

EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

(DOKTORA TEZİ)

**BİLGİSAYAR DESTEKLİ GEOMETRİK TASARIM
VE UYGULAMALARI**

Vahide BULUT

Tez Danışmanı : Prof. Dr. M. Serdar KORUKOĞLU

Matematik Anabilim Dalı

Sunuş Tarihi : 20.12.2016

Bornova-İZMİR

2016

Vahide BULUT tarafından doktora tezi olarak sunulan “**Bilgisayar Destekli Geometrik Tasarım ve Uygulamaları**” başlıklı bu çalışma EÜ Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği ile EÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Eğitim ve Öğretim Yönergesi’nin ilgili hükümleri uyarınca tarafımızdan değerlendirilerek savunmaya değer bulunmuş ve 19.08.2016 tarihinde yapılan tez savunma sınavında aday oybirliği/oyçokluğu ile başarılı bulunmuştur.

Jüri Üyeleri:

İmza

Jüri Başkanı	: Prof. Dr. M. Serdar KORUKOĞLU	
Raportör Üye	: Prof. Dr. Efendi N. NASIBOV	
Üye	: Prof. Dr. Ramazan KARAKUZU	
Üye	: Doç. Dr. Serap TOPAL	
Üye	: Doç. Dr. Aysun AYTAÇ	

EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

EÜ Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin ilgili hükümleri uyarınca Doktora Tezi olarak sunduğum “**Bilgisayar Destekli Geometrik Tasarım ve Uygulamaları**” başlıklı bu tezin kendi çalışmam olduğunu, sunduğum tüm sonuç, doküman, bilgi ve belgeleri bizzat ve bu tez çalışması kapsamında elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara atıf yaptığımı ve bunları kaynaklar listesinde usulüne uygun olarak verdiğimi, tez çalışması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını, bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya diğer bir üniversitede başka bir tez çalışması içinde sunmadığımı, bu tezin planlanmasından yazımına kadar bütün safhalarda bilimsel etik kurallarına uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul edeceğimi beyan ederim.

20 / 12 / 2016

Adı-Soyadı

Vahide BULUT

ÖZET**BİLGİSAYAR DESTEKLİ GEOMETRİK TASARIM
VE UYGULAMALARI**

BULUT, Vahide

Doktora Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. M. Serdar KORUKOĞLU

Aralık 2016, 142 sayfa

Bilgisayar Destekli Geometrik Tasarım (BDGT) ve Bilgisayar Destekli Üretimde (BDÜ) geometri çok büyük bir öneme sahip olduğundan bu tezde, yaygın bir şekilde kullanılan eğri ve yüzeylerle ilgili bazı uygulamalar verilmiştir. Tezde, kuaterniyonlar, eğri ve yüzeyler, Bezier eğri ve yüzeyleri, B-spline eğrileri, regle ve açılabilir regle yüzeyler ilgili temel kavramlar üzerinde durulmuştur. Ayrıca, özel eğrilerden olan Smarandache eğrileri hakkında çeşitli bilgiler verilmiş ve bu eğrilerden bazılarının küresel görüntüleri üzerinde çalışılmıştır. Benzer şekilde, CNC tezgahlarında büyük öneme sahip bulunan ofset eğri ve yüzeylerinin varyasyonları incelenmiştir. Ardından, dayanak eğrileri Bezier ve herhangi bir eğri olan iki açılabilir regle yüzeylerin varyasyonları verilmiş ve küresel görüntüleri Spherical Linear Interpolation (SLERP) kullanılarak ifade edilmiştir. Son olarak, iki uzay eğrisini interpolate eden yarı-açılabilir Bezier yüzeyi A-Star algoritması kullanılarak elde edilmiştir. Bu tezin amacı, bazı eğri ve yüzeyleri inceleyerek geometrinin, teknolojik tasarım ve üretim sanayinde niçin çok büyük bir öneme sahip olduğunu, ayrıca geometrinin birçok mühendislik ve bilim dallarının niçin ayrılmaz bir parçası olduğunu ortaya koymaktır.

Anahtar sözcükler: BDGT, SLERP, Bezier eğri ve yüzeyi, Açılabilir regle yüzey, Smarandache eğrisi, Ofset eğri ve yüzeyi.

ABSTRACT

COMPUTER AIDED GEOMETRIC DESIGN

AND ITS APPLICATIONS

BULUT, Vahide

Ph.D. in Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. M. Serdar KORUKOĞLU

December 2016, 142 pages

Due to the importance of geometry in Computer Aided Geometric Design (CAGD) and Computer Aided Manufacturing (CAM), in this thesis, some applications related to curves and surfaces that are used widely are given. In the thesis, we focused on quaternions, curves and surfaces, Bezier curves and surfaces, B-spline curves, ruled and developable ruled surfaces. Also, various informations about Smarandache curves, which are one of the special curves, are given and the spherical images of some of these curves are studied. Similarly, exchange variations of offset curves, which have big importance at the CNC workbenches, and surfaces are examined. Additionally, the exchange variations of any two developable ruled surfaces that have directrix curves as Bezier curves or any curve are given and the spherical images of these surfaces are expressed by using Spherical Linear Interpolation (SLERP). Finally, quasi-developable Bezier surface interpolation of two space curves is obtained via using A-Star algorithm. The purpose of this thesis is to put forth why geometry has very big importance in the technological design and manufacturing industry, and also why geometry is an inseparable part of many engineering and disciplines by examining some curves and surfaces.

Keywords: CAGD, SLERP, Bezier curve and surface, Developable ruled surface, Smarandache curve, Offset curve and surface.

TEŞEKKÜR

Doktora tez çalışmamın tamamlanması sürecinde yaptığı değerli katkılarından dolayı danışman Hocam Sayın Prof. Dr. M. Serdar KORUKOĞLU'na içten teşekkürlerimi sunarım. Doktora sürecimin başından (Ocak 2011) Ağustos 2016 tarihine kadar tez çalışmamın planlanmasında, araştırılmasında, yürütülmesinde ve oluşumunda ilgi ve desteğini esirgemeyen, engin bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım, yönlendirme ve bilgilendirmeleriyle çalışmamı bilimsel temeller ışığında şekillendiren saygıdeğer Hocam Sayın Prof. Dr. Ali ÇALIŞKAN ve kıymetli eşi Jale ÇALIŞKAN'a teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca, desteğini esirgemeyen eşim Hasan BULUT ve çocuklarıma, tüm yaşamım boyunca maddi manevi hiçbir fedakarlıktan kaçınmayıp her zaman yanımda olan anne, babam ve ablama da teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET	vii
ABSTRACT	ix
TEŞEKKÜR	xi
ŞEKİLLER DİZİNİ	xvii
ÇİZELGELER DİZİNİ	xxv
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	xxvi
1. GİRİŞ	1
2. ÖN BİLGİLER	3
2.1 Spherical Linear Interpolation (SLERP)	3
2.2 Eğriler ve Yüzeyler Teorisi	6
2.2.1 Eğriler teorisi	6
2.2.2 Bezier eğrileri	9
2.2.3 B-Spline eğrileri.....	11
2.2.4 Yüzeyler teorisi.....	13
2.2.5 Regle yüzey	18
2.2.6 Açılabilir regle yüzey	19
2.2.7 Bezier yüzeyleri	21

İÇİNDEKİLER (devam)

Sayfa

2.2.8 Geometri ve tasarım	22
3. E^3 DE ÖZEL SMARANDACHE EĞRİLERİNİN	
KÜRESEL GÖRÜNTÜLERİ	28
3.1 E^3 deki S. Frenet Çatısına Göre Özel Smarandache Eğrileri.....	29
3.1.1 TN- Smarandache eğrileri	29
3.1.2 NB- Smarandache eğrileri	32
3.1.3 TB- Smarandache eğrileri	35
3.1.4 TNB- Smarandache eğrileri.....	38
3.2 $\{T, g, n\}$ Darboux Çatısının Küresel Görüntüleri	39
3.3 E^3 deki Darboux Çatısına Göre Özel Smarandache Eğrileri	41
3.3.1 Tg- Smarandache eğrileri.....	41
3.3.2 Tn- Smarandache eğrileri.....	41
3.3.3 gn- Smarandache eğrileri	42
3.3.4 Tgn- Smarandache eğrileri.....	42
4. OFSET EĞRİ VE YÜZEYLERİNİN VARYASYONLARI.....	43
4.1 Genelleştirilmiş Ofset Eğrileri	44
4.2 Genelleştirilmiş Ofset Eğrisinin Varyasyonu	47

İÇİNDEKİLER (devam)

Sayfa

4.3 Genelleştirilmiş Ofset Yüzeyleri	49
4.4 Ofset Yüzeylerin Birinci Varyasyonu	59
4.5 Ofset Yüzeyin Yüzölçümünün Birinci Varyasyonu ile ilgili Gauss Formülü	61
4.6 Orjinal Yüzey ve Standart Ofset Yüzeyi Arasındaki Yüzölçümünün İkinci Varyasyonu.....	63
4.7 Uygulama.....	64
5. AÇILABİLİR REGLE YÜZEYLER ÜZERİNE BAZI ÇALIŞMALAR	79
5.1 Bir Açılabilir Regle Yüzeyin Küresel Göstergesine Ait Evolüt	79
5.1.1 Açılabilir regle yüzeyin küresel göstergesinin evolütü	82
5.1.2 Uygulama.....	83
5.2 İki Açılabilir Regle Yüzeyin Varyasyonları	85
5.2.1 Küre üzerinde büküm eğrisi.....	85
5.2.2 Herhangi bir bezier eğrisinden elde edilen yeni bezier eğrisi.....	86
5.2.3 Yay uzunluğu parametrizasyonu	87
5.2.4 Yakın komşu eğrinin varyasyonu	88
5.2.5 Yüzeylerin birinci varyasyonu.....	88

İÇİNDEKİLER (devam)

	<u>Sayfa</u>
5.2.6 İki açılabilir regle yüzeyin varyasyonları.....	90
5.2.7 Uygulama	94
5.2.8 Açılabilir regle yüzeylerin küresel görüntüleri	103
5.2.9 $P(s, t)$ ve $\bar{P}(s, t)$ açılabilir regle yüzeylerinin küresel görüntülerinin serret-frenet çatısı.....	106
5.3 İki B-Spline Uzay Eğrisinin İnterpolasyonu ve A-Star Algoritmasının Kullanılmasıyla Elde Edilmiş Yarı-Açılabilir Bezier Yüzeyi.....	108
5.3.1 Yarı-Açılabilir bezier yüzeyinin oluşturulması.....	110
5.3.2 Temel bezier yamalarının oluşturulması.....	111
5.3.3 A-Star algoritması	116
5.3.4 A-Star algoritması kullanılarak yarı-açılabilir bezier yüzeyinin oluşturulması	118
5.3.5 Uygulama	119
6. GENEL SONUÇLAR	132
KAYNAKLAR DİZİNİ	135
ÖZGEÇMİŞ	141
EKLER	

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Şekil</u>	<u>Sayfa</u>
2.1 Küresel lineer interpolasyon	6
2.2 (α) eğrisi.....	7
2.3 Bezier eğrisi ve kontrol çokgeni	10
2.4 B-spline eğrisi ve kontrol çokgeni.....	12
2.5 B-spline eğrisi ve düğüm vektörü.....	12
2.6 Yüzey	13
2.7 Bir yüzeyin teğet düzlemi ve normal vektörü.....	15
2.8 Bir regle yüzeyin dayanak eğrisi ve üretici.....	18
2.9 Swallow-tail regle yüzeyi	19
2.10 (a) Viviani eğrisi ve (b) teğetlerinden oluşmuş açılabilir regle yüzey.....	20
2.11 Üç farklı tipte açılabilir regle yüzey. Soldan sağa teğetlerin oluşturduğu, konik ve silindirik şeklindeki açılabilir yüzeylerdir	20
2.12 Bezier yüzeyi ve kontrol noktaları.....	21
2.13 Bezier yüzeyinin parametre eğrileri.....	22
2.14 AutoCAD in ekran görüntüsü ve geometri ile ilişkisi	23
2.15 Bir parçanın perspektif kullanılarak AutoCAD de yapılmış çizimi	24

ŞEKİLLER DİZİNİ (devam)

<u>Şekil</u>	<u>Sayfa</u>
2.16 Makina endüstrisinde kullanılan bir parçanın AutoCAD de yapılmış çizimi.....	24
2.17 Solidworks ün ekran görüntüsü ve geometri ile ilişkisi.....	25
2.18 Şekil 2.16 daki şeklin Solidworks de yapılmış katı modellemesi.....	26
2.19 Solidworks de katı modellemesi yapılmış bir dönel yüzey.....	26
2.20 Günlük hayatımızda kullanılan çaydanlığın Solidworks de yapılmış katı bir modellemesi.....	27
2.21 Uçak endüstrisinde kullanılan uçak pervanesinin Solidworks de yapılmış katı modellemesi	27
3.1 T^* vektörünün küresel görüntüsü.	31
3.2 N^* vektörünün küresel görüntüsü..	32
3.3 B^* vektörünün küresel görüntüsü.	32
3.4 T^* vektörünün küresel görüntüsü.	35
3.5 N^* vektörünün küresel görüntüsü.	35
3.6 T^* vektörünün küresel görüntüsü.	38

ŞEKİLLER DİZİNİ (devam)

<u>Şekil</u>	<u>Sayfa</u>
3.7 N* vektörünün küresel görüntüsü.....	38
4.1 Orjinal eğri (kırmızı) ve bu eğrinin $\varepsilon = \frac{1}{10}$ (mavi), $\varepsilon = \frac{1}{7}$ (yeşil), $\varepsilon = \frac{1}{5}$ (mor), ve $\varepsilon = \frac{1}{3}$ (turuncu) için genelleştirilmiş ofset eğrisi.....	65
4.2 Orjinal eğri (kırmızı) ve $\varepsilon = \frac{1}{10}$ (mavi), $\varepsilon = \frac{1}{7}$ (yeşil), $\varepsilon = \frac{1}{5}$ (mor), $\varepsilon = \frac{1}{3}$ (turuncu), ve $\varepsilon = 1$ (sarı olan (Chen and Lin, 2014)de ifade edilen eğridir)...	65
4.3 Orjinal eğri (kırmızı), genelleştirilmiş ofset eğrisi (mavi) ve standart ofset eğrisi (turuncu).....	66
4.4 Orjinal eğri (kırmızı), ve $\varepsilon = \frac{1}{10}$ (mavi), $\varepsilon = \frac{1}{5}$ (yeşil), ve $\varepsilon = \frac{1}{3}$ (turuncu) değerleri için genelleştirilmiş ofset eğrileri.....	67
4.5 Orjinal eğri (kırmızı), ve $\varepsilon = \frac{1}{10}$ (mavi), $\varepsilon = \frac{1}{5}$ (yeşil), $\varepsilon = \frac{1}{3}$ (turuncu), ve $\varepsilon = 1$ (sarı) için genelleştirilmiş ofset eğrileri..	67
4.6 Orjinal yüzey (kırmızı), ve $\varepsilon = \frac{1}{10}$ (yeşil), $\varepsilon = \frac{1}{8}$ (turuncu), $\varepsilon = \frac{1}{6}$ (mavi), $\varepsilon = \frac{1}{4}$ (mor), $\varepsilon = \frac{1}{2}$ (sarı) için genelleştirilmiş ofset yüzeyleri	68

ŞEKİLLER DİZİNİ (devam)

Şekil

Sayfa

4.7 Orjinal yüzey (kırmızı), ve $\varepsilon = \frac{1}{8}$ (mavi), ve $\varepsilon = 1$ (sarı) için genelleştirilmiş ofset yüzeyleri.....	69
4.8 Orjinal yüzey (kırmızı), genelleştirilmiş ofset yüzeyi (yeşil) ve standart ofset yüzeyi (mavi).....	69
4.9 Orjinal yüzey (kırmızı), ve $\varepsilon = \frac{1}{10}$ (yeşil), $\varepsilon = \frac{1}{8}$ (mavi), $\varepsilon = \frac{1}{6}$ (mor), ve $\varepsilon = \frac{1}{4}$ (sarı) için genelleştirilmiş ofset yüzeyleri.	70
4.10 Orjinal yüzey (kırmızı), ve $\varepsilon = \frac{1}{10}$ (yeşil), $\varepsilon = \frac{1}{8}$ (mavi), $\varepsilon = \frac{1}{6}$ (mor), $\varepsilon = \frac{1}{4}$ (sarı), ve $\varepsilon = 1$ (turuncu) için genelleştirilmiş ofset yüzeyleri	71
4.11 Orjinal yüzey (kırmızı), ve $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (yeşil), $\varepsilon = \frac{1}{10}$ (turuncu), $\varepsilon = \frac{1}{5}$ (mavi), $\varepsilon = \frac{1}{3}$ (mor), ve $\varepsilon = \frac{1}{2}$ (sarı) için standart ofset yüzeyleri.	72
4.12 Orjinal yüzey (kırmızı), ve $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (yeşil), $\varepsilon = \frac{1}{10}$ (turuncu), $\varepsilon = \frac{1}{5}$ (mavi), $\varepsilon = \frac{1}{3}$ (mor), $\varepsilon = \frac{1}{2}$ (sarı), ve $\varepsilon = 1$ (açık mavi) için standart ofset yüzeyleri	72

ŞEKİLLER DİZİNİ (devam)

<u>Şekil</u>	<u>Sayfa</u>
4.13 Orjinal yüzey olarak bardak şekli	74
4.14 Orjinal bardak şekli (kırmızı), ve sırasıyla $\varepsilon = \frac{1}{6}$ (yeşil), $\varepsilon = \frac{1}{8}$ (beyaz), $\varepsilon = \frac{1}{10}$ (mavi) değerleri için geliştirilmiş ofset yüzeylerinin kapalı formları	74
4.15 Orjinal bardak şekli (kırmızı), ve sırasıyla $\varepsilon = \frac{1}{6}$ (yeşil), $\varepsilon = \frac{1}{8}$ (beyaz), $\varepsilon = \frac{1}{10}$ (mavi) değerleri için geliştirilmiş ofset yüzeylerinin açık formları	75
4.16 Orjinal bardak şekli (kırmızı), ve $\varepsilon = 1$ (mor) için geliştirilmiş ofset yüzeyinin açık formları.....	75
4.17 Orjinal yüzey olarak tabak şekli	77
4.18 Orjinal tabak şekli (kırmızı), ve sırasıyla $\varepsilon = \frac{1}{10^4}$ (yeşil), $\varepsilon = \frac{1}{15 \cdot 10^3}$ (beyaz), $\varepsilon = \frac{1}{2 \cdot 10^4}$ (mavi) değerleri için geliştirilmiş ofset yüzeylerinin kapalı formları	77

ŞEKİLLER DİZİNİ (devam)

<u>Şekil</u>	<u>Sayfa</u>
4.19 Orjinal tabak şekli (kırmızı), ve sırasıyla $\varepsilon = \frac{1}{10^4}$ (yeşil), $\varepsilon = \frac{1}{15 \cdot 10^3}$ (beyaz), $\varepsilon = \frac{1}{2 \cdot 10^4}$ (mavi) değerleri için genelleştirilmiş ofset yüzeylerinin açık formları	78
4.20 Orjinal tabak şekli (açık mavi), ve $\varepsilon = 1$ (mor) için genelleştirilmiş ofset yüzeyinin açık formları	78
5.1 $\alpha(s)$ doğrultman eğrisinin $T(\sigma)$, $c(\sigma)$ ve $B(\sigma)$ küresel göstergelerinin SLERP kullanılarak birim küre üzerinde çizdikleri jeodezik eğriler.....	83
5.2 $T(s)$, $B(s)$ ve $e_B(s)$ vektörlerinin küresel görüntüleri.....	84
5.3 $P(s, t)$ açılabilir regle yüzeyinin $\alpha(s)$ dayanak eğrisi.....	96
5.4 $\bar{P}(s, t)$ açılabilir regle yüzeyinin dayanak eğrisi olan $\bar{\alpha}(s)$ yakın komşu eğrisi.....	96
5.5 $\alpha(s)$ dayanak eğrisi ve $\bar{\alpha}(s)$ yakın komşu eğrisi.....	96
5.6 $P(s, t)$ açılabilir regle yüzeyi	97
5.7 $\bar{P}(s, t)$ açılabilir regle yüzeyi.....	97
5.8 $P(s, t)$ ve $\bar{P}(s, t)$ açılabilir regle yüzeyleri.....	97
5.9 $P(t, \lambda)$ açılabilir regle yüzeyinin $\alpha(t)$ dayanak eğrisi	100

ŞEKİLLER DİZİNİ (devam)

<u>Şekil</u>	<u>Sayfa</u>
5.10 $\bar{P}(t, \lambda)$ açılabilir regle yüzeyinin dayanak eğrisi olan $\bar{\alpha}(t)$ yakın komşu eğrisi.....	101
5.11 $\alpha(t)$ dayanak eğrisi ve $\bar{\alpha}(t)$ yakın komşu eğrisi.....	101
5.12 $P(t, \lambda)$ açılabilir regle yüzeyi.....	102
5.13 $\bar{P}(t, \lambda)$ açılabilir regle yüzeyi.....	102
5.14 $P(t, \lambda)$ ve $\bar{P}(t, \lambda)$ açılabilir regle yüzeyleri.....	103
5.15 Örnek 1 deki $P(s, t)$ ve $\bar{P}(s, t)$ açılabilir regle yüzeylerinin küresel görüntüleri birim küre üzerinde sırasıyla kırmızı ve mavi olarak gösterilmiştir.....	103
5.16 Örnek 1 deki kırmızı büküm eğrisi $P(s, t)$ açılabilir regle yüzeyine ait ve mavi büküm eğrisi $\bar{P}(s, t)$ açılabilir regle yüzeyine aittir	105
5.17 Örnek 2 deki $P(t, \lambda)$ ve $\bar{P}(t, \lambda)$ açılabilir regle yüzeylerinin küresel görüntüleri sırayla kırmızı ve mavi olarak gösterilmiştir	105
5.18 Örnek 2 deki kırmızı büküm eğrisi $P(t, \lambda)$ açılabilir regle yüzeyini mavi büküm eğrisi $\bar{P}(t, \lambda)$ açılabilir regle yüzeyini göstermektedir	106
5.19 Temel Bezier yamalarının şeması. Kırmızı ve mavi noktalar sırayla $\alpha_1(u)$ ve $\alpha_2(u)$ eğrilerinin bölünme noktalarıdır	112

ŞEKİLLER DİZİNİ (devam)

<u>Şekil</u>	<u>Sayfa</u>
5.20 Köprü eğrisinin belirlenmesi	114
5.21 Temel Bezier Yamasının (TBY) yönlü asıklık grafa (YAG) dönüşümü...	115
5.22 Temel Bezier Yaması (TBY) için açılabilirlik derecesinin hesaplanması...	116
5.23 (1,1), (i,j), (k,l) ve (m,n) düğümleri arasındaki ilişki.....	118
5.24 Yüzey 1 in gösterimi ve A-Star algoritmasının çözüm için izlediği yol.....	120
5.25 Yüzey 2 nin gösterimi ve A-Star algoritmasının çözüm için izlediği yol...	121
5.26 Yüzey 3 ün gösterimi ve A-Star algoritmasının çözüm için izlediği yol.....	122
5.27 Yüzey 4 ün gösterimi ve A-Star algoritmasının çözüm için izlediği yol.....	123
5.28 Yüzey 5 in gösterimi ve A-Star algoritmasının çözüm için izlediği yol.....	124
5.29 Yüzey 6 nın gösterimi ve A-Star algoritmasının çözüm için izlediği yol....	125
5.30 Yüzey 7 nin gösterimi ve A-Star algoritmasının çözüm için izlediği yol....	126
5.31 Yüzey 8 in gösterimi ve A-Star algoritmasının çözüm için izlediği yol.....	127
5.32 Yüzey 9 un gösterimi ve A-Star algoritmasının çözüm için izlediği yol.....	128
5.33 Yüzey 10 un gösterimi ve A-Star algoritmasının çözüm için izlediği yol...	129
5.34 Dijkstra ve A-Star algoritmalarının oluşturulan yüzeyler için optimum çözümü elde ederken harcadığı toplam süre.....	131
5.35 Dijkstra ve A-Star algoritmalarının oluşturulan yüzeyler için optimum çözümü elde ederken gezdikleri düğüm sayıları.....	131

ÇİZELGELER DİZİNİ

<u>Çizelge</u>	<u>Sayfa</u>
4.1 Orjinal yüzey ve genelleştirilmiş ofset yüzeyi arasındaki yüzölçümünün varyasyonları için bazı sonuçlar.....	71
4.2 Orjinal yüzey ve standart ofset yüzeyi arasındaki yüzölçümünün varyasyonları için bazı sonuçlar.....	71
5.1 $P(s, t)$ ve $\bar{P}(s, t)$ açılabilir regle yüzeyleri arasındaki yüzölçümünün birinci varyasyonu için bazı sonuçlar.....	99
5.2 Yüzeylerin optimum açılabilirlik dereceleri ve düğüm sayısı.....	130
5.3 Dijkstra ve A-Star algoritmalarının oluşturulan yüzeyler için optimum çözümü elde ederken harcadığı süre ve açtığı düğüm sayısı.....	130

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklama</u>
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
q	Kuaterniyon
α	Alfa eğrisi
s	Yay uzunluğu
α'	Alfa eğrisinin s parametresine göre türevi
$\dot{\alpha}$	Alfa eğrisinin t parametresine göre türevi
T	Teğet vektörü
N	Asal normal vektörü
B	Binormal vektörü
κ	Alfa eğrisinin eğriliği
τ	Alfa eğrisinin burulması
ds_T	Alfa eğrisinin birim küre üzerindeki teğetler göstergesinin yay elemanı
ds_N	Alfa eğrisinin birim küre üzerindeki asal normaller göstergesinin yay elemanı

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ (devam)

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklama</u>
ds_B	Alfa eğrisinin birim küre üzerindeki binormaller göstergesinin yay elemanı
E^3	Üç-boyutlu Öklit uzayı
P	P yüzeyi
n	P yüzeyinin birim normali
g	P yüzeyinin jeodezik birim normali
κ_g	Jeodezik eğrilik
κ_n	Normal eğrilik
τ_g	Jeodezik burulma
d	Darboux vektörü
c	Birim Darboux vektörü
[I]	Yüzeyin birinci temel formu
[II]	Yüzeyin ikinci temel formu
$\mathcal{A}_\sigma(R)$	Sigma yüzey yamasının R parçasının alanı
S^2	Küre
β	Beta eğrisi
ds^*	Beta eğrisinin yay elemanı

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ (devam)

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklama</u>
κ^*	Beta eğrisinin eğriliği
τ^*	Beta eğrisinin burulması
r	r eğrisi
r_*	Genelleştirilmiş ofset eğrisi
ε	Reel parametre
ρ	Eğrilik yarıçapı
K	Gauss eğriliği
H	Ortalama eğriliği
K^*	Orjinal yüzey ve standart ofset yüzeyi arasındaki Gauss eğriliğinin birinci varyasyonu
H^*	Orjinal yüzey ve standart ofset yüzeyi arasındaki ortalama eğriliğinin birinci varyasyonu
ξ	ξ eğrisi
Ω	Açılabilirlik derecesi

Kısaltmalar

BDGT	Bilgisayar Destekli Geometrik Tasarım
CAGD	Computer Aided Geometric Design
BDÜ	Bilgisayar Destekli Üretim
SLERP	Spherical Linear Interpolation
TBY	Temel Bezier yamaları
KSY	Köprü sınır yaması
YAG	Yönlü Asiklik Graf
TSP	Travelling salesman problem

1 GİRİŞ

Geometrinin, matematiğin çok önemli bir dalı olmasının sebebi görsel olmasıdır. Geometri ve özellikle diferansiyel geometri; astronomi, mekanik, sivil ve mekanik mühendisliği, gemi inşası, mimari ve günümüzde otomobil, uçak, bilgisayar grafikleri ve robotik gibi bir çok mühendislik ve bilim dallarında ve bunların gelişiminde çok hayati bir öneme sahiptir. Bu nedenle tez boyunca esas amacımız; çok önemli bir yere sahip olan diferansiyel geometrinin yapı taşları olan eğri ve yüzeylerin, farklı açılardan incelenmesi ile ilgili yöntemlerin ifade edilmesi ve ayrıca Bilgisayar Destekli Geometrik Tasarım (BDGT) ile aralarındaki bağlantıların gösterilmesidir. Eğri ve yüzeylerin tasarımı sürecinde dikkat edilmesi gereken en önemli nokta, oluşturulan modelin pürüzsüz ve tasarımcının isteğine uygun olması, ve ayrıca model üzerinde interaktif olarak değişiklik yapılabilmesidir.

Tezin ikinci bölümünde; ön bilgiler kapsamında, öncelikle eğri ve yüzeylerin incelenmesinde ilişki kuracağımız kuaterniyonlar ve küresel lineer interpolasyon (Spherical Linear Interpolation) (SLERP) olarak bilinen bir interpolasyon tekniği hakkında gerekli bilgiler verilmiştir. Ayrıca, geometrik tasarımın temeli olan eğri ve yüzeylerin diferansiyel geometrik özellikleri ifade edilerek, eğrinin Serret-Frenet çatısı, eğrilik ve burulması, yüzeyin incelenebilmesi için Darboux ve yerel koordinat çatıları ve eğrilikleri hakkında temel bilgiler verilmiştir. Diğer taraftan, günümüz teknolojisinde geniş yer tutan Bezier eğri ve yüzeyleri, B-spline eğrileri ile açılabilir regle yüzeyler hakkında temel bilgiler verilmiştir.

Üçüncü bölümde; Minkowski spacetime'da, konum vektörü diğer bir regüler eğri üzerinde olan ve bu eğrinin Serret-Frenet çatısının vektörleri tarafından oluşturulan regüler Smarandache eğrileri üzerinde durulmuştur. Bu bölümde, E^3 deki Serret-Frenet ve Darboux çatılarına göre bazı özel Smarandache eğrilerinin küresel görüntüleri verilerek bu eğriler ile küresel görüntüleri arasındaki özellikler incelenmiştir.

Ofset eğri ve yüzeylerin tasarımı, üç boyutlu (3D) nümerik kontrol (NC) makinalarında araç yolu oluşturma ve robot yol planlaması gibi birçok mühendislik ve sanayi alanında oldukça öneme sahiptir. Varyasyon hesabının oluşumu ve gelişimi ise en ideal olanın (mükemmellik) istenmesi ile gerçekleşmiştir (Cherkaev and Cherkaev, 2003). Dördüncü bölümde,

genelleştirilmiş ofset eğri ve yüzeylerin tanımı farklı bir bakış açısıyla ele alınmış ve bu yeni tanıma dayanarak, genelleştirilmiş ofset eğri ve yüzeylerin bazı özellikleri, Chen ve Lin (Chen and Lin, 2014) den faydalanarak incelenmiştir. Bunlara ilave olarak, standart ofset eğrilerinin birinci varyasyonu, standart ofset yüzeylerin yüzölçümlerinin birinci ve ikinci varyasyonu ve orjinal yüzey ile standart ofset yüzeyi arasındaki Gauss ve ortalama eğriliğin birinci varyasyonu ve oval yüzeyler gibi bazı özel koşullar da verilmiştir.

Teknolojik tasarımda büyük öneme sahip olan açılabilir regle yüzeyler, düzleme yırtılmadan ve bükülmeden serilebildiğinden, sac ve plaka-metal temelli endüstrilerde (Boersma and Molenaar, 1995; Frey and Mancewicz, 1992), deniz araçları ile uçak kaplamaları (Pegna and Wolter, 1992) gibi birçok mobil vasıtada ve mimari yapılarda yaygın bir şekilde kullanılmaktadır. Beşinci bölümde, açılabilir regle yüzeyler üzerine bazı çalışmalar yapılmıştır. Bu kapsamda öncelikle, “Bir Açılabilir Regle Yüzeyin Küresel Göstergesine Ait Evolüt” çalışmasında, bir açılabilir regle yüzeyin küresel göstergesinin küresel evolütü elde edilmiş ve bu açılabilir regle yüzeyin dayanak eğrisinin şekil eğrilik ve burulması, aynı eğrinin eğrilik ve burulması ile teğetler ve binormaller küresel göstergelerinin yay elemanları cinsinden ifade edilmiştir. Bunlara ek olarak, bu açılabilir regle yüzeyin dayanak eğrisinin Darboux vektörünün birim küre üzerinde, küresel göstergesine karşılık gelen küresel evolütü ile bu evolütün iki involütü olan binormal ve teğetler göstergeleri SLERP kullanılarak verilmiştir. Ardından, “İki Açılabilir Regle Yüzeyin Varyasyonları” isimli çalışmada, bir açılabilir regle yüzeyin yakın komşu dayanak eğrisinin, diğer bir açılabilir regle yüzeyin dayanak eğrisinden elde edilmesi, bu dayanak eğrilerinin yay uzunlukları arasındaki varyasyon ve eğrilik değişimi verilmiştir. Ayrıca, bu iki açılabilir yüzey arasındaki yüzölçümünün birinci varyasyonu ve bu yüzeylerin küresel görüntüleri sunulmuştur. Bunlara ek olarak, bu yüzeylerin küresel görüntüleri ile büküm eğrisi arasındaki bazı ilişkiler SLERP kullanılarak ifade edilmiştir. Diğer taraftan, benzer inceleme, dayanak eğrisi olarak bilgisayar grafiklerinde büyük bir öneme sahip olan Bezier eğrisi alınarak yapılmıştır. Bu bölümün “İki B-Spline Uzay Eğrisinin İnterpolasyonu ve A-Star Algoritmasının Kullanılmasıyla Elde Edilmiş Yarı-Açılabilir Bezier Yüzeyi” isimli son çalışmasında ise, yüzeyin açılabilirliği ve açılabilirliğinin artırılması üretim-imalat sanayinde çok önemli olduğundan, iki B-spline uzay eğrisini interpolate eden dört-terafli Bezier yamalarının ve dolayısıyla bu yamalardan oluşan yarı-açılabilir Bezier yüzeyinin A-Star algoritmasından yararlanarak nasıl elde edilebileceği üzerinde durulmuştur.

2 ÖN BİLGİLER

Bu bölümde, tez kapsamında yapılan çalışmalar için gerekli ön bilgiler verilmektedir.

2.1 Küresel Lineer İnterpolasyon (SLERP)

Küresel Lineer İnterpolasyon (SLERP) un ifade edilebilmesi için kuaterniyonlara ihtiyaç duyulduğundan öncelikle kuaterniyonlar hakkında bazı temel bilgiler aşağıda verilmiştir.

Kuaterniyonlar: Kuaterniyonlar ilk defa 19. y.y da Sir William Rowan Hamilton tarafından bulunmuştur. Amacı, kompleks sayıları bir şekilde üç boyutlu uzaya uygulayabilmektir (Hanson, 2006). Reel sayılar bir bileşen, kompleks sayılar iki bileşen içeren bir sayı sistemi iken kuaterniyonlar ise dört bileşene sahip bir sayı sistemidir. Kompleks sayıların reel sayıları kapsadığını biliyoruz. Kuaterniyonlar da, iki kompleks sayının kombinasyonundan oluştuğundan kompleks sayıları kapsar. (Özdaş ve Özdaş, 1989). Kuaterniyonlarla ilgili temel bilgiler aşağıda verilmiştir.

TANIM 2.1.1: $\mathbb{R}^4$ de bir element tanımlayan bir kuaterniyon dört değişkenlidir. Bu yüzden bir kuaterniyon, a, b, c, d reel sayılar, $i, j, k \in \mathbb{R}^3$ de standart ortonormal baz ve $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ olmak üzere,

$$q = a + bi + cj + dk \quad (2.1)$$

şeklinde yazılabilir. (Hamilton, 1844).

$$q_1 = a_1 + b_1i + c_1j + d_1k \text{ ve } q_2 = a_2 + b_2i + c_2j + d_2k \quad (2.2)$$

iki kuaterniyon olsun. Kuaterniyon cebirindeki işlemler aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

1) q_1 ve q_2 kuaterniyonlarının toplamı ve farkı

$$\begin{aligned} q_1 \pm q_2 &= (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k) \pm (a_2 + b_2i + c_2j + d_2k) \\ &= (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2)i + (c_1 \pm c_2)j + (d_1 \pm d_2)k \end{aligned} \quad (2.3)$$

ile tanımlıdır.

2) Denklem (2.2) de verilen kuaterniyonlar $q_1 = a_1 + \mathbf{u}$, $q_2 = a_2 + \mathbf{v}$ şeklinde yazılırsa kuaterniyon çarpımı,

$$q_1 \star q_2 = (a_1 a_2 - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}, \quad a_1 \mathbf{v} + a_2 \mathbf{u} + \mathbf{u} \times \mathbf{v}) \quad (2.4)$$

ya da bileşenleri cinsinden,

$$q_1 \star q_2 = \begin{bmatrix} [q_1 \star q_2] \\ [q_1 \star q_2]_i \\ [q_1 \star q_2]_j \\ [q_1 \star q_2]_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2 \\ b_1 a_2 + a_1 b_2 + c_1 d_2 - d_1 c_2 \\ c_1 a_2 + a_1 c_2 + d_1 b_2 - b_1 d_2 \\ d_1 a_2 + a_1 d_2 + b_1 c_2 - c_1 b_2 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

biçiminde yazılabilir. Kuaterniyon çarpımının tanımlanmasıyla kuaterniyonlar 3-boyutlu uzayda vektörlerin döndürülmesi için kullanılmaktadır.

TANIM 2.1.2 : Birim kuaterniyon, $|q| = |\bar{q}| = 1$ olarak tanımlanır.

TANIM 2.1.3: Eğer bir kuaterniyon bir n birim vektörü etrafında θ kadar döndürülürse bu kuaterniyon,

$$q = \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \mathbf{n} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) \quad (2.6)$$

biçiminde gösterilir (Hast, 2005; Kuipers, 1999).

TANIM 2.1.4: (2.1) denklemiyle verilen bir kuaterniyonun eşleniği ve normu sırayla

$$q^* = (a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k})^* = a - b\mathbf{i} - c\mathbf{j} - d\mathbf{k} \quad (2.7)$$

ve

$$N(q) = N(a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \quad (2.8)$$

ile verilir.

TANIM 2.1.5: Bir q kuaterniyonunun tersi

$$q^{-1} = q^* / N(q) \quad (2.9)$$

ile bulunur (Shoemake, 1987).

TANIM 2.1.6: $q \neq 0$ olmak üzere p kuaterniyonunun bir q kuaterniyonu ile soldan bölümü

$$r = pq^{-1} \quad (2.10)$$

biçimindedir. Benzer şekilde sağdan bölümü de tanımlamak mümkündür (Yang, 1963).

Öklit n -uzayında, x merkezli ve r yarıçaplı bir açık n -ball, x noktasından r den daha az uzaklıktaki noktaların geometrik yeridir. Kapalı bir n -ball, x noktasından r den daha az ya da eşit uzaklıktaki noktaların geometrik yeridir. Öklit n -uzayında, her ball bir hiperküre ile sınırlanmıştır. $n=1$ olduğunda ball bir aralık ile, $n=2$ olduğunda disk bir çember ile ve $n=3$ olduğunda ise bir küre (S^3) ile sınırlanmıştır.

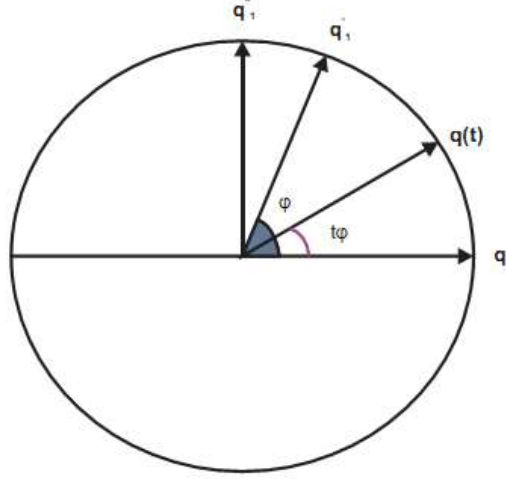
S^3 üzerindeki jeodezik yay, bilgisayar grafiğinde SLERP (Spherical Linear Interpolation) olarak isimlendirilir. SLERP, interpolate edilmiş vektörün birim uzunlukta olmasını, bu vektörün küre üzerinde kalmasını ve ayrıca düzgünlüğü ve sabit açısal hızı da sağlar. Eğer (2.2) de verilen q_1 ve q_2 kuaterniyonları baz olarak küre üzerinde seçilirse, küresel jeodezik eğrinin denklemi

$$q(t) = q_1 \frac{\sin(1-t)\varphi}{\sin\varphi} + q_2 \frac{\sin t\varphi}{\sin\varphi} \quad (2.11)$$

olarak bulunur, burada $t \in [0,1]$ ve φ , q_1 ve q_2 arasındaki açıdır ve

$$\varphi = \cos^{-1}(q_1 \cdot q_2) \quad (2.12)$$

olarak ifade edilir (Bkz. Şekil 2.1). Bu yüzden (2.11) denklemi, kürenin jeodeziklerine karşılık gelen büyük çember yaylarını verir (Hanson, 2006; Kim and Nam, 1995).



Şekil 2.1 Küresel lineer interpolasyon

2.2 Eğriler ve Yüzeyler Teorisi

Mobil vasıtaların mesela bir arabanın tavanı, gemi ve uçağın gövdesi gibi eğrilerle oluşturulan şekiller, uzayda eğrilerin belirtilen şekilde hareket ettirilmesiyle inşa edilir. Tasarımcı, ilk aşamada şekli, eğrinin denklemini bilmeden hayalini kullanarak tasarlar. Bilgisayar, tasarımcıya eğri şeklinin sentezlenmesinde yardımcı olabilir. Böylece hayal edilen şekil, eğrinin denklemi konusunda endişelenilmeden kopyalanabilir ve teknik açıdan, üretim açısından ya da diğer açılardan uygun olması için şekil iyileştirilebilir ya da değiştirilebilir. Birçok mühendislik uygulamasında kübik eğriler, diferansiyel özelliklerinin (teğet, normal, v.s.) kolay hesaplanması, eğri parçalarının birleşiminde ikinci mertebeye kadar sürekliliği sağladığından dolayı yaygın bir şekilde kullanılmaktadır.

Yüzeyler katı bir cismin sınırlarını tanımlar ve kendileri de eğrilerle sınırlanmıştır. Yüzey tasarımı, eğri tasarımının iki parametrelili boyuta genişletilmesidir. Yüzey modellemesinde kullanılan küçük mertebeden parametrik formdaki yüzey yamaları, sınırlarda eğrilik sürekliliğiyle birleşik yüzeyleri oluşturmak için kullanılır.

2.2.1 Eğriler Teorisi

Bu bölümde, teknolojik tasarımın temelini oluşturan eğrilerle ilgili temel bilgiler verilmektedir.

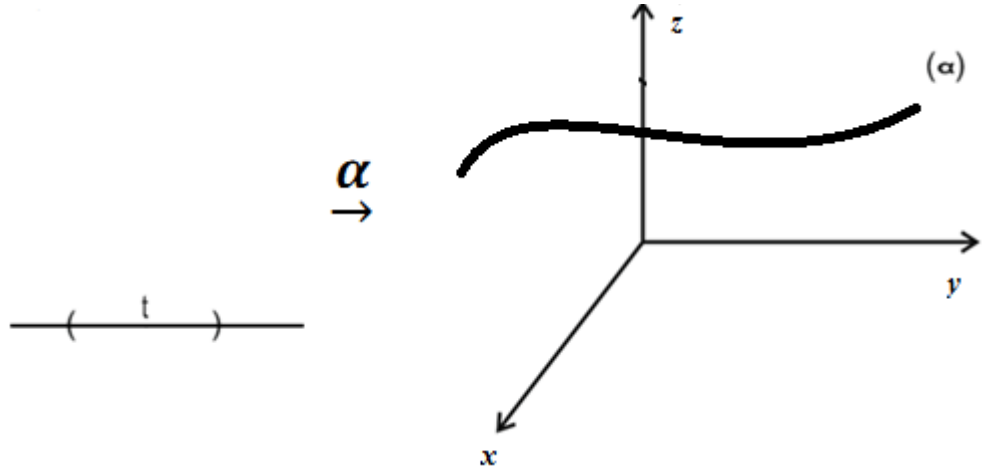
TANIM 2.2.1: $\mathbb{R}$ uzayının açık bir alt kümesi I olmak üzere, diferansiyellenebilir ve regüler bir

$$\begin{aligned}\alpha: I \subset \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\rightarrow \alpha(t)\end{aligned}$$

fonksiyonu $\mathbb{R}^3$ uzayında bir eğri belirtir. (α) eğrisinin parametrik gösterimi,

$$\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t)) = [\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t)]^T \quad (2.13)$$

şeklindedir (Bkz. Şekil 2.2). BDGT da eğrinin parametrik gösterimi, üzerinde yapılan hesaplamaların kolay olmasından dolayı daha yaygındır. (Mortenson, 1996).



Şekil 2.2 (α) eğrisi

Bir $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$ eğrisinin A ve B noktaları arasında kalan yay parçasının uzunluğu, $A \leq t \leq B$ olmak üzere

$$\begin{aligned}S &= \int_A^B \|\alpha'(t)\| dt = \int_A^B \sqrt{\alpha'(t) \cdot \alpha'(t)} dt \\ &= \int_A^B \sqrt{(\alpha'_1(t))^2 + (\alpha'_2(t))^2 + (\alpha'_3(t))^2} dt\end{aligned} \quad (2.14)$$

biçimindedir (Stoker, 1969).

TANIM 2.2.2: α eğrisinin birim teğet vektörü

$$\mathbf{T} = \frac{d\boldsymbol{\alpha}}{ds} = \boldsymbol{\alpha}'(s) \quad (2.15)$$

biçiminde ifade edilir ve $\mathbf{T}^2 = 1$ dir. $\boldsymbol{\alpha}'(s) \neq 0$ koşulunu sağlayan $\boldsymbol{\alpha}(s)$ eğrisi regüler eğri olarak adlandırılır, bu eğrinin asal normal birim vektörü

$$\mathbf{N} = \frac{\frac{d\mathbf{T}}{ds}}{\left\| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right\|} = \frac{\mathbf{T}'}{\|\mathbf{T}'\|} \quad (2.16)$$

biçiminde olup,

$$\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N} \quad (2.17)$$

birim vektörü de eğrinin binormal birim vektörü olarak isimlendirilir. Böylece $\boldsymbol{\alpha}$ eğrisinin $(\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B})$ Serret-Frenet çatısı elde edilir. $(\mathbf{T}, \mathbf{N})$, $(\mathbf{T}, \mathbf{B})$ ve $(\mathbf{N}, \mathbf{B})$ vektörlerinin belirttiği düzlemler sırayla eğrinin verilen noktasındaki oskülatör, rektifian ve normal düzlemleri belirtir.

TANIM 2.2.3: $\|\mathbf{T}'\|$ büyüklüğüne eğrinin eğriliği adı verilir ve κ ile gösterilir. $\frac{1}{\kappa}$ değeri de eğrinin verilen noktadaki eğrilik yarıçapını belirtir. Böylece (2.16) ve (2.17) denklemlerinden

$$\mathbf{T}' = \kappa \mathbf{N}, \quad \mathbf{N}' = -\kappa \mathbf{T} + \tau \mathbf{B}, \quad \mathbf{B}' = -\tau \mathbf{N} \quad (2.18)$$

elde edilir, burada τ , eğrinin aynı noktadaki burulması olarak adlandırılır ve

$$\tau = \|\mathbf{B}'\| \quad (2.19)$$

şeklinde ifade edilir.

TANIM 2.2.4: Serret-Frenet Türev Formülleri, (2.18) yerine

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}' \\ \mathbf{N}' \\ \mathbf{B}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

biçiminde de verilir (O'Neill, 1966).

Bir eğrinin herhangi bir noktasındaki eğriliği, eğrinin, bu noktadaki teğet vektöründen sapmasının ve burulması ise eğrinin oskulator düzlemden sapmasının ölçüsüdür (do Carmo, 1976).

TANIM 2.2.5: $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisinin birim küre üzerindeki teğetler göstergesinin yay elemanı ds_T ve binormaller göstergesinin yay elemanı ds_B olsun. Bu halde,

$$\frac{ds_T}{ds} = \|T'\| = \kappa \quad \text{ve} \quad \frac{ds_B}{ds} = \|B'\| = \tau$$

yazılabilir. Buradan, $ds = \frac{ds_T}{\kappa}$ ve $ds = \frac{ds_B}{\tau}$ olur. Son iki eşitlikten,

$$\frac{ds_T}{\kappa} = \frac{ds_B}{\tau} \quad \text{ve} \quad \frac{ds_T}{ds_B} = \frac{\kappa}{\tau} \quad (2.21)$$

elde edilir (Kreyszig, 1991).

2.2.2 Bezier Eğrileri

Bezier eğrileri 1970 yılında, Fransız bir mühendis olan Pierre Bézier tarafından, Renault arabaların tasarımında kullanılmak üzere geliştirilmiştir. Bezier eğrileri, sahip olduğu özelliklerden dolayı, fontların üretimi, modelleme çalışmaları ve daha birçok alan için büyük öneme sahiptir. Ayrıca, Bezier eğrilerinin programlanması da oldukça kolay olduğundan bilgisayar grafiklerinde de yaygın bir şekilde kullanılmaktadır. Bu bölümde, Bezier eğrileri ile ilgili gerekli temel bilgiler verilmektedir.

TANIM 2.2.6: Bir n dereceli Bernstein polinomu

$$B_{i,n}(t) = \frac{n!}{i!(n-i)!} t^i (1-t)^{n-i}$$

denklemini ile verilir (Piegl and Tiller, 1996).

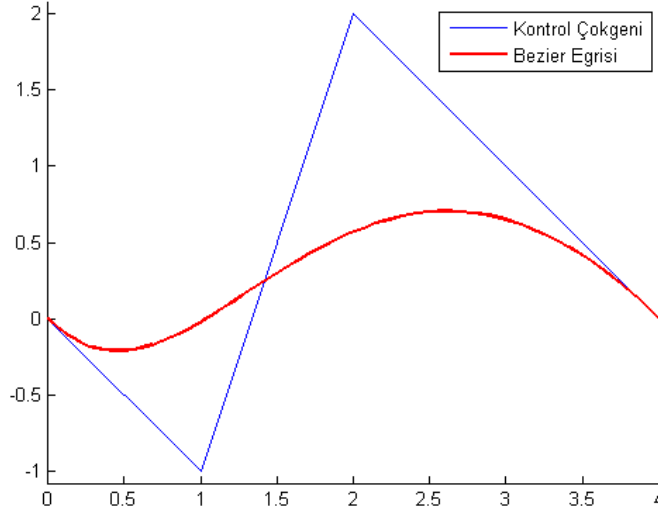
TANIM 2.2.7: Bir n dereceli Bezier Eğrisi

$$\alpha(t) = \sum_{i=0}^n P_i B_{i,n}(t) \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (2.22)$$

ya da matris formunda

$$\alpha(t) = [t][U]_{Bezier}[\mathbf{P}_i]$$

olarak ifade edilir. Burada $[U]_{Bezier}$ katsayılar matrisi, $[\mathbf{P}_i]$ ise kontrol noktalarıdır (Faux and Pratt, 1979).



Şekil 2.3 Bezier eğrisi ve kontrol çokgeni

Kontrol noktaları, eğrinin şeklini belirlemek için kullanılır ve bu noktaların sayısı polinomun mertebesi kadardır (Bkz. Şekil 2.3). Eğrinin uç noktaları ilk ve son kontrol noktalarıdır, yani

$$\mathbf{P}_0 = \alpha(0) \text{ ve } \mathbf{P}_n = \alpha(1)$$

olarak ifade edilir.. Diğer taraftan, Bezier eğrileri dönüşüm işlemlerinin uygulanması durumunda invaryant kalırlar.

TANIM 2.2.8: Bir n dereceli Bezier eğrisi için $k = n + 1$ ifadesi mertebe olarak adlandırılır ve mertebe, eğrinin sürekliliğini belirler.

$$\text{maksimum süreklilik} = k - 2$$

dir. Ayrıca mertebe, eğri için gerekli kontrol noktalarının minimum sayısını ifade eder.

TANIM 2.2.9: Bir Bezier eğrisinin türevi

$$\alpha'(t) = n \sum_{i=0}^{n-1} (\mathbf{P}_{i+1} - \mathbf{P}_i) B_{i,n-1}(t) \quad (0 \leq t \leq 1) \quad (2.23)$$

biçiminde elde edilir (Rogers, 2001).

2.2.3 B-Spline Eğrileri

B-spline eğrileri ile ilgili ilk uygulamalar Gordon ve Riesenfeld (1974) tarafından yapılmıştır. B-spline eğrileri, kontrol noktaları ile ifade edilir ve bu noktalardan geçmemesine rağmen elde edilen eğrilerin şekli, bu noktaların konumlarına göre biçim almaktadır. Bir mıknatıs gibi davranan kontrol noktalarının oluşturduğu çokgene kontrol çokgeni denilmektedir.

B-spline eğrilerinin, genel olarak Bezier eğrilerinin geliştirilmiş hali olduğunu söyleyebiliriz. Ancak bu eğriler genelde Bezier eğrisi gibi tek parça değildir. Eğer B-spline eğrisi tek bir parçadan oluşursa o zaman bu eğri aynı zamanda Bezier eğrisi olmaktadır. Bu bölümde, B-spline eğrileriyle ilgili gerekli ön bilgiler verilmektedir.

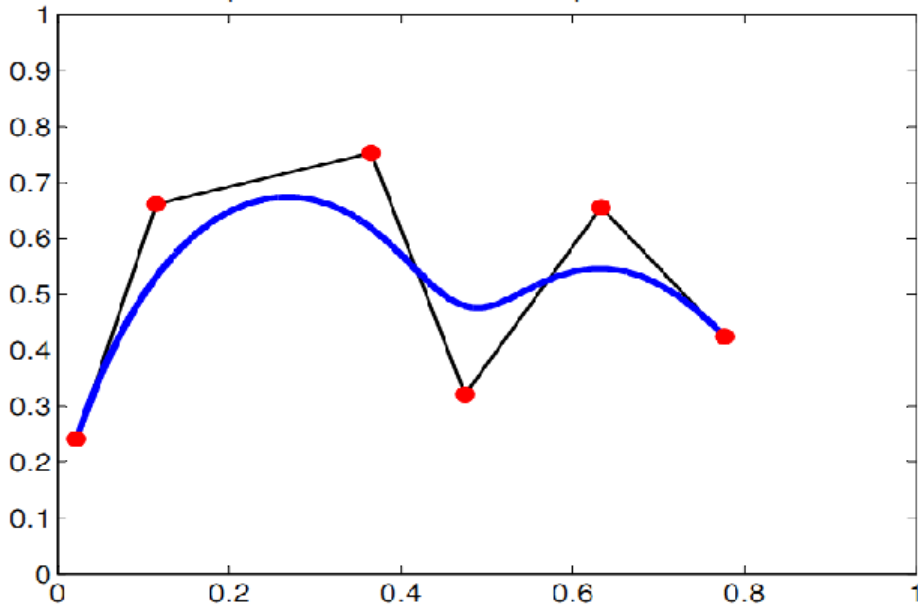
TANIM 2.2.10: k dereceli bir B-spline eğrisi,

$$\alpha(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{P}_i N_{i,k}(t) \quad a \leq t \leq b \quad (2.24)$$

$$T = \{a, a, \dots, a, t_{p+1}, t_{p+2}, \dots, t_{m-p-1}, b, b, \dots, b\} = \{t_0, t_1, \dots, t_m\}$$

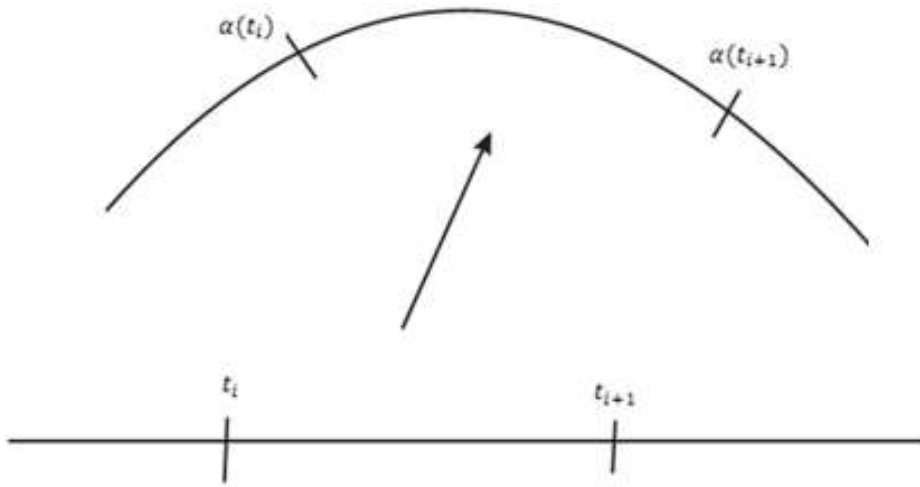
biçiminde tanımlanır (Bkz. Şekil 2.4). Bu denklemde $\mathbf{P}_i$ katsayıları kontrol noktaları olarak adlandırılır ve sayısı $n + 1$ dir (Mortenson, 1996).

Düğüm vektörleri, B-spline eğrisini oluşturan Bezier eğrilerinin parametre aralıklarını belirtmek için kullanılır (Bkz. Şekil 2.5). Eğer düğüm vektörü, her i için $t_{i+1} - t_i = \text{sabit}$ ise eşit aralıklı (uniform) ve $t_{i+1} - t_i \neq \text{sabit}$ ise non-uniform olarak ifade edilir. (2.24) denkleminde verilen T düğüm vektörü non-uniformdur ve düğüm noktalarının sayısı ise $k + 1$ tanedir.



Şekil 2.4 B-spline eğrisi ve kontrol çokgeni

Derece, kontrol ve düğüm noktalarının sayısı arasında $m = n + k + 1$ ilişkisi vardır.



Şekil 2.5 B-spline eğrisi ve düğüm vektörü

Eğer $n = k$ ve $T = \{0, \dots, 0, 1, \dots, 1\}$ ise $\alpha(t)$ eğrisi bir Bezier eğrisidir.

B-spline eğrisinin matris gösterimi;

$$\alpha(t) = [t][U]_{B-spline}[P_i]$$

şeklindedir. Burada $[U]_{B-spline}$ ve $[P_i]$ sırayla $\alpha(t)$ eğrisinin katsayılar matrisi ve kontrol noktalarıdır. B-spline eğrileri dönüşüm işlemleri uygulandığında invaryant kalır.

2.2.4 Yüzeyler Teorisi

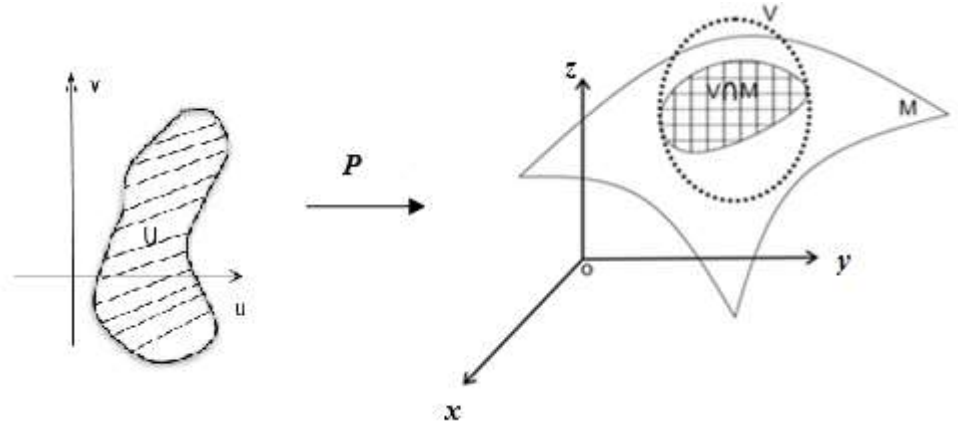
Cisimlerin dış kısmı birer yüzey oluşturur ve yüzeyleri birer eğri ailesi olarak ifade edebiliriz. Nesnelerin modellenmesi sürecinde yüzeylerin tasarımı büyük önem taşımaktadır. Bu bölümde, teknolojik tasarımda yaygın bir şekilde kullanılan yüzeylerle ilgili temel bilgiler verilmektedir.

TANIM 2.2.11: $M, \mathbb{R}^3$ uzayının bir alt kümesi olmak üzere, her $Q \in M$ noktasının $\mathbb{R}^3$ üzerinde bir V komşuluğu için $\mathbb{R}^2$ uzayının bir U açık kümesinden $V \cap M$ ye tanımlanan bir

$$P : U \subset \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\text{diffeomorfizim}} V \cap M \subset \mathbb{R}^3$$

$$(u, v) \longrightarrow P(u, v) = Q$$

dönüşümü varsa M kümesi $\mathbb{R}^3$ uzayında bir yüzey belirtir (Bkz. Şekil 2.6). Burada (P, U) ikilisi M yüzeyinin bir parametrizasyonu veya yerel koordinat sistemi, $(V \cap M, P^{-1})$ ikilisi de Q noktasının koordinat komşuluğu veya harita olarak isimlendirilir (do Carmo, 1976).



Şekil 2.6 Yüzey

Bir yüzeyin parametrik gösterimi,

$$P(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

şeklindedir. $\mathbf{P}$ fonksiyonunun Q noktasındaki türev dönüşümü olan $\mathbf{P}_*(Q)$ dönüşümü lineer bir dönüşüm olup

$$\mathbf{P}_* \left(\frac{\partial}{\partial u} \right) = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial}{\partial u} = \mathbf{P}_u$$

$$\mathbf{P}_* \left(\frac{\partial}{\partial v} \right) = \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial}{\partial v} = \mathbf{P}_v$$

biçimindedir. Bu dönüşümde

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial u}(Q), \frac{\partial}{\partial v}(Q) \right\} \text{ ve } \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{P}(Q), \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{P}(Q), \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{P}(Q) \right\}$$

tabanlarına göre karşılık gelen Jakobiyen matris

$$J(\mathbf{P})(Q) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix}$$

olarak ifade edilmektedir. Burada her $Q \in U$ için $J(\mathbf{P})$ matrisinin rankı 2 yani

$$\mathbf{P}_u \times \mathbf{P}_v \neq 0 \quad (2.25)$$

ise M yüzeyi regülerdir. Eğer yüzey üzerindeki bir nokta için $\mathbf{P}_u \times \mathbf{P}_v = 0$ ise bu nokta singüler bir noktadır yani bu noktada yüzeyin normal vektörü tanımsızdır.

TANIM 2.2.12: $u = u(t)$ ve $v = v(t)$ olmak üzere $\mathbf{P} = \mathbf{P}(u, v)$ yüzeyi üzerindeki bir $\mathbf{P}(u(t), v(t)) = \boldsymbol{\alpha}(t)$ eğrisinin teğet doğrultusu

$$\mathbf{T} = \frac{d\boldsymbol{\alpha}}{dt} = \mathbf{P}_u \frac{du}{dt} + \mathbf{P}_v \frac{dv}{dt} \quad (2.26)$$

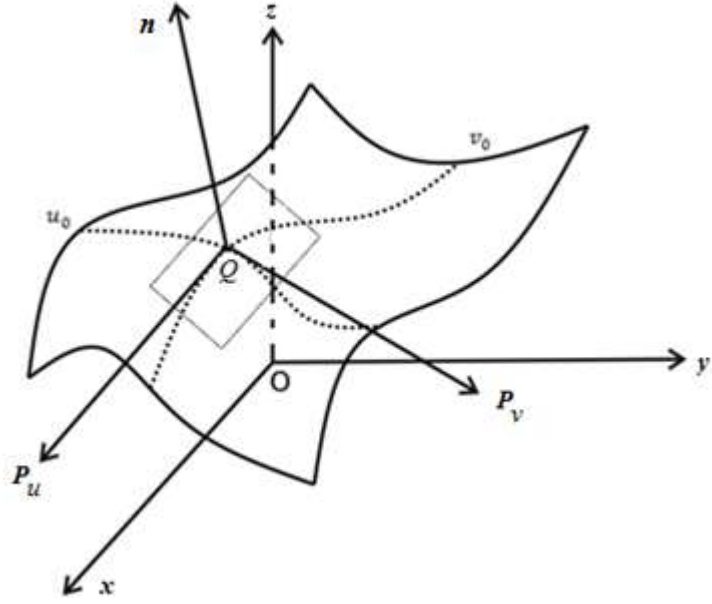
şeklinde ifade edilebilir.

TANIM 2.2.13: Yüzey üzerindeki bir noktada $\mathbf{P}_u$ ve $\mathbf{P}_v$ vektörlerinin oluşturduğu düzlem yüzeyin bu noktasındaki teğet düzlemi olarak ifade edilir.

TANIM 2.2.14: Yüzey üzerindeki bir noktada bulunan teğet düzleme dik olan vektör yüzeyin o noktasındaki normal vektörü belirtir ve yüzeyin $\mathbf{n}$ birim normal vektörü

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{P}_u \times \mathbf{P}_v}{\|\mathbf{P}_u \times \mathbf{P}_v\|} \quad (2.27)$$

olarak ifade edilir (Bkz. Şekil 2.7).



Şekil 2.7 Bir yüzeyin teğet düzlemi ve normal vektörü

TANIM 2.2.15: Q noktasındaki $\mathbf{P}_u$ ve $\mathbf{P}_v$ kısmi türevleri ile (2.27) denklemiyle verilen $\mathbf{n}$ birim normal vektörü Q noktasında yerel bir koordinat sistemi oluşturur.

TANIM 2.2.16: Yüzey üzerindeki bir eğrinin herhangi iki noktası arasındaki yay uzunluğu

$$ds = \sqrt{d\mathbf{P} \cdot d\mathbf{P}} = \sqrt{dx \cdot dx + dy \cdot dy + dz \cdot dz} \quad (2.28)$$

ile bulunur. (2.26) denkleminde

$$d\mathbf{P} = \mathbf{P}_u du + \mathbf{P}_v dv$$

yazılabilir. Buradan

$$ds^2 = d\mathbf{P} \cdot d\mathbf{P} = \mathbf{P}_u^2 du^2 + 2\mathbf{P}_u \mathbf{P}_v dudv + \mathbf{P}_v^2 dv^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

ifadesi yüzeyin birinci temel formudur ve

$$[I] = ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \quad (2.29)$$

ile gösterilir, burada $E = \mathbf{P}_u^2$, $F = \mathbf{P}_u \cdot \mathbf{P}_v$, $G = \mathbf{P}_v^2$ olup bunlar noktaya ait büyüklüklerdir. Lagrange özdeşliği kullanılarak

$$\|\mathbf{P}_u \times \mathbf{P}_v\|^2 = EG - F^2$$

elde edilir ve regüler yüzeyler için $\mathbf{P}_u \times \mathbf{P}_v \neq 0$ olduğundan, $EG - F^2$ her zaman pozitifdir (Lipschultz, 1969).

TANIM 2.2.17: $\sigma: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ifadesi $\mathbf{P}$ yüzeyi üzerinde bir yüzey yaması olsun. σ nın görüntüsü $u = sbt.$ ve $v = sbt.$ ile elde edilen parametre eğriler ailesiyle çevrili olur. $R \subseteq U$ bölgesine karşılık gelen bir $\sigma: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ yüzey yamasının $\sigma(R)$ parçasının $\mathcal{A}_\sigma(R)$ alanı

$$\mathcal{A}_\sigma(R) = \int_R \sqrt{EG - F^2} dudv \quad (2.30)$$

biçiminde ifade edilir (Pressley, 2010).

TANIM 2.2.18: $\alpha(t)$, $\mathbf{P}$ yüzeyi üzerinde bir eğri olsun. Bu eğrinin $\kappa = \frac{1}{\rho}$ eğriliği (2.18) bağıntısı ile ifade edilir. Bu ifade, yüzeyin terimleri cinsinden

$$\mathbf{T}' = \mathbf{P}'' = \mathbf{P}_{uu}u'^2 + 2\mathbf{P}_{uv}u'v' + \mathbf{P}_{vv}v'^2 + \mathbf{P}_u u'' + \mathbf{P}_v v'' \quad (2.31)$$

olarak ifade edilir, burada $u' = \frac{du}{ds}$ ve $v' = \frac{dv}{ds}$ dir. Q noktasındaki yüzey normali $\mathbf{n}$ ile eğrinin aynı noktadaki asal normali $\mathbf{N}$ arasındaki açı ϕ ise

$$\mathbf{T}' \cdot \mathbf{n} = \kappa \mathbf{N} \cdot \mathbf{n} = \kappa \cos \phi \quad (2.32)$$

dır. (2.31) ve (2.32) bağıntılarından

$$\kappa \cos \phi = \mathbf{P}_{uu}u'^2 + 2\mathbf{P}_{uv}u'v' + \mathbf{P}_{vv}v'^2 \quad (2.33)$$

elde edilir. Böylece (2.33) denklemi kısaltmalarla

$$\kappa \cos \phi ds^2 = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2 \quad (2.34)$$

biçiminde yazılabilir ve bu bağıntı yüzeyin ikinci temel formu olarak ifade edilir, burada

$$\begin{aligned} L &= L(u, v) = -\mathbf{P}_u \mathbf{n}_u = \mathbf{n} \mathbf{P}_{uu} \\ M &= M(u, v) = -\frac{1}{2}(\mathbf{P}_u \mathbf{n}_v + \mathbf{P}_v \mathbf{n}_u) = \mathbf{n} \mathbf{P}_{uv} \\ N &= N(u, v) = -\mathbf{P}_v \mathbf{n}_v = \mathbf{n} \mathbf{P}_{vv} \end{aligned}$$

ifadeleri noktaya ait büyüklüklerdir.

E^3 de $\alpha(s)$, bir $\mathbf{P}$ regüler bir yüzeyi üzerinde $\|\alpha'(s)\| = 1$ koşulunu sağlayan birim hızlı bir eğri olsun. Ayrıca, $\alpha(s)$ bir uzay eğrisi olduğundan Serret-Frenet çatısına sahiptir. Diğer taraftan, $\alpha(s)$ eğrisi $\mathbf{P}$ yüzeyi üzerinde bulunduğundan eğrinin $\{\mathbf{T}, \mathbf{g}, \mathbf{n}\}$ Darboux çatısı da vardır. $\mathbf{T}$, $\alpha(s)$ eğrisinin birim teğet vektörü, $\mathbf{n}$, $\mathbf{P}$ yüzeyinin birim normal vektörü ve $\mathbf{g}$ ise $\mathbf{g} = \mathbf{n} \times \mathbf{T}$ ile verilen birim jeodezik normal vektördür. Darboux çatısının türev formülleri

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}' \\ \mathbf{g}' \\ \mathbf{n}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_g & \kappa_n \\ -\kappa_g & 0 & \tau_g \\ \kappa_n & -\tau_g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{g} \\ \mathbf{n} \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

ile verilir, burada κ_g , κ_n ve τ_g değerleri sırayla $\alpha(s)$ eğrisinin jeodezik eğriliği, normal eğriliği ve jeodezik burulmasıdır. Bu eğrinin Darboux vektörü ve birim Darboux vektörü ise sırayla

$$\mathbf{d} = \tau_g \mathbf{T} + \kappa_n \mathbf{g} + \kappa_g \mathbf{n} \quad \text{ve} \quad \mathbf{c} = \frac{\mathbf{d}}{\|\mathbf{d}\|} \quad (2.36)$$

biçimindedir.

i) $\alpha(s)$ eğrisi jeodezik eğridir $\Leftrightarrow \kappa_g = 0$.

ii) $\alpha(s)$ eğrisi asimtotik eğridir $\Leftrightarrow \kappa_n = 0$.

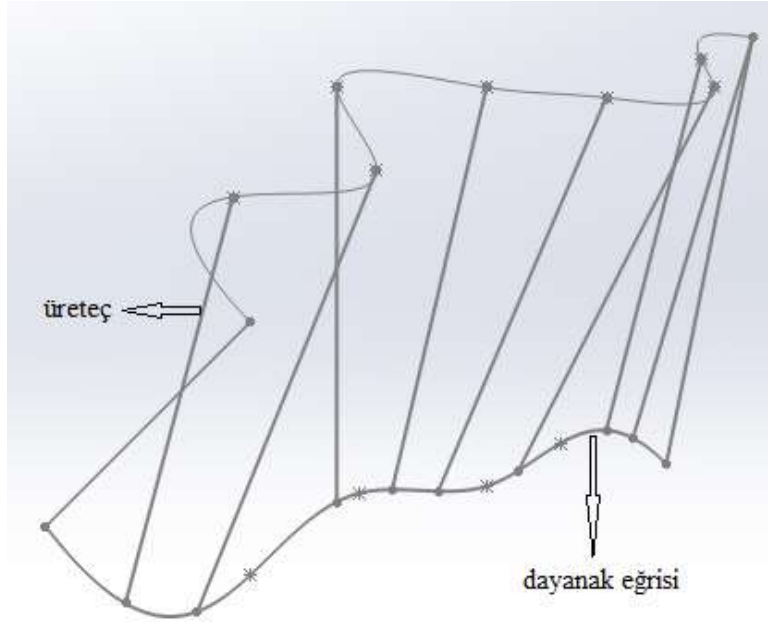
iii) $\alpha(s)$ eğrisi asal eğridir $\Leftrightarrow \tau_g = 0$ (O'Neill, 1966).

2.2.5 Regle Yüzey

Bir parametrelili doğru ailesini içeren bir yüzey regle yüzey olarak isimlendirilir. Bir regle yüzey, $\alpha(s)$ dayanak eğrisi ve s sabiti için, $l_s(t) = \alpha(s_0) + t\mathbf{d}(s_0)$ doğrusu üreteç veya regle yüzeyin doğurunu olmak üzere

$$\mathbf{P}(s, t) = \alpha(s) + t\mathbf{d}(s) \quad (2.37)$$

biçiminde yazılabilir (Bkz. Şekil 2.8).

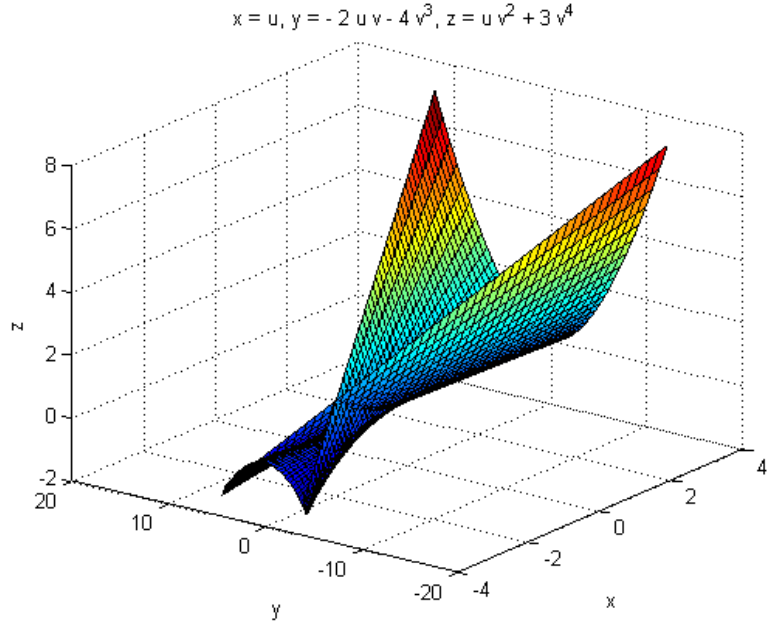


Şekil 2.8 Bir regle yüzeyin dayanak eğrisi ve üreteci

Regle yüzey, doğrunun uzayda hareket ettirilmesiyle oluşan bir yüzeydir. Denklem (2.37) den $\mathbf{P}(s, t)$ yüzeyinin sırayla s ve t e göre türevleri alındığında, yüzeyin parametre eğrilerinin teğet vektörleri olarak

$$\mathbf{P}_s = \alpha(s), \quad \mathbf{P}_t = \frac{d\alpha}{ds} + t \frac{d\mathbf{d}}{ds} \quad (2.38)$$

elde edilir. Regle yüzeylere örnek olarak Swallow-tail cebirsel yüzeyini verebiliriz (Bkz. Şekil 2.9) (Şekil 2.9 daki yüzeyin kodları (Rovenski, 2010) den alınmış ve Matlab kullanılarak çizilmiştir).



Şekil 2.9 Swallow-tail regle yüzeyi

2.2.6 Açılabilir Regle Yüzey

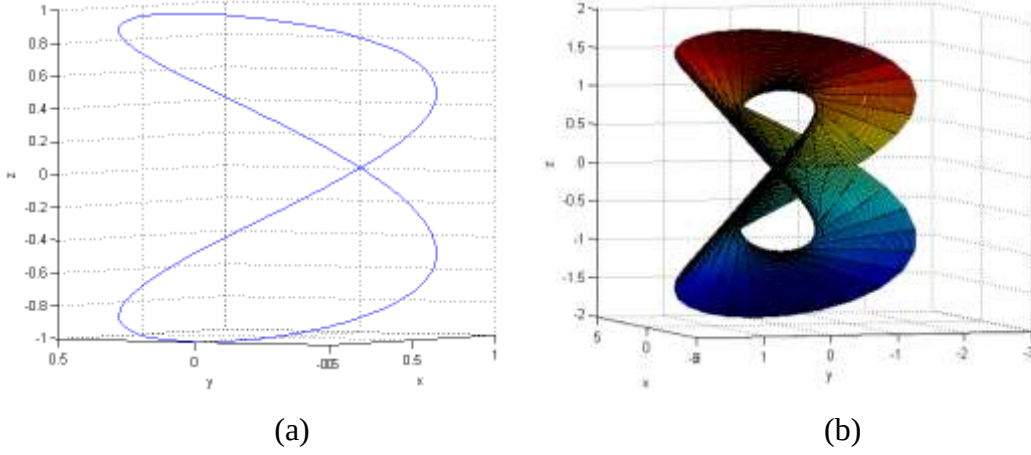
Açılabilir regle yüzeyler bilgisayar destekli geometrik tasarımda (BDGT) yaygın bir şekilde kullanılmaktadır. Açılabilir regle yüzeyler, düzleme yırtılmadan ve bükülmeden serilebildiğinden sac ve plaka-metal temelli endüstrilerde (Boersma and Molenaar, 1995; Frey and Mancewicz, 1992), deniz araçları ile uçak kaplamalarında (Pegna and Wolter, 1992) ve mimari yapılarda yaygın bir şekilde kullanılmaktadır.

Verilen bir üreteç boyunca tüm noktalarda teğet düzlemin sabit olduğu yüzeyler açılabilir regle yüzeylerdir, yani açılabilir regle yüzeyler, verilen bir üreteç boyunca tüm noktalarda yüzey normalinin sabit olduğu yüzeylerdir.

Bir regle yüzeyin açılabilir bir regle yüzey olabilmesi için gerek ve yeter şart

$$\left(\mathbf{d}(s), \frac{d\alpha}{ds}, \frac{d\mathbf{d}}{ds} \right) = 0 \quad (2.39)$$

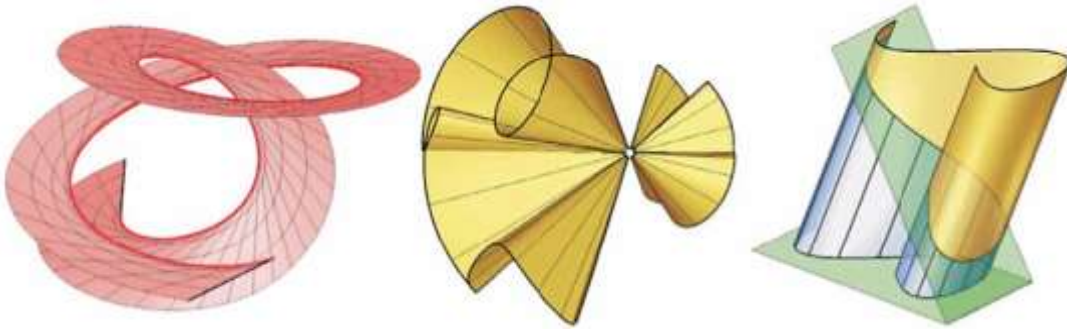
dir (Kreyszig, 1991; Pottmann and Wallner, 2001). Açılabilir regle yüzeylere örnek olarak Viviani eğrisi ve teğetlerinden oluşmuş açılabilir regle yüzeyi verebiliriz (Bkz. Şekil 2.10) (Şekil 2.10 daki eğri ve yüzeyin kodları (Rovenski, 2010) den alınmış ve Matlab kullanılarak çizilmiştir).



Şekil 2.10 (a) Viviani eğrisi ve (b) teğetlerinden oluşmuş açılabilir regle yüzey

Açılabilir regle yüzeylerde, yüzeyin her noktasında Gauss eğriliği $K = 0$ dır (Kreyszig, 1991). Şekil 2.11 de görüldüğü gibi üç tip açılabilir regle yüzey vardır:

- 1) Doğuranları bir uzay eğrisine teğet olan yüzeyler.
- 2) Tüm doğuranları sbt. bir noktadan geçen ve genelleştirilmiş koni şeklinde ifade edilen yüzeyler.
- 3) Tüm doğuranları birbirine paralel olan ve genelleştirilmiş silindir olarak isimlendirilen yüzeyler.



Şekil 2.11 Üç farklı tipte açılabilir regle yüzey. Soldan sağa teğetlerin oluşturduğu, konik ve silindirik şeklindeki açılabilir yüzeylerdir (Lawrence, 2011).

Gauss dönüşümü, R^3 de verilen bir yüzeyin her noktasını birim küre üzerindeki noktalara dönüştürür. Bir yüzeyin Gauss dönüşümü yine bir yüzeydir. Açılabilir regle yüzeyler, Gauss dönüşümü ile bir eğri ya da eğri ağına dönüşür. Çünkü, açılabilir regle yüzeylerde üreteç boyunca normaller eğrinin binormalleri olup paralel kalırlar. Bu yüzeylerin Gauss dönüşümü tek bir eğri olduğunda yüzeyin doğrultmanı da tek bir sürekli eğri olur. Bu yüzeyler açılabilir regle

yüzeyler ya da torsal regle açılabilir yüzeyler olarak isimlendirilir (Pottmann and Wallner, 2001).

2.2.7 Bezier Yüzeyleri

Üç boyutlu Bezier yüzeyleri (diğer adıyla Bezier yamaları), Bezier eğrilerinin gösteriminin genelleştirilmesi şeklinde tanımlanabilir. Matematiksel olarak, üç boyutlu yüzeyler, iki eğrinin kartezyen çarpımı ile elde edilebilir.

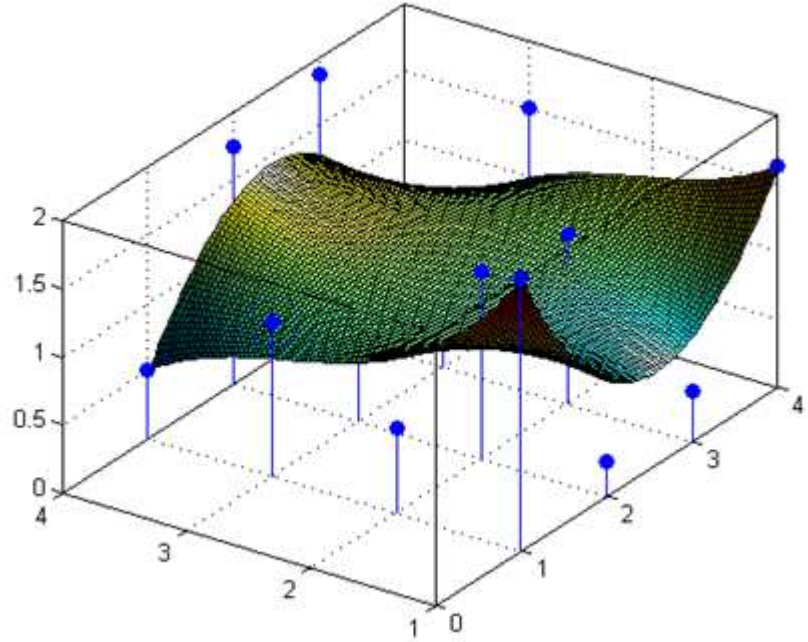
TANIM 2.2.19: Bezier yüzeyleri parametrik ve matris biçiminde sırayla

$$P(t, s) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m Q_{i,j} B_{i,n}(t) B_{j,m}(s) \quad 0 \leq t, s \leq 1 \quad (2.40)$$

ve

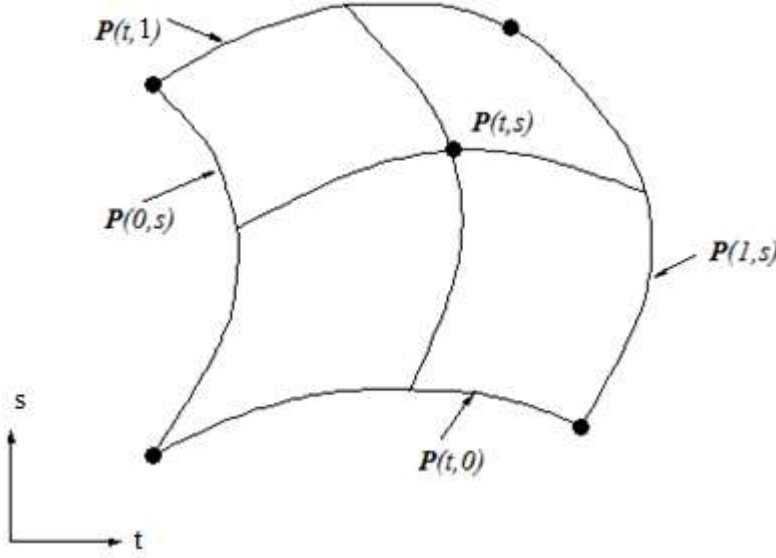
$$P(t, s) = [t][U]_{Bezier} [Q_{ij}] [U]_{Bezier}^T [s]$$

biçiminde ifade edilir. Bezier yüzeyi ve kontrol noktaları ile ilgili bir örnek Şekil 2.12 de görülebilir.



Şekil 2.12 Bezier yüzeyi ve kontrol noktaları

TANIM 2.2.20: $P(t, s)$ şeklindeki bir Bezier yüzeyinde $t = 0$, $t = 1$, $s = 0$ ve $s = 1$ parametrelerine karşılık gelen eğriler sınır eğrileri olarak adlandırılır (Piegl and Tiller, 1996), (Bkz. Şekil 2.13).



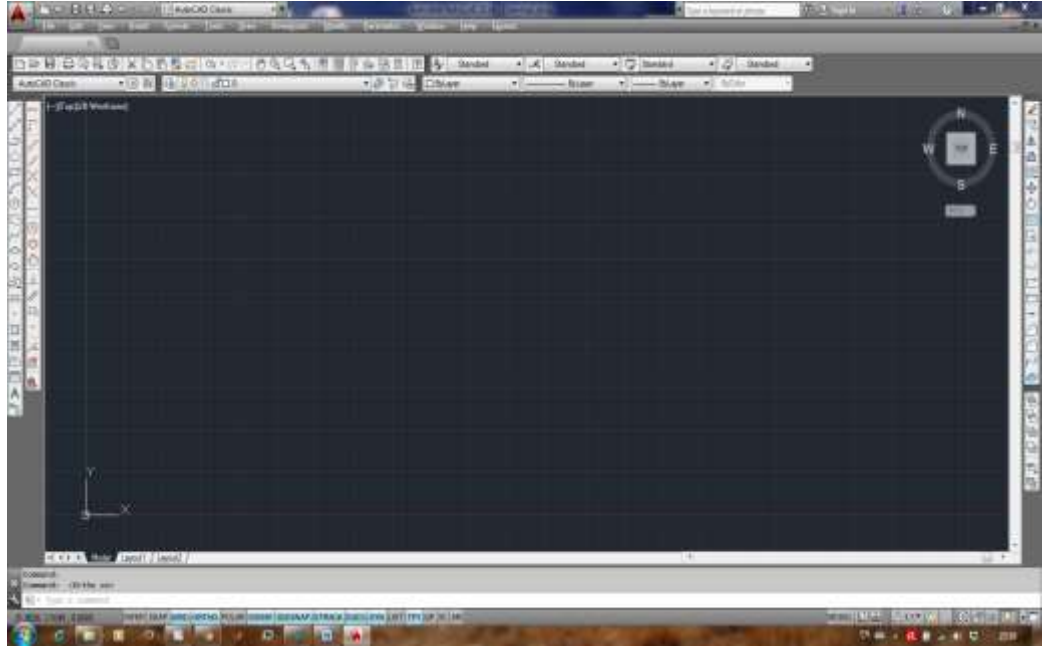
Şekil 2.13 Bezier yüzeyinin parametre eğrileri

2.2.8 Geometri ve Tasarım

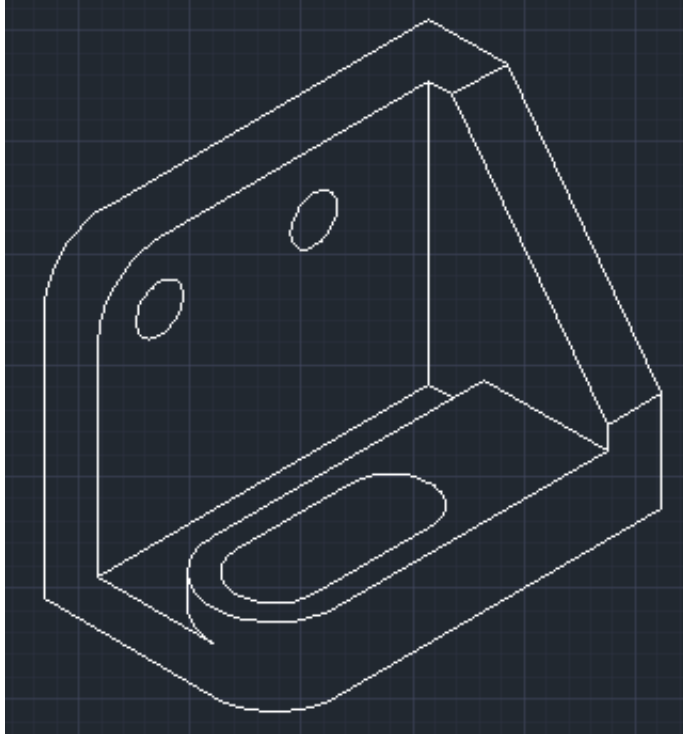
Dünya, insanoğlunun analiz etmeye, tanımlamaya ve anlamaya çalıştığı cisimlerin harika birleşimidir ve bu cisimlerin çoğu temel geometrik cisimlerin birleşimiyle oluşmuştur (Oldknow, 2001). Zamanla, daha karmaşık şekillerle karşılaşılmasından dolayı katı modelleme geometrisi ve bunların özellikleri incelenmeye başlamıştır. Dahası, bilgisayarların gelişmesiyle BDGT sistemleri ve bilgisayar grafikleri kullanılarak serbest-formdaki şekiller daha rahat bir şekilde modellenebilmiştir (Velichová, 2002). Geometri, uzaysal düşünme yeteneğini geliştirmeye, beynin iki lobunu da kullanmaya ve yaratıcılığı geliştirmeye olanak sağladığından mühendislik projelerinde önemli rol oynar. Örneğin çevre uzunluğu kavramı kullanılarak projede kullanılacak malzemelerin miktarı hesaplanabilir. Ayrıca, profesyonel tasarım yapan iç tasarım ve mimarlık gibi dallar üç boyutlu figürler kullanırlar. Geometrinin kapsamlı içeriği, evlerin, binaların ve araçların uygun tarzlarını belirlemeye yardımcı olur. Animasyonların oluşturulması, video oyunları ve tasarım için kullanılan programlar geometrik içeriklidir. Geometrinin, yer bulma, araştırma ve astronomide ana unsur olan haritacılıkta da önemli bir yeri vardır. Bunlara ek olarak, tıp da geometrik görüntülemeyi kullanmaktadır. Görüldüğü gibi geometri hayatımızdaki en basit alanlarda bile bizi etkilemektedir.

Hangi şekilde olursa olsun algıladığımız şeyleri anlamamıza ve yaşam kalitemizi arttırmamıza yardımcı olmaktadır (TeAchnology, 2016).

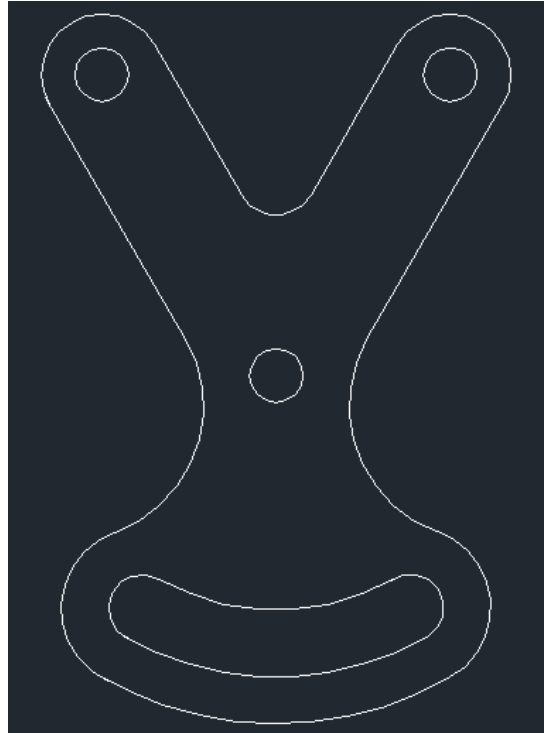
AutoCAD, Amerika Birleşik Devletleri merkezli Autodesk şirketinin 1980'lerin başından itibaren geliştirdiği bir bilgisayar destekli tasarım (BDT) programıdır. Teknik resim çizmek için kullanılan bir programdır ve vektör tabanlıdır. Bu alandaki ilk vektörel çizim programlarından biridir (Wikipedia, 2016). AutoCAD programı, 2D ve 3D geometrik nesnelerin bilgisayar yardımıyla taslaklarının oluşturulduğu ticari bir uygulamadır (Bkz. Şekil 2.14). İnşaat, makina ve elektrik mühendisliği alanlarında çok büyük bir öneme sahip olan mühendislik parçaları, altyapı tasarımları ve havalandırma sistemlerinin analizlerinin çiziminde, mimari planlamada, grafik dizaynında, 3D yazıcılarda nesne oluşturmada, moda endüstrisinde ve endüstriyel tasarımda yaygın bir şekilde kullanılmaktadır (Tutorial45, 2016). AutoCAD ile ilgili bazı çizim örnekleri Şekil 2.15 ve Şekil 2.16 da verilmiştir.



Şekil 2.14 AutoCAD in ekran görüntüsü ve geometri ile ilişkisi



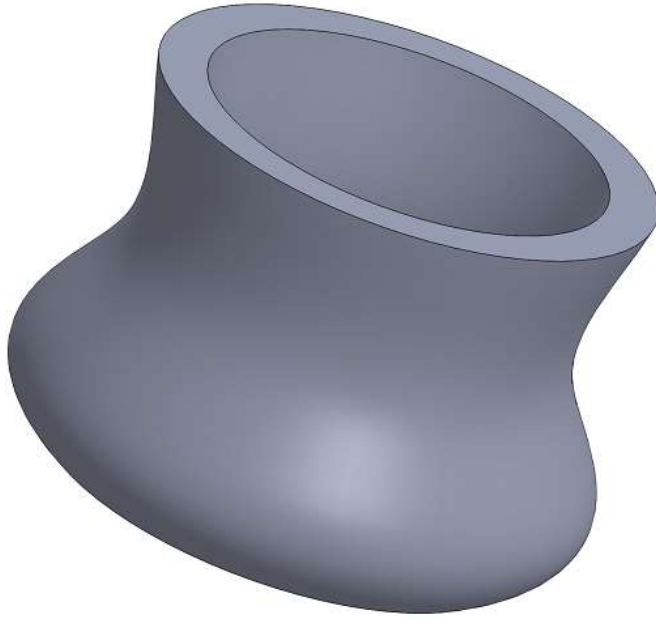
Şekil 2.15 Bir parçanın perspektif kullanılarak AutoCAD de yapılmış çizimi



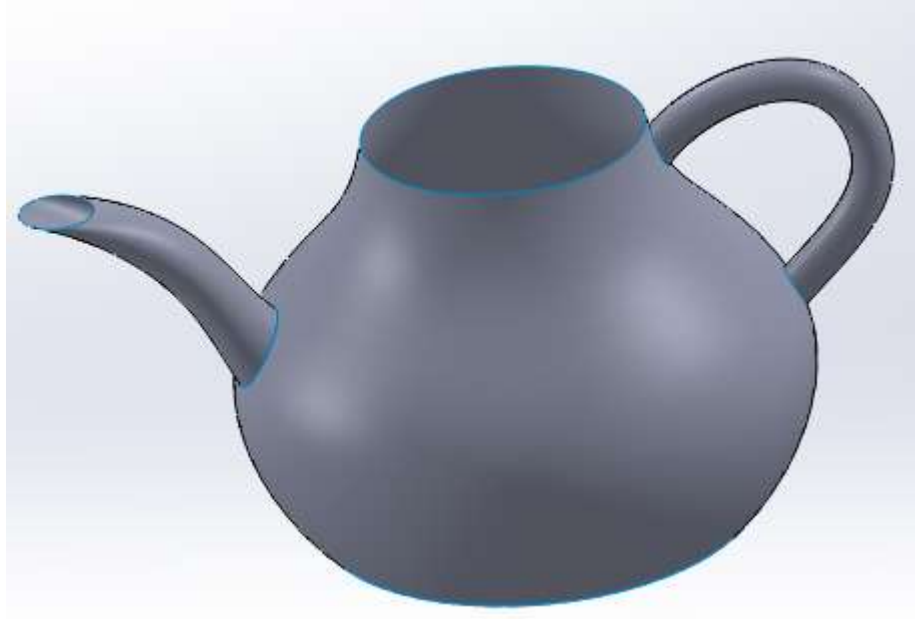
Şekil 2.16 Makina endüstrisinde kullanılan bir parçanın AutoCAD de yapılmış çizimi



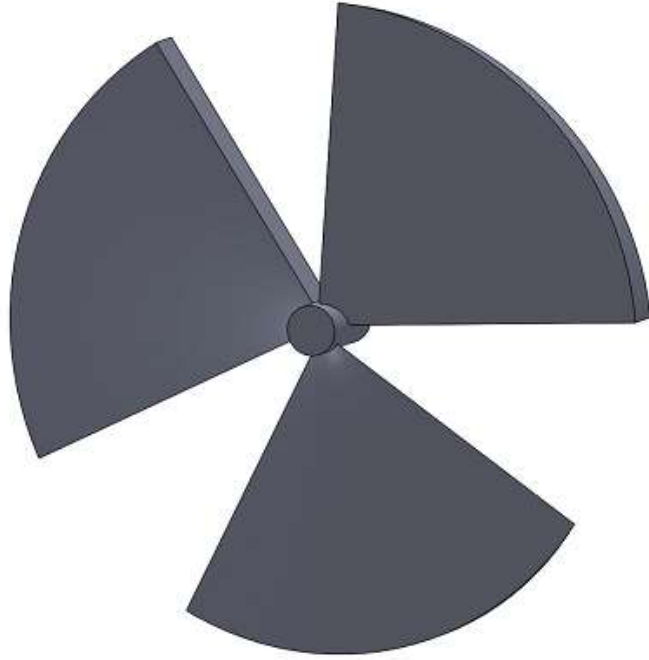
Şekil 2.18 Şekil 2.16 daki şeklin Solidworks de yapılmış katı modellemesi



Şekil 2.19 Solidworks de katı modellemesi yapılmış bir dönel yüzey



Şekil 2.20 Günlük hayatımızda kullanılan çaydanlığın Solidworks de yapılmış katı bir modellemesi



Şekil 2.21 Uçak endüstrisinde kullanılan uçak pervanesinin Solidworks de yapılmış katı modellemesi

3 E^3 DE ÖZEL SMARANDACHE EĞRİLERİNİN KÜRESEL GÖRÜNTÜLERİ

Eğriler, özellikle regüler eğriler BDGT, mekanik, kinematik ve diferansiyel geometri gibi birçok alanda kullanılır. Araştırmacılar bu alanlarda çeşitli eğriler kullanmışlardır. Özel Smarandache eğrileri bunlardan birisidir. Minkowski spacetime'da konum vektörü diğer bir regüler eğri üzerinde bulunan ve bu eğrinin Serret-Frenet çatısının vektörleri tarafından oluşturulan regüler eğri Smarandache eğrisi olarak ifade edilir (Turgut and Yılmaz, 2008) Bu alanda, özel Smarandache eğrileri üzerinde de çalışılmıştır (Ali, 2010), (Bektaş and Yüce, 2013; Turgut and Yılmaz, 2008).

Bu çalışmada, E^3 deki Serret-Frenet ve Darboux çatılarına göre bazı özel Smarandache eğrilerinin küresel görüntüleri ve ayrıca, Smarandache eğrilerin ve küresel görüntülerinin diferansiyel geometrik özellikleri verilmiştir.

E^3 de $r > 0$ yarıçaplı ve merkezi orjinde olan bir küre

$$S^2 = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in E^3 : \langle x, x \rangle = r^2\}$$

ile tanımlanır (Do Carmo, 1976).

Birim hızlı $\alpha(s)$ eğrisinin hareketli çatısının birim vektörleri verilsin ve uzaydaki kartezyen koordinat sisteminin O orjinine bağlı bulunduğunu farzedelim. $T(s)$, $N(s)$ ve $B(s)$ vektörlerinin uç noktaları, $\alpha(s)$ eğrisinin sırayla teğet, asal normal ve binormal göstergesi olarak isimlendirilen S birim küresi üzerinde bulunurlar. Bu küresel görüntülerinin ds_T , ds_N ve ds_B yay elemanları (2.20) vasıtasıyla kolayca elde edilebilir. Yay elemanlarının kareleri olarak

$$\begin{cases} ds_T^2 = \kappa^2 ds^2 \\ ds_N^2 = (\kappa^2 + \tau^2) ds^2 \\ ds_B^2 = \tau^2 ds^2 \end{cases} \quad (3.1)$$

sonuçlarını elde ederiz. Eğrilik ve burulma (3.1) den

$$\kappa = \frac{ds_T}{ds}, \quad \tau = \frac{ds_B}{ds}, \quad ds_N^2 = ds_T^2 + ds_B^2 \quad (3.2)$$

olarak bulunur (Kreyszig, 1991).

3.1 E^3 deki S. Frenet Çatısına Göre Özel Smarandache Eğrileri

Burada, verilen bir $\alpha(s)$ eğrisinin, TANIM 2.2.2 de ifade edildiği gibi Serret-Frenet çatısı kullanılarak elde edilen özel Smarandache eğrileri ifade edilmiş ve bazı özellikleri incelenmiştir.

3.1.1 TN - Smarandache Eğrileri

$\alpha(s)$ eğrisi E^3 de birim hızlı bir eğri ve $\{T, N, B\}$ de bu eğrinin hareketli Serret-Frenet çatısı olsun. Smarandache TN eğrisi

$$\beta(s^*) = \frac{1}{\sqrt{2}}(T + N) \quad (3.3)$$

biçiminde tanımlanır. Bu eğrinin hareketli Serret-Frenet çatısı $\{T^*, N^*, B^*\}$ dir (Ali, 2010).

T_β^* Birim Vektörünün Küresel Görüntüsü

$\beta(s^*)$ ve $\alpha(s)$ eğrilerinin ds^* ve ds yay elemanları arasındaki ilişki

$$\frac{ds^*}{ds} = \sqrt{\frac{2\kappa^2 + \tau^2}{2}} \quad (3.4)$$

ile verilir. (3.2) ve (3.4) bağıntılarından

$$ds^* = \frac{\sqrt{2\kappa^2 + \tau^2}}{\kappa\sqrt{2}} ds_T \quad (3.5)$$

elde edilir. (3.2) den T_β^* birim vektörünün küresel görüntüsü dikkate alınarak

$$\frac{ds_T^*}{ds^*} = \kappa^* = \frac{\sqrt{2}\sqrt{\delta^2 + \mu^2 + \eta^2}}{(\sqrt{2\kappa^2 + \tau^2})^2} \quad (3.6)$$

yazılabilir. Burada;

$$\kappa^* = \frac{\sqrt{2}\sqrt{\delta^2 + \mu^2 + \eta^2}}{(\sqrt{2\kappa^2 + \tau^2})^2} \quad (3.7)$$

ve

$$\begin{cases} \delta = -[\kappa^2(2\kappa^2 + \tau^2) + \tau(\tau\kappa' - \kappa\tau')], \\ \mu = -[\kappa^2(2\kappa^2 + 3\tau^2) + \tau(\tau^3 - \tau\kappa' - \kappa\tau')] \\ \eta = \kappa[\tau(2\kappa^2 + \tau^2) - 2(\tau\kappa' - \kappa\tau')] \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmaktadır (Ali, 2010). Ardından, (3.2) ve (3.5) bağıntılarından

$$ds_T^* = \frac{\sqrt{\delta^2 + \mu^2 + \eta^2}}{\kappa(2\kappa^2 + \tau^2)^{3/2}} ds_T \quad (3.8)$$

elde edilir.

N_β^* Birim Vektörünün Küresel Görüntüsü

Denklem (3.2) i kullanarak

$$\frac{ds_N^*}{ds^*} = \sqrt{(\kappa^*)^2 + (\tau^*)^2} \quad (3.9)$$

elde edilir. Ayrıca, (3.2), (3.4) ve (3.9) bağıntılarından

$$ds_N^* = \sqrt{(\kappa^*)^2 + (\tau^*)^2} \frac{\sqrt{2\kappa^2 + \tau^2}}{\sqrt{2}\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} ds_N \quad (3.10)$$

bulunur. Burada

$$\tau^* = \frac{\sqrt{2}[(\kappa^2 + \tau^2 - \kappa')(\kappa\sigma + \tau\omega) + \kappa(\kappa\tau + \tau')(\phi - \omega) + (\kappa^2 + \tau^2)(\kappa\sigma - \tau\phi)]}{[\tau(2\kappa^2 + \tau^2) + \kappa'\tau - \kappa\tau']^2 + (2\kappa' - \kappa\tau')^2 + (2\kappa^3 + \kappa')} \quad (3.11)$$

ve

$$\begin{cases} \omega = \kappa^3 + \kappa(\kappa^2 - 3\kappa') - \kappa'' \\ \phi = -\kappa^3 - \kappa(\tau^2 + 3\kappa') - 3\tau\tau' + \kappa'' \\ \sigma = -\kappa^2\tau - \tau^3 + 2\tau\kappa' + \kappa\tau' + \tau'' \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

B_β^* Birim Vektörünün Küresel Görüntüsü

Denklem (3.2) ve (3.11) den

$$\frac{ds_B^*}{ds^*} = \tau^* \quad (3.12)$$

bulunur. Diğer taraftan, (3.2), (3.4) ve (3.11) bağıntılarından

$$ds_B^* = \tau^* \frac{\sqrt{2\kappa^2 + \tau^2}}{2\sqrt{2}} ds_B \quad (3.13)$$

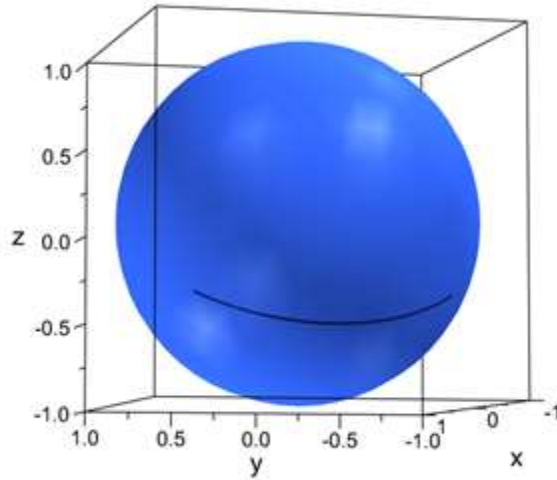
yazılır.

Örnek 1: $\alpha(s) = (\frac{4}{5}\sin t, 2 - \cos t, \frac{3}{5}\sin t)$ eğrisi verilsin. Bu eğrinin TN -Smarandache eğrisi

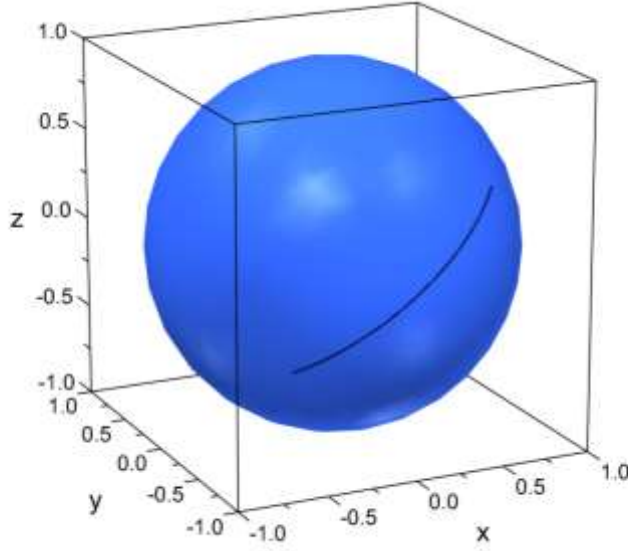
$$\beta(s^*) = \left[\frac{4}{5\sqrt{2}}(\cos t - \sin t), \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin t + \cos t), \frac{3}{5\sqrt{2}}(\cos t - \sin t) \right]$$

olarak bulunur. $\beta(s^*)$ eğrisi için T^* , N^* ve B^* in küresel görüntüleri sırayla

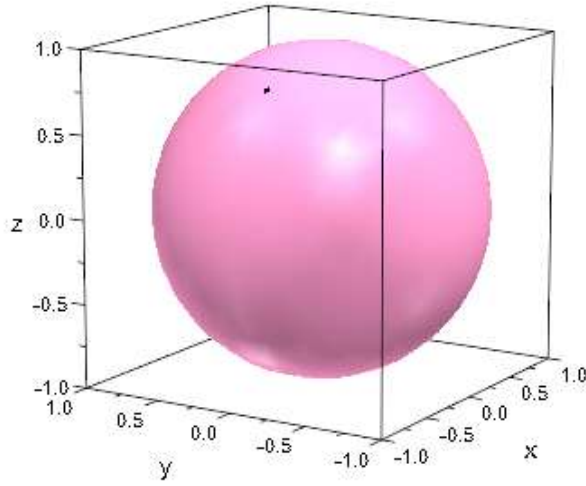
Şekil 3.1, Şekil 3.2 ve Şekil 3.3 de gösterilmiştir.



Şekil 3.1 T^* vektörünün küresel görüntüsü.



Şekil 3.2 N^* vektörünün küresel görüntüsü.



Şekil 3.3 B^* vektörünün küresel görüntüsü.

3.1.2 NB - Smarandache Eğrileri

$\alpha(s)$ eğrisi E^3 de birim hızlı bir eğri ve $\{T, N, B\}$ de bu eğrinin hareketli Serret-Frenet çatısı olsun. Smarandache NB eğrisi;

$$\beta(s^*) = \frac{1}{\sqrt{2}}(N + B) \quad (3.14)$$

biçiminde tanımlanır. Bu eğrinin hareketli Serret-Frenet çatısı $\{T^*, N^*, B^*\}$ şeklinde ifade edilebilir (Ali, 2010).

T_β^* Birim Vektörünün Küresel Görüntüsü

Denklem (3.2) ve (3.4) den

$$ds^* = \frac{\sqrt{2\kappa^2 + \tau^2}}{\kappa\sqrt{2}} ds_T \quad (3.15)$$

elde edilir. Denklem (3.2) den T_β^* nün küresel görüntüsü

$$\frac{ds_T^*}{ds^*} = \kappa^* = \frac{\sqrt{2}\sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2}}{(\sqrt{2\kappa^2 + \tau^2})^2} \quad (3.16)$$

olarak bulunur. Burada

$$\begin{cases} \gamma_1 = \kappa\tau(2\kappa + \tau') + \tau^2(\tau - \kappa') \\ \gamma_2 = -[\kappa^2(2\kappa^2 + 3\tau^2 + \tau\tau') + \tau(\tau^3 - \kappa\kappa')] \\ \gamma_3 = \kappa^2(\tau' - \tau^2) - 2(\tau^3 + 2\kappa\kappa') \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Ardından, denklem (3.2) ve (3.15) den

$$ds_T^* = \frac{\sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2}}{\kappa(2\kappa^2 + \tau^2)^{3/2}} ds_T \quad (3.17)$$

elde edilir.

N_β^* Birim Vektörünün Küresel Görüntüsü

N_β^* birim vektörünün küresel görüntüsü, (3.2) bağıntısı kullanılarak

$$\frac{ds_N^*}{ds^*} = \sqrt{(\kappa^*)^2 + (\tau^*)^2} \quad (3.18)$$

bulunur. Burada

$$\tau^* = \frac{\sqrt{2}(\kappa\varphi_3 + \tau\varphi_1)(2\tau^2 - \kappa^2)}{(2\tau^3 - 2\kappa^2)^2 + (\kappa\tau' - \tau\kappa')^2 + (-\kappa^3 + \kappa\tau' - \kappa'\tau)^2} \quad (3.19)$$

ve

$$\begin{cases} \varphi_3 = -\tau^3 - 3\tau\tau' + \kappa^2\tau + \tau'' \\ \varphi_1 = -\kappa^3 + \kappa(\tau^2 + 2\tau') + \tau\kappa' - \kappa'' \end{cases}$$

biçiminde tanımlanmaktadır. Ayrıca, denklem (3.2), (3.4) ve (3.18) den

$$ds_N^* = \sqrt{(\kappa^*)^2 + (\tau^*)^2} \frac{\sqrt{2\kappa^2 + \tau^2}}{\sqrt{2}\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} ds_N \quad (3.20)$$

elde edilir.

B_β^* Birim Vektörünün Küresel Görüntüsü

Denklem (3.2) ve (3.19) dan

$$\frac{ds_B^*}{ds^*} = \tau^* \quad (3.21)$$

bulunur. Diğer taraftan, denklem (3.2), (3.4) ve (3.21) den

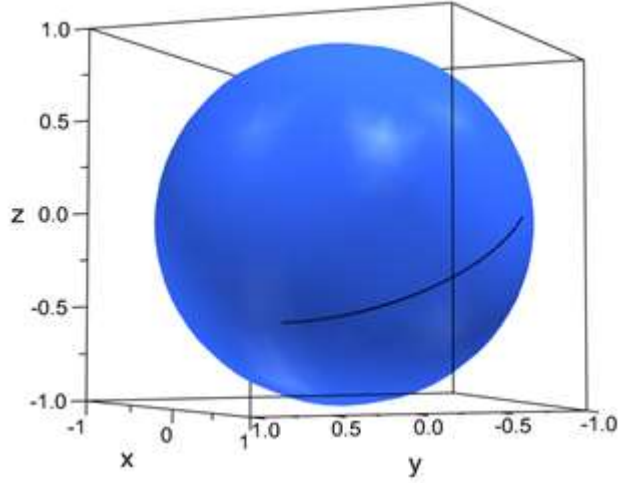
$$ds_B^* = \left[\frac{\sqrt{2}(\kappa\varphi_3 + \tau\varphi_1)(2\tau^2 - \kappa^2)}{(2\tau^3 - 2\kappa^2)^2 + (\kappa\tau' - \tau\kappa')^2 + (-\kappa^3 + \kappa\tau' - \kappa'\tau)^2} \right] \frac{\sqrt{2\kappa^2 + \tau^2}}{\tau\sqrt{2}} ds_B \quad (3.22)$$

elde edilir.

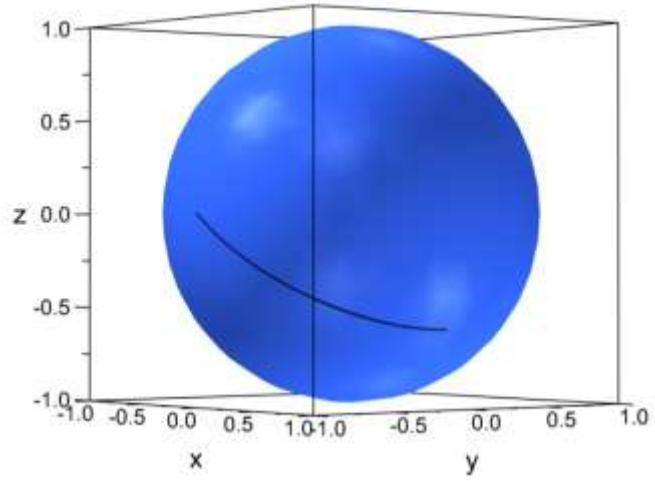
Örnek 2: $\alpha(s) = (\frac{4}{5}\sin t, 2 - \cos t, \frac{3}{5}\sin t)$ eğrisi verilsin. Bu eğrinin **NB**-Smarandache eğrisi

$$\beta(s^*) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[-\frac{4}{5}\sin t - \frac{3}{5}, \cos t, -\frac{3}{5}\sin t + \frac{4}{5} \right]$$

biçiminde yazılır. $\beta(s^*)$ eğrisi için T^* ve N^* nün küresel görüntüleri sırayla Şekil 3.4 ve Şekil 3.5 de gösterilmiştir. $\beta(s^*)$ eğrisi için B^* küresel görüntüsü Şekil 3.3 e benzer olarak nokta şeklindedir.



Şekil 3.4 T^* vektörünün küresel görüntüsü.



Şekil 3.5 N^* vektörünün küresel görüntüsü.

3.1.3 TB - Smarandache Eğrileri

$\alpha(s)$ eğrisi E^3 de birim hızlı bir eğri ve $\{T, N, B\}$ de bu eğrinin hareketli Serret-Frenet çatısı olsun. Smarandache TB eğrisi

$$\beta(s^*) = \frac{1}{\sqrt{2}}(T + B) \quad (3.23)$$

biçiminde tanımlanır. Bu eğrinin hareketli Serret-Frenet çatısı $\{T^*, N^*, B^*\}$ şeklinde ifade edilebilir (Ali, 2010).

T_β^* Birim Vektörünün Küresel Görüntüsü

T_β^* nün küresel görüntüsünü denklem (3.2) den

$$\frac{ds_T^*}{ds^*} = \kappa^* = \frac{\sqrt{2}\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2}}{(\sqrt{2}\kappa^2 + \tau^2)^2} \quad (3.24)$$

bulunur. Burada

$$\begin{cases} \sigma_1 = (2\kappa^2 + \tau^2)(\kappa\tau - \kappa^2) \\ \sigma_2 = (2\kappa + \tau)(\kappa'\tau - \kappa\tau') \\ \sigma_3 = (2\kappa^2 + \tau^2)(\kappa\tau - \tau^2) \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmaktadır. (3.2) ve (3.4) den

$$ds^* = \frac{\sqrt{2\kappa^2 + \tau^2}}{\kappa\sqrt{2}} ds_T \quad (3.25)$$

elde edilir. Denklem (3.2) ve (3.25) den

$$ds_T^* = \frac{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2}}{\kappa(2\kappa^2 + \tau^2)^{3/2}} ds_T \quad (3.26)$$

olur.

N_β^* Birim Vektörünün Küresel Görüntüsü

Denklem (3.2) i kullandığımızda N_β^* nün küresel görüntüsü

$$\frac{ds_N^*}{ds^*} = \sqrt{(\kappa^*)^2 + (\tau^*)^2} \quad (3.27)$$

olarak bulunur. Bunun yanında, denklem (3.2), (3.4) ve (3.27) den

$$ds_N^* = \sqrt{(\kappa^*)^2 + (\tau^*)^2} \frac{\sqrt{2\kappa^2 + \tau^2}}{\sqrt{2}\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} ds_N \quad (3.28)$$

elde edilir. Burada

$$\tau^* = \frac{\sqrt{2}(\tau - \kappa)^2(\kappa\Phi_3 + \tau\Phi_1)}{[\tau(\kappa - \tau)^2]^2 + [\kappa(\kappa - \tau)^2]^2} \quad (3.29)$$

ve

$$\begin{cases} \Phi_3 = 2\tau(\kappa' - \tau') + \tau'(\kappa - \tau) \\ \Phi_1 = \kappa'(\tau - \kappa) + 2\kappa(\tau' - \kappa') \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

B_β^* Birim Vektörünün Küresel Görüntüsü

Denklem (3.2) ve (3.29) dan

$$\frac{ds_B^*}{ds^*} = \tau^* \quad (3.30)$$

bulunur. Diğer taraftan, denklem (3.2), (3.4) ve (3.30) dan

$$ds_B^* = \left[\frac{\sqrt{2}(\tau - \kappa)^2(\kappa\Phi_3 + \tau\Phi_1)}{[\tau(\kappa - \tau)^2]^2 + [\kappa(\kappa - \tau)^2]^2} \right] \frac{\sqrt{2\kappa^2 + \tau^2}}{\tau\sqrt{2}} ds_B \quad (3.31)$$

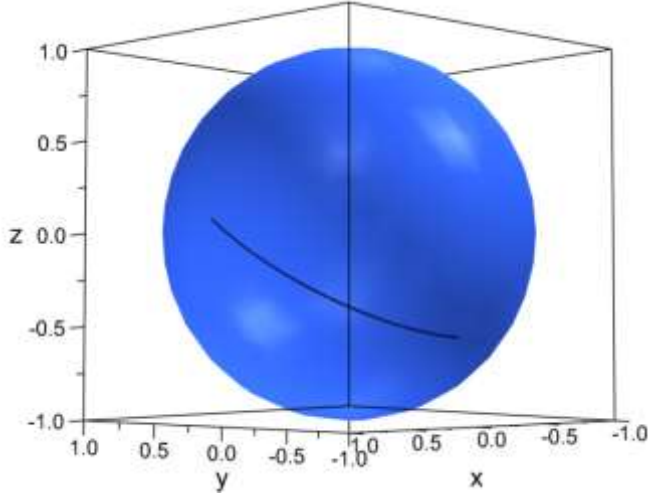
elde edilir.

Örnek 3:

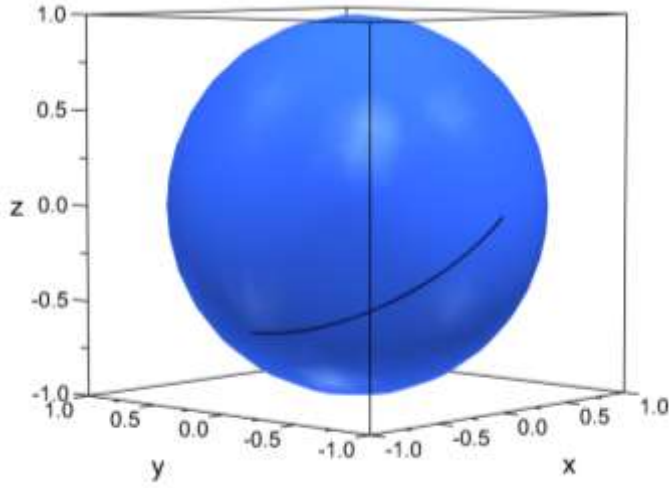
$\alpha(s) = (\frac{4}{5}\sin t, 2 - \cos t, \frac{3}{5}\sin t)$ eğrisi verilsin. Bu eğrinin **TB** - Smarandache eğrisi

$$\beta(s^*) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{4}{5}\cos t - \frac{3}{5}, \sin t, \frac{3}{5}\cos t + \frac{4}{5} \right]$$

biçimindedir. $\beta(s^*)$ eğrisi için T^* ve N^* nün küresel görüntüleri sırayla Şekil 3.6 ve Şekil 3.7 den görülebilir. $\beta(s^*)$ eğrisi için B^* küresel görüntüsü Şekil 3.3 e benzer olarak bir noktadır.



Şekil 3.6 T^* vektörünün küresel görüntüsü.



Şekil 3.7 N^* vektörünün küresel görüntüsü.

3.1.4 TNB - Smarandache Eğrileri

$\alpha(s)$ eğrisi E^3 de birim hızlı bir eğri ve $\{T, N, B\}$ de bu eğrinin hareketli Serret-Frenet çatısı olsun. Smarandache TNB eğrisi

$$\beta(s^*) = \frac{1}{\sqrt{3}}(T + N + B) \quad (3.32)$$

biçiminde tanımlanır. Bu eğrinin hareketli Serret-Frenet çatısı $\{T^*, N^*, B^*\}$ olarak ifade edilebilir (Ali, 2010).

Uyarı 3.1: $\beta(s^*)$ eğrisinin küresel görüntüleri yukarıda belirtildiği gibi benzer şekilde bulunabilir.

3.2 $\{T, g, n\}$ Darboux Çatısının Küresel Görüntüleri

P yüzeyi E^3 de yönlendirilmiş bir yüzey olarak verilsin. $\alpha(s)$ eğrisi E^3 de birim hızlı regüler bir eğri ve $\{T, g, n\}$, bu eğrinin P yüzeyi üzerindeki Darboux çatısını belirtsin.

T Birim Vektörünün Küresel Görüntüsü

T birim vektörünün küresel görüntüsünün diferansiyel geometrik özellikleri

$$\frac{dT}{ds_T} = \frac{dT}{ds} \cdot \frac{ds}{ds_T} = (\kappa_g g + \kappa_n n) \frac{ds}{ds_T}$$

biçimindedir. Yay parametreleri arasındaki ilişki

$$\frac{ds_T}{ds} = \sqrt{\kappa_g^2 + \kappa_n^2} \quad (3.33)$$

dir. Diğer taraftan, denklem (3.1) ve (3.33) den

$$\kappa = \sqrt{\kappa_g^2 + \kappa_n^2} \quad (3.34)$$

yazılabilir.

g Birim Vektörünün Küresel Görüntüsü

g birim vektörünün küresel görüntüsünün diferansiyel geometrik özellikleri

$$\frac{dg}{ds_g} = \frac{dg}{ds} \cdot \frac{ds}{ds_g} = (-\kappa_g T + \tau_g n) \frac{ds}{ds_g}$$

şeklindedir. Yay parametreleri arasındaki ilişki

$$\frac{ds_g}{ds} = \sqrt{\kappa_g^2 + \tau_g^2} \quad (3.35)$$

biçimindedir.

n Birim Vektörünün Küresel Görüntüsü

n birim vektörünün küresel görüntüsünün diferansiyel geometrik özellikleri

$$\frac{d\mathbf{n}}{ds_n} = \frac{d\mathbf{n}}{ds} \cdot \frac{ds}{ds_n} = \frac{d\mathbf{n}}{ds_n} = (-\kappa_n \mathbf{T} - \tau_g \mathbf{g}) \frac{ds}{ds_n}$$

biçiminde bulunur. Ayrıca, yay parametreleri arasındaki ilişki

$$\frac{ds_n}{ds} = \sqrt{\kappa_n^2 + \tau_g^2} \quad (3.36)$$

olarak bulunur.

Özel durumlar:

i) $\alpha(s)$ eğrisi jeodezik eğri ise, $\kappa_g = 0$ için

$$\frac{ds_T}{ds} = \kappa_n = \kappa, \quad \frac{ds_g}{ds} = \tau_g, \quad \frac{ds_n}{ds} = \sqrt{\kappa_n^2 + \tau_g^2} = \sqrt{\kappa^2 + \tau_g^2}$$

olur. Ayrıca, birim Darboux vektörü

$$\mathbf{c} = \frac{\tau_g \mathbf{T} + \kappa_n \mathbf{g}}{\sqrt{\kappa_n^2 + \tau_g^2}}$$

dir.

ii) $\alpha(s)$ eğrisi asimptotik eğri ise, $\kappa_n = 0$ için

$$\frac{ds_T}{ds} = \kappa_g = \kappa, \quad \frac{ds_g}{ds} = \sqrt{\kappa_g^2 + \tau_g^2} = \sqrt{\kappa^2 + \tau_g^2}, \quad \frac{ds_n}{ds} = \tau_g$$

dir ve birim Darboux vektörü

$$\mathbf{c} = \frac{\kappa_g \mathbf{T} + \kappa_n \mathbf{g}}{\sqrt{\kappa_g^2 + \kappa_n^2}}$$

şeklindedir.

iii) $\alpha(s)$ eğrisi eğrilik çizgisi ise, $\tau_g = 0$ için

$$\frac{ds_T}{ds} = \sqrt{\kappa_g^2 + \kappa_n^2} = \kappa, \quad \frac{ds_g}{ds} = \kappa_g, \quad \frac{ds_n}{ds} = \kappa_n$$

dir ve birim Darboux vektörü

$$c = \frac{\kappa_g \mathbf{n} + \kappa_n \mathbf{g}}{\sqrt{\kappa_g^2 + \kappa_n^2}}$$

biçimindedir.

3.3 E^3 deki Darboux Çatısına Göre Özel Smarandache Eğrileri

Bu bölümde, P yüzeyi üzerinde bulunan bir $\alpha(s)$ eğrisinin $\{\mathbf{T}, \mathbf{g}, \mathbf{n}\}$ Darboux çatısı kullanılarak elde edilmiş özel Smarandache eğrileri ifade edilmiştir.

3.3.1 Tg - Smarandache Eğrileri

P yüzeyi E^3 de yönlendirilmiş bir yüzey olsun. $\alpha(s)$ eğrisi E^3 de birim hızlı regüler bir eğri olsun, $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$ ve $\{\mathbf{T}, \mathbf{g}, \mathbf{n}\}$ ise bu eğrinin sırayla Serret-Frenet ve Darboux çatıları olsun. Smarandache Tg eğrisi

$$\beta(s^*) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{T} + \mathbf{g}) \quad (3.37)$$

şeklinde tanımlanır.

3.3.2 Tn – Smarandache Eğrileri

P yüzeyi E^3 de yönlendirilmiş bir yüzey olsun. $\alpha(s)$ eğrisi E^3 de birim hızlı regüler bir eğri, $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$ ve $\{\mathbf{T}, \mathbf{g}, \mathbf{n}\}$ ise bu eğrinin sırayla Serret-Frenet ve Darboux çatıları olsun. Smarandache Tn eğrisi

$$\beta(s^*) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{T} + \mathbf{n}) \quad (3.38)$$

olarak tanımlanır.

3.3.3 gn - Smarandache Eğrileri

P yüzeyi E^3 de yönlendirilmiş bir yüzey olsun. $\alpha(s)$ eğrisi E^3 de birim hızlı regüler bir eğri, $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$ ve $\{\mathbf{T}, \mathbf{g}, \mathbf{n}\}$ ise bu eğrinin sırayla Serret-Frenet ve Darboux çatıları olsun. Smarandache gn eğrisi

$$\beta(s^*) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{g} + \mathbf{n}) \quad (3.39)$$

biçiminde tanımlanır.

3.3.4 Tgn – Smarandache Eğrileri

P yüzeyi E^3 de yönlendirilmiş bir yüzey olsun. $\alpha(s)$ eğrisi E^3 de birim hızlı regüler bir eğri, $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$ ve $\{\mathbf{T}, \mathbf{g}, \mathbf{n}\}$ ise bu eğrinin sırayla Serret-Frenet ve Darboux çatıları olsun. Smarandache Tgn eğrisi

$$\beta(s^*) = \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{T} + \mathbf{g} + \mathbf{n}) \quad (3.40)$$

şeklindedir (Bektaş and Yüce , 2013).

Uyarı 3.2: Bu eğrilerin küresel görüntüleri, Bölüm 3.1 de açıklandığı gibi benzer yolla kolayca bulunabilir (Bulut and Caliskan, 2015a).

4 OFSET EĞRİ VE YÜZEYLERİNİN VARYASYONLARI

Ofset eğri ve yüzeylerin tasarımı, 3D nümerik kontrol (NC) makinaları için araç yolu oluşturma ve robot yol planlaması gibi birçok mühendislik uygulamalarının yanında, araba ve otomobil endüstrilerinde de önemlidir. Ofset işlemleri eğri, yüzey ya da tüm 3D modellere uygulanabilir. Ayrıca, genelleştirilmiş ofset eğri ve yüzeyleri çok çeşitli şekillerin üretimi için de kullanılabilir. Makina mühendisliğindeki milleme işlemi, yüzeyin istenilen şekilde elde edilmesi için kullanılır, fakat üç-eksen ve beş-eksen millemelerinde, kesme vuruş problemi ciddi zorluklara sebep olur. Örnek olarak, milleme makinası istenilen yüzeyin zaten işlenmiş olan parçasına geri dönülemez zarar verebilir.

Pham (Pham, 1992), ofset eğri ve yüzeyler üzerine bir literatür taraması yapmış, ve Maekawa (Maekawa, 1999) 1992 sonrası literatürüne genel bir bakış vermiştir. Genelleştirilmiş ofset eğri ve yüzeyleri ilk olarak Brechner (Brechner, 1992) tarafından kullanılmış ve genelleştirilmiş ofset eğrileri üzerine literatürde çeşitli çalışmalar yapılmıştır (Arrondo et al., 1999; Barnhill, 1992; Chen and Lin, 2014; Georgiev, 2003; Pottmann, 1997).

Varyasyon hesabının gelişimi ise en uygunluğun (mükemmellik) arzulanması ile oluşmuştur. Varyasyon hesabı, bir yüzey üzerindeki iki nokta arasındaki en kısa yolu (jeodeziği), düzlemde verilen iki nokta arasında ve ayrıca verilen bir eksen etrafında döndürüldüğünde minimum alanlı bir dönel yüzey ile sonuçlanan eğri için analitik teknikler sağlar (Cherkaev and Cherkaev, 2003).

Bu çalışmada, genelleştirilmiş ofset eğri ve yüzeylerinin tanımı farklı bir bakış açısıyla sunulmuştur. Verdiğimiz yeni tanıma dayanarak, genelleştirilmiş ofset eğri ve yüzeylerin bazı özellikleri Chen ve Lin (Chen and Lin, 2014) de incelendiği gibi incelenmiştir. Bunlara ilave olarak, standart ofset eğrilerinin birinci varyasyonu, standart ofset yüzeylerin yüzölçümlerinin birinci ve ikinci varyasyonu ve orjinal yüzey ile standart ofset yüzeyi arasındaki Gauss ve ortalama eğriliğin birinci varyasyonu ve oval yüzeyler gibi bazı özel koşullar ifade edilmiştir. Sunulan yeni tanımla, kullanıcının isteğine göre maksimum yararlı olabilecek ofset uzaklığı ayarlanabilmektedir. Beklenen ve öngörülen bu durumun, milleme işlemi ve kesişim problemleri gibi ofset eğri ve yüzeylerin kullanıldığı çeşitli alanlarda, ileriki çalışmalar için de bir temel sağlamasıdır.

4.1 Genelleştirilmiş Ofset Eğrileri

Düzlemde bir eğriyi, (2.13) denkleminde α yerine $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ gösterimiyle ele alalım. Yay uzunluğu parametresine göre Serret-Frenet türev formülleri (2.20) deki gibi

$$\frac{d\mathbf{e}}{ds} = \kappa \mathbf{n}, \quad \frac{d\mathbf{n}}{ds} = -\kappa \mathbf{e} \quad (4.1)$$

biçiminde ifade edilebilir. Burada $\mathbf{e}$, $\mathbf{n}$ ve κ sırayla $\mathbf{r}(t)$ eğrisinin (2.20) deki $\mathbf{T}$ e karşılık gelen birim teğet vektörü, $\mathbf{N}$ e karşılık gelen birim normal vektörü ve eğriliğidir, ve ayrıca $\frac{ds}{dt} = |\mathbf{r}'|$ dir (Kreyszig, 1991). Düzlemin birim normal vektörü olan $\mathbf{z}$ i ve eğrinin eğriliğini sırayla

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}'|}, \quad \mathbf{z} = \mathbf{n} \times \mathbf{e}, \quad \mathbf{e} = \mathbf{z} \times \mathbf{n}, \quad \mathbf{n} = \mathbf{e} \times \mathbf{z} \quad (4.2)$$

ve

$$\kappa = \frac{(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'').\mathbf{z}}{|\mathbf{r}'|^3} \quad (4.3)$$

biçiminde ifade edebiliriz.

TANIM 4.1.1 : Düzlemsel düzgün parametrik $\mathbf{r}(t)$, ($t \in [0,1]$) eğrisinin genelleştirilmiş $\mathbf{r}_*(t)$ ofset eğrisi değişken ofset uzaklığı ve ofset yönü ile

$$\mathbf{r}_*(t) = \mathbf{r}(t) + d_1(t)\mathbf{e} + d_2(t)\mathbf{n} \quad (4.4)$$

şeklinde tanımlanabilir. Burada $d_1(t)$ ve $d_2(t)$ değerleri t ye bağlı fonksiyonlardır. Ofset yönü ve ofset uzaklığı $d_1(t)\mathbf{e}$ ve $d_2(t)\mathbf{n}$ ile belirlenir.

Genelleştirilmiş ofset eğrisini

$$\mathbf{r}_*(t) = \mathbf{r}(t) + \varepsilon \bar{d}_1(t)\mathbf{e} + \varepsilon \bar{d}_2(t)\mathbf{n} \quad (4.5)$$

biçiminde ifade edebiliriz. Burada $d_1(t) = \varepsilon \bar{d}_1(t)$ ve $d_2(t) = \varepsilon \bar{d}_2(t)$ ve ofset uzaklığı ise $\varepsilon \sqrt{\bar{d}_1(t)^2 + \bar{d}_2(t)^2}$ olur (Blaschke, 1950).

$\mathbf{r}_*(t)$ nin parametrik türevleri

$$\begin{aligned}\mathbf{r}'_* &= \mathbf{r}' + \varepsilon \left[\bar{d}'_1 \mathbf{e} + \bar{d}_1 \mathbf{e}' + \bar{d}'_2 \mathbf{n} + \bar{d}_2 \mathbf{n}' \right] \\ &= |\mathbf{r}'| \mathbf{e} + \varepsilon \left[(\bar{d}'_1 + \bar{d}_2 \kappa |\mathbf{r}'|) \mathbf{e} + (\bar{d}'_2 - \bar{d}_1 \kappa |\mathbf{r}'|) \mathbf{n} \right]\end{aligned}\quad (4.6)$$

şeklindedir. $\mathbf{r}_*(t)$ den türevle,

$$\mathbf{r}'_* = |\mathbf{r}'| \mathbf{e} + \varepsilon (\alpha \mathbf{e} + \beta \mathbf{n}) \quad (4.7)$$

ifadesi yazıldığında, (4.6) denkleminde

$$\begin{aligned}\mathbf{r}''_* &= |\mathbf{r}'| \mathbf{e} + \varepsilon (\alpha' \mathbf{e} + \alpha \mathbf{e}' + \beta' \mathbf{n} + \beta \mathbf{n}') \\ &= |\mathbf{r}'|^2 \kappa \mathbf{n} + \varepsilon [(\alpha' + \beta \kappa |\mathbf{r}'|) \mathbf{e} + (\beta' - \alpha \kappa |\mathbf{r}'|) \mathbf{n}]\end{aligned}\quad (4.8)$$

olur. Burada $\alpha = \bar{d}'_1 + \bar{d}_2 \kappa |\mathbf{r}'|$ ve $\beta = \bar{d}'_2 - \bar{d}_1 \kappa |\mathbf{r}'|$ dir. Sonuçta;

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_* &= \frac{\mathbf{r}'_*}{|\mathbf{r}'_*|} = \frac{|\mathbf{r}'| \mathbf{e} + \varepsilon (\alpha \mathbf{e} + \beta \mathbf{n})}{\sqrt{|\mathbf{r}'|^2 + \varepsilon^2 (\alpha^2 + \beta^2) + 2\varepsilon \alpha |\mathbf{r}'|}} \\ \mathbf{n}_* &= \mathbf{e}_* \times \mathbf{z} = \frac{|\mathbf{r}'| \mathbf{n} + \varepsilon (\alpha \mathbf{n} - \beta \mathbf{e})}{|\mathbf{r}'|^2 + \varepsilon^2 (\alpha^2 + \beta^2) + 2\varepsilon \alpha |\mathbf{r}'|} \\ \kappa_* &= \frac{(\mathbf{r}'_* \times \mathbf{r}''_*) \cdot \mathbf{z}}{|\mathbf{r}'_*|^3} = \frac{\varepsilon |\mathbf{r}'| [|\mathbf{r}'|^2 \kappa + \alpha \kappa |\mathbf{r}'| - \beta'] + \varepsilon^2 \{(\alpha' \beta - \alpha \beta') + [(\alpha^2 + \beta^2) + a]\}}{[|\mathbf{r}'|^2 + \varepsilon^2 (\alpha^2 + \beta^2) + 2\varepsilon \alpha |\mathbf{r}'|]^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}\quad (4.9)$$

denklemleri elde edilir.

TEOREM 4.1.1 : Denklem (4.4) ile verilen genelleştirilmiş ofset eğrisi,

$$\mathbf{r}_* = \mathbf{r}_1 + d \mathbf{n}_1 \quad (4.10)$$

bağıntısı ile standart ofset eğrisi olarak ifade edilebilir. Burada, $\mathbf{r}_1$ diğer bir düzlem parametrik eğrisi, d sabit değer ve $\mathbf{n}_1$ ise $\mathbf{r}_1$ eğrisinin asal birim normal vektörüdür.

İspat: Genelleştirilmiş ofset eğrisi

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_* &= \mathbf{r} + d_1 \mathbf{e} + d_2 \mathbf{n} \\
&= (\mathbf{r} + A\mathbf{e} + B\mathbf{n}) + (d_1 - A)\mathbf{e} + (d_2 - B)\mathbf{n} \\
&\triangleq \mathbf{r}_1 + d\mathbf{n}_1
\end{aligned} \tag{4.11}$$

biçiminde yazılabilir. Burada, $d_1 = \varepsilon \bar{d}_1$ ve $d_2 = \varepsilon \bar{d}_2$, ve $A = \varepsilon \bar{A}$ ve $B = \varepsilon \bar{B}$ değerleri t nin fonksiyonlarıdır ve

$$\begin{aligned}
d &= \varepsilon \sqrt{(\bar{d}_1 - \bar{A})^2 + (\bar{d}_2 - \bar{B})^2} = \varepsilon \bar{d} \\
\mathbf{n}_1 &= \varepsilon \left[\frac{(\bar{d}_1 - \bar{A})}{d} \mathbf{e} + \frac{\bar{d}_2 - \bar{B}}{d} \mathbf{n} \right]
\end{aligned} \tag{4.12}$$

şeklindedir. Böylece

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}'_1 &= \mathbf{r}' + \varepsilon \left[\bar{A}' \mathbf{e} + \bar{A} \mathbf{e}' + \bar{B}' \mathbf{n} + \bar{B} \mathbf{n}' \right] \\
&= |\mathbf{r}'| \mathbf{e} + \varepsilon \left[(\bar{A}' + \bar{B} \kappa |\mathbf{r}'|) \mathbf{e} + (\bar{B}' - \bar{A} \kappa |\mathbf{r}'|) \mathbf{n} \right]
\end{aligned} \tag{4.13}$$

denklemini elde edilir. Aşağıda bulunan iki denklem, (4.13) deki ilişkiyi gerçekleyebilmek için sağlanmak zorundadır.

(i) $\langle d\mathbf{n}_1, \mathbf{r}'_1 \rangle = 0$, yani

$$\varepsilon(\bar{d}_1 - \bar{A})[|\mathbf{r}'| + \varepsilon(\bar{A}' + \bar{B} \kappa |\mathbf{r}'|)] + \varepsilon^2(\bar{d}_2 - \bar{B})(\bar{B}' - \bar{A} \kappa |\mathbf{r}'|) = 0 \tag{4.14}$$

(ii) $\varepsilon^2(\bar{d}_1 - \bar{A})^2 + (\bar{d}_2 - \bar{B})^2 = \text{sabit}$. Buradan,

$$\varepsilon^2[(\bar{d}_1 - \bar{A})(\bar{d}'_1 - \bar{A}') + (\bar{d}_2 - \bar{B})(\bar{d}'_2 - \bar{B}')] = 0 \tag{4.15}$$

olur. Bu yüzden, $A = \varepsilon \bar{A}$ ve $B = \varepsilon \bar{B}$ değerlerini (4.14) ve (4.15) denklemlerini kullanarak belirleyebiliriz. (4.14) ve (4.15) denklemlerinden

$$\begin{aligned}
[\varepsilon |\mathbf{r}'| + \varepsilon^2(\bar{d}_2 \kappa |\mathbf{r}'| + \bar{d}'_1 \bar{A})] &= \varepsilon^2(\bar{d}_1 \kappa |\mathbf{r}'| - \bar{d}'_2 \bar{B}) \\
&+ [\varepsilon \bar{d}_1 |\mathbf{r}'| + \varepsilon^2(\bar{d}'_1 \bar{d}_1 + \bar{d}'_2 \bar{d}_2)]
\end{aligned} \tag{4.16}$$

bağıntısı elde edilir. Bunlara ek olarak,

$$\varepsilon \bar{d}_1 |\mathbf{r}'| + \varepsilon^2(\bar{d}'_1 \bar{d}_1 + \bar{d}'_2 \bar{d}_2) = \varepsilon \bar{d}_1 |\mathbf{r}'| + \varepsilon^2[\bar{d}_1 \alpha + \bar{d}_2 \beta] \tag{4.17}$$

olsun. Bu halde,

$$\varepsilon[(\bar{d}_1 - \bar{A})|\mathbf{r}'| + \varepsilon\alpha(\bar{d}_1 - \bar{A}) + \varepsilon\beta(\bar{d}_2 - \bar{B})] = 0. \quad (4.18)$$

olur. Eğer, $\alpha \neq 0$ ve $\beta \neq 0$ olursa $A = \varepsilon\bar{A}$ ve $B = \varepsilon\bar{B}$ değerleri, (4.15) ve (4.18) denklemleri kullanılarak

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \bar{d}_1 - \frac{\beta C}{\sqrt{\varepsilon^4 \beta^2 + (\varepsilon^2 \alpha + \varepsilon |\mathbf{r}'|)^2}} \\ \bar{B} &= \bar{d}_2 - \frac{\alpha C}{\sqrt{\varepsilon^4 \beta^2 + (\varepsilon^2 \alpha + \varepsilon |\mathbf{r}'|)^2}} \end{aligned} \quad (4.19)$$

biçiminde belirlenir. Burada, C herhangi bir reel sabittir.

4.2 Genelleştirilmiş Ofset Eğrisinin Varyasyonu

Denklem (4.4) ile verilen $\mathbf{r}_*(s)$ genelleştirilmiş ofset eğrisini

$$\mathbf{r}_* = \mathbf{r} + d_1 \mathbf{e} + d_2 \mathbf{n} = \mathbf{r} + \mathbf{y} \quad (4.20)$$

biçiminde yazabiliriz, burada $\{\mathbf{e}, \mathbf{n}\}$ değerleri $\mathbf{r}(s)$ eğrisinin Serret-Frenet çatısı, d_1 ve d_2 değerleri ise s nin ε parametresi ile çarpılmış

$$d_1 = \varepsilon \bar{d}_1(s), \quad d_2 = \varepsilon \bar{d}_2(s), \quad \mathbf{y} = \varepsilon \bar{\mathbf{y}}(s) \quad (4.21)$$

biçimindeki fonksiyonlardır. Eğer, $\varepsilon \rightarrow 0$ koşulu gerçekleşirse o zaman $\mathbf{r}_*(s)$ genelleştirilmiş ofset eğrisi $\mathbf{r}(s)$ eğrisine yaklaşır.

Genelleştirilmiş ofset eğrisinin,

$$s_* = \int_{s_1}^{s_2} \sqrt{\mathbf{r}'_*^2} ds \quad (4.22)$$

biçiminde verilen yay uzunluğunu ε nun kuvvetlerine göre seriye açalım. Eğer ε a göre bu açılım, δs lineer terimi olarak gösterilirse

$$s_* = s + \delta s + \dots \quad (4.23)$$

olarak yazılabilir. Bu yüzden δs , yay uzunluğunun birinci varyasyonu olarak isimlendirilir ve

$$\delta s = \varepsilon \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{S_* - S}{\varepsilon} \quad (4.24)$$

biçiminde ifade edilebilir. $(\mathbf{r})$ eğrisinin eğriliği $\kappa = \frac{1}{\rho}$ olduğundan Serret-Frenet türev formülleri

$$\mathbf{e}' = \kappa \mathbf{n}, \quad \mathbf{n}' = -\kappa \mathbf{t} \quad (4.25)$$

olarak ifade edilir. Burada ρ eğrilik yarıçapıdır. Bazı ara hesaplamalardan sonra,

$$s_* = s + \int_{s_1}^{s_2} \mathbf{r}' \mathbf{y}' ds + \dots = s + [d_1]_{s_1}^{s_2} - \int_{s_1}^{s_2} \kappa d_2 ds + \dots$$

olur ve son olarak yay uzunluğunun birinci varyasyonu

$$\delta s = [d_1]_{s_1}^{s_2} - \int_{s_1}^{s_2} \kappa d_2 ds \quad (4.26)$$

olarak bulunur. Eğer $(\mathbf{r})$ ve $(\mathbf{r}_*)$ eğrilerinin ortak sınır noktaları varsa $[d_1(s_1) = 0, d_2(s_2) = 0]$, bu durumda bu eğrilerin yay uzunluğunun birinci varyasyonu

$$\delta s = - \int_{s_1}^{s_2} \kappa d_2 ds \quad (4.27)$$

şeklinde yazılabilir. Ardından, eğer d_2 yerine δn yazılırsa

$$\delta s = - \int_{s_1}^{s_2} \kappa \delta n ds \quad (4.28)$$

elde edilir.

Diğer taraftan, $(\mathbf{r}_*)$ eğrisinin $\kappa_* = 1/\bar{\rho}$ eğriliği

$$\kappa_* = \frac{\sqrt{\mathbf{r}'^2 \mathbf{r}''^2 - (\mathbf{r}'^2 \mathbf{r}''^2)^2}}{(\sqrt{\mathbf{r}'^2})^3} \quad (4.29)$$

şeklinde tanımlanabilir. Bu durumda,

$$\mathbf{r}_*'(s) = \mathbf{e}_* = \mathbf{r}' + \mathbf{y}' = \mathbf{e} + \varepsilon \bar{\mathbf{y}}' \quad (4.30)$$

ve

$$\mathbf{y}' = \varepsilon \bar{\mathbf{y}}' = (d_1' - \kappa d_2) \mathbf{e} + (d_2' + \kappa d_1) \mathbf{n} \quad (4.31)$$

olduğundan $\mathbf{r}_*(s)$ genelleştirilmiş ofset eğrisinin birim teğet vektörü

$$\mathbf{r}_*'(s) = \mathbf{e}_* = (1 + d_1' - \kappa d_2) \mathbf{e} + (d_2' + \kappa d_1) \mathbf{n} \quad (4.32)$$

biçiminde bulunur. Ayrıca, $(\mathbf{r})$ orjinal eğri ve $(\mathbf{r}_*)$ genelleştirilmiş ofset eğrisi arasındaki eğrilik ilişkisi

$$\kappa_* = \kappa + \varepsilon[(\mathbf{n} \bar{\mathbf{y}}'') - 2\kappa(\mathbf{e} \bar{\mathbf{y}}')] + \dots \quad (4.33)$$

dir. Böylece, (4.20), (4.21), (4.31) ve

$$\mathbf{y}'' = (d_1'' - \kappa' d_2 - \kappa d_2' - \kappa^2 d_1) \mathbf{e} + (d_2'' + \kappa' d_1 + 2\kappa d_1' - \kappa^2 d_2) \mathbf{n}$$

denklemlerinden, $(\mathbf{r})$ orjinal eğri ve $(\mathbf{r}_*)$ genelleştirilmiş ofset eğrisinin eğrilik varyasyonu

$$\delta\kappa = \kappa^2 d_2 - \kappa d_1' + \frac{d}{ds}(d_2' + \kappa d_1) \quad (4.34)$$

şeklinde yazılabilir (Nutbourne and Martin, 1988).

4.3 Genelleştirilmiş Ofset Yüzeyleri

Regüler ve parametrik bir yüzey $\mathbf{r}(u, v) = (\mathbf{x}(u, v), \mathbf{y}(u, v), \mathbf{z}(u, v))$ ve bu yüzeyin bir çatısı, Tanım 3.3.5 de ifade edilen notasyonlara karşılık $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{n})$ notasyonu ile

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{r}_u(u, v)}{|\mathbf{r}_u(u, v)|}, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{r}_v(u, v)}{|\mathbf{r}_v(u, v)|}, \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v)}{|\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v)|} \quad (4.35)$$

biçiminde tanımlanabilir (Nutbourne and Martin, 1988). $\mathbf{r}(u, v)$ yüzeyinin

$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{n})$ yerel koordinat sistemini kullanarak $\mathbf{r}^*(u, v)$ genelleştirilmiş ofset yüzeyi, değişken ofset yönü ve ofset uzaklığıyla tanımlanabilir. Bu çalışmada, $\mathbf{r}(u, v)$ yüzeyinin $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{n})$ yerel koordinat sistemini dik koordinat sistem olarak alıyoruz.

TANIM 4.3.1: Regüler parametrik $\mathbf{r}(u, v)$, $(u, v) \in [0, 1] \times [0, 1]$ yüzeyi için değişken ofset yönü ve ofset uzaklığıyla $\mathbf{r}^*(u, v)$ genelleştirilmiş ofset yüzeyi

$$\mathbf{r}^*(u, v) = \mathbf{r}(u, v) + d_1(u, v)\mathbf{e}_1 + d_2(u, v)\mathbf{e}_2 + d_3(u, v)\mathbf{n} \quad (4.36)$$

biçiminde tanımlanabilir. Burada, $d_1(u, v)$, $d_2(u, v)$ ve $d_3(u, v)$ ifadeleri u ve v değişkenlerinin fonksiyonlarıdır. Ofset yönü ve uzaklığı $d_1\mathbf{e}_1$, $d_2\mathbf{e}_2$ ve $d_3\mathbf{n}$ ile belirlenir.

Genelleştirilmiş ofset yüzeyini (Blaschke, 1950) deki denklemi kullanarak

$$\mathbf{r}^*(u, v) = \mathbf{r}(u, v) + \delta\mathbf{r}(u, v) \quad (4.37)$$

şeklinde ifade edebiliriz. Burada;

$$\delta\mathbf{r} = d_1\mathbf{e}_1 + d_2\mathbf{e}_2 + d_3\mathbf{n} \quad (4.38)$$

ve

$$d_1 = \varepsilon\bar{d}_1(u, v), \quad d_2 = \varepsilon\bar{d}_2(u, v), \quad d_3 = \varepsilon\bar{d}_3(u, v) \quad (4.39)$$

dir. Genelleştirilmiş ofset yüzeyi $\varepsilon \rightarrow 0$ için $\mathbf{r}(u, v)$ orjinal yüzeyine ulaşır ve $\varepsilon = 1$ için (4.36) denkleminde verildiği gibi olur.

İlk olarak, $\mathbf{r}(u, v)$ regüler yüzeyinin çok iyi bilinen birinci ve ikinci temel formlarının büyüklükleri, Gauss ve ortalama eğrilikleri sırayla

$$\begin{aligned} E = \mathbf{r}_u^2 &= A_1^2, & F = \mathbf{r}_u \mathbf{r}_v, & G = \mathbf{r}_v^2 = A_2^2 \\ D &= \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_{uv}, & D' &= \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_{uv}, & D'' &= \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_{vv} \end{aligned} \quad (4.40)$$

$$K = \frac{D D'' - D'^2}{EG - F^2} \text{ ve } 2H = \frac{E D'' - 2F D' + GD}{EG - F^2} \quad (4.41)$$

olarak bulunur (Kreyszig, 1991). Benzer şekilde, $\mathbf{r}^*(u, v)$ genelleştirilmiş ofset yüzeyinin birinci ve ikinci temel form büyüklükleri, Gauss ve ortalama eğriliklerini belirleyebiliriz. $\mathbf{r}^*(u, v)$ genelleştirilmiş ofset yüzeyinin kısmi türevleri

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^*_u(u, v) &= \mathbf{r}_u + \bar{d}_{1u}\mathbf{e}_1 + \bar{d}_1\mathbf{e}_{1u} + \bar{d}_{2u}\mathbf{e}_2 + \bar{d}_2\mathbf{e}_{2u} + \bar{d}_{3u}\mathbf{n} + \bar{d}_3\mathbf{n}_u \\ &= A_1\mathbf{e}_1 + \varepsilon \left[\left(\bar{d}_{1u} + \frac{\bar{d}_2 A_{1v}}{A_2} - \frac{\bar{d}_3 A_1}{R_1} \right) \mathbf{e}_1 + \left(\bar{d}_{2u} - \frac{\bar{d}_1 A_{1v}}{A_2} \right) \mathbf{e}_2 + \left(\bar{d}_{3u} - \frac{\bar{d}_1 A_1}{R_1} \right) \mathbf{n} \right] \\ &\triangleq A_1\mathbf{e}_1 + \varepsilon \bar{B}_1\mathbf{e}_1 + \varepsilon \bar{B}_2\mathbf{e}_1 + \varepsilon \bar{B}_3\mathbf{n} \end{aligned} \quad (4.42)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^*_v(u, v) &= \mathbf{r}_v + \varepsilon (\bar{d}_{1v}\mathbf{e}_1 + \bar{d}_1\mathbf{e}_{1v} + \bar{d}_{2v}\mathbf{e}_2 + \bar{d}_2\mathbf{e}_{2v} + \bar{d}_{3v}\mathbf{n} + \bar{d}_3\mathbf{n}_v) \\ &= A_2\mathbf{e}_2 + \left[\varepsilon \left(\bar{d}_{1v} - \frac{\bar{d}_2 A_{2u}}{A_1} \right) \mathbf{e}_1 + \left(\bar{d}_{2v} + \frac{\bar{d}_1 A_{2u}}{A_1} - \frac{\bar{d}_3 A_2}{R_2} \right) \mathbf{e}_2 + \left(\bar{d}_{3v} + \frac{\bar{d}_2 A_2}{R_2} \right) \mathbf{n} \right] \\ &\triangleq A_2\mathbf{e}_2 + \varepsilon \bar{C}_1\mathbf{e}_1 + \varepsilon \bar{C}_2\mathbf{e}_1 + \varepsilon \bar{C}_3\mathbf{n} \end{aligned} \quad (4.43)$$

şeklinde bulunur. Burada, $\mathbf{r}_u$, $\bar{d}_{1u}$, $\bar{d}_{2u}$, A_{2u} , $\mathbf{e}_{1u}$, $\mathbf{e}_{2u}$, $\mathbf{n}_u$ değerleri $\mathbf{r}$, $\bar{d}_1$, $\bar{d}_2$, A_2 , $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{n}$ nin u parametresine göre karşılık gelen kısmi türevleri; $\mathbf{r}_v$, $\bar{d}_{1v}$, $\bar{d}_{2v}$, A_{2v} , $\mathbf{e}_{1v}$, $\mathbf{e}_{2v}$, $\mathbf{n}_v$ ise $\mathbf{r}$, $\bar{d}_1$, $\bar{d}_2$, A_2 , $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{n}$ nin v parametresine göre karşılık gelen kısmi türevleri ve ayrıca R_1 , R_2 değerleri de asal eğrilik yarıçaplarıdır. Diğer taraftan, ikinci mertebeden kısmi türevleri,

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^*_{uu}(u, v) &= A_{1u}\mathbf{e}_1 + A_1\mathbf{e}_{1u} + \varepsilon (\bar{B}_{1u}\mathbf{e}_1 + \bar{B}_1\mathbf{e}_{1u} + \bar{B}_{2u}\mathbf{e}_2 + \bar{B}_2\mathbf{e}_{2u} + \bar{B}_{3u}\mathbf{n} + \bar{B}_3\mathbf{n}_u) \\ &= A_{1u}\mathbf{e}_1 - \frac{A_{1v}}{A_2}\mathbf{e}_2 + \frac{A_1}{R_2}\mathbf{n} \end{aligned} \quad (4.44)$$

$$+ \varepsilon \left[\left(\bar{B}_{1u} + \bar{B}_2 \frac{A_{1v}}{A_2} - \bar{B}_3 \frac{A_1}{R_1} \right) \mathbf{e}_1 + \left(\bar{B}_{2u} - \bar{B}_1 \frac{A_{1v}}{A_2} \right) \mathbf{e}_2 + \left(\bar{B}_{3u} - \bar{B}_1 \frac{A_1}{R_1} \right) \mathbf{n} \right]$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^*_{uv}(u, v) &= \mathbf{r}^*_{vu}(u, v) = A_{1v}\mathbf{e}_1 + A_1\mathbf{e}_{1v} \\ &+ \varepsilon (\bar{B}_{1v}\mathbf{e}_1 + \bar{B}_1\mathbf{e}_{1v} + \bar{B}_{2v}\mathbf{e}_2 + \bar{B}_2\mathbf{e}_{2v} + \bar{B}_{3v}\mathbf{n} + \bar{B}_3\mathbf{n}_v) \\ &= A_{1v}\mathbf{e}_1 + A_{2u}\mathbf{e}_2 \end{aligned} \quad (4.45)$$

$$+ \varepsilon \left[\left(\bar{B}_{1v} - \bar{B}_2 \frac{A_{2u}}{A_1} \right) \mathbf{e}_1 + \left(\bar{B}_{2v} + \bar{B}_1 \frac{A_{2u}}{A_1} - \bar{B}_3 \frac{A_2}{R_2} \right) \mathbf{e}_2 + \left(\bar{B}_{3v} + \bar{B}_2 \frac{A_2}{R_2} \right) \mathbf{n} \right]$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_{vv}^*(u, v) &= \mathbf{r}_{vv} + \varepsilon(\bar{C}_{1v}\mathbf{e}_1 + \bar{C}_1\mathbf{e}_{1v} + \bar{C}_{2v}\mathbf{e}_2 + \bar{C}_2\mathbf{e}_{2v} + \bar{C}_{3v}\mathbf{n} + \bar{C}_3\mathbf{n}_v) \\
&= -\frac{A_2A_{2u}}{A_1}\mathbf{e}_1 + A_{2v}\mathbf{e}_2 + \frac{A_2^2}{R_2}\mathbf{n}
\end{aligned} \tag{4.46}$$

$$+ \varepsilon \left[\left(\bar{C}_{1v} - \bar{C}_2 \frac{A_{2u}}{A_1} \right) \mathbf{e}_1 + \left(\bar{C}_{2v} + \bar{C}_1 \frac{A_{2u}}{A_1} - \bar{C}_3 \frac{A_2}{R_2} \right) \mathbf{e}_2 + \left(\bar{C}_{3v} + \bar{C}_2 \frac{A_2}{R_2} \right) \mathbf{n} \right]$$

olarak bulunur. Böylece $\mathbf{r}^*(u, v)$ genelleştirilmiş ofset yüzeyinin birinci temel form büyüklükleri, birim teğet vektörleri ve birim normal vektörü

$$\begin{aligned}
E^* &= \mathbf{r}_u^{*2} = E(= A_1^2) + 2\varepsilon A_1 \bar{B}_1 + \varepsilon^2(\bar{B}_1^2 + \bar{B}_2^2 + \bar{B}_3^2) \\
F^* &= \mathbf{r}_u^* \cdot \mathbf{r}_v^* = F(= \mathbf{r}_u \mathbf{r}_v) + \varepsilon(A_1 \bar{C}_1 + \bar{B}_2 A_2) + \varepsilon^2(\bar{B}_1 \bar{C}_1 + \bar{B}_2 \bar{C}_2 + \bar{B}_3 \bar{C}_3) \\
G^* &= \mathbf{r}_v^{*2} = G(= A_2^2) + 2\varepsilon A_2 \bar{C}_2 + \varepsilon^2(\bar{C}_1^2 + \bar{C}_2^2 + \bar{C}_3^2)
\end{aligned}$$

ve

$$\mathbf{e}_1^* = \frac{\mathbf{r}_u^*(u, v)}{|\mathbf{r}_u^*(u, v)|} = \frac{A_1\mathbf{e}_1 + \varepsilon(\bar{B}_1\mathbf{e}_1 + \bar{B}_2\mathbf{e}_1 + \bar{B}_3\mathbf{n})}{\sqrt{E^*}} \tag{4.47}$$

$$\mathbf{e}_2^* = \frac{\mathbf{r}_v^*(u, v)}{|\mathbf{r}_v^*(u, v)|} = \frac{A_2\mathbf{e}_2 + \varepsilon(\bar{C}_1\mathbf{e}_1 + \bar{C}_2\mathbf{e}_1 + \bar{C}_3\mathbf{n})}{\sqrt{G^*}} \tag{4.48}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{n}^* &= \frac{\mathbf{r}_u^* \times \mathbf{r}_v^*}{|\mathbf{r}_u^* \times \mathbf{r}_v^*|} \\
&= \frac{A_1A_2}{\sqrt{E^*G^* - F^{*2}}}\mathbf{n} + \varepsilon \left[-\frac{A_2\bar{B}_3}{\sqrt{E^*G^* - F^{*2}}}\mathbf{e}_1 + \frac{A_1\bar{C}_3}{\sqrt{E^*G^* - F^{*2}}}\mathbf{e}_2 + \frac{A_2\bar{C}_2 + A_2\bar{B}_1}{\sqrt{E^*G^* - F^{*2}}}\mathbf{n} \right] \\
&+ \varepsilon^2 \left[\frac{\bar{B}_2\bar{C}_3 - \bar{B}_3\bar{C}_2}{\sqrt{E^*G^* - F^{*2}}}\mathbf{e}_1 + \frac{\bar{B}_1\bar{C}_3 - \bar{B}_3\bar{C}_1}{\sqrt{E^*G^* - F^{*2}}}\mathbf{e}_2 + \frac{\bar{B}_1\bar{C}_2 - \bar{B}_2\bar{C}_1}{\sqrt{E^*G^* - F^{*2}}}\mathbf{n} \right] \\
&\triangleq \frac{A_1A_2}{\sqrt{E^*G^* - F^{*2}}}\mathbf{n} + \varepsilon(\bar{M}_{11}\mathbf{e}_1 + \bar{M}_{21}\mathbf{e}_2 + \bar{M}_{31}\mathbf{n}) + \varepsilon^2(\bar{M}_{12}\mathbf{e}_1 + \bar{M}_{22}\mathbf{e}_2 + \bar{M}_{32}\mathbf{n})
\end{aligned} \tag{4.49}$$

biçiminde yazılabilir. Genelleştirilmiş ofset yüzeyi $\mathbf{r}^*(u, v)$ nin ikinci temel form büyüklükleri;

$$\begin{aligned}
D^* &= \mathbf{n}^* \mathbf{r}_{uu}^* = \frac{A_1^2 A_2}{\sqrt{E^* G^* - F^{*2} R_1}} + \varepsilon \frac{A_1 A_2}{\sqrt{E^* G^* - F^{*2}}} \left(\bar{B}_{3u} + \bar{B}_1 \frac{A_1}{R_1} \right) \\
&+ (\bar{M}_{11} + \varepsilon \bar{M}_{12}) \left[\varepsilon A_{1u} + \varepsilon^2 \left(\bar{B}_{1u} + \bar{B}_2 \frac{A_{1v}}{A_2} - \bar{B}_3 \frac{A_1}{R_1} \right) \right] \\
&+ (\bar{M}_{21} + \varepsilon \bar{M}_{22}) \left[-\varepsilon \frac{A_{1v}}{A_2} + \varepsilon^2 \left(\bar{B}_{2u} - \bar{B}_1 \frac{A_{1v}}{A_2} \right) \right] \\
&+ (\bar{M}_{31} + \varepsilon \bar{M}_{32}) \left[\varepsilon \frac{A_1}{R_1} + \varepsilon^2 \left(\bar{B}_{3u} + \bar{B}_1 \frac{A_1}{R_1} \right) \right]
\end{aligned} \tag{4.50}$$

$$\begin{aligned}
D^{*'} &= \mathbf{n}^* \mathbf{r}_{uv}^* = \varepsilon \frac{A_1 A_2}{\sqrt{E^* G^* - F^{*2}}} \left(\bar{B}_{3v} + \bar{B}_2 \frac{A_2}{R_1} \right) \\
&+ (\bar{M}_{21} + \varepsilon \bar{M}_{22}) \left[\varepsilon A_{2u} + \varepsilon^2 \left(\bar{B}_{2v} + \bar{B}_1 \frac{A_{2u}}{A_1} - \bar{B}_3 \frac{A_2}{R_2} \right) \right] \\
&+ (\bar{M}_{21} + \varepsilon \bar{M}_{22}) \left[\varepsilon A_{2u} + \varepsilon^2 \left(\bar{B}_{2v} + \bar{B}_1 \frac{A_{2u}}{A_1} - \bar{B}_3 \frac{A_2}{R_2} \right) \right] \\
&+ (\bar{M}_{31} + \varepsilon \bar{M}_{32}) \left[\varepsilon^2 \left(\bar{B}_{3v} + \bar{B}_2 \frac{A_2}{R_2} \right) \right]
\end{aligned} \tag{4.51}$$

$$\begin{aligned}
D^{*''} &= \mathbf{n}^* \mathbf{r}_{uu}^* = \frac{A_1 A_2^3}{\sqrt{E^* G^* - F^{*2} R_2}} + \varepsilon \frac{A_1 A_2}{\sqrt{E^* G^* - F^{*2}}} \left(\bar{C}_{3v} + \bar{C}_2 \frac{A_2}{R_2} \right) \\
&+ (\bar{M}_{11} + \varepsilon \bar{M}_{12}) \left[\varepsilon \left(-\frac{A_2 A_{2u}}{A_1} \right) + \varepsilon^2 \left(\bar{C}_{1v} + \bar{C}_2 \frac{A_{2u}}{A_1} \right) \right] \\
&+ (\bar{M}_{21} + \varepsilon \bar{M}_{22}) \left[\varepsilon A_{2v} + \varepsilon^2 \left(\bar{C}_{2v} + \bar{C}_1 \frac{A_{2u}}{A_1} - \bar{C}_3 \frac{A_2}{R_2} \right) \right] \\
&+ (\bar{M}_{31} + \varepsilon \bar{M}_{32}) \left[\varepsilon^2 \left(\bar{C}_{3v} + \bar{C}_2 \frac{A_2}{R_2} \right) + \varepsilon \frac{A_2^2}{R_2} \right]
\end{aligned} \tag{4.52}$$

denklemleriyle ifade edilebilir ve ayrıca $\mathbf{r}^*(u, v)$ genelleştirilmiş ofset yüzeyinin Gauss eğriliği de

$$K = \frac{D^{*''} D^* - (D^{*'})^2}{E^* G^* - F^{*2}} \tag{4.53}$$

olarak yazılabilir.

TEOREM 4.3.1: $\mathbf{r}^*(u, v) = \mathbf{r}(u, v) + d_1(u, v)\mathbf{e}_1 + d_2(u, v)\mathbf{e}_2 + d_3(u, v)\mathbf{n}$ şeklinde verilen genelleştirilmiş ofset yüzeyi

$$\mathbf{r}^*(u, v) = \mathbf{r}_1(u, v) + d\mathbf{n}_1 \quad (4.54)$$

denklemini kullanarak standart ofset şeklinde yazılabilir. Burada, $\mathbf{r}_1(u, v)$ yeni bir regüler parametrik yüzey, d sabit ve $\mathbf{n}_1$ ise $\mathbf{r}_1(u, v)$ nin birim normal vektörüdür (Chen and Lin, 2014).

Bu durumda (4.54) de verilen standart ofset yüzeyi, $d = \varepsilon\bar{d}$ ilişkisi kullanılarak

$$\mathbf{r}^*(u, v) = \mathbf{r}_1(u, v) + \varepsilon\bar{d}\mathbf{n}_1 \quad (4.55)$$

biçiminde ifade edilebilir (Blaschke, 1950).

İspat: Genelleştirilmiş ofset yüzeyi

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^* &= \mathbf{r} + d_1\mathbf{e}_1 + d_2\mathbf{e}_2 + d_3\mathbf{n} \\ &= (\mathbf{r} + M\mathbf{e}_1 + N\mathbf{e}_2 + P\mathbf{n}) + (d_1 - M)\mathbf{e}_1 + (d_2 - N)\mathbf{e}_2 + (d_3 - P)\mathbf{n} \\ &\triangleq \mathbf{r}_1(u, v) + \varepsilon d\mathbf{n}_1 \end{aligned} \quad (4.56)$$

denkleminle ifade edilebilir. Burada, M , N ve P değerleri u ve v nin fonksiyonlarıdır. Ayrıca,

$$\begin{aligned} d_1 &= \varepsilon\bar{d}_1(u, v), \quad d_2 = \varepsilon\bar{d}_2(u, v), \quad d_3 = \varepsilon\bar{d}_3(u, v) \\ M &= \varepsilon\bar{M}(u, v), \quad N = \varepsilon\bar{N}(u, v), \quad P = \varepsilon\bar{P}(u, v) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} d &= \varepsilon\sqrt{(\bar{d}_1 - \bar{M})^2 + (\bar{d}_2 - \bar{M})^2 + (\bar{d}_3 - \bar{P})^2} = \varepsilon\bar{d} \\ \mathbf{n}_1 &= \varepsilon\left[\frac{(\bar{d}_1 - \bar{M})}{d}\mathbf{e}_1 + \frac{(\bar{d}_2 - \bar{M})}{d}\mathbf{e}_2 + \frac{(\bar{d}_3 - \bar{P})}{d}\mathbf{n}\right] \end{aligned} \quad (4.57)$$

biçiminde ifade edilebilir. Ardından, $\mathbf{r}_1(u, v)$ yüzeyinin parametrik kısmi türevlerini

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{1u}(u, v) &= A_1 \mathbf{e}_1 \\ &+ \varepsilon \left[\left(\bar{M}_u + \bar{N} \frac{A_{1v}}{A_2} + \bar{P} \frac{A_1}{R_1} \right) \mathbf{e}_1 + \left(\bar{N}_u - \bar{M} \frac{A_{1v}}{A_2} \right) \mathbf{e}_2 + \left(\bar{P}_u + \bar{M} \frac{A_1}{R_1} \right) \mathbf{n} \right] \end{aligned} \quad (4.58)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{1v}(u, v) &= A_2 \mathbf{e}_2 \\ &+ \varepsilon \left[\left(\bar{M}_v - \bar{N} \frac{A_{2u}}{A_1} \right) \mathbf{e}_1 + \left(\bar{N}_v + \bar{M} \frac{A_{2u}}{A_1} - \bar{P} \frac{A_2}{R_2} \right) \mathbf{e}_2 + \left(\bar{P}_v + \bar{M} \frac{A_2}{R_2} \right) \mathbf{n} \right] \end{aligned} \quad (4.59)$$

denklemleriyle bulabiliriz. Burada, $\bar{M}_u$, $\bar{M}_v$, $\bar{N}_u$, $\bar{N}_v$, $\bar{P}_u$ ve $\bar{P}_v$ değerleri ilgili kısmi türevlerdir. Denklem (4.56) daki ilişkiyi sağlamak için aşağıdaki iki koşulun sağlanması gerekmektedir.

(i) $\mathbf{n}_1$ birim normal vektörü, $\mathbf{r}_1$ yüzeyinin birim normal vektörü olmalıdır. Yani;

$$\begin{aligned} &\varepsilon A_1 (\bar{d}_1 - \bar{M}) \\ &+ \varepsilon^2 \left[\left(\bar{M}_u + \bar{N} \frac{A_{1v}}{R_1} - \bar{P} \frac{A_1}{R_1} \right) (\bar{d}_1 - \bar{M}) + \left(\bar{N}_u - \bar{M} \frac{A_{1v}}{A_2} \right) (\bar{d}_2 - \bar{N}) \right. \\ &\left. + \left(\bar{P}_u + \bar{M} \frac{A_1}{R_1} \right) (\bar{d}_3 - \bar{P}) \right] = 0, \end{aligned} \quad (4.60)$$

ve

$$\begin{aligned} &\varepsilon A_2 (\bar{d}_2 - \bar{N}) \\ &+ \varepsilon^2 \left[\left(\bar{M}_v - \bar{N} \frac{A_{2u}}{A_1} \right) (\bar{d}_1 - \bar{M}) + \left(\bar{N}_v + \bar{M} \frac{A_{2u}}{A_1} - \bar{P} \frac{A_2}{R_2} \right) (\bar{d}_2 - \bar{N}) \right. \\ &\left. + \left(\bar{P}_v + \bar{N} \frac{A_2}{R_2} \right) (\bar{d}_3 - \bar{P}) \right] = 0, \end{aligned} \quad (4.61)$$

şeklindedir.

(ii) d sabittir. Bu,

$$\varepsilon^2 \left[(\bar{d}_1 - \bar{M})^2 + (\bar{d}_2 - \bar{N})^2 + (\bar{d}_3 - \bar{P})^2 \right] = \text{sabit} \quad (4.62)$$

biçiminde ifade edilir. O halde,

$$\varepsilon^2[(\bar{d}_1 - \bar{M})(\bar{d}_{1u} - \bar{M}_u) + (\bar{d}_2 - \bar{N})(\bar{d}_{2u} - \bar{N}_u) + (\bar{d}_3 - \bar{P})(\bar{d}_{3u} - \bar{P}_u)] = 0 \quad (4.63)$$

$$\varepsilon^2[(\bar{d}_1 - \bar{M})(\bar{d}_{1v} - \bar{M}_v) + (\bar{d}_2 - \bar{N})(\bar{d}_{2v} - \bar{N}_v) + (\bar{d}_3 - \bar{P})(\bar{d}_{3v} - \bar{P}_v)] = 0 \quad (4.64)$$

olur. $\bar{M}$, $\bar{N}$, ve $\bar{P}$ değerlerini (4.60) ve (4.63) denklemlerini kullanarak

$$\begin{aligned} & \varepsilon A_1(\bar{d}_1 - \bar{M}) \\ & + \varepsilon^2 \left(-\bar{d}_{1u} - \frac{A_{1v}\bar{d}_2}{A_2} + \frac{A_1\bar{d}_3}{R_1} \right) \bar{M} + \varepsilon^2 \left(-\bar{d}_{2u} - \frac{A_{1v}\bar{d}_1}{A_2} \right) \bar{N} \\ & + \varepsilon^2 \left(-\bar{d}_{3u} - \frac{A_1\bar{d}_1}{R_1} \right) \bar{P} + \varepsilon^2(\bar{d}_{1u}\bar{d}_1 + \bar{d}_{2u}\bar{d}_2 + \bar{d}_{3u}\bar{d}_3) \\ & \triangleq \varepsilon A_1(\bar{d}_1 - \bar{M}) + \varepsilon^2[\alpha_1\bar{M} + \beta_1\bar{N} + \gamma_1\bar{P} + \omega_1] \end{aligned} \quad (4.65)$$

biçiminde yazabiliriz. (4.61) ve (4.64) denklemlerinden

$$\begin{aligned} & \varepsilon A_2(\bar{d}_2 - \bar{N}) \\ & + \varepsilon^2 \left(-\bar{d}_{1v} + \frac{A_{2u}\bar{d}_2}{A_1} \right) \bar{M} + \varepsilon^2 \left(-\bar{d}_{2v} - \frac{A_{2u}\bar{d}_1}{A_1} + \frac{A_2\bar{d}_3}{R_2} \right) \bar{N} \\ & + \varepsilon^2 \left(-\bar{d}_{3v} - \frac{A_2\bar{d}_2}{R_2} \right) + \varepsilon^2(\bar{d}_{1v}\bar{d}_1 + \bar{d}_{2v}\bar{d}_2 + \bar{d}_{3v}\bar{d}_3) \\ & \triangleq \varepsilon A_2(\bar{d}_2 - \bar{N}) + \varepsilon^2[\alpha_2\bar{M} + \beta_2\bar{N} + \gamma_2\bar{P} + \omega_2] = 0 \end{aligned} \quad (4.66)$$

yazılabilir. Şimdi,

$$\begin{aligned} & (\varepsilon^2\alpha_1 - \varepsilon A_1)(\varepsilon^2\beta_1 - \varepsilon A_2) - \varepsilon^4\alpha_2\beta_1 \triangleq \tilde{\alpha} \\ & \varepsilon^2\gamma_1(\varepsilon^2\beta_2 - \varepsilon A_2) - \varepsilon^4\beta_1\gamma_2 \triangleq \tilde{\beta} \\ & -\varepsilon^2\gamma_2(\varepsilon^2\gamma_1 - \varepsilon A_1) + \varepsilon^4\alpha_2\gamma_1 \triangleq \tilde{\gamma} \end{aligned} \quad (4.67)$$

değerlerini alalım. Nihayet,

$$\begin{aligned}
\bar{M} &= \bar{d}_1 - \frac{\tilde{B}\tilde{C}}{\sqrt{\tilde{\alpha}^2 + \tilde{\beta}^2 + \tilde{\gamma}^2}} \\
\bar{N} &= \bar{d}_2 + \frac{\tilde{\gamma}\tilde{C}}{\sqrt{\tilde{\alpha}^2 + \tilde{\beta}^2 + \tilde{\gamma}^2}} \\
\bar{P} &= \bar{d}_3 + \frac{\tilde{\alpha}\tilde{C}}{\sqrt{\tilde{\alpha}^2 + \tilde{\beta}^2 + \tilde{\gamma}^2}}
\end{aligned} \tag{4.68}$$

denklemleri elde edilir, burada $\tilde{C}$ keyfi bir sabittir. Yukarıdaki ifadeden görüldüğü gibi, $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$ ve $\tilde{\gamma}$ değerlerinin tümü sıfır olamaz. Bu yüzden,

$$\begin{aligned}
d &= \sqrt{(\bar{d}_1 - \bar{M})^2 + (\bar{d}_2 - \bar{N})^2 + (\bar{d}_3 - \bar{P})^2} = \tilde{C} \\
\mathbf{n}_1 &= \frac{\tilde{B}}{\sqrt{\tilde{\alpha}^2 + \tilde{\beta}^2 + \tilde{\gamma}^2}} \mathbf{e}_1 - \frac{\tilde{\gamma}}{\sqrt{\tilde{\alpha}^2 + \tilde{\beta}^2 + \tilde{\gamma}^2}} \mathbf{e}_2 - \frac{\tilde{\alpha}}{\sqrt{\tilde{\alpha}^2 + \tilde{\beta}^2 + \tilde{\gamma}^2}} \mathbf{n}
\end{aligned} \tag{4.69}$$

olarak yazılabilir. Böylece, $\bar{M}$, $\bar{N}$ ve $\bar{P}$ fonksiyonları genelleştirilmiş $\mathbf{r}^*(u, v) = \mathbf{r}(u, v) + d_1(u, v)\mathbf{e}_1 + d_2(u, v)\mathbf{e}_2 + d_3(u, v)\mathbf{n}$ ofset yüzeyini ifade eder. $\mathbf{r}_1(u, v)$ ve dolayısıyla $\mathbf{r}^*(u, v) = \mathbf{r}_1(u, v) + d\mathbf{n}_1$, $d = sbt$, yüzeyi $\mathbf{r}_1(u, v)$ nin standart ofseti olarak tanımlanabilir.

TANIM 4.3.2: Kapalı konveks bir yüzey, daima regüler ve analitik, dahası her noktasında pozitif eğriliğe $K > 0$ sahipse bu yüzey oval yüzey olarak isimlendirilir.

TEOREM 4.3.2: Sabit ortalama eğriliğe sahip biricik oval yüzeyler kürelerdir.

Paralel yüzeyler arasında sabit ortalama eğriliğe sahip tek bir yüzey vardır. Sırayla, bunlar sabit ortalama eğriliğe sahip bir yüzeye paraleldir ve tersi de doğrudur.

Eğer, $S = \int H do$ ortalama eğrilik integrali gözönüne alınırsa, o zaman kapalı yüzeyler için mesela (O) yüzölçümü olan

$$S^2 - 4\pi O$$

değeri paralel yüzeye geçişte invariant kalır.

Eğer paralel bir yüzey, $\mathbf{r}(u, v)$ yüzeyinin yüzey normalleri üzerinde sabit d uzaklığı alınmasıyla $\mathbf{r}^*(u, v) = \mathbf{r}(u, v) + d\mathbf{n}$ biçiminde ifade edilirse (K^*) eğriliği ve (H^*) ortalama eğriliği

$$K^* = \frac{K}{1-2dH+d^2K}, \text{ ve } H^* = \frac{H-dK}{1-2dH+d^2K} \quad (4.70)$$

biçiminde verilir.

Ko-normaller ve asal eğrilik yarıçapları arasında

$$\mathbf{n}^* = \mathbf{n}, \quad R_1^* = R_1 - d, \quad R_2^* = R_2 - d \quad (4.71)$$

ilişkileri mevcuttur (Blaschke, 1950). $\mathbf{r}(u, v)$ yüzeyi, $K = 1$ özelliğine sahip olsun ve $\mathbf{n}$ yüzey normalleri üzerinde birim vektörler olsun. Bu durumda, $\mathbf{r}^* = \mathbf{r} - \mathbf{n}$ paralel yüzeyi $2H^* = 1$ biçiminde bir ortalama eğriliğe sahiptir.

Burada, $d = \varepsilon \bar{d}$ ile $\mathbf{r}^*(u, v) = \mathbf{r}_1(u, v) + d\mathbf{n}_1$ standart ofset yüzeyi alındığında $d = \varepsilon \bar{d} = sbt$ olduğundan $\mathbf{r}^*(u, v)$ standart ofset yüzeyinin (K^*) eğriliği ve (H^*) ortalama eğriliği

$$K^* = \frac{K_1}{1-2\varepsilon dH_1 + \varepsilon^2 \bar{d}^2 K_1} \text{ ve } H^* = \frac{H_1 - \varepsilon \bar{d} K_1}{1-2\varepsilon dH_1 + \varepsilon^2 \bar{d}^2 K_1} \quad (4.72)$$

denklemleri ile ifade edilebilir. Ayrıca, ko-normaller ve asal eğrilik yarıçapları arasında

$$\mathbf{n}^* = \mathbf{n}_1, \quad R_1^* = R_1 - \varepsilon \bar{d}, \quad R_2^* = R_2 - \varepsilon \bar{d} \quad (4.73)$$

ilişkileri vardır. Eğer $\varepsilon = -1$ olarak alırsak, $d = \varepsilon \bar{d} = sbt$ olduğundan standart ofset yüzey;

$$\mathbf{r}^*(u, v) = \mathbf{r}_1(u, v) - \mathbf{n}_1 \quad (4.74)$$

biçiminde yazılabilir. Bu yüzey $2H^* = 1$ ortalama eğriliğine sahiptir ve

$$K^* = \frac{K_1}{1 + 2H_1 + K_1} \text{ ve } H^* = \frac{H_1}{1 + 2H_1 + K_1} + K_1 = \frac{1}{2} \quad (4.75)$$

denklemleri yazılabilir. Eğer $\mathbf{r}_1(u, v)$ yüzeyi minimal yüzey olursa, $H_1 = 0$ olduğundan

$$K^* = \frac{1}{3}, \quad \text{ve } H^* = K_1 = \frac{1}{2} \quad (4.76)$$

denklemleri elde edilir.

4.4 Ofset Yüzeylerin Birinci Varyasyonu

Bu bölümde, orjinal yüzeyin ofset yüzeyi elde edildiğinde yüzölçümün nasıl değiştiğini belirleyelim. $\mathbf{r}_1(u, v)$ yüzeyi orjinal yüzey olsun. Yüzey normallerinin uzunluklarını

$$d(u, v) = \varepsilon \bar{d}(u, v) \quad (4.77)$$

biçiminde alırsak orjinal yüzeyin standart ofset yüzeyini (4.54) denklemini kullanarak

$$\mathbf{r}^*(u, v) = \mathbf{r}_1(u, v) + d\mathbf{n}_1 \quad (4.78)$$

olarak elde ederiz. Burada, $\mathbf{n}_1$ vektörü $\mathbf{r}_1(u, v)$ orjinal yüzeyinin yüzey normalidir. Standart ofset yüzeyi, $\varepsilon \rightarrow 0$ için orjinal yüzeye yaklaşır ve $\varepsilon = 1$ için (4.54) denkleminde verildiği gibi olur. (4.78) den türev alarak

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_u^* &= \mathbf{r}_{1u} + d\mathbf{n}_u + d\mathbf{n}_u \\ \mathbf{r}_v^* &= \mathbf{r}_{1v} + d\mathbf{n}_v + d\mathbf{n}_v \\ \mathbf{r}_{uu}^* &= \mathbf{r}_{1uu} + d\mathbf{n}_{uu} + d\mathbf{n}_{uu} + 2d_u\mathbf{n}_u \\ \mathbf{r}_{uv}^* &= \mathbf{r}_{1uv} + d\mathbf{n}_{uv} + d_v\mathbf{n}_u + d\mathbf{n}_{vv} + d_u\mathbf{n}_v \\ \mathbf{r}_{vv}^* &= \mathbf{r}_{1vv} + d\mathbf{n}_{vv} + d\mathbf{n}_{vv} + 2d_v\mathbf{n}_v \end{aligned} \quad (4.79)$$

elde edilir ve $\mathbf{r}^*(u, v)$ standart ofset yüzeyinin birinci esas formunun terimleri, ε na göre ikinci derece terimleri ihmal ederek

$$E^* = \mathbf{r}_u^{*2}, \quad F^* = \mathbf{r}_u^* \mathbf{r}_v^*, \quad G^* = \mathbf{r}_v^{*2}$$

olarak bulunur. Bu durumda, $\mathbf{r}_1(u, v)$ orjinal yüzeyinin birinci ve ikinci esas formlarının terimlerini kullanarak

$$\begin{cases} E^* = E - 2dD \\ F^* = F - 2dD' \\ G^* = G - 2dD'' \end{cases} \quad (4.80)$$

ve

$$\begin{cases} D^* = D - (KE - 2HD)d + d_{11} \\ D^{*'} = D' + (KF - 2HD')d + d_{12} \\ D^{*''} = D'' + (KG - 2HD'')d + d_{22} \end{cases} \quad (4.81)$$

bağıntılarını elde edebiliriz, burada Christoffel sembollerini kullanarak d_{11} , d_{12} ve d_{22} değerlerini

$$\begin{cases} d_{11} = d_{uu} - \begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{Bmatrix} d_u - \begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{Bmatrix} d_v \\ d_{12} = d_{uv} - \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{Bmatrix} d_u - \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{Bmatrix} d_v \\ d_{22} = d_{vv} - \begin{Bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{Bmatrix} d_u - \begin{Bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{Bmatrix} d_v \end{cases}$$

olarak yazabiliriz. Ayrıca,

$$W^{*2} = E^* G^* - F^{*2}$$

için,

$$W^{*2} = EG - F^2 - 2d(ED'' - 2FD' + GD)$$

ve

$$2H = \frac{ED'' - 2FD' + GD}{EG - F^2}$$

denklemlerini kullanarak

$$W^* = W(1 - 2dH) \quad (4.82)$$

bağıntısını buluruz. Burada, H değeri $\mathbf{r}_1(u, v)$ orjinal yüzeyinin ortalama eğriliğidir.

$\mathbf{r}^*(u, v)$ standart ofset yüzeyinin yüzölçümü (4.82) denkleminde

$$\iint W^* dudv = \iint W dudv - 2 \iint dHW dudv \quad (4.83)$$

biçiminde yazılabilir. Böylece, orjinal yüzey ve standart ofset yüzeylerinin birinci varyasyonu d yerine δd alınarak

$$\delta O = - \iint \delta d \cdot 2 \cdot H \cdot W dudv$$

ya da

$$\delta O = - \iint \delta d \cdot 2 \cdot H do \quad (4.84)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada, do ifadesi $\mathbf{r}_1(u, v)$ orjinal yüzeyinin yüzey elemanıdır.

Ayrıca, orjinal yüzey ve standart ofset yüzeyi arasındaki Gauss ve ortalama eğriliklerinin birinci varyasyonları

$$\begin{cases} K^* = K + 2HKd + \frac{Dd_{22} - 2D'd_{12} + D''d_{11}}{EG - F^2} + \dots \\ H^* = H + (2H^2 - K)d + \frac{1}{2} \frac{Ed_{22} - 2Fd_{12} + Gd_{11}}{EG - F^2} + \dots \end{cases} \quad (4.85)$$

şeklinde yazılabilir (Nutbourne and Martin, 1988).

4.5 Ofset Yüzeyin Yüzölçümünün Birinci Varyasyonu ile ilgili Gauss Formülü

Eğer $\mathbf{r}(u, v)$ orjinal yüzeyindeki eğrilik çizgileri parametre eğrileri olarak kabul edilirse, Christoffel sembolleri kullanılarak

$$\begin{cases} \mathbf{r}_{uu} = \frac{E_u}{2E} \mathbf{r}_u - \frac{E_v}{2G} \mathbf{r}_v + D \mathbf{n} \\ \mathbf{r}_{uv} = \frac{E_v}{2E} \mathbf{r}_u + \frac{G_u}{2G} \mathbf{r}_v + D' \mathbf{n} \\ \mathbf{r}_{vv} = \frac{G_u}{2E} \mathbf{r}_u + \frac{G_v}{2G} \mathbf{r}_v + D'' \mathbf{n} \end{cases}$$

denklemleri yazılabilir. Bunlara ek olarak, Weingarten tarafından bulunan türev formülleri kullanılarak

$$\mathbf{n}_u = -\frac{D}{E} \mathbf{r}_u, \quad \mathbf{n}_v = -\frac{D''}{G} \mathbf{r}_v$$

bağıntıları bulunur ve nihayet

$$\begin{cases} \mathbf{r}_u^* = \left(1 + d_{1u} + \frac{E_u d_1 + E_v d_2 - 2D d_3}{2E}\right) \mathbf{r}_u + (*) \mathbf{r}_v + (*) \mathbf{n} \\ \mathbf{r}_v^* = (*) \mathbf{r}_u + \left(1 + d_{2v} + \frac{G_u d_1 + G_v d_2 - 2D'' d_3}{2G}\right) \mathbf{r}_v + (*) \mathbf{n} \end{cases}$$

denklemlerini elde edebiliriz. Bu denklemlerdeki (*) ifadeleri ε na göre birinci dereceden terimleri içermektedir. Eğer sadece ε na göre lineer terimleri alırsak

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_u^* \times \mathbf{r}_v^* &= \left(1 + d_{1u} + d_{2v} + \frac{E_u d_1 + E_v d_2 - 2D d_3}{2E} + \frac{G_u d_1 + G_v d_2 - 2D'' d_3}{2G}\right) (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) \\ &+ (*) (\mathbf{r}_v \times \mathbf{n}) + (*) (\mathbf{n} \times \mathbf{r}_u). \end{aligned} \quad (4.86)$$

ifadesi bulunur. Eğrilik çizgileri parametre eğrileri olarak alındığından $\mathbf{r}_u$, $\mathbf{r}_v$ ve $\mathbf{n}$ vektörleri ve dolayısıyla $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$, $\mathbf{r}_v \times \mathbf{n}$, $\mathbf{n} \times \mathbf{r}_u$ vektörleri ikililer halinde birbirine diktir. Bu yüzden, (4.86) ın skaler karesi, ε na göre ikinci derece terimleri ihmal ederek

$$(\mathbf{r}_u^* \times \mathbf{r}_v^*)^2 = \phi^2 (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)^2 = \phi^2 EG$$

şeklinde elde edilir. Burada ϕ miktarı (4.86) daki $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ nin bileşenlerini içerir. Böylece, $\mathbf{r}^*(u, v)$ ofset yüzeyinin yüzölçümü

$$\bar{O} = \int \sqrt{(\mathbf{r}_u^* \times \mathbf{r}_v^*)^2} dudv = \int \phi \sqrt{EG} dudv = O + \delta O$$

biçimindedir. Burada;

$$\delta O = \iint \left\{ \frac{\partial}{\partial u} (d_1 \sqrt{EG}) + \frac{\partial}{\partial v} (d_2 \sqrt{EG}) \right\} dudv - \iint \left(\frac{L}{E} + \frac{N}{G} \right) d_3 \sqrt{EG} dudv$$

dir. $(\mathbf{r}_u \mathbf{r}_v \mathbf{n}) = \sqrt{EG}$ denklemi sağlandığından (4.38) ve (4.39) dan

$$d_1 \sqrt{EG} = (\delta \mathbf{r}, \mathbf{r}_v, \mathbf{n}) \text{ ve } d_2 \sqrt{EG} = (\mathbf{r}_u, \delta \mathbf{r}, \mathbf{n})$$

denklemleri elde edilir. Eğer bu denklemler çizgi integralinde yerleştirilir ve $d\mathbf{r} = \mathbf{r}_u du + \mathbf{r}_v dv$ denklemi çizgi elemanı olarak gözönüne alınırsa

$$\oint (\delta \mathbf{r}, d\mathbf{r}, \mathbf{n})$$

denklemi yazılabilir. Dolayısıyla, orjinal yüzey ve genelleştirilmiş ofset yüzeyi arasında yüzölçümünün birinci varyasyonu

$$\delta O = \oint (\delta \mathbf{r}, d\mathbf{r}, \mathbf{n}) - 2 \int H d_3 do$$

veya

$$\delta O = \oint (\delta \mathbf{r}, d\mathbf{r}, \mathbf{n}) - \iint 2H(\delta \mathbf{r}, \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v) dudv \quad (4.87)$$

biçiminde ifade edilir.

4.6 Orjinal Yüzey ve Standart Ofset Yüzeyi Arasında Yüzölçümünün İkinci Varyasyonu

Şimdi (4.78) de ifade edilen $\mathbf{r}^*(u, v) = \mathbf{r}_1(u, v) + d\mathbf{n}_1(u, v)$ standart ofset yüzeyini ε na göre ikinci derece terimleri hesaba katarak ele alalım. (4.79) denkleminde yararlanarak

$$E^* = \mathbf{r}_u^* \cdot \mathbf{r}_u^* = E - 2dD + d^2 \mathbf{r}_u^2 + d_u^2$$

$$F^* = \mathbf{r}_u^* \cdot \mathbf{r}_v^* = F - 2dD' + d^2 \mathbf{n}_u \mathbf{n}_v + d_u d_v$$

$$G^* = \mathbf{r}_v^* \cdot \mathbf{r}_v^* = G - 2dD'' + d^2 \mathbf{n}_v^2 + d_v^2$$

veya

$$E^* = E - 2dD + d^2(2HD - KE) + d_u^2$$

$$F^* = F - 2dD' + d^2(2HD' - KF) + d_u d_v$$

$$G^* = G - 2dD'' + d^2(2HD'' - KG) + d_v^2$$

ifadeleri elde edilebilir. Eğer

$$\nabla d = \frac{Ed_v^2 - 2Fd_u d_v + Gd_v^2}{W^2}$$

sembolü kullanılır ve $W^{*2} = E^*G^* - F^{*2}$ denklemi de dikkate alınırsa

$$W^* = W \left[1 - 2dH + d^2K + \frac{1}{2}\nabla d \right] + \dots \quad (4.88)$$

bağıntısı elde edilir ve yüzölçümü için bu ifade kullanılarak

$$\bar{O} = O - 2 \int dH do + \int \left(d^2K + \frac{1}{2}\nabla d \right) do + \dots$$

bulunur. O halde, standart ofset yüzeyi ile orjinal yüzeyin yüzölçümleri arasındaki ikinci varyasyonları

$$\delta^2 O = \int (2d^2K + \nabla d) do \quad (4.89)$$

biçiminde ifade edilebilir.

4.7 Uygulama

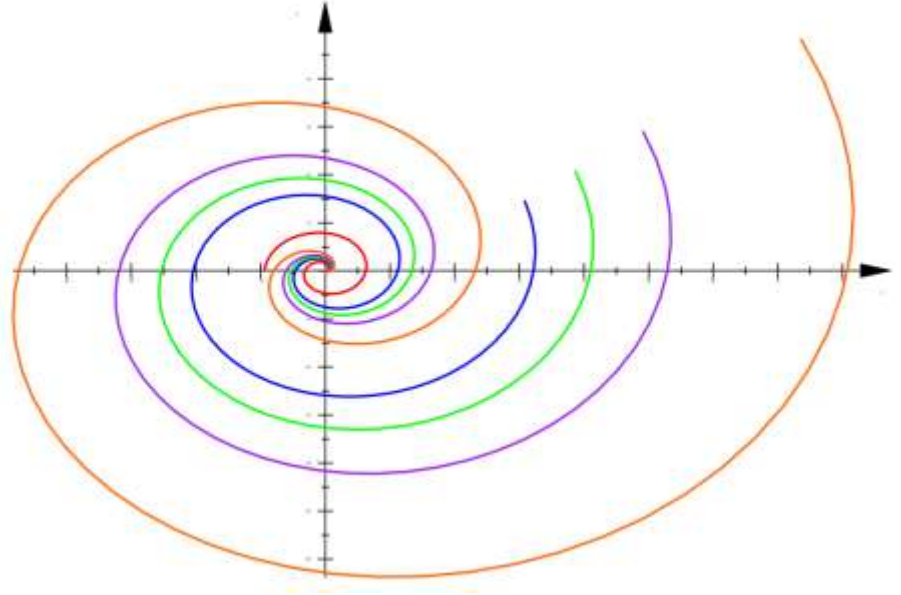
Bu bölümde, ofset eğri ve yüzeylerin farklı bir bakış açısıyla sunduğumuz tanımları ile ilgili örnekler sunulmuş ve verilen örneklerde, uyguladığımız yaklaşım (Chen and Lin, 2014) de kullanılan yaklaşım ile karşılaştırılmıştır.

Örnek 1

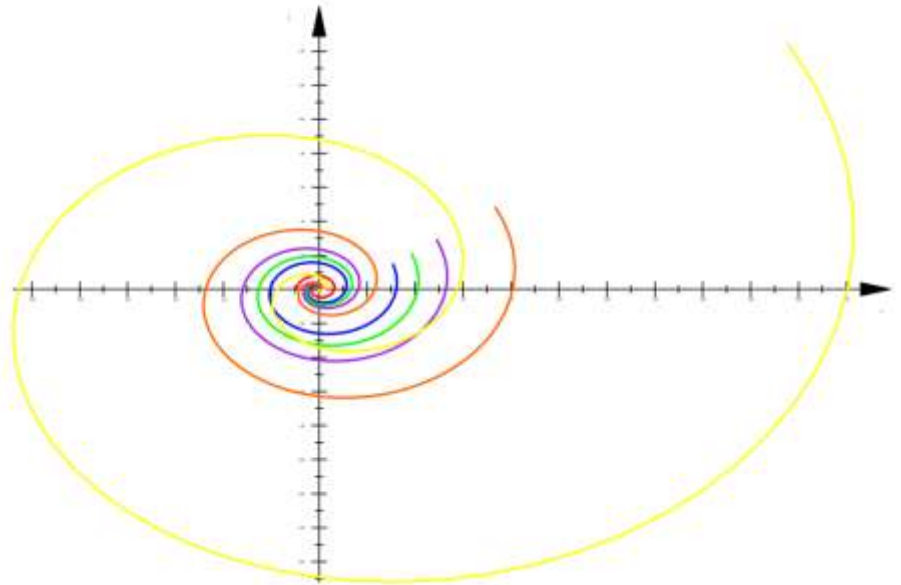
$\mathbf{r}(t)$ orjinal eğrisi

$$\mathbf{r}(t) = (t \cos t, t \sin t)$$

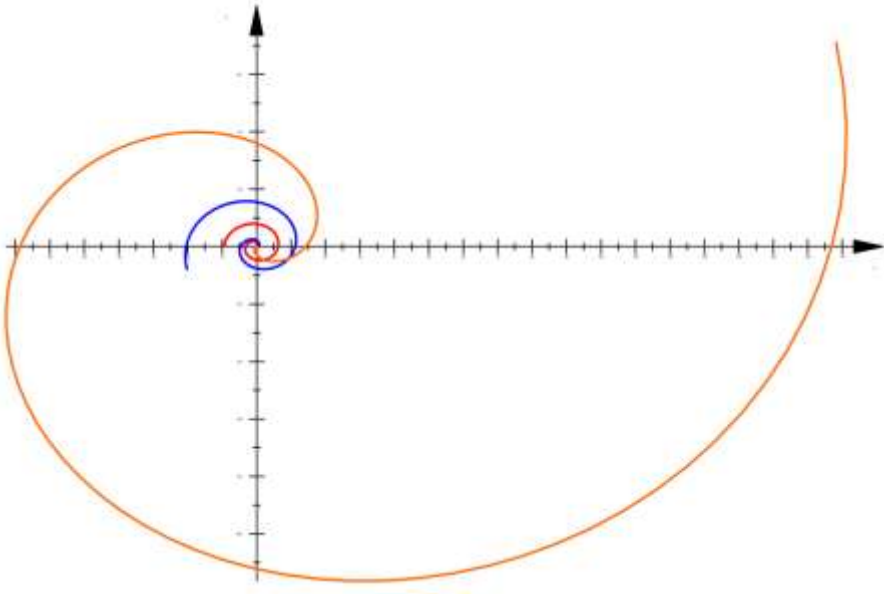
olarak verilsin. $d_1 = \varepsilon \bar{d}_1 = \varepsilon t \sqrt{1+t^2}$ ve $d_2 = \varepsilon \bar{d}_2 = \varepsilon(t+1)\sqrt{1+t^2}$ fonksiyonları kullanılarak çeşitli genelleştirilmiş ofset eğrileri Şekil 4.1 ve Şekil 4.2 de ε nun farklı değerleri için gösterilmiştir. Bunlara ek olarak, orjinal eğri, genelleştirilmiş ve standart ofset eğrileri arasındaki ilişkiyi Şekil 4.3 den görebiliriz.



Şekil 4.1 Orijinal eğri (kırmızı) ve bu eğrinin $\varepsilon = \frac{1}{10}$ (mavi), $\varepsilon = \frac{1}{7}$ (yeşil), $\varepsilon = \frac{1}{5}$ (mor), ve $\varepsilon = \frac{1}{3}$ (turuncu) için genelleştirilmiş ofset eğrisi.



Şekil 4.2 Orijinal eğri (kırmızı) ve $\varepsilon = \frac{1}{10}$ (mavi), $\varepsilon = \frac{1}{7}$ (yeşil), $\varepsilon = \frac{1}{5}$ (mor), $\varepsilon = \frac{1}{3}$ (turuncu), ve $\varepsilon = 1$ (sarı olan (Chen and Lin, 2014) de ifade edilen eğridir).



Şekil 4.3 Orjinal eğri (kırmızı), genelleştirilmiş ofset eğrisi (mavi) ve standart ofset eğrisi (turuncu).

Örnek 2

Şimdi, $\mathbf{r}(t)$ orjinal eğrisi

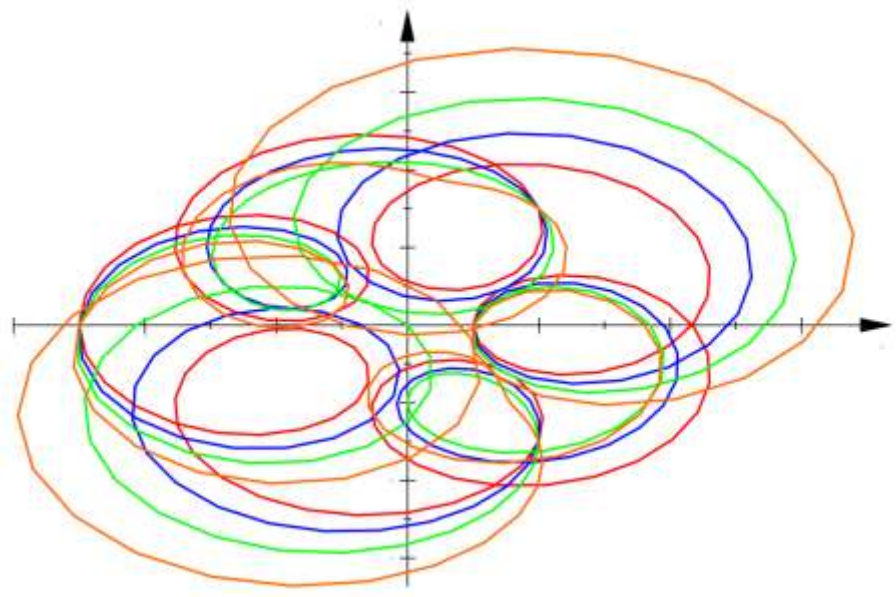
$$\mathbf{r}(t) = \left(\frac{3}{2} \cos t - \cos(6t), \frac{3}{2} \sin(6t) \right)$$

olarak verilsin.

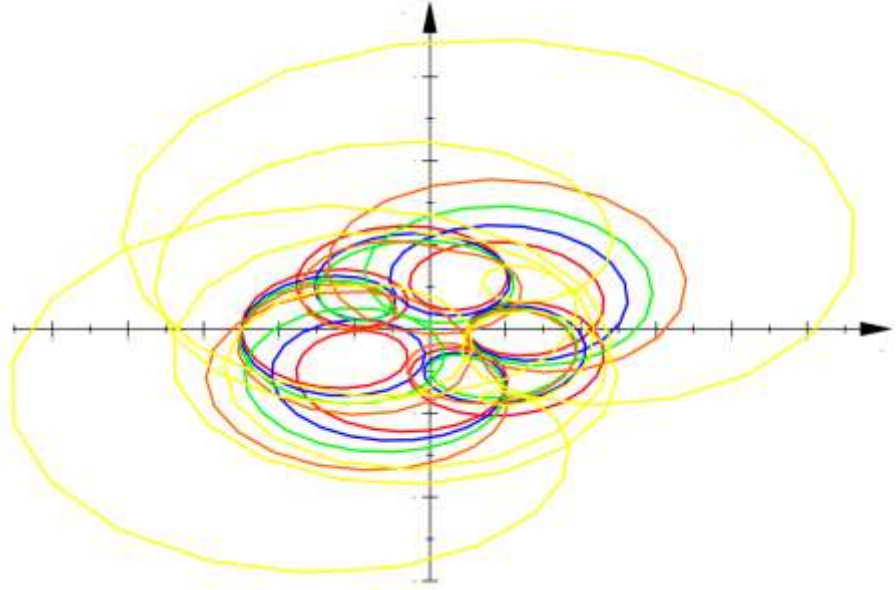
$$d_1 = \varepsilon \bar{d}_1 = \varepsilon t \sqrt{38.25 - 18(\sin t \sin(6t) + \cos t \cos(6t))}$$

$$d_2 = \varepsilon \bar{d}_2 = \varepsilon(t + 1) \sqrt{38.25 - 18(\sin t \sin(6t) + \cos t \cos(6t))}$$

denklemleri kullanılarak çeşitli genelleştirilmiş ofset eğrileri Şekil 4.4 ve Şekil 4.5 de ε nun farklı değerleri için gösterilmiştir.



Şekil 4.4 Orjinal eğri (kırmızı), ve $\varepsilon = \frac{1}{10}$ (mavi), $\varepsilon = \frac{1}{5}$ (yeşil), ve $\varepsilon = \frac{1}{3}$ (turuncu) değerleri için genelleştirilmiş ofset eğrileri.



Şekil 4.5 Orjinal eğri (kırmızı), ve $\varepsilon = \frac{1}{10}$ (mavi), $\varepsilon = \frac{1}{5}$ (yeşil), $\varepsilon = \frac{1}{3}$ (turuncu), ve $\varepsilon = 1$ (sarı) için genelleştirilmiş ofset eğrileri.

Örnek 3

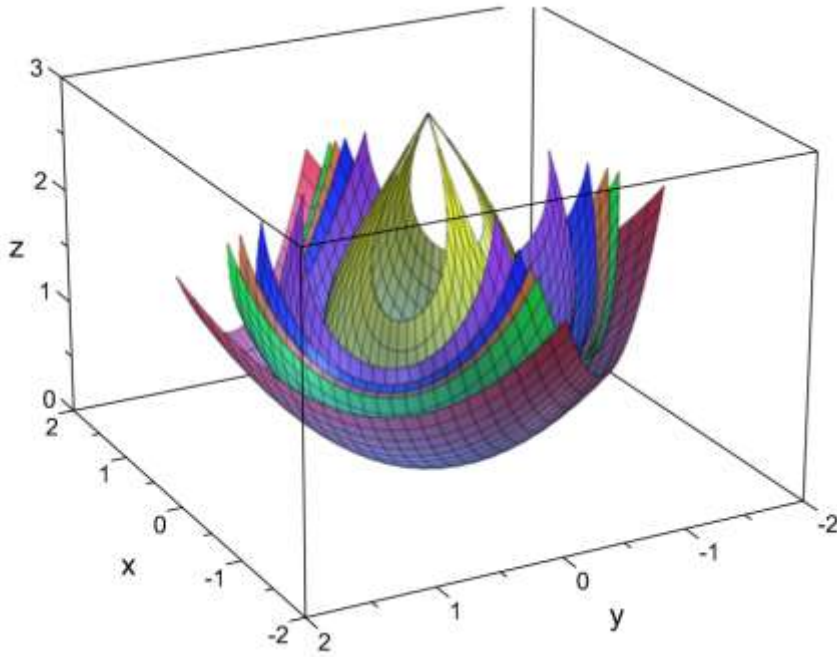
$\mathbf{r}(u, v)$ orjinal yüzeyi

$$\mathbf{r}(u, v) = (u - v, u + v, u^2 + v^2)$$

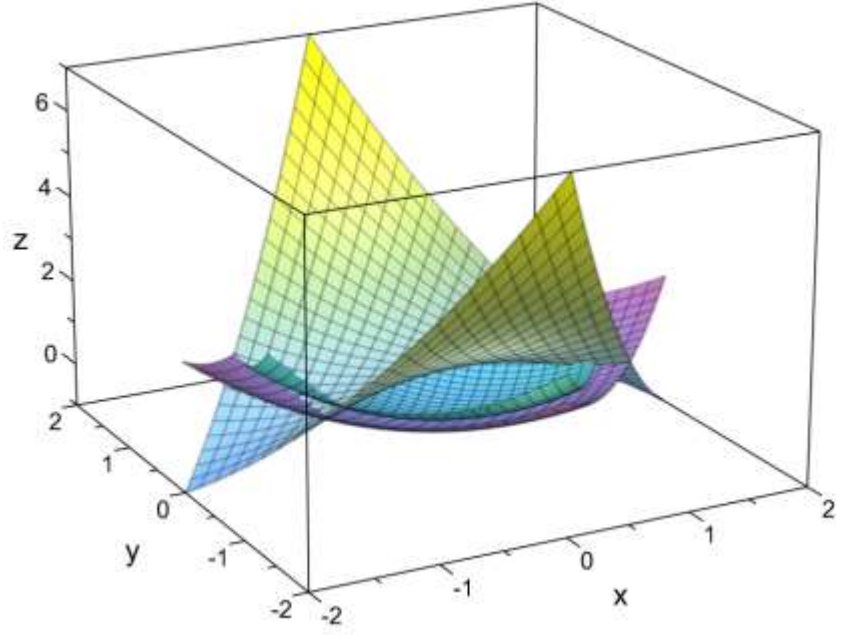
olarak verilsin. Genelleştirilmiş ofset yüzeyini (4.37), (4.38) ve (4.39) dan

$$\mathbf{r}^*(u, v) = \left(\frac{3}{5}(u - v), u + v, u^2 + v^2 + \frac{4uv + 1}{5} \right)$$

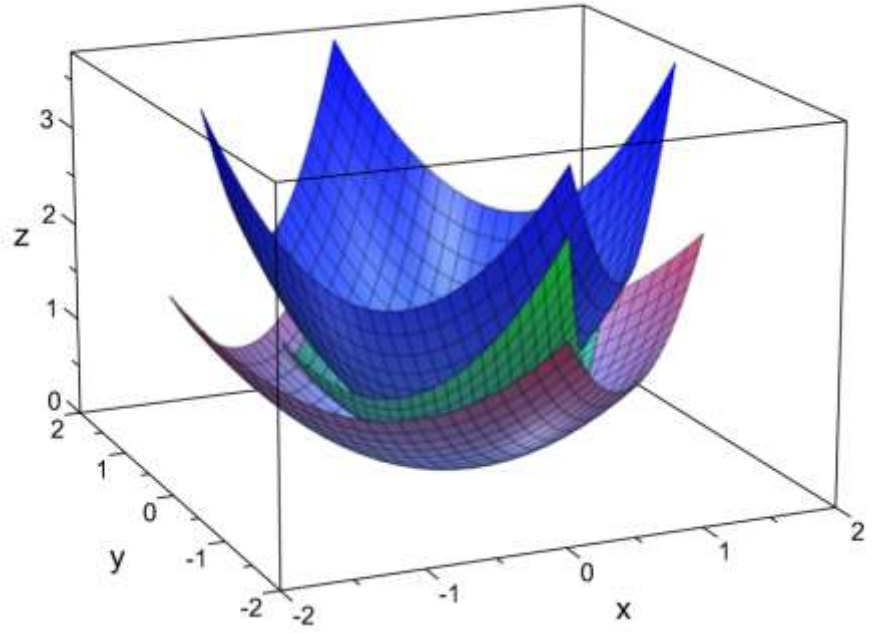
biçiminde tanımlayabiliriz. Burada, $\varepsilon = \frac{1}{5}$, $d_1 = \varepsilon \bar{d}_1 = \frac{v}{5}$, $d_2 = \varepsilon \bar{d}_2 = \frac{u}{5}$, $d_3 = \varepsilon \bar{d}_3 = \frac{\sqrt{2u^2 + 2v^2 + 1}}{5}$. Farklı genelleştirilmiş ofset yüzeylerini ε nun farklı değerleri için Şekil 4.6 da, bazı ilişkileri ise Şekil 4.7 ve Şekil 4.8 de görebiliriz.



Şekil 4.6 Orjinal yüzey (kırmızı), ve $\varepsilon = \frac{1}{10}$ (yeşil), $\varepsilon = \frac{1}{8}$ (turuncu), $\varepsilon = \frac{1}{6}$ (mavi), $\varepsilon = \frac{1}{4}$ (mor), $\varepsilon = \frac{1}{2}$ (sarı) için genelleştirilmiş ofset yüzeyleri.



Şekil 4.7 Orjinal yüzey (kırmızı), ve $\epsilon = \frac{1}{8}$ (mavi), ve $\epsilon = 1$ (sarı) için genelleştirilmiş ofset yüzeyleri.



Şekil 4.8 Orjinal yüzey (kırmızı), genelleştirilmiş ofset yüzeyi (yeşil) ve standart ofset yüzeyi (mavi).

Örnek 4

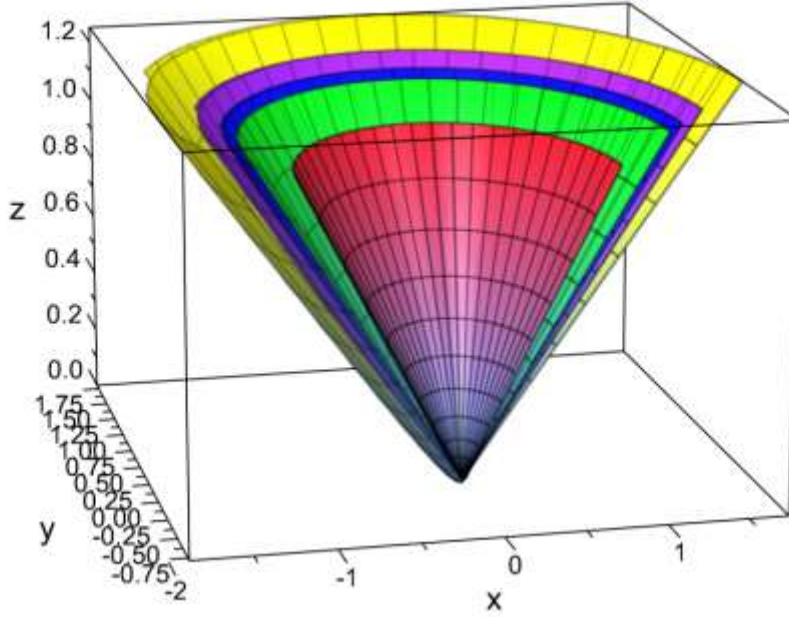
Şimdi, $\mathbf{r}(u, v)$ orjiinal yüzeyi

$$\mathbf{r}(u, v) = (v^2 \cos u, v^2 \sin u, v^2)$$

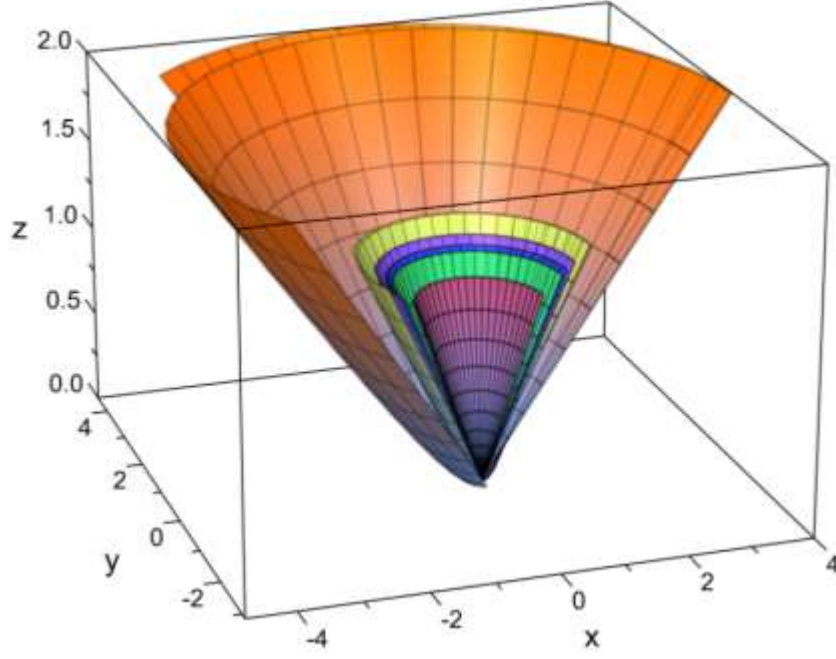
olarak verilsin. Genelleştirilmiş ofset yüzeyini (4.37), (4.38) ve (4.39) dan

$$\mathbf{r}^*(u, v) = \left(v^2 \cos u - \frac{uv}{10} \sin u + \frac{3v^2}{10} \cos u, v^2 \sin u + \frac{uv}{10} \cos u + \frac{3v^2}{10} \sin u, v^2 + \frac{v^2}{10} \right)$$

biçiminde buluruz. Burada, $\varepsilon = \frac{1}{10}$, $d_1 = \varepsilon \bar{d}_1 = \frac{u}{10v}$, $d_2 = \varepsilon \bar{d}_2 = \frac{v}{10}$ ve $d_3 = \varepsilon \bar{d}_3 = \frac{v^2 \sqrt{2}}{10}$ dir. Farklı genelleştirilmiş ve standart ofset yüzeylerini ε nun farklı değerleri için sırayla Şekil 4.9 ve Şekil 4.10 ile Şekil 4.11 ve Şekil 4.12 den görebiliriz. Bunlara ek olarak, orjinal yüzey ile genelleştirilmiş/standart ofset yüzeyleri arasındaki yüzölçümünün varyasyonları için bazı ilişkileri Çizelge 4.1 ve Çizelge 4.2 den elde edebiliriz.



Şekil 4.9 Orjinal yüzey (kırmızı), ve $\varepsilon = \frac{1}{10}$ (yeşil), $\varepsilon = \frac{1}{8}$ (mavi), $\varepsilon = \frac{1}{6}$ (mor), ve $\varepsilon = \frac{1}{4}$ (sarı) için genelleştirilmiş ofset yüzeyleri.



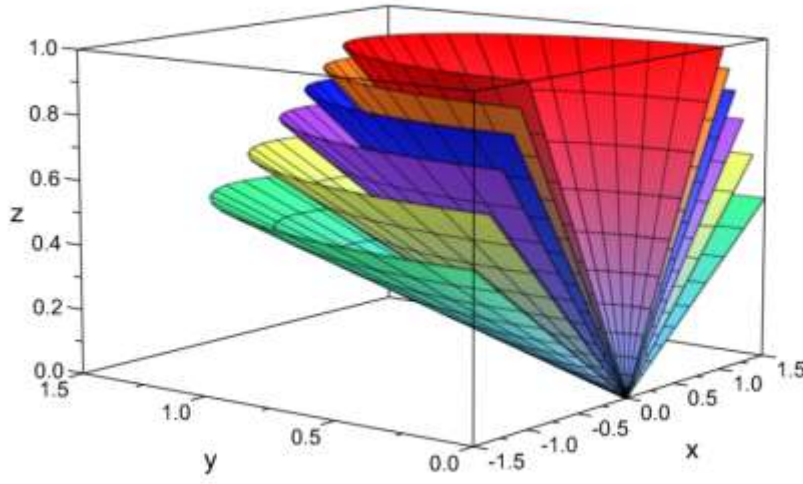
Şekil 4.10 Orjinal yüzey (kırmızı), ve $\varepsilon = \frac{1}{10}$ (yeşil), $\varepsilon = \frac{1}{8}$ (mavi), $\varepsilon = \frac{1}{6}$ (mor), $\varepsilon = \frac{1}{4}$ (sarı), ve $\varepsilon = 1$ (turuncu) için genelleştirilmiş ofset yüzeyleri.

Boundry Values	δO
$u=[0,1]$ and $v=[0,1]$	0.2828427125
$u=[1,2]$ and $v=[1,2]$	0.612825877
$u=[2,3]$ and $t=[2,3]$	-0.0471045208
$u=[3,4]$ and $v=[3,4]$	-2.545584412
$u=[4,5]$ and $v=[4,5]$	-7.731034141

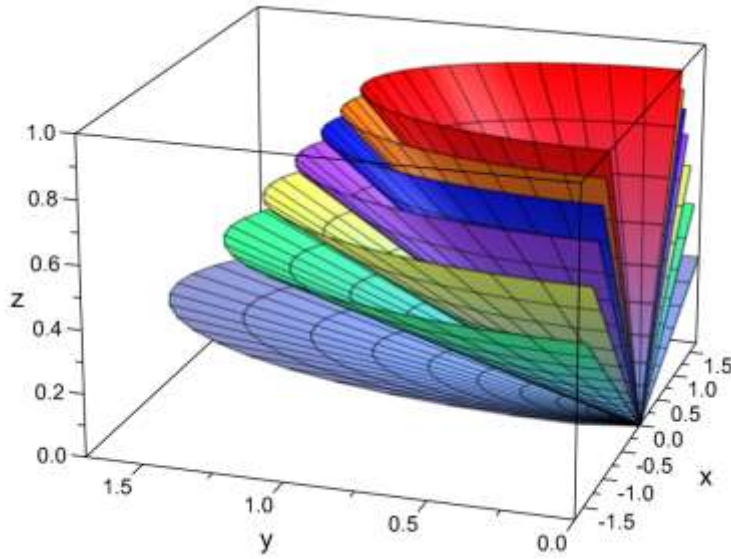
Çizelge 4.1 Orjinal yüzey ve genelleştirilmiş ofset yüzeyi arasındaki yüzölçümünün varyasyonları için bazı sonuçlar.

Boundry Values	δO
$u=[0,1]$ and $v=[0,1]$	-1.885618083
$u=[1,2]$ and $v=[1,2]$	-13.19932658
$u=[2,3]$ and $t=[2,3]$	-35.82674358
$u=[3,4]$ and $v=[3,4]$	-69.76786908
$u=[4,5]$ and $v=[4,5]$	-115.0227031

Çizelge 4.2 Orjinal yüzey ve standart ofset yüzeyi arasındaki yüzölçümünün varyasyonları için bazı sonuçlar.



Şekil 4.11 Orjinal yüzey (kırmızı), ve $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (yeşil), $\varepsilon = \frac{1}{10}$ (turuncu), $\varepsilon = \frac{1}{5}$ (mavi), $\varepsilon = \frac{1}{3}$ (mor), ve $\varepsilon = \frac{1}{2}$ (sarı) için standart ofset yüzeyleri.



Şekil 4.12 Orjinal yüzey (kırmızı), ve $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (yeşil), $\varepsilon = \frac{1}{10}$ (turuncu), $\varepsilon = \frac{1}{5}$ (mavi), $\varepsilon = \frac{1}{3}$ (mor), $\varepsilon = \frac{1}{2}$ (sarı), ve $\varepsilon = 1$ (açık mavi) için standart ofset yüzeyleri.

Örnek 5

Şimdi, bir bardak şeklini örnek olarak verebiliriz. Bunun için, orjinal yüzeyi

$$\mathbf{r}(u, v) = ((2(u-1)^4 - 2(u-1)^2 + 1)\cos v, (2(u-1)^4 - 2(u-1)^2 + 1)\sin v, u)$$

olarak alalım. O zaman, genelleştirilmiş ofset yüzeyi (4.37), (4.38) ve (4.39) denklemleri kullanılarak

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^*(u, v) = & \left\{ (2(u-1)^4 - 2(u-1)^2 + 1)\cos v + \frac{1}{6}(8(u-1)^3 - 4(u-1))\cos v \right. \\ & - \frac{1}{6}(2(u-1)^4 - 2(u-1)^2 + 1)\sin v - \frac{1}{6}(2(u-1)^4 - 2(u-1)^2 + 1)\cos v, \\ & (2(u-1)^4 - 2(u-1)^2 + 1)\sin v + \frac{1}{6}(8(u-1)^3 - 4(u-1))\sin v \\ & + \frac{1}{6}(2(u-1)^4 - 2(u-1)^2 + 1)\cos v - (2(u-1)^4 - 2(u-1)^2 + 1)\sin v, \\ & \left. u + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}(8(u-1)^3 - 4(u-1))(2(u-1)^4 - 2(u-1)^2 + 1) \right\} \end{aligned}$$

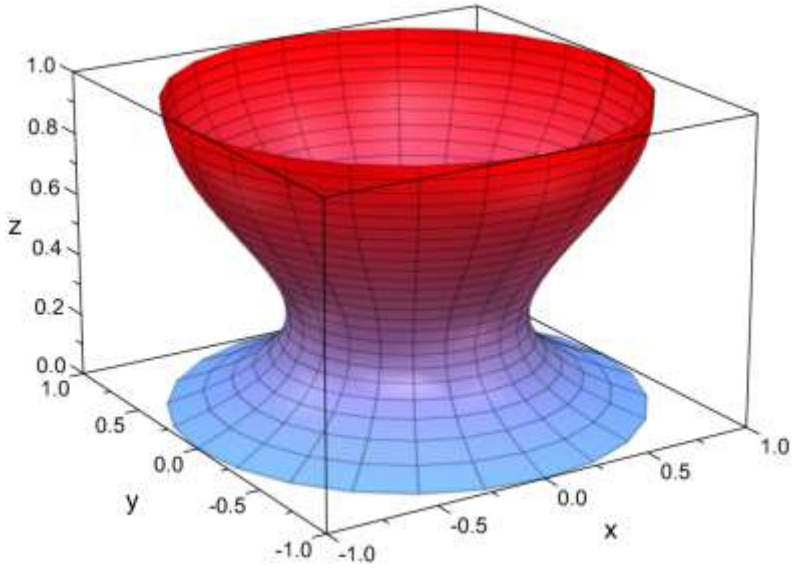
biçiminde yazılabilir. Burada;

$$\varepsilon = \frac{1}{6}, d_1 = \varepsilon \bar{d}_1 = \sqrt{[8(u-1)^3 - 4(u-1)]^2 + 1},$$

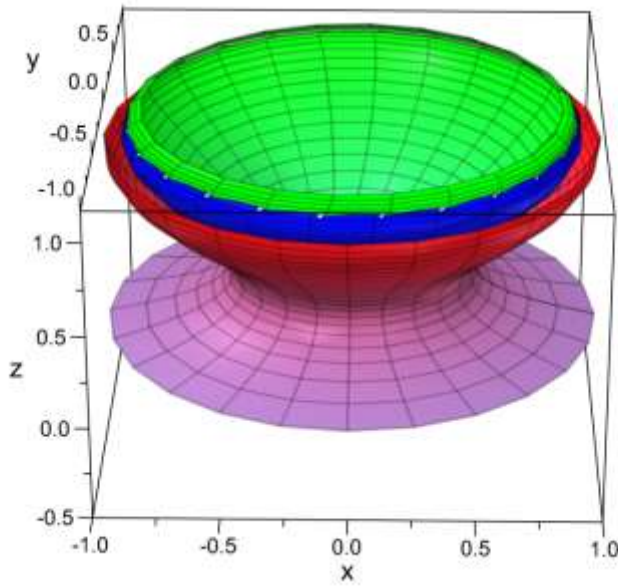
$$d_2 = \varepsilon \bar{d}_2 = 2(u-1)^4 - 2(u-1)^2,$$

$$d_3 = \varepsilon \bar{d}_3 = (2(u-1)^4 - 2(u-1)^2)\sqrt{1 + [8(u-1)^3 - 4(u-1)]^2}$$

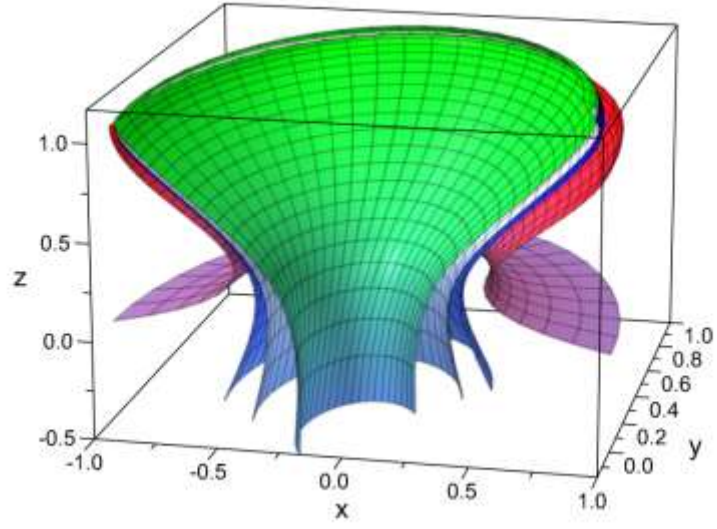
dir. Şekil 4.13, Şekil 4.14, Şekil 4.15 ve Şekil 4.16 da görüldüğü gibi ε nun farklı değerleri için farklı bardak şekillerine sahip genelleştirilmiş ofset yüzeyleri elde edebiliriz. Genelleştirilmiş ofset yüzeylerinin daha iyi gösterilebilmesi için bardak şekillerinin bazı kısımları çizilmemiştir.



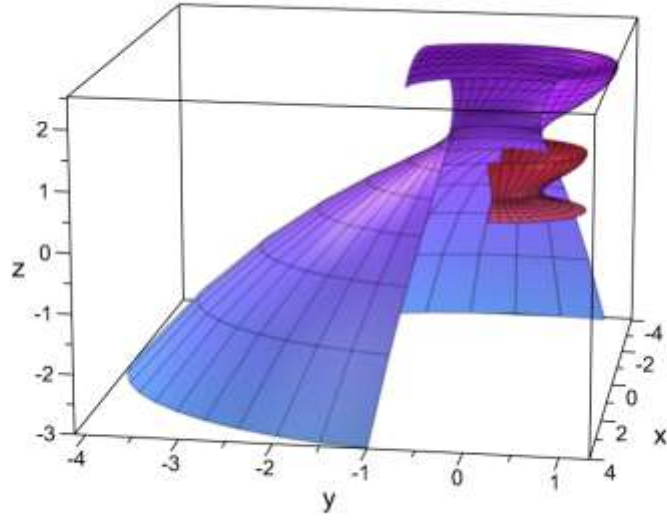
Şekil 4.13 Orjinal yüzey olarak bardak şekli.



Şekil 4.14 Orjinal bardak şekli (kırmızı), ve sırasıyla $\varepsilon = \frac{1}{6}$ (yeşil), $\varepsilon = \frac{1}{8}$ (beyaz), $\varepsilon = \frac{1}{10}$ (mavi) değerleri için genelleştirilmiş ofset yüzeylerinin kapalı formları.



Şekil 4.15 Orjinal bardak şekli (kırmızı), ve sırasıyla $\varepsilon = \frac{1}{6}$ (yeşil), $\varepsilon = \frac{1}{8}$ (beyaz), $\varepsilon = \frac{1}{10}$ (mavi) değerleri için genelleştirilmiş ofset yüzeylerinin açık formları.



Şekil 4.16 Orjinal bardak şekli (kırmızı), ve $\varepsilon = 1$ (mor) için genelleştirilmiş ofset yüzeyinin açık formları.

Örnek 6

Diğer taraftan bir tabak şeklini örnek olarak verebiliriz. Bu amaçla, orjinal yüzeyi

$$\mathbf{r}(u, v) = (3 \cosh\left(\frac{4}{3}\right) \cos v, 3 \cosh\left(\frac{4}{3}\right) \sin v, u)$$

olarak aldığımızda genelleştirilmiş ofset yüzeyi, denklem (4.37), (4.38) ve (4.39) dan

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^*(u, v) &= 3 \cosh\left(\frac{4}{3}\right) \cos v + \frac{1}{10^4} \left[\sinh\left(\frac{4}{3}\right) \cos v - 3 \cosh\left(\frac{4}{3}\right) \sin v - 3 \cosh\left(\frac{4}{3}\right) \cos v \right], \\ &3 \cosh\left(\frac{4}{3}\right) \sin v + \frac{1}{10^4} \left[\sinh\left(\frac{4}{3}\right) \sin v + 3 \cosh\left(\frac{4}{3}\right) \cos v - 3 \cosh\left(\frac{4}{3}\right) \sin v \right], \\ &u + \frac{1}{10^4} [1 + (\sinh(4/3))(3 \cosh(4/3))] \} \end{aligned}$$

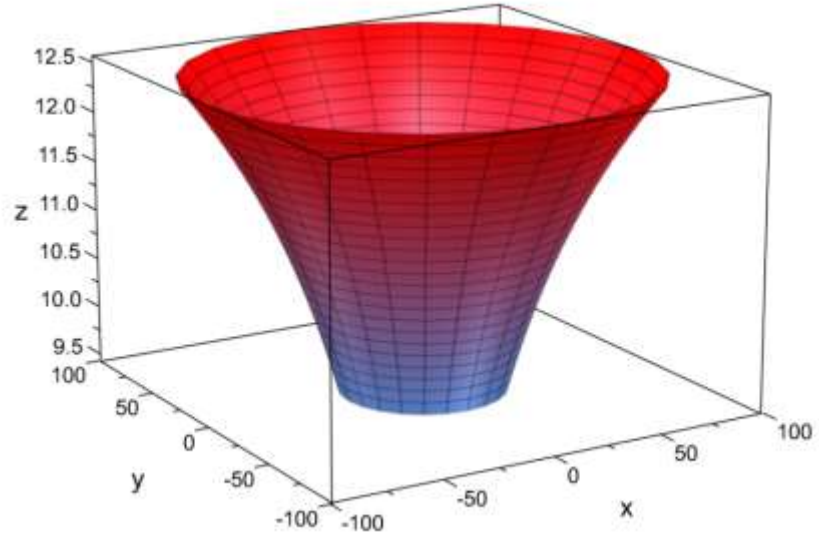
olarak yazabiliriz. Burada;

$$\varepsilon = \frac{1}{10^4}, \quad d_1 = \varepsilon \bar{d}_1 = \sqrt{(\sinh(\frac{4}{3}))^2 + 1},$$

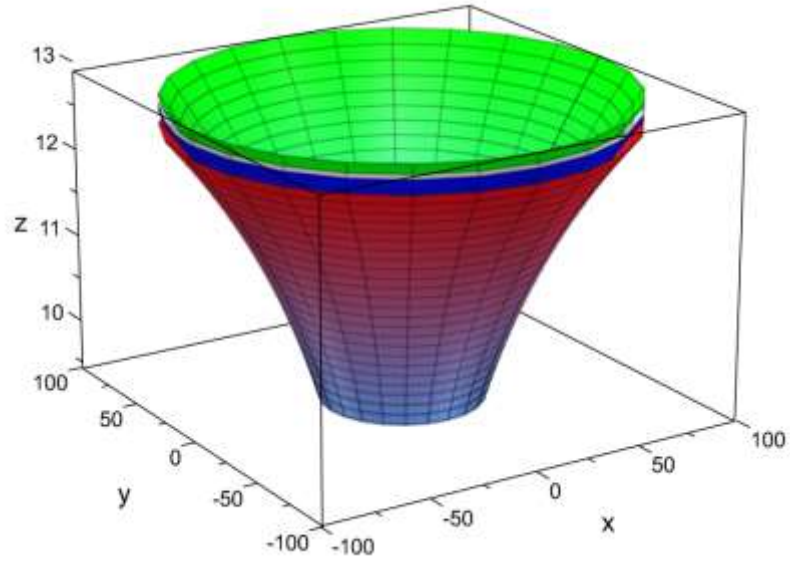
$$d_2 = \varepsilon \bar{d}_2 = 3 \cosh\left(\frac{4}{3}\right),$$

$$d_3 = \varepsilon \bar{d}_3 = 3 \cosh\left(\frac{4}{3}\right) \sqrt{1 + \left(\sinh\left(\frac{4}{3}\right)\right)^2}$$

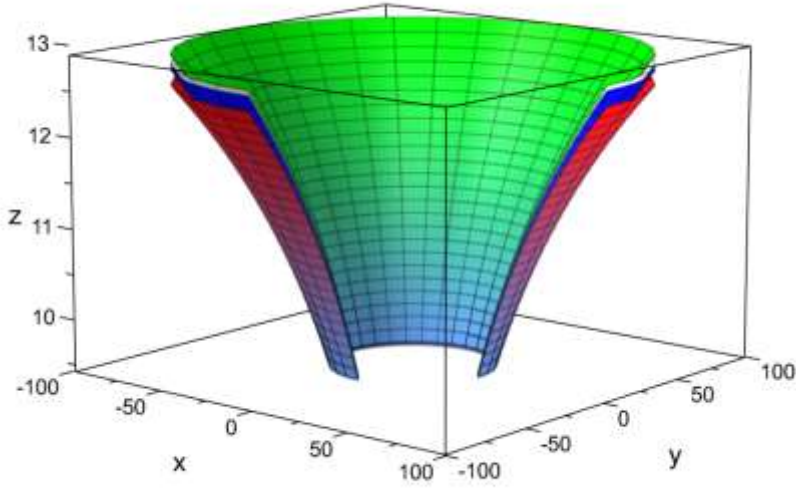
dir. Şekil 4.17, Şekil 4.18, Şekil 4.19 ve Şekil 4.20 de görüldüğü gibi ε nun farklı değerleri için farklı tabak şekilllerine sahip genelleştirilmiş ofset yüzeyleri elde edebiliriz. Genelleştirilmiş ofset yüzeylerinin daha iyi gösterilebilmesi için tabak şekillerinin bazı kısımları çizilmemiştir (Bulut and Caliskan, 2015b).



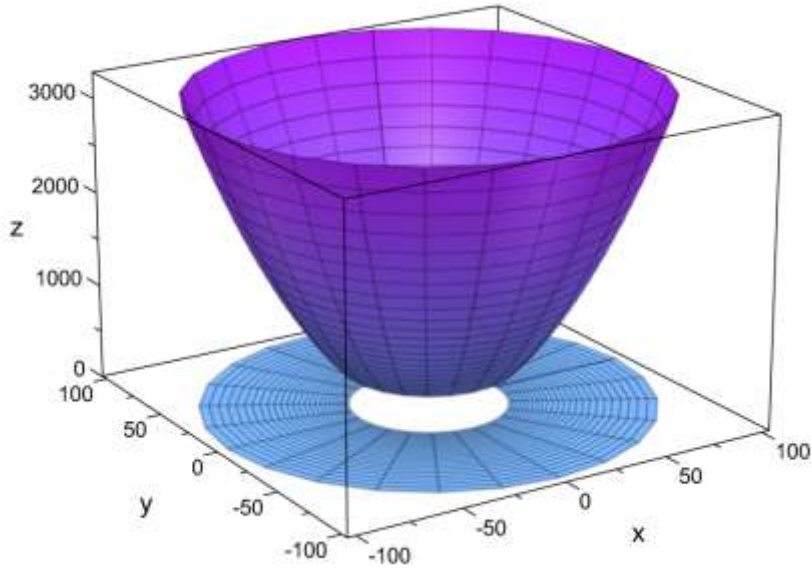
Şekil 4.17 Orjinal yüzey olarak tabak şekli.



Şekil 4.18 Orjinal tabak şekli (kırmızı), ve sırasıyla $\varepsilon = \frac{1}{10^4}$ (yeşil), $\varepsilon = \frac{1}{15 \cdot 10^3}$ (beyaz), $\varepsilon = \frac{1}{2 \cdot 10^4}$ (mavi) değerleri için genelleştirilmiş ofset yüzeylerinin kapalı formları.



Şekil 4.19 Orjinal tabak şekli (kırmızı), ve sırasıyla $\varepsilon = \frac{1}{10^4}$ (yeşil), $\varepsilon = \frac{1}{15 \cdot 10^3}$ (beyaz), $\varepsilon = \frac{1}{2 \cdot 10^4}$ (mavi) değerleri için genelleştirilmiş ofset yüzeylerinin açık formları.



Şekil 4.20 Orjinal tabak şekli (açık mavi), ve $\varepsilon = 1$ (mor) için genelleştirilmiş ofset yüzeyinin açık formları.

5 AÇILABİLİR REGLE YÜZEYLER ÜZERİNE BAZI ÇALIŞMALAR

Açılabilir regle yüzeyler, Bölüm 2.2.6 da ifade edildiği gibi BDGT ve birçok endüstri alanında yaygın bir şekilde kullanılmaktadır. Bu nedenle, literatürde yüzeylerden açılabilir yüzey elde etme ya da yarı açılabilir yüzeylerin açılabilirliğini artırmak ile ilgili çeşitli çalışmalar yapılmış ve çeşitli algoritmalar geliştirilmiştir. Bu bölümde, açılabilir regle yüzeylerle ilgili bazı çalışmalar sunulmuştur.

5.1 Bir Açılabilir Regle Yüzeyin Küresel Göstergesine Ait Evolüt

Bu çalışmada, bir açılabilir regle yüzeyin küresel göstergesinin küresel evolütü elde edilmiştir. Diğer taraftan, uzay eğrisi olarak bir açılabilir regle yüzeyin dayanak eğrisi ele alınarak bu eğrinin şekil eğrilik ve burulması, aynı eğrinin eğrilik ve burulması ile teğetler ve binormaller küresel göstergelerinin yay elemanları cinsinden ifade edilmiştir.

Ayrıca bu çalışmada, bir açılabilir regle yüzeyin küresel göstergesi olan binormaller göstergesinin, bu yüzeyin dayanak eğrisinin Darboux vektörünün küresel göstergesine karşılık gelen küresel evolütü ile bu evolütün iki involütü olan binormal ve teğetler göstergelerinin, SLERP kullanılarak birim küre üzerinde büyük çember yaylarına karşılık geldiği gösterilmiştir.

Bir Frenet uzay eğrisi, küresel görüntüsünün yay uzunluğu parametresi ile tekrar parametrelendirilebilir (Izumiya and Takeuchi, 2002). Bu parametrelendirmeden dolayı bu uzay eğrisi, şekil eğriliği ve burulmasına sahiptir. Böylece uzay eğrileri, bazı başlangıç koşulları altında şekil eğriliği ve burulması ile belirlenebilir (Encheva and Georgiev, 2003). Bu yüzden, $d\sigma = \kappa ds$ yazılabilir (Encheva and Georgiev, 2003). $\frac{ds_T}{ds} = \kappa$ olduğundan,

$$d\sigma = ds_T \quad (5.1)$$

yazılabilir. (2.21) ve (5.1) den,

$$d\sigma = \frac{\kappa}{\tau} ds_B \quad (5.2)$$

elde edilir.

α eğrisi, σ küresel yay uzunluğu parametresiyle parametrelenmiş bir eğri ve (T, N, B) bu eğri boyunca Serret-Frenet çatısı olsun. Buradan,

$$\frac{d\alpha}{d\sigma} = \frac{1}{\kappa} T, \quad \frac{dT}{d\sigma} = N, \quad \frac{dN}{d\sigma} = -T + \frac{\tau}{\kappa} B, \quad \frac{dB}{d\sigma} = -\frac{\tau}{\kappa} N$$

yazılabilir (Encheva and Georgiev, 2003).

TANIM 5.1.1: $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$, σ küresel yay uzunluğu parametresiyle parametrelenmiş C^3 sınıfının bir Frenet uzay eğrisi olsun. $\kappa(\sigma)$ ve $\tau(\sigma)$, α eğrisinin sırayla eğrilik ve burulması olsun. Aşağıda ifade edilen

$$\tilde{\kappa} = -\frac{d\kappa}{\kappa d\sigma} \quad \text{ve} \quad \tilde{\tau} = \frac{\tau}{\kappa}, \quad (5.3)$$

denklemleri, α eğrisinin şekil eğriliği ve şekil burulmasıdır (Cartan, 1935).

$\xi: I \rightarrow S^2$, ξ nin σ yay uzunluğu parametresi ile parametrelenmiş birim hızlı küresel bir eğri olsun. Buradan sırayla, $t(\sigma)$ teğet birim vektörü ve $\eta(\sigma)$ birim vektörü

$$t(\sigma) = \frac{d\xi(\sigma)}{d\sigma} \quad \text{ve} \quad \eta(\sigma) = \xi(\sigma) \times t(\sigma)$$

biçiminde yazılabilir. ξ eğrisi boyunca $\{\xi(\sigma), t(\sigma), \eta(\sigma)\}$ ortogonal çatısı ξ nin Sabban çatısı olarak isimlendirilir (Izumiya and Takeuchi, 2002). Böylece Serret-Frenet türev formülleri,

$$\frac{d\xi(\sigma)}{d\sigma} = t(\sigma), \quad \frac{dt(\sigma)}{d\sigma} = -\xi(\sigma) + k_g(\sigma)\eta(\sigma), \quad \frac{d\eta(\sigma)}{d\sigma} = -k_g(\sigma)t(\sigma) \quad (5.4)$$

şeklinde tanımlanabilir. Burada, $k_g(\sigma) = \det\left(\xi(\sigma), t(\sigma), \frac{dt(\sigma)}{d\sigma}\right)$, ξ nin $\xi(\sigma)$ cinsinden jeodezik eğriliğidir.

$k: I \rightarrow \mathbb{R}$, C^1 sınıfının bir fonksiyonu verildiğinde $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uzay eğrisi,

$$\alpha(\sigma) = p \int e^{\int k(\sigma) d\sigma} \xi(\sigma) d\sigma + \mathbf{q} \quad (5.5)$$

biçiminde ifade edilebilir. Burada $\mathbf{q}$ sabit vektör ve p reel sabittir. Diğer taraftan,

$$\frac{\frac{d\alpha}{d\sigma}}{\left\| \frac{d\alpha}{d\sigma} \right\|} = \xi(\sigma)$$

olduğundan σ , α nın küresel yay elementidir. Bu koşullar altında $\mathbb{R}^3$ deki tüm Frenet eğrileri tanımlanabilir (Encheva and Georgiev, 2003).

ÖNERME 5.1.1 : (5.5) denklemiyle verilen α eğrisinde olduğu gibi tüm Serret-Frenet eğrileri $\tilde{\kappa} = k(\sigma)$ şekil eğriliği ve $\tilde{\tau} = k_g(\sigma)$ şekil burulması ile elde edilebilir (Encheva and Georgiev, 2003).

σ parametrelili birim hızlı ξ küresel eğrisinin küresel evolütü,

$$\mathbf{e}_{\xi(\sigma)} = \frac{1}{\sqrt{k_g^2(\sigma) + 1}} \left(k_g(\sigma) \xi(\sigma) + \boldsymbol{\eta}(\sigma) \right) \quad (5.6)$$

biçimindedir (Izumiya and Takeuchi, 2002).

α Frenet eğrisinin Darboux vektörü,

$$\mathbf{c}(\sigma) = \tau(\sigma) \mathbf{T} + \kappa(\sigma) \mathbf{B}$$

dir ve bu Darboux vektörünün birim vektörü,

$$\tilde{\mathbf{c}}(\sigma) = \frac{\mathbf{c}(\sigma)}{\|\mathbf{c}(\sigma)\|} = \frac{1}{\sqrt{\tilde{\tau}^2 + 1}} (\tilde{\tau} \mathbf{T} + \mathbf{B}) \quad (5.7)$$

biçimindedir.

ÖNERME 5.1.2: $\xi: I \rightarrow S^2$ küresel bir eğri ve α eğrisi (5.5) denklemiyle verilen ve ξ eğrisine karşılık gelen uzay eğrisi olsun. O halde, α eğrisinin küresel Darboux görüntüsü, ξ nin küresel evolütü ile çakışır (Izumiya and Takeuchi, 2002).

Benzer şekilde, $\xi: I \rightarrow S^2$ küresel bir eğri ve α eğrisi (5.5) denklemiyle verilen ve ξ eğrisine karşılık gelen uzay eğrisi olsun. Bu α eğrisinin teğetler göstergesi ve binormaller göstergesi, α nın küresel Darboux görüntüsünün iki küresel involütüdür.

5.1.1 Açılabilir Regle Yüzeyin Küresel Göstergesinin Evolütü

Açılabilir regle yüzeyler, Gauss dönüşümünün uygulanması ile B binormal vektörünün birim küre üzerinde, binormallerin küresel göstergesi olan bir eğriye dönüşür. Bu eğri küresel bir eğridir. σ küresel yay parametresiyle parametrelendirilmiş $B(\sigma)$ küresel eğrisinin evolütü,

$$e_{B(\sigma)} = \frac{1}{\sqrt{k_g^2(\sigma) + 1}} (k_g(\sigma)B(\sigma) + \eta(\sigma)) \quad (5.8)$$

biçiminde ifade edilebilir. Sonuç olarak $B(\sigma)$ de $e_{B(\sigma)}$ nın küresel involütü olur.

Diğer taraftan açılabilir regle yüzeyin α doğrultman eğrisinin Darboux vektörünün küresel görüntüsü olan,

$$c(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{\tilde{\tau}^2 + 1}} (\tilde{\tau}T + B)$$

eğrisi, $B(\sigma)$ nın küresel evolütü ya da diğer bir ifadeyle $B(\sigma)$, α doğrultman eğrisinin Darboux vektörünün küresel görüntüsünün involütüdür.

Diğer taraftan, (5.3) denkleminde α eğrisinin şekil eğrilik ve şekil burulması, aynı eğrinin eğrilik, burulması ile teğetler ve binormaller göstergelerinin yay elemanları cinsinden,

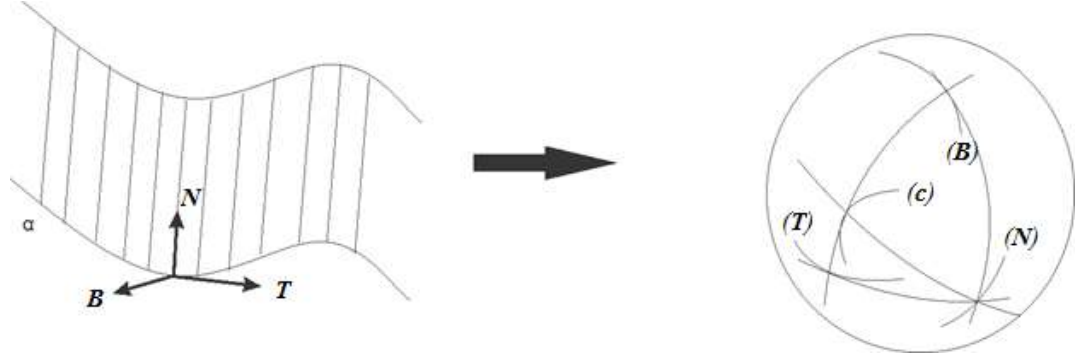
$$\tilde{\kappa} = -\frac{\tau d\kappa}{\kappa^2 ds_b} \quad \text{ve} \quad \tilde{\tau} = \frac{ds_b}{ds_t} \quad (5.9)$$

biçiminde bulunur.

$q_i = b_i \mathbf{i} + c_i \mathbf{j} + d_i \mathbf{k}$, ($i=1,2,3$) reel birim kuaterniyonları sırayla $T(s)$, $c(s)$ ve $B(s)$ yerine alınabilir. Bu yüzden, birim küre üzerindeki $T(s)$, $c(s)$ ve $B(s)$ eğrileri, SLERP kullanılarak,

$$q_i(t) = q_{i1} \frac{\sin(1-t)\varphi}{\sin\varphi} + q_{i2} \frac{\sin t\varphi}{\sin\varphi}, \quad t \in [0,1], \quad (i=1,2,3)$$

tarafından çizilen eğrilere dönüşür. Böylece, bir açılabilir regle yüzeyin dayanak eğrisinin binormaller göstergesinin evolütü- ki bu dayanak eğrisinin Darboux vektörünün birim küre üzerinde çizdiği eğridir- ile bu evolüt eğrisinin iki involütü olan binormal ve teğetler göstergelerinin çizdikleri eğri, birim küre üzerinde büyük çember yaylarına karşılık gelir.



Şekil 5.1 $\alpha(s)$ doğrultman eğrisinin $T(\sigma)$, $c(\sigma)$ ve $B(\sigma)$ küresel göstergelerinin SLERP kullanılarak birim küre üzerinde çizdikleri jeodezik eğriler.

5.1.2 Uygulama

Burada, ele alınan bir açılabilir regle yüzeyin küresel evolütü ile bu yüzeyin dayanak eğrisi ile ilgili yukarıda verilen bilgiler kullanılarak bazı değerler hesaplanmıştır. Ayrıca, ele alınan yüzey ile ilgili teğet, binormal ve küresel evolütün gösterildiği Şekil 5.2 sunulmuştur.

Dayanak eğrisi, $\alpha(s) = \left(3\cos\frac{s}{5}, 3\sin\frac{s}{5}, \frac{4s}{5}\right)$ olan bir açılabilir regle yüzey $y(u,s) = \alpha(s) + u\alpha'(s)$ biçiminde verilsin. Buradan (α) uzay eğrisinin Serret-Frenet çatısı, eğrilik ve burulması

$$T = \alpha'(s) = \left(-\frac{3}{5}\sin\frac{s}{5}, \frac{3}{5}\cos\frac{s}{5}, \frac{4}{5}\right),$$

$$T' = \alpha''(s) = \left(-\frac{3}{25}\cos\frac{s}{5}, -\frac{3}{25}\sin\frac{s}{5}, 0\right),$$

$$\kappa = \|T'\| = \frac{3}{25},$$

$$N = \frac{T'}{\|T'\|} = \left(-\cos\frac{s}{5}, -\sin\frac{s}{5}, 0\right),$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N} = \left(\frac{4}{5} \sin \frac{s}{5}, -\frac{4}{5} \cos \frac{s}{5}, \frac{3}{5} \right)$$

$$\mathbf{B}'(s) = \left(\frac{4}{25} \cos \frac{s}{5}, \frac{4}{25} \sin \frac{s}{5}, 0 \right),$$

$$\tau = \|\mathbf{B}'\| = \frac{4}{25},$$

biçiminde elde edilir. Açılabilir regle yüzeyin küresel göstergesi olan $\mathbf{B}(s)$ birim hızlı küresel eğrisinin Sabban çatısının ayrıtları,

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}(s),$$

$$\mathbf{t} = \mathbf{B}'(s) = \left(\frac{4}{25} \cos \frac{s}{5}, \frac{4}{25} \sin \frac{s}{5}, 0 \right),$$

$$\boldsymbol{\eta}(s) = \mathbf{B} \times \mathbf{t} = \left(\frac{12}{125} \sin \frac{s}{5}, -\frac{12}{125} \cos \frac{s}{5}, -\frac{16}{125} \right),$$

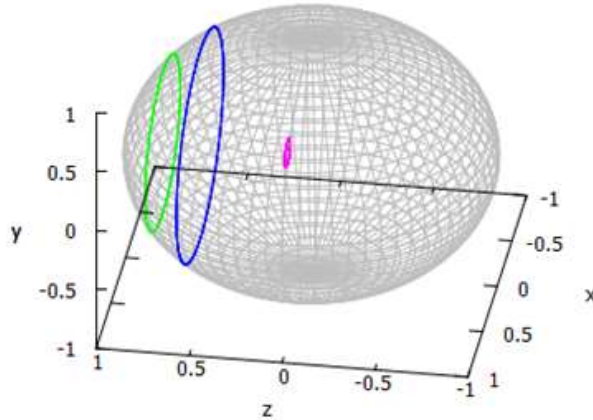
olarak bulunur. Ardından $\mathbf{B}$ nin çizdiği eğrinin jeodezik eğriliği,

$$k_g(s) = \det \left(\mathbf{B}(s), \mathbf{t}(s), \frac{d\mathbf{t}(s)}{ds} \right) = 0.003072$$

şeklindedir . Son olarak denklem (5.8) den $\mathbf{B}$ nin çizdiği eğrinin küresel evolutü,

$$\mathbf{e}_{\mathbf{B}(s)} \cong \left(\frac{12}{125} \sin \frac{s}{5}, -\frac{12}{125} \cos \frac{s}{5}, -\frac{16}{125} \right)$$

biçiminde yazılabilir. $\mathbf{T}(s)$, $\mathbf{B}(s)$ ve $\mathbf{e}_{\mathbf{B}(s)}$ vektörlerinin küresel görüntüleri Şekil 5.2 den görülebilir.



Şekil 5.2 $\mathbf{T}(s)$, $\mathbf{B}(s)$ ve $\mathbf{e}_{\mathbf{B}(s)}$ vektörlerinin küresel görüntüleri.

Diğer taraftan, (2.21) ve (5.2) denklemlerinden sırayla,

$$\frac{ds_t}{ds_b} = \frac{3}{4}, \quad d\sigma = \frac{3}{4} ds_b$$

denklemleri bulunur. Ayrıca, $\alpha(s)$ dayanak eğrisinin şekil eğriliği ve şekil burulması (5.9) denkleminde sırayla,

$$\tilde{\kappa} = -\frac{100}{9} \frac{d\kappa}{ds_b} \quad \text{ve} \quad \tilde{\tau} = \frac{4}{3}$$

biçiminde yazılabilir (Bulut and Caliskan, 2013).

5.2 İki Açılabilir Regle Yüzeyin Varyasyonları

Bu çalışmada, bir açılabilir regle yüzeyin yakın komşu dayanak eğrisinin diğer bir açılabilir regle yüzeyin dayanak eğrisinden elde edilmesi, bu dayanak eğrilerinin yay uzunlukları arasındaki varyasyon değişimi ve bu eğiriler arasındaki eğrilik değişimi verilmiştir. Bundan başka, bu iki açılabilir yüzey arasında yüzölçümünün birinci varyasyonu ve bu iki yüzeyin küresel görüntüleri ifade edilmiştir. Diğer taraftan, bu yüzeylerin küresel görüntüleri ile büküm eğrisi arasındaki bazı ilişkiler SLERP kullanılarak verilmiştir. Bunlara ek olarak, bu iki açılabilir yüzeyin küresel görüntülerinin Serret-Frenet çatıları, genel kuaterniyon çatı denklemlerine göre elde edilmiştir.

5.2.1 Küre Üzerinde Büküm Eğrisi

Küresel eğri, hareketli bir noktanın birim küre üzerinde çizdiği eğridir. Küre üzerinde, iki nokta arasındaki en kısa uzaklık bu iki noktayı birleştiren büyük çember yayıdır ve küre yüzeyi üzerinde jeodezik eğriliği sıfır olan eğriler sadece büyük çemberlerdir. Jeodezik eğrilik,

$$k_g = \frac{(\xi, \dot{\xi}, \ddot{\xi})}{(\dot{\xi} \times \ddot{\xi})^{3/2}} \quad (5.10)$$

biçimindedir. Burada, $\xi = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ vektörü küre yüzeyini çizen konum vektörüdür.

Büküm eğrisi, jeodezik eğriliği sıfır olan noktaların geometrik yeri olan küresel bir eğridir. Bu yüzden, büküm eğrisi çember yayı formunda bir yörüngedir. (5.10) denklemi kullanılarak $k_g = 0$ için, $(\xi, \dot{\xi}, \ddot{\xi}) = 0$ dan

$$(a^2 + b^2)c + \omega_{a1}b = 0 \quad (5.11)$$

denklemi elde edilir. Burada ω_{a1} , açısal ivme vektörünün ilk bileşenidir (Özçelik and Saka, 2010).

5.2.2 Herhangi Bir Bezier Eğrisinden Elde Edilen Yeni Bezier Eğrisi

Bezier eğrileri, bilgisayar grafiği ve ilgili alanlarda sıklıkla kullanılmaktadır. Bezier eğrileri, 1960 ların başında, matematiksel bir alt yapı gerektirmeden, tasarımcı ve artistler için yeterince sezgisel olarak kullanılabilecek biçimde şekil tasarımında bu eğriyi kullanmak için yeni bir eğri formülasyonu geliştirilmiştir.

Denklem (2.22) ile tanımlanan n dereceli bir $\alpha(t)$ Bezier eğrisi verilsin. Bir $\alpha(\hat{t})$ noktası, yeni yeri olan diğer bir $\bar{\alpha}$ noktasına değiştirilebilir.

$\bar{\alpha}$ nin $n-1$ bilinmeyenli bir denklem olan

$$\bar{\alpha} = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(\hat{t}) \widehat{P}_i \quad (5.12)$$

ifadesinde, $\{\widehat{P}_i\}$ kontrol noktalarını bulmamız gerekmektedir. P_0 ve P_n nin aynı kaldığını varsayalım. Bu ifade, sonsuz sayıda çok çözümlü ($n > 2$ için) belirsiz lineer bir sistem olduğundan, orjinal kontrol noktalarına en yakın olan noktayı bulmaya ihtiyacımız vardır. Bir lineer sistem olarak,

$$[B_{1,n}(\hat{t}) \quad \cdots \quad B_{n-1,n}(\hat{t})] \begin{bmatrix} \widehat{P}_1 \\ \vdots \\ \widehat{P}_{n-1} \end{bmatrix} = \bar{\alpha} - \widehat{P}_0 B_{0,n}(\hat{t}) - \widehat{P}_n B_{n,n}(\hat{t}) = m \quad (5.13)$$

veya

$$A\hat{B} = m \quad (5.14)$$

biçiminde yazılabilir. Burada $A = [B_{1,n}(\hat{t}) \quad \cdots \quad B_{n-1,n}(\hat{t})]$ dir. Bilinmeyenler,

$$\hat{B} = B + A^T \mathbf{c} \quad (5.15)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\mathbf{c}$ bilinmeyen bir vektördür. En küçük kareler yöntemi kullanılarak

$$A\hat{B} = AB + AA^T \mathbf{c}$$

denklemini elde edilir. Dolayısıyla,

$$\mathbf{c} = \frac{1}{a} (\bar{\alpha} - \alpha)$$

şeklindedir ve sonuç olarak

$$\hat{B} = B + \frac{1}{a} A^T (\bar{\alpha} - \alpha)$$

ifadesi bulunur. Burada $a = AA^T$ dir. Tüm $\hat{P}_1, \dots, \hat{P}_{n-1}$ Bezier noktaları, $\bar{\alpha} - \alpha$ ile aynı yönde fakat farklı yerdeğiştirme büyüklükleriyle hareket etmiş olur (Farin, 2002).

5.2.3 Yay Uzunluğu Parametrizasyonu

Eğrilerin parametrizasyonu, BDGT da önemli problemlerden biridir. Genel parametrik bir $\alpha(t)$ eğrisi için $\alpha(s)$ yay uzunluğu parametrizasyonu, eğri üzerindeki $\alpha(s_0)$ ve $\alpha(s_1)$ noktaları arasındaki $l = s_1 - s_0$ uzunluğudur. l ve s arasındaki herhangi bir lineer ilişki yay uzunluğu parametrizasyonu olarak adlandırılmaktadır. Eğri tasarımında kullanılan formüllerin çoğunda, eğrinin uzunluğu parametrenin değerleriyle lineer olarak ilişkili değildir. Parametrik eğrilerin birçok uygulamasında, parametrik değerlerin yay uzunluğu ile kolay bir şekilde ilişkilendirilebilmesi esastır ve tersi de doğrudur. Örnek olarak, animatörün, uzunluğun sabit tutulması gerektiği ayakkabı bağı, ip gibi esnek nesneleri tanımladığı bilgisayar destekli animasyon sistemleri verilebilir. Ayrıca yay uzunluğu parametrizasyonuna, animasyonda kullanılan hareket yolları gibi eğri boyunca hızı hesaplamak için de ihtiyaç duyulmaktadır (Walter and Fournier, 1996).

Parametrizasyon işlemi için pek çok yöntem, yay uzunluğu parametrizasyonuna yakın bir çözüm bulmayı amaçlamaktadır. Yay uzunluğu

parametrizasyonu Bezier eğrileri için genellikle zor bir durumdur. Yay uzunluğu parametrizasyonu elde edilse bile istenilen Bezier formunda değildir. Dolayısıyla, yay uzunluğu parametrizasyon yaklaşımı iyi bir alternatif yöntem olacaktır (Bai and Shi, 2005). Bu nedenle literatürde, çeşitli algoritma ve çözüm yöntemleri, Bezier eğrileri için yaklaşık yay uzunluğu parametrizasyonunu elde etmede kullanılmaktadır.

5.2.4 Yakın Komşu Eğrinin Varyasyonu

$\alpha(s)$ eğrisi düzlem veya uzay eğrisi olsun. Dolayısıyla, bu eğrinin $\bar{\alpha}(s)$ yakın komşu eğrisi

$$\bar{\alpha} = \alpha + uT + vN + wB = \alpha + y \quad (5.16)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\{T, N, B\}$, $\alpha(s)$ eğrisinin Serret-Frenet çatısının birim vektörleridir, ve u, v ve w değerleri

$$u = \varepsilon \bar{u}(s), \quad v = \varepsilon \bar{v}(s), \quad w = \varepsilon \bar{w}(s), \quad y = \varepsilon \bar{y}(s) \quad (5.17)$$

biçiminde s nin ε parametresiyle çarpıldığı fonksiyonlardır. Eğer ($\varepsilon \rightarrow 0$) koşulu olursa $\bar{\alpha}(s)$ yakın komşu eğrisi $\alpha(s)$ eğrisine yaklaşmaktadır.

$\bar{\alpha}(s)$ yakın komşu eğrisinin yay uzunluğunun varyasyonu ve eğriliğini, Bölüm 4.2 de olduğu gibi r ve r_* yerine sırayla α ve $\bar{\alpha}$ eğrisi, s_* yerine $\bar{s}$ yazarak inceleyebiliriz.

5.2.5 Yüzeylerin Birinci Varyasyonu

Şimdi, şekil değiştiğinde yüzey alanının nasıl değiştiğini hesaplayabiliriz. $P(s, t)$ yüzeyi orjinal yüzey olsun, yüzey normalleri üzerindeki uzunlukları,

$$\gamma(s, t) = \varepsilon \bar{\gamma}(s, t) \quad (5.18)$$

olarak alabiliriz. Ardından, verilen yüzeyin komşu yüzeyi

$$\bar{P}(s, t) = P(s, t) + \gamma n \quad (5.19)$$

şeklinde yazılabilir. Burada, $\mathbf{n}$ birim vektörü $\mathbf{P}(s, t)$ orjinal yüzeyinin birim normalini göstermektedir. Bu son haldeki yüzey, $\varepsilon \rightarrow 0$ için $\mathbf{P}(s, t)$ orjinal yüzeyine dönüşür. (5.19) dan türev alarak

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{P}}_s = \mathbf{P}_s + \gamma_s \mathbf{n} + \gamma \mathbf{n}_s \\ \bar{\mathbf{P}}_t = \mathbf{P}_t + \gamma_t \mathbf{n} + \gamma \mathbf{n}_t \end{cases}$$

denklemini elde edebiliriz. Ardından, $\bar{\mathbf{P}}(s, t)$ yüzeyinin birinci temel formunun elemanlarını, ε na göre ikinci-derece terimleri ihmal ederek

$$\bar{E} = \bar{\mathbf{P}}_s^2, \quad \bar{F} = \mathbf{P}_s \mathbf{P}_t, \quad \bar{G} = \bar{\mathbf{P}}_t^2. \quad (5.20)$$

biçiminde hesaplayabiliriz. Buradan, (4.80) denkleminde verilen bağıntılara benzer şekilde $\mathbf{P}(s, t)$ yüzeyinin birinci ve ikinci temel formlarının terimleri kullanılarak elde edilebilir. Burada (4.80) denkleminde, E^* , F^* ve G^* yerine sırayla $\bar{E}$, $\bar{F}$ ve $\bar{G}$ ve ayrıca d , D , D' ve D'' yerine sırayla γ , L , M ve N yazılmıştır. Ayrıca,

$$\bar{W}^2 = \bar{E} \bar{G} - \bar{F}^2$$

için aşağıdaki

$$\bar{W}^2 = EG - F^2 - 2\gamma(EN - 2FM + GL)$$

ve

$$2H = \frac{EN - 2FM + GL}{EG - F^2}$$

denklemleri kullanılarak

$$\bar{W} = W(1 - 2\gamma H) \quad (5.21)$$

ilişkisi bulunur. Burada, H değeri $\mathbf{P}(s, t)$ orjinal yüzeyinin ortalama eğriliğini gösterir. $\bar{\mathbf{P}}(s, t)$ yüzeyinin yüzey alanı, (5.21) kullanılarak denklem (4.83) de olduğu gibi yazılabilir. Böylece, bir yüzeyin yüzey alanının birinci varyasyonu, γ yerine $\delta\gamma$ alınarak (5.84) denkleminde olduğu gibi ifade edilebilir.

5.2.6 İki Açılabilir Regle Yüzeyin Varyasyonları

$\mathbf{P}(s, t) = \boldsymbol{\alpha}(s) + t\mathbf{T}(s)$ yüzeyi $\boldsymbol{\alpha}'(s) = \mathbf{T}$ olmak üzere bir açılabilir regle yüzey olsun. Bölüm 2.2.5 ve 2.2.6 da ifade edildiği gibi, $\boldsymbol{\alpha}(s)$ eğrisi bu yüzeyin dayanak eğrisidir. Diğer taraftan, $\boldsymbol{\alpha}(s)$ dayanak eğrisini Bezier eğrisi olarak alırsak, denklem (2.22) ile verilen Bezier eğrisi, Bölüm 5.2.3 de bahsedildiği gibi literatürde bulunan yöntemlerden biri kullanılarak yay uzunluğu parametresi ile tekrar parametrelendirilebilir. Bu Bezier eğrisi, $\mathbf{P}(s, t)$ açılabilir regle yüzeyinin dayanak eğrisi olarak alınabilir. Böylece, dayanak eğrisi $\mathbf{P}(s, t)$ açılabilir regle yüzeyinin $\boldsymbol{\alpha}(s)$ dayanak eğrisinin yakın komşu eğrisi $\bar{\boldsymbol{\alpha}}(s)$ olan bir açılabilir regle yüzeyi

$$\bar{\mathbf{P}}(s, t) = \bar{\boldsymbol{\alpha}}(s) + t\bar{\mathbf{T}}(s), \quad \bar{\boldsymbol{\alpha}}'(s) = \bar{\mathbf{T}} \quad (5.22)$$

biçiminde yazabiliriz. Benzer şekilde, denklem (5.12) deki $\bar{\boldsymbol{\alpha}}(s)$ Bezier eğrisininin denklem (5.16) deki yakın komşu eğriye karşılık geldiğini düşünelim. Böylece, yakın komşu Bezier eğrisi yay uzunluğu parametresi kullanılarak

$$\bar{\boldsymbol{\alpha}} = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(\hat{u}) \hat{\mathbf{P}}_i = \bar{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{\alpha} + u\mathbf{T} + v\mathbf{N} + w\mathbf{B} = \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{y} \quad (5.23)$$

biçiminde ifade edilebilir.

Diğer taraftan,

$$\bar{\boldsymbol{\alpha}}'(s) = \bar{\mathbf{T}} = \boldsymbol{\alpha}' + \mathbf{y}' = \mathbf{T} + \varepsilon\bar{\mathbf{y}}' \quad (5.24)$$

ve

$$\mathbf{y}' = \varepsilon\bar{\mathbf{y}}' = (u' - \kappa v)\mathbf{T} + (v' + \kappa u - \tau w)\mathbf{N} + (w' + \tau v)\mathbf{B} \quad (5.25)$$

olduğundan, $\bar{\boldsymbol{\alpha}}(s)$ dayanak eğrisinin birim teğet vektörü

$$\bar{\boldsymbol{\alpha}}'(s) = \bar{\mathbf{T}} = (1 + u' - \kappa v)\mathbf{T} + (v' + \kappa u - \tau w)\mathbf{N} + (w' + \tau v)\mathbf{B} \quad (5.26)$$

olur ve denklem (5.22) ile (5.26) i kullanarak $\bar{\mathbf{P}}(s, t)$ açılabilir regle yüzeyini

$$\bar{\mathbf{P}}(s, t) = \boldsymbol{\alpha}(s) + t[(1 + u + u' - v\kappa)\mathbf{T} + (u\kappa + v + v' - w\tau)\mathbf{N} + (v\tau + w + w')\mathbf{B}] \quad (5.27)$$

şeklinde ifade edebiliriz. Eğer $(\boldsymbol{\alpha})$ ve $(\bar{\boldsymbol{\alpha}})$ dayanak eğrileri ortak sınır noktalarına sahipse, yani $[u(s_1) = 0, u(s_2) = 0]$ ise o zaman bu eğrilerin yay uzunluklarının birinci varyasyonunu denklem (4.27) de ifade edildiği şekilde yazabiliriz. Eğer, (4.27) denkleminde v yerine δn yazılırsa, (4.28) denklemi elde edilir.

Bunlara ek olarak, $(\boldsymbol{\alpha})$ ve $(\bar{\boldsymbol{\alpha}})$ dayanak eğrileri arasındaki eğrilik ilişkisi denklem (4.33) de olduğu gibi ifade edilebilir. Böylece, denklem (5.16), (5.17) ve (5.25) ile

$$\begin{aligned} \mathbf{y}'' &= (u'' - \kappa'v - \kappa v' - \kappa^2 u + \kappa\tau w)\mathbf{T} \\ &+ (v'' + \kappa'u + 2\kappa u' - \kappa^2 v - \tau'w - 2\tau w' - \tau^2 v)\mathbf{N} \\ &+ (w' + \tau'v + 2\tau v' + \kappa\tau u - \tau^2 w + w')\mathbf{B} \end{aligned}$$

denklemi kullanılarak $(\boldsymbol{\alpha})$ ve $(\bar{\boldsymbol{\alpha}})$ dayanak eğrileri arasındaki eğrilik değişimi

$$\delta\kappa = \kappa^2 v - \kappa u' + \frac{d}{ds}(v' + \kappa u - \tau w) - (w' + \tau v)\tau \quad (5.28)$$

olarak elde edilebilir (Blaschke, 1950).

TEOREM 5.2.1: $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}(s)$ eğrisi kendi yay uzunluğu ile parametrelenmiş düzlem ya da uzay eğrisi olsun. O halde, n . ardışık yakın komşu eğrisi

$$\boldsymbol{\alpha}_n = \boldsymbol{\alpha} + U_{n-1}\mathbf{T} + V_{n-1}\mathbf{N} + W_{n-1}\mathbf{B} \quad (5.29)$$

olarak ifade edilebilir. Burada, $\mathbf{T}$, $\mathbf{N}$ ve $\mathbf{B}$ vektörleri $\boldsymbol{\alpha}(s)$ eğrisinin Serret-Frenet çatısıdır.

İspat: $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}(s)$ eğrisi verisin. $\boldsymbol{\alpha}(s)$ ve $\boldsymbol{\alpha}_1(s)$ eğrilerinin yakın komşu eğrileri sırayla

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \boldsymbol{\alpha} + u\mathbf{T} + v\mathbf{N} + w\mathbf{B} \quad (5.30)$$

ve

$$\boldsymbol{\alpha}_2 = \boldsymbol{\alpha}_1 + u_1\mathbf{T}_1 + v_1\mathbf{N}_1 + w_1\mathbf{B}_1 \quad (5.31)$$

biçiminde yazılabilir. α_2 eğrisi, (5.30) denklemi kullanılarak

$$\begin{aligned}
 \alpha_2 &= \alpha + u\mathbf{T} + v\mathbf{N} + w\mathbf{B} + u_1(\alpha_1\mathbf{T} + \beta_1\mathbf{N} + \gamma_1\mathbf{B}) \\
 &+ v_1\frac{1}{\bar{\kappa}}(a_1\mathbf{T} + b_1\mathbf{N} + c_1\mathbf{B}) + w_1\frac{1}{\bar{\kappa}}(p_1\mathbf{T} + q_1\mathbf{N} + r_1\mathbf{B}) \\
 &= \alpha + (u + u_1\alpha_1 + \frac{1}{\bar{\kappa}}v_1a_1 + \frac{1}{\bar{\kappa}}w_1p_1)\mathbf{T} \\
 &+ \left(v + u_1\beta_1 + \frac{1}{\bar{\kappa}}v_1b_1 + \frac{1}{\bar{\kappa}}w_1q_1\right)\mathbf{N} + \left(w + u_1\gamma_1 + \frac{1}{\bar{\kappa}}v_1c_1 + \frac{1}{\bar{\kappa}}w_1r_1\right)\mathbf{B}
 \end{aligned} \tag{5.32}$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada,

$$\begin{cases} \mathbf{T}_1 = \alpha_1\mathbf{T} + \beta_1\mathbf{N} + \gamma_1\mathbf{B} \\ \mathbf{N}_1 = \frac{1}{\bar{\kappa}}(a_1\mathbf{T} + b_1\mathbf{N} + c_1\mathbf{B}) \\ \mathbf{B}_1 = \frac{1}{\bar{\kappa}}(p_1\mathbf{T} + q_1\mathbf{N} + r_1\mathbf{B}), \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_1 = 1 + u' - \kappa v \\ \beta_1 = v' + \kappa u - \sigma w \\ \gamma_1 = w' + \sigma v, \end{cases}$$

ve

$$\begin{cases} a_1 = \alpha'_1 - \kappa\beta_1 \\ b_1 = \alpha_1\kappa + \beta'_1 - \gamma_1\kappa \\ c_1 = \beta_1\sigma + \gamma'_1, \end{cases} \quad \begin{cases} p_1 = \beta_1c_1 - b_1\gamma_1 \\ q_1 = a_1\gamma_1 - \alpha_1c_1 \\ r_1 = \alpha_1b_1 - a_1\beta_1, \end{cases}$$

biçimindedir. (5.32) de bulunan $\bar{\kappa}$ değerini (4.33) denkleminde κ_* yerine $\bar{\kappa}$ kullanarak tanımlayabiliriz. Ardından, (5.32) denklemini,

$$\alpha_2 = \alpha + U_1\mathbf{T} + V_1\mathbf{N} + W_1\mathbf{B} \tag{5.33}$$

şeklinde ifade edebiliriz. Burada;

$$\begin{cases} U_1 = u + u_1\alpha_1 + \frac{1}{\bar{\kappa}}v_1a_1 + \frac{1}{\bar{\kappa}}w_1p_1 \\ V_1 = v + u_1\beta_1 + \frac{1}{\bar{\kappa}}v_1b_1 + \frac{1}{\bar{\kappa}}w_1q_1 \\ W_1 = w + u_1\gamma_1 + \frac{1}{\bar{\kappa}}v_1c_1 + \frac{1}{\bar{\kappa}}w_1r_1 \end{cases}$$

biçimindedir. Eğer, ispatımızın başından itibaren ifade ettiğimiz sürece aynı şekilde devam edersek, $\alpha(s)$ eğrisinin n . ardışık yakın komşu eğrisi

$$\alpha_n = \alpha + U_{n-1}\mathbf{T} + V_{n-1}\mathbf{N} + W_{n-1}\mathbf{B}.$$

şeklinde ifade edilebilir.

TEOREM 5.2.2: $\alpha = \alpha(s)$ eğrisi, kendi yay uzunluğu ile parametrelenmiş düzlem ya da uzay eğrisi olsun. Bu eğrinin teğetlerinden oluşmuş açılabilir regle yüzey, $\mathbf{P}(s, t) = \alpha(s) + t\mathbf{T}(s)$ biçiminde yazılabilir. $\alpha = \alpha(s)$ eğrisine bağlı olarak $\mathbf{P}(s, t)$ açılabilir regle yüzeyinin n . ardışık yakın komşu açılabilir regle yüzeyi

$$\mathbf{P}_n(s, t) = \alpha(s) + U_{n-1}\mathbf{T} + V_{n-1}\mathbf{N} + W_{n-1}\mathbf{B} + t[\alpha_n\mathbf{T} + \beta_n\mathbf{N} + \gamma_n\mathbf{B}] \quad (5.34)$$

ile ifade edilebilir.

İspat: Dayanak eğrisi, $\mathbf{P}(s, t)$ açılabilir regle yüzeyinin $\alpha(s)$ dayanak eğrisinin yakın komşu eğrisi $\alpha_1(s)$ olan bir açılabilir regle yüzey,

$$\mathbf{P}_1(s, t) = \alpha_1(s) + t\mathbf{T}_1 \quad (5.35)$$

olarak yazılabilir. Denklem (5.26) ve (5.30) kullanılarak, (5.35) denklemi

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_1(s, t) &= \alpha(s) + u\mathbf{T} + v\mathbf{N} + w\mathbf{B} \\ &+ t[(1 + u + u' - v\kappa)\mathbf{T} + (u\kappa + v + v' - w\sigma)\mathbf{N} + (v\sigma + w + w')\mathbf{B}] \\ &= \alpha(s) + u\mathbf{T} + v\mathbf{N} + w\mathbf{B} + t(\alpha_1\mathbf{T} + \beta_1\mathbf{N} + \gamma_1\mathbf{B}) \end{aligned}$$

biçiminde ifade edilebilir. Burada,

$$\alpha_1 = 1 + u + u' - v\kappa, \quad \beta_1 = u\kappa + v + v' - w\sigma \quad \text{ve} \quad \gamma_1 = v\sigma + w + w'$$

şeklindedir. Ardından, dayanak eğrisi, $\mathbf{P}_1(s, t)$ açılabilir regle yüzeyinin $\alpha_1(s)$ dayanak eğrisinin yakın komşu eğrisi $\alpha_2(s)$ olan bir açılabilir regle yüzey,

$$\mathbf{P}_2(s, t) = \boldsymbol{\alpha}_2(s) + t\mathbf{T}_2 \quad (5.36)$$

olarak ifade edilebilir. TEOREM 5.2.1 kullanılarak (5.36) denklemi

$$\mathbf{P}_2(s, t) = \boldsymbol{\alpha}(s) + U_1\mathbf{T} + V_1\mathbf{N} + W_1\mathbf{B} + t(\alpha_2\mathbf{T} + \beta_2\mathbf{N} + \gamma_2\mathbf{B})$$

şeklinde yazılabilir. Eğer, ispatın başından itibaren ifade edilen sürece aynı şekilde devam edilirse, $\boldsymbol{\alpha}(s)$ eğrisine bağlı $\mathbf{P}(s, t)$ yüzeyinin n . ardışık yakın komşu açılabilir regle yüzeyi,

$$\mathbf{P}_n(s, t) = \boldsymbol{\alpha}(s) + U_{n-1}\mathbf{T} + V_{n-1}\mathbf{N} + W_{n-1}\mathbf{B} + t[\alpha_n\mathbf{T} + \beta_n\mathbf{N} + \gamma_n\mathbf{B}]$$

biçiminde ifade edilebilir.

5.2.7 Uygulama

Burada, bir açılabilir regle yüzeyin dayanak eğrisinden yola çıkılarak yakın komşu bir açılabilir regle yüzey elde edilmiştir. Bunlara ek olarak, bu iki açılabilir regle yüzey ile dayanak eğrileri arasındaki yakın komşu olma özellikleri Matlab kullanılarak çizilen şekillerle gösterilmiştir. Ayrıca, bu iki yüzey arasındaki yüzölçümlerinin varyasyonları, aşağıda verilen örneklerde bulunan ilgili tablolarda sunulmuştur.

ÖRNEK 1: $\mathbf{P}(s, t)$ açılabilir regle yüzeyi, $\boldsymbol{\alpha}'(s) = \mathbf{T}$ olmak üzere $\mathbf{P}(s, t) = \boldsymbol{\alpha}(s) + t\mathbf{T}(s)$ denklemi kullanılarak,

$$\mathbf{P}(s, t) = \left(2\sin\frac{s}{\sqrt{29}}, 2\cos\frac{s}{\sqrt{29}}, \frac{5s}{\sqrt{29}}\right) + t\left(\frac{2}{\sqrt{29}}\cos\frac{s}{\sqrt{29}}, -\frac{2}{\sqrt{29}}\sin\frac{s}{\sqrt{29}}, \frac{5}{\sqrt{29}}\right)$$

biçiminde yazılabilir. Bu yüzeyin dayanak eğrisi, $\boldsymbol{\alpha}(s) = \left(2\sin\frac{s}{\sqrt{29}}, 2\cos\frac{s}{\sqrt{29}}, \frac{5s}{\sqrt{29}}\right)$ dir ve bu eğrinin birim teğet, birim asal normal ve birim binormal vektörleri sırayla

$$\mathbf{T} = \left(\frac{2}{\sqrt{29}}\cos\frac{s}{\sqrt{29}}, -\frac{2}{\sqrt{29}}\sin\frac{s}{\sqrt{29}}, \frac{5}{\sqrt{29}}\right), \quad \mathbf{N} = \left(-\sin\frac{s}{\sqrt{29}}, -\cos\frac{s}{\sqrt{29}}, 0\right)$$

$$\mathbf{B} = \left(\frac{5}{\sqrt{29}}\cos\frac{s}{\sqrt{29}}, -\frac{5}{\sqrt{29}}\sin\frac{s}{\sqrt{29}}, -\frac{2}{\sqrt{29}}\right)$$

biçimindedir. Bunlara ek olarak, bu eğrinin eğrilik ve burulması

$$\kappa = \frac{2}{29}, \quad \tau = \frac{5}{29} \quad (5.37)$$

olarak bulunur. (5.16) denklemini kullanarak, $\alpha(s)$ dayanak eğrisinden $\bar{\alpha}(s)$ yakın komşu eğrisi,

$$\bar{\alpha}(s) = \left(\frac{19-s}{10} \sin \frac{s}{\sqrt{29}} + \frac{12s+15}{10\sqrt{29}} \cos \frac{s}{\sqrt{29}}, \frac{19-s}{10} \cos \frac{s}{\sqrt{29}} - \frac{12s+15}{10\sqrt{29}} \sin \frac{s}{\sqrt{29}}, \frac{51s-6}{10\sqrt{29}} \right)$$

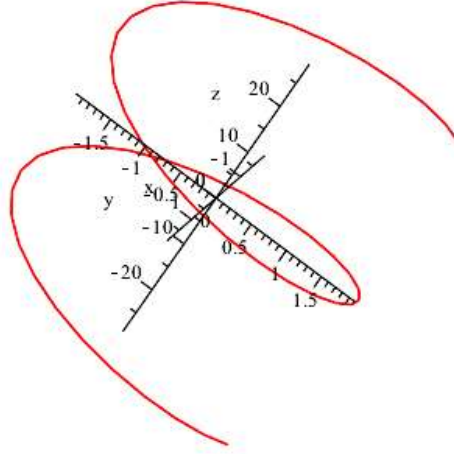
şeklinde yazılabilir. Burada,

$$u = \frac{1}{10}s, \quad v = \frac{1}{10}(s+1), \quad w = \frac{1}{10}(2s+3), \quad \text{ve} \quad \varepsilon = \frac{1}{10} \quad (5.38)$$

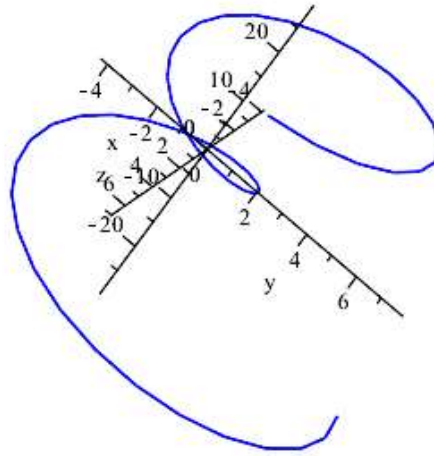
biçimindedir. Bunlara ek olarak, dayanak eğrisi $\bar{\alpha}(s)$ olan $\bar{\mathbf{P}}(s, t)$ açılabilir regle yüzeyi denklem (5.27) kullanılarak

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{P}}(s, t) = & \left(\frac{19-s}{10} \sin \frac{s}{\sqrt{29}} + \frac{12s+15}{10\sqrt{29}} \cos \frac{s}{\sqrt{29}}, \frac{19-s}{10} \cos \frac{s}{\sqrt{29}} - \frac{12s+15}{10\sqrt{29}} \sin \frac{s}{\sqrt{29}}, \frac{51s-6}{10\sqrt{29}} \right) \\ & + t \left[-\frac{1}{10} \sin \frac{s}{\sqrt{29}} + \frac{31-s}{10\sqrt{29}} \cos \frac{s}{\sqrt{29}} - \frac{12s+15}{10.29} \cos \frac{s}{\sqrt{29}}, \right. \\ & \left. -\frac{1}{10} \cos \frac{s}{\sqrt{29}} + \frac{31-s}{10\sqrt{29}} \sin \frac{s}{\sqrt{29}} - \frac{12s+15}{10.29} \cos \frac{s}{\sqrt{29}}, \right. \\ & \left. \frac{51}{10\sqrt{29}} \right]. \end{aligned}$$

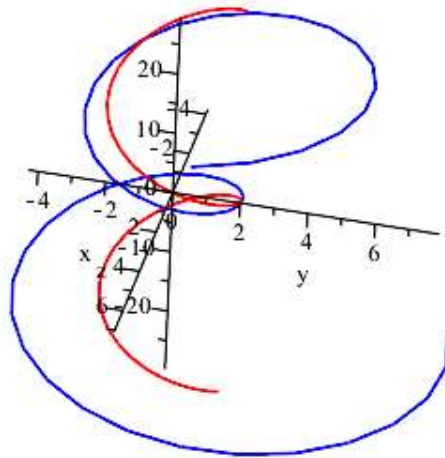
şeklinde yazılabilir. Şekil 5.3, Şekil 5.4 ve Şekil 5.5 sırayla, $\alpha(s)$ ve $\bar{\alpha}(s)$ dayanak eğrilerini ve aralarındaki varyasyonu, Şekil 5.6, Şekil 5.7 ve Şekil 5.8 ise sırayla $\mathbf{P}(s, t)$ ve $\bar{\mathbf{P}}(s, t)$ açılabilir regle yüzeylerini ve aralarındaki ilişkileri göstermektedir (Bulut and Caliskan, 2015c).



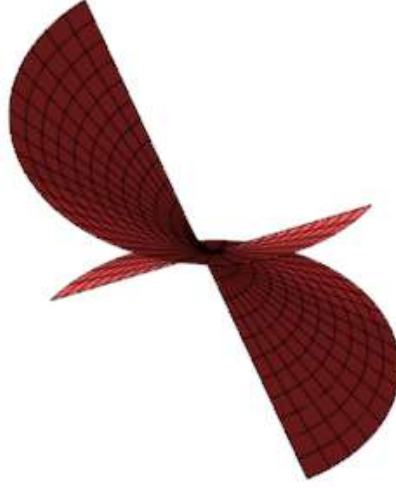
Şekil 5.3 $P(s, t)$ açılabilir regle yüzeyinin $\alpha(s)$ dayanak eğrisi.



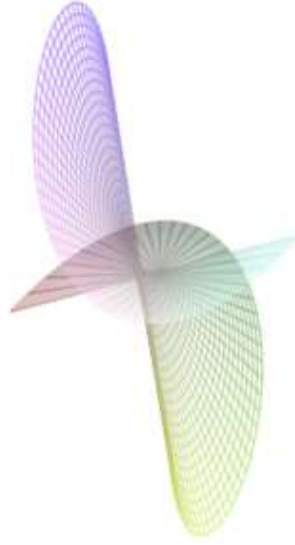
Şekil 5.4 $\bar{P}(s, t)$ açılabilir regle yüzeyinin dayanak eğrisi olan $\bar{\alpha}(s)$ yakın komşu eğrisi.



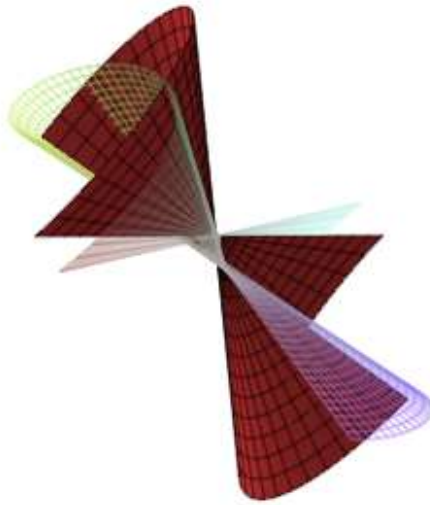
Şekil 5.5 $\alpha(s)$ dayanak eğrisi ve $\bar{\alpha}(s)$ yakın komşu eğrisi.



Şekil 5.6 $P(s, t)$ açılabilir regle yüzeyi.



Şekil 5.7 $\bar{P}(s, t)$ açılabilir regle yüzeyi.



Şekil 5.8 $P(s, t)$ ve $\bar{P}(s, t)$ açılabilir regle yüzeyleri.

Diğer taraftan, $\alpha(s)$ ve $\bar{\alpha}(s)$ dayanak eğrilerinin yay uzunluklarının birinci varyasyonu $s_1 = 0$ ve $s_2 = 1$ değerleri için (4.26), (5.37) ve (5.38) denklemleri kullanılarak,

$$\delta s = \frac{13}{145}$$

olarak bulunur. Dahası, $\alpha(s)$ ve $\bar{\alpha}(s)$ dayanak eğrilerinin eğrilik değişimleri (5.28), (5.37) ve (5.38) denklemlerinden

$$\delta \kappa = -\frac{141}{10.29^2} s - \frac{2113}{10.29^2}.$$

biçiminde elde edilir. Bunlara ek olarak, denklem (5.19), $\bar{\mathbf{P}}(s, t)$ açılabilir regle yüzeyini γ fonksiyonu ile

$$\bar{\mathbf{P}}(s, t) = \mathbf{P}(s, t) + \gamma \mathbf{n}.$$

şeklinde tanımlamak için kullanılabilir, (γ nın hesaplanması için Ek 1 kısmına bakınız). Böylece, denklem (5.20) ve

$$E = \mathbf{P}_s^2 = 1 + \frac{4t^2}{29^2}, \quad F = \mathbf{P}_s \cdot \mathbf{P}_t = 1, \quad N = \frac{(\mathbf{P}_s, \mathbf{P}_t, \mathbf{P}_{tt})}{W} = 0, \quad G = \mathbf{P}_t^2 = 1$$

$$L = \frac{(\mathbf{P}_s, \mathbf{P}_t, \mathbf{P}_{ss})}{W} = \frac{10t}{10\sqrt{29}}, \quad M = \frac{(\mathbf{P}_s, \mathbf{P}_t, \mathbf{P}_{st})}{W} = 0, \quad W = \sqrt{EG - F^2} = \frac{2t}{29}$$

eşitlikleri kullanılarak, $\bar{\mathbf{P}}(s, t)$ açılabilir regle yüzeyinin birinci temel formunun terimleri ve $\bar{W}$ değeri,

$$\bar{E} = 1 + \frac{4t^2}{29^2} - 2\gamma \frac{10t}{29\sqrt{29}}, \quad \bar{F} = 1, \quad \bar{G} = 1, \quad \bar{W} = \frac{2t}{29} - \frac{10\gamma}{\sqrt{29}}$$

biçiminde yazılabilir. $\mathbf{P}(s, t)$ ve $\bar{\mathbf{P}}(s, t)$ açılabilir regle yüzeyleri arasındaki yüzölçümünün birinci varyasyonu için bazı sonuçlar, denklem (4.84) ve

$$H = \frac{EN - 2FM + GL}{EG - F^2} = \frac{145}{2t\sqrt{29}}$$

eşitliği kullanılarak Çizelge 5.1 de verilmiştir.

s and t values	δO
$s=[0,1]$ and $t=[0,1]$	-0.002381411219
$s=[1,2]$ and $t=[1,2]$	0.02372881044
$s=[2,3]$ and $t=[2,3]$	0.0324054119
$s=[3,4]$ and $t=[3,4]$	0.02213758352
$s=[4,5]$ and $t=[4,5]$	-0.0003960985813
$s=[5,6]$ and $t=[5,6]$	-0.02973839644
$s=[6,7]$ and $t=[6,7]$	-0.06202910109

Çizelge 5.1 $P(s, t)$ ve $\bar{P}(s, t)$ açılabilir regle yüzeyleri arasındaki yüzölçümünün birinci varyasyonu için bazı sonuçlar.

ÖRNEK 2: $\alpha(t)$ Bezier eğrisi, $P_0 = (0,0,0)$, $P_1 = (0,2,1)$ ve $P_3 = (2,4,0)$ kontrol noktaları kullanılarak

$$\alpha(t) = (2t^2, 4t, 4t - t^2).$$

biçiminde verilsin. Yakın komşu Bezier eğrisi, denklem (5.16) ve (5.17) kullanılarak

$$\bar{\alpha}(t) = \left(\frac{20t^2 - t}{10}, \frac{35t + 4}{10}, \frac{37t - 40t^2 - 2}{10} \right)$$

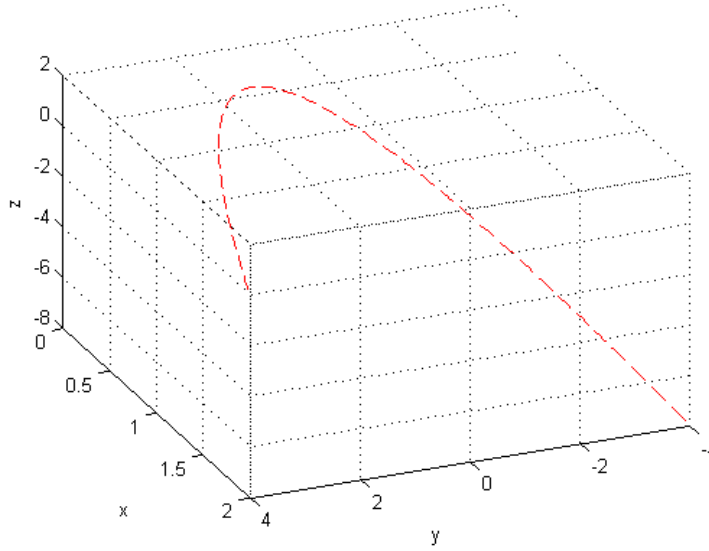
olarak ifade edilebilir. Burada, $u = \sqrt{5t^2 - 4t + 2}$, $v = \sqrt{6(5t^2 - 4t + 2)}$, $w = \sqrt{6}$ ve $\varepsilon = \frac{1}{10}$ dir. Böylece, dayanak eğrileri sırayla $\alpha(t)$ ve $\bar{\alpha}(t)$ Bezier eğrileri olan açılabilir regle yüzeyleri,

$$P(t, \lambda) = \begin{pmatrix} 2t^2 + \lambda \left(\frac{t}{\sqrt{5t^2 - 4t + 2}} \right), 4t + \lambda \left(\frac{1}{\sqrt{5t^2 - 4t + 2}} \right), \\ (4t - t^2) + \lambda \left(\frac{1 - 2t}{\sqrt{5t^2 - 4t + 2}} \right) \end{pmatrix}$$

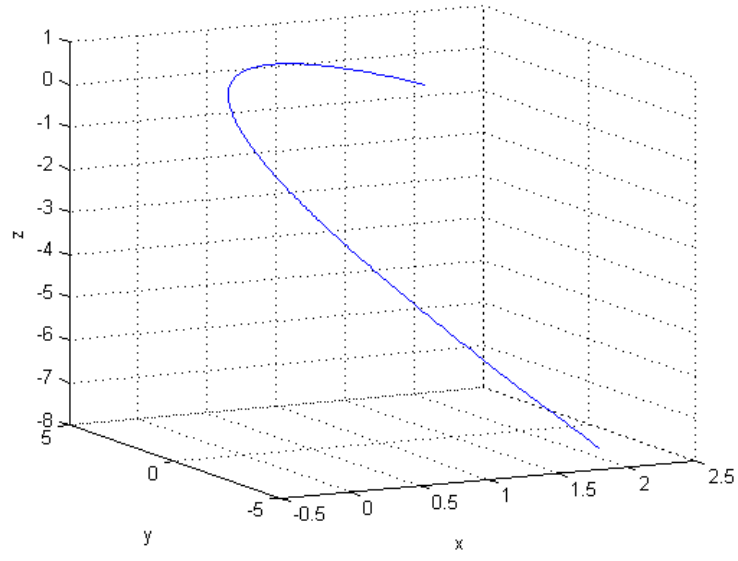
ve

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{P}}(t, \lambda) = & \left[\frac{20t^2 - t}{10} + \lambda \frac{1}{10} \left(\frac{40t - 1}{\sqrt{(40t - 1)^2 + 35^2 + (37 - 80t)^2}} \right), \right. \\ & \frac{35t + 4}{10} + \lambda \frac{1}{10} \left(\frac{35}{\sqrt{(40t - 1)^2 + 35^2 + (37 - 80t)^2}} \right), \\ & \left. \frac{37t - 40t^2 - 2}{10} + \lambda \frac{1}{10} \left(\frac{37 - 80t}{\sqrt{(40t - 1)^2 + 35^2 + (37 - 80t)^2}} \right) \right].\end{aligned}$$

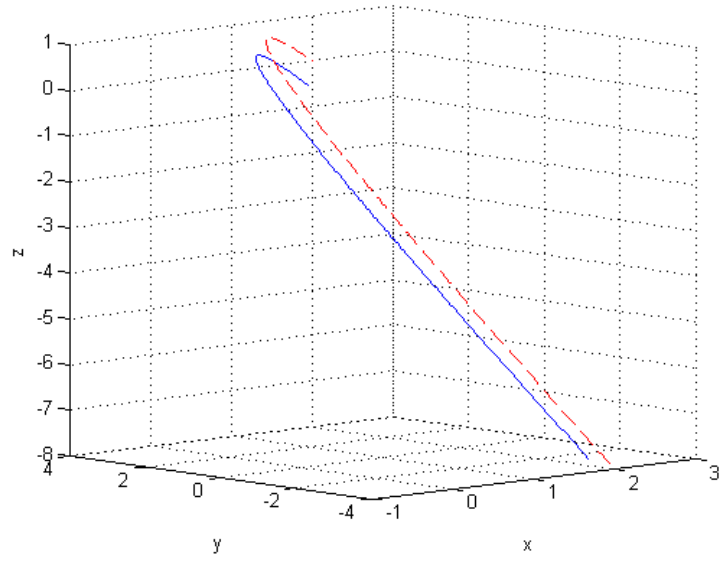
denklemleriyle ifade edilebilir. $\alpha(t)$ ve $\bar{\alpha}(t)$ dayanak eğrileri, $\mathbf{P}(t, \lambda)$ ve $\bar{\mathbf{P}}(t, \lambda)$ açılabilir regle yüzeyleri ve aralarındaki ilişkiler sırayla Şekil 5.9, Şekil 5.10 ve Şekil 5.11 ile Şekil 5.12, Şekil 5.13 ve Şekil 5.14 den görülebilir.



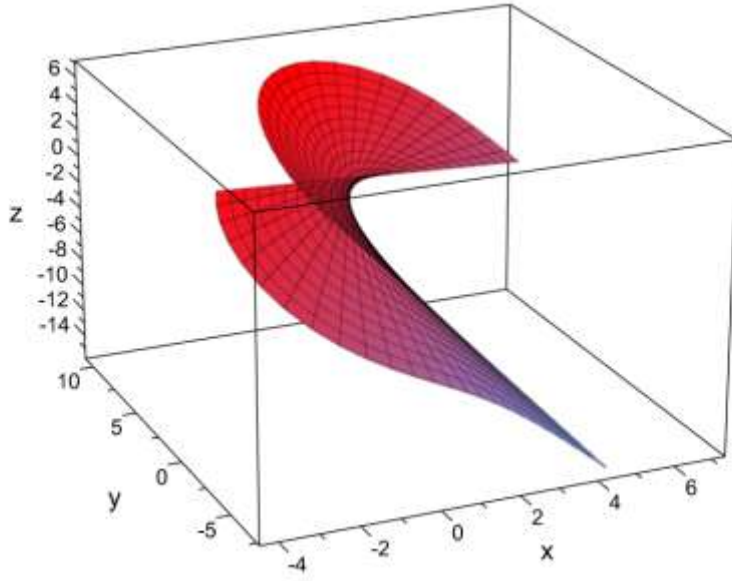
Şekil 5.9 $\mathbf{P}(t, \lambda)$ açılabilir regle yüzeyinin $\alpha(t)$ dayanak eğrisi



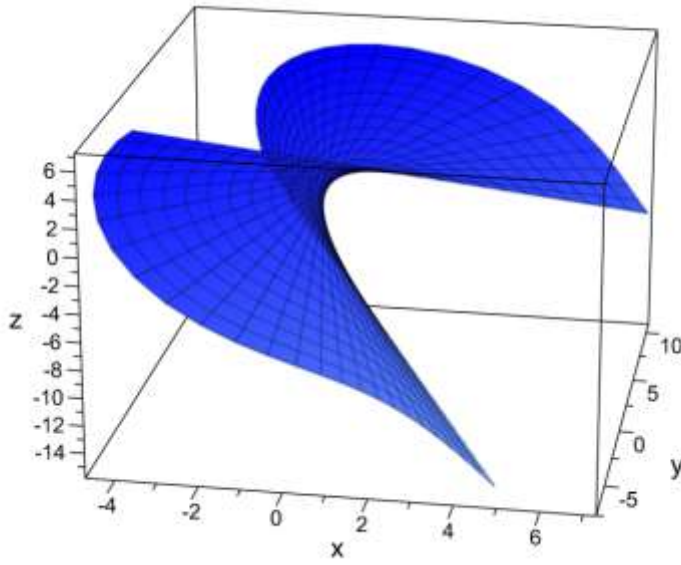
Şekil 5.10 $\bar{P}(t, \lambda)$ açılabilir regle yüzeyinin dayanak eğrisi olan $\bar{\alpha}(t)$ yakın komşu eğrisi



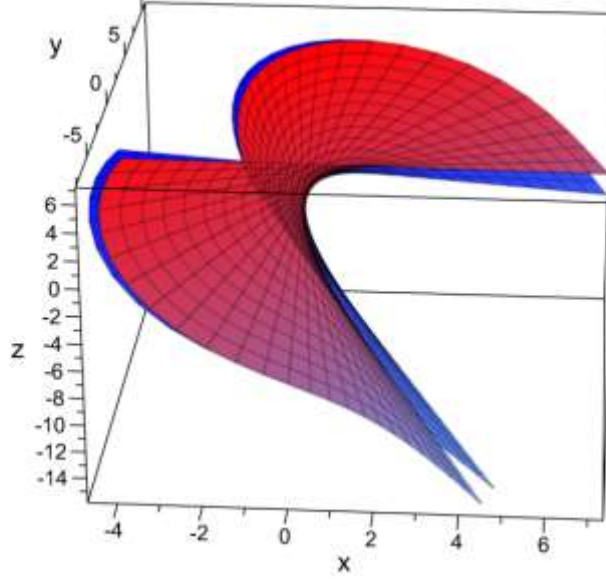
Şekil 5.11 $\alpha(t)$ dayanak eğrisi ve $\bar{\alpha}(t)$ yakın komşu eğrisi



Şekil 5.12 $P(t, \lambda)$ açılabilir regle yüzeyi



Şekil 5.13 $\bar{P}(t, \lambda)$ açılabilir regle yüzeyi

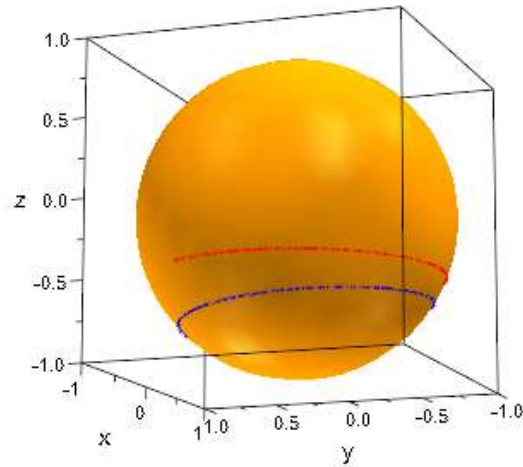


Şekil 5.14 $P(t, \lambda)$ ve $\bar{P}(t, \lambda)$ açılabilir regle yüzeyleri

Şekillerden görüldüğü üzere, eğriler ve açılabilir regle yüzeyler sadece ε değerleri kullanılarak düzenlenebilir. Bunun sonucu olarak, optimum Bezier eğrisi ve dolayısıyla kullanıcının istediği optimum açılabilir regle yüzeyi elde edilebilir.

5.2.8 Açılabilir Regle Yüzeylerin Küresel Görüntüleri

Bölüm 2.2.6 da belirtildiği gibi, $P(s, t)$ ve $\bar{P}(s, t)$ açılabilir regle yüzeylerinin herbiri, Gauss dönüşümü uygulanarak birim küre üzerinde bir eğriye dönüşür. Şekil 5.15 ve Şekil 5.17 de, birim küre üzerindeki eğriler, bu açılabilir regle yüzeylerin dayanak eğrilerinin binormal vektörlerinin küresel görüntüleridir.



Şekil 5.15 Örnek 1 deki $P(s, t)$ ve $\bar{P}(s, t)$ açılabilir regle yüzeylerinin küresel görüntüleri birim küre üzerinde sırasıyla kırmızı ve mavi olarak gösterilmiştir.

$q_i(t) = b_i \mathbf{i} + c_i \mathbf{j} + d_i \mathbf{k}$, ($i=1,2$) reel birim kuaterniyonu, $\mathbf{P}(s, t)$ ve $\overline{\mathbf{P}}(s, t)$ açılabilir regle yüzeylerinin dayanak eğrilerinin binormal vektörleri yerine alınabilir. Bölüm 2.1 de açıklandığı gibi, birim küre üzerine SLERP kullanılarak çizilmiş bir eğri birim küre üzerinde jeodezik eğri belirtir. Bunlara ek olarak, birim küre üzerinde jeodezik eğriliği sıfır olan noktaların geometrik yeri, birim kürenin jeodezikleri olan büyük çemberlerdir ve bunun tersi de doğrudur. Böylece denklem (2.11), büküm eğrisine karşılık gelir ve $\mathbf{P}(s, t)$ ile $\overline{\mathbf{P}}(s, t)$ açılabilir regle yüzeylerinin küresel görüntüsü, SLERP kullanıldığında birim küre üzerinde büküm eğrilerine karşılık gelir.

q_1 ve q_2 , $\mathbf{P}(s, t)$ açılabilir regle yüzeyinin küresel görüntüsü için baz olarak alınan iki birim kuaterniyon olsun. t bir skaler ve $q(t)$, $t = 0.0$ için q_1 de ve $t = 1.0$ için q_2 de bulunsun ve φ ise q_1 ile q_2 arasındaki açı olsun. q_i ($i=1,2$) ve φ değerlerini

$$q_1 = 0.7259267707\mathbf{i} - 0.4402671339\mathbf{j} - 0.5283892263\mathbf{k}, \quad \|q_1\| \cong 1$$

$$q_2 = 0.4405182389\mathbf{i} - 0.7262085098\mathbf{j} - 0.5277924610\mathbf{k}, \quad \|q_2\| \cong 1$$

$$\varphi = 0.6069629544, \quad t \in [0,1].$$

olarak alabiliriz. $\bar{q}_1$ ve $\bar{q}_2$, $\overline{\mathbf{P}}(s, t)$ açılabilir regle yüzeyinin küresel görüntüsü için baz olarak alınan iki birim kuaterniyon olsun. t bir skaler ve $\bar{q}(t)$, $t = 0.0$ için $\bar{q}_1$ de ve $t = 1.0$ için $\bar{q}_2$ de bulunsun ve $\bar{\varphi}$ ise $\bar{q}_1$ ile $\bar{q}_2$ arasındaki açı olsun. $\bar{q}_i$ ($i=1,2$) ve $\bar{\varphi}$ için

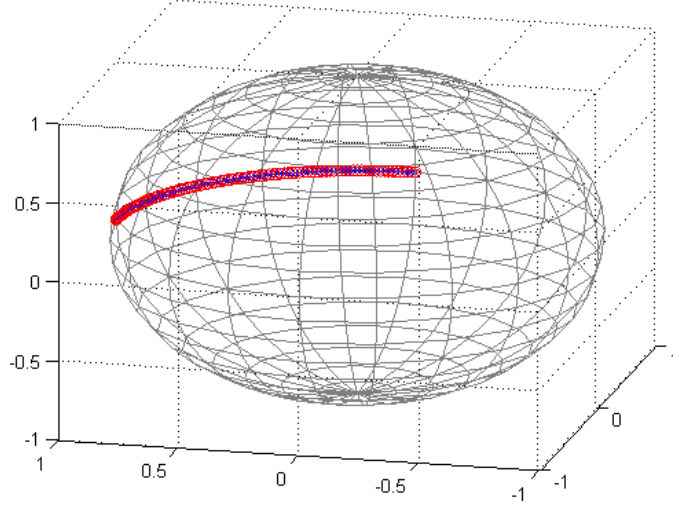
$$\bar{q}_1 = \frac{5}{\sqrt{29}} \cdot \cos\left(\frac{5}{\sqrt{29}}\right) \mathbf{i} - \frac{5}{\sqrt{29}} \cdot \sin\left(\frac{5}{\sqrt{29}}\right) \mathbf{j} + \frac{2}{\sqrt{29}} \mathbf{k}, \quad \|\bar{q}_1\| = 1$$

$$\bar{q}_2 = \frac{5}{\sqrt{29}} \cdot \cos\left(\frac{9}{\sqrt{29}}\right) \mathbf{i} - \frac{5}{\sqrt{29}} \cdot \sin\left(\frac{9}{\sqrt{29}}\right) \mathbf{j} + \frac{2}{\sqrt{29}} \mathbf{k}, \quad \|\bar{q}_2\| = 1$$

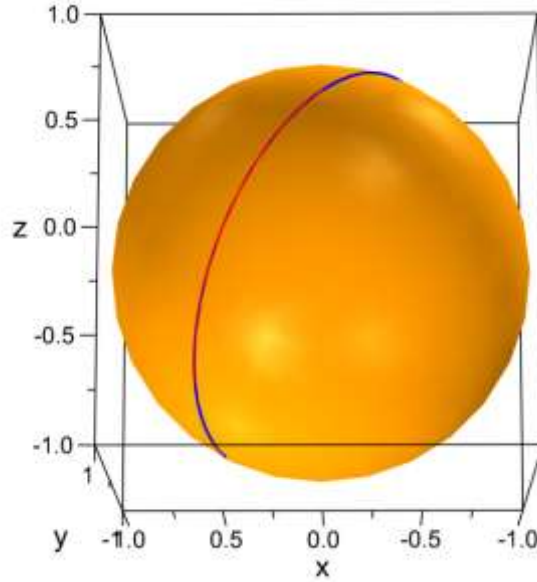
$$\bar{\varphi} = \pi - \arccos\left(\frac{25}{29} \cos\left(\frac{5}{\sqrt{29}}\right) \sin\left(\frac{5}{\sqrt{29}}\right)\right), \quad t \in [0,1]$$

değerleri alınabilir. Yukarıda alınan değerler kullanılarak, $\mathbf{P}(s, t)$ ve $\overline{\mathbf{P}}(s, t)$ açılabilir regle yüzeylerinin birim küre üzerinde SLERP kullanılarak büküm eğrilerine karşılık gelen küresel görüntüleri Şekil 5.16 dan görülebilir.

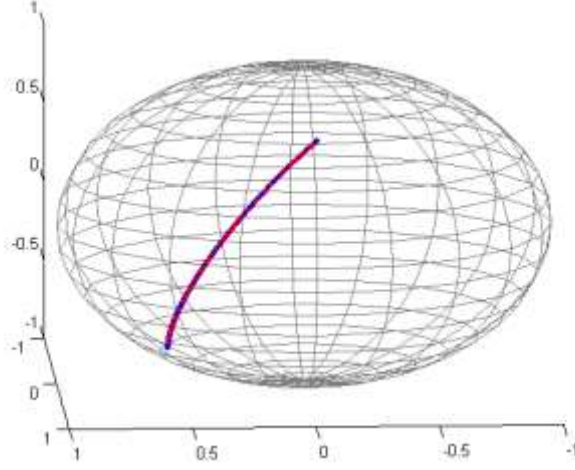
Benzer işlemler uygulanarak, dayanak eğrileri Bezier eğrileri olan $P(s, t)$ ve $\bar{P}(s, t)$ açılabilir regle yüzeylerinin birim küre üzerinde küresel görüntüleri Şekil 5.17 den, SLERP kullanılarak büküm eğrilerine karşılık gelen küresel görüntüleri ise Şekil 5.18 den görülmektedir (Bulut and Caliskan, 2016).



Şekil 5.16 Örnek 1 deki kırmızı büküm eğrisi $P(s, t)$ açılabilir regle yüzeyine ait ve mavi büküm eğrisi $\bar{P}(s, t)$ açılabilir regle yüzeyine aittir.



Şekil 5.17 Örnek 2 deki $P(t, \lambda)$ ve $\bar{P}(t, \lambda)$ açılabilir regle yüzeylerinin küresel görüntüleri sırayla kırmızı ve mavi olarak gösterilmiştir.



Şekil 5.18 Örnek 2 deki kırmızı büküm eğrisi $P(t, \lambda)$ açılabilir regle yüzeyini mavi büküm eğrisi $\bar{P}(t, \lambda)$ açılabilir regle yüzeyini göstermektedir.

5.2.9 $P(s, t)$ ve $\bar{P}(s, t)$ Açılabilir Regle Yüzeylerinin Küresel Görüntülerinin Serret-Frenet Çatısı

R_j^i 3x3 matrisleri ile q kuaterniyonları arasındaki ilişki,

$$R_q(V)^i = \sum_j R_j^i V^j = q \star (0, V^i) \star q^{-1} \quad (5.39)$$

biçimindedir. Her bir ortonormal çatının bileşeni, her bir kartezyen eksenini yeni referans eksenine döndürmek için keyfi bir kuaterniyon kullanılarak ve R nin bir sütunu olarak,

$$\begin{aligned} \hat{T} &= q \star (0, \hat{x}) \star q^{-1} \\ \hat{N} &= q \star (0, \hat{y}) \star q^{-1} \\ \hat{B} &= q \star (0, \hat{z}) \star q^{-1} \end{aligned} \quad (5.40)$$

şeklinde gösterilebilir. (5.40) ifadesi

$$[[\hat{T}][\hat{N}][\hat{B}]] = \begin{bmatrix} a^2 + b^2 - c^2 - d^2 & 2bc - 2ad & 2bd + 2ac \\ 2bc + 2ad & a^2 - b^2 + c^2 - d^2 & 2cd - 2ab \\ 2bd - 2ac & 2cd + 2ab & a^2 - b^2 - c^2 + d^2 \end{bmatrix} \quad (5.41)$$

olarak ifade edilebilir (Hanson, 2006).

Diğer taraftan, $\mathbf{P}(s, t)$ ve $\bar{\mathbf{P}}(s, t)$ açılabilir regle yüzeylerinin küresel görüntüleri, SLERP kullanılarak birim küre üzerindeki büküm eğrisine karşılık geldiğinden bu büküm eğrilerinin denklemi

$$\begin{aligned}
 q(t) &= q_1 \frac{\sin(1-t)\varphi}{\sin\varphi} + q_2 \frac{\sin t\varphi}{\sin\varphi} \\
 &= (b = q_{1b} \frac{\sin(1-t)\varphi}{\sin\varphi} + q_{2b} \frac{\sin t\varphi}{\sin\varphi}, \\
 c &= q_{1c} \frac{\sin(1-t)\varphi}{\sin\varphi} + q_{2c} \frac{\sin t\varphi}{\sin\varphi}, \\
 d &= q_{1d} \frac{\sin(1-t)\varphi}{\sin\varphi} + q_{2d} \frac{\sin t\varphi}{\sin\varphi}) \\
 &= b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}
 \end{aligned} \tag{5.42}$$

şeklinde tanımlanabilir. Burada,

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{1a} \frac{\sin(1-t)\varphi}{\sin\varphi} + q_{2a} \frac{\sin t\varphi}{\sin\varphi} \\ q_{1b} \frac{\sin(1-t)\varphi}{\sin\varphi} + q_{2b} \frac{\sin t\varphi}{\sin\varphi} \\ q_{1c} \frac{\sin(1-t)\varphi}{\sin\varphi} + q_{2c} \frac{\sin t\varphi}{\sin\varphi} \\ q_{1d} \frac{\sin(1-t)\varphi}{\sin\varphi} + q_{2d} \frac{\sin t\varphi}{\sin\varphi} \end{bmatrix}$$

biçimindedir. Denklem (5.41) den büküm eğrilerinin Serret-Frenet çatısı

$$[[\hat{\mathbf{T}}][\hat{\mathbf{N}}][\hat{\mathbf{B}}]] = \begin{bmatrix} b^2 - c^2 - d^2 & 2bc & 2bd \\ 2bc & b^2 + c^2 - d^2 & 2cd \\ 2bd & 2cd & -b^2 - c^2 + d^2 \end{bmatrix} \tag{5.43}$$

şeklinde yazılabilir. Burada,

$$[\hat{\mathbf{T}}] = \begin{bmatrix} b^2 - c^2 - d^2 \\ 2bc \\ 2bd \end{bmatrix}, \quad [\hat{\mathbf{N}}] = \begin{bmatrix} 2bc \\ b^2 + c^2 - d^2 \\ 2cd \end{bmatrix}, \quad [\hat{\mathbf{B}}] = \begin{bmatrix} 2bd \\ 2cd \\ -b^2 - c^2 + d^2 \end{bmatrix}$$

yazılabilir. Böylece, denklem (5.43) deki ifadeler kullanılarak, Örnek 1 deki $\mathbf{P}(s, t)$ ve $\bar{\mathbf{P}}(s, t)$ açılabilir regle yüzeylerinin küresel görüntüleri olan büküm eğrilerinin Serret-Frenet çatıları, $\mathbf{P}(s, t)$ için $t = 1.0$ de, $\bar{\mathbf{P}}(s, t)$ için $t = 0.0$ da sırayla,

$$[\hat{T}] = \begin{bmatrix} \frac{25}{29} \cos^2\left(\frac{9}{\sqrt{29}}\right) - \frac{25}{29} \sin^2\left(\frac{9}{\sqrt{29}}\right) - \frac{4}{29} \\ -1.724137931 \cos\left(\frac{9}{\sqrt{29}}\right) \sin\left(\frac{9}{\sqrt{29}}\right) \\ 0.6896551724 \cos\left(\frac{9}{\sqrt{29}}\right) \end{bmatrix}$$

$$[\hat{N}] = \begin{bmatrix} -1.724137931 \cos\left(\frac{9}{\sqrt{29}}\right) \sin\left(\frac{9}{\sqrt{29}}\right) \\ \frac{21}{29} \\ -0.6896551724 \sin\left(\frac{9}{\sqrt{29}}\right) \end{bmatrix}$$

$$[\hat{B}] = \begin{bmatrix} 0.6896551724 \cos\left(\frac{9}{\sqrt{29}}\right) \\ -0.6896551724 \sin\left(\frac{9}{\sqrt{29}}\right) \\ -\frac{21}{29} \end{bmatrix}$$

ve

$$[\hat{\bar{T}}] = \begin{bmatrix} 0.3047968459 \\ -0.4113374993 \\ -0.8590112596 \end{bmatrix}, \quad [\hat{\bar{N}}] = \begin{bmatrix} -0.4113374993 \\ 0.4344710851 \\ 0.2708034929 \end{bmatrix}, \quad [\hat{\bar{B}}] = \begin{bmatrix} -0.8590112596 \\ 0.2708034929 \\ -0.4344710851 \end{bmatrix}$$

olarak bulunmaktadır.

5.3 İki B-Spline Uzay Eğrisinin İnterpolasyonu ve A-Star Algoritmasının Kullanılmasıyla Elde Edilmiş Yarı-Açılabilir Bezier Yüzeyi

Bir yüzey, yırtılmadan ve gerilmeden düzleme serilebiliyorsa bu yüzey bir açılabilir regle yüzeydir. Yüzeyin açılabilirliği ve bu açılabilirliğin artırılması; gemi gövdesi (Lamb, 1995; Norlan, 1971), otomobil, giyim (Wang, 2008; Wang and Tang, 2005), deri (Jing et al., 2005), kağıt sanatı (Liu et al., 2011; Mitani ve Suzuki, 2004) ve diğer imalat sanayinde en çok istenen özelliklerden biridir.

Çünkü, ürünün şekli açılabilir ya da hemen hemen açılabilir olursa bu ürün, düzlemsel modellerden kaynak, dikiş ya da diğer yollar kullanılarak yapılabilir. Birçok endüstri alanında tasarımcılar, genellikle iki uzay eğrisini interpolate ederek açılabilir, ya da hemen hemen açılabilir regle yüzey elde etmeye çalışırlar. Pratikte kullanılan en yaygın interpolasyon yöntemleri lofting ve skinning yöntemleridir. Fakat bu iki yöntemde, açılabilirliğin elde edilebilmesi için eğriler çok fazla değişikliğe uğrar ve bu durum, elde edilen şeklin tasarımcının amaçladığından farklı olmasına sebep olur.

Bu çalışmada, A-Star algoritmasını uygulayarak, iki uzay eğrisini interpolate eden dört-terafı Bezier yamaları ve bu yamalardan oluşan yarı-açılabilir Bezier yüzeyi elde edilmiştir.

Uygulanan yöntemle, Chen ve Tang'ın (Chen and Tang, 2013a) çalışması dikkate alınarak, iki uzay eğrisini interpolate eden yarı-açılabilir Bezier yüzeyinin elde edilmesi hedeflenmiştir. Yöntemimizde amacımız, iki uzay eğrisinin yerel diferansiyel geometrik özelliklerinden yola çıkarak ve A-Star algoritmasını kullanarak yarı-açılabilir bir Bezier yüzeyi elde etmektir.

Diferansiyel geometride, her noktasında Gauss eğriliği sıfır olan yüzeyler açılabilir yüzeylerdir (Do Carmo, 1976). Birçok araştırmacı, açılabilir yüzeylerin tasarımının önemi üzerinde ısrarla durmuşlardır (Frey, 2004; Zeng et al., 2012). Açılabilir yüzeyler, teknolojinin çok gelişmemiş olduğu zaman diliminde dahi özellikle tekne yapımında büyük önem arz etmiştir (Gong et al., 2014). Günümüzde ise bu yüzeyler, mimaride (Shelden, 2002), giysi (Liu et al., 2010; Tang and Wang, 2005) ve metal levhaların kullanıldığı birçok endüstri ve üretim alanlarında çok yaygın bir şekilde kullanılmaktadır. Ayrıca, açılabilir yüzeyler, mimaride ve endüstriyel yüzey tasarımı içeren bilgisayar destekli tasarım ve bilgisayar grafiklerinde de kullanılmaktadır (Rose et al., 2007).

Çalışmaların çoğu (Aumann, 1991, 2003, 2004; Chu and Sequin, 2002; Frey and Bindschadler, 1993; Lang and Röschel, 1992; Maekawa and Chalfant, 1998), rastgele iki uzay eğrisini interpolate eden açılabilir Bezier yamalarının birleşimi şeklindeki yüzeylerin, ya da tek bir açılabilir yüzeyin tasarımı üzerinde yoğunlaşmıştır. Aumann (Aumann, 1991) ın çalışmasında; iki sınır eğrisiyle açılabilir Bezier yüzeyinin oluşturulabilmesi için sunduğu yöntemde, sınır eğrileri paralel düzlemlere ve bu eğriler de kübik eğriler olacak şekilde kısıtlanmıştır. Ardından Frey ve Bindschadler (Frey and Bindschadler, 1993); Aumann'ın

çalışmasını genişleterek dayanak eğrilerinin derecelerini genelleştirmiştir. Maekawa ve Chalfant (Maekawa and Chalfant, 1998); Aumann'ın yöntemini B-spline eğrilerine genişletmiştir. Çalışmalarında, B-spline eğrilerini çok parçalı Bezier parçalarına ayırmış olsalar da, iki eğri yine paralel düzlemlere kısıtlanmak zorunda kalmıştır. Aumann (Aumann, 2003, 2004); açılabilir Bezier yüzeylerinin tasarımında De Casteljau algoritmasını kullanmıştır. Bu yöntemlerin hepsinde, elde edilecek yüzeyin tahmini zordur ve genellikle istenilen şekil kolaybir şekilde elde edilememektedir. Elde edilen yüzey tamamıyla açılabilir olsa da, başlangıçta alınan eğrilerin genellikle şekillerinin değişmesinden dolayı bu hal, birçok uygulamada istenmeyen durumdur.

Diğer taraftan bazı araştırmacılar, uzay kinematığını ve doğrular geometrisini, verilen bir yüzeyi açılabilir olan yüzeye tahmin etmede kullanmışlardır (Chen, 1996; Hoschek and Schwaner, 1998; Joneja et al., 2005). Son zamanlarda, yarı-açılabilir yüzeylerin tasarımı için ayrık data yöntemi kullanılmaktadır. Açılabilirliği de içeren, optimizasyon hedeflerinin aralığı için regle yüzey interpolasyonunda en iyi ayrık parametrisasyonu bulmak için etkili algoritmalar sunulmuştur (Bodduluri and Ravani, 1993, 1994; Nielson, 1987).

(Chen and Tang, 2013b) çalışmasında; verilen eğriler, G^1 sürekliliğine bağlı kendinden tanımlı üçgen yamaların koleksiyonu ile interpolate edilmektedir. Ayrıca bu yamalar, açılabilirlik derecesi global olarak minimize edilerek bir araya getirilmektedir. (Chen and Tang, 2013a) çalışmasında ise, rastgele iki uzay eğrisinin interpolate edilmesiyle G^2 sürekliliğine sahip yarı-açılabilir Bezier yüzeyi elde edilmiştir.

5.3.1 Yarı-Açılabilir Bezier Yüzeyinin Oluşturulması

Açılabilir yüzeyler, düzleme yırtılmadan ve gerilmeden serilebilen yüzeylerdir. Bu yüzeyler, verilen bir doğuran boyunca tüm noktalarda teğet düzlemi sabit olan ya da diğer bir ifadeyle verilen bir üreteç boyunca tüm noktalardaki yüzey normali sabit olan yüzeylerdir.

Yüzeylerde, Gauss eğriliği yüzeyin iç metriği ile belirlenir. Bu nedenle, üretimde açılabilir yüzeylerin kullanılması sürecinde, yüzey üzerindeki tüm uzunluk ve açılar, son derece önemli bir özellik olan bükülme ya da eğilme altında invariant kalır. Sonuç olarak açılabilir yüzeylerde, yüzeyin her noktasında Gauss eğriliği sıfırdır. Bu sebeple, açılabilir yüzeyler düzleme serilebilen yüzeylerdir.

Açılabilirlik Derecesi

Verilen iki uzay eğrisi için bu iki eğriyi interpolate eden birçok regle yüzey olabilir. Fakat bizim ilgilendiğimiz açılabilir olanlardır. Diğer taraftan bu eğriler, bazı geometrik kısıtlayıcılar uygulanmadıkça istenen interpolate edilmiş açılabilir yüzey elde edilemeyebilir (Hinds et al., 1991). Bu yüzden, oluşan yüzeylerin açılabilirlik derecesi ölçülmelidir. Açılabilirlik derecesi:

$$\Omega(\mathbf{P}) = D \iint_P K^2 dA \quad (5.44)$$

biçiminde ifade edilir. Burada $\mathbf{P}$, Bezier yamalarının birleşiminden elde edilen yüzeyi gösterir ve $D=2h^3E/[3(1-V^2)]$ dir. $2h$, $\mathbf{P}$ yüzeyinin kalınlığı, E ve V de sırayla materyalin Young modülü ve Poisson oranıdır (Chu et al., 2008). Ancak, ince levha şeklindeki materyal için D sabittir ve çalışmamızda bu ihmal edilecektir.

5.3.2 Temel Bezier Yamalarının Oluşturulması

Yarı-açılabilir Bezier yüzeyini elde etmek için, $\alpha_1(u)$ ve $\alpha_2(u)$ şeklinde iki kübik B-spline eğrisi alalım. Bu eğriler istenen sayıda parçalara ayrılabilir ve herbir parça kendi parametrik formuna sahip olabilir. Esas istediğimiz, en son oluşturmak istediğimiz $\mathbf{P}$ yüzeyi için temel Bezier yamalarının (TBY) bir serisini $\{\mathbf{P}_i\}$ en ideal bir şekilde inşa etmektir. Verilen iki eğri ve temel yama şemasının oluşturulması aynı olsa bile eğer bu yamalar farklı bir şekilde bir araya getirilirse farklı açılabilirlik derecesine sahip farklı interpolasyon yüzeyleri elde edilir. Bu yüzden esas istenen, maksimum açılabilirlik derecesine sahip optimum yamaları birleştirilip bir araya getirme planını, uygun geometrik süreklilik şartlarını da göz önünde bulundurarak bulabilmektir (Chen and Tang, 2013a).

5.3.2.1 B-Spline Sınır Eğrilerinin Parçalara Ayrılması

B-Spline sınır eğrilerini parçalara ayırmada kullanılan bölme noktalarının sayısını belirlemek algoritmanın performansı açısından önemlidir. Bu yüzden, bölme noktaları belirlenirken eşik değerleri ile bu eğrilerin eğriliği κ ve eğri parçalarının uzunluğu olan

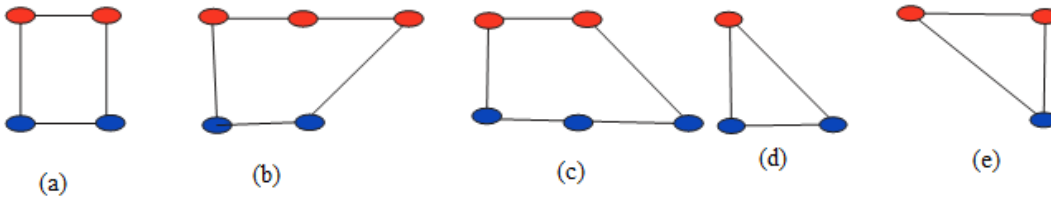
$$\kappa = \frac{\kappa_{max} - \kappa_{min}}{m} \quad \text{ve} \quad l = \frac{S}{n} \quad (5.45)$$

denklemleri göz önünde bulundurulmuştur. Burada κ_{max} , κ_{min} ve S sırayla B-Spline sınır eğrilerinin maksimum ve minimum eğrilikleri ile toplam uzunluğunu ifade eder. m ve n ise bu sınır eğrilerinin kaç parçaya ayrılacağını ifade eden pozitif tam sayılardır. m ve n değerlerinin belirlenmesinde aşağıdaki süreç izlenir.

- m ve n için bazı başlangıç değerleri belirlenir.
- Ardından, belirlenen bu başlangıç değerleri $\alpha_1(u)$ ve $\alpha_2(u)$ eğrilerine uygulanır ve toplam hesaplama zamanına (t_0) bölünür.
- $m = (t/t_0)m$ ve $n = (t/t_0)n$ olacak şekilde ayarlanır.
- Eğer optimizasyon sonuçlarında dikkat çeken bir gelişme gözlemlenmezse ya da iterasyon sayısı 10 a ulaşırsa program sonlanır, aksi halde (b) deki adıma gidilir (Chen and Tang, 2013a).

5.3.2.2 Bezier Yüzeyini Oluşturan Bezier Yamaları

Bezier yüzeyi oluşturulurken, alınan iki eğrinin uç kısımlarında üçgen yamalar, diğer kısımlarında dörtgen yamalar kullanılmaktadır. Dörtgen şeklindeki bu temel Bezier yamaları (TBY) iki sınır eğrisi ($\alpha_1(u)$ ve $\alpha_2(u)$ eğrilerinden elde edilen parçalar) ve iki köprü eğrisinden oluşmaktadır. Bu temel Bezier yamalarının (TBY) bir araya getirilmesiyle elde edilen interpolasyon yüzeyi bir köprü sınır yaması (KSY) dır. Olası temel Bezier yamaları (TBY) aşağıdaki şekildedir.



Şekil 5.19 Temel Bezier Yamalarının şeması. Kırmızı ve mavi noktalar sırayla $\alpha_1(u)$ ve $\alpha_2(u)$ eğrilerinin bölünme noktalarıdır.

$\alpha_1(u)$ ve $\alpha_2(u)$ eğrilerinden elde edilen parçalar üzerinde tanımlanan temel bezier yamalarının (TBY) $P = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ köprü sınır yamasını (KSY) oluşturması için aşağıdaki şartların sağlanması gerekir (Chen and Tang, 2013).

- En solda ve en sağda bulunacak olan yamalar olan P_1 ve P_n , $\alpha_1(u)$ ve $\alpha_2(u)$ eğrilerinin ilgili uç noktalarını birleştirerek Şekil 5.20 de ifade edildiği gibi beş farklı durumdan birisi olabilir.

2. Diğer $\mathbf{P}_i$ ($1 < i < n$) yamaları Şekil 5.19 da gösterildiği gibi (b-c-d) durumlarından birisi olmalıdır.
3. $\alpha_1(u)$ ve $\alpha_2(u)$ eğrileri üzerindeki her bir bölme noktasının en az iki yamayla ilişkisi olmalı.

Yamalar oluşturulurken kendi aralarında sıralı olmalıdır (Chen and Tang, 2013a).

5.3.2.3 Köprü Eğrilerinin Oluşturulması

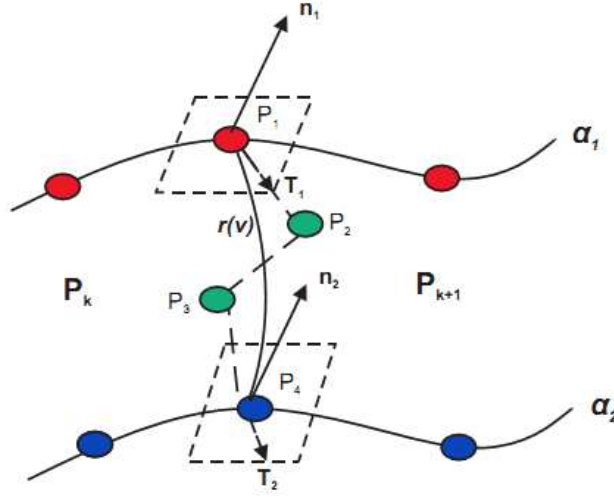
Herhangi bir temel Bezier yamasının (TBY) oluşturulabilmesi için iki köprü eğrisine ihtiyaç vardır. Çalışmamızda, hesap kolaylığı açısından kübik Bezier köprü eğrileri tercih edilmiştir. Diğer taraftan, açılabilir köprü sınır yaması (KSY) oluşturulmak istendiğinden bölme noktalarındaki Gauss eğriliğinin olabildiğince sıfır olması istenmektedir. Kübik Bezier köprü eğrisinin inşası için dört adet kontrol noktasına ihtiyaç vardır. İlk ve son kontrol noktaları olan P_1 ve P_4 , B-spline sınır eğrilerinin bölme noktaları olan $\alpha_1^i(1)$, ($1 \leq i \leq m-1$) ve $\alpha_1^j(1)$, ($1 \leq j \leq n-1$) noktalarıdır. Bu noktalardaki birim teğet doğrultular

$$\begin{cases} T_1 = \frac{P_1 P_4 - \langle P_1 P_4, \mathbf{n}_1 \rangle \mathbf{n}_1}{\|P_1 P_4 - \langle P_1 P_4, \mathbf{n}_1 \rangle \mathbf{n}_1\|} \\ T_2 = \frac{P_1 P_4 - \langle P_1 P_4, \mathbf{n}_2 \rangle \mathbf{n}_2}{\|P_1 P_4 - \langle P_1 P_4, \mathbf{n}_2 \rangle \mathbf{n}_2\|} \end{cases} \quad (5.46)$$

biçimindedir. Burada, $\mathbf{n}_1$ ve $\mathbf{n}_2$ sırayla P_1 ve P_4 deki yüzey birim normal vektörler ve $P_1 P_4 = P_4 - P_1$ dir. Denklem (5.46) deki T_1 ve T_2 sırayla $P_1 P_4$ vektörünün sırayla P_1 noktası ile $\mathbf{n}_1$ in ve P_4 noktası ile $\mathbf{n}_2$ nin oluşturduğu düzlemlere izdüşümlerinin birim vektörleridir. Ara hesaplamalardan sonra P_2 ve P_3 kontrol noktaları

$$\begin{cases} P_2 = P_1 + \frac{2 \langle P_1 P_4, T_1 \rangle - \langle P_1 P_4, T_2 \rangle \langle T_1, T_2 \rangle}{4 - \langle T_1, T_2 \rangle^2} T_1 \\ P_3 = P_4 + \frac{\langle P_1 P_4, T_1 \rangle \langle T_1, T_2 \rangle - 2 \langle P_1 P_4, T_2 \rangle}{4 - \langle T_1, T_2 \rangle^2} T_2 \end{cases} \quad (5.47)$$

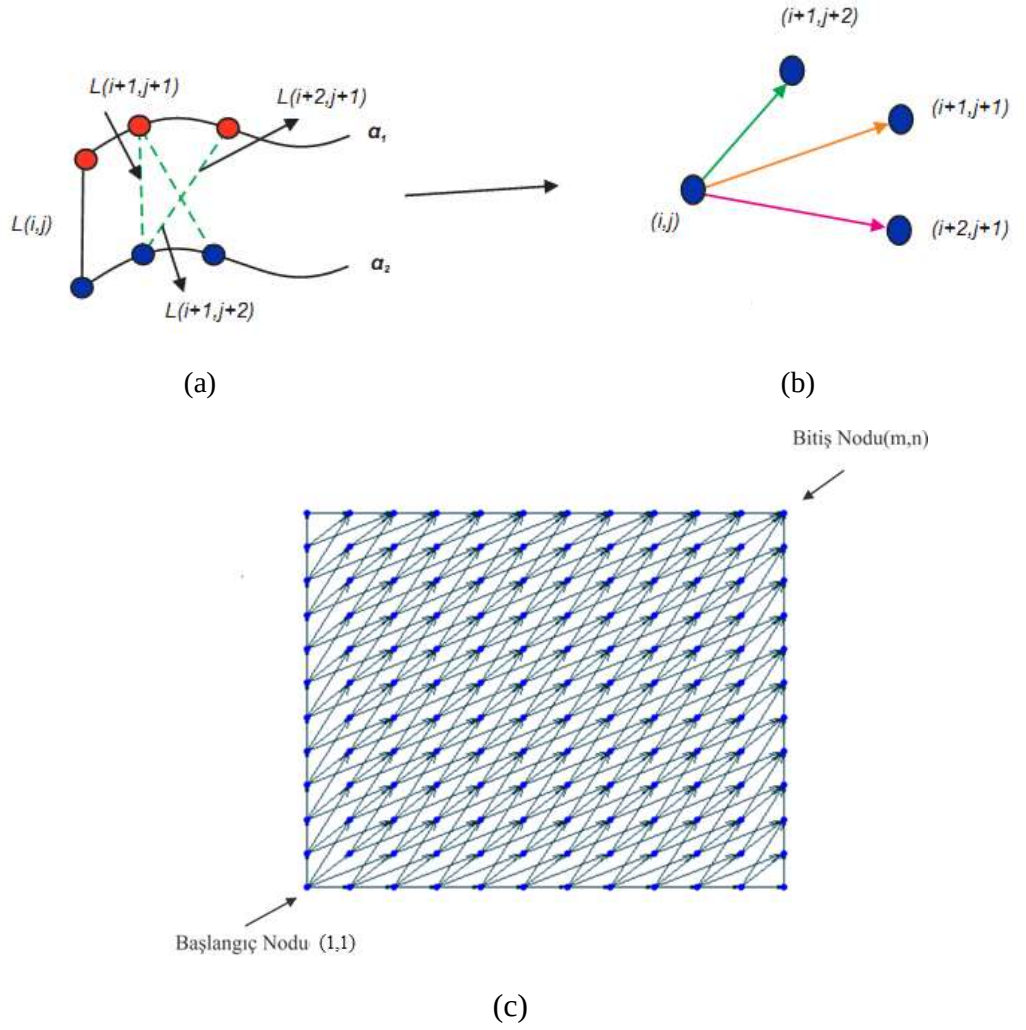
denklemlerle belirlenebilir. Son olarak, elde edilen bu kontrol noktaları kullanılarak Şekil 5.20 de görüldüğü gibi kübik Bezier köprü eğrileri belirlenir (Chen and Tang, 2013a).



Şekil 5.20 Köprü eğrisinin belirlenmesi

5.3.2.4 Graf Eşleme

Köprü sınır yaması (KSY) nın oluşturulması, Şekil 5.19 deki (a-b-c) de belirtilen (TBY) nın ve bunlar arasındaki bağlantıların belirlenmesine karşılık gelmektedir. (TBY) nın oluşturulmasında esas aranan, yamaların şeklinin (a-b-c) den hangisinin olacağına karar verebilmektir. Bu yüzden yamaları oluşturma sürecinde, eğer oluşturulan ön köprü eğrisi $L(i, j)$ ile gösterilirse bir sonraki köprü eğrisi, (a-b-c) durumlarındaki gibi $L(i + 1, j + 1)$, $L(i + 2, j + 1)$ ya da $L(i + 1, j + 2)$ ifadelerinden birisiyle ifade edilebilir. Bir sonraki adımda, eğer her bir $L(i, j)$ köprü eğrisini (i, j) düğümüne karşılık getirirsek, bu durumda sonraki $L(i + 1, j + 1)$, $L(i + 2, j + 1)$ ve $L(i + 1, j + 2)$ köprü eğrileri $(i + 1, j + 1)$, $(i + 2, j + 1)$ ve $(i + 1, j + 2)$ düğümlerine karşılık gelir. Buradan, köprü sınır yaması (KSY), graf eşlemesinde bir yola karşılık gelir. Bu grafta, başlangıç düğümünden $(1, 1)$ bitiş düğümüne (m, n) olan herhangi bir yol tek bir köprü sınır yaması (KSY) na karşılık gelir. Diğer taraftan, ön köprü eğrisi sınır eğrilerinden birinin uç noktasına ulaştığında 4-terafli Bezier yaması oluşturulamayacağından, uç noktaları ve sınır eğrilerinin kullanılmayan kısımlarında üçgen yamalar kullanılır. Sonuçta, olası tüm durumlar kullanılarak Şekil 5.21 de gösterildiği gibi bir Yönlü Asiklik Graf (YAG) elde ederiz (Chen and Tang, 2013a).



Şekil 5.21 Temel Bezier Yamasının (TBY) yönlü asiklik grafa (YAG) dönüşümü

5.3.2.5 Temel Bezier Yamasının (TBY) Açılabilirliği

En son haldeki yüzeye her bir (TBY) eklendiğinde, birleşik Bezier yüzeyinin açılabilirlik derecesinin hesaplanması gerekir. Denklem (5.44) de belirtilen açılabilirlik derecesi, Bölüm 5.3.2.4 de ifade edilen graf eşlemede, bir düğümden diğer düğüme çizilen kenara verilen ağırlığa karşılık gelir.

Denklem (5.44) de verilen açılabilirlik derecesini

$$\Omega(\mathbf{P}_k) = \iint_{P_k} |K| dA \quad (5.48)$$

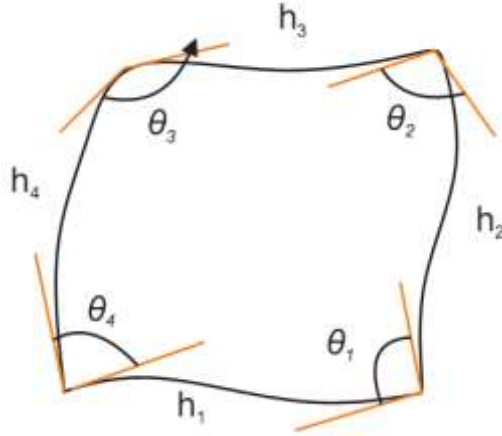
biçiminde ifade edebiliriz. Burada, $|K|$ değeri $\mathbf{P}_k$ yaması üzerindeki Gauss eğriliğinin mutlak değeridir. Buradan, işlem kolaylığı açısından (5.48) de verilen ifadeyi

$$\Omega(\mathbf{P}_k) = \left| \iint_{P_k} K dA \right|$$

olarak yazabiliriz. Bu yeni integrali kolay yoldan hesaplayabilmek için, çok iyi bilinen Gauss-Bonnet teoremi kullanılarak

$$\iint_{P_k} K dA + \sum_{i=1}^4 \oint_{h_i} \kappa_g dL + \sum_{i=1}^4 \theta_i = 2\pi \quad (5.49)$$

eşitliği elde edilir. Burada h_i değerleri, Şekil 5.22 de görüldüğü gibi yamaları oluşturan eğri parçalarına, θ_i değerleri ise yamaların köşe noktalarındaki teğetler arasındaki dış açılara, κ_g de her bir eğri parçası için jeodezik eğriliğe karşılık gelir.



Şekil 5.22 Temel Bezier Yaması (TBY) için açılabilirlik derecesinin hesaplanması

5.3.3 A-Star Algoritması

Bilgisayar bilimlerinde en kısa yol bulmak için kullanılan algoritmalarından birisidir. Seyyar tüccar problemi (travelling salesman problem, TSP) gibi bir problemin çözümünde, oyun programlamada, oyunda bulunan oyuncuların en kısa yolu bularak hedefe gitmeleri için de sıklıkla kullanılan bir algoritmadır.

Kısaca bir düğümden hedef bir düğüme en kısa hangi düğümler üzerinden gidileceğini bulmaya yarayan “en iyi yerleştirme” algoritmasıdır. A-Star algoritması yapı olarak muteber sezgisel (admissible heuristic) bir algoritma

olarak sınıflandırılabilir. Bunun sebebi, algoritmanın mesafe hesaplamada kullandığı

$$f(n) = g(n) + h(n) \quad (5.50)$$

biçimindeki fonksiyondur. Burada

$f(n)$ = hesaplama yapan sezgisel (heuristic) fonksiyon,

$g(n)$ = Başlangıç düğümünden mevcut düğüme kadar gelmenin maliyeti,

$h(n)$ = Mevcut düğümünden hedef düğüme varmak için tahmin edilen mesafedir.

Dikkat edileceği üzere $f(n)$ fonksiyonunun sezgisel olma sebebi, bu fonksiyon içerisinde bulunan ve tahmine dayalı olan $h(n)$ sezgisel fonksiyonudur.

Algoritmanın çalışması:

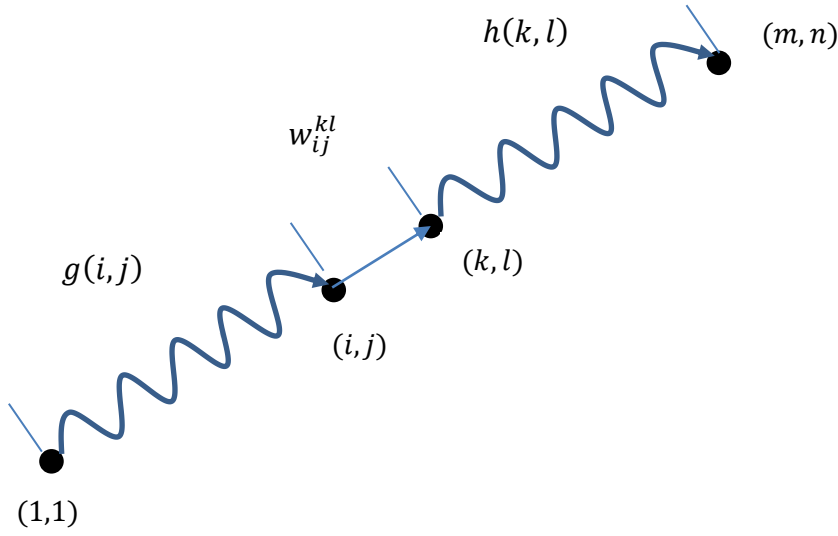
Algoritma, (5.50) denklemindeki toplama işlemini kullanan oldukça basit bir yapıya sahiptir. Veri yapısı olarak bir öncelik sırası kullanan algoritmada en öncelikli olan düğüm, $f(n)$ değeri en düşük olan düğümdür.

1. Algoritma her adımda en düşük değeri (ve dolayısıyla en önemli) düğümü alır (yani bu düğüme gider) ve düğümü sıradan çıkarır.
2. Gidilen bu düğüme göre komşu olan bütün düğümlerin değerleri güncellenir (artık bu düğüme gelmenin bir maliyeti vardır ve dikkat edilirse $f(n)$ fonksiyonu içerisinde bu değer yer almaktadır).
3. Algoritma yukarıdaki adımları hedefe varana kadar (yani hedef düğümü öncelik sırasında en öne gelene kadar) veya sırada düğüm kalmayana kadar tekrarlar.

A-Star, genellikle en iyi yol bulma algoritması olarak görülse de Dijkstra algortimasının da önemli kullanım alanları vardır. Dijkstra algoritması, temelde A-Star ile aynıdır sadece heuristic(tahmin) yoktur, h değeri her zaman sıfırdır. Dijkstra algoritması, heuristic olmadığı için her zaman dışa doğru eşit ölçüde yayılarak arama yapar. Tahmin edilebileceği üzere, Dijkstra algoritması hedefi bulduğunda çok daha fazla alanı taramış olacaktır. Bu nedenle genellikle A-Star dan daha yavaştır (Şeker, 2009).

5.3.4 A-Star Algoritması Kullanılarak Yarı-Açılabilir Bezier Yüzeyinin Oluşturulması

A-Star algoritmasında kullandığımız graf, düzlemde gösterilen yönlü bir graf olduğundan düğümleri (k, l) ikilileri ile ifade edebiliriz. Ayrıca, yarı-açılabilir Bezier yüzeyinin elde edilmesinde interpolate ettiğimiz iki sınır eğrisinin birinde m adet bölme noktası ve diğer sınır eğrisinde ise n adet bölme noktası bulunmaktadır. Bu nedenle, (k, l) düğümü birinci sınır eğrisindeki k .inci bölme noktası ile ikinci sınır eğrisindeki l .inci bölme noktasından elde edilen köprü eğrisini ifade eden düğümü göstermektedir.



Şekil 5.23 $(1,1)$, (i,j) , (k,l) ve (m,n) düğümleri arasındaki ilişki

A-Star algoritmasının uygulanması sürecinde, Şekil 5.23 de bulunan grafda, $(1,1)$ düğümünden (m,n) düğümüne en kısa yolu bulmak için (9.7) denkleminden yararlanılarak kullanılacak olan sezgisel fonksiyon

$$f(k, l) = g(k, l) + h(k, l) \quad (5.51)$$

biçiminde yazılabilir. Burada, $g(k, l)$ fonksiyonu $(1,1)$ ile (k, l) düğümleri arasındaki mesafeyi ve $h(k, l)$ fonksiyonu da (k, l) ile (m, n) düğümleri arasındaki sezgisel (tahmini) mesafeyi göstermektedir. $g(k, l)$ fonksiyonu

$$g(k, l) = g(i, j) + w_{ij}^{kl} \quad (5.52)$$

biçiminde yazılabilir. Burada, w_{ij}^{kl} , grafta açılan (i, j) düğümü ile bir sonraki (k, l) düğümü arasında, yüzeyin açılabilirlik derecesine karşılık gelen ağırlık değeridir.

$h(k, l)$ fonksiyonu

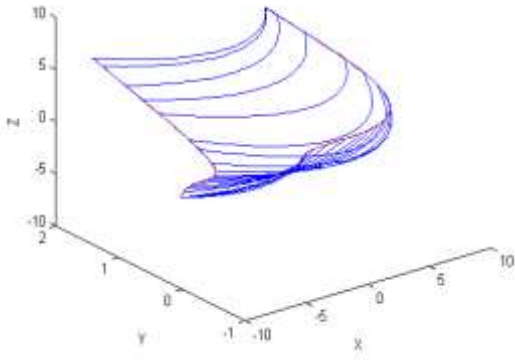
$$h(k, l) = \min \left\{ w_{ij}^{kl} \sqrt{(m - k)^2 + (n - l)^2}, h_{ij} \right\} \quad (5.53)$$

denkleminde yararlanılarak hesaplanabilir. $h(k, l)$ fonksiyonunun seçimi, A-Star algoritmasının kullanılması, yüzeyin açılabilirlik değerini ve ziyaret edilen düğüm sayısını etkilemektedir. $h(k, l)$ fonksiyonun, $(1, 1)$ ve (m, n) düğümleri arasındaki optimum yol uzunluk değerinden daha yüksek değerler üretmesi optimum değerden uzaklaşılmasına, çok düşük değerler üretmesi de (sıfıra yakın) ziyaret edilecek düğüm sayısının artmasına neden olacaktır. $h(k, l)$ fonksiyonunun değerinin hesaplanması sürecinde öncelikle, (k, l) ve (m, n) düğümleri arasındaki mesafenin tahmin edilmesinde kullanılabilecek tek değer (i, j) ve (k, l) arasındaki açılabilirlik derecesi olduğundan, bu açılabilirlik derecesi (k, l) ve (m, n) değerleri arasındaki öklid uzaklığı ile çarpılarak elde edilebilir. Ardından bu değer, (m, n) düğümüne yaklaştıkça azalması gerektiğinden, (i, j) düğümünün h değerinden daha yüksek bir değer elde edilmesi durumunda, min fonksiyonu ile (i, j) düğümünün h değeri kullanılabilir. Bu şekilde, h değerinin (m, n) düğümüne yaklaştıkça artmaması (eşit veya azalması) sağlanmış olur.

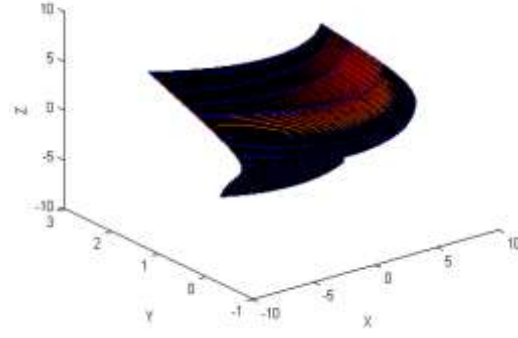
A-Star algoritmasının zaman karmaşıklığı, kullanılan sezgisel fonksiyona bağlıdır ve ayrıca, açılan düğüm sayısı çözümün derinliği cinsinden üsseldir. Diğer bir ifadeyle, grafin optimum çözümü için açılan ağaçtaki düğüm sayısı N ise $N + 1 = 1 + b + b^2 + \dots + b^d = O(b^d)$ (Russell and Norvig, 2009), burada, b dallanma faktörü ve d ise çözüm ağacının derinliğidir. b ve d değerleri deneysel olarak elde edilen çözüm ağacından hesaplanabilir.

5.3.5 Uygulama

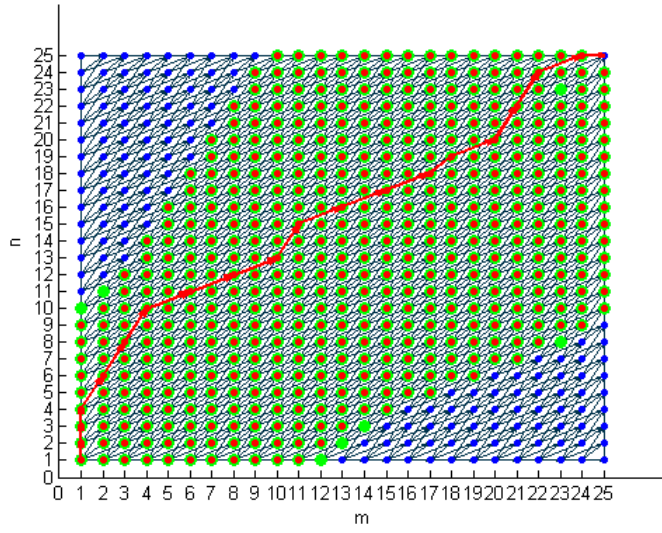
A-Star ve Dijkstra algoritmalarının performanslarının karşılaştırılması amacıyla 10 adet yüzey örneği kullanılmıştır. Aşağıdaki şekillerin herbirinde sırayla, iki sınır B-spline eğrisi ve bu eğrilerin kullanılmasıyla oluşturulan köprü eğrileri (a), sınır ve köprü eğrileri yardımıyla oluşturulan yarı-açılabilir Bezier yüzeyleri (b) ve A-Star algoritmasının graf üzerinde çözüme ulaşırken açtığı düğümler ve izlediği yol (c) gösterilmektedir.



(a) Yüzey 1 in optimum çözümünde bulunan köprü eğrileri

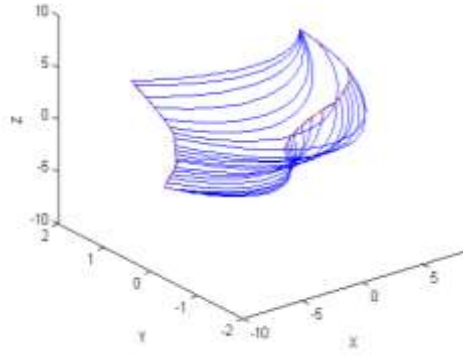


(b) Yüzey 1 in gösterimi

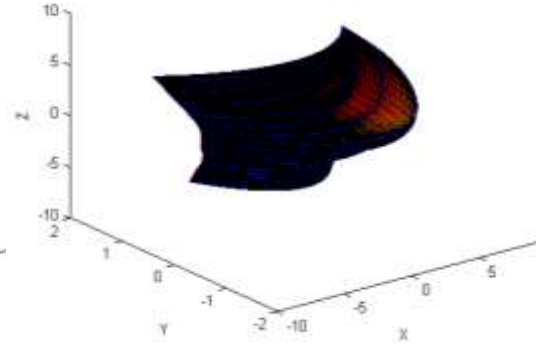


(c) A-Star algoritmasının Yüzey 1 de optimum çözüm için açtığı düğümler ve izlediği yol

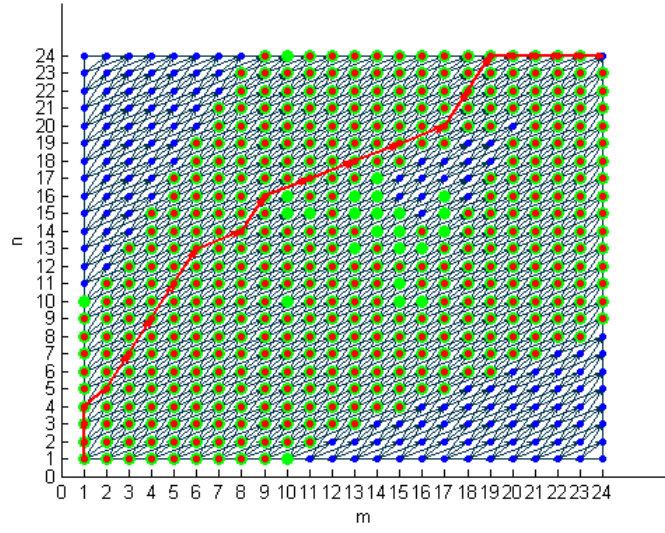
Şekil 5.24 Yüzey 1 in gösterimi ve A-Star algoritmasının çözüm için izlediği yol



(a) Yüzey 2 nin optimum çözümünde bulunan köprü eğrileri

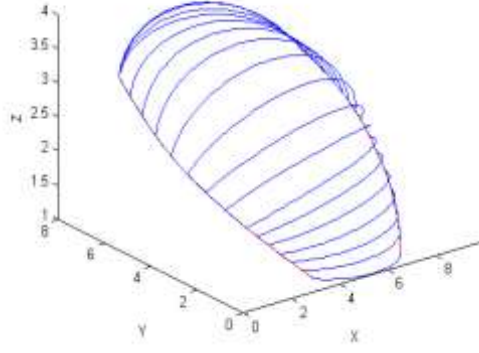


(b) Yüzey 2 nin gösterimi

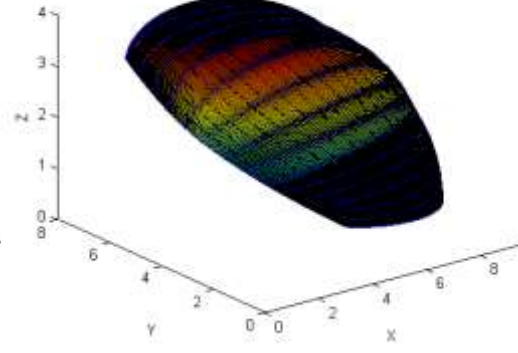


(c) A-Star algoritmasının Yüzey 2 de optimum çözüm için açtığı düğümler ve izlediği yol

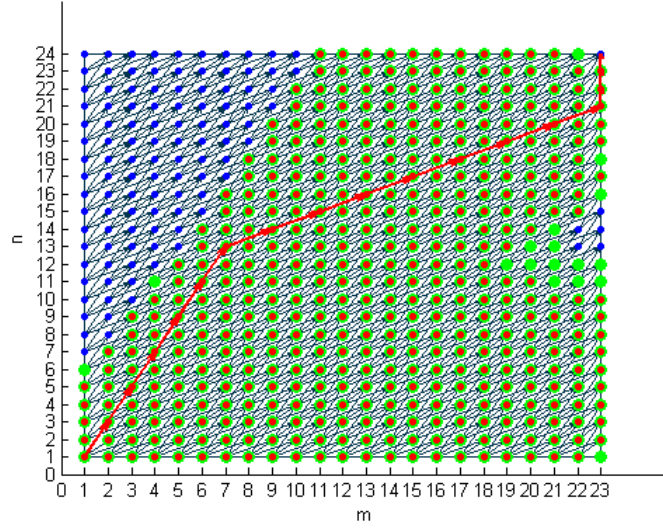
Şekil 5.25 Yüzey 2 nin gösterimi ve A-Star algoritmasının çözüm için izlediği yol



(a) Yüzey 3 ün optimum çözümünde bulunan köprü eğrileri

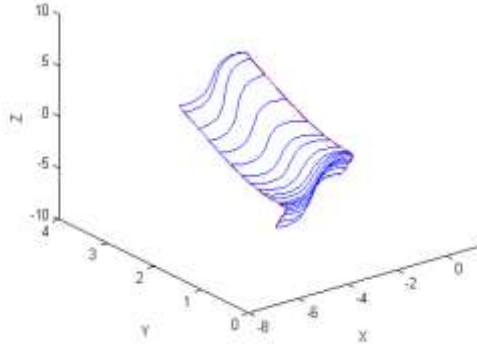


(b) Yüzey 3 ün gösterimi

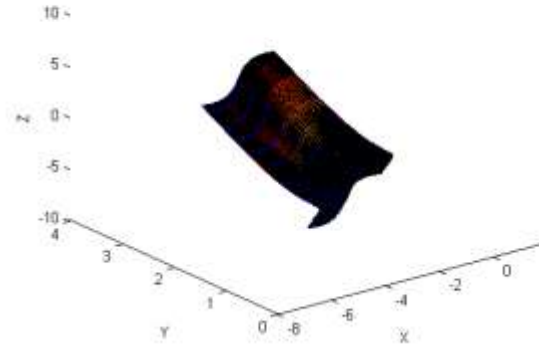


(c) A-Star algoritmasının Yüzey 3 de optimum çözüm için açtığı düğümler ve izlediği yol

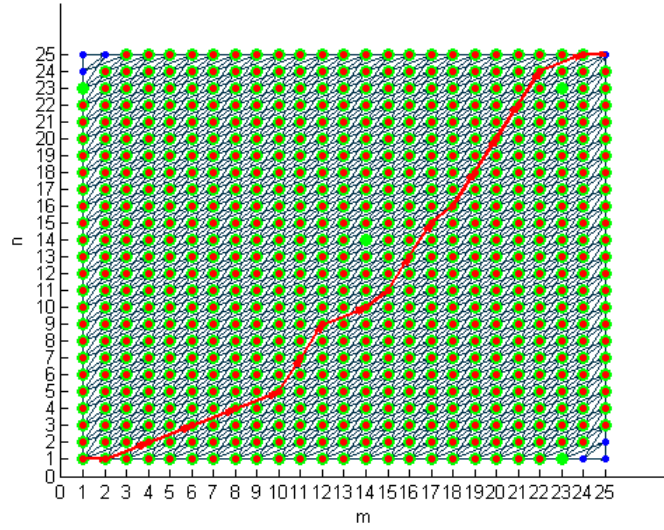
Şekil 5.26 Yüzey 3 ün gösterimi ve A-Star algoritmasının çözüm için izlediği yol



(a) Yüzey 4 ün optimum çözümünde bulunan köprü eğrileri

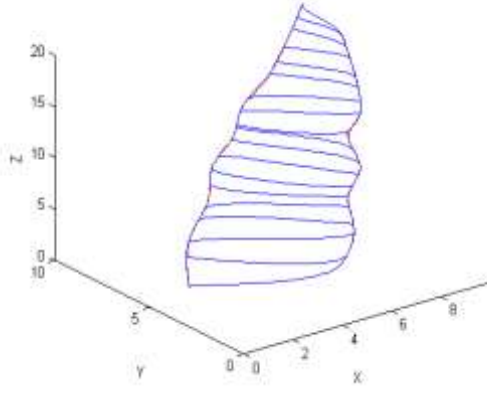


(b) Yüzey 4 ün gösterimi

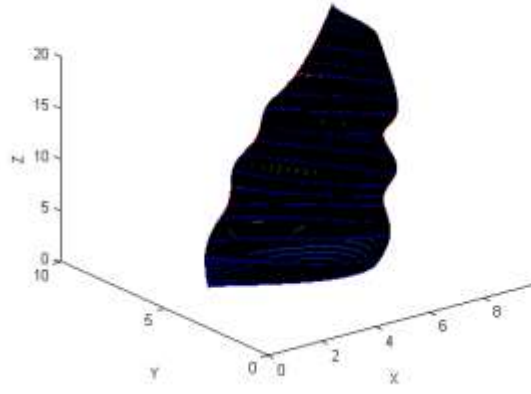


(c) A-Star algoritmasının Yüzey 4 de optimum çözüm için açtığı düğümler ve izlediği yol

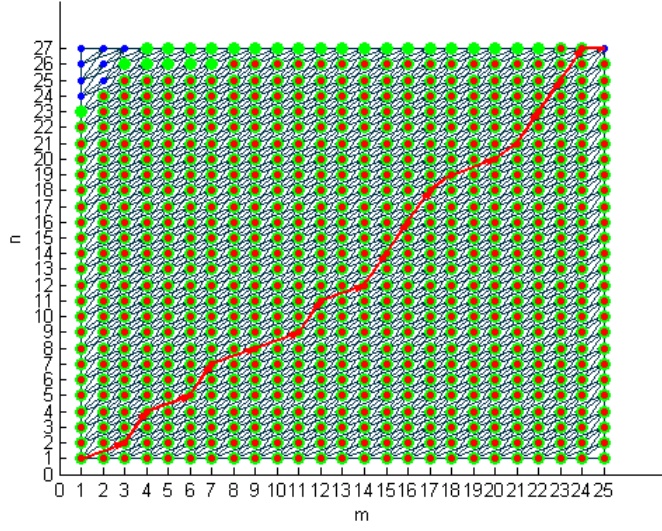
Şekil 5.27 Yüzey 4 ün gösterimi ve A-Star algoritmasının çözüm için izlediği yol



(a) Yüzey 5 in optimum çözümünde bulunan köprü eğrileri

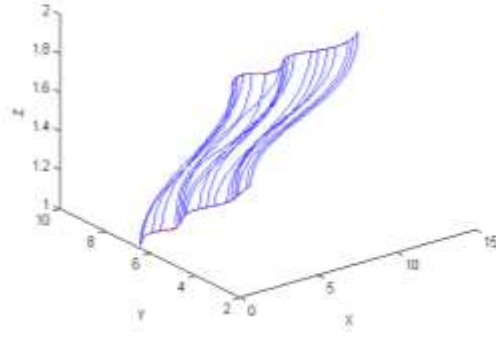


(b) Yüzey 5 in gösterimi

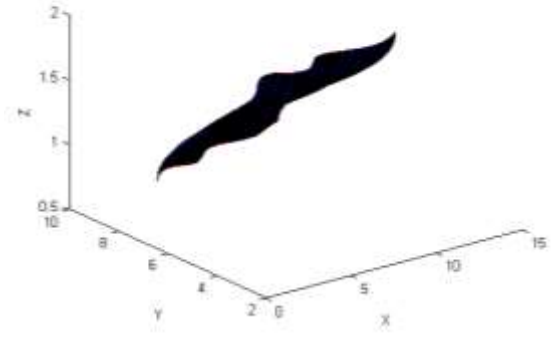


(c) A-Star algoritmasının Yüzey 5 de optimum çözüm için açtığı düğümler ve izlediği yol

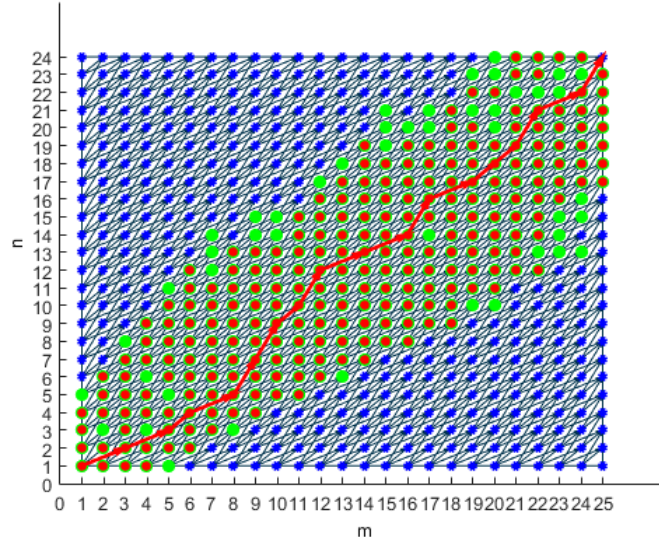
Şekil 5.28 Yüzey 5 in gösterimi ve A-Star algoritmasının çözüm için izlediği yol



(a) Yüzey 6'nın optimum çözümünde bulunan köprü eğrileri

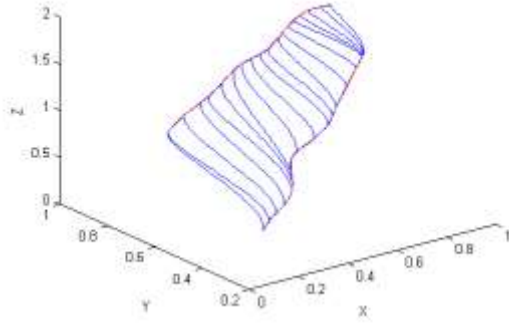


(b) Yüzey 6'nın gösterimi

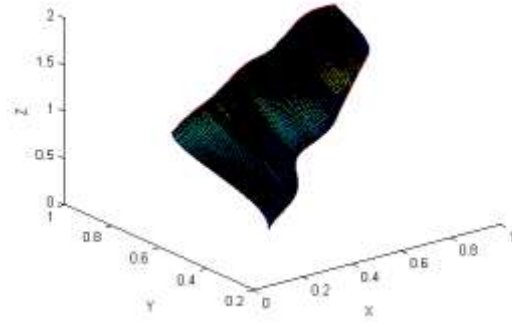


(c) A-Star algoritmasının Yüzey 6'da optimum çözüm için açtığı düğümler ve izlediği yol

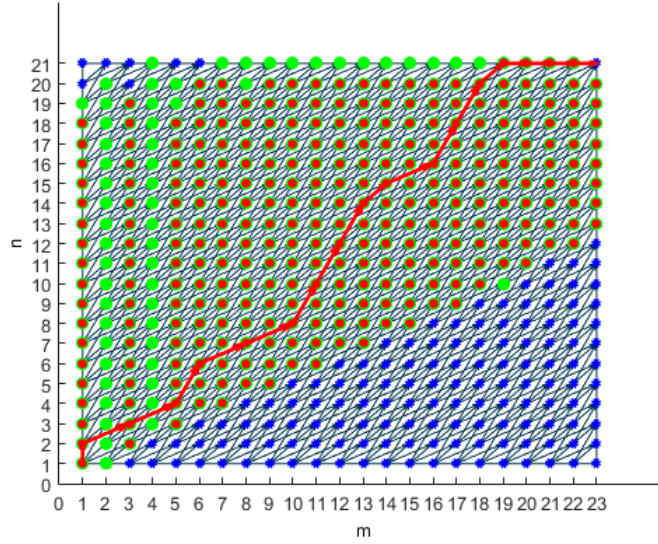
Şekil 5.29 Yüzey 6'nın gösterimi ve A-Star algoritmasının çözüm için izlediği yol



(a) Yüzey 7 nin optimum çözümünde bulunan köprü eğrileri

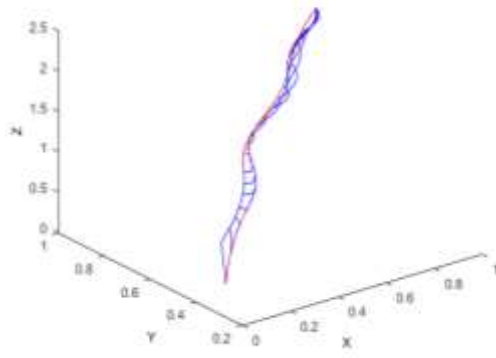


(b) Yüzey 7 nin gösterimi

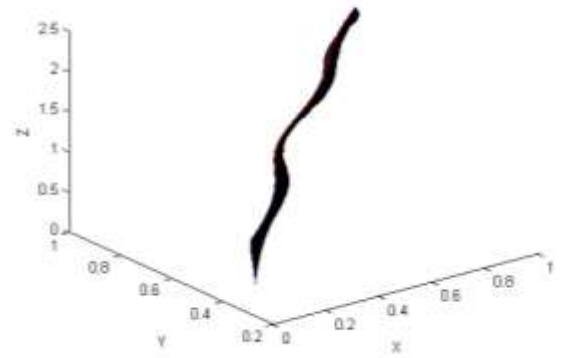


(c) A-Star algoritmasının Yüzey 7 de optimum çözüm için açtığı düğümler ve izlediği yol

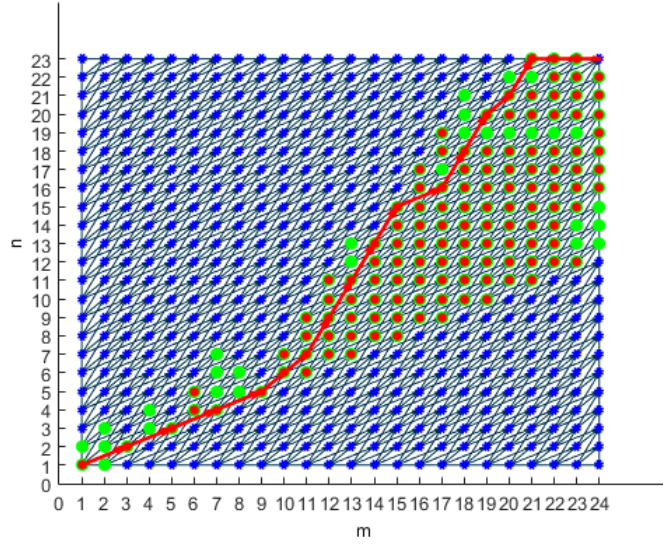
Şekil 5.30 Yüzey 7 nin gösterimi ve A-Star algoritmasının çözüm için izlediği yol



(a) Yüzey 8 in optimum çözümünde bulunan köprü eğrileri

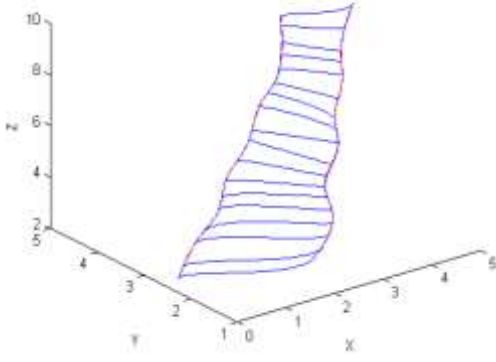


(b) Yüzey 8 in gösterimi

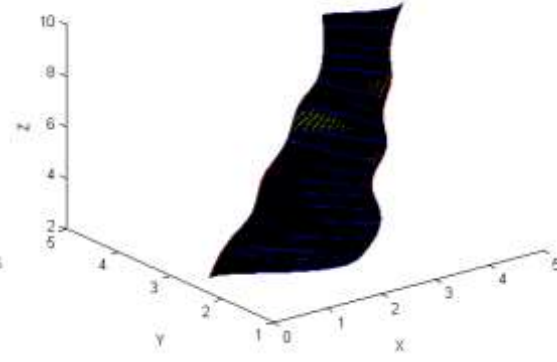


(c) A-Star algoritmasının Yüzey 8 de optimum çözüm için açtığı düğümler ve izlediği yol

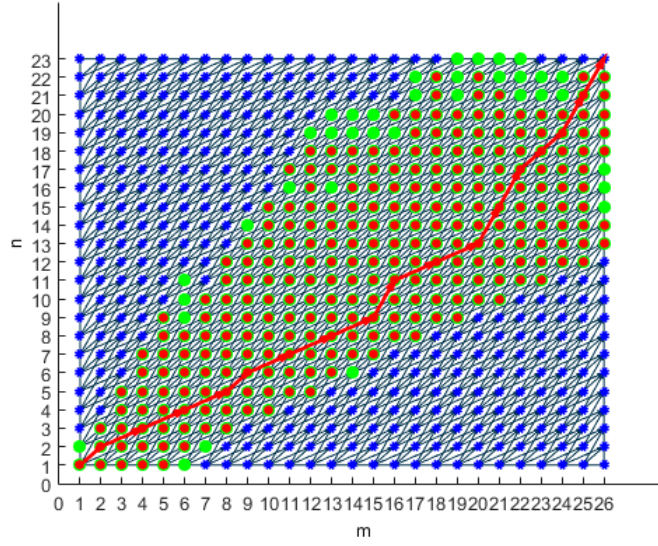
Şekil 5.31 Yüzey 8 in gösterimi ve A-Star algoritmasının çözüm için izlediği yol



(a) Yüzey 9 un optimum çözümünde bulunan köprü eğrileri

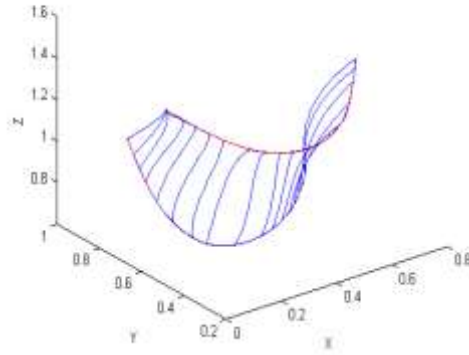


(b) Yüzey 9 un gösterimi

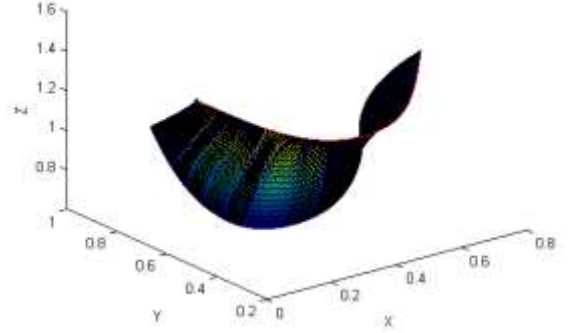


(c) A-Star algoritmasının Yüzey 9 da optimum çözüm için açtığı düğümler ve izlediği yol

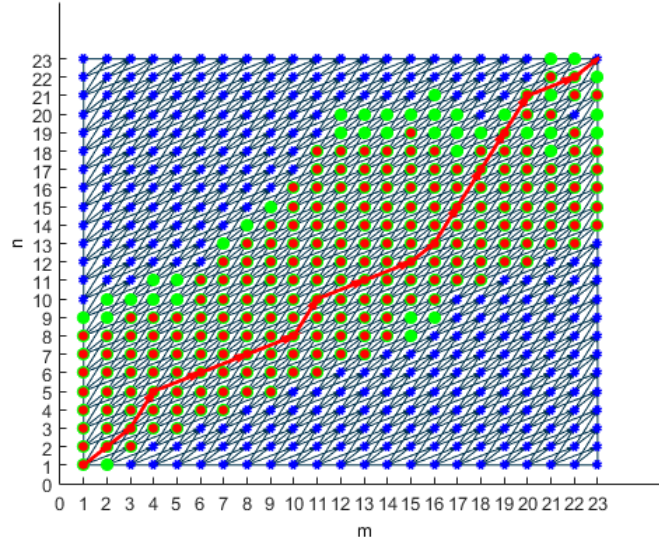
Şekil 5.32 Yüzey 9 un gösterimi ve A-Star algoritmasının çözüm için izlediği yol



(a) Yüzey 10 un optimum çözümünde bulunan köprü eğrileri



(b) Yüzey 10 un gösterimi



(c) A-Star algoritmasının Yüzey 10 da optimum çözüm için açtığı düğümler ve izlediği yol

Şekil 5.33 Yüzey 10 un gösterimi ve A-Star algoritmasının çözüm için izlediği yol

A-Star algoritmasının, yukarıda verilen şekillerdeki yüzeyler için optimum çözümü bulurken açtığı düğüm sayısı değişmektedir. Çözüme ulaşırken, bazı örnekler için neredeyse tüm düğümleri açarken bazıları için de oldukça az sayıda düğüm açmaktadır. Çizelge 5.2 de, yüzey bilgileri, düğüm sayıları ve optimum açılabilirlik dereceleri verilmiştir.

Yüzeyler	m	n	Düğüm Sayısı	Optimum Açılabilirlik Derecesi
Yüzey 1	25	25	625	1636.080
Yüzey 2	24	24	576	995.169
Yüzey 3	23	24	552	38.528
Yüzey 4	25	25	625	1619.002
Yüzey 5	25	27	675	855.567
Yüzey 6	25	24	600	14.472
Yüzey 7	23	21	483	413.495
Yüzey 8	24	23	552	27.097
Yüzey 9	26	23	598	58.664
Yüzey 10	23	23	529	26.509

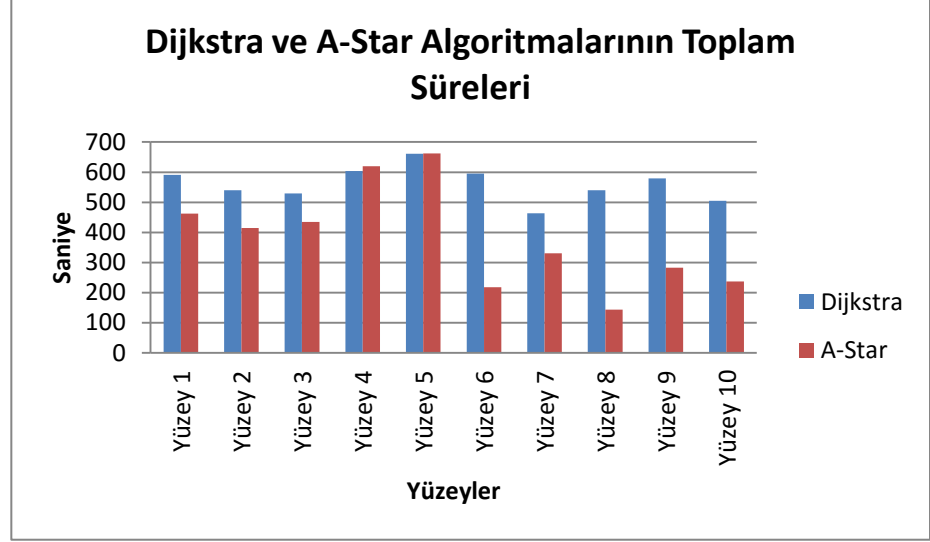
Çizelge 5.2 Yüzeylerin optimum açılabilirlik dereceleri ve düğüm sayısı

Yüzeyler	Uzaklık Ölçüm Süresi (s)		Yol Bulma Süresi (s)		Toplam Süre (s)		Ziyaret Edilen Düğüm Sayısı	
	Dijkstra	A-Star	Dijkstra	A-Star	Dijkstra	A-Star	Dijkstra	A-Star
Yüzey 1	589.594	455.859	1.359	6.688	590.953	462.547	625	479
Yüzey 2	539.359	408.328	1.141	5.859	540.500	414.188	576	434
Yüzey 3	528.375	428.641	1.063	6.594	529.438	435.234	552	441
Yüzey 4	602.188	610.234	1.328	9.672	603.516	619.906	625	618
Yüzey 5	659.047	653.297	1.531	8.344	660.578	661.641	675	666
Yüzey 6	593.969	215.547	1.219	2.625	595.188	218.172	600	283
Yüzey 7	462.547	325.750	0.875	4.719	463.422	330.469	483	342
Yüzey 8	539.109	142.594	1.078	1.250	540.188	143.844	552	152
Yüzey 9	578.047	279.547	1.219	3.344	579.266	282.891	598	293
Yüzey 10	504.188	234.141	1.016	2.922	505.203	237.063	529	244

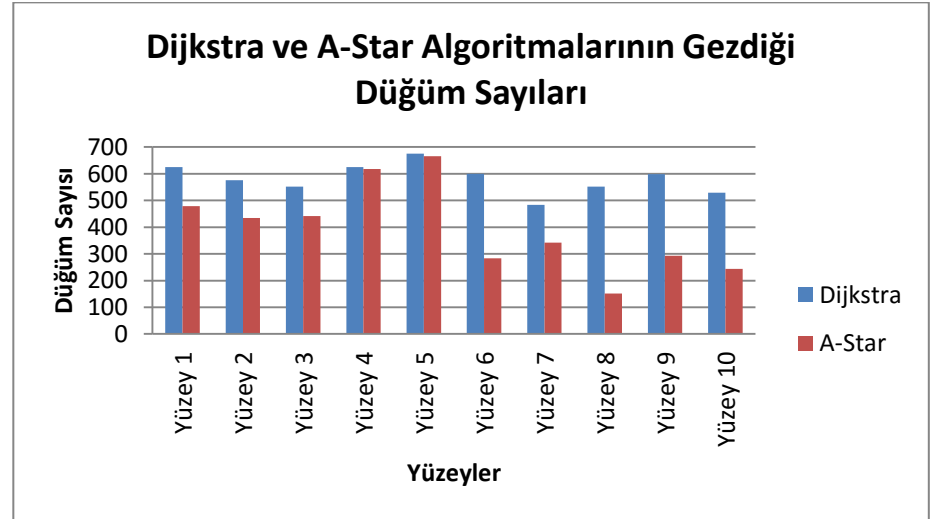
Çizelge 5.3 Dijkstra ve A-Star algoritmalarının oluşturulan yüzeyler için optimum çözümü elde ederken harcadığı süre ve açtığı düğüm sayısı

Çizelge 5.3 de, Dijkstra ile A-Star algoritmalarının belirtilen yüzeyler için çözüme ulaşırken çalışma süreleri ve ziyaret ettikleri düğüm sayıları karşılaştırılmıştır. Toplam çalışma süresi, uzaklık ölçüm süresi ve yol bulma süresi olarak iki alt başlık altında ölçülmüştür. Sadece yol bulma süreleri göz önüne alındığında Dijkstra algoritması daha düşük çıkmaktadır. Bu durum, A-Star algoritmasının kullandığı sezgisel fonksiyondan kaynaklanmaktadır. Fakat A-Star algoritması, pratikte daha az sayıda düğüm ziyaret edebilmektedir. Düğümler arası uzaklık ölçümü ise toplam süre üzerinde, sadece kısa yol bulma süresine göre çok daha baskındır. A-Star algoritması Çizelge 5.3 de de görüldüğü üzere Dijkstra

algoritmasına göre daha az sayıda düğüm ziyaret ettiğinden uzaklık ölçüm süresi daha düşük çıkmaktadır ve daha avantajlı duruma geçmektedir. Şekil 5.34 ve Şekil 5.35 de Dijkstra ve A-Star algoritmalarının oluşturulan yüzeyler için optimum çözümü elde ederken harcadıkları toplam süre ve açtıkları düğüm sayıları grafiksel olarak karşılaştırılmıştır.



Şekil 5.34 Dijkstra ve A-Star algoritmalarının oluşturulan yüzeyler için optimum çözümü elde ederken harcadığı toplam süre



Şekil 5.35 Dijkstra ve A-Star algoritmalarının oluşturulan yüzeyler için optimum çözümü elde ederken gezdikleri düğüm sayıları

6 GENEL SONUÇLAR

Bu çalışmada;

1) İkinci bölümdeki “Ön Bilgiler” kısmında, eğri ve yüzeylerin farklı açılardan incelenebilmesi için kuaterniyon yapısı ile SLERP hakkında temel bilgiler verilmiştir. Bunlara ek olarak, eğri, yüzey, Bezier eğri ve yüzeyleri ile B-Spline eğrileri ile regle ve açılabilir regle yüzeyler hakkında gerekli ön bilgiler verilmiştir. Ayrıca, geometrinin tasarımdaki önemini belirtmek için geometri ile AutoCAD ve Solidworks arasındaki ilişkiler hakkında bazı bilgiler sunulmuştur.

2) Küresel mekanizmalar robotik için çok önemlidir. Küresel mekanizmalar tarafından çizilen küresel eğriler, kinematik ve robotikte yaygın bir şekilde kullanılmaktadır. Bu amaçla, “ E^3 de Özel Smarandache Eğrilerinin Küresel Görüntüleri” isimli üçüncü bölümdeki çalışmamızda, E^3 deki Serret-Frenet ve Darboux çatılarına göre bazı özel Smarandache eğrilerinin küresel görüntüleri verilerek bu eğriler ile küresel görüntüleri arasındaki özellikler incelenmiştir.

3) “Ofset Eğri ve Yüzeylerinin Varyasyonları” isimli dördüncü bölümdeki çalışmamızda, geliştirilmiş ofset eğri ve yüzeylerin tanımı, üç boyutlu (3D) nümerik kontrol (NC) makinalarında araç yolu oluşturma ve robot yol planlaması gibi birçok mühendislik ve sanayi alanlarına önemli katkılar sağlayacağı düşünülmektedir. Farklı bir bakış açısıyla ele alınan ve bu yeni tanıma dayanarak, geliştirilmiş ofset eğri ve yüzeylerin bazı özellikleri değişik açılardan incelenmiştir. Bunlara ek olarak, orjinal eğri ile geliştirilmiş ofset eğrilerinin yay uzunluklarının varyasyonları, orjinal yüzey ile geliştirilmiş/standart ofset yüzeyleri arasındaki yüzölçümlerinin varyasyonları ifade edilmiştir. Burada bulduğumuz ile birçok endüstri uygulamalarında yaygın bir şekilde kullanılan ofset eğri ve yüzeylerinin tasarımında kullanılabilecek önemli katkılar sağlanmıştır.

4) Tezin beşinci bölümünde, tasarım ve teknolojiye yaygın bir şekilde kullanılan açılabilir regle yüzeyler üzerine bazı çalışmalar yapılmıştır.

“Bir Açılabilir Regle Yüzeyin Küresel Göstergesine Ait Evolüt” isimli çalışmada, bir açılabilir regle yüzeyin dayanak eğrisinin binormaller göstergesinin-ki bu açılabilir regle yüzeyin küresel göstergesidir- küresel evolütü,

Sabban çatısı ve jeodezik eğrilik cinsinden ifade edilmiştir. Bir uzay eğrisinin Darboux vektörünün küresel göstergesinin iki involütünün, bu eğriye ait binormaller ve teğetler göstergesi olduğu bilinmektedir. Bu çalışmada, uzay eğrisi olarak bir açılabilir regle yüzeyin dayanak eğrisi ele alınarak bu eğrinin şekil eğrilik ve şekil burulması, aynı eğrinin eğrilik ve burulması ile teğetler ve binormaller küresel göstergesinin yay elemanları cinsinden ifade edilmiştir. Diğer taraftan, bir açılabilir regle yüzeyin küresel göstergesi olan dayanak eğrisinin binormaller göstergesinin küresel evolütü (ki bu Darboux vektörünün küresel göstergesidir) ile bu evolütün iki involütü olan teğet ve binormaller göstergesinin, SLERP kullanılarak birim küre üzerinde büyük çember yaylarına karşılık geldiği gösterilmiştir. Böylece, $\mathbf{c}(s)$ nin involütleri $\mathbf{T}(s)$ ve $\mathbf{B}(s)$ ile $\mathbf{B}(s)$ in evolütü olan $\mathbf{c}(s)$ (bunlar bir açılabilir regle yüzeyin dayanak eğrisinin teğet ve binormal küresel indikatrixleri ile Darboux vektörüdür), SLERP kullanılarak ifade edildiği için animasyon ve küresel mekanizmalarda rahatça kullanılabilir.

Açılabilir regle yüzeyler, mühendis ve tasarımcılar için çok önemlidir. Diğer taraftan varyasyonlar hesabı, geometri, uygulamalı matematik gibi matematiğin dalları ile, ayrıca fizik, ekonomi ve kısmen mekanikle etkileşime sahiptir. “İki Açılabilir Regle Yüzeyin Varyasyonları” isimli çalışmada, açılabilir regle yüzeylerle varyasyonlar hesabı arasındaki ilişki, bir açılabilir regle yüzeyin dayanak eğrisi diğer bir açılabilir regle yüzeyin dayanak eğrisinden elde edilerek ve bunlara ek olarak, bir açılabilir regle yüzeyin Bezier dayanak eğrisi diğer bir açılabilir regle yüzeyin Bezier dayanak eğrisinden elde edilerek verilmiştir. Dahası, bu açılabilir regle yüzeylerin küresel görüntüleri ifade edilmiş ve bu yüzeylerin küresel görüntüleri ile büküm eğrisi arasındaki bazı ilişkiler SLERP kullanılarak verilmiştir. Ayrıca, bu küresel görüntülerin Serret-Frenet çatıları genel kuaterniyon çatı denklemlerine göre elde edilmiştir.

“İki B-Spline Uzay Eğrisinin İnterpolasyonu ve A-Star Algoritmasının Kullanılmasıyla Elde Edilmiş Yarı-Açılabilir Bezier Yüzeyi” isimli çalışmada, Chen ve Tang’ın (Chen ve Tang, 2013a) çalışması dikkate alınarak, iki uzay eğrisini interpolate eden dört-terafli Bezier yamaları ve bu yamalardan oluşan yarı-açılabilir Bezier yüzeyi A-Star algoritması uygulanarak elde edilmiştir.

Yapılan uygulamalar sonucunda, Dijkstra algoritmasının optimum çözümünün elde edilebilmesi için tüm düğümler arasındaki ağırlıkların bilinmesi gerekmektedir. Buna karşılık A-Star algoritmasında, sadece açılan düğümler ile ilişkili olduğu düğümler arasındaki ağırlıkların hesaplanması yeterlidir. Çizelge

5.2 ve Çizelge 5.3 de, uzaklık ölçümü sütununda belirtilen değerler farklılık göstermektedir. Bunun nedeni, A-Star algoritmasının Dijkstra algoritmasına göre daha az sayıda düğümü gezmesinden kaynaklanmaktadır. Ayrıca, yol bulma süreleri, uzaklık ölçümü haricinde algoritmaların harcadığı süreyi belirtmektedir. Diğer taraftan, Çizelge 5.2 ve Çizelge 5.3 incelendiğinde, A-Star algoritmasının Dijkstra algoritmasından fazla süre harcadığı görülmektedir. Bunun nedeni, düğüm sayılarının yeterince yüksek olmaması ve dolayısıyla programlamada kullanılan veri yapılarının performansa etkileridir. Diğer taraftan, toplam süre gözönüne alındığında, A-Star algoritması, daha kısa sürede optimum çözüme ulaştığından bu durumun ihmal edilebileceği görülmektedir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

- Ali, A. T.,** 2010, Special Smarandache Curves in the Euclidean Space, International Journal of Mathematical Combinatorics, Vol.2, pp.30-36 s.
- Arrondo, J., Sendra, E. and Sendra, J.,** 1999, Genus formula for Generalized Offset Curves. J.Pure Appl. Algebra, 136(3):199–209.
- Aumann, G.,** 2003, A Simple Algorithm for Designing Developable Bezier Surface, Computer Aided Geometric Design, 20, p.601–16.
- Aumann, G.,** 2004, Degree Elevation and Developable Bezier Surfaces, Computer Aided Geometric Design, 20, p.661–70.
- Aumann, G.,** 1991, Interpolation with Developable Bezier Patches, Computer Aided Geometric Design, 8, p.409–20.
- AutoCAD,** <https://tr.wikipedia.org/wiki/AutoCAD> (Erişim tarihi:19.07.2016)
- Bai, H.W., Ye, Z. and Shi, M.,** 2006, An Improved Approximate Arc Length Parameterization Method for Bezier Curves, Computer-Aided Industrial Design and Conceptual Design, 2006.CAIDCD'06. 7th International Conference.
- Barnhill, R.,** 1992, General Tool Offset Curves and Surfaces in Geometry Processing for Design and Manufacturing, SIAM, Philadelphia.
- Bektaş, Ö. and Yüce, S.,** 2013, Special Smarandache Curves According to Frame in E^3 , Romanian Journal of Mathematics and Computer Science, Vol. 3, 48-59 p.
- Blaschke, W.,** 1950, Einführung in die Differential geometrie. Springer, Berlin
- Brechner, E.,** 1992, General Tool Offset Curves and Surfaces. In: Geometry Processing for Design and Manufacturing. SIAM, Philadelphia.
- Bodduluri, RMC and Ravani B.,** 1993, Design of Developable Surfaces using Duality Between Plane and Point Geometries, Computer Aided Design, vol: 25(10), p.621–32.
- Boersma, J. and Molenaar, J.,** 1995, Geometry of The Shoulder of a Packaging Machine, SIAM Review, 37 (3):406-422 p.
- Bulut, V. and Caliskan A.,** 2013, “The Spherical Evolute Belong to the Spherical Image of Developable Ruled Surface”, 3rd International Symposium on Computing in Science & Engineering, Kuşadası-Turkey.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Bulut, V. and Caliskan A.**, 2015, Spherical Images of Special Smarandache Curves in E^3 , International J.Math. Combin., Vol.3, pp:43-54.
- Bulut, V. and Caliskan A.**, 2015, The Exchange Variations of Offset Curves and Surfaces, Results in Mathematics, Vol: 67 (3), pp: 303-332.
- Bulut, V. and Caliskan A.**, 2015, The Exchange Variations Between Bezier Directrix Curves of Two Developable Ruled Surfaces, Journal of Dynamical Systems and Geometric Theories, Vol:13(2), pp: 103-114.
- Bulut, V. and Caliskan A.**, 2016, “On the Bezier directrix curves of two developable ruled surfaces”, International Congress on Fundamental and Applied Sciences, Istanbul-Turkey.
- Cartan, É.**, 1935, la méthode du repère mobile, la théorie des groupes continus et les espaces généralisés, Exposés de Géométrie V. Hermann, Paris.
- Chen, X. and Lin, Q.**, 2014, Properties of Generalized Offset Curves and Surfaces. J. Appl.Math., Vol:2014.
- Chen, M. and Tang, K.**, 2013, G^2 Quasi-Developable Bezier Surface Interpolation of Two Space Curves, Computer-Aided Design, 45(11), 1365-1377.
- Chen, M. and Tang, K.**, 2013, Quasi-Developable Surface Modeling of Contours with Curved Triangular Patches, Computers & graphics , Vol: 37, (7), p. 851-861.
- Chen, HY., Lee, IK., Leopoldseder, S., Pottmann, H. and Wallner, J.**, 1996, On Surface Approximation Using Developable Surfaces, Graphical Models and Image Processing, 61(2), p.110–24.
- Cherkaev, A. and Cherkaev, E.**, 2003, Calculus of Variations and Applications, Lecture Notes, University of Utah, Salt Lake City.
- Chu, CH. and Séquin, CH.**, 2002, Developable Bezier Patches: Properties and Design, Computer Aided Design, 34(7), p.511–27.
- Chu, CH., Wang, CCL. and Tsai, CR.**, 2008, Computer Aided Geometric Design of Strip Using Developable Bezier Patches, Computers in Industry, 59, p.601–11.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Daniela Velichová**, 2002, Geometry in Engineering Education, European Journal of Engineering Education, Vol. 27, Iss. 3.
- Do Carmo, M.P.**, 1976, Differential Geometry of Curves and Surfaces, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.
- Encheva, R. and Georgiev, G.**, 2003, Shapes of Space Curves, Journal for Geometry and Graphics, Vol 7, No. 2, 145-155 p.
- Farin, G.**, 1990, Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design, A Practical Guide, Academic Press Inc., New York.
- Farin, G.**, 2002, Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design, Academic Press, San Diego, CA.
- Faux, I.D. and Pratt, M.J.**, 1979, Computational Geometry for Design and Manufacture, Ellis Hardwood Limited, New York.
- Field, A.**, 2009, Discovering Statistics Using SPSS, Sage publications.
- Frey, W. H. and Mancewicz, M. J.**, 1992, Developable Surfaces: Properties, Representations and Methods of Design, Technical Report, GM Research Publication GMR-7637.
- Frey, WH. and Bindschadler, D.**, 1993, Computer Aided Design of A Class of Developable Bezier Surfaces, General Motors R&D Publication R&D-8057.
- Hamilton, R.**, 1844, On a Theory of Quaternions by Williams Rowan Hamilton, British Association Report, Part II, 2 p.
- Hanson, A.J.**, 2006, Visualizing Quaternions, The Morgan Kaufmann Series in interactive 3D Technology.
- Hast, A.**, 2005, Shading by Quaternion Interpolation, In The 13th International Conference in Central Europe on Computer Graphics, Visualization and Computer Vision (WSCG 2005).
- Hinds, BK., McCartney, J. and Woods, G.**, 1991, Pattern development for 3D Surfaces, Computer Aided Design, 23(8), p.583–92.
- Hoschek, J. and Schwanecke, U.**, 1998, Interpolation and Approximation with Ruled Surfaces, In: Cripps R, editor. The mathematics of surfaces VIII. Winchester: Information Geometers, p. 213–32.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Izumiya, S. and Takeuchi, N.**, 2002, Generic Properties of Helices and Bertrand Curves, *J. Geom.*, 74: 97-109 p.
- Joneja, A., Fu, J. and Tang, K.**, 2005, Modeling Wrinkles on Smooth Surfaces for Footwear Design, *Computer-Aided Design*, vol:37(8), p.815–23.
- Kim, M-S. and Nam, K-W.**, 1995, Interpolating Solid Orientations with Circular Blending Quaternion Curves, *Computer Aided Design*, 27:385–398 p.
- Kreyszig, E.**, 1991, *Differential Geometry*, Dover Publications, Quaternions and Rotation Sequences, Proceedings of the First International Conference on Geometry, Integrability and Quantization.
- Lang, J. and Röschel, O.**, 1992, Developable (1, n)-Bezier surfaces, *Computer Aided Geometric Design*, 9, p.291–8.
- Lawrence, S.**, 2011, Developable Surfaces: Their History and Application, 13(3): 701-714 p.
- Maekawa, T.**, 1999, An Overview of Offset Curves and Surfaces *Computer Aided Design*, 31:165–173 p.
- Maekawa, T. and Chalfant, JS.**, 1998, Design and Tessellation of B-spline Developable Surfaces, *Transactions of the ASME Journal of Mechanical Design*, 120, p.453–61.
- Mortenson, M.E.**, 1996, *Geometric Modeling*, John Wiley and Sons. Inc., New York.
- Nielson, G. M.**, 1987, A Transfinite, Visually Continuous, Triangular Interpolant, In: *Geometric Modeling: Algorithms and New Trends*, G. Farin, ed., SIAM, pages 235-246.
- Nutbourne, A.W. and Martin, R.R.**, 1988, *Differential Geometry Applied to Curve and Surface Design*, Foundations, West Sussex, Chichester, vol. 1. E.Horwood, New York.
- Oldknow, A.**, 2001, Chairman’s preface, in *Teaching and Learning Geometry* 11-19. Report of The Royal Society, Joint Mathematical Council Working Group.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- O'Neill, B.**, 1966, Elementary Differential Geometry, Akademic Press, New York, San Francisco, London.
- Özçelik, Z. and Saka, Z.**, 2010, Ball and Burmester Points in Spherical Kinematics and Their Special Cases, Forschung im Ingenieurwesen, Volume 74, Issue 2 , pp:111-122.
- Özdaş K. ve Özdaş A.**, 1989, Fiziksel Niceliklerin Kuaterniyonlarla Temsili, Anadolu Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Dergisi, 1-2, 101-113.
- Pegna, J. and Wolter, E-E.**, 1992, Geometrical Criteria to Guarantee Curvature Continuity of Blend Surfaces, ASME Journal of Mechanical Design, 114:201-210 p.
- Pham, B.**, 1992, Offset Curves and Surfaces: A Brief Survey. Computer Aided Design 24:223–229 p.
- Piegl, L. and Tiller, W.**, 1996, The NURBS Book, Verlag Berlin Heidelberg, Germany.
- Pol, H. J., Harskamp, E. G. and Suhre, C. J.**, 2008, The Effect of The Timing of Instructional Support in A Computer Supported Problem Solving Program for Students in Secondary Physics Education, Computers in Human Behavior, 24, 1156-1178 s.
- Pottmann, H.**, 1997, General Offset Surfaces, Neural Parallel Sci. Computer 5:55–80p.
- Pottmann, H. and Wallner, J.**, 2001, Computational Line Geometry, Springer Verlag.
- Pressley, Andrew**, 2010, Elementary Differential Geometry, Springer-Verlag London.
- Rogers, D.F.**, 2001, An Introduction to NURBS with Historical Perspective, Academic Press, Amera.
- Rovenski, V.**, 2010, Modeling of Curves and Surfaces with MATLAB, Springer-Verlag New York.
- Russell, S. and Norvig, P.**, 2009, Artificial Intelligence: A Modern Approach, 3rd edition, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Shoemake, K.**, 1987, Animating Rotation with Quaternion Calculus, ACM SIGGRAPH, Course Notes10, Computer Animation: 3-D Motion, Specification, and Control.
- Shoutmetutorials**, 2015, Solid Work, <http://shoutmetutorials.com/solidworks-basics/> (Erişim tarihi:19.07.2016)
- Schwenk-Schellschmidt, A., Simon, U. and Wiehe, M.**, 2001, Eigenvalue Equations in Curve Theory, Part I, Characterizations of Conic Sections. Result. Math. 40:273-285p.
- Solid Works**, <https://tr.wikipedia.org/wiki/SolidWorks> (Erişim tarihi:19.07.2016)
- Stoker, J.J.**, 1969, Differential Geometry, Wiley-Interscience.
- Şeker, Ş.E.**, 2016, “A Yıldız Arama Algoritması (A Star Search Algorithm, A*)”, <http://bilgisayarkavramlari.sadievrenseker.com/2009/03/02/a-yildiz-arama-algoritmasi-a-star-search-algorithm-a/> , (Erişim tarihi: 26.07.2016)
- TeAchnology**, “What Is Geometry? When Do You Use It In The Real World?”, http://www.teach-nology.com/teachers/subject_matter/math/geometry/ (Erişim tarihi:19.07.2016).
- Turgut, M. and Yilmaz, S.**, 2008, Smarandache Curves in Minkowski Space-time, Int. J. Math. Comb. , 3, 51-55.
- Tutorial45**, “What is AutoCAD actually Used for?”, <http://tutorial45.com/what-is-autocad-used-for/> (Erişim tarihi:19.07.2016)
- Walter, M. and Fournier, A.**, 1996, Approximate Arc Length Parameterization, Proceedings of the 9th Brazilian Symposium on Computer Graphics and Image Processing.
- Yang, A.T.**, 1963, Application of Quaternion Algebra and Dual Numbers to the Analysis of Spatial Mechanism, Colombia University, Eng. Sc.D., Ph.D. Dissertation.

ÖZGEÇMİŞ

1979 yılında İzmir’de doğan Vahide BULUT, 1996 yılında Balıkesir Üniversitesi Necatibey Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği Bölümü’nde lisans öğrenimine başlamış ve bu bölümden 2000 yılında yedincilikle mezun olmuştur. 2000 yılında Aydın-Karacasu’da bulunan bir ilköğretim okulunda öğretmen olarak çalışmaya başlamıştır. 2001-2006 yılları arasında ücretsiz izin alarak Amerika’da kalmış ve 2006-2008 yılları arasında tekrar aynı yerde görevine devam etmiştir. 2008-2010 yılları arasında İzmir-Buca’da bulunan bir ilköğretim okulunda öğretmen olarak çalışmaya başlamış ve 2010 yılından itibaren de İzmir-Bornova’da bulunan bir lisede öğretmen olarak çalışmaya devam etmektedir. 2011 yılında Ege Üniversitesi, Fen fakültesi, Matematik bölümünde bütünleşik doktora eğitimine başlamıştır.

Çalışma ve İlgi Alanları: Diferansiyel Geometri, Bilgisayar Destekli Geometrik Tasarım (BDGT), Kinematik (Kinematics), Robotik (Robotics), Hesaplamalı Geometri (Computational Geometry), Bilgisayar Grafikleri (Computer Graphics).

Dergi Hakemlikleri :

- Meccanica (2014– devam ediyor)

ESERLER

A. Uluslararası hakemli dergilerde yayımlanan makaleler :

A1. Bulut, V., Çalışkan A., “The Exchange Variations of Offset Curves and Surfaces”, Results in Mathematics, Vol: 67 (3), pp: 303-332, (2015). (SCI)

A2. Bulut, V., Çalışkan A., “The exchange variations between bezier directrix curves of two developable ruled surfaces”, Journal of Dynamical Systems and Geometric Theories, Vol:13(2), pp: 103-114, (2015).

A3. Bulut, V., Çalışkan A., “Spherical Images of Special Smarandache Curves in E^3 ”, International J.Math. Combin., Vol.3, pp:43-54, (2015).

B. Bilimsel Toplantılarda Sunulan Bildiriler:

Uluslar arası

B1. Bulut, V. ve Çalışkan A., “The Spherical Evolute Belong to the Spherical Image of Developable Ruled Surface”, 3rd International Symposium on Computing in Science & Engineering, October 24-25, 2013, Kuşadası-Turkey.

B2. Bulut, V. ve Çalışkan A., “Circular Steps for Marching Directions Along a Regular Surface/Surface Intersection”, Proceedings of the Fourth International Conference on Mathematical and Computational Applications, June 11-13, 2013. Manisa, Turkey, pp.84-89.

B3. Bulut, V. ve Çalışkan A., “On the Bezier directrix curves of two developable ruled surfaces”, International Congress on Fundamental and Applied Sciences, 22-26 August 2016, Istanbul-Turkey.

Ulusal

B3. Bulut, V. ve Çalışkan, A., “Açılabilir Regle Yüzeylerin Küresel Görüntüleri Üzerine” , XVIII. Ulusal Mekanik Kongresi, 26 - 30 Ağustos 2013, Celal Bayar Üniversitesi, Manisa.

EKLER

Ek 1 γ fonksiyonu

EK 1

Bölüm 5.2.7 deki Örnek 1 için γ fonksiyonunu

$$\bar{\mathbf{P}}(s, t) = \mathbf{P}(s, t) + \gamma \mathbf{n} \quad (\text{Ek1.0.1})$$

denkleminde göre hesaplayabiliriz. $\mathbf{P}(s, t)$ ve $\bar{\mathbf{P}}(s, t)$ açılabilir regle yüzeyleri uygulama kısmında sırasıyla

$$\mathbf{P}(s, t) = \left(2\sin\frac{s}{\sqrt{29}}, 2\cos\frac{s}{\sqrt{29}}, \frac{5s}{\sqrt{29}}\right) + t\left(\frac{2}{\sqrt{29}}\cos\frac{s}{\sqrt{29}}, -\frac{2}{\sqrt{29}}\sin\frac{s}{\sqrt{29}}, \frac{5}{\sqrt{29}}\right)$$

ve

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{P}}(s, t) = & \left(\frac{19-s}{10}\sin\frac{s}{\sqrt{29}} + \frac{12s+15}{10\sqrt{29}}\cos\frac{s}{\sqrt{29}}, \frac{19-s}{10}\cos\frac{s}{\sqrt{29}} - \frac{12s+15}{10\sqrt{29}}\sin\frac{s}{\sqrt{29}}, \frac{51s-6}{10\sqrt{29}}\right) \\ & + t\left[-\frac{1}{10}\sin\frac{s}{\sqrt{29}} + \frac{31-s}{10\sqrt{29}}\cos\frac{s}{\sqrt{29}} - \frac{12s+15}{10.29}\cos\frac{s}{\sqrt{29}}, \right. \\ & \left. -\frac{1}{10}\cos\frac{s}{\sqrt{29}} + \frac{31-s}{10\sqrt{29}}\sin\frac{s}{\sqrt{29}} - \frac{12s+15}{10.29}\sin\frac{s}{\sqrt{29}}, \right. \\ & \left. \frac{51}{10\sqrt{29}}\right]. \end{aligned}$$

olarak verilmişti. γ nın hesaplanması sürecinde, denklem (Ek1.0.1) i aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\bar{\mathbf{P}} - \mathbf{P} = \gamma \mathbf{n} \quad (\text{Ek1.0.2})$$

Bölüm 2.2.6 ve 5.2.9 da bahsedildiği gibi, açılabilir regle yüzeyin birim normal vektörü dayanak eğrisinin birim binormal vektörü olduğundan, denklem (Ek1.0.2) in her iki tarafının normu alınarak γ fonksiyonu

$$\gamma = \sqrt{\left[\cos(\alpha_3)\alpha_1 + t\left(\frac{\cos(\alpha_3)}{10} + \alpha_2 - \frac{\sqrt{29}\sin(\alpha_3)(s-11)}{290}\right) + \frac{\sqrt{29}\sin(\alpha_3)(12s+15)}{290}\right]^2 + \left[\sin(\alpha_3)\alpha_1 + t\left(\frac{\sin(\alpha_3)}{10} + \alpha_2 + \frac{\sqrt{29}\cos(\alpha_3)(s-11)}{290}\right) - \frac{\sqrt{29}\cos(\alpha_3)(12s+15)}{290}\right]^2 + \left[\frac{\sqrt{29}t}{290} - \frac{\sqrt{29}(s-6)}{290}\right]^2}$$

ifadesi kullanılarak hesaplanabilir, burada

$$\alpha_1 = \frac{s}{10} + \frac{1}{10}, \quad \alpha_2 = \cos(\alpha_3)\left(\frac{6s}{145} + \frac{3}{58}\right), \quad \alpha_3 = \frac{\sqrt{29}s}{29}$$

ve $\|\mathbf{n}\| = 1$ dir.