}{2}\right) \\ & \leq \frac{\Gamma(n+1)}{2(b-a)^\alpha} \left[I_\alpha^a f(b)g(b) + {}^b I_\alpha f(a)g(a) \right] \\ & \quad + \frac{1}{2} M(a, b) \left[B(n+2, \alpha-n+s) + B(s+n+1, \alpha-n+1) \right] \end{aligned}$$

$$+\frac{1}{2}N(a,b)[B(n+1,\alpha-n+s+1)+B(n+s+2,\alpha-n)]$$

Eşitsizliği geçerlidir ve

$$\alpha \in (n, n+1], \quad M(a,b) = f(a)g(a) + f(b)g(b), \quad N(a,b)f(a)g(b) + f(b)g(a)$$

şeklindedir” (Set vd. 2016a).

Teorem 3.2.4. “ $f: [a, b] \rightarrow R$ fonksiyonu verilsin ve $0 \leq a < b$ olmak üzere $f \in L[a, b]$ olsun. Eğer f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında konveks fonksiyon ise bu takdirde uyumlu kesirli integraller için

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha \Gamma(\alpha-n)} [I_\alpha^a f(b) + {}^b I_\alpha f(a)] \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

eşitsizliği geçerlidir ve $\alpha \in (n, n+1]$ dir” (Set vd. 2016b).

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1. Farklı Türden Konveks Fonksiyonlar İçin Elde Edilen Uyumlu Kesirli İntegral İçeren Eşitsizlikler

Bu bölümde farklı türden konveks fonksiyonlar için uyumlu kesirli integraller yardımıyla çeşitli integral eşitsizlikler ispatlanmıştır.

Lemma 4.1.1 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ $a < b$ olmak üzere (a, b) açık aralığının alt kümesi olan I° üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon $x \in [a, b]$ ve $\alpha \in (n, n + 1]$ olsun. $f' \in L[a, b]$ olmak üzere

$$\begin{aligned} & \frac{(x-a)^{\alpha+1}}{n!(b-a)} \left[\int_0^1 \frac{B_t(n+1, \alpha-n)}{2} f' \left(\frac{1+t}{2}x + \frac{1-t}{2}a \right) \right. \\ & \quad \left. - \int_0^1 \frac{B_t(n+1, \alpha-n)}{2} f' \left(\frac{1-t}{2}x + \frac{1+t}{2}a \right) dt \right] \\ & - \frac{(b-x)^{\alpha+1}}{n!(b-a)} \left[\int_0^1 \frac{B_t(n+1, \alpha-n)}{2} f' \left(\frac{1+t}{2}x + \frac{1-t}{2}b \right) dt \right. \\ & \quad \left. + \int_0^1 \frac{B_t(n+1, \alpha-n)}{2} f' \left(\frac{1-t}{2}x + \frac{1+t}{2}b \right) dt \right] \\ & = \frac{\Gamma(\alpha-n)(x-a)^\alpha [f(x) + f(a)]}{\Gamma(\alpha+1)(b-a)} - \frac{2^\alpha}{b-a} \left[{}^b I_\alpha f \left(\frac{x+a}{2} \right) + I_\alpha^a f \left(\frac{x+a}{2} \right) \right] \\ & + \frac{\Gamma(\alpha-n)(b-x)^\alpha [f(x) + f(b)]}{\Gamma(\alpha+1)(b-a)} - \frac{2^\alpha}{b-a} \left[I_\alpha^a f \left(\frac{x+b}{2} \right) + {}^b I_\alpha f \left(\frac{x+b}{2} \right) \right] \end{aligned}$$

eşitliği geçerlidir.

İspat: Verilen şartlar altında;

$$\begin{aligned} I & = \int_0^1 \frac{B_t(n+1, \alpha-n)}{2} f' \left(\frac{1+t}{2}x + \frac{1-t}{2}a \right) dt \\ & - \int_0^1 \frac{B_t(n+1, \alpha-n)}{2} f' \left(\frac{1-t}{2}x + \frac{1+t}{2}a \right) dt \end{aligned}$$

ifadesine kısmi integrasyon uygulanırsa

$$I = B_t(n+1, \alpha-n) \frac{f\left(\frac{1+t}{2}x + \frac{1-t}{2}a\right)}{x-a} \Big|_0^1 - \int_0^1 t^n (1-t)^{\alpha-n-1} \frac{f\left(\frac{1+t}{2}x + \frac{1-t}{2}a\right)}{x-a} dt$$

$$- B_t(n+1, \alpha-n) \frac{f\left(\frac{1-t}{2}x + \frac{1+t}{2}a\right)}{a-x} \Big|_0^1 + \int_0^1 t^n (1-t)^{\alpha-n-1} \frac{f\left(\frac{1-t}{2}x + \frac{1+t}{2}a\right)}{a-x} dt$$

bulunur. $v = \frac{1+t}{2}x + \frac{1-t}{2}a$ ve $u = \frac{1-t}{2}x + \frac{1+t}{2}a$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$I = \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha-n)}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{f(x)}{x-a} - 2 \int_{\frac{x+a}{2}}^x \left(\frac{2v-x-a}{x-a}\right)^n \left(\frac{2x-2v}{x-a}\right)^{\alpha-n-1} \frac{f(v)}{(x-a)^2} dv$$

$$- \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha-n)}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{f(a)}{x-a} - 2 \int_{\frac{x+a}{2}}^a \left(\frac{2u-x-a}{x-a}\right)^n \left(\frac{2x-2u}{x-a}\right)^{\alpha-n-1} \frac{f(u)}{(a-x)^2} du$$

$$= \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha-n)}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{f(x)}{x-a} - \frac{2}{(x-a)^{\alpha+1}} \int_{\frac{x+a}{2}}^x (2v-x-a)^n (2x-2v)^{\alpha-n-1} f(v) dv$$

$$- \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha-n)}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{f(a)}{x-a} + \frac{2}{(x-a)^{\alpha+1}} \int_a^{\frac{x+a}{2}} (2u-x-a)^n (2x-2u)^{\alpha-n-1} f(u) du$$

$$= \frac{n! \Gamma(\alpha-n)}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{f(x)}{x-a} - \frac{2^\alpha n!}{(x-a)^{\alpha+1}} {}^b I_\alpha f\left(\frac{x+a}{2}\right)$$

$$- \frac{n! \Gamma(\alpha-n)}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{f(a)}{x-a} + \frac{2^\alpha n!}{(x-a)^{\alpha+1}} I_\alpha^a f\left(\frac{x+a}{2}\right)$$

Benzer şekilde;

$$I_1 = \int_0^1 \frac{B_t(n+1, \alpha-n)}{2} f'\left(\frac{1+t}{2}x + \frac{1-t}{2}b\right) dt$$

$$+ \int_0^1 \frac{B_t(n+1, \alpha-n)}{2} f'\left(\frac{1-t}{2}x + \frac{1+t}{2}b\right) dt$$

ifadesine kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\begin{aligned}
I_1 &= B_t(n+1, \alpha-n) \frac{f\left(\frac{1+t}{2}x + \frac{1-t}{2}b\right)}{x-b} \Big|_0^1 \\
&\quad - \int_0^1 t^n (1-t)^{\alpha-n-1} \frac{f\left(\frac{1+t}{2}x + \frac{1-t}{2}b\right)}{x-b} dt \\
&+ B_t(n+1, \alpha-n) \frac{f\left(\frac{1-t}{2}x + \frac{1+t}{2}b\right)}{b-x} \Big|_0^1 - \int_0^1 t^n (1-t)^{\alpha-n-1} \frac{f\left(\frac{1-t}{2}x + \frac{1+t}{2}b\right)}{b-x} dt
\end{aligned}$$

bulunur. $v = \frac{1-t}{2}x + \frac{1+t}{2}b$ ve $u = \frac{1+t}{2}x + \frac{1-t}{2}b$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\begin{aligned}
I_1 &= -\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha-n)}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{f(x)}{b-x} - 2 \int_{\frac{x+b}{2}}^b \left(\frac{2v-x-b}{b-x}\right)^n \left(\frac{2x-2v}{b-x}\right)^{\alpha-n-1} \frac{f(v)}{(x-b)^2} dv \\
&\quad + \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha-n)}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{f(b)}{b-x} - 2 \int_{\frac{x+b}{2}}^x \left(\frac{2u-x-b}{b-x}\right)^n \left(\frac{2x-2u}{b-x}\right)^{\alpha-n-1} \frac{f(u)}{(x-b)^2} du \\
&= -\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha-n)}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{f(x)}{b-x} + \frac{2}{(x-a)^{\alpha+1}} \int_b^{\frac{x+b}{2}} (2v-x-b)^n (2x-2v)^{\alpha-n-1} f(v) dv \\
&\quad + \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha-n)}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{f(b)}{b-x} - \frac{2}{(b-x)^{\alpha+1}} \int_{\frac{x+b}{2}}^x (2u-x-b)^n (2x-2u)^{\alpha-n-1} f(u) du \\
&= -\frac{n!\Gamma(\alpha-n)}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{f(x)}{b-x} + \frac{2^\alpha n!}{(b-x)^{\alpha+1}} I_\alpha^a f\left(\frac{x+b}{2}\right) \\
&\quad - \frac{n!\Gamma(\alpha-n)}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{f(b)}{b-x} - \frac{2^\alpha n!}{(b-x)^{\alpha+1}} {}^b I_\alpha f\left(\frac{x+b}{2}\right)
\end{aligned}$$

eşitliğin her iki tarafı $\frac{(x-a)^{\alpha+1}}{n!(b-a)}$ ve $\frac{(b-x)^{\alpha+1}}{n!(b-a)}$ çarpılırsa lemma elde edilir.

Teorem 4.1.1. $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ $a < b$ olmak üzere (a, b) açık aralığının alt kümesi olan I° üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $|f'|$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında konveks fonksiyon ve $|f'| \leq K$ ise bu takdirde uyumlu kesirli integraller için

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\Gamma(\alpha - n)(x - a)^\alpha [f(x) + f(a)]}{\Gamma(\alpha + 1)(b - a)} - \frac{2^\alpha}{b - a} \left[I_{\alpha}^a f \left(\frac{x + a}{2} \right) + {}^b I_{\alpha} f \left(\frac{x + a}{2} \right) \right] \right. \\
& \quad \left. + \frac{\Gamma(\alpha - n)(b - x)^\alpha [f(x) + f(b)]}{\Gamma(\alpha + 1)(b - a)} - \frac{2^\alpha}{b - a} \left[{}^b I_{\alpha} f \left(\frac{x + b}{2} \right) + I_{\alpha}^a f \left(\frac{x + b}{2} \right) \right] \right| \\
& \leq K \frac{\Gamma(\alpha - n + 1)}{(b - a)\Gamma(\alpha + 1)} [(x - a)^{\alpha+1} + (b - x)^{\alpha+1}]
\end{aligned}$$

eşitsizliği $\alpha \in (n, n + 1]$ için geçerlidir. Burada $\Gamma(x)$ Euler gamma fonksiyonudur.

İspat: Lemma 4.1.1'den ve integraller için mutlak değer özelliğinden

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\Gamma(\alpha - n)(x - a)^\alpha [f(x) + f(a)]}{\Gamma(\alpha + 1)(b - a)} - \frac{2^\alpha}{b - a} \left[I_{\alpha}^a f \left(\frac{x + a}{2} \right) + {}^b I_{\alpha} f \left(\frac{x + a}{2} \right) \right] \right. \\
& \quad \left. + \frac{\Gamma(\alpha - n)(b - x)^\alpha [f(x) + f(b)]}{\Gamma(\alpha + 1)(b - a)} - \frac{2^\alpha}{b - a} \left[{}^b I_{\alpha} f \left(\frac{x + b}{2} \right) + I_{\alpha}^a f \left(\frac{x + b}{2} \right) \right] \right| \\
& \leq \frac{(x - a)^{\alpha+1}}{n!(b - a)} \left[\int_0^1 \frac{B_t(n + 1, \alpha - n)}{2} \left| f' \left(\frac{1 + t}{2}x + \frac{1 - t}{2}a \right) \right| dt \right. \\
& \quad \left. + \int_0^1 \frac{B_t(n + 1, \alpha - n)}{2} \left| f' \left(\frac{1 - t}{2}x + \frac{1 + t}{2}a \right) \right| dt \right] \\
& \quad + \frac{(b - x)^{\alpha+1}}{n!(b - a)} \left[\int_0^1 \frac{B_t(n + 1, \alpha - n)}{2} \left| f' \left(\frac{1 + t}{2}x + \frac{1 - t}{2}b \right) \right| dt \right. \\
& \quad \left. + \int_0^1 \frac{B_t(n + 1, \alpha - n)}{2} \left| f' \left(\frac{1 - t}{2}x + \frac{1 + t}{2}b \right) \right| dt \right]
\end{aligned}$$

elde edilir. $|f'|$ fonksiyonu, $[a, b]$ aralığında konveks olduğundan

$$\begin{aligned}
& \leq \frac{(x - a)^{\alpha+1}}{n!(b - a)} \left[\int_0^1 \frac{B_t(n + 1, \alpha - n)}{2} \left(\frac{1 + t}{2} |f'(x)| + \frac{1 - t}{2} |f'(a)| \right) dt \right. \\
& \quad \left. + \int_0^1 \frac{B_t(n + 1, \alpha - n)}{2} \left(\frac{1 - t}{2} |f'(x)| + \frac{1 + t}{2} |f'(a)| \right) dt \right] \\
& \quad + \frac{(b - x)^{\alpha+1}}{n!(b - a)} \left[\int_0^1 \frac{B_t(n + 1, \alpha - n)}{2} \left(\frac{1 + t}{2} |f'(x)| + \frac{1 - t}{2} |f'(b)| \right) dt \right. \\
& \quad \left. + \int_0^1 \frac{B_t(n + 1, \alpha - n)}{2} \left(\frac{1 - t}{2} |f'(x)| + \frac{1 + t}{2} |f'(b)| \right) dt \right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada gerekli integral işlemleri yapılırsa,

$$\frac{(x - a)^{\alpha+1} \Gamma(\alpha - n + 1)}{(b - a)\Gamma(\alpha + 1)} K + \frac{(b - x)^{\alpha+1} \Gamma(\alpha - n + 1)}{(b - a)\Gamma(\alpha + 1)} K$$

Burada

$$\begin{aligned}
\int_0^1 B_t(n+1, \alpha-n) dt &= \int_0^1 1 B_t(n+1, \alpha-n) dt \\
B_t(n+1, \alpha-n) t \Big|_0^1 - \int_0^1 t^n (1-t)^{\alpha-n-1} dt \\
&= B(n+1, \alpha-n) - B(n+2, \alpha-n) \\
&= \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha-n)}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{\Gamma(n+2)\Gamma(\alpha-n)}{\Gamma(\alpha+2)} \\
&= \frac{n!\Gamma(\alpha-n)}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{(n+1)!\Gamma(\alpha-n)}{(\alpha+1)\Gamma(\alpha+2)} \\
&= \frac{n!\Gamma(\alpha-n+1)}{\Gamma(\alpha+2)}
\end{aligned}$$

Böylece Euler Gamma fonksiyonu formülünden $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ ($n > 0$) olup ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.2. $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ $a < b$ olmak üzere (a, b) açık aralığının alt kümesi olan I° üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $|f'|^q$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında konveks fonksiyon ve $q \geq 1$ ise bu takdirde uyumlu kesirli integraller için

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{\Gamma(\alpha-n)(x-a)^\alpha [f(x) + f(a)]}{\Gamma(\alpha+1)(b-a)} - \frac{2^\alpha}{b-a} \left[I_{\alpha}^a f \left(\frac{x+a}{2} \right) + {}^b I_{\alpha} f \left(\frac{x+a}{2} \right) \right] \right. \\
&\quad \left. + \frac{\Gamma(\alpha-n)(b-x)^\alpha [f(x) + f(b)]}{\Gamma(\alpha+1)(b-a)} - \frac{2^\alpha}{b-a} \left[{}^b I_{\alpha} f \left(\frac{x+b}{2} \right) + I_{\alpha}^a f \left(\frac{x+b}{2} \right) \right] \right| \\
&\leq \frac{(x-a)^{\alpha+1}}{n!(b-a)} \left(\int_0^1 B_t(n+1, \alpha-n)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left((I_1)^{\frac{1}{q}} + (I_2)^{\frac{1}{q}} \right) \\
&\quad + \frac{(b-x)^{\alpha+1}}{n!(b-a)} \left(\int_0^1 B_t(n+1, \alpha-n)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left((I_3)^{\frac{1}{q}} + (I_4)^{\frac{1}{q}} \right)
\end{aligned}$$

eşitsizliği $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $\alpha \in [n, n+1)$ için geçerlidir.

İspat: Lemma 4.1.1'de integraller için mutlak değer özelliği ve Hölder eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\Gamma(\alpha - n)(x - a)^\alpha [f(x) + f(a)]}{\Gamma(\alpha + 1)(b - a)} - \frac{2^\alpha}{b - a} \left[I_\alpha^a f\left(\frac{x + a}{2}\right) + {}^b I_\alpha f\left(\frac{x + a}{2}\right) \right] \right. \\
& \quad \left. + \frac{\Gamma(\alpha - n)(b - x)^\alpha [f(x) + f(b)]}{\Gamma(\alpha + 1)(b - a)} - \frac{2^\alpha}{b - a} \left[{}^b I_\alpha f\left(\frac{x + b}{2}\right) + I_\alpha^b f\left(\frac{x + b}{2}\right) \right] \right| \\
& \leq \frac{(x - a)^{\alpha+1}}{n!(b - a)} \left[\int_0^1 \frac{B_t(n + 1, \alpha - n)}{2} \left| f'\left(\frac{1 + t}{2}x + \frac{1 - t}{2}a\right) \right| \right. \\
& \quad \left. + \int_0^1 \frac{B_t(n + 1, \alpha - n)}{2} \left| f'\left(\frac{1 - t}{2}x + \frac{1 + t}{2}a\right) \right| dt \right] \\
& \quad + \frac{(b - x)^{\alpha+1}}{n!(b - a)} \left[\int_0^1 \frac{B_t(n + 1, \alpha - n)}{2} \left| f'\left(\frac{1 + t}{2}x + \frac{1 - t}{2}b\right) \right| dt \right. \\
& \quad \left. + \int_0^1 \frac{B_t(n + 1, \alpha - n)}{2} \left| f'\left(\frac{1 - t}{2}x + \frac{1 + t}{2}b\right) \right| dt \right] \\
& \leq \left(\int_0^1 \left(\frac{B_t(n + 1, \alpha - n)}{2} \right)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left| f'\left(\frac{1 + t}{2}x + \frac{1 - t}{2}a\right) \right|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \quad + \left(\int_0^1 \left(\frac{B_t(n + 1, \alpha - n)}{2} \right)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left| f'\left(\frac{1 - t}{2}x + \frac{1 + t}{2}a\right) \right|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \quad + \left(\int_0^1 \left(\frac{B_t(n + 1, \alpha - n)}{2} \right)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left| f'\left(\frac{1 + t}{2}x + \frac{1 - t}{2}b\right) \right|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \quad + \left(\int_0^1 \left(\frac{B_t(n + 1, \alpha - n)}{2} \right)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left| f'\left(\frac{1 - t}{2}x + \frac{1 + t}{2}b\right) \right|^q dt \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

Her $x \in [a, b]$ için,

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^1 \left| f'\left(\frac{1 + t}{2}x + \frac{1 - t}{2}a\right) \right|^q dt \leq \int_0^1 \frac{1 + t}{2} |f'(x)|^q + \frac{1 - t}{2} |f'(a)|^q dt \\
&= \frac{3|f'(x)|^q + |f'(a)|^q}{4}
\end{aligned}$$

$$I_2 = \int_0^1 \left| f'\left(\frac{1 - t}{2}x + \frac{1 + t}{2}a\right) \right|^q dt = \frac{|f'(x)|^q + 3|f'(a)|^q}{4}$$

$$I_2 = \int_0^1 \left| f'\left(\frac{1 + t}{2}x + \frac{1 - t}{2}b\right) \right|^q dt = \frac{3|f'(x)|^q + |f'(b)|^q}{4}$$

$$I_2 = \int_0^1 \left| f'\left(\frac{1 - t}{2}x + \frac{1 + t}{2}b\right) \right|^q dt = \frac{|f'(x)|^q + 3|f'(b)|^q}{4}$$

Böylece eşitsizliğin her iki tarafı $\frac{(x-a)^{\alpha+1}}{n!(b-a)}$ ve $\frac{(b-x)^{\alpha+1}}{n!(b-a)}$ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\Gamma(\alpha - n)(x - a)^\alpha [f(x) + f(a)]}{\Gamma(\alpha + 1)(b - a)} - \frac{2^\alpha}{b - a} \left[I_{\alpha}^a f \left(\frac{x + a}{2} \right) + {}^b I_{\alpha} f \left(\frac{x + a}{2} \right) \right] \right. \\
& \quad \left. + \frac{\Gamma(\alpha - n)(b - x)^\alpha [f(x) + f(b)]}{\Gamma(\alpha + 1)(b - a)} - \frac{2^\alpha}{b - a} \left[{}^b I_{\alpha} f \left(\frac{x + b}{2} \right) + I_{\alpha}^a f \left(\frac{x + b}{2} \right) \right] \right| \\
& \leq \frac{(x - a)^{\alpha+1}}{n!(b - a)} \left(\int_0^1 B_t(n + 1, \alpha - n)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left((I_1)^{\frac{1}{q}} + (I_2)^{\frac{1}{q}} \right) \\
& \quad + \frac{(b - x)^{\alpha+1}}{n!(b - a)} \left(\int_0^1 B_t(n + 1, \alpha - n)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left((I_3)^{\frac{1}{q}} + (I_4)^{\frac{1}{q}} \right)
\end{aligned}$$

İspat tamamlanmış olur.

Teorem 4.1.3. $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ $a < b$ olmak üzere (a, b) açık aralığının alt kümesi olan I° üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $|f'|$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında konveks fonksiyon ve $|f'| \leq K$, $q \geq 1$ ise bu takdirde uyumlu kesirli integraller için

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\Gamma(\alpha - n)(x - a)^\alpha [f(x) + f(a)]}{\Gamma(\alpha + 1)(b - a)} - \frac{2^\alpha}{b - a} \left[I_{\alpha}^a f \left(\frac{x + a}{2} \right) + {}^b I_{\alpha} f \left(\frac{x + a}{2} \right) \right] \right. \\
& \quad \left. + \frac{\Gamma(\alpha - n)(b - x)^\alpha [f(x) + f(b)]}{\Gamma(\alpha + 1)(b - a)} - \frac{2^\alpha}{b - a} \left[{}^b I_{\alpha} f \left(\frac{x + b}{2} \right) + I_{\alpha}^a f \left(\frac{x + b}{2} \right) \right] \right| \\
& \leq K^q \frac{\Gamma(\alpha - n + 1)}{\Gamma(\alpha + 2)} [(x - a)^{\alpha+1} + (b - x)^{\alpha+1}]
\end{aligned}$$

İspat: Lemma 4.1.1'de integraller için mutlak değer özelliği ve Power-mean eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\Gamma(\alpha - n)(x - a)^\alpha [f(x) + f(a)]}{\Gamma(\alpha + 1)(b - a)} - \frac{2^\alpha}{b - a} \left[I_{\alpha}^a f \left(\frac{x + a}{2} \right) + {}^b I_{\alpha} f \left(\frac{x + a}{2} \right) \right] \right. \\
& \quad \left. + \frac{\Gamma(\alpha - n)(b - x)^\alpha [f(x) + f(b)]}{\Gamma(\alpha + 1)(b - a)} - \frac{2^\alpha}{b - a} \left[{}^b I_{\alpha} f \left(\frac{x + b}{2} \right) + I_{\alpha}^a f \left(\frac{x + b}{2} \right) \right] \right| \\
& \leq \frac{(x - a)^{\alpha+1}}{n!(b - a)} \left[\int_0^1 \frac{B_t(n + 1, \alpha - n)}{2} \left| f' \left(\frac{1 + t}{2} x + \frac{1 - t}{2} a \right) \right| dt \right. \\
& \quad \left. + \int_0^1 \frac{B_t(n + 1, \alpha - n)}{2} \left| f' \left(\frac{1 - t}{2} x + \frac{1 + t}{2} a \right) \right| dt \right] \\
& \quad + \frac{(b - x)^{\alpha+1}}{n!(b - a)} \left[\int_0^1 \frac{B_t(n + 1, \alpha - n)}{2} \left| f' \left(\frac{1 + t}{2} x + \frac{1 - t}{2} b \right) \right| dt \right. \\
& \quad \left. + \int_0^1 \frac{B_t(n + 1, \alpha - n)}{2} \left| f' \left(\frac{1 - t}{2} x + \frac{1 + t}{2} b \right) \right| dt \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left(\int_0^1 \left(\frac{B_t(n+1, \alpha-n)}{2} \right) dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \\
&\quad \times \left(\int_0^1 \left(\frac{B_t(n+1, \alpha-n)}{2} \right) \left| f' \left(\frac{1+t}{2}x + \frac{1-t}{2}a \right) \right|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
&+ \left(\int_0^1 \left(\frac{B_t(n+1, \alpha-n)}{2} \right) dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \\
&\quad \times \left(\int_0^1 \left(\frac{B_t(n+1, \alpha-n)}{2} \right) \left| f' \left(\frac{1-t}{2}x + \frac{1+t}{2}a \right) \right|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
&+ \left(\int_0^1 \left(\frac{B_t(n+1, \alpha-n)}{2} \right) dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \\
&\quad \times \left(\int_0^1 \left(\frac{B_t(n+1, \alpha-n)}{2} \right) \left| f' \left(\frac{1+t}{2}x + \frac{1-t}{2}b \right) \right|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
&+ \left(\int_0^1 \left(\frac{B_t(n+1, \alpha-n)}{2} \right) dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \\
&\quad \times \left(\int_0^1 \left(\frac{B_t(n+1, \alpha-n)}{2} \right) \left| f' \left(\frac{1+t}{2}x + \frac{1-t}{2}b \right) \right|^q dt \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

Böylece $|f'|^q$ konveks ve $|f'| \leq K$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \left(\frac{B_t(n+1, \alpha-n)}{2} \right) \left| f' \left(\frac{1+t}{2}x + \frac{1-t}{2}a \right) \right|^q dt \\
&\leq \int_0^1 \left(\frac{B_t(n+1, \alpha-n)}{2} \right) \frac{1+t}{2} |f'(x)|^q + \frac{1-t}{2} |f'(a)|^q \\
&= K^q \frac{n! \Gamma(\alpha-n+1)}{2\Gamma(\alpha+2)}
\end{aligned}$$

olup benzer şekilde

$$\int_0^1 \left(\frac{B_t(n+1, \alpha-n)}{2} \right) \left| f' \left(\frac{1+t}{2}x + \frac{1-t}{2}b \right) \right|^q dt = L^q \frac{n! \Gamma(\alpha-n+1)}{2\Gamma(\alpha+2)}$$

olmak üzere eşitsizliğin her iki tarafı $\frac{(x-a)^{\alpha+1}}{n!(b-a)}$ ve $\frac{(b-x)^{\alpha+1}}{n!(b-a)}$ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned}
& \frac{(x-a)^{\alpha+1}}{n!(b-a)} \left[\int_0^1 \frac{B_t(n+1, \alpha-n)}{2} f' \left(\frac{1+t}{2}x + \frac{1-t}{2}a \right) \right. \\
& \quad \left. - \int_0^1 \frac{B_t(n+1, \alpha-n)}{2} f' \left(\frac{1-t}{2}x + \frac{1+t}{2}a \right) dt \right] \\
& - \frac{(b-x)^{\alpha+1}}{n!(b-a)} \left[\int_0^1 \frac{B_t(n+1, \alpha-n)}{2} f' \left(\frac{1+t}{2}x + \frac{1-t}{2}b \right) dt \right. \\
& \quad \left. + \int_0^1 \frac{B_t(n+1, \alpha-n)}{2} f' \left(\frac{1-t}{2}x + \frac{1+t}{2}b \right) dt \right] \\
& \leq \frac{\Gamma(\alpha-n+1)}{\Gamma(\alpha+2)} [K^q(x-a)^{\alpha+1} + L^q(b-x)^{\alpha+1}]
\end{aligned}$$

Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.1.4. $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ $a < b$ olmak üzere (a, b) açık aralığının alt kümesi olan I° üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $|f'|^q$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında konkav fonksiyon ve $q > 1$ ise bu takdirde uyumlu kesirli integraller için

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\Gamma(\alpha-n)(x-a)^\alpha [f(x) + f(a)]}{\Gamma(\alpha+1)(b-a)} - \frac{2^\alpha}{b-a} \left[I_{\alpha}^a f \left(\frac{x+a}{2} \right) + {}^b I_{\alpha} f \left(\frac{x+a}{2} \right) \right] \right. \\
& \quad \left. + \frac{\Gamma(\alpha-n)(b-x)^\alpha [f(x) + f(b)]}{\Gamma(\alpha+1)(b-a)} - \frac{2^\alpha}{b-a} \left[{}^b I_{\alpha} f \left(\frac{x+b}{2} \right) + I_{\alpha}^a f \left(\frac{x+b}{2} \right) \right] \right| \\
& \leq \left(\int_0^1 \left(\frac{B_t(n+1, \alpha-n)}{2} \right)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \quad \times \frac{1}{2} \left[\frac{(x-a)^{\alpha+1}}{n!(b-a)} \left| f' \left(\frac{x+a}{2} \right) \right|^q + \frac{(b-x)^{\alpha+1}}{n!(b-a)} \left| f' \left(\frac{x+b}{2} \right) \right|^q \right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir ve burada $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $\alpha \in [n, n+1)$ ve Γ Euler gamma fonksiyonudur.

İspat: Lemma 4.1.1'de integraller için mutlak değer özelliği ve Hölder eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\Gamma(\alpha-n)(x-a)^\alpha [f(x) + f(a)]}{\Gamma(\alpha+1)(b-a)} - \frac{2^\alpha}{b-a} \left[I_{\alpha}^a f \left(\frac{x+a}{2} \right) + {}^b I_{\alpha} f \left(\frac{x+a}{2} \right) \right] \right. \\
& \quad \left. + \frac{\Gamma(\alpha-n)(b-x)^\alpha [f(x) + f(b)]}{\Gamma(\alpha+1)(b-a)} - \frac{2^\alpha}{b-a} \left[{}^b I_{\alpha} f \left(\frac{x+b}{2} \right) + I_{\alpha}^a f \left(\frac{x+b}{2} \right) \right] \right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{(x-a)^{\alpha+1}}{n!(b-a)} \left[\int_0^1 \frac{B_t(n+1, \alpha-n)}{2} \left| f' \left(\frac{1+t}{2}x + \frac{1-t}{2}a \right) \right| \right. \\
&\quad \left. + \int_0^1 \frac{B_t(n+1, \alpha-n)}{2} \left| f' \left(\frac{1-t}{2}x + \frac{1+t}{2}a \right) \right| dt \right] \\
&\quad + \frac{(b-x)^{\alpha+1}}{n!(b-a)} \left[\int_0^1 \frac{B_t(n+1, \alpha-n)}{2} \left| f' \left(\frac{1+t}{2}x + \frac{1-t}{2}b \right) \right| dt \right. \\
&\quad \left. + \int_0^1 \frac{B_t(n+1, \alpha-n)}{2} \left| f' \left(\frac{1-t}{2}x + \frac{1+t}{2}b \right) \right| dt \right] \\
&\leq \left(\int_0^1 \left(\frac{B_t(n+1, \alpha-n)}{2} \right)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left| f' \left(\frac{1+t}{2}x + \frac{1-t}{2}a \right) \right|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad + \left(\int_0^1 \left(\frac{B_t(n+1, \alpha-n)}{2} \right)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left| f' \left(\frac{1-t}{2}x + \frac{1+t}{2}a \right) \right|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad + \left(\int_0^1 \left(\frac{B_t(n+1, \alpha-n)}{2} \right)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left| f' \left(\frac{1+t}{2}x + \frac{1-t}{2}b \right) \right|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad + \left(\int_0^1 \left(\frac{B_t(n+1, \alpha-n)}{2} \right)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left| f' \left(\frac{1-t}{2}x + \frac{1+t}{2}b \right) \right|^q dt \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

Böylece $|f'|^q$ konkav olmak üzere

$$\int_0^1 \left| f' \left(\frac{1-t}{2}x + \frac{1+t}{2}a \right) \right|^q dt \leq \left| f' \left(\frac{x+a}{2} \right) \right|^q$$

ve

$$\int_0^1 \left| f' \left(\frac{1-t}{2}x + \frac{1+t}{2}b \right) \right|^q dt \leq \left| f' \left(\frac{x+b}{2} \right) \right|^q$$

olup

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{\Gamma(\alpha-n)(x-a)^\alpha [f(x) + f(a)]}{\Gamma(\alpha+1)(b-a)} - \frac{2^\alpha}{b-a} \left[I_\alpha^a f \left(\frac{x+a}{2} \right) + {}^b I_\alpha f \left(\frac{x+a}{2} \right) \right] \right. \\
&\quad \left. + \frac{\Gamma(\alpha-n)(b-x)^\alpha [f(x) + f(b)]}{\Gamma(\alpha+1)(b-a)} - \frac{2^\alpha}{b-a} \left[{}^b I_\alpha f \left(\frac{x+b}{2} \right) + I_\alpha^a f \left(\frac{x+b}{2} \right) \right] \right| \\
&\leq \left(\int_0^1 \left(\frac{B_t(n+1, \alpha-n)}{2} \right)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad \times \frac{1}{2} \left[\frac{(x-a)^{\alpha+1}}{n!(b-a)} \left| f' \left(\frac{x+a}{2} \right) \right|^q + \frac{(b-x)^{\alpha+1}}{n!(b-a)} \left| f' \left(\frac{x+b}{2} \right) \right|^q \right]
\end{aligned}$$

ispat tamamlanmış olur.

Lemma 4.1.2. $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ $a < b$ olmak üzere f , (a, b) açık aralığının alt kümesi olan I° üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon her $x \in [a, mb]$ $m \in (0, 1]$ $\alpha \in [0, 1]$ ve $s \in [n, n + 1)$ olsun. $f' \in L[a, b]$ olmak üzere

$$\begin{aligned} & \frac{(x - ma)^{s+1}}{n!(b-a)} \int_0^1 B_t(n+1, s-n) f'(tx + m(1-t)a) dt \\ & - \frac{(mb-x)^{s+1}}{n!(b-a)} \int_0^1 B_t(n+1, s-n) f'(tx + m(1-t)b) dt \\ & = \frac{\Gamma(s-n)}{\Gamma(s+1)(b-a)} [(x - ma)^s - (mb - x)^s] f(x) - \frac{1}{(b-a)} [I_b^s f(mb) + I_a^s f(ma)] \end{aligned}$$

Teorem 4.1.5. $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ $a < b$ olmak üzere f , (a, b) açık aralığının alt kümesi olan I° üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon her $x \in [a, mb]$ $m \in (0, 1]$ $\alpha \in [0, 1]$ ve $s \in [n, n + 1)$ olsun. $f' \in L[a, b]$ olmak üzere

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\Gamma(s-n)}{\Gamma(s+1)(b-a)} [(x - ma)^s - (x - mb)^s] f(x) - \frac{1}{(b-a)} [I_b^s f(mb) + I_a^s f(ma)] \right| \\ & \leq \left(\frac{n! \Gamma(s-n)}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{(1+am)}{(\alpha+1)} + \frac{\Gamma(n+\alpha+2) \Gamma(s-n)}{\Gamma(\alpha+s+2)} \frac{(m-1)}{(\alpha+1)} - m \frac{\Gamma(n+2) \Gamma(s-n)}{\Gamma(s+2)} \right) \\ & \quad \times \left(\frac{(x - ma)^{s+1}}{n!(b-a)} + \frac{(x - mb)^{s+1}}{n!(b-a)} \right) \end{aligned}$$

İspat: Lemma 4.1.2.'den ve integraller için mutlak değer ve $|f'|$ fonksiyonu (α, m) konveks özelliğinden

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\Gamma(s-n)}{\Gamma(s+1)(b-a)} [(x - ma)^s - (x - mb)^s] f(x) - \frac{1}{(b-a)} [I_b^s f(mb) + I_a^s f(ma)] \right| \\ & \leq \frac{(x - ma)^{s+1}}{n!(b-a)} \left[\int_0^1 B_t(n+1, s-n) \left[t^\alpha |f'(x)| + m(1-t^\alpha) \left| f' \left(\frac{a}{m} \right) \right| \right] dt \right] \\ & \quad + \frac{(x - mb)^{s+1}}{n!(b-a)} \left[\int_0^1 B_t(n+1, s-n) \left[t^\alpha |f'(x)| + m(1-t^\alpha) \left| f' \left(\frac{b}{m} \right) \right| \right] dt \right] \\ & = \frac{(x - ma)^{s+1}}{n!(b-a)} \left[\int_0^1 B_t(n+1, s-n) t^\alpha |f'(x)| dt \right. \\ & \quad \left. + \int_0^1 B_t(n+1, s-n) m(1-t^\alpha) \left| f' \left(\frac{a}{m} \right) \right| dt \right] \end{aligned}$$

$$+ \frac{(x - mb)^{s+1}}{n!(b-a)} \left[\int_0^1 B_t(n+1, s-n) t^\alpha |f'(x)| dt + \int_0^1 B_t(n+1, s-n) m(1-t^\alpha) \left| f' \left(\frac{b}{m} \right) \right| dt \right]$$

Eşitsizliği elde edilir. Burada gerekli integral işlemleri yapılırsa,

$$\frac{T(x - ma)^{s+1}}{n!(b-a)} \left[\frac{B(n+1, s-n)}{\alpha+1} - \frac{B(n+\alpha+2, s-n)}{\alpha+1} + m \frac{B(\alpha+n+2, s-n)}{\alpha+1} + m \frac{\alpha B(n+1, s-n)}{\alpha+1} - mB(n+2, s-n) \right]$$

$$\frac{T(x - mb)^{s+1}}{n!(b-a)} \left[\frac{B(n+1, s-n)}{\alpha+1} - \frac{B(n+\alpha+2, s-n)}{\alpha+1} + m \frac{B(\alpha+n+2, s-n)}{\alpha+1} + m \frac{\alpha B(n+1, s-n)}{\alpha+1} - mB(n+2, s-n) \right]$$

Olup

$$\frac{T(x - ma)^{s+1}}{n!(b-a)} \left[\frac{n! \Gamma(s-n) (1+\alpha m)}{\Gamma(\alpha+1) (\alpha+1)} + \frac{\Gamma(n+\alpha+2) \Gamma(s-n) (m-1)}{\Gamma(\alpha+s+2) (\alpha+1)} - m \frac{\Gamma(n+2) \Gamma(s-n)}{\Gamma(s+2)} \right]$$

$$\frac{T(x - mb)^{s+1}}{n!(b-a)} \left[\frac{n! \Gamma(s-n) (1+\alpha m)}{\Gamma(\alpha+1) (\alpha+1)} + \frac{\Gamma(n+\alpha+2) \Gamma(s-n) (m-1)}{\Gamma(\alpha+s+2) (\alpha+1)} - m \frac{\Gamma(n+2) \Gamma(s-n)}{\Gamma(s+2)} \right]$$

Γ Euler gamma fonksiyonu olup ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.1.6. $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ $a < b$ olmak üzere f , (a, b) açık aralığının alt kümesi olan I° üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon her $x \in [a, mb]$ $m \in (0, 1]$ $\alpha \in [0, 1]$ ve $s \in [n, n+1)$ olsun. $f' \in L[a, b]$ olmak üzere

$$\left| \frac{\Gamma(s-n)}{\Gamma(s+1)(b-a)} [(x - ma)^s - (x - mb)^s] f(x) - \frac{1}{(b-a)} [I_b^s f(mb) + I_a^s f(ma)] \right| \leq \frac{(x - ma)^{s+1}}{n!(b-a)} \left(\int_0^1 (B_t(n+1, \alpha-n))^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left[\frac{|f'(x)|^q}{\alpha+1} + m \frac{\alpha}{\alpha+1} \left| f' \left(\frac{a}{m} \right) \right|^q \right]$$

$$+ \frac{(x - mb)^{s+1}}{n!(b-a)} \left(\int_0^1 (B_t(n+1, \alpha - n))^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left[\frac{|f'(x)|^q}{\alpha + 1} + m \frac{\alpha}{\alpha + 1} \left| f' \left(\frac{b}{m} \right) \right|^q \right]$$

Eşitsizlikinde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $\alpha \in [n, n+1)$ ve Γ Euler gamma fonksiyonudur.

İspat: Lemma 4.1.2'de integraller için mutlak ve Hölder eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\Gamma(s-n)}{\Gamma(s+1)(b-a)} [(x-ma)^s - (x-mb)^s] f(x) - \frac{1}{(b-a)} [I_b^s f(mb) + I_a^s f(ma)] \right| \\ & \leq \frac{(x-ma)^{s+1}}{n!(b-a)} \left[\int_0^1 B_t(n+1, s-n) \left[t^\alpha |f'(x)| + m(1-t^\alpha) \left| f' \left(\frac{a}{m} \right) \right| \right] dt \right] \\ & \quad + \frac{(x-mb)^{s+1}}{n!(b-a)} \left[\int_0^1 B_t(n+1, s-n) \left[t^\alpha |f'(x)| + m(1-t^\alpha) \left| f' \left(\frac{b}{m} \right) \right| \right] dt \right] \\ & \leq \left(\int_0^1 (B_t(n+1, s-n))^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 t^\alpha |f'(x)|^q + m(1-t^\alpha) \left| f' \left(\frac{a}{m} \right) \right|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\ & \quad + \left(\int_0^1 (B_t(n+1, \alpha-n))^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 t^\alpha |f'(x)|^q + m(1-t^\alpha) \left| f' \left(\frac{b}{m} \right) \right|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

Eşitsizliği elde edilir. Burada gerekli integral işlemleri yapıp $\frac{(x-ma)^{s+1}}{n!(b-a)}$ ve $\frac{(x-mb)^{s+1}}{n!(b-a)}$ İfadesi ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} & \frac{(x-ma)^{s+1}}{n!(b-a)} \left(\int_0^1 (B_t(n+1, s-n))^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left[\frac{|f'(x)|^q}{\alpha + 1} + m \frac{\alpha}{\alpha + 1} \left| f' \left(\frac{a}{m} \right) \right|^q \right] \\ & + \frac{(x-mb)^{s+1}}{n!(b-a)} \left(\int_0^1 (B_t(n+1, s-n))^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left[\frac{|f'(x)|^q}{\alpha + 1} + m \frac{\alpha}{\alpha + 1} \left| f' \left(\frac{b}{m} \right) \right|^q \right] \end{aligned}$$

Olup ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.1.7. $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ $a < b$ olmak üzere f , (a, b) açık aralığının alt kümesi olan I° üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon her $x \in [a, mb]$ $m \in (0, 1]$ $\alpha \in [0, 1]$ ve $s \in [n, n+1)$ olsun. $f' \in L[a, b]$ olmak üzere

$$\left| \frac{\Gamma(s-n)}{\Gamma(s+1)(b-a)} [(x-ma)^s - (x-mb)^s] f(x) - \frac{1}{(b-a)} [I_b^s f(mb) + I_a^s f(ma)] \right|$$

$$\leq \left(\frac{n! \Gamma(s-n+1)}{\Gamma(s+2)} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left[\frac{n! \Gamma(s-n) (1+\alpha m)}{\Gamma(\alpha+1) (\alpha+1)} + \frac{\Gamma(n+\alpha+2) \Gamma(s-n) (m-1)}{\Gamma(\alpha+s+2) (\alpha+1)} - m \frac{\Gamma(n+2) \Gamma(s-n)}{\Gamma(s+2)} \right] \left(\frac{(x-ma)^{s+1}}{n! (b-a)} + \frac{(x-mb)^{s+1}}{n! (b-a)} \right)$$

İspat: Lemma 4.1.2.'de integraller için mutlak değer özelliği ve Power-mean eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\Gamma(s-n)}{\Gamma(s+1)(b-a)} [(x-ma)^s - (x-mb)^s] f(x) - \frac{1}{(b-a)} [I_b^s f(mb) + I_a^s f(ma)] \right| \\ & \leq \left(\int_0^1 B_t(n+1, s-n) dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \times \left(\int_0^1 t^\alpha |f'(x)|^q + m(1-t^\alpha) \left| f' \left(\frac{a}{m} \right) \right|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\ & \quad + \left(\int_0^1 B_t(n+1, s-n) dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \times \left(\int_0^1 t^\alpha |f'(x)|^q + m(1-t^\alpha) \left| f' \left(\frac{b}{m} \right) \right|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\ & \frac{T(x-ma)^{s+1}}{n! (b-a)} \left(\frac{n! \Gamma(s-n+1)}{\Gamma(s+2)} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left[\frac{B(n+1, s-n)}{\alpha+1} - \frac{B(n+\alpha+2, s-n)}{\alpha+1} \right. \\ & \quad \left. + m \frac{B(\alpha+n+2, s-n)}{\alpha+1} + m \frac{\alpha B(n+1, s-n)}{\alpha+1} - m B(n+2, s-n) \right] \end{aligned}$$

Benzer şekilde

$$\begin{aligned} & \frac{T(x-mb)^{s+1}}{n! (b-a)} \left(\frac{n! \Gamma(s-n+1)}{\Gamma(s+2)} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left[\frac{B(n+1, s-n)}{\alpha+1} - \frac{B(n+\alpha+2, s-n)}{\alpha+1} \right. \\ & \quad \left. + m \frac{B(\alpha+n+2, s-n)}{\alpha+1} + m \frac{\alpha B(n+1, s-n)}{\alpha+1} - m B(n+2, s-n) \right] \\ & \left(\frac{n! \Gamma(s-n+1)}{\Gamma(s+2)} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left[\frac{n! \Gamma(s-n) (1+\alpha m)}{\Gamma(\alpha+1) (\alpha+1)} + \frac{\Gamma(n+\alpha+2) \Gamma(s-n) (m-1)}{\Gamma(\alpha+s+2) (\alpha+1)} - m \frac{\Gamma(n+2) \Gamma(s-n)}{\Gamma(s+2)} \right] \end{aligned}$$

olup ispat tamamlanmış olur.

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu çalışmada, klasik integraller için geçerli olan yöntemler uyumlu kesirli integrallerin analizine uygun olarak uyumlu kesirli integraller için de yazılmış ve konveks fonksiyon türleri için yeni eşitsizlikler elde edilmiştir. Daha sonra bazı lemmalar kullanılarak Hermite-Hadamard tipli, tipli yeni integral eşitsizlikler ispat edilmiştir. Elde edilen sonuçlar $\alpha = n + 1$ özel seçimi ile Riemann-Liouville integralleri ihtiva eden çeşitli sonuçlara indirgenir.

Konuyla ilgilenen araştırmacılar, üçüncü bölümde Lemma 4.1.1, Lemma 4.1.2, faydalanarak konveks fonksiyonların çeşitli sınıfları için yeni eşitsizlikler elde edebilirler. Ayrıca elde edilen integral eşitliklerine benzer yeni özdeşlikler elde edilerek yine farklı tipten integral eşitsizlikler elde edebilirler.



KAYNAKLAR

- Abdeljawad, T., 2015. On conformable fractional calculus. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 279, 57-66.
- Abu Hammad M. and Khalil, R., 2014. Abel's formula and Wronskian for conformable fractional differential equations. *International Journal of Differential Equations and Applications*, 13(3), 177-183.
- Adams, R.A. and Essex, C., 2010. *Calculus A Complete Course*. Pearson Canada Inc., 934 pp, Toronto, Ontario.
- Akdemir, A.O., Özdemir, M.E., Avcı-Ardıç, M. And Yalçın, A., Some new generalizations for GA –convex functions, submitted.(2015)
- Akdemir, A.O., Set, E., Özdemir, M.E., and Yalçın, A., New generalizations for functions whose second derivatives are GG –convex, submitted (2015)
- Akdemir, A.O., Avcı-Ardıç, M. and Set, E., New integral inequalities via GA –convex functions, submitted (2015)
- Akdemir, A.O., Özdemir, M.E. and Sevinç, F., Some inequalities for GG –convex functions, submitted (2015).
- Anderson, G.D., Vamanamurthy, M.K. and Vuorinen, M., Generalized convexity and Inequalities, *J. Math. Anal. Appl.* 335 (2007) 1294-1308
- Azpeitia, A.G., 1994. Convex functions and the Hadamard inequality. *Rev. Colombiana Mat.*, 28, 7-12.
- Balcı, M., 2012. *Matematik Analiz-1*. Sürat Üniversite Yayınları, İstanbul, Türkiye.
- Bayın, S., 2004. *Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler*, Ders Kitapları A.Ş., 458 s, Ankara.
- Bayraktar, M., 2010. *Analiz*, ISBN 978-605-395-412-5.
- Bayraktar, M., 2000. *Fonksiyonel Analiz*, ISBN 975-442-035-1.
- Bullen, P.S., 2003. *Handbook of Means and Their Inequalities*. Dordrecht: Kluwer Academic, 537 pp, The Netherlands.
- Caputo, M., 1967. Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent. Part II. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, 13, 529–539.
- Dragomir, S.S., Pečarić, J. and Persson, L.E., 1995. Some inequalities of Hadamard type. *Soochow Journal of Mathematics*, 21(3), 335-341.

- Dragomir, S.S. and Pearce, C.E.M., 2000. Selected Topics on Hermite-Hadamard Type Inequalities and Applications, RGMIA, Monographs, <http://rgmia.vu.edu.au/monographs.html> (10.10.2010).
- Dragomir, S.S. and Pearce, C.E.M., 1998. Quasi-convex functions and Hadamard's inequality, *Bull. Austral.Math. Soc.*, 57, 377-385.
- Gill, P.M., Pearce, C.E.M. and Pečarić, J.E., 1997. Hadamard's inequality for r -convex functions. *J. Math. Anal. Appl.*, 215, 461-470.
- Greenberg, H.J. and Pierskalla, W.P., 1970. A review of quasi convex functions. Reprinted from *Operations Research*, 19, 7.
- Gürbüz, M., 2013. Farklı Türden Konveks Fonksiyonların Çarpımı Üzerine İntegral Eşitsizlikleri ve Uygulamaları. Doktora Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Atatürk Üniversitesi, Erzurum.
- Gürbüz, M. and Yaradılmış, A., 2015. Some generalizations of integral inequalities and their applications, ar Xiv: 1503.02500, submitted.
- Hudzik, H. and Maligranda, L., 1994. Some remarks on s -convex functions. *Aequationes Math.*, 48, 100-111.
- Ion, D.A., 2007. Some estimates on the Hermite-Hadamard inequality through quasi-convex functions. *Annals of University of Craiova, Math. Comp. Sci. Ser.*, 34, 82-87.
- İşcan, İ., Hermite-Hadamard type inequalities for harmonically convex functions, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, Volume 43 (6) (2014), 935-942.
- Kadioğlu, E. ve Kamali, M., 2013. Genel Matematik. Kültür Eğitim Vakfı Yayınevi, Erzurum, Türkiye.
- Kavurmacı, H., 2012. Bazı Farklı Türden Konveks Fonksiyonlar için Ostrowski ve Hermite-Hadamard Tipli İntegral Eşitsizlikleri, Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi, Erzurum
- Khalil, R., Al Horani, M., Yousef, A. and Sababheh, M., 2014. A new definition of fractional derivative. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 264, 65-70.
- Khalil, R., 2014. Fractional Fourier Series with Applications. *American Journal of Computational and Applied Mathematics*, 4 (6), 187-191.
- Khalil, R. and Abu Hammad, M., 2014. Legendre fractional differential equation and Legendre fractional polynomials. *International Journal of Applied Mathematical Research*, 3 (3), 214-219.
- Kilbas, A. A. A., Srivastava, H. M. and Trujillo, J. J., 2006. Theory and applications of fractional differential equations. Elsevier Science Limited, 204, 523 p, Amsterdam.
- Kilbas, A. A., Rivero, M., Rodríguez-Germá, L. and Trujillo, J. J., 2007. α -Analytic solutions of some linear fractional differential equations with variable coefficients. *Applied mathematics and computation*, 187.1, 239-249.

- Latif, M.A., New Hermite-Hadamard type integral inequalities for GA –convex functions with applications, *Analysis*, Volume 34, Issue 4, 379-389, 2014. Doi:10.1515/anly-2012-1235.
- Loverro, A., 2004. Fractional calculus: history, definitions and applications for the engineer. Rapport technique, Univeristy of Notre Dame: Department of Aerospace and Mechanical Engineering.
- Mitrinović, D.S., 1970. *Analytic Inequalities*, Springer-Verlag, Berlin.
- Mitrinović, D.S., Pečarić, J.E. and Fink, A.M., 1993. *Classical and New Inequalities in Analysis*, Kluwer Academic Publishers, 740, UK.
- Orlicz, W., 1961. A note on modular spaces I. *Bull. Acad. Polon Sci. Ser. Math. Astronom. Phsy.*, 9, 157-162.
- Pečarić, J., Proschan, F. and Tong, Y.L., 1992. *Convex Functions ,Partial Orderings and Statistical Applications*, Academic Press, Inc.
- Pearce, C.E.M., Pečarić, J. and Šimić, V., 1998. Stolarsky means and Hadamard's inequality, *J. Math. Anal. and Appl.*, 220, 99-109.
- Roberts, A.W. and Varberg, D.E., 1973. *Convex Functions*. Academic Press, 300 pp, New York.
- Ross, B., 1977. The Development of Fractional Calculus 1695-1900. *Historia Mathematica*, 4 (1), 75-89.
- Set, E., Akdemir, A.O., and Çelik, B., 2016. Some Hermite-Hadamard type inequalities for products of two different convex functions via conformable fractional integrals, *X. Statistical Days, Proceedings Book*, Giresun-Turkey.
- Set, E., Akdemir, A.O., and Mumcu, İ., 2016. The Hermite-Hadamard's inequaly and its extentions for conformable fractional integrals of any order $\alpha > 0$, Submitted.

ÖZGEÇMİŞ

1990 yılında Gaziantep’te doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Gaziantep’te tamamladı. 2010 yılında Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik bölümüne girerek lisans öğrenimine başladı ve 2014 yılında onur belgesi alarak mezun oldu. Aynı yıl Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans öğrenimine başladı. Halen aynı bölümde yüksek lisans yapmakta olup aynı zamanda Final Temel Lisesinde Matematik Öğretmeni olarak görev yapmaktadır.