

45470



İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KORTEWEG-DE VRIES DENKLEMİNİN NÜMERİK ÇÖZÜMÜ

45470

SİBEL GÜCÜK

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

MALATYA

1995

*

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğüne,

İşbu Çalışma jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalında DOKTORA TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan *Prof. Dr. Turgut Öziş*

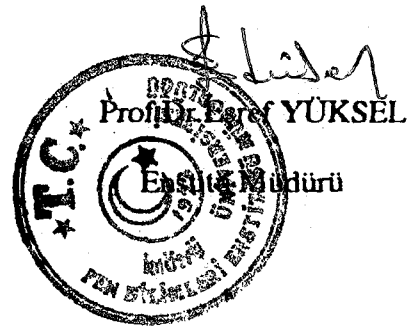
Üye *Prof. Dr. Güzin Gölmen*

Üye *Prof. Dr. Gonca Onaran*

ONAY

Yukandaki imzaların adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylıyorum.

.16./02./1995



ÖZET

Bu çalışmada, nonlinear dağılan dalgaların çalışma alanında önemli bir yeri olan Korteweg-de Vries denklemini adi diferensiyel denkleme indirgeyecek olan uygun benzerlik dönüşümü seçilmiştir. Daha sonra, benzerlik dönüşümü uygulanarak elde edilen adi diferensiyel denklemin çözümünü yapabilmek için uygun şartlar oluşturulmuştur. Seçilen uygun benzerlik dönüşümü altındaki KdV denkleminin nonlinear adi diferensiyel denkleme dönüşmesi ve nonlinear denklemlerin tipine uygun analitik çözümü oluşturmanın zorluğu karşısında sonlu farklar tekniği kullanılarak nümerik çözüm yapılmıştır. Bulunan çözümün Marchant ve Smyth'in(1991) sonucuyla uyumlu olduğu bulunmuştur.

Anahtar kelimeler: KdV denklemi, sonlu farklar, benzerlik dönüşümü

ABSTRACT

In this study, a suitable similarity transformation has been chosen to reduce the KdV equation being an important place in non-linear dispersive waves to an ordinary differential equation. After this, in order to solve the ordinary differential equation obtained by the similarity transformation, some suitable conditions have been given. Since the KdV equation under the suitable similarity transformation is transformed to the non-linear equation it is not easy to find its analytical solution. Because of this, the problem has been solved numerically by using the finite difference technique. The result obtained have been compared those given by Marchant and Smyth (1991). It is seen that they are close enough to each other.

Word keys : KdV equation, finite difference, similarity equation

TEŞEKKÜR

Bu alıőmanın hazırlanmasında gerekli bütün imkanları sağlayarak bana yardımcı olan, her zaman yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen ok değerli Hocam Sayın Prof.Dr.Turgut Öziş'e ve araőtırmalarım sırasında değerli yardımlarını, önerilerini ve eleőtirilerini aldığım Sayın Bölüm Başkanımız Prof.Dr.Sadık Keleő'e, tüm hocalarıma ve diğer bölüm elemanlarına sonsuz teőekkürlerimi sunarım.



İÇİNDEKİLER

ÖZET	ii
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR	iv
İÇİNDEKİLER	v
GİRİŞ	vii
I. BÖLÜM TEMEL KAVRAMLAR	1
1.1 Diferensiyel Denklem	1
1.2 KdV Denkleminin Analitik ve Nümerik Çözümleri	3
1.2.1 Sonlu fark metotları	3
1.2.2 Sonlu Fourier dönüşümü veya yarı-spektral metotlar	4
1.3 KdV Denkleminin Nümerik Metotlarla İfadesi	5
1.3.1 Sonlu fark metotları	5
1.3.2 Sonlu Fourier dönüşümü ve yarı spektral metotlar	10
1.3.3 KdV denklemi için modülasyon teorisi	13
1.3.4 Ortalama yükseklik değişimi	14
1.3.5 Airy fonksiyon çözümü	14
1.3.6 Hiperbolik fonksiyon çözümleri	16
II. BÖLÜM MODERN CEBİR UYGULAMALARI	17
2.1 Morgan'ın Benzerlik Metodu	17
2.2 Morgan Metodunun Uygulanması	22
2.3 Sonlu Dönüşüm Gruplarının Tanımı	27
2.4 Yardımcı Şartlar	34
2.5 Mutlak Değişmezlerin Tanımı	36
2.6 Tümdengelimli Benzerlik Metoduna Örnek	39

III. BÖLÜM BİR PARAMETRELİ GRUP TEORİSİNE GÖRE BENZERLİK DÖNÜŞÜMÜ VE KdV DENKLEMİ	48
3.1 KdV Denklemi İçin Bir Parametrelî Dönüşüm Grubu	50
3.2 KdV Denklemine Benzerlik Değişkenlerinin Uygulanması	52
3.3 Başlangıç ve Sınır Şartlarına Benzerlik Değişkenlerinin Uygulanması	53
3.4 Sonlu Fark Yaklaşımları	54
3.4.1 Birinci türevler	55
3.4.2 İkinci türevler	57
3.4.3 $O(h^2)$ mertebesinde hassas merkezi fark yaklaşımları	58
3.4.4 $O(h^4)$ mertebesinde hassas merkezi fark yaklaşımları	58
3.4.5 $O(h^2)$ mertebesinde hassas ileri ve geri fark yaklaşımları	59
3.5 Nümerik Çözüm	59
3.6 Algoritma	63
IV. BÖLÜM NÜMERİK SONUÇLAR	65
KAYNAKLAR	78
ÖZGEÇMİŞ	83

GİRİŞ

Korteweg-de Vries (KdV) denklemi ilk kez 1895 yılında Korteweg ve de Vries (Korteweg ve de Vries 1895) tarafından bulunmuştur. KdV denklemi nonlineer dağılan dalgaların çalışma alanında önemli bir yer tutmaktadır ve fiziksel olarak sığ sulara oluşan bir boyutlu, küçük ve sonlu amplitütlü dalgaların (Korteweg ve de Vries 1895), plazmadaki magnetohidrodinamik dalgaların (Gardner ve Morikawa 1960 ; Washimi ve Taniuti 1966), anharmonik kristallerdeki akustik dalgaların (Kruskal 1965, Zabusky 1967) ve hava kabarcığı-sıvı karışımlarındaki dalgaların (van Wijngaarden 1966 , 1968) hareketini temsil etmektedir.

KdV denkleminin teorik çözümü üzerine bir çok araştırmalar yapılmıştır. Özellikle çeşitli başlangıç fonksiyonları kullanılarak elde edilen çözümler için varlık ve teklik problemi Sjöberg(1967), Lax(1968) tarafından incelenmiştir. Hayashi(1991) KdV denkleminin analitik çözümlerini inceleyerek, başlangıç değerinin kompleks bir fonksiyon olması durumuyla ilgili sonuçlar vermiştir. İki boyutlu genelleştirilmiş KdV denkleminin çözümünün tek olduğu, elemanter teknikler kullanılarak Wu ve Wen(1991) tarafından gösterilmiştir. Christ ve Weinstein(1990) genelleştirilmiş KdV denkleminin küçük amplitütlü çözümlerinin yayılımını incelemiştir.

KdV denkleminin nümerik çözümü için bir çok metot geliştirilmiştir. Bu metotlardan biri sonlu fark metodudur (Greig ve Morris 1976 , Zabusky ve Kruskal 1965 , Goda 1975). Sonlu fark metotlarında bütün türevler sonlu fark yaklaşımları cinsinden yazılıp kısmi diferensiyel denklem, cebirsel denklem sistemine indirgenerek çözüm elde edilir. KdV denklemiyle tanımlanan fiziksel modellerin nümerik metotlarla çözümü çok zaman almaktadır. Bu sebeple, matematiksel denklemin nümerik çözümü için oluşturulan metodun en az şu iki özelliği bulunmalıdır :

1) Zaman ilerledikçe damping(yavaşlama) özellikler gösteren bir metotla elde edilen bir çözüm pek sağlıklı olamayacağından her bir zaman adımı için nümerik metot, çözümün amplitütünü vermelidir.

2) Dalgaların prototipleri (sınırlarının durumu, yeri), dalgaların amplitütü kadar önemli olduğundan nümerik metot minimal (en düşük) hatalı dalga sınırlarını belirtmelidir. Bu durumda metodun faz hatası küçük olmalıdır. Aksi takdirde metot, teorik çözümün fazının dışında çözümler oluşturabilir.

Genel olarak, KdV denkleminin nümerik çözümü için oluşturulan metotların çoğu ilk özelliği kolayca sağlamaktadır. Fakat, ikinci özellik için bunu söyleyebilmek o kadar basit değildir. Zabusky ve Kruskal(1965) tarafından yapılan bir çalışmada bu özelliklerin ikisini de sağlaması amacıyla a leap-frog like(birdir bir) metodu geliştirilmiştir. Bu metot ard arda uygulanan üç farklı formülden oluştuğundan her bir zaman adımında hesaplanan değerler saklanmak zorundadır ve çözüme başlayabilmek için $t = 0$ başlangıç değerinden farklı seviyedeki çözümlere gereksinim vardır. A leap-frog like metodunun dezavantajlarından dolayı Gourlay(1970) tarafından oluşturulan Hopscotch teorisine dayanan bir algoritma KdV denklemi için geliştirmiştir (Greig ve Morris 1976). Hopscotch metodunu kullanarak KdV denkleminin kararlılık ve dağılma ilişkisi incelemiştir. KdV denkleminin en önemli özelliklerinden biri nonlineerlik ve dağılma arasındaki ilişkiyi en basit şekilde temsil eden matematiksel model olmasıdır. Aleksander ve Morris(1979) kübik spline fonksiyonlarını kullanarak KdV denkleminin nümerik çözümünü Galerkin metoduyla elde etmiştir. Ve bu çalışmada değişik adım uzunluklarıyla dağılmanın değişik miktarları için KdV denkleminin nümerik çözümündeki hatalar incelenmiştir.

Sonlu fark metotlarının dışında Fourier açılımı metoduyla KdV denklemi nümerik olarak çözülmüştür (Schamel ve Elsasser 1976 , Watanabe, Ohishi ve Tanacca 1977 , Abe ve Inoue 1980). Fourier açılımı metodunda, bilinmeyen fonksiyon Fourier serisi olarak ifade edilir ve orjinal kısmi diferensiyel denklem Fourier katsayıları için adi diferensiyel denklem sistemine indirgenerek çözüm yapılır. Fourier açılımının kullanıldığı çeşitli hybrid metotlar da geliştirilmiştir (Gazdag 1973 , Tappert 1974 , Canosa ve Gazdag 1977). KdV denkleminin Fourier açılımı metodu ile çözümünün sonlu fark metotlarıyla elde edilen çözümlerle karşılaştırılması Abe ve Inoue(1980)

tarafından yapılmıştır. Elde edilen sonuçlara göre Fourier açılım metodu sonlu fark metotlarına göre daha doğru ve etkili bir metot olarak bulunmuştur. Daha sonra, Sanz-Serna ve Christie (1981) Petrov-Galerkin yöntemini kullanarak KdV denkleminin çözümünü araştırmışlardır.

$x \rightarrow \pm\infty$ için başlangıç değer fonksiyonu uygun şekilde seçilebilirse KdV denkleminin çözümü ters dağılış tekniğiyle (technique of inverse scattering) yapılabileceğini göstermiştir (Newell 1985). Daha sonra Fokas ve Ablowitz (1989) yan sonsuz eksen ($x \rightarrow +\infty$) üzerinde ters dağılış tekniğini kullanarak çözüme ulaşmaya çalışmışlardır. Bu durumda KdV denkleminin çözümü dağılış datası için nonlinear tekil integrodiferensiyel denklemin çözümüne dönüşür ve genel olarak bu denklemi çözmek zordur. Buna dayanarak Camassa ve Wu (1989) $x=0$ da birinci ve ikinci mertebeden türevlerin değerlerini gerektiren başka bir yaklaşım metodu geliştirmiştir. Ayrıca, yan sonsuz eksen üzerinde tanımlanan KdV denkleminin sınırların sabit değerler olması ve zamana bağlı fonksiyonlar olması durumlarında araştırmalar Marchant ve Smyth(1991) tarafından yapılmıştır. Elde edilen sonuçlara göre çözüm şeklinin başlangıç ve sınır değerleriyle değiştiği ve kararlı veya kararsız çözümlerin kullanılan şartlara bağlı olarak oluştuğu görülmüştür.

Bu çalışmada KdV denklemini adi diferensiyel denkleme indirgeyecek olan uygun benzerlik dönüşümü seçildi. Daha sonra bu dönüşüm uygulanarak elde edilen adi diferensiyel denklemin çözümünü yapabilmek için uygun şartlar oluşturuldu ve çözüm sonlu farklar tekniği kullanılarak elde edildi.

I. BÖLÜM

TEMEL KAVRAMLAR

1.1 Diferensiyel Denklemler

Bir veya daha fazla bağımsız değişkene göre bir veya daha fazla bağımlı değişkenin türevlerini içeren denklemler diferensiyel denklemler olarak bilinmektedir.

Diferensiyel denklemler fen ve mühendislik bilimlerinin çoğu dallarında karşılaşılan çeşitli problemleri tanımlamaktadır. Bunlardan bazıları

- 1) Mermi, roket, uydu, gezegen gibi cisimlerin hareketi problemi
- 2) Bir elektrik devresindeki akım veya şarj etme problemi
- 3) Bir çubuk veya plakadaki ısı yayılımı problemi
- 4) Bir tel veya zar (membrane) titreşimleri problemi
- 5) Bir radyoaktif maddenin bozulma oranı veya nüfus artış problemi
- 6) Kimyasal reaksiyonların oluşumu problemi
- 7) Belirli geometrik özellikleri olan eğrilerin tanımı problemi
- 8) Sıkıştırılmaz vizkoziteli bir akışkanın meydana getirdiği dalga problemi
(Navier Stokes denklemi)
- 9) Sıgı sularda, plazmada, ion akustiklerinde oluşan dalga problemi
(Korteweg-de Vries denklemi)

olarak verilebilir. Bu problemlerin her birinin yapısında bulunan niceliklerin birbirine göre değişimlerinin oranları, doğruluğu kesin olarak bilinen bilimsel kanunlarla ifade edilmektedir. Dolayısıyla problemlerin matematiksel formülleri, bu değişim oranlarının çeşitli mertebeden türevlerini içeren diferensiyel denklemler olarak karşımıza çıkmaktadır.

Bir tek bağımsız değişken ile bir veya daha çok bağımlı değişkenin, bağımsız değişkene göre türevlerini içeren denklemlere adi diferensiyel denklem denir. Bir tane bağımsız ve bir tane bağımlı değişkenli n . mertebeden adi diferensiyel denklem,

$$u' = \frac{du}{dx}, u'' = \frac{d^2u}{dx^2}, \dots, u^{(n)} = \frac{d^n u}{dx^n}$$

u bağımlı değişkeninin x bağımsız değişkenine göre türevlerini göstermek üzere

$$F(x, u, u', u'', \dots, u^{(n)}) = 0 \quad (1.1)$$

ile verilebilir. Burada F fonksiyonel bağıntısı $u, u', u'', \dots, u^{(n)}$ değişkenlerine göre cebirsel olarak lineer ve değişkenlerin katsayısı yalnız bağımsız değişkenin fonksiyonu ise (1.1) ile verilen denkleme lineer adi diferensiyel denklem denir. Aksi takdirde, F fonksiyonel bağıntısı $u, u', u'', \dots, u^{(n)}$ değişkenlerine göre cebirsel olarak lineer değilse ve değişkenlerin katsayısı bağımlı ve bağımsız değişkenlerin fonksiyonları ise nonlinear adi diferensiyel denklem denir.

Benzer olarak, iki veya daha çok bağımsız değişken ile bir veya daha çok bağımlı değişkenin, bağımsız değişkenlere göre kısmi türevlerini içeren denklemlere de kısmi türevli diferensiyel denklemler denir. n -tane bağımsız ve bir tane bağımlı değişkeni olan kısmi türevli diferensiyel denklemin genel şekli, x_1, x_2, \dots, x_n bağımsız değişkenleri ve

$$u_{x_1} = \frac{\partial u}{\partial x_1}, u_{x_2} = \frac{\partial u}{\partial x_2}, u_{x_n} = \frac{\partial u}{\partial x_n}, \dots$$

u bağımlı değişkeninin kısmi türevlerini göstermek üzere

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, u, u_{x_1}, u_{x_2}, \dots, u_{x_n}, u_{x_1 x_1}, u_{x_1 x_2}, \dots) = 0 \quad (1.2)$$

ile verilebilir. F fonksiyonel bağıntısı $u, u_{x_1}, u_{x_2}, \dots, u_{x_n}, u_{x_1 x_1}, u_{x_1 x_2}, \dots$ değişkenlerine göre cebirsel olarak lineer ve değişkenlerin katsayısı yalnız bağımsız değişkenlerin fonksiyonları ise (1.2) ile verilen denkleme lineer kısmi türevli diferensiyel denklem denir. Aksi takdirde, nonlinear kısmi türevli diferensiyel denklem denir.

Bir veya birden fazla bağımlı değişkeni ve onların bir veya birden fazla bağımsız değişkenlerine göre türevlerini içeren denklem takımına diferensiyel denklem sistemi denir.

Şimdi Korteweg-de Vries (KdV) denklemini verelim.

Şığ sulara oluşan dalgalar için KdV denklemini

$$u_t + \sqrt{gh_0} \left[1 + \frac{3}{2} (u/h_0) \right] u_x + \frac{1}{6} \sqrt{gh_0} h_0^2 u_{xxx} = 0 \quad (1.3)$$

olarak ifade edebiliriz. Bu denklemde s yatay koordinatı, t zamani, $u(s,t)$ lokal dalga yüksekliğini, h_0 derinliği, g yerçekimi ivmesini belirtmektedir. Ayrıca alt indisler kısmi türevleri göstermektedir. a dalganın amplitüdünü, λ_0 ise dalganın uzunluğunu ifade etmek üzere (1.3) denklemi a/h_0 ve $(h_0/\lambda_0)^2$ nin küçük değerleri için geçerlidir. $\varepsilon = a/h_0$, $\mu = \frac{1}{6}(h_0/\lambda_0)^2$ ve boyutsuz parametreler

$$\bar{s} = s/\lambda_0, \quad \bar{t} = t\sqrt{gh_0}/\lambda_0, \quad \bar{u} = \frac{3}{2}u(\varepsilon h_0)$$

olmak üzere (1.3) denklemini

$$u_t + u_x + \varepsilon uu_x + \mu u_{xxx} = 0 \quad (1.4)$$

olarak yazabiliriz (boyutsuz değişkenlerdeki çizgiyi ihmal ederek). x yeni bağımsız değişken olmak üzere $x=s-t$ dönüşümüyle (1.4) denklemi

$$u_t + \varepsilon uu_x + \mu u_{xxx} = 0 \quad (1.5)$$

denkleminde dönüştürülür(Vliengenhart 1971). Biz çalışmalarımızda KdV denkleminin bu formu ile ilgileneceğiz.

1.2. KdV Denkleminin Analitik Ve Nümerik Çözümleri

(1.5) denkleminde $\varepsilon=6$ ve $\mu=1$ alınarak elde edilen KdV denkleminin aşağıdaki nümerik metotlar uygulandı :

1.2.1 Sonlu fark metotları

a) Açık metotlar

i) Zabusky ve Kruskal formülü (Zabusky ve Kruskal 1965 , Vliengenhart 1971)

b) Kapalı metotlar

i) Hopscotch metodu (Greig ve Morris 1976)

ii) Goda'nın formülü (Goda 1975)

iii) Taha'nın formülü (Taha 1982)

iv) M.Kruskal'ın formülü (Kruskal 1981)

1.2.2 Sonlu Fourier dönüşümü veya yarı-spektral metotlar

a) Tappert tarafından yapılan ayrık adım Fourier metodu (Tappert 1974)

b) Fornberg ve Whitham tarafından yapılan yarı-spektral metot (Fornberg ve Whitham 1978)

$t=0$ dan $t=T$ ye kadar süren hesaplamalar için L_∞ normunu kullanarak metotların doğruluğu ve serbest parametrelerin (Δt , Δx gibi) değişik seçimleri için bu doğruluğa ulaşmakta gerekli olan zamanı hesaplayarak bu metotlar arasındaki karşılaştırmalar yapılmıştır (Taha ve Ablowitz 1983).

(1.5) KdV denkleminin bu metotlar uygulanırken aşağıda verilecek olan şartlar kullanılmıştır :

a) Başlangıç şartları

i) 1-Soliton çözümü

(1.5) denkleminin sonsuz aralık üzerindeki tam çözümü

$$w = 4k^2, \quad A = 2k^2, \quad \eta_0 = \text{sabit}$$

olmak üzere

$$u(x, t) = A \operatorname{sech}^2(kx - wt - \eta_0) \quad (1.6)$$

denkleminle verilir. (1.6) denkleminde $t=0$ alınıp başlangıç şartı olarak kullanılarak ve η_0 sıfır seçilerek A nın farklı değerleri için çözümler yapılmıştır.

ii) 2-Solitonun çarpışması

(1.5) denkleminin sonsuz aralık üzerinde tam çözümü

$$u(x, t) = 2(\log f)_{xx} \quad (1.7)$$

dir. Burada

$$f = 1 + e^{\eta_1} + e^{\eta_2} + e^{\eta_1 + \eta_2 + A_{12}}$$

$$\eta_i = k_i x - k_i^3 t + \eta_i^{(0)}$$

ve

$$e^{A_{ij}} = \left(\frac{k_i - k_j}{k_i + k_j} \right)^2$$

olarak verilir. (1.7) denkleminde $t=0$ alınarak başlangıç şartı elde edilir.

Parametrelerin

$$k_1 = 1, \quad k_2 = \sqrt{2}, \quad \eta_1^{(0)} = 0, \quad \eta_2^{(0)} = 2\sqrt{2}$$

ve

$$k_1 = 1, \quad k_2 = \sqrt{5}, \quad \eta_1^{(0)} = 0, \quad \eta_2^{(0)} = 10.73$$

değerleri kullanılarak yapılan çözümlerde solitonların birbirlerini etkileyerek tekrar orijinal şekillerine döndükleri görülmüştür.

b) Sınır şartları

$[-20,20]$ aralığı üzerinde periyodik sınır şartları kullanılmıştır.

Nümerik çözümler tam çözümlerle karşılaştırılarak $\int u^2 dx$ ve $\int [2u^3 - (u_x)^2] dx$ değerleri hesaplanmıştır.

1.3 KdV Denkleminin Nümerik Metotlarla İfadesi

1.3.1. Sonlu fark metotları

a) Açık metotlar

i) Zabusky ve Kruskal formülü

Zabusky ve Kruskal (1965), $u_n^m = u(n\Delta x, m\Delta t)$ n ve m tamsayı olmak üzere

KdV denklemi için

$$u_n^{m+1} = u_n^{m-1} - 2 \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_{n+1}^m + u_n^m + u_{n-1}^m) (u_{n+1}^m - u_{n-1}^m) - \frac{\Delta t}{(\Delta x)^3} (u_{n+2}^m - 2u_{n+1}^m + 2u_{n-1}^m - u_{n-2}^m) \quad (1.8)$$

açık (explicit) leapfrog sonlu fark formülünü kullandılar. Bu sonlu fark formülü (1.5) denklemi ile kararlı olup kesme hatası ($O((\Delta t)^2) + O((\Delta x)^2)$) dir. Ayrıca bu formülün lineer kararlılığı u_0 , u nun alabileceği maksimum değer olmak üzere

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \left| -2u_0 + \frac{1}{(\Delta x)^2} \right| \leq \frac{2}{2\sqrt{3}} \quad (1.9)$$

olarak verilebilir ve bu çok küçük zaman adımında kararlılığın korunduğunu ifade etmektedir. Başlangıç adımı için

$$u_n^1 = u_n^0 - 2 \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_{n+1}^0 + u_n^0 + u_{n-1}^0) (u_{n+1}^0 - u_{n-1}^0) - \frac{\Delta t}{2(\Delta x)^3} (u_{n+2}^0 - 2u_{n+1}^0 + 2u_{n-1}^0 - u_{n-2}^0) \quad (1.10)$$

merkezi formülü kullanılır.

b) Kapalı metotlar

1976 yılında Greig ve Morris (1.5) ile verilen KdV denklemi için $f = u^2 / 2$ olmak üzere

$$u_n^{m+1} = u_n^m - 3 \frac{\Delta t}{\Delta x} (f_{n+1}^m - f_{n-1}^m) - \frac{\Delta t}{2(\Delta x)^3} (u_{n+2}^m - 2u_{n+1}^m + 2u_{n-1}^m - u_{n-2}^m) \quad (1.11a)$$

$$u_n^{m+1} = u_n^m - 3 \frac{\Delta t}{\Delta x} (f_{n+1}^{m+1} - f_{n-1}^{m+1}) - \frac{\Delta t}{2(\Delta x)^3} (u_{n+2}^{m+1} - 2u_{n+1}^{m+1} + 2u_{n-1}^{m+1} - u_{n-2}^{m+1}) \quad (1.11b)$$

şeklinde Hopscotch formülünü oluşturdular. $(n+m)$ nin çift olduğu düğüm noktalarında (1.11a) formülü ve $(n+m)$ nin tek olduğu düğüm noktalarında (1.11b) formülü kullanılır. Her bir zaman adımında oluşan yarı üçgensel denklem sistemi Gauss eleme metodu kullanılarak çözülür. Hopscotch formülü için lineer kararlılık u_0 , u nun alabileceği maksimum değer olmak üzere

$$\frac{\Delta t}{(\Delta x)^3} \leq \left| \frac{1}{(\Delta x)^2 u_0 - 2} \right| \quad (1.12)$$

olarak verilir (Greig ve Morris 1976).

Ayrıca bu formülün kesme hatası ($O((\Delta t)^2) + O((\Delta x)^2)$) dir.

ii) Goda'nın formülü

(1.5) denklemini için Goda (1975) tarafından oluşturulan kapalı formül

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} (u_n^{m+1} - u_n^m) + \frac{1}{\Delta x} \left\{ u_{n+1}^{m+1} (u_n^m + u_{n+1}^m) - u_{n-1}^{m+1} (u_n^m + u_{n-1}^m) \right\} \\ + \frac{1}{2(\Delta x)^3} \left\{ u_{n+2}^{m+1} - 2u_{n+1}^{m+1} + u_{n-1}^{m+1} - u_{n-2}^{m+1} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (1.13)$$

şeklinde ve kesme hatası ($O(\Delta t) + O((\Delta x)^2)$) olup lineer analize göre kayıtsız şartsız kararlıdır. Bu formülün uygulanması sonucunda, katsayı matrisi

$$\begin{bmatrix} x & x & x & & & & & x & x \\ x & x & x & x & & & & & x \\ x & x & x & x & x & & & & \\ & & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & & & & x & x & x & x & x \\ x & & & & & & & x & x & x & x \\ x & x & & & & & & & x & x & x \end{bmatrix}$$

şeklinde olan yarı-beşli diagonal denklem sisteminin çözümünün her bir zaman adımında yapılması gerekmektedir.

iii) IST (Inverse scattering transform) üzerine oluşturularak önerilen formül

$$\begin{aligned} \text{İlk olarak } A^{(0)} = (3/2)(\Delta t / (\Delta x)^3) \text{ alınarak} \\ \frac{u_n^{m+1} - u_n^m}{\Delta t} = \frac{1}{2(\Delta x)^3} \left[u_{n-1}^{m+1} - 3u_n^{m+1} + 3u_{n+1}^{m+1} - u_{n+2}^{m+1} + u_{n-2}^m - 3u_{n-1}^m + 3u_n^m - u_{n+1}^m \right] \\ - \frac{3}{2\Delta x} \left[(u_n^m)^2 - (u_n^{m+1})^2 \right] - \frac{1}{2\Delta x} \left\{ u_{n+1}^{m+1} (u_n^{m+1} + u_{n+1}^{m+1} + u_{n+2}^{m+1}) \right. \\ \left. - u_{n-1}^{m+1} (u_n^m + u_{n-1}^m + u_{n-2}^m) \right\} \end{aligned} \quad (1.14)$$

local formülünü inceleyelim. Bu formülün kesme hatası ($O((\Delta t)^2) + O((\Delta x)^2)$) dir.

Formülü uygulayabilmek için

$$\varepsilon = \frac{2(\Delta x)^3}{\Delta t} \leq 1$$

olmak üzere (1.14) formülü

$$u_{n+2}^{m+1} - 3u_{n+1}^{m+1} + (3 + \varepsilon)u_n^{m+1} - u_{n-1}^{m+1} = B_n \quad (1.15)$$

şeklinde yazılabilir (Kruskal 1981). Burada B_n

$$B_n = u_{n-2}^m - 3u_{n-1}^m - u_{n+1}^m + (3 + \varepsilon)u_n^m - 3(\Delta x)^2 \left[(u_n^m)^2 - (u_n^{m+1})^2 \right] - (\Delta x)^2 \left[u_{n+1}^{m+1} (u_n^{m+1} + u_{n+1}^{m+1} + u_{n+2}^{m+1}) - u_{n-1}^m (u_n^m + u_{n-1}^m + u_{n-2}^m) \right] \quad (1.16)$$

olarak verilir. Bu denklem Crank-Nicolson metodunun bir versiyonuyla çözülebilir.

u_n^{m+1} in hesabı için sağa doğru işlem yaparak

$$u_{n+1}^{m+1} = au_n^{m+1} + b_n^{m+1} \quad (1.17)$$

şeklindeki denklemin çözümü incelenir. Bu çözümün kararlılığı $|a| \leq 1$ olmasını gerektirir. u_{n+2}^{m+1} , u_{n+1}^{m+1} ve u_n^{m+1} değerleri hesaplanarak (1.15) denkleminde yerine konduğunda

$$b_{n+1}^{m+1} + (a-3)b_n^{m+1} + (a^2 - 3a + 3 + \varepsilon)b_{n-1}^{m+1} + (a^3 - 3a^2 + 3a + \varepsilon a - 1)u_{n-1}^{m+1} = B_n \quad (1.18)$$

elde edilir. $|a| \leq 1$ olduğundan u_{n-1}^{m+1}

$$(a-1)^3 + \varepsilon a = 0 \quad (1.19)$$

denkleminin çözümü olarak verilir ve geri zaman adımında b_n için ikinci derece fark denklemini elde edilir. Bu durumda, k sabiti

$$k^2 + (a-3)k + a^2 - 3a + 3 + \varepsilon = 0 \quad (1.20)$$

denklemini sağlamak şartıyla (1.18) denkleminin homojen kısmının çözümü

$$b_n = k^n \quad (1.21)$$

olarak verilebilir. $a < 1$ olduğundan bu denklemin $|k| > 1$ olacak şekilde iki kökünün olduğu gösterilebilir.

$$b_{n-1} = (3a - a^2)b_n - ab_{n+1} + aB_n \quad (1.22)$$

denkleminde sola doğru işlem yapılarak b hesaplanabilir. ((1.22) denklemini, (1.18) ve (1.19) denklemlerinden elde edilir.)

İkinci olarak,

$$\begin{aligned}
& \frac{S_n^m}{1-S_n^m} \left\{ A_-^{(0)} - \sum_{l=-\infty}^n [E_{l+1} + S_l^{m+1} W_l (A_-^{(2)} + C_{l-2}) \right. \\
& \left. - \left\{ D_-^{(4)} \gamma_{l-1} + D_-^{(2)} + \sum_{k=-\infty}^{l-1} (H_k + G_k) \right\} S_l^{m+1} \gamma_1 + (\gamma_1 - 1) \right\} W_l^{-1} - \left. \right\} W_n \\
& - \frac{S_n^{m+1}}{1-S_n^{m+1}} \left\{ D_-^{(0)} + \sum_{l=-\infty}^{n-1} \left[\frac{-S_l^{m+1}}{S_{l+1}^{m+1}} [N_{l+1} - N_l + M_l \right. \right. \\
& \left. \left. + S_{l+1}^{m+1} Z_l + S_{l+1}^m \gamma_{l+1}^{-1} N_{l+1}] + \gamma_l T_{l-2} + (\gamma_l - 1) \right] W_l^{-1} - \right\} \\
& + \frac{1}{1-S_n^m} E_{n+1} - \frac{1}{1-S_n^{m+1}} T_{n-2} = \frac{S_n^{m+1} - S_n^m}{(1-S_n^{m+1})(1-S_n^m)}
\end{aligned} \tag{1.23}$$

şeklinde yazılabilen global metot incelenir. Burada

$$E_n = A_-^{(2)} S_n^m W_{n-1} - S_n^{m+1} D_-^{(2)} + H_n + G_n - S_n^{m+1} \sum_{k=-\infty}^n (H_k + G_k) + S_n^m W_{n-1} C_{n-1} - S_n^m D_-^{(4)}$$

$$C_n = A_-^{(4)} + \sum_{j=-\infty}^n P_j W_j^{-1}$$

$$T_n = \gamma_{n+1} M_n + S_{n+1}^{m+1} \gamma_{n+1} Z_n - S_{n+1}^m N_{n+1}$$

$$M_n = S_n^{m+1} W_n A_-^{(4)} - S_n^m D_-^{(4)}$$

$$Z_n = \left(A_-^{(2)} + \sum_{j=-\infty}^n Q_j W_j^{-1} \right) W_n$$

$$N_n = D_-^{(2)} + \sum_{j=-\infty}^n F_j$$

$$W_n = \prod_{l=-\infty}^n \gamma_l, \quad \gamma_l = \left(\frac{1-S_l^m}{1-S_l^{m+1}} \right)$$

$$H_k = A_-^{(4)} (S_{k+1}^m \gamma_k - S_k^m) W_{k-1}, \quad G_k = (S_k^m - S_{k+1}^{m+1}) D_-^{(4)}$$

$$F_j = A_-^{(4)} (S_j^{m+1} W_j - S_{j-1}^{m+1} W_{j-1}) + D_-^{(4)} (S_{j-1}^m - S_j^{m+1})$$

$$P_j = A_-^{(4)} (S_j^{m+1} - S_{j+1}^m) W_j + D_-^{(4)} (S_{j+1}^{m+1} - S_j^{m+1} \gamma_j)$$

$$Q_j = (S_{j-1}^{m+1} - S_j^m) W_j A_-^{(4)} - (S_{j-1}^m \gamma_j - S_j^m) D_-^{(4)}$$

$$A_-^{(2)} = -\frac{2}{3} A_-^{(0)} + \frac{1}{2} \alpha, \quad D_-^{(2)} = -\frac{2}{3} A_-^{(0)} - \frac{1}{2} \alpha$$

$$A_-^{(4)} = \frac{1}{6} A_-^{(0)} - \frac{1}{4} \alpha, \quad D_-^{(4)} = \frac{1}{6} A_-^{(0)} + \frac{1}{4} \alpha$$

$$\alpha = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^3}, \quad A_-^{(0)} = \text{keyfi sabit ve } S_n^m = 1 - e^{-(\Delta x)^2} u_n^m$$

olarak verilir. $A_-^{(0)} = \frac{3}{2}\alpha$ alınarak aynı düşünce uygulandığında farkın sadece B_n teriminde olduğu görülür. Bu formül de kayıtsız şartsız yakınsak olup ($O((\Delta t)^2) + O((\Delta x)^2)$) kesme hatasına sahiptir.

iv) M.Kruskal'ın formülü

$$u_t + u_{xxx} = 0 \quad (1.24)$$

denklemini için Kruskal (1981)

$$\begin{aligned} \frac{u_n^{m+1} - u_n^m}{\Delta t} + \frac{u_{n+2}^{m+1} - 3u_{n+1}^{m+1} + 3u_n^{m+1} - u_{n-1}^{m+1}}{2(\Delta x)^3} \\ + \frac{u_{n+1}^m - 3u_n^m + 3u_{n-1}^m - u_{n-2}^m}{2(\Delta x)^3} = 0 \end{aligned} \quad (1.25)$$

nümerik formülünü oluşturdu. (1.5) KdV denkleminin nümerik çözümü için

$$\begin{aligned} \frac{u_n^{m+1} - u_n^m}{\Delta t} + \frac{u_{n+2}^{m+1} - 3u_{n+1}^{m+1} + 3u_n^{m+1} - u_{n-1}^{m+1}}{2(\Delta x)^3} + \frac{u_{n+1}^m - 3u_n^m + 3u_{n-1}^m - u_{n-2}^m}{2(\Delta x)^3} \\ + 3 \left\{ \frac{\theta}{4\Delta x} \left[(u^2)_{n+1}^{m+1} - (u^2)_{n-1}^{m+1} + (u^2)_{n-1}^m \right] + \frac{1-\theta}{2\Delta x} \left[u_n^{m+1} (u_{n+1}^{m+1} - u_{n-1}^{m+1}) + u_n^m (u_{n+1}^m - u_{n-1}^m) \right] \right\} = 0 \end{aligned} \quad (1.26)$$

formülünü kullandı. θ nın çeşitli değerlerini kullanarak çözüm yapıldı ve elde edilen çözümlere göre en iyi sonucun $\theta = 2/3$ için olduğu görüldü.

Bu formül de lineer kararlılığa göre kayıtsız şartsız kararlıdır ve kesme hatası ($O((\Delta t)^2) + O((\Delta x)^2)$) dır.

1.3.2 Sonlu Fourier dönüşümü ve yarıspektral metotlar

i) F. Tappert'in Ayrık Adım Fourier Metodu

(1.5) KdV denklemini uzaysal periyoda uygun olması bakımından $[0, 2\pi]$ aralığına

$$u_t + 6\frac{\pi}{p}uu_x + \frac{\pi^3}{p^3}u_{xxx} = 0 \quad (1.27)$$

şeklinde normalize edilerek bu yöntemde kullanıldı. Burada p , $[0,2\pi]$ aralığının uzunluğunun yarısıdır ve $X=(x+p)\pi/p$ dir.

Çözüm metodu birbirini izleyen iki adımdan oluşmaktadır. Bu adımlar

- 1) Nonlinear terime (kapalı) sonlu fark yaklaşımı kullanılarak çözüm ilerler
- 2) Lineer terim için hızlı Fourier dönüşümü (FFT) kullanılarak çözüm ilerler

İlk adım olarak, (1.27) KdV denkleminde bu metodu uygulamak için ilk yaklaşım

$$u_t + 6 \frac{\pi}{p} u u_x = 0 \quad (1.28)$$

denklemdir. Denklemin doğrudan sonlu fark ifadesi

$$\tilde{u}_n^{m+1} = u_n^m - \frac{3}{4} \frac{\pi}{p} \frac{\Delta t}{\Delta X} \left\{ (\tilde{u}^2)_{n+1}^{m+1} - (\tilde{u}^2)_{n-1}^{m+1} + (u^2)_{n+1}^m - (u^2)_{n-1}^m \right\} \quad (1.29)$$

dir. Burada u , (1.27) denkleminin çözümüdür ve \tilde{u} , (1.28) denkleminin çözümüdür..

İkinci adım olarak, F Fourier dönüşümünü ve F^{-1} bu Fourier dönüşümünün tersini ifade etmek üzere

$$u(X_j, t + \Delta t) = F^{-1} \left(e^{ik^3 \pi^2 p^2 \Delta t} F(\tilde{u}(X_j, t)) \right) \quad (1.30)$$

formülü kullanılır. Bu formül zaman ve uzay boyutunda, (1.28) denkleminde (1.29) denkleminle yaklaşıldığından ikinci mertebeden yakınsamaya sahiptir ve lineer analiz yöntemleri kullanılarak kararlı olduğu gösterilebilir. $F(\tilde{u})$ ve F^{-1} i bulmak için FFT(fast Fourier Transformation) tekniği kullanılır. Düzeltilmiş discretization ile (1.28) denkleminin daha iyi çalıştığı bulunmuştur. (1.28) denklemi

$$\tilde{u}_n^{m+1} = u_n^m - \frac{\Delta t}{8 \Delta X} \frac{\pi}{p} \left\{ \left[8(\tilde{u}^2)_{n+1}^{m+1} - 8(\tilde{u}^2)_{n-1}^{m+1} - (\tilde{u}^2)_{n+2}^{m+1} + (\tilde{u}^2)_{n-2}^{m+1} \right] + \left[8(u^2)_{n+1}^m - 8(u^2)_{n-1}^m - (u^2)_{n+2}^m + (u^2)_{n-2}^m \right] \right\} \quad (1.31)$$

şeklinde ifade edilerek kesme hatası ($O((\Delta t)^2) + O((\Delta x)^2)$) derecesinden ($O((\Delta t)^2) + O((\Delta x)^4)$) derecesine indirgenir. Hatta, kesme hatasını her p için ($O((\Delta t)^2) + O((\Delta x)^p)$) derecesine indirmek mümkün olmaktadır (Fornberg ve Whitham 1978).

ii) Fornberg ve Whitham 'ın yarı-spektral metodu

Bu metot $u(x,t)$ yi x e göre Fourier uzayına dönüştüren bir Fourier metodudur. Uzaysal periyoda uygun olması bakımından $[0,2\pi]$ aralığına normalize edilir ve bu aralık $\Delta X=2\pi/N$ olmak üzere eşit uzaklıklı N noktaya bölünerek nümerik olarak bu noktalarda tanımlanan $u(x,t)$ fonksiyonu

$$\hat{u}(k,t) = Fu = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} u(j\Delta X, t) e^{-2\pi i j k / N} \quad (1.32)$$

$$k = -N/2, \dots, -1, 0, 1, \dots, (N/2)-1$$

şeklinde Fourier uzayına dönüştürülür. (1.32) denkleminin tersi

$$u(j\Delta X, t) = F^{-1}\hat{u} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k \hat{u}(k,t) e^{2\pi i j k / N} \quad (1.33)$$

$$k = -N/2, \dots, -1, 0, 1, \dots, (N/2)-1$$

şeklinde ifade edilebilir.

Hızlı Fourier dönüşümü algoritması kullanılarak bu dönüşümler yapılabilir (Cooley, Lewis ve Welch 1969). Bu formül yardımıyla u_x , $F^{-1}\{ikFu\}$ olarak ve u_{xxx} , $F^{-1}\{ik^3Fu\}$ olarak hesaplanır. (1.27) ile birleştirilerek

$$u(X, t + \Delta t) - u(X, t - \Delta t) + 2i \frac{6\pi}{p} \Delta t u(X, t) F^{-1}(kF(u)) - 2i \Delta t \frac{\pi^3}{p^3} F^{-1}(k^3 F(u)) = 0 \quad (1.34)$$

şeklinde yaklaşılabilir. Son terimde düzeltme yapılarak

$$u(X, t + \Delta t) - u(X, t - \Delta t) + 2i \frac{6\pi}{p} \Delta t u(X, t) F^{-1}(kF(u)) - 2i F^{-1} \left\{ \sin \left(\frac{\pi^3 k^3}{p^3} \Delta t \right) F(u) \right\} = 0 \quad (1.35)$$

şeklinde ifade edilir. (1.34) ve (1.35) denklemleri arasındaki fark

$$u_t + \frac{\pi^3}{p^3} u_{xxx} = 0 \quad (1.36)$$

lineer denkleme düşen yaklaşımdan kaynaklanır. (1.35) denkleminin lineer kısmı (1.36) denkleminin herhangi bir çözümünü tam olarak sağlar (Fornberg ve Whitham 1978).

Fornberg ve Whitham formülü açık (explicit) olduğundan

$$\begin{aligned}
& u(X, t + \Delta t) - u(X, t) + 3i\Delta t \frac{\pi}{p} \left\{ u(X, t + \Delta t) \right. \\
& \left. F^{-1}(kF(u(X, t + \Delta t))) + u(X, t)F^{-1}(kF(u(X, t + \Delta t))) \right\} \\
& - \frac{i\Delta t}{2} \left(\frac{\pi}{p} \right)^3 \left\{ F^{-1}(k^3 F(u(X, t + \Delta t))) + F^{-1}(k^3 F(u(X, t))) \right\} = 0
\end{aligned} \tag{1.37}$$

şeklinde Crank-Nicolson tipi kapalı (implicit) versiyonu da incelenebilir. Bu formül lineer kararlılığa göre kayıtsız şartsız kararlıdır.

1.3.3 KdV denkleminin için modülasyon teorisi (Modulation theory)

Yavaşça değişen dalga dizisinin ortalama yüksekliğini, frekansını ve dalga sayısını tanımlamak için modülasyon teorisi geliştirilmiştir (Whitham 1965, 1974). β ortalama yükseklik, a amplitüt, $K(m)$ ve $E(m)$ m parametresine bağlı sırasıyla birinci ve ikinci çeşit eliptik integraller olmak üzere KdV denkleminin için modülasyon denklemleri

$$P: 2\beta + 4a \frac{K(m) - E(m)}{mK(m)} - 2a - \frac{2a}{m} = \text{sabit} \tag{1.38a}$$

$$\frac{dx}{dt} = U - \frac{4aK(m)}{K(m) - E(m)} \quad \text{üzerinde}$$

$$Q: 2\beta + 4a \frac{K(m) - E(m)}{mK(m)} - \frac{2a}{m} = \text{sabit} \tag{1.38b}$$

$$\frac{dx}{dt} = U - \frac{4a(1-m)K(m)}{E(m) - (1-m)K(m)} \quad \text{üzerinde}$$

$$R: 2\beta + 4a \frac{K(m) - E(m)}{mK(m)} - 2a = \text{sabit} \tag{1.38c}$$

$$\frac{dx}{dt} = U - 4a(1-m) \frac{K(m)}{mE(m)} \quad \text{üzerinde}$$

olarak tanımlanır. U faz hızı ve k dalga sayısı

$$U = 6\beta + 4a \left(\frac{2}{m} - 1 \frac{3E(m)}{mK(m)} \right), \quad k = \frac{\pi}{K(m)} \left(\frac{a}{m} \right)^{1/2}$$

olarak verilir. (1.38) modülasyon denklemlerinin Q karakteristiği üzerinde açılan bir fan olarak basit dalga çözümü vardır (Gurevich ve Pitaevski 1974 , Fornberg ve Whitham 1978). Basit dalga özellikleri Q karakteristiğinin fanında değişirken, R ve P Riemann değişmezleri üzerinde sabit kalır.

1.3.4 Ortalama yükseklik değişimi (Mean height variation)

KdV denklemindeki dağılma terimi ihmal edilerek $0 \leq u_b < u_i$ bölgesinde yaklaşık bir çözüm bulunmaya çalışıldı (Fornberg ve Whitham 1978). Bu durumda

$$u_t + 6uu_x = 0 \quad (1.39)$$

denkleminin

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= u_i \quad (0 < x < \infty) \\ u(0, t) &= u_b(t) \quad (t > 0) \end{aligned} \quad (1.40)$$

şartları altındaki çözümü

$$u = \begin{cases} u_b, & (0 \leq x/t \leq 6u_b) \\ 6x/t, & (6u_b \leq x/t \leq 6u_i) \\ u_i, & (x/t > 6u_i) \end{cases} \quad (1.41)$$

dir. Bu çözüm $a=0$ amplitüdü için modülasyon denklemlerinden bulunabilir.

1.3.5 Airy fonksiyon çözümü

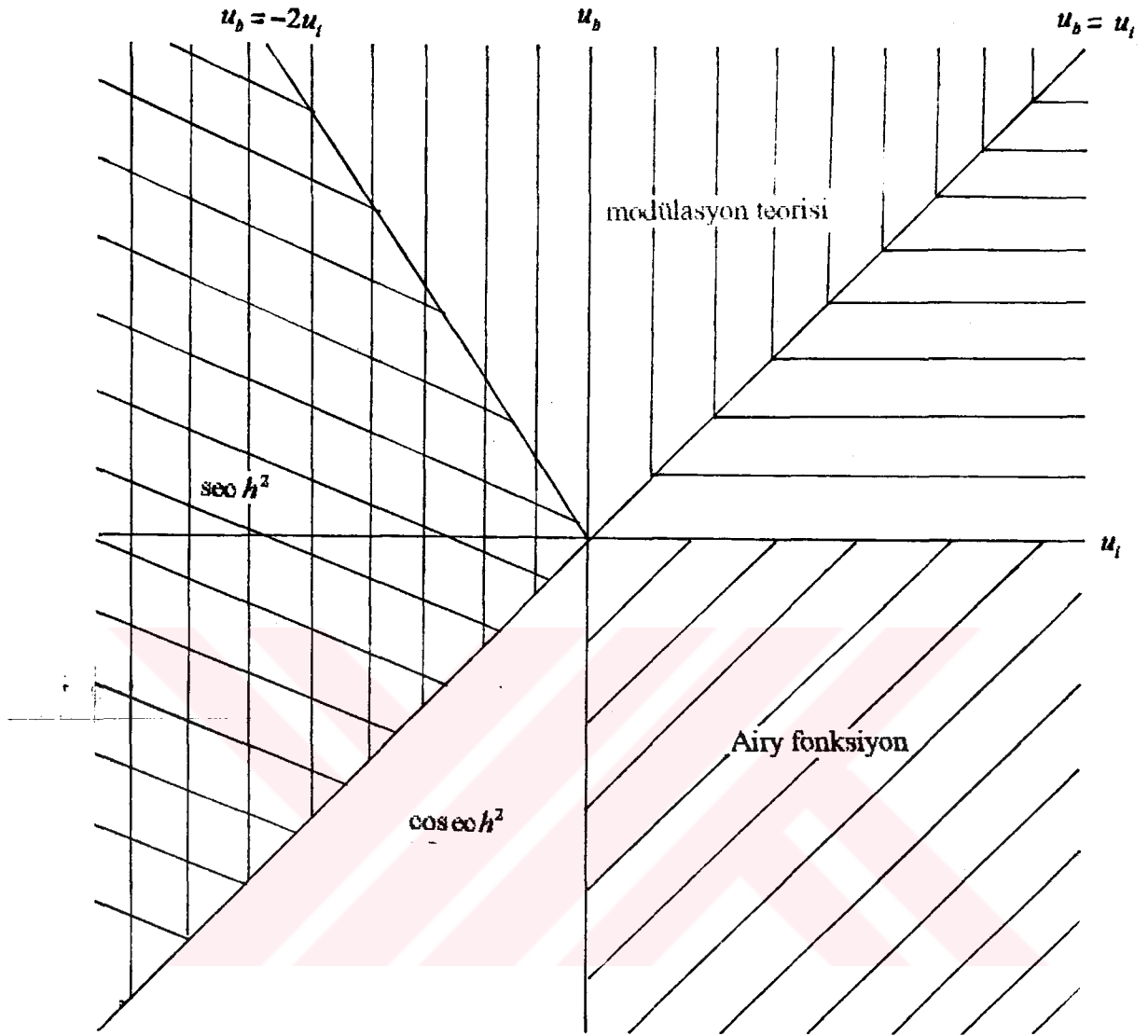
$u_i > 0$ ve $u_b < 0$ bölgesinde KdV denklemindeki nonlinear terim ihmal edilerek benzerlik çözümü yapıldı.

$$u_t + u_{xxx} = 0 \quad (1.42)$$

denklemini için benzerlik değişkenleri

$$u = f(z), \quad z = x / (3t)^{1/3} \quad (1.43)$$

olarak elde edilir. Bu durumda (1.42) denklemini ve (1.40) şartları (1.43) benzerlik değişkenleri altında



Şekil 1.1

$$\begin{aligned}
 -f''' - zf' &= 0 \\
 z \rightarrow \infty \text{ iken } f &= u_i \\
 z = 0 \text{ iken } f &= u_b
 \end{aligned} \tag{1.44}$$

olarak bulunur. Bu denklemin çözümü, $Ai(z)$ Airy fonksiyon olmak üzere

$$f(z) = 3(u_i - u_b) \int_0^z Ai(t) dt + u_b \tag{1.45}$$

dir.

1.3.6 Hiperbolik fonksiyon çözümleri

$u_t < 0$ ve $u_t < u_b \leq -2u_t$ bölgesinde KdV denkleminin çözümü

$$u(x) = u_t - 3u_t \operatorname{sech}^2 \left[\left(-\frac{3}{2}u_t \right)^{1/2} x + \alpha_0 \right], \quad \alpha_0 = \operatorname{sech}^{-1} \left(\frac{u_b - u_t}{3u_t} \right)^{1/2} \quad (1.46)$$

ve $u_b < u_t < 0$ bölgesinde

$$u(x) = u_t + 3u_t \operatorname{cosech}^2 \left[\left(-\frac{3}{2}u_t \right)^{1/2} x + \alpha_0 \right], \quad \alpha_0 = \operatorname{cosech}^{-1} \left(\frac{u_b - u_t}{3u_t} \right)^{1/2} \quad (1.47)$$

olarak bulunur.

u_t ve u_b nin durumuna göre KdV denkleminin çözüm şekli Şekil 1.1 de gösterilmiştir.



II. BÖLÜM

MODERN CEBİR UYGULAMALARI

Bu bölümde, nonlinear problemlere uygulanan modern cebir yapılarına kısaca değinilecektir.

Modern cebir teknikleriyle çalışılmaya, 1881'li yıllarda linear ve nonlinear adi diferensiyel denklemlerin integrasyon metotlarıyla ilgili düzenlemeleriyle Lie(1881) tarafından başlanmış ve sürekli dönüşüm grupları olarak bilinen cebirsel yapılar incelenmiştir (Eisehart 1961). Adi diferensiyel denklemlere uygulamalarının ilk örnekleri Ames'in(1968) çalışmalarında rastlanmaktadır. Dickson(1924) cebir teknikleri ve diferensiyel denklemler arasındaki süreklilik ilişkisini kullanarak grup teorisi yardımıyla bazı diferensiyel denklemlerin nasıl integre edilebileceğini göstermiştir.

Kısmi diferensiyel denklemlerdeki bağımsız değişkenlerin sayısını azaltmanın cebirsel metotlarla yapılabileceği Birchoff(1950) tarafından öne sürülmüştür. Cebirsel yapılar, herhangi bir linear kabul üzerine oluşmadığından bilim ve teknoloji konularında ortaya çıkan nonlinear problemleri çözmek dolayısıyla bir hayli zorlaşmaktadır.

Bunun yanında, halka (Mikusiuski 1959), yarı grup (Feller 1952, Yosida 1957), ve non-associative cebir gibi başka cebirsel yapılarla da bu tür problemlerin çözümünü incelemek mümkündür. Ancak, bu bölümde grup kavramı üzerinde durulacaktır.

2.1 Morgan'ın Benzerlik Metodu

Kısmi diferansiyel denklemlerin benzerlik çözümleri üzerine oluşturulan genel teorisi Ames'in(1965) Nonlinear Ordinary Differential Equation kitabında geniş bir şekilde incelenmiştir. Uygulamalı matematikte genellikle bir parametrelili sürekli

dönüşüm grupları kullanılmaktadır. İstenirse n-parametrelili sürekli dönüşüm gruplarının özel şekilleri de Ames'in (1965) yukarıda verilen kitabında bulunabilir. Şimdi, giriş olarak Morgan'ın(1952) temel tanım ve teoremleri verilecektir.

$$\begin{aligned}
 & G: \begin{cases} S: x^i * = f^i(x^1, \dots, x^m; a), & i = 1, 2, \dots, m, \quad m \geq 2 \\ y_j * = f_j(y_j; a) & j = 1, 2, \dots, n, \quad n \geq 1 \end{cases} \\
 E_k: & \left\{ \begin{aligned} & \left[\frac{\partial^{\ell} y_j}{\partial (x^1)^{\ell_1} \dots \partial (x^m)^{\ell_m}} \right] \\ & = [f_{(j, \ell_1, \dots, \ell_m)}^{(n)}] \left(\frac{\partial^{\ell} y_j}{\partial (x^1)^{\ell_1}} \frac{\partial^{\ell} y_j}{\partial (x^1)^{\ell_2} \partial (x^2)^{\ell_2}} \dots \frac{\partial^{\ell} y_j}{\partial (x^m)^{\ell_m}} \right. \\ & \quad \left. \frac{\partial^{\ell-1} y_j}{\partial (x^1)^{\ell_1-1}, \dots, y_j, x^1, \dots, x^m; a} \right) \end{aligned} \right. \\
 & \sum_i \ell_i = \ell \leq k
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

şeklinde olmak üzere bir parametrelili S , G ve E_k gruplarını gözönüne alalım, burada f fonksiyonları a parametresine göre süreklidirler. Özdeşlik elemanı a_0 olmak üzere $x^i = f^i(x^1, \dots, x^m; a_0)$ olarak ifade edilir. a parametresinin değeri a^* ile gösterilmek üzere, $y_j * = f_j(y_j; a)$ ise dönüşümün tersi $y_j = f_j(y_j *; a^*)$ olarak ifade edilir. $x^i \rightarrow x^i *$ dönüşümleri G nin S alt grubuna aittir. (Grup teorisi hakkındaki detaylar için Eisenhart(1961), Birkhoff ve MacLane(1953) incelenebilir.) Kısmi diferensiyel denklem sisteminde x^i ve y_j sırasıyla bağımsız ve bağımlı değişkenleri gösterebiliriz. $y_j = y_j\{x^1, \dots, x^m\}$ olmak üzere $\{y_j\}$ fonksiyonları x^i ye göre k .yüncü dereceye kadar diferensiyellenebilir olsunlar ve y_j nin x^i ye göre kısmi türevlerinin dönüşümleri G nin dönüşümlerine dahil edilsin. Yani,

$$y_j * (x^{1*}, \dots, x^{m*}) = f_j \left\{ y_j \left[f^1(x^{1*}, \dots, x^{m*}; a^*), \dots, f^m(x^{1*}, \dots, x^{m*}; a^*) \right]; a^* \right\}$$

ile tanımlanan $\{y_j^*\}$ fonksiyonlarının kümesini göz önüne alalım. E_k , $\{y_j\}$ için G nin k .yüncü genişletilmiş denem sürekli grubudur, burada $[f^{(k)}(j, \ell_1, \dots, \ell_n)]$ fonksiyonları

$$\left\{ \frac{\partial^{\ell} y_j}{\partial (x^1)^{\ell_1} \dots \partial (x^m)^{\ell_m}} \right\} = \frac{\partial^{\ell} y_j^*}{\partial (x^{1*})^{\ell_1} \dots \partial (x^{m*})^{\ell_m}}$$

olacak şekilde tanımlanır. Grup teorisine göre (Eisenhart 1961) G , $x^i, i=1, \dots, m$, $y_j, j=1, \dots, n$ olmak üzere $m+n$ tane bağımsız değişkenin fonksiyonu olarak incelendiğinde

$$\begin{aligned} & \eta_1(x^1, \dots, x^m), \dots, \eta_{m-1}(x^1, \dots, x^m); \\ & g_j(y_1, \dots, y_n; x^1, \dots, x^m), \quad j = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

ile gösterilen $m+n-1$ tane fonksiyonel bağımsız mutlak değişmez sahiptir. (Burada $\eta(x^1, \dots, x^m) = \eta(x^{1*}, \dots, x^{m*})$ ise η 'ye mutlak değişmez, $g(y_1, \dots, y_n; x^1, \dots, x^m) = g(y_1^*, \dots, y_n^*; x^{1*}, \dots, x^{m*})$ ise g 'ye mutlak değişmezdir denir.) g_j , jakobiyeni $\partial(g_1, \dots, g_n) / \partial(y_1, \dots, y_n) = 0$ ve $\partial(\eta_1, \dots, \eta_{m-1}) / \partial(x^1, \dots, x^m)$ jakobien matrisinin rankı $m-1$ 'e eşit olacak şekilde seçilmesi durumunda m bağımsız değişkenli k .yüncü mertebeden bir diferensiyel form genellikle $C^{(1)}$ sınıfında (veya daha büyük)

$$\Phi(x^1, \dots, x^m; y_1, \dots, y_n, \dots, \partial^k y_1 / \partial (x^1)^k, \dots, \partial^k y_n / \partial (x^m)^k) \quad (2.2)$$

tipinde bir fonksiyon olacaktır. ξ^1, \dots, ξ^p argümanları x^1, \dots, x^m değişkenlerine, x^1, \dots, x^m değişkenlerine bağlı y_1, \dots, y_n fonksiyonlarına ve k .yüncü dereceye kadar x^i ye göre y_j nin kısmi türevlerine bağlı olmak üzere

$$\Phi(\xi^{1*}, \dots, \xi^{p*}) = F(\xi^1, \dots, \xi^p; a) \Phi(\xi^1, \dots, \xi^p) \quad (2.3)$$

ise Φ fonksiyonuna E_k altında konformal değişmez denir, burada ξ^* in fonksiyonu olan Φ ile ξ nin fonksiyonu olan Φ aynı fonksiyondur ve F , ξ ve a parametresinin bir fonksiyonudur. F fonksiyonu sadece a nın fonksiyonu ise Φ ye E_k altında sabit konformal değişmez, $F=1$ durumunda, Φ ye E_k altında mutlak sabit konformal değişmez denir. Eğer ϕ_1, \dots, ϕ_N diferansiyel formlarının her biri E_k altında konformal değişmez ise

$$\phi_\gamma[x^1, \dots, x^m; y_1, \dots, y_n; \partial y_1 / \partial x^1, \dots, \partial^k y_n / \partial (x^m)^k] = 0 \quad \gamma = 1, \dots, N \leq n \quad (2.4)$$

kısmi diferensiyel denklem sistemine G altında değişmez denir, Kısmi diferensiyel denklem sistemlerinin "değişmez çözümleri" demek ile x^{i*} a bağlı y_j^*

fonksiyonlarıyla, x^l ye bağlı y_j fonksiyonlarının tam olarak aynı özelliğe sahip çözümleri anlaşılır.

Morgan(1952) tarafından elde edilen sonuçlar aşağıdaki teoremlerle ifade edilmiştir.

2.1.1 TEOREM: ϕ_γ diferensiyel formu E_k altında konformal değişmez ve $\{I_j\}$, $y_j = I_j(x^1, \dots, x^m)$, $y_j^* = I_j(x^{1*}, \dots, x^{m*})$ olacak şekilde fonksiyonların herhangi bir kümesi ise $\{y_1, \dots, y_n; x^1, \dots, x^m\}$ den, fonksiyonel olarak bağımsız $\{g_1, \dots, g_n; \eta_1, \dots, \eta_{m-1}; \hat{x}\}$ kümesine bir dönüşüm altında, mutlak değişmezlerin kümesini ve x^l nin kümesini içeren σ_γ ve A_γ diferensiyel formları

$$\begin{aligned} \phi_\gamma \left[x^1, \dots, x^m; I_1, \dots, I_n; \partial I_1 / \partial x^1, \dots, \partial^k I / \partial (x^m)^k \right] \\ = \left[A_\gamma \left(\eta_1, \dots, \eta_{m-1}, F_1, \dots, F_n; \partial F_1 / \partial \eta_1, \dots, \partial^k F_n / \partial (\eta_{m-1})^k \right) \right] \\ \cdot \left[\exp \sigma_\gamma \left(\hat{x}, \eta_1, \dots, \partial^k F_n / \partial (\eta_{m-1})^k \right) \right] \end{aligned} \quad (2.5)$$

olacak şekilde vardır. F_j fonksiyonları ise

$$\begin{aligned} F_j \left[\eta_1(x^1, \dots, x^m), \dots, \eta_{m-1}(x^1, \dots, x^m) \right] \\ = g_j \left[I_1(x^1, \dots, x^m), \dots, I_n(x^1, \dots, x^m); x^1, \dots, x^m \right] \end{aligned} \quad (2.6)$$

olarak tanımlanır.

2.1.2 TEOREM: ϕ_γ lerin her birinin (2.4) denkleminin konformal değişmezi olması için gerek ve yeter şart $\{I_j\}$, fonksiyonlar kümesinin (2.4) denkleminin verilen sistemin bir çözümü olmasıdır. Bu durumda (2.5) denklemindeki A_γ argümanları

$$A_\gamma = 0 \quad \gamma = 1, 2, \dots, N \leq n \quad (2.7)$$

şeklindedir.

2.1.3 TEOREM: $\{F_j\}$ fonksiyonlar kümesi (2.7) denkleminin verilen herhangi bir sistemin çözümü ise, (2.6) denkleminin ters dönüşümüyle verilen $\{I_j\}$ fonksiyonları kümesi (2.4) denkleminin bir çözümüdür. Elde edilen $\{I_j\}$ kümesi, grup parametresi a nın her bir değeri için değişmez bir çözümdür. Tersine, (2.4) denkleminin herhangi bir $\{I_j\}$ değişmez çözümü, G nin fonksiyonel olarak bağımsız değişmezlerinin kümesi için yapılan dönüşüm değişkenleri üzerinden (2.7) denkleminin bir $\{F_j\}$ çözümünü verir.

(2.4) ile verilen kısmi diferensiyel denklem sisteminin çözümü için, yukarıda verilen teoremlerin etkisi aşağıdaki gibi özetlenebilir : (2.4) denklemini , en az bir bağımsız değişkeni olan (2.7) denklemine indirgemek için , (2.3) denklemi (2.1) denklemi formundaki grup altında değişmez olmalıdır ve değişmez çözümler mevcut olmalıdır. Ancak bu durumda, (2.7) denkleminin çözümleri (2.4) denkleminin değişmez çözümlerini verir.

(2.7) denklemi (2.4) kısmi diferensiyel denklem sisteminin benzerlik gösterimlerini ifade etmektedir. $\{y_1, \dots, y_n; x^1, \dots, x^m\}$ den $\{g_1, \dots, g_n; \eta_1, \dots, \eta_{m-1}\}$ e olan dönüşüme "benzerlik dönüşümü " denir ve $\{g_1, \dots, g_n; \eta_1, \dots, \eta_{m-1}\}$ değişkenlerine "benzerlik değişkenleri" denir.

2.1.2 Teoremi ve 2.1.3 Teoremi yardımcı şartlara (başlangıç şartı ve sınır şartları) bakmaksızın sadece kısmi diferensiyel denklemleri içeren sistemleri incelemektedir. Yardımcı şartları olan sistemlere uygulamak için denklemler incelenir. Benzerlik değişkenlerinin kümesi bulunarak, yardımcı şartların da bu benzerlik değişkenleri cinsinden kararsızlık olmaksızın ifade edilip edilemeyeceği kontrol edilir. Denklemler ve yardımcı şartların beraber incelendiği bu değişkenlere "bileşik sistemler için benzerlik değişkenleri" adı verilir. Benzerlik değişkenleri cinsinden ifade edilen bileşik sisteme ise "bileşik gösterimli" benzerlik denir. Sık sık, sadece denklemler için bulunan benzerlik değişkenlerinin kümesi yardımcı şartlar için uygun olmaması durumunda, yapılan işlemler tekrar gözden geçirilmelidir.

Bu yaklaşımın ikinci bir zayıf yönü ise $m+n-1$ tane fonksiyonel bağımsız mutlak değişmezler kümesini bulabilmek için sistematik bir yöntem ihtiyacıdır. Basit gruplar kullanılmasından dolayı değişmezler deneme yanılma veya kontrol yoluyla tanımlanabilir. 2.1.2 ve 2.1.3 Teoremlerinin hipotezlerinin sağlanması durumunda bulunan gruplardan daha çok, teoremlerin uygulanması özellikle kabul edilen gruplara dayanmaktadır. Bu çalışmaların bazıları çok başarılıdır. Bundan sonraki kesimde, klasik metod kısaca açıklanarak bir örnek ve kaynaklar verilecektir.

2.2 Morgan Metodunun Uygulaması

Bu teörinin temelini, diferensiyel denklem sistemlerinin benzerlik çözümlerinin tanımı için bir (veya daha çok) parametrelî dönüştürme grupları altında bu denklemlerin değişmez çözümlerinin tanımına denk olması oluşturmaktadır. Teörünün elemanter uygulamalarında, grup kabul edilerek değişmezlerin genel şekli tanımlanır. Kabul edilen grup altında denklemlerin değişmemesini sağlayan değişmezlerin özel şekli basit cebirsel denklemlerin çözüm kümesi yardımıyla belirlenir. (Bazı keyfi parametreler verilebilir ve bunlar denklemin benzerlik değişkeni cinsinden yardımcı şartların ifade edilip edilemeyeceğine karar vermede kullanılır.)

Morgan teorisi ve benzerlik çözümleri geliştirilerek Morgan teorisinin n-parametrelî gruplara uygulanışı 1960'lı yıllardaki çalışmalar arasında yer almaktadır. Laminar sınır tabakası denklemleri (Manohar 1963), nonlinear difüzyon denklemi $r^{1-m} \{ r^{m-1} e^{\alpha} c_r \}_r = c_t$ (Ames 1965), laminar yarı-iki boyutlu sınır tabakası akışının power-law Ostwald-de Waele modeli (Na ve Hansen 1967), non-Newtonian akışkanların iki boyutlu laminar sıkıştırılmaz sınır tabakası denklemleri (Lee ve Ames 1966) bu teoriyle çalışılan konulara örnek olarak verilebilir. Yöntemin bazı zayıf yönleri olmasına rağmen Hansen(1964), uygulamalı matematikçiler ve mühendisler için standart bir araç olacağını öne sürmüştür.

Sınır tabakası denklemlerinin incelenmesi için bir parametrelî dönüştürmelerin yalnızca iki grubu yeterli olmaktadır. Na ve arkadaşları(1960), sonsuz dönüştürme gruplarının Lie teorisini kullanarak iki boyutlu laminar sınır tabakası denklemleri için sadece muhtemel iki grubun lineer ve spiral gruplar olduğunu gösterdi. (2.1) denkleminin gösteriminde, sırasıyla bu gruplar $f(x;a) = a^k x$ ve $f(x;a) = x + \ln a$ olarak vermiştir.

Şimdi, Morgan teorisinin elemanter uygulamasına bir örnek olarak, power-law akışkanlarında kuvvet altında konvektif ısı nakli için Lee ve Ames(1966) tarafından

yapılan incelemeden bir bölüm vereceğiz. u , v hız bileşenlerini, U_e serbest-akı hızını ve θ ısıyı gösteren boyutsuz nicelikler olsun. Prandtl sayısı N_{PR} ve power-law bileşeni n olmak üzere temel denklemler

$$u_x + v_y = 0 \quad (2.8)$$

$$uu_x + vv_y = U_e(dU_e/dx) + \left[|u_y|^{n-1} u_y \right]_y \quad (2.9)$$

$$u\theta_x + v\theta_y = (1/N_{PR})[\theta^{r-1}\theta_y]_y \quad (2.10)$$

şeklinde ifade edilir. Isı iletim katsayısı k , sıcaklığın fonksiyonu olarak alınmaktadır. Buna göre, Prandtl sayısı k' ile gösterilmek üzere $k = k'\theta^{r-1}$ dir. (2.8) denklemini özdeş olarak sağlaması amacıyla ψ akı fonksiyonu

$$u = \psi_y, \quad v = -\psi_x$$

bağıntılarıyla tanımlanır. (2.9) denklemini ve (2.10) denklemini ψ ye göre düzenlenirse

$$\psi_y\psi_{xy} - \psi_x\psi_{yy} = U_e(dU_e/dx) + \left[(\psi_{yy})^{n-1} \psi_{yy} \right]_y \quad (2.11)$$

ve

$$\psi_y\theta_x - \psi_x\theta_y = (1/N_{PR})[\theta^{r-1}\theta_y]_y \quad (2.12)$$

elde edilir ve serbest-akı hızı U_e özel olarak alınmaz, kabul edilen benzerlik çözümleri yardımıyla belirlenmeye çalışılır. (2.11) denklemini θ yı içermediğinden ilk olarak benzerlik ifadesi incelenir ve daha sonra (2.12) denklemini bulunur.

$a > 0$ reel bir parametre olmak üzere lineer grup

$$G: \left\{ S: \left\{ \begin{aligned} x^* &= a^{\alpha_1} x, & y^* &= a^{\alpha_2} y, & \psi^* &= a^{\alpha_3} \psi, & U_e^* &= a^{\alpha_4} U_e \end{aligned} \right\} \right\} \quad (2.13)$$

şeklinde seçilerek (2.11) denklemine uygulanırsa

$$\begin{aligned} & a^{-2\alpha_3+2\alpha_2+\alpha_1} \left\{ \frac{\partial \psi^*}{\partial y^*} \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^* \partial y^*} - \frac{\partial \psi^*}{\partial x^*} \frac{\partial^2 \psi^*}{(\partial y^*)^2} \right\} \\ & = a^{\alpha_1-2\alpha_3} U_e \frac{dU_e^*}{dx^*} + a^{-n\alpha_3+(2n+1)\alpha_2} \frac{\partial}{\partial y^*} \left\{ \left| \frac{\partial^2 \psi^*}{(\partial y^*)^2} \right|^{n-1} \right\} \end{aligned}$$

bulunur. G_1 genişlemesi altında bu denklemin konformal sabit olabilmesi için

$$\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3 = \alpha_1 - \alpha_4 = (2n+1)\alpha_2 - n\alpha_3 \quad (2.14)$$

cebirsel denklemlerinin sağlanması gereklidir.

Ames(1965) deki tamama göre G_1 in değişmezleri

$$\eta = yx^{-\alpha_2/\alpha_1}, \quad f(\eta) = \psi x^{-\alpha_3/\alpha_1}, \quad h_2(\eta) = U_e x^{-\alpha_4/\alpha_1} \quad (2.15)$$

dir. Böylece α_2/α_1 , α_3/α_1 ve α_4/α_1 oranlarının değeri bilinmelidir. (2.14)

denklem sistemi α_1 e bölündüğünde

$$1 + (1 - 2n)\alpha_2/\alpha_1 + (n - 2)\alpha_3/\alpha_1 = 0 \quad (2.16)$$

ve

$$\alpha_2/\alpha_1 - \alpha_3/\alpha_1 + \alpha_4/\alpha_1 = 0 \quad (2.17)$$

şeklinde üç bilinmeyenli iki denklem bulunur. Dolayısıyla çözüm tek değildir, sınır şartları veya diğer kısıtlamalar uygun çözümün seçilmesi için kullanılacaktır.

Örneğin, flat-plate akışında serbest-akı hızı U_e sabittir, bu durumda $dU_e/dx = 0$ olacağından (2.15) denkleminde $\alpha_4 = 0$ bulunur. (2.16) ve (2.17) denklemlerinden $\alpha_2/\alpha_1 = \alpha_3/\alpha_1 = 1/(n+1)$ olarak elde edilir. Bu durumda G_1 grubunun değişmezleri

$$\eta = yx^{-1/(n+1)}, \quad f(\eta) = \psi x^{-1/(n+1)}, \quad h_2 = U_e = \text{sabit}$$

şeklinde tek olarak tanımlanabilir. Acrivos ve arkadaşları(1960) başka bir yöntem kullanarak aynı değişmezleri elde etmişlerdir.

İki boyutlu jet problemleri gibi momentumun korunması gerektiği hallerde

$$\int_{-\infty}^{\infty} u^2 dy = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 dy = \text{sabit} \quad (2.18)$$

yazılabilir. (2.18) denkleminde G_1 uygulandığında $\alpha_2 - 2\alpha_3 = 0$ olacak şekilde mutlak değişmez bulunur. (2.16) denkleminde yerine konduğunda $\alpha_2/\alpha_1 = 2\alpha_3/\alpha_1 = 2/3n$ sonucu elde edilir ki bu durumda değişmezler (benzerlik değişkenleri)

$$\eta = yx^{-2/3n}, \quad f = \psi x^{-1/3n}, \quad h_2 = U_e x^{1/3n} \quad (2.19)$$

şeklinde elde edilebilir (Guffinger ve Shinner 1964). $U_e = U_e(x)$ olduğunda, C sabit olmak üzere $U_e = Cx^{-1/3n}$ ise h_2 sadece benzerlik değişkeni η nin fonksiyonu olacaktır.

Daha sonra, delta (wedge; üçgen şeklinde ilerleyen) akışın (Falkner-Skan) genel formu olarak bilinen $U_e = Cx^m$ incelenirse h_2 nin sadece η ye bağlı olması $\alpha_4/\alpha_1 = m$ olmasına bağlıdır. Bu bağıntıyı kullanarak (2.16) ve (2.17) denklemlerinin çözümü

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \left[(n-2)m + 1 \right] / (n+1), \quad \frac{\alpha_3}{\alpha_1} = \left[(2n-1)m + 1 \right] / (n+1) \quad (2.20)$$

olarak elde edilebilir. Bu durumda benzerlik değişkenlerini $\eta = yx^{-\alpha_2/\alpha_1}$, $f = \psi x^{-\alpha_3/\alpha_1}$ ile vermek mümkündür. Böylece (2.11) denkleminin adi diferensiyel denkleme (benzerlik ifadesi) dönüşmesi mümkün olmaktadır. $m=1/3$ olması durumunda $\alpha_2/\alpha_1 = 1/3$, $\alpha_3/\alpha_1 = 2/3$ ve değişmezler n den bağımsız olarak ortaya çıkar.

Şimdi, (2.12) enerji denklemini inceleyelim. G_1 genişlemesi altında bu denklemlerin konformal sabit olması için $\theta^* = a^{2s}\theta$ alındığında

$$\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_5 = 2\alpha_2 - r\alpha_5 \quad (2.21)$$

cebirsel denklemini sağlaması gerekir. $\alpha_4/\alpha_1 = m$ ile belirlenen genel delta akışı kullanarak (2.16), (2.17) ve (2.21) denklemleri

$$\alpha_5/\alpha_1 = [(n-1)(1-3m)]/(n+1)(r-1) \quad (2.22)$$

olmak üzere (2.20) ile verilen çözümü sağlar. Burada görüldüğü gibi, $r \neq 1$ ise (sabit ısı iletişim katsayısı) m sıfır dahil herhangi bir reel sayı olabilir. Böylece θ için bir tek sınır şartını sağlayan ana akış hızının herhangi bir çeşidi tanımlanır. θ değişmezi $g = \theta x^{-\alpha_5/\alpha_1}$ olduğundan θ üzerindeki sınır şartları, $y=0$ olduğunda x^{α_5/α_1} gibi bir üstel fonksiyon olmalıdır. $r=1$ ise, α_5/α_1 in keyfi olduğu durumda $m \rightarrow 1/3$ hariç α_5/α_1 için çözüm bulunamaz, fakat ana akış $U_e = x^{1/3}$ e kısıtlanır.

Ayrıntılı durumlar ve fiziksel tartışma çeşitli kaynaklarda bulunabilir.

Orjinal problem olarak, (2.11) ve (2.12) denklemlerinin benzerlik ifadesi sınır şartlarıyla beraber η nün fonksiyonu olarak ifade edilen f ve g ye bağlı adi diferensiyel denklemleri içerir. Daha önce de belirtildiği gibi, orjinal sistemin sınır şartları analiz edilmez. Bu noktada, kararsızlık olmadan benzerlik değişkenlerinin yazılıp yazılamayacağı araştırılmalıdır. Örnek olarak, $x \geq 0$, $y \geq 0$ düzleminde (2.11) ve (2.12) denklemleriyle tanımlanan kuvvet altında konvektif akışını

$$\begin{aligned} u(x > 0, y = 0) = 0, \quad v(x > 0, y = 0) = 0, \quad \theta(x > 0, y = 0) = x^l \quad (l > 0) \\ u(x, y \rightarrow \infty) = U_e = x^{1/3}, \quad u(x = 0, y > 0) = 0 \\ \theta(x = 0, y > 0) = 0, \quad \theta(x > 0, y \rightarrow \infty) = 0 \end{aligned} \quad (2.23)$$

sınır şartlarıyla inceleyelim. Bu fiziksel şartlar, akı fonksiyonu ve ısı fonksiyonu notasyonunda

$$\begin{aligned} \psi_y(x > 0, y = 0) = 0, \quad \psi_x(x > 0, y = 0) = 0 \quad \theta(x > 0, y = 0) = x^l \\ \psi_y(x > 0, y \rightarrow \infty) = x^{l/3}, \quad \psi_y(x = 0, y > 0) = 0 \\ \theta(x = 0, y > 0) = 0, \quad \theta(x > 0, y \rightarrow \infty) = 0 \end{aligned} \quad (2.24)$$

şartlarına dönüşür.

(2.20) ve (2.22) denklemlerinden, $r = 1$ olmak üzere benzerlik değişkenleri

$$\eta = yx^{-1/3}, \quad f = \psi x^{-2/3}, \quad g = \theta x^{-l} \quad (2.25)$$

olarak elde edilir. Burada l keyfi bir reel sayıdır. Bu benzerlik değişkenleri kullanılarak ($x > 0, y = 0$) için $\eta = 0$ ve ($x = 0, y > 0$), ($x > 0, y \rightarrow \infty$) durumları için $\eta \rightarrow \infty$ olduğu görülür. Buna göre, (2.25) denklemlerinden $\psi_y = x^{1/3} \frac{df}{d\eta}$ olduğundan $\psi_y(x > 0, y = 0) = 0$ için $f'(0) = 0$ olur. Şimdi, $\psi_x = \frac{2}{3} x^{-1/3} f(\eta) - \frac{1}{3} \eta x^{-1} \frac{df}{d\eta}$ olduğundan $\psi_x(x > 0, y = 0) = 0$ için $f(0) = 0$ olmasını gerektirir. $\theta(x > 0, y = 0) = x^l$ şartında $l = l$ alınırsa, $g(0) = \theta(x > 0, y = 0) x^{-l} = x^l \cdot x^{-l} = 1$ elde edilir. $\eta \rightarrow \infty$ olduğunda $f' = 1$ ise dördüncü ve beşinci şartlar sağlanır. $\theta(x, y) = g(\eta) x^l$ olduğundan $\eta \rightarrow \infty$ olduğunda $g = 0$ ise son iki şart sağlanır.

$r = 1$ olmak üzere tam benzerlik ifadesi (2.11) ve (2.12) denklemlerinin (2.25) ile verilen benzerlik değişkenlerini kullanarak

$$\begin{aligned} (f')^2 - 2f f'' = 1 + 3(d/d\eta)[(f'')^n] \\ g'' + \frac{2}{3} N_{PR} f g' = 0 \end{aligned} \quad (2.26)$$

$$\eta = 0 \quad \text{ise} \quad f = 0, \quad f' = 0, \quad g = 1$$

$$\eta \rightarrow \infty \quad \text{ise} \quad f' = 1, \quad g = 0$$

şeklinde diferensiyel denkleme dönüşür.

2.3 Sonlu Dönüşüm Gruplarının Tanımı

Birkhoff-Morgan-Michal teorisinin oluşturulduğu dönemde, kısmi diferensiyel denklem sistemlerindeki bağımsız değişkenlerin sayısını azaltmak amacıyla bir çok çalışma yapıldı. Başarılı çalışmalar arasında Strumpf 'ın(1964) kararlı, sıkıştırılmaz iki boyutlu vizkoziteli akışkanlar için Navier-Stokes denklemlerinden

$$\psi_y (\nabla^2 \psi)_x - \psi_x (\nabla^2 \psi)_y = \nu \nabla^4 \psi \quad (2.27)$$

denkleminin ilgili çalışması verilebilir. ψ akı fonksiyonu için çözüm sınıfları n reel bir sayı olmak üzere $\psi = x^n \psi_1(z)$, $z = \eta(x, y)$ şeklindedir. Dönüşümlerin kümesi, orijinal denklemin ψ_1 bağımlı ve η bağımsız değişkenlerine göre adi diferensiyel denkleme indirgenmesinden yararlanılarak tanımlanır. Bu yöntem Ames(1965) de tartışılan "değişkenlerin ayrışımı" yöntemi ile benzerlik gösterir.

Krzywoblocki ve Roth(1964,1966) verilen denklem sistemleri için özel grupları bulmaya yarayan bir metot geliştirmek amacıyla Morgan-Michal metodunu araştırdılar, fakat bu araştırmada yardımcı şartlar incelenmemiştir.

Şimdi,

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad (2.28)$$

Laplace denklemini kullanarak metodu açıklamaya çalışalım. (2.28) gibi özel olarak alınan denklemlerin parametresi a olan bir parametrelili G grubu altında konformal değişmez olması için G grubunun nasıl bulunacağını görelim. G nin genel yapısı

$$G: \begin{cases} \bar{x} = f_1(x, y, a), & \bar{y} = f_2(x, y, a) \\ \bar{u} = f_4(x, y, a)u \end{cases} \quad (2.29)$$

şeklinde olsun. Bu dönüşüm altında

$$\begin{aligned} (\partial^2 \bar{u} / \partial \bar{x}^2) + (\partial^2 \bar{u} / \partial \bar{y}^2) &= P(u, f_4, u_x, u_y, f_{4x}, f_{4y}, \dots) (\partial^2 u / \partial x^2) \\ &+ Q(u, f_4, u_x, \dots) (\partial^2 u / \partial y^2) + \sum_{i=1}^{12} R_i(u, f_4, \dots) \end{aligned} \quad (2.30)$$

bulunur, burada R_i ($i=1, \dots, 12$), P ve Q daha sonra tanımlanır. (2.30) denkleminin sağ tarafının konformal değişmez olması için

$$S(u, x, u_x, u_y, u_{xx}, u_{yy}; a) [u_{xx} + u_{yy}] \quad (2.31)$$

denkleminde eşit olmalıdır. Bu ise $P=Q$ ve $\sum_{i=1}^{12} R_i = 0$ olmasıyla mümkündür.

$$R_1 = R_2 = \dots = 0 \quad (2.32)$$

olarak alınırsa $\sum_{i=1}^{12} R_i = 0$ elde edilir, fakat daha değişik şekillerde de seçilebilir. Temel

denklemler

$$R_1 = u \frac{\partial^2 f_4}{\partial x^2} \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \bar{x}} \right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \bar{y}} \right)^2 \right] = 0 \quad (2.33a)$$

$$R_2 = u \frac{\partial^2 f_4}{\partial y^2} \left[\left(\frac{\partial y}{\partial \bar{x}} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \bar{y}} \right)^2 \right] = 0 \quad (2.33b)$$

$$R_3 = u \frac{\partial^2 f_4}{\partial x \partial y} \left[\frac{\partial x}{\partial \bar{x}} \frac{\partial y}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial x}{\partial \bar{y}} \frac{\partial y}{\partial \bar{y}} \right] = 0 \quad (2.33c)$$

$$R_4 = u \frac{\partial f_4}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 x}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial \bar{y}^2} \right] = 0 \quad (2.33d)$$

$$R_5 = u \frac{\partial f_4}{\partial y} \left[\frac{\partial^2 y}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial \bar{y}^2} \right] = 0 \quad (2.33e)$$

$$J: R_6 = f_4 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \left[\frac{\partial x}{\partial \bar{x}} \frac{\partial y}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial x}{\partial \bar{y}} \frac{\partial y}{\partial \bar{y}} \right] = 0 \quad (2.33f)$$

$$R_7 = f_4 \frac{\partial u}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 x}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial \bar{y}^2} \right] = 0 \quad (2.33g)$$

$$R_8 = f_4 \frac{\partial u}{\partial y} \left[\frac{\partial^2 y}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial \bar{y}^2} \right] = 0 \quad (2.33h)$$

$$R_9 = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial f_4}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \bar{x}} \right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \bar{y}} \right)^2 \right] = 0 \quad (2.33i)$$

$$R_{10} = \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial f_4}{\partial y} \left[\left(\frac{\partial y}{\partial \bar{x}} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \bar{y}} \right)^2 \right] = 0 \quad (2.33j)$$

$$R_{11} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial f_4}{\partial y} \left[\frac{\partial x}{\partial \bar{x}} \frac{\partial y}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial x}{\partial \bar{y}} \frac{\partial y}{\partial \bar{y}} \right] = 0 \quad (2.33k)$$

$$R_{12} = \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial f_4}{\partial x} \left[\frac{\partial y}{\partial \bar{x}} \frac{\partial x}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial y}{\partial \bar{y}} \frac{\partial x}{\partial \bar{y}} \right] = 0 \quad (2.33l)$$

$$P=Q, \quad \left(\frac{\partial x}{\partial \bar{x}} \right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \bar{y}} \right)^2 = \left(\frac{\partial y}{\partial \bar{x}} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \bar{y}} \right)^2 \neq 0 \quad (2.33m)$$

olarak verilebilir. (2.31) denklemindeki S fonksiyonu grup özelliklerinden elde edilen şartları sağlamalıdır, aksi takdirde keyfi olur.

$u=0$ ise (2.33a-1) denklemleri sağlar fakat, sıfırdan farklı çözümler arandığından bu durum gözönüne alınmayacaktır. Grubun tanımına göre her bir elemanın tersinin olması gerektiğinden G ile ilgili jakobiyen sıfır olamaz. Bu durumda

$$\frac{\partial(\bar{x}, \bar{y}, \bar{u})}{\partial(x, y, u)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} & \frac{\partial \bar{x}}{\partial y} & \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} \\ \frac{\partial \bar{y}}{\partial x} & \frac{\partial \bar{y}}{\partial y} & \frac{\partial \bar{y}}{\partial u} \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} & \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} & \frac{\partial \bar{u}}{\partial u} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (2.34)$$

olmalıdır. (2.29) denkleminde $f_4=0$ ise $\partial \bar{u} / \partial x = \partial \bar{u} / \partial y = \partial \bar{u} / \partial u = 0$ olacağından jakobiyen sıfıra eşit olur. Bu durumda, $f_4 \neq 0$ olması gerekir.

Benzer olarak,

$$\bar{G}: \bar{x} = f_1(x, y, a), \quad \bar{y} = f_2(x, y, a) \quad (2.35)$$

alt grubunun her bir elemanının da tersi olması gerektiğinden

$$\frac{\partial(\bar{x}, \bar{y})}{\partial(x, y)} = \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} \frac{\partial \bar{y}}{\partial y} - \frac{\partial \bar{x}}{\partial y} \frac{\partial \bar{y}}{\partial x}$$

veya

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\bar{x}, \bar{y})} = \frac{\partial x}{\partial \bar{x}} \frac{\partial y}{\partial \bar{y}} - \frac{\partial x}{\partial \bar{y}} \frac{\partial y}{\partial \bar{x}}$$

denklemini sıfırdan farklı olmalıdır.

Ayrıca, u ve türevlerine kısıtlamalar getirilmek istenmez. Dolayısıyla, (2.33a-1) denklemlerinde u veya türevlerinin sıfır olmaması sağlanacaktır. Örneğin, (2.33i) denkleminde $\partial u / \partial x \neq 0$ ve $(\partial x / \partial \bar{x})^2 + (\partial x / \partial \bar{y})^2 \neq 0$ ise $\partial f_4 / \partial x = 0$ olmalıdır.

Bu şekilde, J denklemlerini sağlayan J' denklemleri oluşturulur. Bunlar

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial \bar{y}^2} = 0 \quad (2.36a)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial \bar{y}^2} = 0 \quad (2.36b)$$

$$J': \quad \frac{\partial x}{\partial \bar{x}} \frac{\partial y}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial x}{\partial \bar{y}} \frac{\partial y}{\partial \bar{y}} = 0 \quad (2.36c)$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial x} = 0 \quad (2.36d)$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial y} = 0 \quad (2.36e)$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \bar{x}}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \bar{y}}\right)^2 = \left(\frac{\partial y}{\partial \bar{y}}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \bar{x}}\right)^2 = 0 \quad (2.36f)$$

(2.36) denklemlerinin şartları tam olarak özel bir grup veya grup sınıfları değildir. Bu ise (2.36) denklemlerini sağlayan grupların kolayca bulunması demektir. Bu gruplar arasında, a reel bir parametre olmak üzere değişmezleriyle beraber aşağıdaki gruplar verilebilir :

$$A_1: \begin{aligned} \bar{x} &= a^\alpha x \\ \bar{y} &= a^\beta y, \quad \alpha, \beta, \gamma \text{ sabit} \\ \bar{u} &= a^\gamma u \end{aligned}$$

$$\text{Değişmezler: } \eta = yx^{-\beta/\alpha}, \quad f(\eta) = ux^{-\gamma/\alpha}$$

$$B_1: \begin{aligned} \bar{x} &= x + \gamma_1 a \\ \bar{y} &= y + \gamma_2 a, \quad \gamma_1, \gamma_2 \text{ sabit} \\ \bar{u} &= (\exp a)u \end{aligned}$$

$$\text{Değişmezler: } \eta = \gamma_2 x - \gamma_1 y, \quad F(\eta) = \gamma_1 \ln u - x, \text{ veya } \gamma_2 \ln u - y$$

$$C_1: \begin{aligned} \bar{x} &= x \cos a - y \sin a \\ \bar{y} &= x \sin a + y \cos a \\ \bar{u} &= u \end{aligned}$$

$$\text{Değişmezler: } \eta = x^2 + y^2, \quad F(\eta) = u$$

Vizkoziteli gerçek bir akışkanın ($p=\rho RT$) kararsız üç boyutlu hareketi, B_1 grubunun üç boyutlu genelleştirilmesi kullanılarak Krzywoblocki ve Roth(1966) tarafından incelenmiştir.

(2.29) denklemleriyle verilen sonlu dönüşümün bir çok modifikasyonu incelenebilir.

$$G: \begin{cases} \bar{x} = f_1(x, y, a) \\ \bar{y} = f_2(x, y, a) \\ \bar{u} = f_3(x, y, a)u + f_4(a) \end{cases} \quad (2.37)$$

bu sonlu dönüşümlerden biridir. Özel grupların tanımı yöntemini incelemek amacıyla

$$u_y + uu_x = u_{xx} \quad (2.38)$$

ile verilen Burgers denklemi kullanılır. (2.38) denkleminin (2.37) denklemi altında konformal değişmez olması için

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} = 0 \quad (2.39)$$

olmalıdır. $\partial \bar{u} / \partial \bar{x}$, $\partial^2 \bar{u} / \partial \bar{x}^2$, $\partial \bar{u} / \partial \bar{y}$ değerleri hesaplanarak (2.39) denkleminde yerine konur. u ve türevlerine kısıtlamalar getirilmek istenmediğinden, u ve türevleri

$$\frac{\partial u}{\partial y} \left\{ f_4 \frac{\partial y}{\partial \bar{y}} + f_4 f_3 \frac{\partial y}{\partial \bar{x}} - f_4 \frac{\partial^2 y}{\partial \bar{x}^2} - 2 \frac{\partial x}{\partial \bar{x}} \frac{\partial y}{\partial \bar{x}} \frac{\partial f_4}{\partial x} - 2 \left(\frac{\partial y}{\partial \bar{x}} \right)^2 \frac{\partial f_4}{\partial y} \right\} \quad (2.40a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \left\{ f_4 \frac{\partial x}{\partial \bar{y}} + f_4 f_3 \frac{\partial x}{\partial \bar{x}} - f_4 \frac{\partial^2 x}{\partial \bar{x}^2} - 2 \left(\frac{\partial x}{\partial \bar{x}} \right)^2 \frac{\partial f_4}{\partial x} - 2 \frac{\partial x}{\partial \bar{x}} \frac{\partial y}{\partial \bar{x}} \frac{\partial f_4}{\partial y} \right\} \quad (2.40b)$$

$$u \left\{ \frac{\partial f_4}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial f_4}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \bar{y}} + f_3 \left(\frac{\partial f_4}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial f_4}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \bar{x}} \right) - \frac{\partial^2 x}{\partial \bar{x}} \frac{\partial f_4}{\partial x} \right. \quad (2.40c)$$

$$\left. - \frac{\partial^2 y}{\partial \bar{x}^2} \frac{\partial f_4}{\partial y} - \left(\frac{\partial x}{\partial \bar{x}} \right)^2 \frac{\partial^2 f_4}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial x}{\partial \bar{x}} \frac{\partial y}{\partial \bar{x}} \frac{\partial^2 f_4}{\partial x \partial y} - \left(\frac{\partial y}{\partial \bar{x}} \right)^2 \frac{\partial^2 f_4}{\partial y^2} \right\}$$

$$u^2 \left\{ f_4 \frac{\partial f_4}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial f_4}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \bar{x}} \right\} \quad (2.40d)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \left\{ -f_4 \left(\frac{\partial y}{\partial \bar{x}} \right)^2 \right\} \quad (2.40e)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial y} \left\{ f_4^2 \frac{\partial y}{\partial \bar{x}} \right\} \quad (2.40f)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \left\{ -2 f_4 \frac{\partial y}{\partial \bar{x}} \frac{\partial x}{\partial \bar{x}} \right\} \quad (2.40g)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} \left\{ f_4^2 \frac{\partial x}{\partial \bar{x}} \right\} \quad (2.40h)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \left\{ -f_4 \left(\frac{\partial x}{\partial \bar{x}} \right)^2 \right\} \quad (2.40i)$$

olarak verilebilir. u_x , u , u^2 , u_y , uu_y , ve u_{xy} (2.38) ile verilen Burger denkleminin

terimleri arasında olmadığından bu terimlerin katsayısı sifira eşitlenmelidir.

Dolayısıyla, (2.40b-g) denklemleri sifira eşitlenir. $u_{xx} = u_y + uu_x$ olduğundan (2.40i)

denklemini $(u_y + uu_x) \left\{ -f_4 \left(\frac{\partial x}{\partial \bar{x}} \right)^2 \right\}$ olarak yazılabilir. Bu sebeple u_{xx} in katsayısı,

u_y ve uu_x in katsayıları toplanarak elde edilir ve bu katsayı sifira eşitlenir. Buna göre,

tanımlanan sonlu dönüşümle aşağıdaki denklemler bulunur :

$$\frac{\partial y}{\partial \bar{x}} = 0 \quad (2.41)$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial x} = 0 \quad (2.42)$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial y} = 0 \quad (2.43)$$

$$\frac{\partial x}{\partial y} - \frac{\partial^2 x}{\partial \bar{x}^2} + f_3 \frac{\partial x}{\partial \bar{x}} = 0 \quad (2.44)$$

$$f_4 \frac{\partial x}{\partial \bar{x}} - \left(\frac{\partial x}{\partial \bar{x}} \right)^2 = 0 \quad (2.45)$$

$$-\left(\frac{\partial x}{\partial \bar{x}} \right)^2 + \frac{\partial y}{\partial \bar{y}} = 0 \quad (2.46)$$

(2.41)-(2.46) denklemleri $f(a) = [f_4(a)]^{-1}$ ve $H(a) = f_3(a)[f(a)]^2$ olmak üzere

$$\bar{y} = [f(a)]^2 y \quad (2.47)$$

$$\bar{x} = f(a)x + H(a)y \quad (2.48)$$

denklemleriyle sağlanır. Bu tanımlar ve (2.37) denklemleri yardımıyla

$$\bar{u} = [f(a)]^{-1} u + H(a)[f(a)]^{-2} \quad (2.49)$$

bulunur.

(2.47)-(2.49) denklemleriyle verilen dönüşüm kümesinin grup yapısını sağlaması gerekir. Yani, sistem grup işlemine göre kapalı, tek özdeşliğe ve tek ters elemana sahip olmalıdır ve ayrıca birleşme özelliğini sağlamalıdır. Bu özellikler $f(a)$ ve $H(a)$ parametre fonksiyonları üzerine kısıtlamalar getirecektir.

$$\bar{x}_i = f(a_i)x + H(a_i)y$$

$$\bar{y}_i = [f(a_i)]^2 y$$

$$\bar{u}_i = [f(a_i)]^{-1} u + H(a_i)[f(a_i)]^{-2}$$

ile dönüşümün elemanlarını tanımlayalım. $\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{u}_1$ ve $\bar{x}_2, \bar{y}_2, \bar{u}_2$ dönüşümler ise, $\bar{x}_2(\bar{x}_1, \bar{y}_1, a_2), \bar{y}_2(\bar{x}_1, \bar{y}_1, a_2), \bar{u}_2(\bar{u}_1, a_2)$ de dönüşüm olmalıdır. Böylece,

$$\bar{x}_2(\bar{x}_1, \bar{y}_1, a_2) = \bar{x}_3(x, y, a_3) \quad (2.50)$$

$$\bar{y}_2(\bar{x}_1, \bar{y}_1, a_2) = \bar{y}_3(x, y, a_3) \quad (2.51)$$

$$\bar{u}_2(\bar{u}_1, a_2) = \bar{u}_3(u, a_3) \quad (2.52)$$

yazılabilir. (2.47)-(2.49) denklemlerini kullanarak bunları gösterelim.

$$\begin{aligned}
\bar{x}_3 &= f(a_2)\bar{x}_1 + H(a_2)\bar{y}_1 \\
&= f(a_2)[f(a_1)x + H(a_1)y] + H(a_2)[f(a_1)]^2 y \\
&= f(a_3)x + H(a_3)y \\
\bar{y}_3 &= [f(a_2)]^2 \bar{y}_1 \\
&= [f(a_2)]^2 [f(a_1)]^2 y \\
&= [f(a_3)]^2 y \\
\bar{u}_3 &= [f(a_2)]^{-1} \bar{u}_1 + H(a_2)[f(a_2)]^{-2} \\
&= [f(a_2)]^{-1} \{ [f(a_1)]^{-1} u + H(a_1)[f(a_1)]^{-2} \} + H(a_2)[f(a_2)]^{-2}
\end{aligned}$$

Bu durumda

$$f(a_3) = f(a_2)f(a_1) \quad (2.53)$$

$$H(a_3) = f(a_2)H(a_1) + H(a_2)[f(a_1)]^2 \quad (2.54)$$

ise sistem kapalılık özelliğini sağlar. (2.53) denkleminde a_1 ve a_2 kendi aralarında yer değiştirdiğinde (2.53) denklemi değişmez. Dolayısıyla, kapalılık özelliğinin sağlanması için (2.54) denklemi de aynı değişim altında değişmez olmalıdır. O halde,

$$f(a_2)H(a_1) + H(a_2)[f(a_1)]^2 = f(a_1)H(a_2) + H(a_1)[f(a_2)]^2$$

olmalıdır. Bu denklem düzenlenirse,

$$H(a_1)f(a_2)[1-f(a_2)] = H(a_2)f(a_1)[1-f(a_1)]$$

elde edilir ve sonuç olarak

$$H(a) = f(a)[1-f(a)] \quad (2.55)$$

olmalıdır. Bu inceleme sonucunda, sonlu dönüşüm f keyfi bir fonksiyon (f fonksiyonu sınır ve başlangıç şartları yardımıyla bulunabilir) olmak üzere

$$\begin{aligned}
\bar{x} &= f(a)x + f(a)[1-f(a)]y \\
\bar{y} &= [f(a)]^2 y \\
\bar{u} &= [f(a)]^{-1} u + [f(a)]^{-1}[1-f(a)]
\end{aligned} \quad (2.56)$$

olarak bulunur. Böylece, kapalılık özelliğini sağlayan sistem oluşturulduğu gibi diğer özellikleri sağlayan sistem de oluşturulabilir. Özdeşlik dönüşümü için $f(a_0)=1$ olacak

şekilde yalnız ve yalnız bir α_0 gereklidir. Sistem lineer olduğundan her bir elemanın bir tek tersinin olduğu birleşme özelliğinin gösterildiği gibi yapılı. Sınır şartlarının dahil edilmesi ve mutlak değişmezlerin gelişimi son iki kesimde incelenecektir.

Son olarak, Hellums ve Churchill'in(1961,1964) çalışmasına değinilebilir. Onların analiz metotları aşağıdaki adımları içermektedir.

- a) Değişkenler, parametreler, sınır şartları ve başlangıç şartı yeni değişkenler tanımlanarak boyutsuz hale getirilir. Her bir keyfi fonksiyon da yeni değişkenler cinsinden bir fonksiyon olarak tanımlanarak boyutsuz hale getirilir.
- b) Her bir boyutsuz parametre bir sabite eşitlenerek referans nicelikleri cinsinden cebirsel denklem sistemi elde edilir.
- c) Orjinal problemin parametreleri cinsinden referans niceliklerini bulmak için (b) deki denklem sistemi çözülür. Sistem fazla tanımlıysa, referans niceliklerinin seçimiyle bütün parametrelerin elenmesi mümkün değildir, bir parametre her bir cebirsel denklem için problemde görülecektir.
- d) Sistem az tanımlıysa, yani bağımsız cebirsel denklemlerin hepsi referans niceliklerinin hepsini özelleştirmeksizin sağlayabilirse, bu serbestlik derecesi bağımsız değişkenlerin sayısını indirmek için kullanılabilir. Kalan keyfi referans niceliklerini elemek için bu şekilde boyutsuz değişkenler birleştirilir.
- e) Keyfi fonksiyonlar içeren problemlerde bağımsız değişkenlerin sayısını azaltacak fonksiyon sınıflarını tanımlamak önemlidir. Bu, bir veya daha fazla referans niceliğini keyfi bırakan fonksiyonları bularak çözülebilir.

2.4. Yardımcı Şartlar

(2.1) denklemleriyle verilen olabilecek bütün dönüşüm gruplarından, diferensiyel denklem sistemlerini konformal olarak dönüştürmeyen gruplar daha sonraki incelemelere bırakıldı. G grubunun f fonksiyonlarına getirdiği kısıtlamalar

grup özelliklerini içeren 2.1.1 Teorem'inin şartlarını sağlayacak şekilde elde edilir. Bütün kısıtlamaları sağlayan çok farklı grupların olması mümkün ve bu grupların her biri sadece diferensiyel denklemleri içeren problemlerin benzerlik ifadesini belirtebilir. Genel olarak bunların hepsi yardımcı şartlarla beraber problemin benzerlik ifadesini oluşturamaz.

Sadece denklemlerin benzerlik ifadesinin çözümü grup altında değişmez olduğundan, böyle herhangi bir çözüm yardımcı şartlar grupla dönüştürüldüğünde değişmez çözümü sağlıyorsa tam problem (yardımcı şartlarla denklemler) için değişmez bir çözüm verebilir. Böylece, f fonksiyonu üzerindeki kısıtlamalar değişmez çözüme uygun yardımcı şartlara göre tanımlanabilir.

Özet : 2.1.1 Teorem'ini sağlayan f nin üzerinde oluşturulan bütün şartlar bulunursa, denklemler için benzerlik ifadesi tahmin edilebilir. Bu, değişmez çözümlere uygun yardımcı şartlara göre f nin üzerine konan şartları sağlayan problem için benzerlik ifadesini verebilir. Yardımcı şartlar ve benzerlik ifadesinin sonuçları Moran ve Gaggioli(1968,1969) da bulunabilir.

$$2.4.1 \text{ TEOREM: } \sum_r : \{x^t = b_r(\sigma^1, \dots, \sigma^t), t \leq m, \sigma^t \in [S_r^q, S_q^r] \text{ için} \} \quad (2.57)$$

üzerindeki yardımcı şartlar

$$\beta_r \{ \partial^s y_1 / \partial (x^1)^s, \dots, \partial y_n / \partial x^m, y_1, \dots, y_n, x^1, \dots, x^m \} = \beta_r(\sigma^1, \dots, \sigma^t)$$

olsun. Her a için $y^* = I_j(x^{1*}, \dots, x^{m*})$ değişmez çözüm ise

$$x^t = f^t [b_r^1(\sigma^1, \dots, \sigma^t), \dots, b_r^m(\sigma^1, \dots, \sigma^t); a]$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} & \beta_r^a \{ \partial^s y_1 / \partial (x^1)^s, \dots, y_n, x^1, \dots, x^m; a^* \} \\ & \equiv \beta_r \left\{ \left[f_{(1,s,0,\dots)}^{(s)} \right] \right. \\ & \quad \times \left. \left(\partial^s y_1 / \partial (x^1)^s, \dots, y_n, x^1, \dots, x^m; a^* \right), \dots, f_n(y_n; a^*), \dots, f^m(x^1, \dots, x^m; a^*) \right\} \\ & = \beta_r(\sigma^1, \dots, \sigma^t) \end{aligned}$$

(2.58)

olarak elde edilir. (Daha değişik formlar ve bu sonucun ispatı Moran ve Gaggioli(1968) da bulunabilir.) Buna denk olarak,

$$y_j^*(z^1, \dots, z^m) = y_j(z^1, \dots, z^m) = I_j(z^1, \dots, z^m)$$

olmak üzere

$$z^i = f^i[b_r^1, \dots, b_r^m; a]$$

için

$$B_r \left\{ \left[f_{(1,x,0,0,\dots)}^{(s)} \right] \left(\frac{\partial I_1}{\partial (z^1)^s}, \dots, I_n, z^1, \dots, z^m; a^* \right), \dots, f_n(I_n; a^*), \dots, f_n(z^1, \dots, z^m; a^*) \right\} \quad (2.59)$$

$$= B_r(\sigma^1, \dots, \sigma^l)$$

verilebilir.

Böylece, (2.57) denkleminin \sum_r üzerinde (2.58) denklemiyle $\beta_r(\dots) = B_r(\dots)$

olarak verilen tek yardımcı şartı

$$\left\{ \sum_r^a [x^i = f^i(b_r^1(\sigma^1, \dots, \sigma^l), \dots, b_r^m(\sigma^1, \dots, \sigma^l); a)] \right\}$$

ailesi üzerinde $\{\beta_r^a(\dots) = B_r(\dots)\}$ yardımcı şartlarının ailesini verir. \sum_r üzerindeki her bir $\beta_r(\dots) = B_r(\dots)$ yardımcı şartı (2.58) denklemini sağlaması şartıyla bundan sonraki kısıtlamalar f 'nin üzerine oluşturulacaktır.

2.6 da bu sonucun uygulamaları tartışılacaktır.

2.5 Mutlak Değişmezlerin Tanımı

(2.1) de ifade edilen f 'nin denklem değişmezleriyle ve yardımcı şartla kararlı olacak şekilde dönüşüm grupları tanımlanır. Şimdi geriye benzerlik ifadesine göre her bir grup için fonksiyonel olarak bağımsız değişkenlerin kümesini tanımlamak kalır.

Mutlak değişmezlerin tanımı klasik Lie teorisine uygun olarak yapılır (Eisenhart 1961, Cohen 1931, Ames 1968). Bundan sonraki tartışmalarda grubu sembolünü kullanmak uygun olacağından bir parametrelili

$$\{\bar{z}^i = f^i(z^1, z^2, \dots, z^p; a); i = 1, 2, \dots, p\}$$

grubunun sembolü Q olmak üzere

$$Q = \sum_{i=1}^p \xi^i(z^1, \dots, z^p) \frac{\partial}{\partial z^i} \quad (2.60)$$

ile verilir, burada

$$\xi^i(z^1, \dots, z^p) = (\partial f_i / \partial a)(z^1, \dots, z^p; a_0)$$

ve a_0 özdeşlik elemanının değeridir.

Sembol cinsinden değişmezler aşağıdaki şekilde tanımlanır :

2.5.1 TEOREM: $I(z^1, \dots, z^p)$ fonksiyonu Q sembolüyle dönüşüm grubunun mutlak değişmezidir yalnız ve yalnız $QI=0$ ise. Dolayısıyla, $QI_j = 0$ ($j=1, \dots, p-1$) in fonksiyonel bağımsız çözümleri I_1, \dots, I_{p-1} ise $QI=0$ in herhangi bir çözümü, R diferensiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere

$$I(z^1, \dots, z^p) = R[I_1, \dots, I_{p-1}]$$

olarak ifade edilebilir.

Değişmezlerin saptanması için $QI=0$ lineer kısmi diferensiyel denkleminin çözümünün yapılması gereklidir. Örnek olarak, (2.56) denklemiyle

$$\bar{x} = f(a)x + f(a)[1 - f(a)]y = f^1(x, y; a)$$

$$\bar{y} = [f(a)]^2 y = f^2(x, y; a)$$

$$\bar{u} = [f(a)]^{-1} u + [f(a)]^{-1} [1 - f(a)] = f^3(u; a)$$

olarak verilen grubu inceleyelim. İki mutlak değişmez bulunmalıdır. Bunlardan biri, sembolü

$$(\partial f^1 / \partial a)(x, y; a_0) (\partial / \partial x) + (\partial f^2 / \partial a)(x, y; a_0) (\partial / \partial y)$$

veya

$$f'(a_0) \{ (x - y) (\partial / \partial x) + 2y (\partial / \partial y) \}$$

olmak üzere

$$S: \begin{cases} \bar{x} = f(a)x + f(a)[1 - f(a)]y \\ \bar{y} = [f(a)]^2 y \end{cases} \quad (2.61)$$

ile tanımlanan S alt grubunun mutlak değişmezi olmalıdır. $I_1(x, y)$ fonksiyonunun S alt grubunun mutlak değişmezi olması için

$$f'(a_0) \{ (x - y) (\partial I_1 / \partial x) + 2y (\partial I_1 / \partial y) \} = 0$$

olması gerekir. Böylece, $f'(a_0) \neq 0$ olduğunda I_1

$$\{(x-y)(\partial I_1/\partial x) + 2y(\partial I_1/\partial y)\} = 0 \quad (2.62)$$

denklemini sağlar. η (2.62) denkleminin herhangi bir aşikar olmayan çözümü ve g keyfi bir fonksiyon olmak üzere (2.62) denkleminin genel çözümü $I_1 = g(\eta)$ ile verilir. Buna göre, (2.62) nin bir çözümü

$$\eta(x, y) = (x+y)y^{-1/2} \quad (2.63)$$

olarak Lagrange metoduyla kolayca elde edilebilir (Arnes 1965). Böylece genel çözüm g keyfi olmak üzere

$$I_1 = g[(x+y)y^{-1/2}] \quad (2.64)$$

şeklinde elde edilir. Bu çözümün mutlak değişmez olduğu kolayca görülebilir. $I_1(\bar{x}, \bar{y}) = I_1(x, y)$ ise $I_1(x, y)$ mutlak değişmez olduğundan ve (2.56) denkleminde

$$I_1(\bar{x}, \bar{y}) = g[(\bar{x}+\bar{y})\bar{y}^{-1/2}] = g[(x+y)y^{-1/2}]$$

olduğu bulunur.

Diğer mutlak değişmez $I_2(u, x, y)$ ise Q (2.56) denklemiyle verilen grubun sembolü olmak üzere $QI_2 = 0$ in çözümünden bulunabilir. Bu durumda, I_2

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial \bar{x}}{\partial a}(x, y, a_0) \right] \frac{\partial I_2}{\partial x} + \left[\frac{\partial \bar{y}}{\partial a}(x, y, a_0) \right] \frac{\partial I_2}{\partial y} \\ + \left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial a}(x, y, u, a_0) \right] \frac{\partial I_2}{\partial u} = 0 \end{aligned} \quad (2.65)$$

denkleminin çözümüdür. Bu denklem (2.56) denklemi için düzenlenirse

$$f'(a_0) \{(x-y)(\partial I_2/\partial x) + 2y(\partial I_2/\partial y) - (u+1)(\partial I_2/\partial u)\} = 0 \quad (2.66)$$

elde edilir. Çözüm h keyfi bir fonksiyon, γ_1 ve γ_2 (2.66) denkleminin

$$\gamma_1 = y^{1/2}(u+1), \quad \gamma_2 = y^{-1/2}(x+y)$$

şeklindeki bağımsız çözümleri olmak üzere $I_2 = h[\gamma_1, \gamma_2]$ olarak verilir. Elde edilen çözümün (2.66) denklemini sağladığı kolayca görülebilir. Bu durumda,

$$I_2 = h[y^{1/2}(u+1), y^{-1/2}(x+y)] \quad (2.67)$$

diğer mutlak değişmezdir.

Özel bir örnek olarak,

$$I_1 = \eta = (x+y)y^{-1/2} \quad \text{ve} \quad (u+1) = y^{-1/2} f(\eta)$$

olacak şekilde (2.64) ve (2.67) denklemlerinin g ve h özel fonksiyonları olsun. Bu dönüşümle, (2.38) Burger denklemi

$$f'' - ff' + \frac{1}{2}\eta f' + \frac{1}{2}f = 0$$

benzerlik denklemine dönüştür veya

$$(d/d\eta) \left\{ f' - \frac{1}{2}f^2 + \frac{1}{2}\eta f \right\} = 0$$

bu da

$$f' - \frac{1}{2}f^2 + \frac{1}{2}\eta f = \text{sabit}$$

Riccati denklemi formunda integre edilir.

2.6 Tümdengelimli Benzerlik Metoduna Örnek

Bu kesimde, sonsuz düzlem üzerinde kararlı iki boyutlu laminar sıkıştırılmaz sınır tabakası akışının klasik bir örneği incelenerek konu açıklanmaya çalışılacaktır. İlk olarak Gaggioli ve Moran(1968) tarafından incelenmiştir. Burada yardımcı şartların nasıl bulunacağı amaçlanmıştır.

$u(x,y)$ düzleme paralel, $v(x,y)$ ise düzleme dik hız bileşenleri olmak üzere

$$\begin{aligned} uu_x + vu_y - Uu_x - vu_{yy} &= 0, \quad v \text{ sabit} \\ u_x + v_y &= 0 \end{aligned} \quad (2.68)$$

denklemlerini $x>0, y\geq 0$ düzleminde

$$u(x,0)=0, \quad v(x,0)=0, \quad u(x,y \rightarrow \infty)=U(x) \quad (2.69)$$

yardımcı şartlarıyla beraber düşünelim. $U(x), u(x,y), v(x,y)$ $x>0, y>0$ üzerinde analitik olsunlar.

Amaç, yardımcı şartlara uygun değişmez çözümleri Morgan teorisiyle tahmin ederek benzerlik ifadelerini tanımlamaktır. Grup dönüşümleri üzerinde gerekli şartları

tanımlamak için, yardımcı şartların analizi değişkenlerin değişimi vasıtasıyla yapılır. Yukarıda verilen örnekte olduğu gibi, yardımcı şartlarda görülen özel fonksiyonlardan zaman zaman yararlanır.

$$w(x, y) = u(x, y) / U(x)$$

olarak alındığında (2.68) ve (2.69) denklemleri $x > 0, y \geq 0$ için

$$\begin{aligned} U w w_x + v w_y - (1 - w^2) U_x - v w_{yy} &= 0 \\ U_x w + U w_x + v_y &= 0 \end{aligned} \quad (2.70)$$

şeklinde ifade edilebilir. Yardımcı şartlar ise

$$w(x, 0) = 0, \quad v(x, 0) = 0, \quad w(x, y \rightarrow \infty) = 1 \quad (2.71)$$

şeklinde ve w, v, U $x > 0, y > 0$ üzerinde analitiktir.

Değişkenler için dönüşüm grubu genel olarak alınabilir, fakat bu örnek için

$$\begin{aligned} G: \bar{w} &= f_w(w; a), \quad \bar{U} = f_U(U; a), \quad \bar{v} = f_v(v; a) \\ \bar{y} &= f^y(y; a), \quad \bar{x} = f^x(x; a) \end{aligned} \quad (2.72)$$

grubunu alacağız. Morgan teorisine göre (2.70) diferensiyel denkleminin konformal değişmezleri

$$G: \begin{cases} \bar{w} = w \\ \bar{U} = C_3(a)U \\ \bar{v} = [C_1(a)]^{-1}v \\ \bar{y} = C_1(a)y + C_2(a) \\ \bar{x} = [C_1(a)]^2 C_3(a)x + C_4(a) \end{cases} \quad (2.73)$$

olarak alır, burada f 'nin sürekliliğine göre C nin en azından sürekliliği kabul edilir.

Sonra, G altındaki değişmez fonksiyonlar yardımıyla (2.71) denklemiyle verilen yardımcı şartların (2.73) denklemindeki C üzerine getirdiği kısıtlamalar bulunmalıdır. 2.4.1 Teorem'indeki gösterime uygun olacak şekilde w için değişmez çözüm $I_w(z^1, z^2)$ ile gösterilsin.

(2.71) denkleminin ilk yardımcı şartı için

$$y = 0 \quad \text{ve} \quad x = \sigma > 0 \quad \text{ise} \quad \beta_1(w, x, y) = w = 0$$

dır. Böylece, (2.59) denklemiyle

$$z^1 = f^x(\sigma; a), \quad z^2 = f^y(0; a) \quad \text{için} \quad f_*[I_*(z^1, z^2); a^*] = 0 \quad (2.74)$$

burada a nın bütün değerleri için $\bar{w} = I_*(\bar{x}, \bar{y}) = I_*[f^x(x; a), f^y(y; a)]$ dir. Ters elemanın yok olmaması için herhangi bir a için $C_3(a)$ sifira eşit olmadığından (2.73) denkleminde, (2.74) denkleminde

$$z^1 = [C_1(a)]^2 C_3(a) \sigma + C_4(a) \quad \text{için} \quad I_*[z^1; C_2(a)] = 0$$

olur. $C_3(a) \neq 0$, $C_3(a_0) = 1$ ve $C_3(a)$ sürekli olduğundan her a için $C_3(a) > 0$ olduğu görülür. Böylece,

$$\forall z^1 > C_4(a) \quad \text{için} \quad I_*[z^1; C_2(a)] = 0 \quad (2.75)$$

dir.

$C_2(a) > 0$ ve a' nın bir N komşuluğunda sabit olmayacak şekilde a nın a' gibi bir değeri olduğunu kabul edelim. $x > 0, y > 0$ üzerinde analitik olan $I_*(x, y)$ ile $\forall z^1 > 0$ için $I_*(z^1, C_2(a')) = 0$ olduğu görülür. $C_2(a)$ nın sabit olmadığı N deki her a için bu argumenti tekrarlayarak, N nin görüntüsü olan açık aralık üzerindeki $\forall z^1 > 0$ ve $\forall z^2 > 0$ için $I_* = 0$ olduğu bulunur. Böylece, $\forall z^1 > 0$ ve $\forall z^2 > 0$ için $I_* = 0$ elde edilir. Bu durumu önleyebilmek için

$$C_2(a) = \text{sabit} \quad \text{ve/veya} \quad C_2(a) \leq 0$$

olmalıdır. Sabitse, grubun özdeşliği

$$y = C_1(a_0)y + C_2(a_0)$$

olduğundan $C_2(a)$ sıfır olmalıdır. Bu yüzden $C_2(a) \leq 0$ dir. O halde

$$\bar{y} = C_1(a)y + C_2(a) = C_1(a)y - |C_2(a)|$$

veya

$$y = [1/C_1(a)]\bar{y} + [|C_2(a)|/C_1(a)] \quad (2.76)$$

dir. $a = \bar{a}$ için ters grup

$$y = C_1(\bar{a})\bar{y} + C_2(\bar{a}) = C_1(\bar{a})\bar{y} - |C_2(\bar{a})| \quad (2.77)$$

olarak ifade edilir. Yukarıdaki (2.76) ve (2.77) denklemlerinden

$$-|C_2(\bar{a})| = |C_2(a)|/C_1(a) \quad (2.78)$$

bulunur. Böylece, $C_1(a) > 0$ olduğu zaman (2.78) denkleminde $C_2(a) = 0$ olmasını gerektirir. Şimdi her a için $C_1(a) > 0$ olsun. Herhangi bir a için $C_1(a)$ sifira eşit

olamaz, aksi takdirde (2.76) denkleminde ters eleman bulunamaz. Özdeşlik dönüşümünden $C_1(a_0) = 1$ olduğu görülür. Bu yorumlar C_1 in sürekliliğinden yaralanılarak yapılır. Sonuç olarak, her a için

$$C_2(a) = 0$$

dır.

Diğer sınır şartları $v(x,0)=0$, $w(x,y \rightarrow \infty)=1$ benzer bir yöntemle kolayca analiz edilir ve C nin üzerine kısıtlama getirmediği görülür. Yani,

$$G: \begin{cases} \bar{w} = w, & \bar{U} = C_3(a)U, & \bar{v} = [C_1(a)]^{-1}v \\ \bar{y} = C_1(a)y, & \bar{x} = [C_1(a)]^2 C_3(a)x + C_4(a) \end{cases} \quad (2.79)$$

şeklindeki G sınıfları altında konformal değişmezli diferensiyel denklemler ve yardımcı şartlar değişmez çözümle uyumludur. Bu formu sağlayan farklı dönüşüm grupları bulunabilir. Fakat çoğu problemde aynı çözümünü verir. (2.79) denklemiyle verilen yapıya uygun özel bir grup altında değişmeyen çözüm, aynı yapıyı sağlayan diğer gruplar altında da değişmeyebilir.

(2.79) denklemiyle verilen grupların mutlak değişmezlerini tanımlamak için 2.5 de verilen sonuçlar kullanılır. (2.79) denklemini sağlayan herhangi bir grubun fonksiyonel olarak bağımsız dört tane mutlak değişmezi olmalıdır. Bunlardan biri, örneğin η ,

$$S: \bar{y} = C_1(a)y, \quad \bar{x} = [C_1(a)]^2 C_3(a)x + C_4(a) \quad (2.80)$$

alt grubunun değişmezi olmalıdır. 2.5.1. Teorem'inden Q , S alt grubunun sembolü olmak üzere $\eta(x,y)$ nin mutlak değişmez olması için gerek ve yeter şart $Q\eta = 0$ olmasıdır. Böylece,

$$p = \left[(2C_1 C_1' C_3 + C_1^2 C_3') / C_1' \right]_{a=a_0} \quad (2.81)$$

ve

$$r = \left[C_4' / C_1' \right]_{a=a_0} \quad (2.82)$$

olmak üzere

$$Q\eta = (px + r)(\partial \eta / \partial x) + y(\partial \eta / \partial y) = 0 \quad (2.83)$$

dir. (2.83) denkleminin genel çözümü, g keyfi ve $\lambda(x,y)$

$$(px+r)(\partial\lambda/\partial x) + y(\partial\lambda/\partial y) = 0 \quad (2.84)$$

denkleminin sıfırdan farklı çözümü olmak üzere $\eta=g(\lambda)$ ile verilir. $p \neq 0$ ve $p=0$ durumlarına göre bağımsız iki çözüm elde edilir.

$p \neq 0$ için (2.83) denkleminin genel çözümü değişkenlerin ayrımıyla

$$\tilde{\lambda} = y/(px+r)^{1/p} \quad (2.85)$$

olmak üzere

$$\tilde{\eta} = \tilde{g}[y/(px+r)^{1/p}] \quad (2.86)$$

olarak bulunur. $Q\tilde{\lambda}=0$ olduğundan, $\tilde{\lambda}$ (2.80) denklemini sağlayan herhangi bir grubun mutlak değişmezidir. $\tilde{\lambda}$ için dönüşüm mutlak değişmez olarak, yani $\tilde{\lambda}(x,y)=\tilde{\lambda}(\bar{x},\bar{y})$, kesin kısıtlamalar C nin üzerinde oluşmalıdır. (2.80) denklemiyle

$$\tilde{C}_3(a) = [\tilde{C}_1(a)]^{p-2} \quad \tilde{C}_4(a) = (r/p) \{ [\tilde{C}_1(a)]^p - 1 \} \quad (2.87)$$

olmak üzere

$$\frac{\bar{y}}{(p\bar{x}+r)^{1/p}} = \frac{\tilde{C}_1(a)y}{\{ p[\tilde{C}_1(a)]^2 \tilde{C}_3(a)x + p\tilde{C}_4(a) + r \}^{1/p}} \quad (2.88)$$

denklemi $y/(px+r)^{1/p}$ ye eşittir. Bu noktada, (2.80) denklemini sağlayan fonksiyon kümesi, grup tanımını sağlayan küme olarak kabul edilmez. (2.87) denklemini sağlanmazsa, $y/(px+r)^{1/p}$ değişmez olarak dönüşmez ve S (G nin alt grubu) grup değildir. Dolayısıyla, $p \neq 0$ olduğunda G grubu (2.79) denklemini ve (2.87) denklemini sağlamalıdır, yani

$$\tilde{G}: \begin{cases} \bar{w} = w, & \bar{U} = [\tilde{C}_1(a)]^{p-2}, & \bar{v} = [\tilde{C}_1(a)]^{-1} v \\ \bar{y} = [\tilde{C}_1(a)]y, & \bar{x} = [\tilde{C}_1(a)]^p (x+r/p) - r/p \end{cases} \quad (2.89)$$

olmalıdır.

$p=0$ durumu için, (2.84) denkleminin çözümü k sabit olmak üzere

$$\hat{\lambda} = y/\exp[x/r+k] \quad (2.90)$$

dır. Bu durumda genel çözüm

$$\hat{\eta} = \hat{g}(\hat{\lambda})$$

şeklinde. $\hat{\lambda}(x, y)$ mutlak değişmez olduğundan, $\hat{\lambda}(x, y) = \hat{\lambda}(\bar{x}, \bar{y})$ dir.

$$\hat{C}_4(a) = r \ln[\hat{C}_1(a)], \quad [\hat{C}_1(a)]^2 \hat{C}_3(a) = 1 \quad (2.91)$$

olmak üzere (2.80) denkleminle

$$\frac{\bar{y}}{\exp[\bar{x}/r+k]} = \frac{\hat{C}_1(a)y}{\exp[\hat{C}_4(a)/r] \exp\{[\hat{C}_1(a)]^2 \hat{C}_3(a)x/r\}}$$

denklemi $y/\exp[x/r+k]$ ye eşittir.

Bu durumda, $p=0$ olduğunda G grubu (2.79) denklemini ve (2.91) denklemini sağlamalıdır, yani

$$\hat{G}: \begin{cases} \bar{w} = w, & \bar{U} = [\hat{C}_1(a)]^2 U, & \bar{v} = [\hat{C}_1(a)]^{-1} v \\ \bar{y} = \hat{C}_1(a)y, & \bar{x} = x + r \ln \hat{C}_1(a) \end{cases} \quad (2.92)$$

olmalıdır.

Sonra, \tilde{G} ve \hat{G} grupları için üç mutlak değişmez tanımlanacaktır. $C_1(a_0)$ grup özdeşliği olmak üzere, herhangi bir \tilde{G} grubunun sembolü

$$\tilde{Q} = (p-2)U \frac{\partial}{\partial U} - v \frac{\partial}{\partial v} + y \frac{\partial}{\partial y} + p \left(x + \frac{r}{p} \right) \frac{\partial}{\partial x} \quad (2.93)$$

dir. $\tilde{Q}\tilde{g}_i = 0$ ise $\tilde{g}_i(w, U, v, x, y)$ fonksiyonu (2.78) denklemini sağlayan herhangi bir grubun mutlak değişmezidir. Dolayısıyla, $\tilde{\lambda}_i$ ($i=1,2,3,4$), $\tilde{Q}\tilde{\lambda}_i = 0$ in bağımsız çözümleri ise, $\tilde{Q}\tilde{g}_i = 0$ in genel çözümü $\tilde{\Gamma}_i$ keyfi olmak üzere $\tilde{g}_i = \tilde{\Gamma}_i(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \tilde{\lambda}_3, \tilde{\lambda}_4)$ ile verilir. Değişkenlerin ayrışımıyla

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_1 &= w, & \tilde{\lambda}_2 &= U[x+r/p]^{(2/p)-1} \\ \tilde{\lambda}_3 &= v[x+r/p]^{1/p} & \text{ve} & \tilde{\lambda}_4 = y[x+r/p]^{1/p} \end{aligned}$$

$\tilde{Q}\tilde{g}_i = 0$ in bağımsız çözümleri olduğu kolayca görülebilir. Böylece $i=1,2,3$ için

$$\tilde{g}_i(w, U, v, x, y) = \tilde{\Gamma}_i(w, U(x+r/p)^{(2/p)-1}, v(x+r/p)^{1/p}, y(x+r/p)^{1/p}) \quad (2.94)$$

dir.

Şüphesiz, (2.94) denklemini çok değişik şekillerde seçilebilir. Özel olarak,

$$\begin{aligned} \tilde{\eta} &= \tilde{g}(x, y) = y[x+r/p]^{-1/p} \\ \tilde{g}_1(w, U, v, x, y) &= \tilde{\lambda}_1 = w \\ \tilde{g}_2(w, U, v, x, y) &= \tilde{\lambda}_2 = v[x+r/p]^{1/p} \\ \tilde{g}_3 &= \tilde{\lambda}_3 = U[x+r/p]^{(2/p)-1} \end{aligned} \quad (2.95)$$

fonksiyonel bağımsız $\tilde{g}, \tilde{g}_1, \tilde{g}_2$ ve \tilde{g}_3 niceliklerini seçelim. Morgan teoreminden

$$\tilde{g}_1 = w = \tilde{F}_1(\tilde{\eta}) \quad (2.96)$$

$$\tilde{g}_2 = v[x+r/p]^{1/p} = \tilde{F}_2(\tilde{\eta}) \quad (2.97)$$

$$\tilde{g}_3 = U[x+r/p]^{(2/p)-1} = \tilde{F}_3(\tilde{\eta}) \quad (2.98)$$

olarak bulunan bağıntularla (2.71) diferensiyel denklemi adi diferensiyel denkleme dönüşür.

$U=U(x)$ olduğundan $U[x+r/p]^{(2/p)-1}$ sadece x in fonksiyonudur. $\tilde{F}_3 = \tilde{F}_3[y(x+r/p)^{-1/p}]x$ ve y ye bağlı olduğundan U_0 gibi bir sabit olmalıdır. Sonuç olarak,

$$\tilde{U}(x) = U(x) = U_0[x+r/p]^{1-(2/p)} \quad (2.99)$$

elde edilir. Bu ise, $U(x)$ in keyfi olarak tanımlanamadığını fakat (2.89) ile verilen \tilde{G} grubu altında değişmez problemin çözümü olacak şekilde (2.99) denklemini sağlaması anlamındadır.

(2.95)-(2.99) denklemleriyle, (2.70) denklemi için η ye göre adi diferensiyel denklemler

$$\begin{aligned} (v/U_0)\tilde{F}_1'' + (\tilde{\eta}/p)\tilde{F}_1\tilde{F}_1' - \tilde{F}_2\tilde{F}_1'/U_0 - (1-2/p)[(\tilde{F}_1)^2 - 1] &= 0 \\ (1-2/p)\tilde{F}_1 - (\tilde{\eta}/p)\tilde{F}_1' + \tilde{F}_2'/U_0 &= 0 \end{aligned} \quad (2.100)$$

olarak bulunur. (2.71) yardımcı şartları ise

$$\begin{aligned} \tilde{F}_1(0) = 0, \quad \tilde{F}_1(\infty) = 1, \quad \tilde{F}_2(0) = 0 \\ \tilde{F}_1, \quad \tilde{F}_2 \quad \tilde{\eta} > 0 \end{aligned} \quad (2.101)$$

şeklindedir.

(2.70) ve (2.71) denklemleriyle verilen problemin benzerlik ifadesi (2.99)-(2.101) denklemleriyle verilir. (2.101) denklemindeki şartlar altında (2.100) denkleminin çözümüyle beraber (2.99) denklemi problemin benzerlik çözümü olacaktır.

$p=0$ alınarak \hat{G} grupları üzerine oluşturulan başka benzerlik ifadeleri bulunabilir. Herhangi bir \hat{G} grubunun sembolü

$$\hat{Q} = 2U \frac{\partial}{\partial U} - v \frac{\partial}{\partial v} + y \frac{\partial}{\partial y} + r \frac{\partial}{\partial x}$$

olmak üzere $\hat{Q}\hat{\lambda}_1 = 0$ denkleminin çözümü

$$\begin{aligned}\hat{\lambda}_1 &= w, & \hat{\lambda}_2 &= U \exp[2x/r + 2k] \\ \hat{\lambda}_3 &= v \exp[x/r + k], & \hat{\lambda}_4 &= y \exp[-x/r - k]\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Sonuç olarak $\hat{Q}\hat{\lambda}_i = 0$ ($i=1,2,3$) genel çözümünü $\hat{\Gamma}_i$ keyfi olmak üzere

$$\hat{g}_i(w, U, v, x, y) = \hat{\Gamma}_i[w, U \exp(2x/r + 2k), v \exp(x/r + k), y \exp(-x/r - k)]$$

dir. \hat{g}_i mutlak değişmez olduğundan özel olarak

$$\begin{aligned}\hat{\eta} &= \hat{g}(x, y) = y \exp[-x/r - k] \\ \hat{g}_1 &= \hat{\lambda}_1 = w = \hat{F}_1(\hat{\eta}) \\ \hat{g}_2 &= \hat{\lambda}_2 = v \exp[x/r + k] = \hat{F}_2(\hat{\eta}) \\ \hat{g}_3 &= \hat{\lambda}_3 = U \exp[2x/r + 2k] = \hat{F}_3(\hat{\eta})\end{aligned}$$

şeklinde seçilebilir. $\hat{F}_3(\hat{\eta})$ x ve y ye bağlı, $U=U(x)$ olduğundan, U_0 gibi bir sabit olmalıdır. Böylece,

$$\hat{U}(x) = U(x) = U_0 \exp[-2x/r - 2k]$$

olarak bulunur. (2.70) denklemleri

$$\begin{aligned}[v/U_0]\hat{F}_1'' + [\hat{\eta}/r]\hat{F}_1\hat{F}_1' - \hat{F}_2\hat{F}_1'/U_0 + (2/r)(\hat{F}_1^2 - 1) &= 0 \\ 2\hat{F}_1 + \hat{\eta}\hat{F}_1' - (r/U_0)\hat{F}_2' &= 0\end{aligned}$$

denklemlerine dönüşür ve (2.71) denklemleriyle verilen yardımcı şartlar \hat{F}_1, \hat{F}_2 $\hat{\eta} > 0$ için analitik olmak üzere

$$\hat{F}_1(0) = 0, \quad \hat{F}_2(0) = 0, \quad \hat{F}_1(\infty) = 1$$

şekline dönüşür.

Sonuç olarak, (2.72) denkleminde daha genel sistemler kullanıldığında ortaya çıkabilecek durumlar incelenir. Bu amaçla Woodard(1971) tarafından çok sayıda çalışma yapılmıştır. Örneğin,

$$uu_x + vu_y = u_{yy}, \quad u_x + v_y = 0 \quad (2.102)$$

olarak tanımlanan basınç eğimi olmayan sınır tabakası denklemlerinin

$$\begin{aligned}\bar{x} &= f^x(x, y; a), & \bar{y} &= f^y(x, y; a) \\ \bar{u} &= C_4(a)u + C_5(x, y, u, v; a), & \bar{v} &= C_6(a)v + C_7(x, y, u, v; a)\end{aligned} \quad (2.103)$$

şeklindeki dönüşüm sınıfıyla incelendiğini kabul edelim. Değişmez şartlar ve grup özellikleri

$$\begin{aligned}\bar{x} &= C_6^{-2} C_4 x, & \bar{y} &= C_6^{-2} \{C_6 y + (C_6 - C_4)x\} \\ \bar{u} &= C_4 u, & \bar{v} &= C_6 v + (C_6 - C_4)u\end{aligned}\quad (2.104)$$

grubunu oluşturmaktadır. Değişmezlerin genel formundan, $m = C_4'(a)/C_6'(a)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\eta &= yx^{1/(m-2)} + x^{(m-1)/(m-2)} \\ ux^{m/(2-m)} &= f(\eta) \\ vu^{-1/m} + u^{(m-1)/m} &= h(\eta)\end{aligned}\quad (2.105)$$

özel sınıfı seçildiğinde

$$v = h(\eta)u^{1/m} - u$$

olduğu görülür.

En genel formlar kullanıldığında, grup özelliklerinin sağlandığına dikkat edilmelidir. Kapalılık özelliğinin sağlanması ve grup altındaki değişmez, burada $C_4(a)$ ve $C_6(a)$ olarak tanımlanan parametre fonksiyonlarını genellikle sıfırdan farklı olacak şekilde kısıtlar.

Bu tekniklerin uygulaması daha genel olarak, reel sınır tabakaları ve boyut analizinin genelleştirilmesi Moran ve Gaggioli'de(1968), difüzyon ve diğer dönüşüm problemleri Woodard'da(1971) bulunabilir.

III. BÖLÜM

BİR PARAMETRELİ GRUP TEORİSİNE GÖRE BENZERLİK DÖNÜŞÜMÜ VE KORTEWEG-DE VRIES DENKLEMİ

Kısmi diferensiyel denklemlerdeki bağımsız değişkenlerin sayısını azaltabilmek amacıyla yapılan dönüşümlere benzerlik dönüşümü ve bağımsız değişkenleri azaltan dönüşüm değişkenlerine de benzerlik değişkenleri denir. Benzerlik değişkenlerini geliştirmenin çeşitli yöntemleri vardır. Bunlar arasında serbest parametre yöntemi (Geis 1955 , Hansen 1964), değişkenlerine ayırma yöntemi (Abbott ve Kline) ve grup teori yöntemi (Michal 1952 , Birkhoff 1960 ,Morgan 1952 ,Ames 1965 , Manohar 1963 , Moran ve Gaggioli 1968) verilebilir. Serbest parametre yönteminde, ilk olarak başlangıç şartı ve sınır şartları incelenir. Daha sonra dönüşüm uygulanacak olan diferensiyel denklem, başlangıç ve sınır şartlarıyla beraber dönüştürülmek üzere bağımsız değişkenler için dönüşüm fonksiyonu oluşturulur. Dolayısıyla yöntem, alışılmış bir yöntem değildir ve problemin doğal yapısını da anlamayı gerektirir. Değişkenlerine ayırma yöntemi, klasik bilinen değişkenlerine ayırma yönteminden ibarettir. Sınır şartlarının dönüşümü serbest parametre yönteminde olduğu gibi ilk olarak incelenir. Grup teorisi yönteminin uygulaması çok kolay ve açıktır. Benzerlik dönüşümü, grup teorisi metodunun kurallarına göre oldukça basit bir şekilde elde edilebilir. Diferensiyel denklemin sınır şartı ve başlangıç şartları düşünülmeden bu dönüşüm altında incelenir. Bu şekilde bir kaç bağımsız değişkenli kısmi diferensiyel denklem adi diferensiyel denkleme dönüştürülür. Diğer bir deyişle, bu şekilde elde edilen dönüşüm altında başlangıç ve sınır şartlarının dönüştürülüp dönüştürülemeyeceği bilinmez. Dolayısıyla, benzerlik değişkeni geliştirildikten sonra başlangıç ve sınır şartlarının dönüşümü incelenir. Burada benzerlik değişkenlerinin bulunabilmesi için bir parametrelî grup teorisinin sonuçları verilmektedir (Morgan 1952).

x_i ($i=1, \dots, m$) bağımsız değişkenleri, T_j ($j=1, \dots, n$) bağımlı değişkenleri göstermek üzere

$$F_j(x_i, T_j) = 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n \quad (3.1)$$

şeklinde kapalı formda verilen kısmi diferansiyel denklem sistemini gözönüne alalım. Bir parametrelili dönüşüm grubu ve ilgili benzerlik değişkenlerinin tanımı için yöntem aşağıdaki gibidir :

Bir parametrelili dönüşüm grubu

$$\bar{x}_i = a^{\beta_i} x_i, \quad i = 1, \dots, m \quad (3.2a)$$

$$\bar{T}_j = a^{\gamma_j} T_j, \quad j = 1, \dots, n \quad (3.2b)$$

olarak tanımlanan yeni \bar{x}_i bağımsız değişkenlerini ve \bar{T}_j bağımlı değişkenlerini içerir. Burada a sıfırdan farklı reel bir parametredir. β_i ve γ_j ise (3.1) kısmi diferansiyel denkleminin (3.2) dönüşümü altındaki mutlak değişmezleri olarak tanımlanır. Yani

$$F_j(x_i, T_j) = F_j(\bar{x}_i, \bar{T}_j) \quad (3.3)$$

dir. Bu ilişki β_i ve γ_j yi tanımlayabilecek cebirsel bağıntıları verir.

(3.2) denklemleriyle verildiği gibi bir parametrelili dönüşüm grubu tanımladıktan sonra benzerlik değişkenlerinin tanımı için sonuçlar şimdi verilir :

(3.1) kısmi diferansiyel denklem sistemindeki x_1 bağımsız değişkenini yok edelim. Benzerlik değişkeni aşağıda verildiği gibi iki şekilde tanımlanır :

1) $\beta_1 \neq 0$ ise (3.1) sistemindeki x_1 bağımsız değişkenini yok eden benzerlik değişkenleri

$$\eta_i = \frac{x_i}{x_1^{\beta_i/\beta_1}}, \quad i = 2, 3, \dots, m \quad (3.4a)$$

$$g_j = (\eta_2, \eta_3, \dots, \eta_m) = \frac{T_j(x_1, x_2, \dots, x_m)}{x_1^{\gamma_j/\beta_1}}, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3.4b)$$

olarak verilir (Morgan 1952).

2) $\beta_1 = 0$ ise (3.2) denklemleriyle verilen bir parametrelili dönüşüm grubu

$$\bar{x}_i = x_i + \ln a \quad \text{ve} \quad \bar{x}_i = a^{\beta_i} x_i, \quad i = 2, \dots, m \quad (3.5a)$$

$$\bar{T}_j = a^{\gamma_j} T_j, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3.5b)$$

olarak verilir. Benzerlik değişkenleri ise

$$\eta_i = \frac{x_i}{\exp(\beta_i x_i)}, \quad i = 2, 3, \dots, m \quad (3.6a)$$

$$g_j = (\eta_2, \eta_3, \dots, \eta_m) = \frac{T_j(x_1, x_2, \dots, x_m)}{\exp(\gamma_j x_1)}, \quad j = 1, \dots, n \quad (3.6b)$$

olarak elde edilir.

(3.4) veya (3.6) denklemleriyle verilen benzerlik değişkenleri (3.1) kısmi diferensiyel denklem sistemine uygulandığında ve belirtilen işlemler yapıldığında bağımlı değişkenleri g_1, g_2, \dots, g_n olan yeni bir kısmi diferensiyel denklem sistemi elde edilir. Yeni sistemdeki η_2, \dots, η_m bağımsız değişkenleri $(m-1)$ tanedir, yani (3.1) orijinal sisteminin bağımsız değişkenlerinin sayısından bir eksiktir. Bu işleme adı diferensiyel denklem sistemi elde edilinceye kadar devam edilir.

Basit ve sonucun tek olması bu yöntemle avantaj sağlamaktadır. Başlangıç ve sınır şartları düşütülmeden, problem için benzerlik dönüşümleri oluşturulur. Daha sonra bu benzerlik dönüşümleri altında başlangıç ve sınır şartlarının dönüşümü incelenir. Başlangıç ve sınır şartlarına benzerlik dönüşümü uygulandıktan sonra elde edilen yeni şartların bazılarının aynı olması durumunda benzerlik dönüşümü uygulanabilir. Genellikle sıfırdan sonsuza giden bağımsız değişkendeki benzerlik başlangıç ve sınır şartlarının dönüşümü için daha uygun olmaktadır (Özışık 1980).

Şimdi Korteweg-de Vries (KdV) denklemini bu yöntemi kullanarak adı diferensiyel denkleme indirgeyelim.

3.1 KdV Denklemi İçin Bir Parametrelili Dönüşüm Grubu

Korteweg de Vries (KdV) denklemi ε ve μ sabit olmak üzere

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon u \frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \quad (0 < x < \infty, t > 0) \quad (3.7)$$

şeklinde ifade edilmektedir. Yeni değişkenleri

$$\bar{x} = a^b x, \quad \bar{t} = a^d t, \quad \bar{u} = a^e u$$

şeklinde ifade edelim. Bu değişkenlere göre

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= a^{d-e} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= a^{b-e} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= a^{2b-e} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} \\ \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} &= a^{3b-e} \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial \bar{x}^3}\end{aligned}$$

türevleri elde edilir. Bu türevleri (3.7) KdV denkleminde yerine yazılırsa

$$a^{d-e} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \epsilon a^{b-2e} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \mu a^{3b-e} \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial \bar{x}^3} = 0 \quad (3.8)$$

denklemini bulunur. (3.7) ve (3.8) denklemlerinin benzer olabilmeleri için

$$d-e=b-2e=3b-e \quad (3.9)$$

cebirsel denklemini sağlayacak şekilde b , d ve e sayılarının bulunması gerekir. (3.7)

KdV denklemindeki zaman (t) değişkenini yok etmek istediğimizden dolayı (3.9)

cebirsel denklemlerinin çözümünden

$$\frac{e}{d} = \frac{-2}{3}, \quad \frac{b}{d} = \frac{1}{3}$$

olarak elde edilir. Bu durumda, η ve $g(\eta)$ benzerlik değişkenleri

$$\eta = \frac{x}{t^{b/d}} = \frac{x}{t^{1/3}} \quad (3.10a)$$

$$g(\eta) = \frac{u(x,t)}{t^{e/d}} = \frac{u(x,t)}{t^{-2/3}} \quad (3.10b)$$

şeklinde verilebilir.

Benzerlik değişkenleri bir parametrelili grup olduğundan (3.10) ile verilen benzerlik değişkenlerinden farklı benzerlik değişkenleri de bulunabilir. Ancak sonuçta elde edilen adi diferensiyel denklemin aynı olduğu görülmektedir. Fakat başlangıç ve sınır şartlarının getireceği kısıtlamalara bağlı olarak en uygun benzerlik değişkeni seçilir. Şimdi KdV denkleminin için (3.10) ile verilen benzerlik değişkeninden farklı benzerlik değişkenleri örnekleri verelim:

$$\eta = (x+t)t^{-1/3} \quad (3.11a)$$

$$g(\eta) = \left(u(x,t) + \frac{1}{\varepsilon} \right) t^{2/3} \quad (3.11b)$$

benzerlik değişkenlerinin KdV denkleminde uygulanması sonucunda (3.14) denkleminin elde edildiği kolayca görülebilmektedir. Yine

$$\eta = x(t+a)^{-1/3} \quad (3.12a)$$

$$g(\eta) = u(x,t)(t+a)^{2/3} \quad (3.12b)$$

benzerlik değişkenleri de KdV denkleminin için (3.14) denklemini verir. Ancak Rosales(1978) tarafından incelenen

$$\eta = x(3t)^{-1/3} \quad (3.13a)$$

$$g(\eta) = u(x,t)t^{2/3} \quad (3.13b)$$

benzerlik değişkenleri KdV denkleminde uygulandığında

$$\mu \frac{d^3 g}{d\eta^3} + (\varepsilon g - \eta) \frac{dg}{d\eta} - 2g = 0$$

nonlineer adi diferensiyel denklemin elde edilir. Bu denklem ile (3.14) denkleminin arasında yapı olarak çok önemli bir fark olmadığı açıkça görülmektedir.

Biz, (3.10) ile verilen benzerlik değişkenleriyle çalışmanın uygun olacağını düşünerek buna göre nümerik çözüm yöntemini oluşturmaya çalıştık.

3.2 KdV Denkleminde Benzerlik Değişkenlerinin Uygulanması

(3.10) benzerlik değişkenlerine göre türevler

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{3} \frac{dg}{d\eta} \eta t^{-5/3} - \frac{2}{3} g t^{-5/3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{dg}{d\eta} t^{-1}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{d^2 g}{d\eta^2} t^{-4/3}$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \frac{d^3 g}{d\eta^3} t^{-5/3}$$

olarak bulunur. Bu türevler (3.7) KdV denkleminde yerlerine konup gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\mu \frac{d^3 g}{d\eta^3} + \left(-\frac{1}{3} \eta + \varepsilon g \right) \frac{dg}{d\eta} - \frac{2}{3} g = 0 \quad (3.14)$$

şeklinde nonlinear adi diferensiyel denklemi elde edilir. Amacımız bu denklemi uygun şartlar altında nümerik olarak çözmektir.

3.3 Başlangıç Ve Sınır Şartlarına Benzerlik Değişkenlerinin Uygulanması

Benzerlik değişkenleri altında herhangi bir kısmi diferensiyel denklemi adi diferensiyel denkleme indirgeyerek çözebilmek için, kısmi diferensiyel denklemin başlangıç ve sınır şartlarının benzerlik değişkenleri altında, adi diferensiyel denklemin çözümünü yapabilecek şekilde uygun şartlara dönüşmesi gerekmektedir. Bu da genellikle x-ekseni sonsuza giden şartlar için uygun olmaktadır. Buna göre

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon u \frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \quad (0 < x < \infty, t > 0) \quad (3.15)$$

$$u(x, 0) = u_i, \quad (0 < x < \infty) \quad (3.16a)$$

$$u(0, t) = u_b, \quad (t > 0) \quad (3.16b)$$

şeklinde tanımlanan yarı sonsuz eksen üzerindeki KdV denklemi için başlangıç sınır değer problemini inceleyelim (Fokas ve Ablowitz 1989, Marchant ve Symth 1990).

(3.16) şartları benzerlik değişkenleri altında

$$\eta \rightarrow \infty, \quad g(\eta) = 0 \quad (3.17a)$$

$$\eta = 0, \quad g(\eta) = u_b t^{2/3} \quad (3.17b)$$

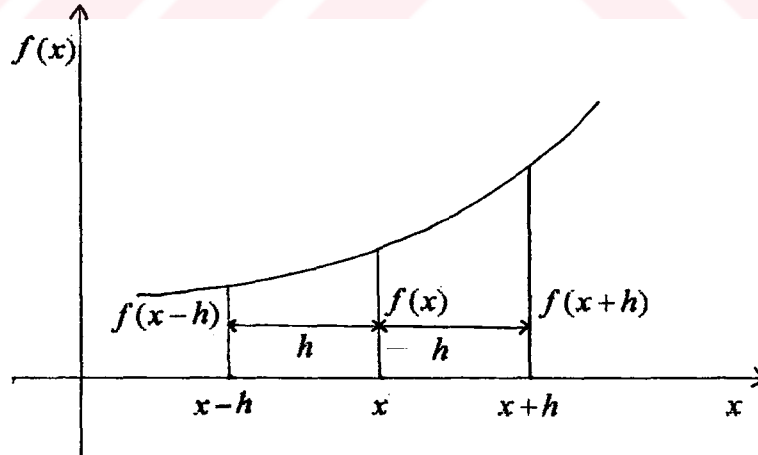
şeklini alır. Dolayısıyla artık (3.15) KdV denkleminin (3.16) şartları altındaki çözümünü yerine (3.14) nonlinear değişken katsayılı adi diferensiyel denklemin (3.17) şartları altındaki çözümünü araştırılmalıdır. Problemin adi diferensiyel denklemler için sınır değer problemine dönüştüğü açıkça görülmektedir. Nonlinear adi diferensiyel denklemin çözümü, nonlinear kısmi diferensiyel denklemin çözümünü yapmaktan

daha kolay olduğundan yapılan dönüşüm bu açıdan avantaj sağlamaktadır. Bu yapının nonlineerliği dolayısıyla analitik çözümünün kolay olmayacağı, fakat nümerik çözümlerin daha kolay ve sonuçların daha kapsamlı şekilde ifade edilebileceği düşünülmüştür. Ayrıca, bu tip dönüşümler değişken sayısını azalttığı için nümerik tekniklere de uygulanabilirliği daha fazla olmaktadır(Jordan ve Smith 1987).

Şimdi nümerik çözüme geçmeden önce sonlu fark yaklaşımlarını kısaca açıklayalım.

3.4 Sonlu Fark Yaklaşımları

Diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerinde en çok kullanılan yöntemlerden biri sonlu fark yaklaşımlarıdır. Taylor serisi yardımıyla diferansiyel denklemlerdeki türev değerleri sonlu fark yaklaşımları olarak ifade edilir. Şimdi türev değerlerinin sonlu fark yaklaşımlarıyla nasıl ifade edildiğini kısaca açıklayalım:



Şekil 3.1 Taylor serisi terimlerinin gösterilişi

$f(x)$ in Taylor serisine açılabilir bir fonksiyon olduğunu kabul edelim. Şekil 3.1 de gösterildiği gibi x noktası civarında $f(x+h)$ ve $f(x-h)$ fonksiyonlarının Taylor serisi açılımı

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \dots \quad (3.18a)$$

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) - \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \dots \quad (3.18b)$$

olarak verilebilir. Burada üsler (h) x e göre türevi ifade etmektedir. (3.18a) ve (3.18b) ile verilen Taylor serisi açılımları kullanılarak $f'(x)$ ve $f''(x)$ birinci ve ikinci derece türevleri için değişik şekillerde sonlu fark yaklaşımları bulunabilir.

3.4.1 Birinci türevler

$f'(x)$ birinci dereceden türevinin sonlu fark yaklaşımı, (3.18a) ve (3.18b) denklemlerinden $f'(x)$ in çözümlüyle

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{h}{2} f''(x) - \frac{h^2}{6} f'''(x) - \dots \quad (3.19)$$

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} + \frac{h}{2} f''(x) + \frac{h^2}{6} f'''(x) + \dots \quad (3.20)$$

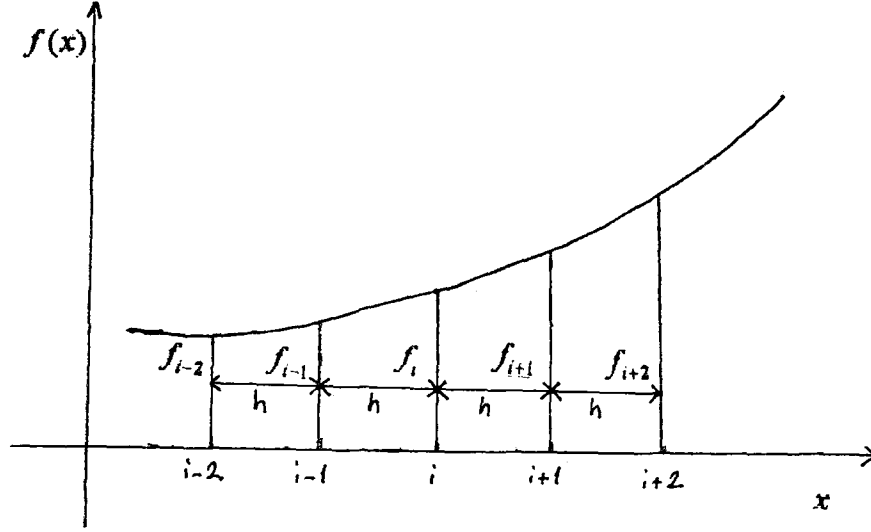
olarak elde edilir. (3.18a) denkleminde (3.18b) denklemini çıkartılarak elde edilen denklemden $f'(x)$ çözüldüğünde

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \frac{h^2}{6} f'''(x) - \dots \quad (3.21)$$

dir. (3.19), (3.20) ve (3.21) denklemlerinden x noktası civarında $f(x)$ fonksiyonunun birinci türevi için

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + O(h) \quad \text{ileri fark} \quad (3.22)$$

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} + O(h) \quad \text{geri fark} \quad (3.23)$$



Şekil 3.2 $f(x)$ in sonlu farklarla gösterimi

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + O(h^2) \quad \text{merkezi fark} \quad (3.24)$$

yaklaşımları yazılabilir. Burada $O(h)$ gösterimiyle hatanın h derecesinde ve $O(h^2)$ gösterimiyle hatanın h^2 derecesinde olduğu ifade edilmektedir. Bu ifadelere kesme hatası denir ve $h \rightarrow 0$ olduğunda hatanın h ile orantılı olduğunu gösterir.

Şekil3 deki gösterimler kullanılarak,

$$x = ih, \quad x+h = (i+1)h, \quad x-h = (i-1)h, \quad \text{vs.} \quad (3.25a)$$

$$f(x) = f_i, \quad f(x+h) = f_{i+1}, \quad f(x-h) = f_{i-1}, \quad \text{vs.} \quad (3.25b)$$

ise, x noktası civarında $f(x)$ fonksiyonunun birinci türevinin sonlu fark ifadesi (3.22), (3.23) ve (3.24) denklemlerinden yararlanılarak

$$f'_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} + O(h) \quad \text{ileri fark} \quad (3.26)$$

$$f'_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{h} + O(h) \quad \text{geri fark} \quad (3.27)$$

$$f'_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} + O(h^2) \quad \text{merkezi fark} \quad (3.28)$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$f'_i = \left. \frac{df}{dx} \right|_i$$

anlamındadır.

İleri ve geri fark h mertebesinde hassas olmasına karşın, merkezi fark h^2 mertebesinde hassastır. Birinci derece türevin ileri ve geri fark gösterimi için daha hassas ifadeler de bulunabilir (Özçelik 1980, Smith 1985, Mathews 1987).

3.4.2 İkinci Türevler

x noktası civarında bir $f(x)$ fonksiyonunun $f''(x)$ ikinci türevinin sonlu fark yaklaşımını bulmak için

$$f(x+2h) = f(x) + 2hf'(x) + 2h^2 f''(x) + \frac{4}{3}h^3 f'''(x) + \dots \quad (3.29a)$$

$$f(x-2h) = f(x) - 2hf'(x) + 2h^2 f''(x) - \frac{4}{3}h^3 f'''(x) + \dots \quad (3.29b)$$

Taylor serisi açılımları kullanılır. (3.18a) ve (3.29a) denklemleri arasında $f'(x)$ yok edilirse

$$f''(x) = \frac{f(x) - f(x+2h) - 2f(x+h)}{h^2} - hf'''(x) \dots \quad (3.30)$$

bulunur. Benzer olarak, (3.18b) ve (3.29b) denklemleri arasında $f'(x)$ yok edilirse

$$f''(x) = \frac{f(x-2h) - f(x) - 2f(x+h)}{h^2} - hf'''(x) \dots \quad (3.31)$$

bulunur. (3.29a) ve (3.29b) denklemleri arasında $f'(x)$ yok edilirse

$$f''(x) = \frac{f(x-h) + f(x+h) - 2f(x)}{h^2} - \frac{1}{12}h^2 f^{(iv)}(x) \dots \quad (3.32)$$

bulunur. (3.25a) ve (3.25b) denklemleriyle tanımlanan gösterimler kullanılarak, x noktası civarında $f''(x)$ ikinci derece türevinin sonlu fark yaklaşımları (3.30), (3.31) ve (3.32) denklemlerinden

$$f_i'' = \frac{f_i - 2f_{i+1} + f_{i+2}}{h^2} + O(h) \quad \text{ileri fark} \quad (3.33)$$

$$f_i'' = \frac{f_{i-2} - 2f_{i-1} + f_i}{h^2} + O(h) \quad \text{geri fark} \quad (3.34)$$

$$f_i'' = \frac{f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}}{h^2} + O(h^2) \quad \text{merkezi fark} \quad (3.35)$$

olarak yazılabilir. Burada

$$f_i'' = \left. \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \right|_i$$

dir. Merkezi fark yaklaşımı $O(h^2)$ mertebesinde, ileri ve geri fark yaklaşımları $O(h)$ mertebesinde hassastır.

x noktası civarında $f(x)$ fonksiyonunun daha yüksek dereceden türevleri de benzer olarak bulunabilir (Mathews 1987). Şekil 3.2 de gösterilen bir i düğüm noktasındaki $f(x)$ fonksiyonu için çeşitli dereceden türevlerin sonlu fark yaklaşımları aşağıdaki şekilde verilebilir:

3.4.3 $O(h^2)$ mertebesinde hassas merkezi fark yaklaşımları

$$\begin{aligned} f_i' &= \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} \\ f_i'' &= \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2} \\ f_i''' &= \frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + 2f_{i-1} - f_{i-2}}{2h^3} \\ f_i^{(iv)} &= \frac{f_{i+2} - 4f_{i+1} + 6f_i - 4f_{i-1} + f_{i-2}}{h^4} \end{aligned}$$

3.4.4 $O(h^4)$ mertebesinde hassas merkezi fark yaklaşımları

$$\begin{aligned} f_i' &= \frac{-f_{i+2} + 8f_{i+1} - 8f_{i-1} + f_{i-2}}{12h} \\ f_i'' &= \frac{-f_{i+2} + 16f_{i+1} - 30f_i + 16f_{i-1} - f_{i-2}}{12h^2} \\ f_i''' &= \frac{-f_{i+3} + 8f_{i+2} - 13f_{i+1} + 13f_{i-1} - 8f_{i-2} + f_{i-3}}{8h^3} \\ f_i^{(iv)} &= \frac{-f_{i+3} + 12f_{i+2} - 39f_{i+1} + 56f_i - 39f_{i-1} + 12f_{i-2} - f_{i-3}}{6h^4} \end{aligned}$$

3.4.5 $O(h^2)$ mertebesinde hassas ileri ve geri fark yaklaşımları

$$f'_i = \frac{-3f_i + 4f_{i+1} - f_{i+2}}{2h} \quad \text{ileri fark}$$

$$f'_i = \frac{3f_i - 4f_{i-1} + f_{i-2}}{2h} \quad \text{geri fark}$$

$$f''_i = \frac{2f_i - 5f_{i+1} + 4f_{i+2} - f_{i+3}}{h^2} \quad \text{ileri fark}$$

$$f''_i = \frac{2f_i - 5f_{i-1} + 4f_{i-2} - f_{i-3}}{h^2} \quad \text{geri fark}$$

$$f'''_i = \frac{-5f_i + 18f_{i+1} - 24f_{i+2} + 14f_{i+3} - 3f_{i+4}}{2h^3}$$

$$f'''_i = \frac{5f_i - 18f_{i-1} + 24f_{i-2} - 14f_{i-3} + 3f_{i-4}}{2h^3}$$

$$f^{(iv)}_i = \frac{3f_i - 14f_{i+1} + 26f_{i+2} - 24f_{i+3} + 11f_{i+4} - 2f_{i+5}}{h^4}$$

$$f^{(iv)}_i = \frac{3f_i - 14f_{i-1} + 26f_{i-2} - 24f_{i-3} + 11f_{i-4} - 2f_{i-5}}{h^4}$$

3.5 Nümerik Çözüm

(3.14) denklemlerinin (3.16) şartları altındaki nümerik çözümünü türevler için sonlu farklar yaklaşımlarını kullanarak oluşturalım.

$$\frac{dg}{d\eta} = \frac{g_{i+1} - g_{i-1}}{2h} + O(h^2)$$

$$\frac{d^3g}{d\eta^3} = \frac{g_{i+2} - 2g_{i+1} + 2g_{i-1} - g_{i-2}}{2h^3} + O(h^2)$$

olmak üzere (3.14) denklemi

$$A_i g_{i-2} + B_i g_{i-1} + C_i g_i + D_i g_{i+1} + E_i g_{i+2} = 0, \quad i = 1, \dots, N-1 \quad (3.36)$$

olarak sonlu farklar denklemi şeklinde ifade edilir. Burada

$$A_i = -\mu$$

$$B_i = 2\mu - h^2 \left(\alpha g_i - \frac{1}{3} i h \right)$$

$$C_i = -\frac{4h^3}{3}$$

olmak üzere $AX = B$ denklem sisteminin çözümü olarak sonuç elde edilir. Bu denklem sisteminin çözümünü tam pivotlama yapan Gauss eleme yöntemiyle ve beşli bant matrislere uygulanan direkt bir yöntemle çözülmüştür. Her iki alt programa göre elde edilen sonuçlar bundan sonraki bölümde verilecektir.

Türevler için sonlu fark yaklaşımı olarak

$$\frac{dg}{d\eta} = \frac{-g_{i+2} + 8g_{i+1} - 8g_{i-1} + g_{i-2}}{12h} + O(h^4)$$

$$\frac{d^3g}{d\eta^3} = \frac{g_{i+2} - 2g_{i+1} + 2g_{i-1} - g_{i-2}}{2h^3} + O(h^2)$$

kullanılırsa (3.14) ile verilen benzerlik denklemi

$$A_i g_{i-2} + B_i g_{i-1} + C_i g_i + D_i g_{i+1} + E_i g_{i+2} = 0, \quad i = 1, \dots, N-1 \quad (3.38)$$

şeklinde sonlu farklar denklemi olarak ifade edilir. Burada

$$A_i = -\mu + \frac{h^2}{6} \left(\varepsilon g_i - \frac{ih}{3} \right)$$

$$B_i = 2\mu - \frac{8h^2}{6} \left(\varepsilon g_i - \frac{ih}{3} \right)$$

$$C_i = -\frac{4h^3}{3}$$

$$D_i = -2\mu + \frac{8h^2}{6} \left(\varepsilon g_i - \frac{ih}{3} \right)$$

$$E_i = \mu - \frac{h^2}{6} \left(\varepsilon g_i - \frac{ih}{3} \right)$$

şeklinindedir. Sınırlarda ise türevli sınır şartı için

$$\frac{dg}{d\eta} = \frac{g_{i+1} - g_{i-1}}{2h}$$

sonlu fark yaklaşımı kullanıldığında

$$i = 0 \text{ için } g_1 = g_{-1}, \quad g_0 = u_b t^{2/3}$$

$$i = N \text{ için } g_{N+1} = g_{N-1}, \quad g_N = u_t t^{2/3}$$

elde edilir. Bu durumda da sonlu fark denkleminde elde edilecek olan cebirsel denklem sisteminin katsayılar matrisi beşli bant matris olup (3.37) formundadır.

Benzer olarak

$$\mathbf{X}^T = [g_1 \ g_2 \ \dots \ g_{N-1}]_{1 \times (N-1)}$$

ve

$$\mathbf{B}^T = [-B_1g_0 - A_2g_0 \ 0 \dots 0 - E_{N-1}g_N - D_{N-1}g_N]_{1 \times (N-1)}$$

formunda olup $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ denklem sisteminin çözümü sonucu verir. Elde edilen bu denklem sistemi de uygun bir algoritma ile çözülür.

Son olarak türevler için sonlu fark yaklaşımı olarak

$$\frac{dg}{d\eta} = \frac{-g_{i+2} + 8g_{i+1} - 8g_{i-1} + g_{i-2}}{12h} + O(h^4)$$

$$\frac{d^3g}{d\eta^3} = \frac{-g_{i+3} + 8g_{i+2} - 13g_{i+1} + 13g_{i-1} - 8g_{i-2} + g_{i-3}}{8h^3} + O(h^4)$$

kullanılırsa, (3.14) denklemini

$$A_i = \mu$$

$$B_i = -8\mu + \frac{8h^2}{12} \left(\varepsilon g_i - \frac{1}{3}ih \right)$$

$$C_i = 13\mu - \frac{64h^2}{12} \left(\varepsilon g_i - \frac{1}{3}ih \right)$$

$$D_i = -\frac{16h^3}{3}$$

$$E_i = -13\mu + \frac{64h^2}{12} \left(\varepsilon g_i - \frac{1}{3}ih \right)$$

$$F_i = 8\mu - \frac{8h^2}{12} \left(\varepsilon g_i - \frac{1}{3}ih \right)$$

$$G_i = -\mu$$

olmak üzere

$$A_i g_{i-3} + B_i g_{i-2} + C_i g_{i-1} + D_i g_i + E_i g_{i+1} + F_i g_{i+2} + G_i g_{i+3} = 0 \quad i=1, \dots, N-1 \quad (3.39)$$

şeklinde sonlu farklar denklemini olarak ifade edilir. Sınırlarda $\frac{dg}{d\eta} = 0$ olduğundan

$$i=0 \text{ için } g_2 = g_{-2}, \quad g_1 = g_{-1}, \quad g_0 = u_0 t^{2/3}$$

$$i=N \text{ için } g_{N+2} = g_{N-2}, \quad g_{N+1} = g_{N-1}, \quad g_N = u_1 t^{2/3}$$

olur. Bu durumda problem

$$A = \begin{bmatrix} B_1 + D_1 & A_1 + E_1 & F_1 & G_1 & & & \\ A_2 + C_2 & D_2 & E_2 & F_2 & G_2 & & \\ B_3 & C_3 & D_3 & E_3 & F_3 & G_3 & \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 & E_4 & F_4 & G_4 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{N-4} & B_{N-4} & C_{N-4} & D_{N-4} & E_{N-4} & F_{N-4} & G_{N-4} \\ & A_{N-3} & B_{N-3} & C_{N-3} & D_{N-3} & E_{N-3} & F_{N-3} \\ & & A_{N-2} & B_{N-2} & C_{N-2} & D_{N-2} & E_{N-2} + G_{N-2} \\ & & & A_{N-1} & B_{N-1} & C_{N-1} + G_{N-1} & D_{N-1} + F_{N-1} \end{bmatrix}_{(N-1) \times (N-1)}$$

$$X^T = [g_1 \ g_2 \ \dots \ g_{N-1}]_{1 \times (N-1)}$$

ve

$$B^T = [-C_1 g_0 - B_2 g_0 - A_3 g_0 \ 0 \dots 0 - G_{N-3} g_N - F_{N-2} g_N - E_{N-1} g_N]_{1 \times (N-1)}$$

olmak üzere $AX = B$ denklem sisteminin çözümüne indirgenir. Bu denklem sistemi de uygun bir algoritma seçilerek çözülür.

3.6 Algoritma

Elde edilen sonlu fark denklemlerinin çözümü için aşağıda verilen algoritma uygulanmaktadır :

- 1) t sıfırdan farklı (fakat sıfıra yakın) bir değer seçilerek orjinal problem için verilen başlangıç şartından elde edilen sayısal değerlere benzerlik dönüşümü uygulanarak g_i ($i=0, \dots, N$) değerleri bulunur.
- 2) t , Δt kadar artırılır.
- 3) h adım uzunluğu hesaplanır.
- 4) Çözümü yapılacak denklem sistemi için A katsayılar matrisi ve B^T matrisi hesaplanır.

- 5) Bulunan denklem sistemi, uygun bir yöntemle (tam pivotlamayla Gauss eleme yöntemi, katsayılar matrisi beşli veya yedili bant matrisi olan sistemler için direkt çözüm yöntemleri, iterasyon yöntemleri gibi) çözülür.
- 6) İstenilen T değerine ulaşana kadar algoritma (2) adımdan tekrarlanır



IV. BÖLÜM

NÜMERİK SONUÇLAR

Bu bölümde Korteweg-de Vries (KdV) denklemine önceki bölümde verilen benzerlik dönüşümü uygulandıktan sonra (3.14) denklemini olarak verilen nonlinear değişken katsayılı adi diferansiyel denklemin nümerik çözümü üzerine sonuçlar verilecektir.

(3.14) denklemini nonlinear olduğundan denklemin tipine uygun analitik çözüm oluşturmanın zorluğu karşısında ve benzerlik dönüşümünün kullanılmasından dolayı, nümerik olarak çözümün yapılması uygun görüldüğünü tekrar hatırlatalım. Nümerik çözümlerin diferansiyel denklemlerin tipinden bağımsız olması da bir avantaj olarak görülmektedir. Yaklaşık olarak en basit haliyle, türevler yerine uygun sonlu farklar yaklaşımları yazılarak nümerik çözüm oluşturulmuştur. Yöntem, nümerik işlem altında " kendi kendine başlayabilen = self starting " bir yöntem değildir. KdV denklemini için 3.3 Bölümünde verilen başlangıç şartına benzerlik dönüşümü uygulandıktan sonra elde edilen şartın da yöntemin çözüme başlaması için uygun olmaması t nin çok küçük bir değer olarak alınmasına neden olmuştur. Ayrıca, $x \rightarrow \infty$ durumunu bilgisayarda tam olarak tespit edebilmek için, limit problemi olarak düşünülüp uygun sonlu sayı araştırması yapıldı. Bunun için oluşturulan sayı dizisi klasik limit tanımından faydalanılarak $x=40$ ve daha büyük sayılar olarak tespit edildi.

Nonlinear adi diferansiyel denklemlerin nümerik kararlılığını veren herhangi bir teori olmamasına rağmen, aşağıda belirtilen denemeler nümerik kararlılık hakkında bilgi edinilmesine yardımcı olabilecektir.

Bir nümerik çözümün kararlılığı seçilen yöntemle, kesikli ortamdaki düğüm sayısına bağlıdır. Bazı durumlarda kesikli ortamdaki düğüm sayısı büyütülerek çözüm kararlı yapılabilir. Bu genel bir durum olmamakla beraber değişik düğüm sayıları için aynı problem çözülerek karar verilebilir. Bu düşünce altında, ilk olarak

(3.14) denklemindeki türevler yerine hata mertebesi h^2 olan merkezi fark yaklaşımları kullanılarak elde edilen (3.36) sonlu fark denklemi incelendi. N kesikli ortamdaki düğüm sayısını göstermek üzere birbirinden farklı N değerleri için (3.36) denklemine Bölüm 3.6 da verilen algoritma uygulandı. Bu durumda, her bir N değeri için $(N-1)$ bilinmeyenli $(N-1)$ denklemden oluşan cebirsel denklem sisteminin çözümü için

1) Tam pivotlama yapan Gauss eleme yöntemi

2) Katsayılar matrisi beşli bant matris olan sistemler için direkt yöntem

alt programları kullanılarak sonuçlar elde edildi. (1) alt programı kullanıldığında N değeri, bilgisayarın getirdiği sınırlama ile en fazla 80 olarak alınabildi. 80 den daha küçük N değerleri için bulunan sonuçlarla karşılaştırıldığında grafiklerden görülebileceği gibi herhangi bir bozulma olmadığı saptanmıştır. (2) alt programı kullanıldığında ise N değeri, benzer nedenden dolayı en fazla 500 olarak alınabilmektedir. Bu durumda ise, 500 den daha küçük N değerleri için elde edilen sonuçlara göre grafikler çizildiğinde, doğrultuların aynı olmasına rağmen 300 den küçük N değerleri için çözümün doğrusallaşmaya başladığı görülmüştür..

Her iki alt programın kullanılmasıyla elde edilen sonuçlara göre oluşturulan grafiklerin çözüm için aynı doğrultuyu verdiği gözlemlendi.

Yöntemin kararlılığı için; (3.14) denklemindeki birinci türev yerine hata mertebesi h^4 olan sonlu fark yaklaşımını kullanarak (3.38) sonlu fark denklemini oluşturuldu. (3.38) sonlu fark denklemine de (3.36) sonlu fark denklemine uygulanan denemeler yapıldı. Daha sonra, (3.14) denklemindeki birinci ve üçüncü türev yerine hata mertebesi h^4 olan sonlu fark yaklaşımları kullanılarak (3.39) sonlu farklar denklemi elde edildi. (3.39) sonlu fark denkleminde elde edilen cebirsel denklem sisteminin çözümünü elde etmek için sadece Gauss eleme yöntemi uygulandı.

Bütün durumlar, yani (3.36), (3.38) ve (3.39) sonlu fark formüllerinden elde edilen sonuçlara göre elde edilen grafiklerin aynı doğrultuda çözüme ulaştığı saptandı.

Yapılan denemelerden sonra ; karşılaştırmada kolaylık sağlayabilmek için uygun matris boyutu seçilerek elde edilen sonuçlar karşılaştırıldı.

Bu yöntemde zamanın ortadan kaldırılması yöntemle çözüm kolaylığı sağlanmasına rağmen dönüşümün altındaki problemin sınır değer problemi olması kapalı olarak ifade edilen zaman için başlangıç değeri oluşturulmasını denemelerle tespiti neden olmuştur. Tahmin edilebileceği gibi, bu nüanslar grafikteki küçük zamanlar için farklılığın oluşmasının nedenlerinden biridir. Bunun düzeltilmesi ayrı bir çalışma olarak ileride yapılacaktır. Diğer açıdan da, zaman kapalı olarak işleme girdiğinden nümerik hesaplamalardan elde edilen değerlerin, yalnızca jakobiyenin sıfırdan farklı olmasına dayanarak matematiksel olarak doğru fakat hesaplama anlarında bir miktar hata içerebileceği düşünülmektedir. Bu da grafiklerdeki farklılık olarak zaten açığa çıkmaktadır.

Ayrıca, problem özdeğer problemi olarak çözülmeye çalışıldı. Fakat Ablowitz ve Newell'in (1973) belirttiği gibi asimptotik davranışın incelenmesi açısından probleme bakıldığında var olan başlangıç koşulları altında farklı özfonksiyonlar bulunamamıştır. Dolayısıyla, problemin küçük t zamanları için yöntemin dışında bazı zorluklar içerdiği tespiti geçerlilik kazanmış, benzer zorlukların diğer araştırmacılar tarafından da gündeme getirildiği gösterilmiştir (Brezin ve Karpman 1967).

Yapılan denemeler sonunda elde ettiğimiz sonuçlar, zamanın küçük değerleri dışında doğrultu(trend) olarak Marchant ve Smyth (1991) ile paralellik göstermekte ve büyük zamanlar için aynı sonucu vermektedir. Tahmin edildiği gibi küçük zamanlar için elde edilen çözümün doğruluğu hakkında kesinlik olmadığı için bizim elde ettiğimiz sonuçların da kullanılan yöntem çerçevesinde doğru olduğunu kabul gerekecektir. Grafik bir bütün halinde incelendiğinde bu düşüncemizi daha da kuvvetlendiği görülecektir.

Bundan sonraki çalışmalarımızda yöntemin kısa zaman çözümünü verecek lokal düzeltmeler yapılmaya çalışılacak ayrıca, jakobiyen dönüşüm üzerinde çalışılarak başlangıç değerleri daha dikkatli seçilmeye çalışılacaktır.

Tablo 4.1 $u_1 = .05$, $u_2 = -.05$ için (3.36) sonlu fark formülünün Gauss eleme ile çözümü

x	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
N											
80	-.05	.0049	.0266	.0319	.0349	.0375	.0400	.0424	.0448	.0473	.05
40	-.05	-.0049	.0116	.0168	.0209	.0250	.0294	.0340	.0389	.0441	.05
t=2.5											
80	-.05	.0042	.0266	.0319	.0349	.0375	.0400	.0424	.0448	.0473	.05
40	-.05	-.0002	.0116	.0168	.0209	.0250	.0294	.0340	.0389	.0441	.05
t=5											
80	-.05	.0064	.0099	.0133	.0171	.0234	.0261	.0313	.0370	.0432	.05
40	-.05	.0001	.0036	.0067	.0105	.0151	.0204	.0266	.0335	.0413	.05
t=7.5											
80	-.05	.0084	.0124	.0157	.0194	.0235	.0280	.0329	.0381	.0438	.05
40	-.05	.0004	.0042	.0075	.0113	.0159	.0212	.0272	.0340	.0415	.05
t=10											

Tablo 4.2 $u_1 = .05$, $u_2 = -.05$ için (3.39) sonlu fark formülünün Gauss eleme ile çözümü

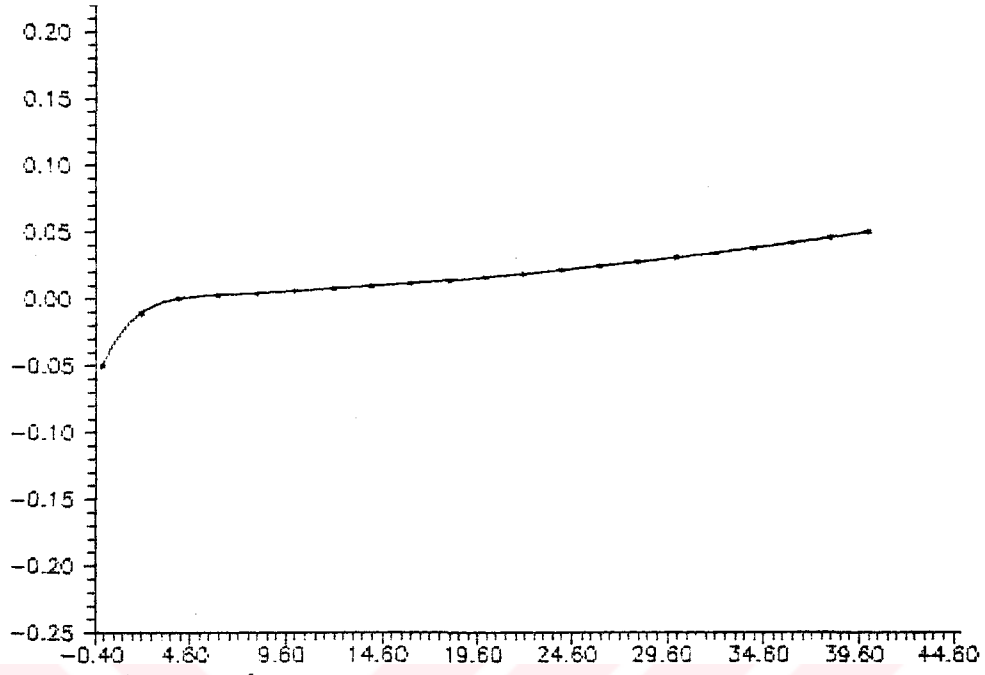
x	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
N											
80	-.05	.0487	.0713	.0744	.0732	.0704	.0668	.0628	.0584	.0538	.05
40	-.05	.0015	.0224	.0285	.0323	.0355	.0384	.0413	.0440	.0467	.05
t=2.5											
80	-.05	.0142	.0175	.0212	.0250	.0289	.0329	.0370	.0412	.0454	.05
40	-.05	.0050	.0103	.0149	.0196	.0243	.0292	.0342	.0392	.0444	.05
t=5											
80	-.05	.0166	.0211	.0246	.0281	.0316	.0351	.0387	.0424	.0460	.05
40	-.05	.0060	.0117	.0162	.0207	.0253	.0300	.0247	.0396	.0446	.05
t=7.5											
80	-.05	.0190	.0239	.0271	.0302	.0334	.0366	.0398	.0431	.0464	.05
40	-.05	.0069	.0129	.0173	.0217	.0261	.0307	.0353	.0400	.0447	.05
t=10											

Tablo 4.3 $u_1 = .05$, $u_6 = -.05$ için (3.36) sonlu fark formülünün beşli bant matris ile çözümü

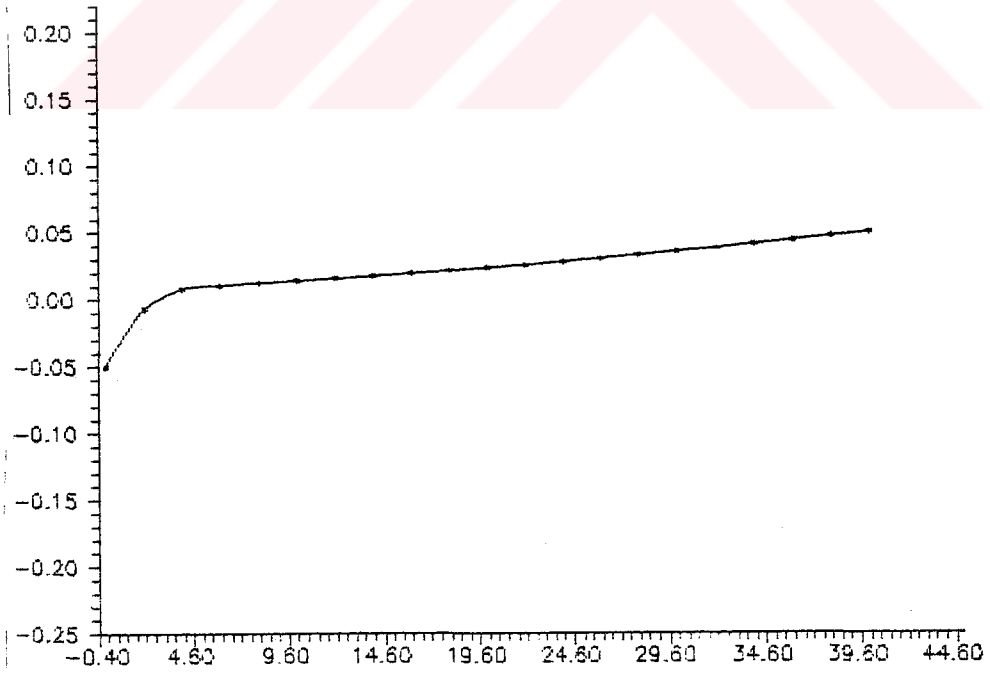
$N \backslash x$	0	4.8	9.6	14.4	19.2	24.0	28.8	33.6	38.4	40.0
500	-.05	.0012	.0131	.0146	.0150	.0153	.0154	.0155	.0165	.05
400	-.05	-.0011	.0099	.0113	.0117	.0119	.0121	.0122	.0132	.05
250	-.05	-.0117	-.0041	-.0034	-.0032	-.0031	-.0130	-.0030	-.0016	.05
200	-.05	-.0224	-.0211	-.0212	-.0214	-.0215	-.0218	-.0220	-.0204	.05
100	-.05	.0473	.0852	.0969	.1041	.1102	.1159	.1215	.1248	.05
t=2.5										
500	-.05	-.0094	.0109	.0156	.0171	.0178	.0182	.0184	.0209	.05
400	-.05	-.0103	.0094	.0139	.0153	.0159	.0163	.0165	.0192	.05
250	-.05	-.0136	.0035	.0072	.0083	.0088	.0091	.0093	.0125	.05
200	-.05	-.0168	-.0019	.0010	.0019	.0023	.0025	.0026	.0063	.05
100	-.05	-.1474	-.1490	-.1472	-.1489	-.1517	-.1550	-.1584	-.1442	.05
t=5										
500	-.05	-.0172	.0058	.0138	.0166	.0179	.0186	.0191	.0230	.05
400	-.05	-.0177	.0049	.0126	.0153	.0166	.0172	.0177	.0218	.05
250	-.05	-.0193	.0015	.0083	.0106	.0117	.0123	.0127	.0174	.05
200	-.05	-.0208	-.0014	.0046	.0066	.0076	.0081	.0084	.0137	.05
100	-.05	-.0438	-.0413	-.0416	-.0423	-.0429	-.0436	-.0443	-.0330	.05
t=7.5										
500	-.05	-.0133	.0049	.0126	.0160	.0172	.0183	.0190	.0243	.05
400	-.05	-.0136	.0042	.0117	.0149	.0161	.0172	.0179	.0234	.05
250	-.05	-.0150	.0017	.0085	.0113	.0124	.0133	.0139	.0201	.05
200	-.05	-.0162	-.0004	.0058	.0084	.0093	.0102	.0108	.0174	.05
100	-.05	-.0292	-.0220	-.0203	-.0199	-.0199	-.0199	-.0200	-.0085	.05
t=10										

Tablo 4.4 $u_i = .05$, $u_b = -.05$ için (3.38) sonlu fark formülünün beşli bant matris ile çözümü

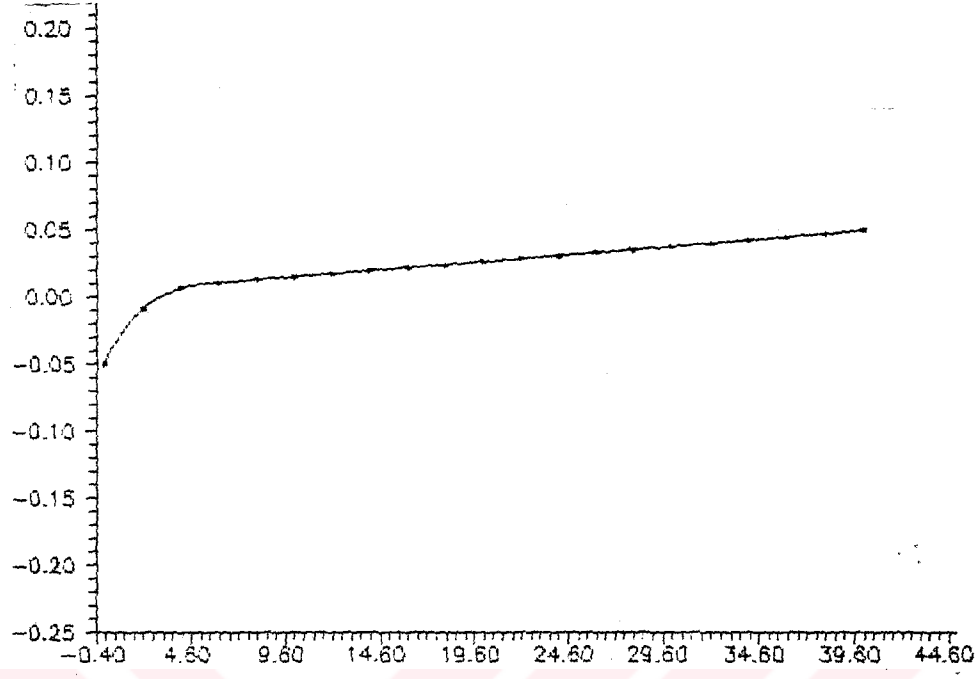
$N \backslash x$	0	4.8	9.6	14.4	19.2	24.0	28.8	33.6	38.4	40.0
500	-.05	.0223	.0436	.0472	.0485	.0491	.0495	.0497	.0499	.05
400	-.05	.0220	.0433	.0469	.0482	.0489	.0493	.0496	.0498	.05
250	-.05	.0210	.0419	.0457	.0472	.0481	.0488	.0493	.0497	.05
200	-.05	.0201	.0408	.0447	.0464	.0474	.0483	.0490	.0495	.05
100	-.05	.0148	.0338	.0383	.0410	.0432	.0452	.0472	.0485	.05
t=2.5										
500	-.05	.0020	.0333	.0430	.0464	.0481	.0490	.0495	.0499	.05
400	-.05	.0019	.0331	.0428	.0463	.0480	.0489	.0495	.0499	.05
250	-.05	.0016	.0326	.0423	.0458	.0476	.0486	.0493	.0499	.05
200	-.05	.0014	.0231	.0418	.0454	.0472	.0484	.0492	.0498	.05
100	-.05	-.0001	.0219	.0385	.0424	.0448	.0466	.0481	.0495	.05
t=5										
500	-.05	.0033	.0287	.0397	.0446	.0464	.0481	.0492	.0499	.05
400	-.05	.0033	.0286	.0396	.0445	.0463	.0481	.0492	.0499	.05
250	-.05	.0031	.0284	.0393	.0442	.0461	.0479	.0490	.0498	.05
200	-.05	.0030	.0281	.0390	.0440	.0459	.0477	.0489	.0498	.05
100	-.05	.0024	.0267	.0373	.0423	.0443	.0466	.0482	.0495	.05
t=7.5										
500	-.05	-.0058	.0200	.0341	.0413	.0442	.0470	.0487	.0498	.05
400	-.05	-.0058	.0200	.0340	.0413	.0442	.0469	.0487	.0498	.05
250	-.05	-.0058	.0199	.0339	.0411	.0440	.0468	.0486	.0498	.05
200	-.05	-.0059	.0198	.0337	.0410	.0439	.0467	.0485	.0498	.05
100	-.05	-.0059	.0194	.0329	.0400	.0429	.0459	.0480	.0496	.05
t=10										



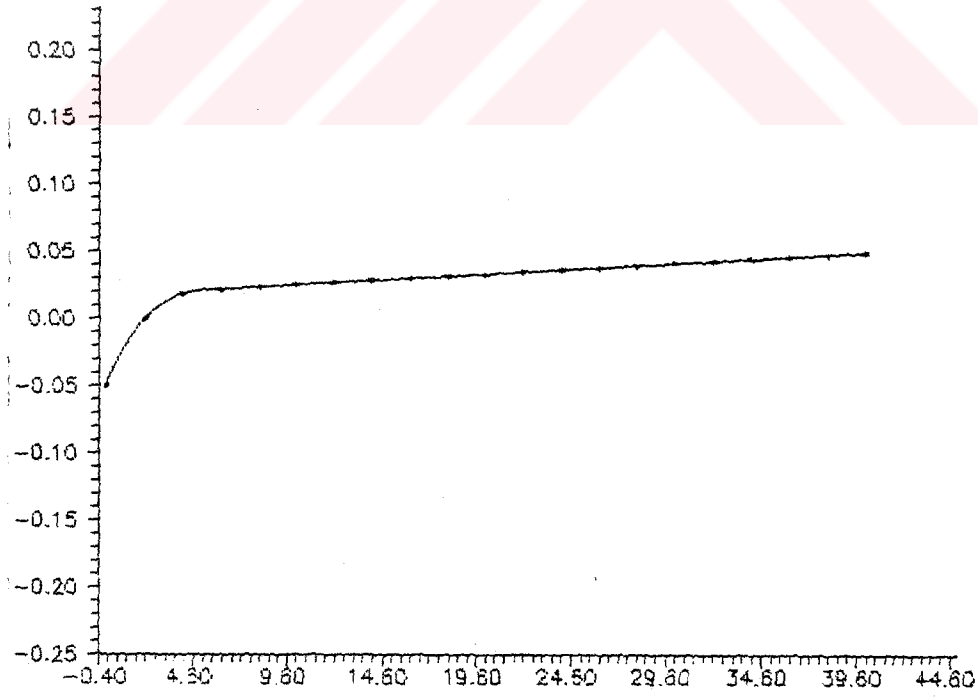
Şekil 4.1 $u_l = .05$, $u_b = -.05$ için (3.36) sonlu fark formülünün Gauss eleme ile çözümü,
 $N=40$, $t=10$



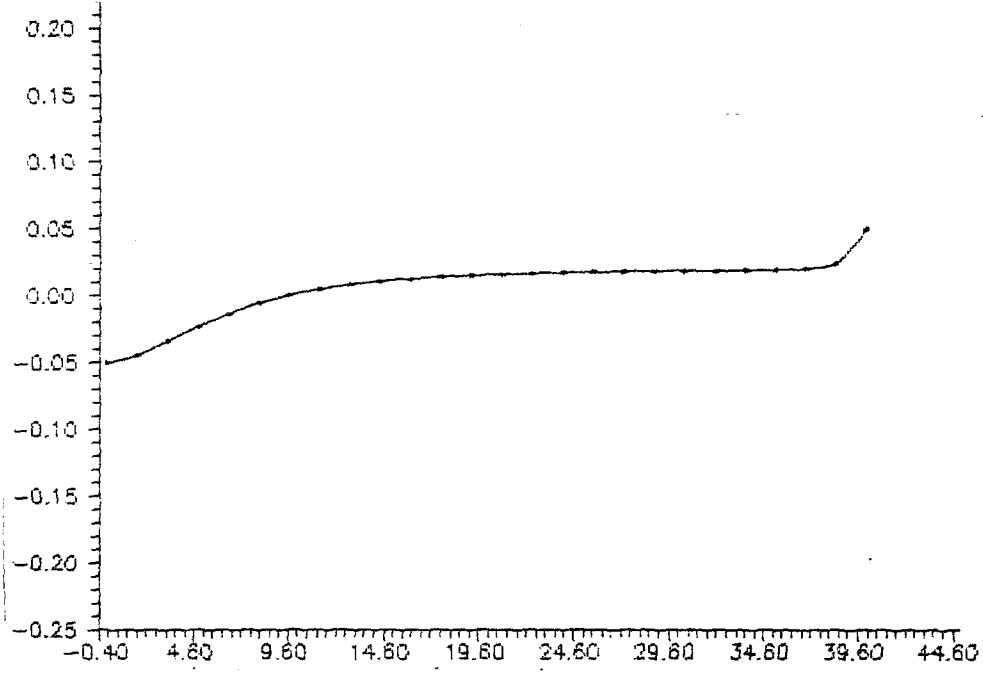
Şekil 4.2 $u_l = .05$, $u_b = -.05$ için (3.36) sonlu fark formülünün Gauss eleme ile çözümü,
 $N=80$, $t=10$



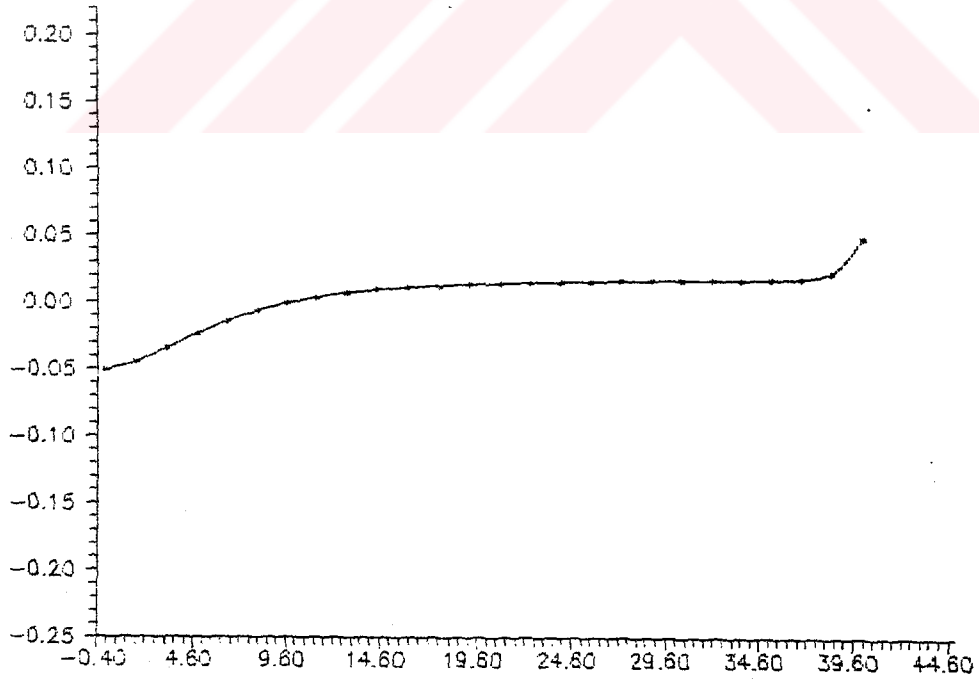
Şekil 4.3 $u_l = .05$, $u_b = -.05$ için (3.39) sonlu fark formülünün Gauss eleme ile çözümü,
 $N=40$, $t=10$



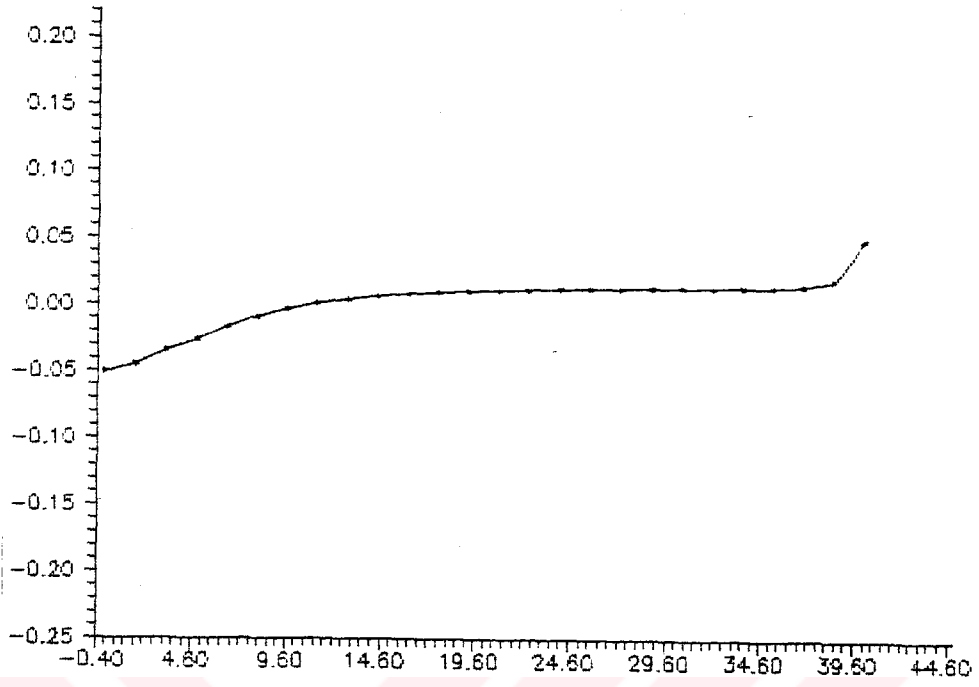
Şekil 4.4 $u_l = .05$, $u_b = -.05$ için (3.39) sonlu fark formülünün Gauss eleme ile çözümü,
 $N=80$, $t=10$



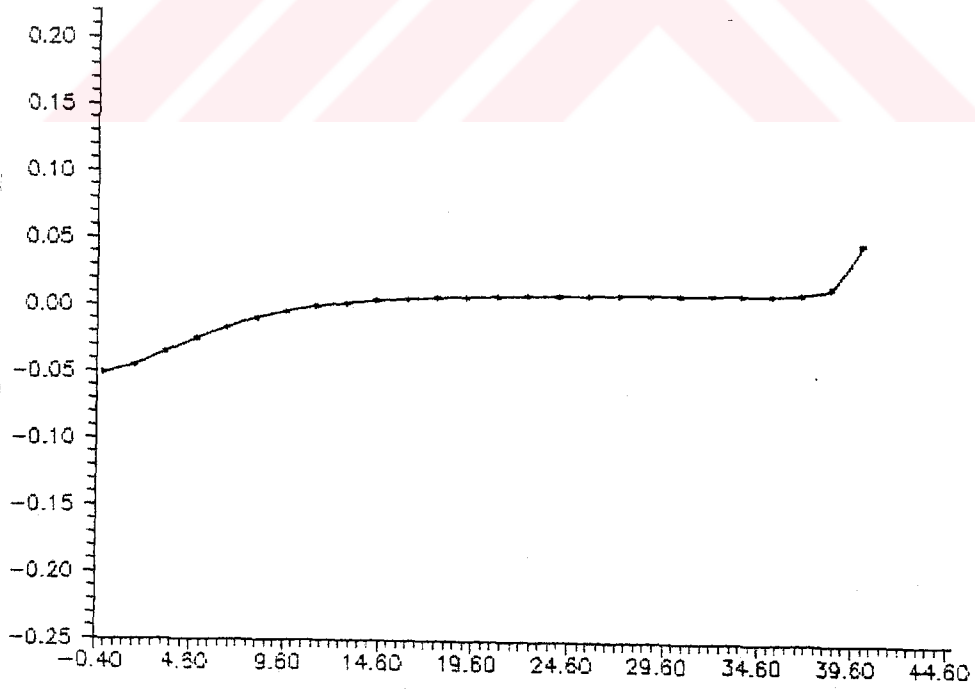
Şekil 4.5 $u_i = .05$, $u_b = -.05$ için (3.36) sonlu fark formülünün beşli bant matris ile çözümü,
 $N=500$, $t=10$



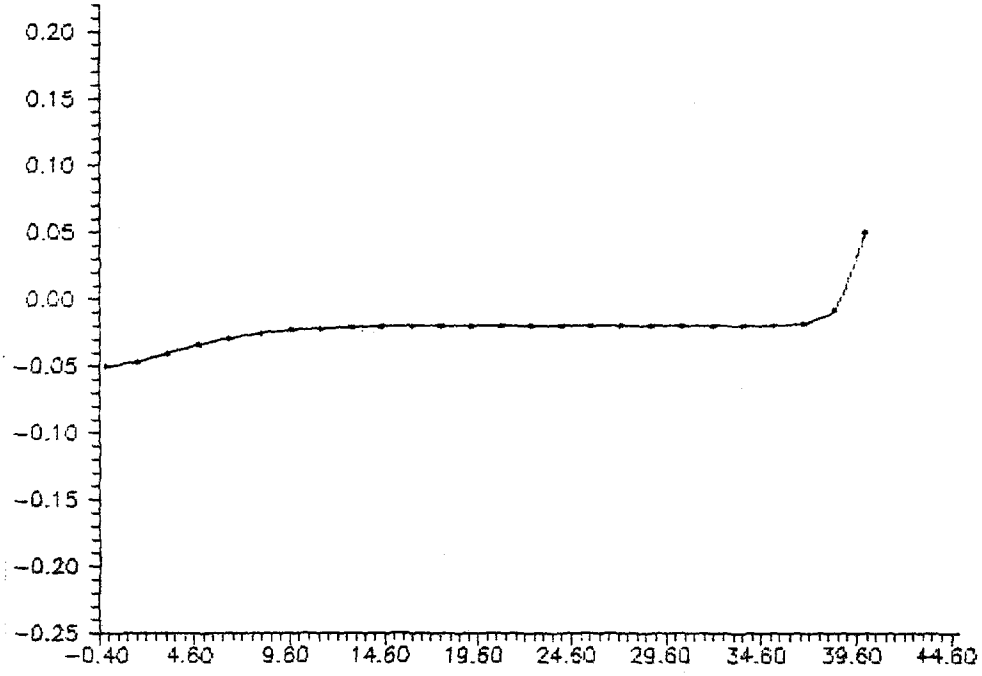
Şekil 4.6 $u_i = .05$, $u_b = -.05$ için (3.36) sonlu fark formülünün beşli bant matris ile çözümü,
 $N=400$, $t=10$



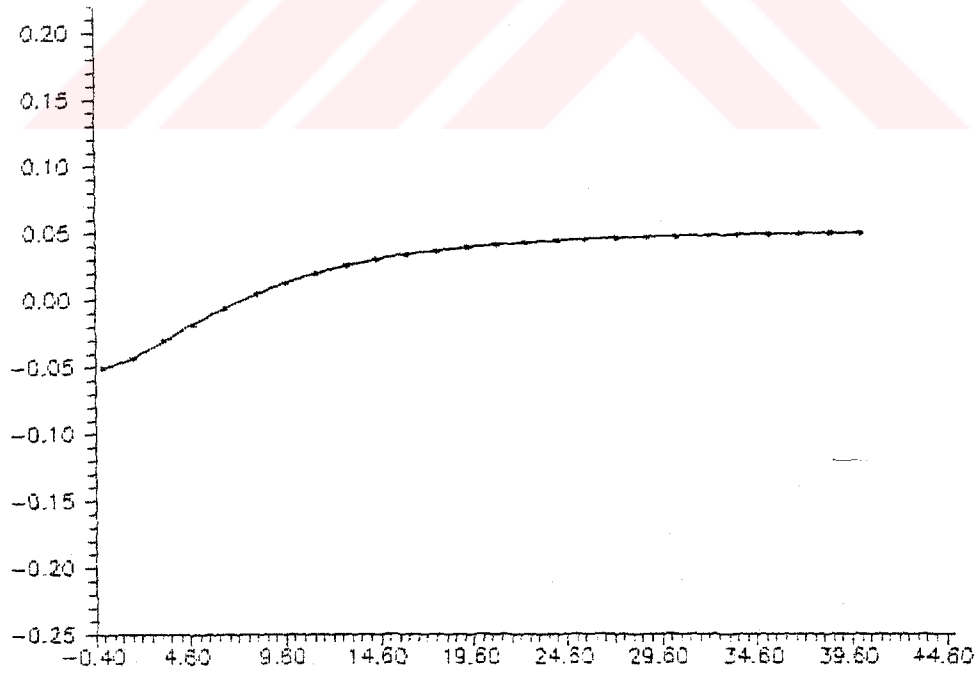
Şekil 4.7 $u_l = .05$, $u_b = -.05$ için (3.36) sonlu fark formülünün beşli bant matris ile çözümü,
 $N=250$, $t=10$



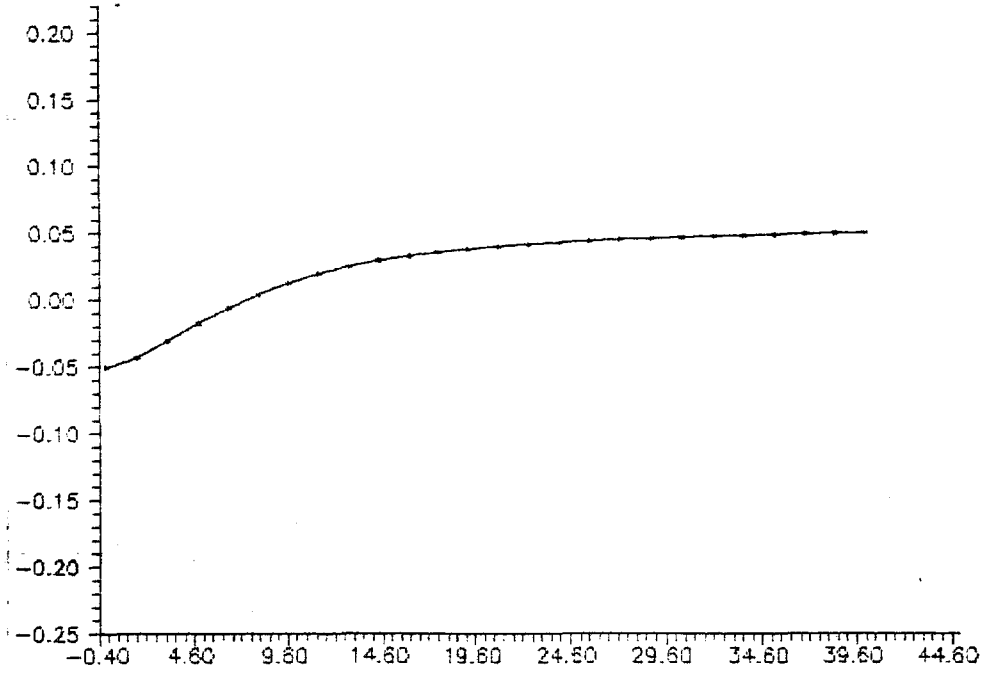
Şekil 4.8 $u_l = .05$, $u_b = -.05$ için (3.36) sonlu fark formülünün beşli bant matris ile çözümü,
 $N=200$, $t=10$



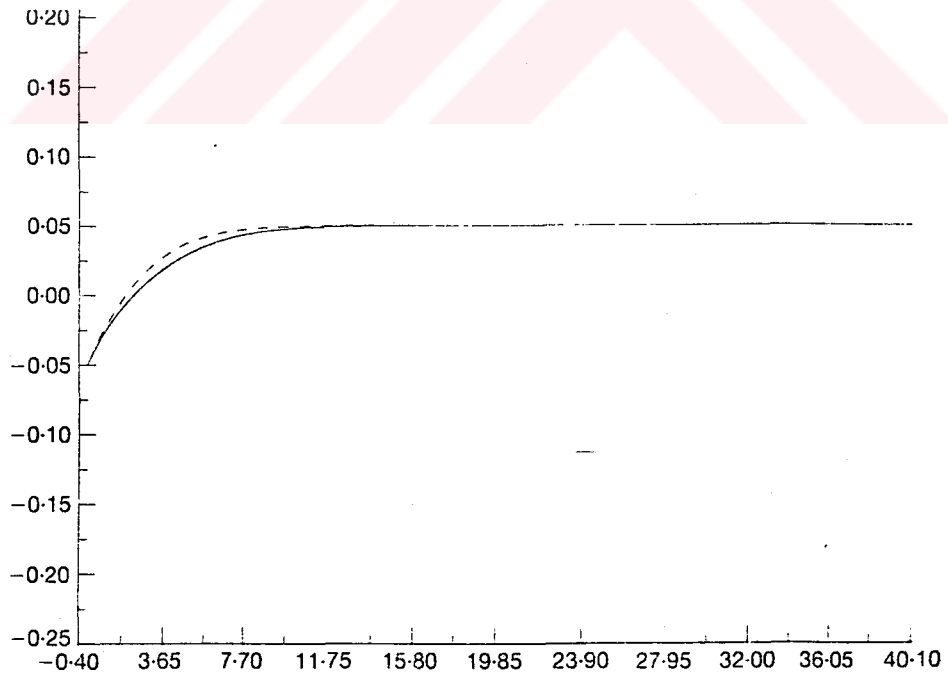
Şekil 4.9 $u_i = .05$, $u_b = -.05$ için (3.36)'sonlu fark formülünün beşli bant matris ile çözümü, $N=100$, $t=10$



Şekil 4.10 $u_i = .05$, $u_b = -.05$ için (3.38) sonlu fark formülünün beşli bant matris ile çözümü, $N=500$, $t=10$



Şekil 4.11 $u_i = .05$, $u_b = -.05$ için (3.38) sonlu fark formülünün beşli bant matris ile çözümü,
 $N=100$, $t=10$



Şekil 4.12 $u_i = .05$, $u_b = -.05$ için Marchant ve Smyth'in(1991) çözümü, $t=10$

KAYNAKLAR

- 1] Abbott,D.E.,and Kline,S.J., Simple Methods For Classification And Construction Of Similarity Solutions Of Partial Differential Equations, Rept.MD-6, Dept.Of Mech.Eng., Standford University, Standford, California. AFOSR-TN-60-1163
- 2] Abe,K., and Inoue,O., Fourier Expansion Solution Of The Korteweg-de Vries Equation, J.Comput.Phys.34,202-210(1980)
- 3] Ablowitz,M.J., and Newell, A.C., The Decay of The Continuous Spectrum For Solutions of The Korteweg-de Vries Equation, J.Math. Phys. 14,1277-1284(1973)
- 4] Acrivos,A.,Shah,M.J.,and Peterson,E.E.,AIChE J.6,312(1960)
- 5] Alexander,M.E., and Morris,J.L., Galerkin Methods Applied to Some Model Equations For Nonlinear Dispersive Waves,J.Comp.Phys.30,428-451(1979)
- 6] Ames,W.F., Nonlinear Ordinary Differential Equation In Transport Processes, Academic Press, New York ,1968
- 7] Ames,W.F., Nonlinear Ordinary Differential Equation In Engineering, Academic Press,New York,London,1965)
- 8] Ames,W.F., Ind.Eng.Chem.Fundamentals 4,72-76(1965)
- 9] Birkhoff,G.,Hydrodynamics,2nd ed.(1st ed.,1950) Princeton Univ.Press,Princeton, New Jersey,1960
- 10] Brezin,Y.A., and Karpman,V.I., Nonlinear Evolution of Disturbances in Plasma And Other Dispersive Media, Soviet Phys.JETP 24,1049-1056(1967)
- 11] Canosa,J.,and Gazdag,J.,J.Comput.Phys.23,393(1977)
- 12] Camassa,R.,and Wu,T.Y.,The Korteweg-de Vries Model With Boundary Forcing, Wave Motion 11,495-506(1989)
- 13] Christ,F.M., and Weinstein,M.I., Dispersion Of Small Amplitude Solutions Of Generalized Korteweg-de Vries Equation,J.Func.Analy.100,87-109(1991)
- 14] Cohen,A.,An Introduction To The Lie Theory of One-Parameter Groups,Stechert, New York,1931

- 15] Cooley, J.W., Lewis, P.A., and Welch, P.D., IEEE Trans. Educ. E-12 1, 27-34 (1969)
- 16] Eisenhart, L.P., Continuous Groups of Transformations, Dover, New York (1961)
- 17] Feller, W., Ann. Math. [2] 55, 468 (1952)
- 18] Fokas, A.S., and Ablowitz, M.J., Forced Nonlinear Evolution Equations and The Inverse Scattering Transform, Stud. Appl. Math. 80, 253-272 (1989)
- 19] Fornberg, B., and Whitham, G.B., A Numerical and Theoretical Study of Certain Nonlinear Wave Phenomena, Phil. Trans. R. Soc. Lond. A 289, 373-404 (1978)
- 20] Gardner, C.S., and Morikawa, G.K., Similarity In The Asymptotic Behaviour of Collision-Free Hydromagnetic Waves And Water Waves, New York Univ., Courant Inst. Math. Sci., Res. Report NYO-9082 (1960)
- 21] Gazdag, J., Numerical Convective Schemes Based on Accurate Computation of Space Derivatives, J. Comput. Phys. 13, 100-113 (1973)
- 22] Goda, K., On Stability of Some Finite Difference Schemes For The KdV Equation, J. Phys. Soc. Japan 39, 229 (1975)
- 23] Gourlay, JIMA 6 (1970)
- 24] Greig, I.S., and Morris, J.L., A Hopscotch Method For The Korteweg-de Vries Equation, J. Comp. Phys. 20, 64-80 (1976)
- 25] Gurevich, A.V., and Pitaevski, L.P., Nonstationary Structure Of A Collisionless Shock Wave, Sov. Phys. JETP 38, 291-297 (1974)
- 26] Gutfinger, C., and Shinnar, R., AIChE J. 10, 631 (1964)
- 27] Hansen, A.G., Similarity Analyses Of Boundary Value Problems In Engineering, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1964
- 28] Hayashi, N., Analcity Of Solutions Of The Korteweg-de Vries equations, SIAM J. Math. Anal. 22, 6, 1738-1743 (1991)
- 29] Hellums, J.D., and Churchill, S.W., Chem. Eng. Progr. Symp. Ser. (No. 32) 57, 75 (1961)
- 30] Hellums, J.D., and Churchill, S.W., AIChE J. 10, 110 (1964)
- 31] Jordan, D.W., and Smith, P., Nonlinear Ordinary Differential Equations, Clarendon Press, Oxford, 1987

- 32] Korteweg,D.J.,and de Vries,G.,On The Change Of Form Of Long Waves Advancing In A Rectangular Canal, And On A New Type Of Stationary Waves,Philos.Mag., 39,422-443(1895)
- 33] Kruskal,M.D.,Asymptotology In Nümerical Computation: Progress And Plans On The Fermi-Pasta-Ulam Problem,Proceeding Of The IBM Scientific Computing Symposium On The Large-Scale Problems In Physics(1965)
- 34] Kruskal,M.D.,private communication (1981)
- 35] Krzywoblocki,M.Z.,and Roth,H.,Comment Math.Univ. St.Paul. 13(1964)
- 36] Krzywoblocki,M.Z.,and Roth,H.,Comment Math.Univ. St.Paul. 14(1966)
- 37] Lax,P.D., Integrals Of Nonlinear Equations Of Evolution And Solitary Waves, Comm.Pure Appl.Math.,21,467-490(1968)
- 38] Lee,S. Y.,and Ames,W.F., AICHE J. 12,700(1966)
- 39] Lie,S., Arch.Math.(Kristiana) 6,328(1881)
- 40] Manohar,R.,Some Similarity Solutions Of Partial Differential Equations Boundary Layers,Tech.Summary Rep.#375,MRC,Univ.Of Winsconsin,Medison,Wisconsin,1963
- 41] Marchant,T.R.,and Symth,N.F., Initial-Boundary Value Problems For The KdV equations, IMA J.of Appl.Math 47,247-264(1991)
- 42] Mathews,J., Nümerical Methods For Computer Science, Engineering and Mathematics,Prentice Hall International,London,1987
- 43] Michal,A.D.,Proc.Natl.Acad.Sci:37,623,1952
- 44] Mikusinski,J., Operational Calculus,Pergamon,Oxford,1959
- 45] Moran,M.J.,and Gaggioli,R.A.,SIAM J. Appl.Math. 16,202(1968)
- 46] Moran,M.J., and Gaggioli,R.A., Similarity For A Real Gas Boundary Layer Flow, Math.Res.Center (Univ.of Wisconsin) Tech.Summary Rep.No.919(1968)
- 47] Moran,M.J.,and Gaggioli,R.A.,A Generalization of Dimensional Analysis, Math. Res.Center (Univ.of Wisconsin) Tech.Summary Rep.No.927(1968)
- 48] Morgan,A.J.A.,Quart.J.Math.(Oxford)3,250(1952)
- 49] Na,T.Y.,and Hansen,A.G., Internat. J.Nonlinear Mech.2,373(1967)

- 50] Na., T.Y., Abbott, D.E., and Hansen, A.G., Similarity Analysis Of Partial Differential Equations, Univ. Of Michigan Tech. Rep. NASA Contract 8-20065 (1967)
- 51] Newell, A.C., Solitons In Mathematics and Physics. Philadelphia: SIAM (1985)
- 52] Özisik, M.N., Heat Conduction, John Wiley and Sons, New York, 1980
- 53] Rosales, R.R., The Similarity Solution For The Korteweg-de Vries Equation and related Painleve Transcendent, Proc. R. Soc. Lond. A 361, 265-275 (1978)
- 54] Sanz-Serna, J.M., and Christie, I., Petrov-Galerkin Methods For Nonlinear Dispersive Waves, J. Comp. Phys. 39, 94-102 (1981)
- 55] Schamel, H., and Elsasser, K., J. Comput. Phys. 22, 501 (1976)
- 56] Sjöberg, A., On The Korteweg-de Vries Equation, Uppsala Univ., Dept. Of Computer Sci., Report (1967)
- 57] Smith, G.D., Numerical Solution Of Partial Differential Equations: Finite Difference Methods, Clarendon Press, Oxford, 1985
- 58] Strumpf, A., On A Class Of Transformations Leading To Similar Solutions Of The Steady Two-Dimensional Navier-Stokes Equations, Ph.D. Dissertation, Stevens Institute Of Technology, Hoboken, New Jersey (1964)
- 59] Taha, T.R., and Ablowitz, M.J., Analytical And Numerical Aspects Of Certain Non-linear Evolution Equations, III Numerical Korteweg-de Vries Equation, J. Comp. Phys. 55, 231-253 (1984)
- 60] Taha, T., Ph.D. Thesis, Clarkson College, Postdam, New York (1982)
- 61] Tappert, F., Lectures In Appl. Math. 15, 215 (1974)
- 62] Vliegthert, A.C., On Finite-Difference Methods For The Korteweg-de Vries Equation, J. Eng. Math. 5, 137-155 (1971)
- 63] Washimi, H., and Taniuti, T., Propagation Of Ion-Acoustic Solitary Waves Of Small Amplitude, Phys. Rev. Letters 17, 996-998 (1966)
- 64] Watanabe, S., and Ohishi, M., and Tanacca, H., Coupled Modes Approach To Non-linear Dispersive Wave I. Recurrence Of Soliton, J. Phys. Soc. Japan 42, 1382-1390 (1977)
- 65] Whitham, G.B., Nonlinear Dispersive Waves, Proc. R. Soc. Lond. A 283, 238-261

(1965)

66] Whitham, G.B., *Linear And Nonlinear Waves*, Wiley Interscience New York, 1974

67] van Wijngaarden, L., *Linear And Nonlinear Dispersion Of Pressure Pulses In Liquid-Bubble Mixtures*, 6th Symposium On Naval Hydrodynamics, Washington D.C.

(1966)

68] van Wijngaarden, L., *On The Equations Of Motion For Mixtures Of Liquefied And Gas Bubbles*, *J. Fluid Mech.* 33, 465-474 (1968)

69] Woodard, H.S., *Similarity Solutions For Partial Differential Equations Generated by Finite And Infinitesimal Groups*, Ph.D. Dissertation, University of Iowa City, Iowa, 1971

70] Wu, D., and Wen, S., *A Uniqueness Theorem For The Two Dimensional Generalized Korteweg-de Vries Equation*, *J. Math. Anal. And Appl.* 158, 203-212 (1991)

71] Yosida, K., *Lectures On The Semigroup Theory And Its Application To Cauchy's Problem In Partial Differential Equations*, Tata Inst. Fund. Research, Bombay, 1957

72] Zabusky, N.J., *A Synergetic Approach To Problems Of Nonlinear Dispersive Wave Propagation And Interaction Nonlinear Partial Differential Equations*, Academic Press, New York, 1967

73] Zabusky, N.J., and Kruskal, M.D., *Interaction Of "Solitons" In A Collisionless Plasma And Recurrence Of Initial States*, *Phys. Rev. Letters* 15, 240-243 (1965)

ÖZGEÇMİŞ

1.6.1966 tarihinde Malatya'da doğdu. İlköğrenimini ve ortaöğrenimini Malatya'da tamamladı. 1983 yılında İnönü Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümüne girmeye hak kazandı. 1987 yılında yüksek öğrenimini tamamlayarak, İnönü Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans öğrenimine başladı. 1988 yılında İnönü Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümünde Araştırma Görevlisi olarak çalışmaya başladı. 1990 yılında "Vizkoziteli Serbest Yüzey Akışkanları İçin Bir Nümerik Yöntem" isimli Yüksek Lisans Tezini sunarak Bilim Uzmanı ünvanını aldı ve aynı yıl İnönü Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı için açılan Doktora sınavını başarıyla tamamlayarak doktora öğrenimine başladı.

YAYINLARI

- 1] Öziş,T.,ve Güçük,S.,Vizkoziteli Serbest Yüzey Akışkanları İçin Bir Nümerik Yöntem, II.Ulusal Matematik Sempozyumu,1989,Bornova,İzmir