

T.C.  
FIRAT ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



GENELLEŞTİRİLMİŞ DEFERRED İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İbrahim AYDIN

Anabilim Dalı : Matematik

Programı : Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi

Ocak - 2017

T.C.  
FIRAT ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞTİRİLMİŞ DEFERRED İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İbrahim AYDIN

(121121115)

Anabilim Dalı : Matematik

Programı : Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi

Danışman: Prof. Dr. Mikail ET

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 20.12.2016

Ocak - 2017

T.C.  
FIRAT ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞTİRİLMİŞ DEFERRED İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

YÜKSEK LİSANS TEZİ  
İBRAHİM AYDIN  
(121121115)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 20.12.2016

Tezin Savunulduğu Tarih: 04.01.2017

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Mikail ET (F.Ü)

Diğer Jüri Üyeleri:

Prof. Dr. Hikmet KEMALOĞLU (F.Ü)

Yrd.Doç. Dr. Muhammed ÇINAR (Muş A.Ü)

Ocak - 2017

## ÖNSÖZ

Yüksek lisans eğitimim boyunca daima yanımda olan hocam Prof. Dr. Mikail Et' e teşekkür ederim.

Ayrıca çalışmamın hazırlanması sürecinde desteğini esirgemeyen hocalarım Doç. Dr. Yavuz Altın, Doç. Dr. Hıfı Altınok ve Arş. Gör. Ramazan Özarslan' a teşekkürlerimi sunarım.

İbrahim AYDIN

ELAZIĞ-2017



# İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖNSÖZ.....	I
İÇİNDEKİLER.....	II
ÖZET.....	III
SUMMARY.....	IV
SİMGELER LİSTESİ.....	V
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER.....	2
3. İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK.....	4
3.1. Doğal Yoğunluk ve İstatistiksel Yakınsaklık.....	4
3.2. İstatistiksel Yakınsaklık ve Kuvvetli Cesáro Yakınsaklık.....	7
3.3. Deferred İstatistiksel Yakınsaklık ve Kuvvetli Deferred Cesáro Yakınsaklık.....	9
4. FARK DİZİ UZAYLARI.....	11
4.1. $\Delta^m(\ell_\infty)$ , $\Delta^m(c)$ ve $\Delta^m(c_0)$ UZAYLARININ BAZI ÖZELLİKLERİ.....	11
4.2. $\Delta^m(X)$ UZAYININ BAZI ÖZELLİKLERİ.....	18
5. $\gamma$ . DERECEDEDEN İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK.....	20
5.1. $\gamma$ . Dereceden yoğunluk.....	20
5.2. Temel Sonuçlar.....	22
6. $\gamma$ . DERECEDEDEN $\Delta^m$ -DEFERRED İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK.....	25
KAYNAKLAR.....	31
ÖZGEÇMİŞ.....	33

## ÖZET

### GENELLEŞTİRİLMİŞ DEFERRED İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Bu alıŐma altı blmnden oluŐmaktadır.

Birinci bölümde tezin giriŐi yapılmıŐtır.

İkinci bölümde temel kavramlar verilmiŐtir.

nc bölümde istatistiksel yakınsaklık kavramı ve bazı içerme teoremleri incelenmiştir.

Dördüncü bölümde Fark dizileri incelenmiştir.

BeŐinci bölümde  $\gamma$ . dereceden istatistiksel yakınsaklık kavramı incelenmiştir.

Altıncı bölümde  $\gamma$ . dereceden  $\Delta^m$  – deferred istatistiksel yakınsaklık kavramı incelenmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Deferred istatistiksel yakınsaklık,  $\gamma$ . dereceden istatistiksel yakınsaklık, Fark dizisi.

## SUMMARY

### GENERALIZED DEFERRED STATISTICAL CONVERGENCE

This study consists of six chapters.

In the first chapter, we introduce the thesis.

In the second chapter, we give some fundamental concepts.

In the third chapter of this thesis, we give the concepts of statistical convergence.

In the fourth chapter, we give some properties of generalized difference sequence spaces.

In the fifth chapter, statistical convergence of order  $\gamma$  is studied.

In the last chapter,  $\Delta^m$ -deferred statistical convergence of order  $\gamma$  is studied.

**Keywords:** Deferred statistical convergence, Statistical convergence of order  $\gamma$ , Difference sequence.

## SİMGELER LİSTESİ

- $w$  : Tüm dizilerin uzayı  
 $\ell_\infty$  : Kompleks terimli sınırlı diziler uzayı  
 $c$  : Kompleks terimli yakınsak diziler uzayı  
 $c_0$  : Kompleks terimli sıfıra yakınsak diziler uzayı  
 $\delta(F)$  :  $F$  'nin doğal yoğunluğu  
 $\Delta^m(DS)$  :  $\Delta^m$ -deferred istatistiksel yakınsak diziler uzayı



## 1. GİRİŞ

İstatistiksel yakınsaklık kavramı Fast [1] ve Steinhaus [2] tarafından tanımlanmış ve o tarihten bu yana bir çok matematikçinin ilgilendiği bir konu haline gelmiştir. İstatistiksel yakınsaklık kavramının Cesàro matrisiyle olan ilişkisi bu kavramın regüler matrisler yardımıyla genelleştirilmesine olanak sağlamıştır.

1932 yılında Agnew [3] Cesàro alt metodunun bir genellemesi olan deferred Cesàro metodunu aşağıdaki biçimde tanımlamıştır.

$p = \{p(i)\}_{i \in \mathbb{N}}$  ve  $q = \{q(i)\}_{i \in \mathbb{N}}$  pozitif tamsayıların

$$p(i) < q(i) \text{ ve } \lim_{i \rightarrow \infty} q(i) = \infty$$

koşulunu sağlayan dizileri olmak üzere  $x = (x_k)$  dizisinin deferred Cesàro ortalaması

$$(D_{p,q}x)_i = \frac{1}{q(i) - p(i)} \sum_{k=p(i)+1}^{q(i)} x_k, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

şeklinde tanımlanır.  $D_{p,q}$  metodunun regüler olmasının yanı sıra başka önemli özellikleri de sağladığı Agnew [3] tarafından ifade edilmiştir. Bu çalışmada,  $p = \{p(i)\}$  ve  $q = \{q(i)\}$  yukarıdaki şartları sağlayan iki dizi olmak üzere

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{q(i) - p(i)} |\{k : p(i) < k \leq q(i) : |x_k - \xi| \geq \varepsilon\}| = 0$$

olarak tanımlanan deferred istatistiksel yakınsaklık ve deferred Cesàro yakınsaklık arasındaki ilişki incelenmiştir.

## 2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

**Tanım 2.1**  $X \neq \emptyset$  ve  $K$  bir cisim olsun.

$$+ : X \times X \longrightarrow X \text{ ve } \cdot : K \times X \longrightarrow X$$

dönüşümleri aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa,  $X$  kümesi  $K$  üzerinde bir vektör uzay tanımlıyor denir [4].

**L1)**  $x + y = y + x$ ,

**L2)**  $(x + y) + z = x + (y + z)$ ,

**L3)**  $x + \theta = x$  olacak şekilde  $\theta \in X$  vardır,

**L4)**  $x + (-x) = \theta$ ,

**L5)**  $1 \cdot x = x$ ,

**L6)**  $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ ,

**L7)**  $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$ ,

**L8)**  $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$ .

**Tanım 2.2** Norm fonksiyonu  $x, y \in X$  ve  $\mu \in K$  olmak üzere aşağıdaki özellikleri sağlayan  $\|\cdot\| : X \longrightarrow \mathbb{R}$  şeklinde tanımlı bir dönüşümdür [5].

1)  $\|x\| \geq 0$

2)  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$

3)  $\|\mu x\| = |\mu| \|x\|$ ,

4)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ .

**Tanım 2.3**  $(X, \|\cdot\|)$  bir normlu uzay,  $(x_k) \subset X$  olsun ve  $\varepsilon > 0$  verilsin.  $k, \ell > n_0$  olduğunda  $\|x_k - x_\ell\| < \varepsilon$  eşitsizliği sağlanacak şekilde  $\varepsilon'$  a bağlı bir  $n_0$  sayısı varsa  $x$  dizisine bir Cauchy dizisi denir [5].

**Tanım 2.4**  $X$  normlu uzayında her Cauchy dizisi yakınsak ise bu uzaya Banach uzayı denir [5].

**Tanım 2.5**  $(x_i) \subset X$  olsun,  $\varepsilon > 0$  verilsin.  $\forall i > n_0$  için

$$\|x_i - \xi\| < \varepsilon$$

olacak şekilde  $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  varsa  $x = (x_i)$  dizisi yakınsaktır denir.

Kompleks terimli tüm  $x = (x_k)$ , ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) dizilerinin cümlesini  $w$  ile gösterelim.  $w$ , toplama ve skaler ile çarım işlemlerine göre kapalı olup bir lineer uzaydır. Bundan dolayı  $w$  nın her alt uzayı da bir lineer uzaydır.  $\ell_\infty$ ,  $c$  ve  $c_0$  ile sırasıyla sınırlı, yakınsak ve sifira yakınsak dizilerin uzayını göstereceğiz. Buna göre

$$\ell_\infty = \{x = (x_i) : |x_i| \leq M\}$$

sınırlı,

$$c = \left\{x = (x_i) : \lim_i x_i = \xi\right\}$$

yakınsak ve

$$c_0 = \left\{x = (x_i) : \lim_i x_i = 0\right\}$$

sıfır dizi uzayları

$$\|x\| = \sup_i |x_i|$$

normuna göre tam uzaylardır [5].

**Tanım 2.6**  $X$  tam ve

$$\tau_k : X \longrightarrow \mathbb{C}, \tau_k(x) = x_k, (k = 1, 2, \dots)$$

dönüşümü sürekli ise  $X$  'e bir  $BK$ -uzayı denir [6].

**Tanım 2.7**  $(X, \|\cdot\|)$  ile  $(Y, \|\cdot\|)$  birer normlu uzay ve  $T : X \longrightarrow Y$  lineer bir dönüşüm olsun.  $T$  dönüşümü normu koruyorsa, yani her  $x \in X$  için  $\|Tx\| = \|x\|$  oluyorsa  $T$  dönüşümüne lineer izometri denir. Böyle bir dönüşümün birebir olacağı açıktır. Eğer bu dönüşüm örten ise  $T$  ye lineer izomorfizm denir. Bu durumda  $X$  ile  $Y$  normlu uzayları izomorfik uzaylar adını alırlar [4].

**Tanım 2.8** Eğer  $X$  ve  $Y$  uzayları izometrik olarak izomorf ise  $X$  ve  $Y$  uzaylarına denk uzaylar denir. Bu durumda  $X$  den  $Y$  ye bir lineer izometri vardır [4].

**Tanım 2.9**  $X$  ve  $Y$  topolojik uzaylar olsunlar.  $f : X \longrightarrow Y$  dönüşümü birebir, örten,  $f$  sürekli ve  $f^{-1}$  de sürekli ise  $f$  ye bir homeomorfizm denir.  $f : X \longrightarrow Y$  dönüşümü bir homeomorfizm ise  $f$  ve  $f^{-1}$  açık cümleleri koruduğundan  $X$  ve  $Y$  uzayları topolojik olarak denktir [4].

### 3. İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

İstatistiksel yakınsaklık Fast [1] ve Steinhaus [2] tarafından tanımlanmış ve o tarihten bu yana bir çok matematikçinin ilgilendiği bir konu haline gelmiştir. Schoenberg [7] bu kavramı öncekilerden farklı olarak incelemiş ve istatistiksel yakınsaklığın bazı özelliklerini vermiştir. Daha sonra istatistiksel yakınsaklık Fridy [8], Salat [9], Connor [10] gibi matematikçiler tarafından incelenmiştir.

#### 3.1. Doğal Yoğunluk ve İstatistiksel Yakınsaklık

Bir  $F \subset \mathbb{N}$  kümesindeki  $j$  ye eşit olan yada  $j$  yi geçmeyen pozitif tamsayıların sayısını  $F_j$  ile gösterelim.

$$F_j = \{i : i \in F, i \leq j\}$$

kümesinin eleman sayısı  $|F_j|$  olsun. Örneğin  $F = \{2, 4, 6, \dots\}$  ise  $F_1 = 0, F_2 = 1, F_6 = 3, F_7 = 3, F_{\frac{15}{2}} = 3$  dir. Gerçekten  $j \geq 0$  ise  $F_j = \lfloor \frac{j}{2} \rfloor$  dir.

**Tanım 3.1.1**  $F$  kümesinin asimptotik yoğunluğu

$$\delta_1(F) = \liminf_{j \rightarrow \infty} \frac{|F_j|}{j}$$

dir.  $\left(\frac{F(j)}{j}\right)$  dizisi bir limite sahipse  $F$  kümesinin doğal yoğunluğu

$$\delta(F) = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{j} |F_j|$$

dir. Eğer  $\delta(F) = 0$  ise  $F$  kümesine sıfır yoğunluklu küme denir. Doğal sayıların sonlu her alt kümesinin doğal yoğunluğu 0 dir. Bunun tersi doğru değildir. Ayrıca,  $F \subset \mathbb{N}$  kümesi doğal yoğunluğa sahip ise,

$$\delta(\mathbb{N} - F) = 1 - \delta(F) \text{ ve } 0 \leq \delta(F) \leq 1$$

olacaktır [11].

**Tanım 3.1.2**  $F \subseteq \mathbb{N}$  olmak üzere  $F$  kümesinin alt ve üst yoğunluğu sırasıyla

$$\delta_1(F) = \liminf_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{j} |F_j|, \delta_2(F) = \limsup_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{j} |F_j| \quad (3.1.1)$$

şeklinde tanımlanır [13].

Eğer alt ve üst yoğunluk eşit ise doğal yoğunluk vardır ve  $\delta_1(F) = \delta_2(F) = \delta(F)$  dir [13]. Her küme doğal yoğunluğa sahip olmak zorunda değildir. Bunun için aşağıdaki örneği göz önüne alalım.

**Örnek 3.1.1**  $F = \{1, 4, 5, 6, 13, 14, \dots, 24, 49, 50, \dots, 96, 193, 194, \dots\}$  şeklinde verilsin.  $F$  indeks kümesi için  $\frac{|F_n|}{n}$  ifadesini oluşturalım.

i)  $\frac{|F_n|}{n}$  ifadesinin üst limitini oluşturan alt dizi,

$$\frac{1}{1}, \frac{4}{6}, \frac{16}{24}, \frac{64}{96}, \dots \rightarrow \frac{2}{3}$$

ii)  $\frac{|F_n|}{n}$  ifadesinin alt limitini oluşturan üst dizi,

$$\frac{1}{3}, \frac{4}{12}, \frac{16}{48}, \frac{64}{192}, \dots \rightarrow \frac{1}{3}$$

şeklinde dir. Dolayısıyla

$$\delta_1(F) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{|F_n|}{n} = \frac{1}{3}, \quad \delta_2(F) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|F_n|}{n} = \frac{2}{3}$$

olduğundan  $\delta_1(F) \neq \delta_2(F)$  dir.

Bu nedenle  $F$  kümesinin doğal yoğunluğu yoktur. Bu örnekten de anlaşıldığı gibi doğal yoğunluğu olmayan kümelerde vardır. Ama her bir küme için alt ve üst yoğunluk mevcuttur. Şimdi,  $\delta$  yoğunluk fonksiyonunun bazı özelliklerini verelim.  $E, F \subseteq \mathbb{N}$  olmak üzere

- i)  $\delta(F)$  mevcut ise  $\delta_1(F) = \delta_2(F)$ ,
- ii)  $\delta(F) \neq 0 \Leftrightarrow \delta_1(F) > 0$ ,
- iii)  $E \subseteq F$  ise  $\delta_2(E) \leq \delta_2(F)$  'dir.

Aşağıdaki teoremi ispatsız olarak veriyoruz.

**Teorem 3.1.1**  $F = (e_j)$  sonsuz bir dizi olsun bu takdirde;

$$\delta_1(F) = \liminf_{j \rightarrow \infty} \frac{j}{e_j}$$

dir. Eğer  $\delta(F)$  mevcut ise,  $\delta(F) = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{j}{e_j}$  dir [11].

**Tanım 3.1.3** Bir  $P$  özelliği sıfır yoğunluklu bir küme dışında sağlamıyorsa bu özellik hemen hemen her  $k$  için  $P$  özelliğini sağlıyor denir ve "h.h.k." şeklinde gösterilir [8].

**Tanım 3.1.4**  $x = (x_i)$  kompleks terimli bir dizisi olsun.  $\forall \varepsilon > 0$  için

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} |\{i \leq m : |x_i - \xi| \geq \varepsilon\}| = 0 \quad (3.1.2)$$

ise  $x = (x_i)$  dizisi istatistiksel yakınsaktır denir ve

$$S - \lim x = \xi \text{ veya } x_i \rightarrow \xi (S)$$

şeklinde yazılır [8]. İstatistiksel yakınsak dizilerin kümesi  $S$  ile gösterilir.  $\xi = 0$  olması halinde  $S_0$  yazarız.

Yakınsak bir dizi istatistiksel yakınsak, fakat tersi doğru değildir. Gerçekten  $x = (x_i)$  dizisini

$$x_i = \begin{cases} 1, & i = j^2, (j = 1, 2, 3, \dots) \\ 0, & i \neq j^2 \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. Bu takdirde

$$\lim \frac{1}{m} |\{i \leq m : x_i \neq 0\}| \leq \lim \frac{\sqrt{m}}{m} = 0$$

bulunur. Bu  $S - \lim x = 0$  demektir.  $l_\infty$  ve  $S$  uzaylarının ortak elemanları vardır, fakat birbirlerini kapsamazlar. Bunun için  $x$  dizisini

$$x_i = \begin{cases} \sqrt{i}, & i = j^2, (j = 1, 2, 3, \dots) \\ 1, & i \neq j^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan  $x = (x_i)$  dizisi için  $S - \lim x = 1$  dir, ancak  $x \notin l_\infty$  dur.  $x = (1, -1, 1, -1, \dots)$  dizisi sınırlıdır ancak istatistiksel yakınsak değildir.

**Teorem 3.1.2**  $S - \lim x = \xi_1$ ,  $S - \lim y = \xi_2$  ve  $\mu \in \mathbb{R}$  olsun.

- 1)  $S - \lim x = \xi_1$  ise  $S - \lim (\mu x) = \mu \xi_1$
- 2)  $S - \lim x = \xi_1$  ve  $S - \lim y = \xi_2$  ise  $S - \lim (x + y) = \xi_1 + \xi_2$

dır [7].

**Tanım 3.1.5**  $\varepsilon > 0$  olsun.

$$\lim \frac{1}{m} |\{k \leq m : |x_k - x_{k_0}| \geq \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde  $\varepsilon'$  a bağlı bir  $k_0$  sayısı varsa  $x = (x_i)$  dizisine istatistiksel Cauchy dizisi denir [8].

**Teorem 3.1.3** İstatistiksel yakınsak her dizi istatistiksel Cauchy dizisidir [8].

**Teorem 3.1.4** Aşağıdaki ifadeler denktir:

i)  $x$  dizisi istatistiksel yakınsaktır,

ii)  $x$  istatistiksel Cauchy dizisidir,

iii)  $x = (x_i)$  dizisi için  $\delta \{i : x_i \neq y_i\} = 0$  olacak şekilde bir yakınsak  $y$  dizisi vardır [8].

**Sonuç 3.1.1**  $x = (x_i)$  dizisi  $\xi$  sayısına istatistiksel yakınsak ise  $x = (x_i)$  dizisinin  $\xi$  sayısına klasik anlamda yakınsayan bir alt dizisi vardır.

### 3.2 İstatistiksel Yakınsaklık ve Kuvvetli Cesàro Yakınsaklık

Bu bölümde kuvvetli Cesàro yakınsaklık ile istatistiksel yakınsaklık arasındaki ilişki incelenecektir.

**Tanım 3.2.1**  $x = (x_i)$  dizisi verilsin.

$$\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (x_i - \xi) \rightarrow 0$$

ise  $x$  dizisi Cesàro yakınsaktır denir ve

$$\sigma_1 = \left\{ x = (x_i) : \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (x_i - \xi) \rightarrow 0, \xi \in \mathbb{R} \right\}$$

ile gösterilir [14].

**Teorem 3.2.1**  $x$  dizisi yakınsak ise  $\sigma_1$ -yakınsaktır [14].

Teorem 3.2.1 in karşıtı doğru değildir. Gerçekten  $x_i = (1 + (-1)^i)$  dizisi  $\sigma_1$ -yakınsaktır fakat yakınsak değildir.

**Teorem 3.2.2**  $S - \lim x = \xi$  ve her  $i \in \mathbb{N}$  için  $|x_i| < M$  ise  $\sigma_1 - \lim x = \xi$  dir [7].

**İspat.**  $\xi = 0$  olsun.  $\sigma_1 - \lim x = 0$  olduğunu gösterelim. Bu takdirde

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_i \right| &\leq \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m |x_i| \\ &= \frac{1}{m} \left\{ \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ |x_i| < \varepsilon}} |x_i| + \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ |x_i| \geq \varepsilon}} |x_i| \right\} \\ &\leq \frac{1}{m} m \varepsilon + \frac{1}{m} M |\{i \leq m : |x_i| \geq \varepsilon\}| \end{aligned}$$

dır. (3.1.1) den

$$\lim_m \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_i = 0$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar. Teoremin karşıtı doğru değildir.  $x = (1, 0, 1, 0, \dots)$  dizinin aritmetik ortalaması  $\frac{1}{2}$  ye yakınsaktır, ancak istatistiksel yakınsak değildir.

**Tanım 3.2.2**  $x = (x_i)$  dizi verilsin ve  $p \in \mathbb{R}^+$  olsun.

$$\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m |x_i - \xi|^p \rightarrow 0$$

eşitliği sağlanacak şekilde bir  $\xi$  sayısı varsa  $x$  dizisi kuvvetli  $p$ -Cesàro yakınsaktır denir. Bu tür dizilerin kümesi  $w_p$  ile gösterilecektir [10].

**Teorem 3.2.3**  $0 < p < \infty$  olsun. Bu takdirde;

i)  $x$  dizisi  $\xi$  ye kuvvetli  $p$ -Cesàro yakınsak ise istatistiksel yakınsaktır,

ii)  $x$  dizisi sınırlı olsun.  $x$  dizisi  $\xi$  ye istatistiksel yakınsak ise kuvvetli  $p$ -Cesàro yakınsaktır [10].

**İspat.** i)  $x \in w_p$  ve  $\varepsilon > 0$  olsun. Bu takdirde;

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m |x_i - \xi|^p &= \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ |x_i - \xi| < \varepsilon}} |x_i - \xi|^p + \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ |x_i - \xi| \geq \varepsilon}} |x_i - \xi|^p \\ &\geq \varepsilon^p |\{i \leq m : |x_i - \xi| \geq \varepsilon\}| \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan  $S - \lim x_k = \xi$  elde edilir.

ii)  $x$  dizisi  $\xi$  sayısına istatistiksel yakınsak olsun.  $x$  sınırlı olduğundan  $L = \|x\|_\infty + \xi$  yazabiliriz.  $\varepsilon \geq 0$  verilsin, her  $m > N_\varepsilon$  için  $N_\varepsilon$  sayısını

$$\frac{1}{m} \left| \left\{ i \leq m : |x_i - \xi| \geq \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{p}} \right\} \right| < \frac{\varepsilon}{2L^p}$$

olacak şekilde seçelim ve  $L_m = \left\{ i \leq m : |x_i - \xi| \geq \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{p}} \right\}$  diyelim. Bu takdirde  $m > N_\varepsilon$  için

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m |x_i - \xi|^p &= \frac{1}{m} \left( \sum_{\substack{i \leq m \\ i \in L_m}} |x_i - \xi|^p + \sum_{\substack{i \leq m \\ i \notin L_m}} |x_i - \xi|^p \right) \\ &< \frac{1}{m} \left( \frac{m\varepsilon}{2L^p} L^p + m \frac{\varepsilon}{2} \right) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece  $x$  dizisi kuvvetli  $p$ -Cesàro yakınsaktır.

### 3.3. Deferred İstatistiksel Yakınsaklık ve Kuvvetli Deferred Cesàro Yakınsaklık

**Tanım 3.3.1**  $p = \{p(i)\}_{i \in \mathbb{N}}$  ve  $q = \{q(i)\}_{i \in \mathbb{N}}$  pozitif tamsayıların

$$p(i) < q(i) \text{ ve } \lim_{i \rightarrow \infty} q(i) = \infty \quad (3.3.1)$$

koşulunu sağlayan dizileri olmak üzere,

$$(D_{p,q}x)_i = \frac{1}{q(i) - p(i)} \sum_{k=p(i)+1}^{q(i)} x_k, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (3.3.2)$$

biçiminde tanımlanan dönüşüme  $x = (x_k)$  dizisinin deferred Cesàro ortalaması denir [3].

**Tanım 3.3.2**  $x = (x_k)$  dizisi ve  $\xi$  sayısı verilsin. Eğer,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{q(i) - p(i)} \sum_{k=p(i)+1}^{q(i)} (x_k - \xi) = 0$$

ise  $x = (x_k)$  dizisine  $\xi$  sayısına  $D_{p,q}$ -yakınsaktır denir.  $D_{p,q}$  yakınsak dizilerin kümesi  $D[p, q]$  sembolü ile gösterilir [3].

**Tanım 3.3.3**  $x$  bir dizi ve  $0 < r < \infty$  olsun. Eğer,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{q(i) - p(i)} \sum_{k=p(i)+1}^{q(i)} |x_k - \xi|^r = 0,$$

ise  $x = (x_k)$  dizisine  $\xi$  sayısına  $r$ -kuvvetli deferred Cesàro yakınsaktır denir ve

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$  ( $r - D[p, q]$ ) sembolü ile gösterilir [15].

**Tanım 3.3.4 (Deferred İstatistiksel yoğunluk)**  $x = (x_k)$  reel yada karmaşık terimli bir dizi,  $\{p(i)\}_{i \in \mathbb{N}}$  ve  $\{q(i)\}_{i \in \mathbb{N}}$  (3.3.1) deki koşulları sağlayan diziler olsun.  $K \subseteq \mathbb{N}$  olmak üzere

$$\delta_{D_{p,q}}(K) = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{q(i) - p(i)} |\{p(i) < k \leq q(i) : k \in K\}|$$

limiti var ve sonlu ise bu sayıya  $K$ 'nin deferred istatistiksel yoğunluğu denir [15].

**Tanım 3.3.5 (Deferred İstatistiksel yakınsaklık)**  $x = (x_k)$  reel yada karmaşık terimli bir dizi  $\{p(i)\}_{i \in \mathbb{N}}$  ve  $\{q(i)\}_{i \in \mathbb{N}}$  (3.3.1) koşulunu sağlayan pozitif tamsayıların dizileri olmak üzere

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{q(i) - p(i)} |\{p(i) < k \leq q(i) : |x_k - \xi| \geq \varepsilon\}| = 0,$$

ise  $x = (x_k)$  dizisi deferred istatistiksel yakınsaktır denir.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \xi (DS [p, q])$$

biçiminde gösterilir [15].



## 4. FARK DİZİ UZAYLARI

### 4.1. $\Delta^m(\ell_\infty)$ , $\Delta^m(c)$ ve $\Delta^m(c_0)$ Uzaylarının Bazı Özellikleri

Bu bölümde  $\Delta^m(\ell_\infty)$ ,  $\Delta^m(c)$  ve  $\Delta^m(c_0)$  dizi uzayları tanımlanacak, bu uzayların bazı özellikleri araştırılacak ve  $D\Delta^m(\ell_\infty)$ ,  $D\Delta^m(c)$  ve  $D\Delta^m(c_0)$  uzaylarının sürekli dualleri verilecektir.

**Tanım 4.1.1**  $m \in \mathbb{N}$ ,  $x = (x_k)$  reel veya kompleks terimli herhangi bir dizi,  $m$  bir pozitif tam sayı,  $\Delta^0 x_k = x_k$ ,  $\Delta x_k = x_k - x_{k+1}$ ,  $\Delta^m x_k = \Delta(\Delta^{m-1} x_k)$ ,  $\Delta^m x = (\Delta^m x_k)$  ve  $\Delta^m x_k = \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} x_{k+v}$  olmak üzere

$$\text{i) } \Delta^m(\ell_\infty) = \{x = (x_k) : \Delta^m x = (\Delta^m x_k) \in \ell_\infty\},$$

$$\text{ii) } \Delta^m(c) = \{x = (x_k) : \Delta^m x = (\Delta^m x_k) \in c\},$$

$$\text{iii) } \Delta^m(c_0) = \{x = (x_k) : \Delta^m x = (\Delta^m x_k) \in c_0\},$$

uzaylarını tanımlayalım.

$\Delta^m(\ell_\infty)$ ,  $\Delta^m(c)$  ve  $\Delta^m(c_0)$  dizi uzayları aşikar olarak birer lineer uzaydır [16].

**Teorem 4.1.1**  $\Delta^m(\ell_\infty)$ ,  $\Delta^m(c)$  ve  $\Delta^m(c_0)$  dizi uzayları

$$\|x\|_\Delta = \sum_{i=1}^m |x_i| + \|\Delta^m x\|_\infty \quad (4.1.1)$$

normu ile birer normlu uzaydır [16].

**İspat.**  $X$ ;  $\Delta^m(\ell_\infty)$ ,  $\Delta^m(c)$  ve  $\Delta^m(c_0)$  uzaylarından birini göstermek üzere  $x, y \in X$  ve  $\gamma$  bir skaler olsun.

$$\text{N1) } \|x\|_\Delta = \sum_{i=1}^m |x_i| + \|\Delta^m x\|_\infty \geq 0 \text{ olduğu aşikardır.}$$

$$\text{N2) } \|x\|_\Delta = \sum_{i=1}^m |x_i| + \|\Delta^m x\|_\infty = 0 \text{ olsun. Bu takdirde}$$

$$x_1 = x_2 = \dots = x_m = 0 \text{ ve her } k \in \mathbb{N} \text{ için}$$

$$\left| \binom{m}{0} x_k - \binom{m}{1} x_{k+1} + \dots + (-1)^m \binom{m}{m} x_{k+m} \right| = 0$$

olduğundan her  $k \in \mathbb{N}$  için  $x_k = 0$  elde edilir ki buradan  $x = 0$  bulunur. Tersine  $x = 0$  olması halinde  $\|x\|_\Delta = 0$  olduğu aşikardır.

**N3)**

$$\begin{aligned}\|\mu x\|_{\Delta} &= \sum_{j=1}^m |\mu x_j| + \sup_k \left| \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} \mu x_{k+v} \right| \\ &= |\mu| \left( \sum_{j=1}^m |x_j| + \sup_k \left| \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} x_{k+v} \right| \right) \\ &= |\mu| \|x\|_{\Delta}\end{aligned}$$

**N4)**

$$\begin{aligned}\|x + y\|_{\Delta} &= \sum_{j=1}^m |x_j + y_j| + \sup_k \left| \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} (x_{k+v} + y_{k+v}) \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^m |x_j| + \sup_k \left| \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} x_{k+v} \right| + \sum_{j=1}^m |y_j| + \sup_k \left| \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} y_{k+v} \right| \\ &= \|x\|_{\Delta} + \|y\|_{\Delta}\end{aligned}$$

**Teorem 4.1.2**  $(\Delta^m(\ell_{\infty}), \|\cdot\|_{\Delta})$  bir Banach uzayıdır [16].

**İspat.**  $x^s = (x_1^s, x_2^s, \dots) \in \Delta^m(\ell_{\infty})$  olmak üzere  $(x^s)$ ,  $\Delta^m(\ell_{\infty})$  da bir Cauchy dizisidir. Bu durumda  $s, t \rightarrow \infty$  için

$$\|x^s - x^t\|_{\Delta} = \sum_{i=1}^m |x_i^s - x_i^t| + \sup_k |\Delta^m(x_k^s - x_k^t)| \rightarrow 0$$

olur. O halde  $k \leq m$  ve  $s, t \rightarrow \infty$  için

$$|x_k^s - x_k^t| \rightarrow 0$$

ve her  $k \in \mathbb{N}$  ve  $s, t \rightarrow \infty$  için

$$\left| \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} (x_{k+v}^s - x_{k+v}^t) \right| \rightarrow 0$$

dir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}& |x_{k+m}^s - x_{k+m}^t| \\ &\leq \left| \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} (x_{k+v}^s - x_{k+v}^t) \right| + \left| \binom{m}{0} (x_k^s - x_k^t) \right| + \dots \\ &\quad + \left| \binom{m}{m-1} (x_{k+m-1}^s - x_{k+m-1}^t) \right|\end{aligned}$$

olması nedeni ile her  $k \in \mathbb{N}$  ve  $s, t \rightarrow \infty$  için

$$|x_k^s - x_k^t| \rightarrow 0$$

elde edilir. Buna göre  $(x_k^s) = (x_k^1, x_k^2, \dots)$  her sabit  $k = 1, 2, \dots$  için  $\mathbb{C}$  de bir Cauchy dizisidir.  $\mathbb{C}$  tam olduğundan  $(x_k^s)$ ,  $\mathbb{C}$  de yakınsaktır.  $\lim_s x_k^s = x_k$ , ( $k = 1, 2, \dots$ ) diyelim.  $(x^s)$ ,  $\Delta^m(\ell_\infty)$  da bir Cauchy dizisi olduğundan her  $\varepsilon > 0$  için  $s, t \geq N$  oldukça  $\|x^s - x^t\|_\Delta \leq \varepsilon$  olacak şekilde bir  $N = N(\varepsilon)$  doğal sayısı vardır. O halde her  $s, t \geq N$  için

$$\sum_{i=1}^m |x_i^s - x_i^t| \leq \varepsilon \text{ ve } \left| \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} (x_{k+v}^s - x_{k+v}^t) \right| \leq \varepsilon$$

dur. Bu son iki ifade de  $t \rightarrow \infty$  için limit alınırsa  $s \geq N$  için

$$\lim_t \sum_{i=1}^m |x_i^s - x_i^t| = \sum_{i=1}^m |x_i^s - x_i| \leq \varepsilon$$

ve

$$\begin{aligned} \lim_t |\Delta^m(x_{k+v}^s - x_{k+v}^t)| &= \lim_t \left| \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} (x_{k+v}^s - x_{k+v}^t) \right| \\ &= \left| \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} (x_{k+v}^s - x_{k+v}) \right| \\ &= |\Delta^m(x_{k+v}^s - x_{k+v})| \leq \varepsilon \end{aligned}$$

bulunur. Buradan  $s \geq N$  için

$$\|x^s - x\|_\Delta = \sum_{i=1}^m |x_i^s - x_i| + \sup_k \left| \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} (x_{k+v}^s - x_{k+v}) \right| \leq 2\varepsilon$$

dur. Bu ise  $\lim_s x^s = x$  demektir. Şimdi de  $x = (x_k) \in \Delta^m(\ell_\infty)$  olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} |\Delta^m x_k| &= \left| \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} x_{k+v} \right| \\ &= \left| \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} (x_{k+v} - x_{k+v}^N + x_{k+v}^N) \right| \\ &\leq \left| \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} (x_{k+v}^N - x_{k+v}) \right| + \left| \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} (x_{k+v}^N) \right| \\ &\leq \|x^N - x\|_\Delta + |\Delta^m x_k^N| = 0(1) \end{aligned}$$

olması nedeniyle  $x = (x_k) \in \Delta^m(\ell_\infty)$  elde edilir. O halde  $(\Delta^m(\ell_\infty), \|\cdot\|_\Delta)$  bir Banach uzayıdır.

**Lemma 4.1.1**  $\Delta^m(c)$ ,  $\Delta^m(\ell_\infty)$  uzayının kapalı bir alt uzayıdır [16].

**İspat.**  $x \in \Delta^m(c)$  olsun. Bu takdirde  $(\Delta^m x_k) \in c \subset \ell_\infty$  dur. Buradan  $\Delta^m(c) \subset \Delta^m(\ell_\infty)$  elde edilir.  $\Delta^m(c) = \overline{\Delta^m(c)}$  olduğunu gösterelim.  $\Delta^m(c) \subset \overline{\Delta^m(c)}$  olması nedeniyle  $\overline{\Delta^m(c)} \subset \Delta^m(c)$  olduğunu göstermek yeterlidir.  $x = (x_1, x_2, \dots) \in \overline{\Delta^m(c)}$  olsun. Bu

takdirde  $x^n = (x_1^n, x_2^n, \dots)$  olmak üzere  $x^n \rightarrow x$  olacak şekilde  $\Delta^m(c)$  de bir  $(x^n)$  dizisi vardır. Bu takdirde her  $\varepsilon > 0$  sayısına karşılık  $n \geq N$  olacak şekilde bir  $N$  doğal sayısı vardır. Buradan  $n \geq N$  ve her  $k \in \mathbb{N}$  için

$$|\Delta^m(x_k^n - x_k)| \leq \varepsilon \quad (4.1.2)$$

elde edilir.  $x^n = (x_1^n, x_2^n, \dots) \in \Delta^m(c)$  olduğundan her  $n \in \mathbb{N}$  için

$(\Delta^m x_i^n) = (\Delta^m x_1^n, \Delta^m x_2^n, \dots) \in c$  ve dolayısıyla  $\mathbb{C}$  de bir Cauchy dizisidir. Bu nedenle  $i, j \geq M$  için

$$|\Delta^m x_i^n - \Delta^m x_j^n| \leq \varepsilon \quad (4.1.3)$$

olacak şekilde en az bir  $M$  doğal sayısı vardır. Böylece her  $i, j \geq M$  için için (4.1.2) ve (4.1.3) gereğince

$$\begin{aligned} & |\Delta^m x_i - \Delta^m x_j| \\ &= |\Delta^m x_i - \Delta^m x_j + \Delta^m x_i^N - \Delta^m x_j^N + \Delta^m x_j^N - \Delta^m x_i^N| \\ &\leq |\Delta^m x_i^N - \Delta^m x_i| + |\Delta^m x_j^N - \Delta^m x_j| + |\Delta^m x_i^N - \Delta^m x_j^N| \\ &\leq 3\varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre  $(\Delta^m x_i)$ ,  $\mathbb{C}$  de bir Cauchy dizisidir.  $\mathbb{C}$  tam olduğundan bu dizi yakınsaktır. Demek ki  $(\Delta^m x_i) \in c$ , yani  $x \in \Delta^m(c)$  dir. O halde  $\Delta^m(c)$  kapalıdır.

**Teorem 4.1.3**  $(\Delta^m(c), \|\cdot\|_\Delta)$  bir Banach uzayıdır [16].

**İspat.**  $\Delta^m(c), \Delta^m(\ell_\infty)$  uzayının kapalı bir altuzayı olduğundan  $\Delta^m(c)$  bir Banach uzayıdır.

**Lemma 4.1.2**  $\Delta^m(c_0), \Delta^m(\ell_\infty)$  uzayının kapalı bir altuzayıdır [16].

**İspat.**  $x \in \Delta^m(c_0)$  olsun. Bu takdirde  $(\Delta^m x_k) \in c_0 \subset \ell_\infty$  olup  $\Delta^m(c_0) \subset \Delta^m(\ell_\infty)$  dur. Şimdi  $\Delta^m(c_0) = \overline{\Delta^m(c_0)}$  olduğunu gösterelim. Bunun için  $\overline{\Delta^m(c_0)} \subset \Delta^m(c_0)$  olduğunu göstermek yeterlidir.  $x = (x_1, x_2, \dots) \in \overline{\Delta^m(c_0)}$  olsun. Bu takdirde  $x^n = (x_1^n, x_2^n, \dots)$  olmak üzere  $x^n \rightarrow x$  olacak şekilde  $\Delta^m(c_0)$  da bir  $(x^n)$  dizisi vardır. O halde her  $\varepsilon > 0$  için  $n \geq N$  oldukça

$$\|x^n - x\|_\Delta = \sum_{i=1}^m |x_i^n - x_i| + \sup_k |\Delta^m(x_{k+v}^n - x_{k+v})| \leq \varepsilon$$

olacak şekilde bir  $N$  doğal sayısı vardır. Buradan  $n \geq N$  ve her  $k \in \mathbb{N}$  için

$$|\Delta^m(x_k^n - x_k)| \leq \varepsilon \quad (4.1.4)$$

elde edilir.  $(x^n)$  dizisi  $\Delta^m(c_0)$  da yakınsak olduğundan

$$(\Delta^m x_i^n) = (\Delta^m x_1^n, \Delta^m x_2^n, \dots) \in c_0$$

ve dolayısıyla her  $\varepsilon > 0$  için  $i \geq M$  oldukça

$$|\Delta^m x_i^n| \leq \varepsilon \quad (4.1.5)$$

olacak şekilde bir  $M > 0$  doğal sayısı vardır. Böylece (4.1.4) ve (4.1.5) gereğince  $i \geq M$  için

$$\begin{aligned} |\Delta^m x_i| &= |\Delta^m x_i + \Delta^m x_i^N - \Delta^m x_i^N| \\ &\leq |\Delta^m x_i^N - \Delta^m x_i| + |\Delta^m x_i^N| \leq 2\varepsilon \end{aligned}$$

bulunur. Bu ise  $x = (x_i) \in \Delta^m(c_0)$  demektir. O halde  $\Delta^m(c_0)$  kapalıdır.

**Teorem 4.1.4.**  $(\Delta^m(c_0), \|\cdot\|_\Delta)$  bir Banach uzayıdır [16].

**İspat.**  $\Delta^m(c_0)$  uzayı  $\Delta^m(\ell_\infty)$  uzayının kapalı bir altuzayı olduğundan bir Banach uzayıdır.

**Teorem 4.1.5**  $\Delta^m(\ell_\infty)$ ,  $\Delta^m(c)$  ve  $\Delta^m(c_0)$  uzayları (4.1.1) deki norm ile birer  $BK$ -uzayıdır [16].

**İspat.**  $\|x^n - x\|_\Delta \rightarrow 0$ ,  $(n \rightarrow \infty)$  olsun. Bu takdirde  $k \leq m$  ve  $n \rightarrow \infty$  için

$$|x_k^n - x_k| \rightarrow 0$$

ve her  $k \in \mathbb{N}$  ve  $n \rightarrow \infty$  için

$$\left| \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} (x_{k+v}^n - x_{k+v}) \right| \rightarrow 0$$

dır. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} |(x_{k+m}^n - x_{k+m})| &\leq \left| \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} (x_{k+v}^n - x_{k+v}) \right| + \left| \binom{m}{0} (x_k^n - x_k) \right| + \\ &\quad \dots + \left| \binom{m}{m-1} (x_{k+m-1}^n - x_{k+m-1}) \right| \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu eşitsizlik göz önüne alınırsa her  $k \in \mathbb{N}$  ve  $n \rightarrow \infty$  için  $|x_k^n - x_k| \rightarrow 0$  elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

Şimdi de bu uzaylar arasındaki kapsama bağıntılarını verelim.

1)  $\Delta^m(c_0) \subset \Delta^{m+1}(c_0)$  ve  $\Delta^m(c_0) \neq \Delta^{m+1}(c_0)$  dir.  $x \in \Delta^m(c_0)$  olsun. Bu takdirde  $k \rightarrow \infty$  için  $(\Delta^m x_k) \rightarrow 0$  dir.

$$\begin{aligned} |\Delta^{m+1} x_k| &= |\Delta^m x_k - \Delta^m x_{k+1}| \\ &\leq |\Delta^m x_k| + |\Delta^m x_{k+1}| \rightarrow 0, \quad (k \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

olduğundan  $x \in \Delta^{m+1}(c_0)$  dir.  $\Delta^m(c_0) \neq \Delta^{m+1}(c_0)$  olduğunu bir örnekle göstereyim.  $x = (k^m)$  seçelim. Bu durumda  $\Delta^{m+1}(k^m) = 0$  ve  $\Delta^m(k^m) = (-1)^m m!$  dir. İspatı tümevarım metodu ile yapalım.

a)  $x = (k^m)$  için  $\Delta^{m+1}(k^m) = 0$  dir.

$m = 1$  için  $x = (k)$  ve  $\Delta^2 x_k = k - 2(k+1) + k + 2 = 0$  olur.

$m = n - 1$  için  $x = (k^{n-1})$  ve her  $k \in \mathbb{N}$  için  $\Delta^n x_k = 0$  olsun.

$m = n$  için  $\Delta^{n+1}(k^n) = 0$  olduğunu göstereceğiz.

$$\Delta^{n+1} x_k = \Delta^n x_k - \Delta^n x_{k+1} = 0 \text{ dir.}$$

b)  $x = (k^m)$  için  $\Delta^m x_k = (-1)^m m!$  dir.

$m = 1$  için  $x = (k)$  ve  $\Delta x_k = k - (k+1) = -1 = (-1) 1!$

$m = n - 1$  için  $x = (k^{n-1})$  ve her  $k \in \mathbb{N}$  için  $\Delta^{n-1} x_k = (-1)^{n-1} (n-1)!$  olsun.

$m = n$  için  $x = (k^n)$  ve  $\Delta^n x_k = (-1)^n n!$  olduğunu göstereceğiz.

$$\begin{aligned} \Delta^n x_k &= \Delta^{n-1}(\Delta(k^n)) \\ &= \Delta^{n-1}(k^n - (k+1)^n) \\ &= - \left[ \binom{n}{1} \Delta^{n-1}(k^{n-1}) + \binom{n}{2} \Delta^{n-1}(k^{n-2}) + \dots + \binom{n}{n} \Delta^{n-1}(1) \right] \\ &= -n \Delta^{n-1}(k^{n-1}) \\ &= -n [(-1)^{n-1} (n-1)!] \\ &= (-1)^n n! \end{aligned}$$

O halde  $x = (k^m) \in \Delta^{m+1}(c_0) - \Delta^m(c_0)$  dir.

2)  $\Delta^{m-1}(c) \subset \Delta^m(c)$  ve  $\Delta^{m-1}(c) \neq \Delta^m(c)$  dir.  $x \in \Delta^{m-1}(c)$  olsun. Bu takdirde en az bir  $l$  için  $(\Delta^{m-1} x_k) \rightarrow l$  ( $k \rightarrow \infty$ ) dur.

$$|\Delta^m x_k| = |\Delta^{m-1} x_k - \Delta^{m-1} x_{k+1}| \leq |\Delta^{m-1} x_k - l| + |\Delta^{m-1} x_{k+1} - l| \rightarrow 0$$

olur ki bu  $(\Delta^m x_k) \in c_0 \subset c$  demektir. O halde  $x \in \Delta^m(c)$  dir.  $\Delta^{m-1}(c) \neq \Delta^m(c)$  dir.

Gerçekten  $x = (k^m)$  seçilirse her  $k \in \mathbb{N}$  için  $\Delta^m x_k = (-1)^m m!$  ve

$$\Delta^{m-1} x_k = (-1)^{m-1} m! \left(k + \frac{m-1}{2}\right) \text{ olup } x \in \Delta^m(c) - \Delta^{m-1}(c) \text{ dir.}$$

a)  $x = (k^m)$  olsun. 1) (b) den  $\Delta^m x_k = (-1)^m m!$  dir.

b)  $x = (k^m)$  için  $\Delta^{m-1} x_k = (-1)^{m+1} m! \left(k + \frac{m-1}{2}\right)$  olduğunu gösterelim.

$m = 1$  için  $x = (k)$  ve  $\Delta^0 x_k = (-1)^2 1! \left(k + \frac{1-1}{2}\right)$  olur.

$m = n$  için  $x = (k^n)$  ve her  $k \in \mathbb{N}$  için  $\Delta^{n-1} x_k = (-1)^{n+1} (n)! \left(k + \frac{n-1}{2}\right)$  olsun.

$m = n+1$  için  $x = (k^{n+1})$  ve  $\Delta^n x_k = (-1)^{n+2} (n+1)! \left(k + \frac{n}{2}\right)$  olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
\Delta^n x_k &= \Delta^{n-1} (\Delta (k^{n+1})) \\
&= \Delta^{n-1} (k^{n+1} - (k+1)^{n+1}) \\
&= - \left[ \binom{n+1}{1} \Delta^{n-1} (k^n) + \binom{n+1}{2} \Delta^{n-1} (k^{n-1}) + \binom{n+1}{3} \Delta^{n-1} (k^{n-2}) + \dots + \binom{n+1}{n+1} \Delta^{n-1} (1) \right] \\
&= - \left[ (n+1) \left( (-1)^{n+1} n! \left(k + \frac{n-1}{2}\right) \right) + \frac{(n+1)!}{(n-1)! 2!} (-1)^{n-1} (n-1)! \right] \\
&= (-1)^{n+2} (n+1)! \left(k + \frac{n}{2}\right)
\end{aligned}$$

**3)**  $\Delta^{m-1}(\ell_\infty) \subset \Delta^m(\ell_\infty)$  ve  $\Delta^{m-1}(\ell_\infty) \neq \Delta^m(\ell_\infty)$  dur.  $x \in \Delta^{m-1}(\ell_\infty)$  olduğunu kabul edelim. Bu takdirde her  $k \in \mathbb{N}$  için  $|\Delta^{m-1}(x_k)| \leq K$  eşitsizliği sağlanacak şekilde pozitif bir  $K$  sayısı bulabiliriz. Böylece her  $k \in \mathbb{N}$  için

$$|\Delta^m x_k| = |\Delta^{m-1} x_k - \Delta^{m-1} x_{k+1}| \leq |\Delta^{m-1} x_k| + |\Delta^{m-1} x_{k+1}| \leq 2K$$

ve buradan  $x \in \Delta^m(\ell_\infty)$  elde edilir.

$\Delta^{m-1}(\ell_\infty) \neq \Delta^m(\ell_\infty)$  dur. Gerçekten  $x = (k^m)$  için ve  $\Delta^m x_k = (-1)^m m!$  ve  $\Delta^{m-1} x_k = (-1)^{m+1} m! \left(k + \frac{m-1}{2}\right)$  olup  $x \in \Delta^m(\ell_\infty) - \Delta^{m-1}(\ell_\infty)$  dur.

**Teorem 4.1.6**  $X; \ell_\infty, c$  veya  $c_0$  uzaylarından birini gösterebilirsin. Bu takdirde  $n, m \in \mathbb{N}$  olmak üzere  $n < m$  ise  $\Delta^n(X) \subset \Delta^m(X)$  dir [16].

**Teorem 4.1.7**

i)  $\Delta^m(c_0) \subset \Delta^m(c)$  ve  $\Delta^m(c_0) \neq \Delta^m(c)$ ,

ii)  $\Delta^m(c) \subset \Delta^m(\ell_\infty)$  ve  $\Delta^m(c) \neq \Delta^m(\ell_\infty)$  dur [16].

**İspat.** i)  $x \in \Delta^m(c_0)$  olsun. Bu takdirde  $(\Delta^m x_k) \in c_0 \subset c$  olup  $x \in \Delta^m(c)$  dir.  $x = (k^m)$  seçersek  $\Delta^m x_k = (-1)^m m!$  dir.  $(\Delta^m x_k) \in c - c_0$  olduğundan  $\Delta^m(c_0) \neq \Delta^m(c)$  dir.

ii) Lemma 4.1.1 den  $\Delta^m(c) \subset \Delta^m(\ell_\infty)$  dur.  $\Delta^m(c) \neq \Delta^m(\ell_\infty)$  olduğunu gösterelim.  $x = (1, 0, 1, 0, \dots)$  seçersek  $\Delta^m x_k = (-1)^{k+1} 2^{m-1}$  olup  $x \in \Delta^m(\ell_\infty) - \Delta^m(c)$  dir. Gerçekten  $\Delta^m x_k = (-1)^{k+1} 2^{m-1}$  olduğunu gösterelim.

$m = 1$  için  $\Delta x_k = (-1)^{k+1}$  olur.

$m = n$  için  $\Delta^n x_k = (-1)^{k+1} 2^{n-1}$  olsun.

$m = n + 1$  için  $\Delta^{n+1} x_k = (-1)^{k+1} 2^n$  olduğunu göstereceğiz.

$$\begin{aligned}\Delta^{n+1} x_k &= \Delta^n x_k - \Delta^n x_{k+1} \\ &= (-1)^{k+1} 2^{n-1} - (-1)^{k+2} 2^{n-1} \\ &= (-1)^{k+1} 2^{n-1} [1 - (-1)] \\ &= (-1)^{k+1} 2^n\end{aligned}$$

bulunur.

**Uyarı:**  $\ell_\infty$ ,  $c$  ve  $c_0$  uzayları birer dizi cebiri oldukları halde  $\Delta^m(\ell_\infty)$ ,  $\Delta^m(c)$  ve  $\Delta^m(c_0)$  uzayları birer dizi cebiri değildir.  $\ell_\infty$ ,  $c$  ve  $c_0$  in birer dizi cebiri olduğu bilinmektedir.  $\Delta^m(\ell_\infty)$ ,  $\Delta^m(c)$  ve  $\Delta^m(c_0)$  in dizi cebiri olmadıklarını karşıt birer örnek vererek gösterebiliriz.  $x = (k)$  ve  $y = (k^{m-1})$  seçelim.  $x, y \in \Delta^m(c_0)$  olduğu halde  $\Delta^m(k^m) \notin c_0$  yani  $x.y \notin \Delta^m(c_0)$  dır.  $x = (k)$  ve  $y = (k^m)$  seçelim.  $x, y \in \Delta^m(c)$  ve  $x, y \in \Delta^m(\ell_\infty)$  olduğu halde  $\Delta^m(k^{m+1}) \notin c$  ve  $\Delta^m(k^{m+1}) \notin \ell_\infty$  yani  $x.y \notin \Delta^m(c)$  ve  $x.y \notin \Delta^m(\ell_\infty)$  dur. Şimdi yukarıdaki fark dizi uzaylarından daha genel bir dizi uzayı tanımlayacağız.

## 4.2. $\Delta^m(X)$ UZAYININ BAZI ÖZELLİKLERİ

$X$  herhangi bir dizi uzayı ve  $m \in \mathbb{N}$  olsun.  $\Delta^m(X)$  dizi uzayı

$$\Delta^m(X) = \{x = (x_k) : (\Delta^m x_k) \in X\}$$

şeklinde tanımlıdır. Kolayca gösterilebilir ki  $X$  bir lineer uzay ise  $\Delta^m(X)$  de bir lineer uzaydır.

**Tanım 4.2.1**  $X$ ,  $\|\cdot\|$  normu ile bir Banach uzayı olsun. Bu takdirde  $\Delta^m(X)$  de

$$\|x\|_\Delta = \sum_{i=1}^m |x_i| + \|\Delta^m x\| \quad (4.2.1)$$

normu ile bir Banach uzayıdır [17].

-

**Lemma 4.2.1**  $X \subset Y$  ise  $\Delta^m(X) \subset \Delta^m(Y)$  dir [17].

**Teorem 4.2.1**  $X$  bir Banach uzayı ve  $A$  uzayı  $X$  in kapalı bir altuzayı olsun. Bu takdirde  $\Delta^m(A)$ uzayı da  $\Delta^m(X)$  uzayının kapalı bir altuzayıdır [17].

**İspat.**  $A \subset X$  olduğundan  $\Delta^m(A) \subset \Delta^m(X)$  dir. Şimdi  $\overline{\Delta^m(A)} = \Delta^m(\overline{A})$  olduğunu gösterelim.  $x \in \overline{\Delta^m(A)}$  olsun. Bu takdirde  $\Delta^m(A)$  da öyle bir  $(x^n)$  dizisi mevcuttur ki

$$\|x^n - x\|_{\Delta} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$$

dir. Bu nedenle  $\Delta^m(A)$  da

$$\|(x_k^n) - (x_k)\|_{\Delta} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$$

dir. Böylece  $A$  da

$$\sum_{i=1}^m |x_i^n - x_i| + \|\Delta^m(x_k^n) - \Delta^m(x_k)\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$$

dir. Bu nedenle  $\Delta^m x \in \overline{A}$  dir. Buda  $x \in \Delta^m(\overline{A})$  olmasını gösterir. Tersine  $x \in \Delta^m(\overline{A})$  ise bu takdirde  $x \in \overline{\Delta^m(A)}$  dir. Çünkü  $A$  kapalı olduğundan  $\overline{\Delta^m(A)} = \Delta^m(A)$  dir. Bu nedenle  $\Delta^m(A)$  uzayı,  $\Delta^m(X)$  uzayının kapalı bir altuzayıdır.

**Sonuç 4.2.1** Teorem 4.2.1 in bir sonucu olarak şu sonucu verebiliriz:  $X$  ayrılabilir uzay ise  $\Delta^m(X)$  de ayrılabilir uzaydır.

**Teorem 4.2.2** Eğer  $X$ ,  $\|\cdot\|$  normu ile bir  $BK$ -uzayı ise bu takdirde  $\Delta^m(X)$  uzayı da (4.2.1) de tanımlı olan norma göre bir  $BK$ -uzayıdır [17].

**Uyarı:**  $x \in \Delta^r(X)$  ise  $y_{1-r} = y_{2-r} = \dots = y_0 = 0$  olmak üzere

$$x_j = \sum_{\mu=1}^{j-r} (-1)^r \binom{j-\mu-1}{r-1} y_{\mu} = \sum_{\mu=1}^j (-1)^r \binom{j+r-\mu-1}{r-1} y_{\mu-r}$$

olacak şekilde birtek  $y = (y_j) \in X$  vardır.

## 5. $\gamma$ . DERECEDEDEN İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

### 5.1 $\gamma$ . Dereceden yoğunluk

**Tanım 5.1.1**  $\gamma \in (0, 1]$  olsun. Doğal sayıların bir  $F$  altkümesinin  $\gamma$ -yoğunluğunu

$$\delta_\gamma(F) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m^\gamma} |\{i \leq m : i \in F\}|$$

şeklinde tanımlayabiliriz [18].

Bir  $P$  özelliği  $\gamma$  'ya göre sıfır yoğunluklu bir küme dışında sağlanıyorsa bu özellik  $\gamma$  'ya göre hemen hemen her  $k$  için sağlanıyor denir ve  $h.h.k(\gamma)$  şeklinde gösterilir.

Doğal sayıların herhangi bir sonlu altkümesinin  $\gamma$ -yoğunluğu sıfırdır.  $\delta_\gamma(F^c) = 1 - \delta_\gamma(F)$  ifadesi  $\gamma \in (0, 1]$  için sağlanmaz.  $\gamma = 1$  almırsa  $\gamma$ -yoğunluk, doğal yoğunluğa indirgenir.

**Teorem 5.1.1**  $F$  doğal sayıların herhangi bir altkümesi ve  $\gamma, \mu \in (0, 1]$ , ( $\gamma \leq \mu$ ) olsun. Bu takdirde  $\delta_\mu(F) \leq \delta_\gamma(F)$  dir [18].

**İspat.**  $\gamma, \mu \in (0, 1]$ , ( $\gamma \leq \mu$ ) olsun,  $m^\gamma \leq m^\mu$  olduğundan her  $m \in \mathbb{N}$  için  $\frac{1}{m^\mu} \leq \frac{1}{m^\gamma}$  yazabiliriz. Böylece

$$\frac{1}{m^\mu} |\{i \leq m : i \in F\}| \leq \frac{1}{m^\gamma} |\{i \leq m : i \in F\}| \rightarrow 0$$

olduğundan  $\delta_\mu(F) \leq \delta_\gamma(F)$  elde edilir.

**Tanım 5.1.2**  $x \in w$  ve  $\gamma \in (0, 1]$  verilsin. Eğer

$$\frac{1}{m^\gamma} |\{i \leq m : |x_i - \xi| \geq \varepsilon\}| \rightarrow 0$$

ise  $x$  dizisi  $\gamma$ . dereceden istatistiksel yakınsaktır denir. Bu durumda

$$S^\gamma - \lim x_i = \xi$$

yazarız.  $\gamma$ . dereceden istatistiksel yakınsak dizilerin kümesini  $S^\gamma$  ile göstereceğiz [18].  $\xi = 0$  olması halinde  $x$  dizisi sıfıra  $\gamma$ . dereceden istatistiksel yakınsaktır diyeceğiz ve  $S_0^\gamma$  ile göstereceğiz.  $\gamma = 1$  olması durumunda  $\gamma$ . dereceden istatistiksel yakınsaklık, istatistiksel yakınsaklık ile çakışır.

$\gamma$ . dereceden istatistiksel yakınsaklık  $\gamma \in (0, 1]$  için iyi tanımlı, ancak  $\gamma \in (1, \infty)$  için iyi tanımlı değildir. Bunun için  $x = (x_i)$  dizisini

$$x_i = \begin{cases} 1, & i = 2j \\ -1, & i \neq 2j \end{cases} \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

olarak tanımlayalım. Buna göre  $\gamma \in (1, \infty)$  için

$$\begin{aligned} \frac{1}{j^\gamma} |\{i \leq j : |x_i - 1| \geq \varepsilon\}| &\leq \frac{j}{2j^\gamma} \rightarrow 0, \\ \frac{1}{j^\gamma} |\{i \leq j : |x_i - (-1)| \geq \varepsilon\}| &\leq \frac{j}{2j^\gamma} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

olur. Bu  $x$  dizisinin iki farklı sayıya  $\gamma$ . dereceden istatistiksel yakınsak olması demektir. Bu mümkün değildir.

**Teorem 5.1.2**  $\gamma \in (0, 1]$  ve  $x, y \in w$  olsun.

- i)  $S^\gamma - \lim x_k = \xi_1$  ise  $S^\gamma - \lim kx_k = k\xi_1$  ( $k \in \mathbb{C}$ ),
  - ii)  $S^\gamma - \lim x_k = \xi_1$  ve  $S^\gamma - \lim x_k = \xi_2$  ise  $S^\gamma - \lim(x_k + y_k) = \xi_1 + \xi_2$
- 'dır [18].

**İspat.**

- i)  $c$  nin sıfır olması halinde ispat açıktır.  $c$  sıfırdan farklı bir reel sayı olsun. i) ve
- ii) nin ispatını

$$\frac{1}{m^\gamma} |\{k \leq m : |kx_k - k\xi_1| \geq \varepsilon\}| = \frac{1}{m^\gamma} \left| \left\{ k \leq m : |x_k - \xi_1| \geq \frac{\varepsilon}{|k|} \right\} \right|$$

ve

$$\begin{aligned} &\frac{1}{m^\gamma} |\{k \leq m : |(x_k + y_k) - (\xi_1 + \xi_2)| \geq \varepsilon\}| \\ &\leq \frac{1}{m^\gamma} \left| \left\{ k \leq m : |x_k - \xi_1| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\} \right| + \frac{1}{m^\gamma} \left| \left\{ k \leq m : |y_k - \xi_2| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\} \right| \end{aligned}$$

eşitsizliklerden elde ederiz.  $\gamma \in (0, 1]$  için  $c \subset S^\gamma$  kapsamı kesindir.  $c \subset S^\gamma$  kapsamı doğal sayıların sonlu bir altkümesinin doğal yoğunluğu sıfır olması gerçeğinden elde edilir. Kapsamın kesin olduğunu göstermek için  $x = (x_i)$  dizisini

$$x_i = \begin{cases} 1, & i = j^2 \\ 0, & i \neq j^2 \end{cases} \quad (5.1.1)$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda

$$\frac{1}{j^\gamma} |\{i \leq j : |x_i - 0| \geq \varepsilon\}| \leq \frac{1}{j^\gamma} \cdot (2\sqrt{j} + 1)$$

olup  $\gamma \in (0, 1]$  için  $S^\gamma - \lim x_i = 0$ , ancak  $x = (x_i)$  dizisi yakımsak değildir [18].

**Tanım 5.1.3**  $\gamma \in (0, 1]$  ve  $p \in (0, \infty)$  olsun.

$$\frac{1}{j^\gamma} \sum_{i=1}^j |x_i - \xi|^p \rightarrow 0$$

ise  $x$  dizisi  $\gamma$ . dereceden kuvvetli  $p$ -Cesàro toplanabilir denir.  $\gamma = 1$  almırsa  $\gamma$ . dereceden kuvvetli  $p$ -Cesàro toplanabilme, kuvvetli  $p$ -Cesàro toplanabilirliğe indirgenir.  $\gamma$ . dereceden kuvvetli  $p$ -Cesàro toplanabilir dizilerin uzayı  $w_p^\gamma$  ile gösterilir [18].

## 5.2 Temel Sonuçlar

**Teorem 5.2.1**  $\gamma, \mu \in (0, 1]$  ve  $\gamma \leq \mu$  olsun.  $S^\gamma \subseteq S^\mu$  kapsamı kesindir [18].

**İspat.**  $\gamma, \mu \in (0, 1]$  sayılarını  $\gamma \leq \mu$  olacak şekilde seçelim ve  $x \in S^\gamma$  olsun. Bu takdirde

$$\frac{1}{j^\mu} |\{i \leq j : |x_i - \xi| \geq \varepsilon\}| \leq \frac{1}{j^\gamma} |\{i \leq j : |x_i - \xi| \geq \varepsilon\}|$$

dır, bu  $S^\gamma \subseteq S^\mu$  olması demektir. Diğer taraftan

$$x_i = \begin{cases} 1, & i = j^2 \\ 0, & i \neq j^2 \end{cases} \quad (5.2.1)$$

şeklinde tanımlanan diziyi gözönüne alalım.  $\mu \in (\frac{1}{2}, 1]$  için olup  $S^\mu - \lim x_i = 0$ , yani  $x \in S^\mu$  ancak,  $\gamma \in (0, \frac{1}{2}]$  için  $x \notin S^\gamma$  dir [18].

Son teoremden aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

**Sonuç 5.2.2**  $\gamma \in (0, 1]$  olsun. Bir dizi  $\gamma$ . dereceden istatistiksel yakımsak ise istatistiksel yakımsaktır [18].

### Sonuç 5.2.3

$$i) S^\gamma = S^\mu \Leftrightarrow \gamma = \mu,$$

$$ii) S^\gamma = S \Leftrightarrow \gamma = 1$$

Aşağıdaki teoremi ispatsız olarak veriyoruz.

**Teorem 5.2.4**  $\gamma \in (0, 1]$  olsun. Bir dizi  $\gamma$ . dereceden istatistiksel yakınsak ise  $\lim y_k = \xi$  olacak şekilde  $x = (x_i)$  dizisinin bir  $y = (y_i)$  alt dizisi vardır [18].

**Teorem 5.2.5**  $p$  bir pozitif reel sayı ve  $\gamma, \mu \in (0, 1]$ ,  $(\gamma \leq \mu)$  olsun.  $w_p^\gamma \subseteq w_p^\mu$  kapsaması kesindir [18].

**İspat.**  $x \in w_p^\gamma$ ,  $\gamma, \mu \in (0, 1]$ ,  $(\gamma \leq \mu)$  olsun. Bu takdirde

$$\frac{1}{j^\mu} \sum_{i=1}^j |x_i - \xi|^p \leq \frac{1}{j^\gamma} \sum_{i=1}^j |x_i - \xi|^p$$

yazabiliriz. Buradan  $w_p^\gamma \subseteq w_p^\mu$  elde ederiz. İçermenin kesin olduğunu göstermek için (5.2.1) eşitliği ile verilen diziyi gözönüne alalım. Bu durumda  $\mu \in (\frac{1}{2}, 1]$  için

$$\frac{1}{j^\mu} \sum_{i=1}^j |x_i - 0|^p \leq \frac{\sqrt{j}}{j^\mu} = \frac{1}{j^{\mu-\frac{1}{2}}} \rightarrow 0$$

olup  $x \in w_p^\mu$  dir, ancak  $\gamma \in (0, \frac{1}{2}]$  için

$$\frac{\sqrt{j}-1}{j^\gamma} \leq \frac{1}{j^\gamma} \sum_{i=1}^j |x_i - 0|^p$$

olup  $j \rightarrow \infty$  iken  $\frac{\sqrt{j}-1}{j^\gamma} \rightarrow \infty$  olduğundan  $x \notin w_p^\gamma$  elde edilir.

Teorem 5.2.5 den aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

**Sonuç 5.2.6**  $\gamma \in (0, 1]$  ve  $p \in (0, \infty)$  olsun. Bu takdirde

- i)  $w_p^\gamma = w_p^\mu \Leftrightarrow \gamma = \mu$ ,
- ii)  $w_p^\gamma \subseteq w_p$ ,  $\gamma \in (0, 1]$  [18].

Aşağıdaki teoremi ispatsız olarak veriyoruz.

**Teorem 5.2.7**  $\gamma \in (0, 1]$  ve  $p, q \in (0, \infty)$ ,  $(p < q)$  olsun. Bu durumda  $w_q^\gamma \subseteq w_p^\gamma$  dir [18].

**Teorem 5.2.8**  $\gamma \in (0, 1]$  ve  $p \in (0, \infty)$  olsun. Bir dizi  $\gamma$ . dereceden kuvvetli  $p$ -Cesàro toplanabilir ise  $\mu$ . dereceden istatistiksel yakınsaktır [18].

**İspat.**  $x = (x_i)$  dizisi verilsin ve  $\varepsilon > 0$  olsun, bu takdirde

$$\sum_{i=1}^j |x_i - \xi|^p \geq |\{i \leq j : |x_i - \xi|^p \geq \varepsilon\}| \varepsilon^p$$

yazabiliriz, böylece

$$\begin{aligned}\frac{1}{j^\gamma} \sum_{i=1}^j |x_i - \xi|^p &\geq \frac{1}{j^\gamma} |\{i \leq j : |x_i - \xi|^p \geq \varepsilon\}| \varepsilon^p \\ &\geq \frac{1}{j^\mu} |\{i \leq j : |x_i - \xi|^p \geq \varepsilon\}| \varepsilon^p\end{aligned}$$

olup ispat tamamlanır.

Teorem 5.2.8 den aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

**Sonuç 5.2.9**

*i)*  $\gamma \in (0, 1]$  ve  $p \in (0, \infty)$  olsun. Bir dizi  $\gamma$ . dereceden kuvvetli  $p$ -Cesàro toplanabilir ise  $\gamma$ . dereceden istatistiksel yakınsaktır.

*ii)* Bir dizi kuvvetli  $p$ -Cesàro toplanabilir ise istatistiksel yakınsaktır [18].

## 6. $\gamma$ . DERECEDEDEN $\Delta^m$ -DEFERRED İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

**Tanım 6.1**  $p = \{p(i)\}_{i \in \mathbb{N}}$  ve  $q = \{q(i)\}_{i \in \mathbb{N}}$  pozitif tamsayıların

$$p(i) < q(i) \text{ ve } \lim_{i \rightarrow \infty} q(i) = \infty \quad (6.1)$$

koşulunu sağlayan dizileri olmak üzere  $m \in \mathbb{N}$  ve  $\gamma \in (0, 1]$  olsun.  $\forall \varepsilon > 0$  için

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{(q(i) - p(i))^\gamma} |\{p(i) < k \leq q(i) : |\Delta^m x_k - \xi| \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise  $x = (x_k)$  dizisi  $\xi$  sayısına  $\gamma$ . dereceden  $\Delta^m$ -deferred istatistiksel yakınsaktır denir. Eğer  $x = (x_k)$  dizisi  $\xi$  sayısına  $\gamma$ . dereceden  $\Delta^m$ -deferred istatistiksel yakınsak ise  $\Delta^m (DS_{p,q}^\gamma) - \lim x_k = \xi$  şeklinde gösterilir. Bu tanımda  $m = 0$  ve  $\gamma = 1$  ise  $\gamma$ . dereceden  $\Delta^m$ -deferred istatistiksel yakınsaklık, deferred istatistiksel yakınsaklığa indirgenir.  $\gamma = 1$ ,  $q(i) = i$  ve  $p(i) = 0$  ise  $\gamma$ . dereceden  $\Delta^m$ -deferred istatistiksel yakınsaklık, Et ve Nuray[17] tarafından verilen  $\Delta^m$ -istatistiksel yakınsaklığa indirgenir.  $\gamma$ . dereceden  $\Delta^m$ -deferred istatistiksel yakınsaklık  $\gamma \in (0, 1]$  için iyi tanımlı fakat  $\gamma > 1$  için iyi tanımlı değildir. Gerçekten  $m = 2$  ve  $x = (x_k)$  dizisini

$$x_k = \begin{cases} 0, & 1 \leq k \leq 3 \\ x_{k-1} + \frac{k-2}{2}, & k = 2n, n \geq 2 \\ x_{k-1} + \frac{k-3}{2} & k = 2n + 1, n \geq 2 \end{cases}$$

olarak ve  $y = (y_k)$  dizisini de

$$y_k = \begin{cases} 1, & k = 2n \\ 0, & k \neq 2n \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}.$$

şeklinde seçelim.  $\Delta^2 x_k = y_k$  dir. Bu takdirde  $q(n) = 4n^2$ ,  $p(n) = 2n$  ve  $\gamma > 1$  olmak üzere  $\Delta^2 (DS_{p,q}^\gamma) - \lim x_k = 0$  ve  $\Delta^2 (DS_{p,q}^\gamma) - \lim x_k = 1$  dir. Bu da mümkün değildir.  $\gamma \in (0, 1]$  için

$\Delta^m(c) \subset \Delta^m(DS_{p,q}^\gamma)$  olduğu açıktır. Fakat bunun tersi doğru değildir. Gerçekten

$$y_k = \begin{cases} 2, & k = n^2 \\ 0, & k \neq n^2 \end{cases}$$

seçilirse

$$\frac{1}{(q(n) - p(n))^\gamma} |\{p(n) < k \leq q(n) : |y_k - 0| \geq \varepsilon\}| \leq \frac{\sqrt{q(n)} - \sqrt{p(n)} + 1}{(q(n) - p(n))^\gamma}$$

dir. Bu nedenle  $\gamma > \frac{1}{2}$  için  $x = (x_k)$  dizisi  $\Delta^m$ -deferred istatistiksel yakınsaktır, fakat  $\Delta^m$ -yakınsak değildir [19].

**Tanım 6.2**  $p = \{p(i)\}_{i \in \mathbb{N}}$  ve  $q = \{q(i)\}_{i \in \mathbb{N}}$  pozitif tamsayıların (6.1) deki koşulu sağlayan dizileri olmak üzere  $m \in \mathbb{N}$  ve  $\gamma \in (0, 1]$  olsun ve  $\varepsilon > 0$  verilsin.

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{(q(i) - p(i))^\gamma} |\{p(i) < k \leq q(i) : |\Delta^m x_k - \Delta^m x_s| \geq \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde  $s = s(\varepsilon)$  sayısı varsa  $x = (x_k)$  dizisine  $\gamma$ . dereceden  $\Delta^m$ -deferred istatistiksel Cauchy dizisi denir. Bu tanımda  $q(i) = i$ ,  $p(i) = 0$  ve  $\gamma = 1$  alınırsa alışılmış  $\Delta^m$ -istatistiksel Cauchy dizisi elde edilir [19].

**Tanım 6.3**  $p = \{p(i)\}_{i \in \mathbb{N}}$  ve  $q = \{q(i)\}_{i \in \mathbb{N}}$  pozitif tamsayıların (6.1) deki koşulu sağlayan dizileri olmak üzere  $m \in \mathbb{N}$ ,  $r \in \mathbb{R}^+$  ve  $\gamma \in (0, 1]$  olsun.

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{(q(i) - p(i))^\gamma} \sum_{k=p(i)+1}^{q(i)} |\Delta^m x_k - \xi|^r = 0$$

olacak şekilde bir  $\xi$  sayısı varsa  $x = (x_k)$  dizisine  $\gamma$ . dereceden kuvvetli  $\Delta_r^m$ -deferred Cesàro yakınsaktır denir ve  $\Delta^m - D\omega_r^\gamma [p, q] - \lim x_k = \xi$  ile gösterilir [19].

**Teorem 6.1**  $0 < \gamma \leq 1$  bir reel sayı,  $x = (x_k)$  ve  $y = (y_k)$  herhangi bir dizi olsun. Bu takdirde

(i)  $\Delta^m (DS_{p,q}^\gamma) - \lim x_k = \xi$  ve  $c \in \mathbb{R}$  ise bu takdirde  $\Delta^m (DS_{p,q}^\gamma) - \lim cx_k = c\xi$  dir.

(ii)  $\Delta^m (DS_{p,q}^\gamma) - \lim x_k = \xi_1$  ve  $\Delta^m (DS_{p,q}^\gamma) - \lim y_k = \xi_2$  ise bu takdirde  $\Delta^m (DS_{p,q}^\gamma) - \lim (x_k + y_k) = \xi_1 + \xi_2$  dir.

(iii)  $\Delta^m - D\omega_r^\gamma [p, q] - \lim x_k = \xi$  ve  $c \in \mathbb{R}$  ise bu takdirde  $\Delta^m - D\omega_r^\gamma [p, q] - \lim cx_k = c\xi$  dir.

(iv)  $\Delta^m - D\omega_r^\gamma [p, q] - \lim x_k = \xi_1$  ve  $\Delta^m - D\omega_r^\gamma [p, q] - \lim y_k = \xi_2$  ise bu takdirde  $\Delta^m - D\omega_r^\gamma [p, q] - \lim (x_k + y_k) = \xi_1 + \xi_2$  dir [19].

**Teorem 6.2**  $m \in \mathbb{N}$  olsun. Bu takdirde  $\Delta^m (DS_{p,q}^\gamma) \subset \Delta^{m+1} (DS_{p,q}^\gamma)$  ve bu kapsama kesindir [19].

**İspat.**  $x = (x_k) \in \Delta^m (DS_{p,q}^\gamma)$  ise

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{(q(i) - p(i))^\gamma} |\{p(i) < k \leq q(i) : |\Delta^m x_k - \xi| \geq \varepsilon\}| = 0 \quad (6.2)$$

olacak şekilde yani  $h.h. (D_\gamma) .k$  için  $|\Delta^m x_k - \xi| < \varepsilon$  eşitsizliği sağlanacak şekilde bir  $\xi$  sayısı vardır. Çünkü  $\Delta^{m+1} x_k = \Delta^m x_k - \Delta^m x_{k+1}$  olduğundan  $h.h. (D_\gamma) .k$  için

$$|\Delta^{m+1} x_k| \leq |\Delta^m x_k - \xi| + |\Delta^m x_{k+1} - \xi| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

olur. Bu  $\Delta^{m+1} (DS_{p,q}^\gamma) - \lim x_k = 0$  demektir. Kapsamın kesin olduğunu göstermek için  $x = (k^{m+2})$ ,  $q(i) = i$ ,  $p(i) = 0$  ve  $\gamma = 1$  seçilsin. Bu takdirde  $x \in \Delta^{m+1} (DS_{p,q}^\gamma)$  dır. Fakat  $x \notin \Delta^m (DS_{p,q}^\gamma)$  dır. Teorem 6.2 den aşağıdaki sonuç elde edilir.

**Sonuç 6.1**  $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$  ve  $m_1 < m_2$  olsun. Bu takdirde  $\Delta^{m_1} (DS_{p,q}^\gamma) \subset \Delta^{m_2} (DS_{p,q}^\gamma)$  ve bu kapsama kesindir [19].

**Teorem 6.3**  $x = (x_k)$  dizisi  $\gamma$ . dereceden  $\Delta^m$ -deferred istatistiksel yakınsak ise bu takdirde  $\gamma$ . dereceden  $\Delta^m$ -deferred istatistiksel Cauchy dizisidir [19].

**İspat.**  $\Delta^m (DS_{p,q}^\gamma) - \lim x_k = \xi$  ve  $\varepsilon > 0$  verilsin. Bu takdirde  $h.h. (D_\gamma) .k$  için  $|\Delta^m x_k - \xi| < \frac{\varepsilon}{2}$  eşitsizliği sağlanır. Eğer  $s$  sayısı  $h.h. (D_\gamma) .k$  için  $|\Delta^m x_s - \xi| < \frac{\varepsilon}{2}$  olacak şekilde seçilirse

$$|\Delta^m x_k - \Delta^m x_s| \leq |\Delta^m x_k - \xi| + |\Delta^m x_s - \xi| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

eşitsizliği sağlanır. Bu  $x$  dizisinin  $\gamma$ . dereceden  $\Delta^m$ -deferred istatistiksel Cauchy dizisi olması demektir.

**Teorem 6.4**  $y = (y_k)$  dizisi  $h.h. (D_\gamma) .k$  için  $\Delta^m x_k = \Delta^m y_k$  eşitliği sağlanacak şekilde  $\gamma$ . dereceden  $\Delta^m$ -deferred istatistiksel yakınsak bir dizi olsun. Bu takdirde  $x$  dizisinde  $\gamma$ . dereceden  $\Delta^m$ -deferred istatistiksel yakınsak bir dizidir [19].

**İspat.**  $h.h. (D_\gamma) .k$  için  $\Delta^m x_k = \Delta^m y_k$  ve  $\Delta^m (DS_{p,q}^\gamma) - \lim y_k = \xi$  olsun. Bu takdirde her  $i$  için

$$\begin{aligned} \{p(i) < k \leq q(i) : |\Delta^m x_k - \xi| \geq \varepsilon\} &\subseteq \{p(i) < k \leq q(i) : \Delta^m x_k \neq \Delta^m y_k\} \\ &\cup \{p(i) < k \leq q(i) : |\Delta^m y_k - \xi| \geq \varepsilon\} \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. Buradan

$$\begin{aligned} \frac{1}{(q(i) - p(i))^\gamma} |\{p(i) < k \leq q(i) : |\Delta^m x_k - \xi| \geq \varepsilon\}| &\leq \\ \frac{1}{(q(i) - p(i))^\gamma} |\{p(i) < k \leq q(i) : \Delta^m x_k \neq \Delta^m y_k\}| + & \\ \frac{1}{(q(i) - p(i))^\gamma} |\{p(i) < k \leq q(i) : |\Delta^m y_k - \xi| \geq \varepsilon\}| & \end{aligned}$$

eşitsizliğinde  $i \rightarrow \infty$  için limit almırsa  $x = (x_k)$  dizisinin  $\xi$  sayısına  $\gamma$ . dereceden  $\Delta^m$ -deferred istatistiksel yakınsak olduğu görülür.

**Teorem 6.5**  $0 < \gamma \leq \mu \leq 1$  olsun. Bu takdirde  $\Delta^m (DS_{p,q}^\gamma) \subseteq \Delta^m (DS_{p,q}^\mu)$  ve bu kapsama kesindir [19].

**İspat.** Kapsama kısmını göstermek kolaydır. Şimdi  $y = (y_k)$  dizisini

$$y_k = \begin{cases} 1, & k = n^2 \\ 0, & k \neq n^2 \end{cases}$$

olacak şekilde seçelim.  $x$  dizisinde  $\Delta^m x_k = y_k$  eşitliği sağlanacak şekilde bir dizi olsun. Ayrıca  $q(n) = 4n^2$  ve  $p(n) = n^2$  alalım. Bu takdirde  $\frac{1}{2} < \mu \leq 1$  için  $x \in \Delta^m (DS_{p,q}^\mu)$  dir. Fakat  $0 < \gamma \leq \frac{1}{2}$  için  $x \notin \Delta^m (DS_{p,q}^\gamma)$  dir.

**Teorem 6.6**  $\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{(q(i)-p(i))^\gamma}{i} > 0$  ise bu takdirde  $\Delta^m (S) \subset \Delta^m (DS_{p,q}^\gamma)$  dir. Burada  $\Delta^m (S)$  bütün  $\Delta^m$ -istatistiksel yakınsak dizilerin kümesidir [19].

**İspat.**  $\Delta^m (S) - \lim x_k = \xi$  ve  $\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{(q(i)-p(i))^\gamma}{i} > 0$  olsun.  $\forall \varepsilon > 0$  için

$$\{k \leq i : |\Delta^m x_k - \xi| \geq \varepsilon\} \supseteq \{p(i) < k \leq q(i) : |\Delta^m x_k - \xi| \geq \varepsilon\}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \frac{1}{i} |\{k \leq i : |\Delta^m x_k - \xi| \geq \varepsilon\}| &\geq \frac{1}{i} |\{p(i) < k \leq q(i) : |\Delta^m x_k - \xi| \geq \varepsilon\}| \\ &= \frac{(q(i) - p(i))^\gamma}{i} \frac{1}{(q(i) - p(i))^\gamma} |\{p(i) < k \leq q(i) : |\Delta^m x_k - \xi| \geq \varepsilon\}| \end{aligned}$$

yazılabilir. Son eşitsizlikte  $i \rightarrow \infty$  için limit almırsa ve  $\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{(q(i)-p(i))^\gamma}{i} > 0$  olduğu düşünülürse  $\Delta^m (DS_{p,q}^\gamma) - \lim x_k = \xi$  elde edilir. Aşağıdaki iki teoremi ispatsız olarak veriyoruz.

**Teorem 6.7**  $\gamma \leq \mu$ ,  $r \in \mathbb{R}^+$  ve  $m \in \mathbb{N}$  olmak üzere  $\gamma, \mu \in (0, 1]$  olsun. Bu takdirde  $\Delta^m (Dw_r^\gamma [p, q]) \subseteq \Delta^m (Dw_r^\mu [p, q])$  ve bu kapsama kesindir [19].

**Teorem 6.8**  $\gamma \in (0, 1]$  ve  $0 < r < s < \infty$  olsun. Bu takdirde  $\Delta^m (Dw_s^\gamma [p, q]) \subseteq \Delta^m (Dw_r^\gamma [p, q])$  dir [19].

**Teorem 6.9**  $\gamma \leq \mu$ ,  $r \in \mathbb{R}^+$  ve  $m \in \mathbb{N}$  olmak üzere  $\gamma, \mu \in (0, 1]$  olsun. Eğer  $x = (x_k)$  dizisi  $\xi$  ye  $\gamma$ . dereceden kuvvetli  $\Delta_r^m$ -deferred Cesàro yakınsak ise bu takdirde  $\mu$ . dereceden kuvvetli  $\Delta^m$ -deferred istatistiksel yakınsaktır [19].

**İspat.**  $x = (x_k)$  dizisi  $\xi$  ye kuvvetli  $\Delta_r^m$ -deferred Cesàro yakınsak olsun.  $y = (y_k)$  dizisi  $\Delta^m x_k = y_k$  eşitliği sağlanacak şekilde bir dizi olsun ve  $\varepsilon > 0$  verilsin. Bu takdirde

$$\begin{aligned} \sum_{k=p(i)+1}^{q(i)} |y_k - \xi|^r &= \sum_{\substack{k=p(i)+1 \\ |y_k - \xi| \geq \varepsilon}}^{q(i)} |y_k - \xi|^r + \sum_{\substack{k=p(i)+1 \\ |y_k - \xi| < \varepsilon}}^{q(i)} |y_k - \xi|^r \\ &\geq \sum_{\substack{k=p(i)+1 \\ |y_k - \xi| \geq \varepsilon}}^{q(i)} |y_k - \xi|^r \\ &\geq |\{p(i) < k \leq q(i) : |y_k - \xi|^r \geq \varepsilon\}| \cdot \varepsilon^r \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} \frac{1}{(q(i)-p(i))^\gamma} \sum_{k=p(i)+1}^{q(i)} |y_k - \xi|^r &\geq \frac{1}{(q(i)-p(i))^\gamma} |\{p(i) < k \leq q(i) : |y_k - \xi|^r \geq \varepsilon\}| \cdot \varepsilon^r \\ &\geq \frac{1}{(q(i)-p(i))^\mu} |\{p(i) < k \leq q(i) : |y_k - \xi|^r \geq \varepsilon\}| \cdot \varepsilon^r \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu son eşitsizlikte  $i \rightarrow \infty$  için limit alınırsa  $x = (x_k)$  dizisi  $\xi$  ye  $\mu$ . dereceden  $\Delta^m$ -deferred istatistiksel yakınsak olduğu görülür.  $y = (y_k)$  dizisi  $\Delta^m x_k = y_k$  eşitliğini sağlayan sınırlı ve  $\mu$ . dereceden deferred istatistiksel yakınsak bir dizi olsa bile yukarıdaki Teorem 6.9 un tersi sağlanmaz. Bunu göstermek için  $\mu$ . dereceden  $\Delta^m$ -deferred istatistiksel yakınsak ve  $\Delta^m$ -sınırlı (yani  $x \in \Delta^m(\ell_\infty)$ ) fakat  $\gamma$ . dereceden kuvvetli  $\Delta_r^m$ -deferred Cesàro yakınsak olmayan bir dizi bulmamız gerekir.  $p(i) = 0$  ve  $q(i) = i$  ve  $y = (y_k)$  dizisini

$$y_k = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{k}}, & k \neq m^3 \\ 1, & k = m^3 \end{cases}$$

olacak şekilde seçelim.  $y = (y_k)$  dizisi sınırlıdır.  $\gamma \in (\frac{1}{3}, 1]$  için  $x \in \Delta^m(\ell_\infty) \cap \Delta^m(DS_{p,q}^\gamma)$  fakat  $\gamma \in (0, \frac{1}{2})$  için  $x \notin \Delta^m(D\omega_r^\gamma[p, q])$  dir. Böylece  $x \in \Delta^m(DS_{p,q}^\gamma) - \Delta^m(D\omega_r^\gamma[p, q])$  dir. Aşağıdaki teoremi ispatsız olarak veriyoruz.

**Teorem 6.10**  $\gamma \in (0, 1]$  ve  $r \in \mathbb{R}^+$  olsun. Bu takdirde  $\forall m \in \mathbb{N}$  için  $\Delta^m(D\omega_r^\gamma[p, q]) \subseteq \Delta^{m+1}(D\omega_r^\gamma[p, q])$  dir [19].

**Teorem 6.11**  $\{p(i)\}$ ,  $\{q(i)\}$ ,  $\{p'(i)\}$  ve  $\{q'(i)\}$  dizileri her  $i \in \mathbb{N}$  için  $p(i) \leq p'(i) < q'(i) \leq q(i)$  eşitsizliğini sağlayan diziler,  $\gamma \in (0, 1]$  ve  $m \in \mathbb{N}$  olsun. Eğer

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \left( \frac{q'(i) - p'(i)}{q(i) - p(i)} \right)^\gamma > 0$$

ise  $x = (x_k)$  dizisi  $\gamma$ . dereceden  $\Delta^m(DS_{p,q}^\gamma)$  yakınsak ise  $\gamma$ . dereceden  $\Delta^m(DS_{p',q'}^\gamma)$ -yakınsaktır [19].

**İspat.**

$$\{p(i) < k \leq q(i) : |\Delta^m x_k - \xi| \geq \varepsilon\} \supseteq \{p'(i) < k \leq q'(i) : |\Delta^m x_k - \xi| \geq \varepsilon\}$$

gerçeğinden hareketle aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(q(i) - p(i))^\gamma} |\{p(i) < k \leq q(i) : |\Delta^m x_k - \xi| \geq \varepsilon\}| \geq \\ & \frac{1}{(q(i) - p(i))^\gamma} |\{p'(i) < k \leq q'(i) : |\Delta^m x_k - \xi| \geq \varepsilon\}| = \\ & \left( \frac{q'(i) - p'(i)}{q(i) - p(i)} \right)^\gamma \frac{1}{(q'(i) - p'(i))^\gamma} |\{p'(i) < k \leq q'(i) : |\Delta^m x_k - \xi| \geq \varepsilon\}| \end{aligned}$$

son eşitsizlikten  $i \rightarrow \infty$  için limit alınrsa

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{(q'(i) - p'(i))^\gamma} |\{p'(i) < k \leq q'(i) : |\Delta^m x_k - \xi| \geq \varepsilon\}| = 0$$

olduğu görülür. Bu da  $x \in \Delta^m (DS_{p',q'}^\gamma)$  olması demektir.

## KAYNAKLAR

- [1] **Fast, H.**,1951. Sur la convergence statistique, Colloquium Math., **2**, 241–244.
- [2] **Steinhaus, H.**, 1951. Sur la convergence ordinaire et la convergence asymptotique, Colloquium Math., **2**, 73-74.
- [3] **Agnew, R. P.**, 1932. On Deferred Cesàro means, Ann. of Math., **33**, 413–421.
- [4] **Maddox, I. J.**, 1970. Elements of Functional Analysis, *Cambridge University Press*. London.
- [5] **Kreyszig, E.**, 1978. Introductory Functional Analysis with Applications, John Wiley & Sons, New York.
- [6] **Goes, G., ve Goes, S.**, 1970. Sequence of Variation and Sequence of Fourier Coefficients 1, Math.Z., **118**, 93-102.
- [7] **Schoenberg, I. J.**, 1959. The integrability of certain functions and related to summability methods, Amer. Math. Montly, **66**, 361-375.
- [8] **Fridy, J.A.**, 1985. On statistical convergence, Analysis, **5**, 301–313.
- [9] **Šalat, T.**, 1980. On statistically convergent sequences of real numbers, Math. Slovaca., **30**, 139-150.
- [10] **Connor, J. S.**, 1988. The statistical and strong  $p$ -Cesàro convergence of sequences, Analysis, **8**, 47–63.
- [11] **Niven, I. and Zuckerman, H.S.**, 1960. An Introduction to the Theory of Numbers, John Wiley & Sons, Inc., New York-London.
- [12] **Connor, J. S.**, 1990. Two valued measures and summability, Analysis, **10**, 373–385.
- [13] **Hardy, G. H.**, 1949. Divergent Series. Oxford, at the Clarendon Press. xvi+396 pp.
- [14] **Powell, R. E and Shah, S.M.**, 1972. Summability Theory and its Applications, V.N.R. Company, London.

- [15] **Yılmaztürk, M.**, 2013. Deferred İstatistiksel Yakınsaklık, Yüksek Lisans Tezi, Mersin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Mersin.
- [16] **Et, M.**, 1992. Genelleştirilmiş Fark Dizi Uzayları ve Matris Dönüşümleri, Doktora Tezi, Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Elazığ.
- [17] **M. Et, F. Nuray**, 2001.  $\Delta^m$ -Statistical Convergence, Indian J. Pure Appl. Math.,**32**, 961–969.
- [18] **Çolak, R.** 2010. Statistical Convergence of order  $\gamma$ , Modern Methods in Analysis and its Applications, New Delhi, India, Anamaya Pub. 121-129
- [19] **Temizsu, F., Et, M., Çınar, M.**, 2016.  $\Delta^m$ -Deferred Statistical Convergence of order  $\gamma$ ., Filomat **30**, 667–673.

## ÖZGEÇMİŞ

1983 yılında Elazığ'da doğdum. İlk, Orta ve Lise öğrenimimi Elazığ'da tamamladım. 2009 yılında F. Ü. Fen Fakültesi, Matematik Bölümüne girdim ve 2012 yılında bu bölümden mezun oldum. 2012 yılında F. Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümü Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Anabilim dalında tezli yüksek lisansa başladım. Elazığ Kovancılar Anadolu İmam Hatip Lisesinde Matematik öğretmeni olarak görev yapmaktayım.

