



T.C.

**ÇANAKKALE ONSEKİZ MART ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
YÜKSEK LİSANS TEZİ**



**GENELLEŞTİRİLMİŞ TÜREVLİ
ASAL HALKALARDA İDEALLER**

Murat ÇELİK

Matematik Anabilim Dalı

ÇANAKKALE

Not: Tez kapağı yüksek lisans tezlerinde "Turkuaz", doktora tezlerinde "Mavi" dir.

T.C.
ÇANAKKALE ONSEKİZ MART ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
YÜKSEK LİSANS TEZİ

**GENELLEŞTİRİLMİŞ TÜREVLİ
ASAL HALKALARDA İDEALLER**

Murat ÇELİK

Matematik Anabilim Dalı

Tezin Sunulduğu Tarih: 27/06/2016

Tez Danışmanı:
Prof. Dr. Neşet AYDIN

ÇANAKKALE

Murat ÇELİK tarafından Prof. Dr. Neşet AYDIN yönetiminde hazırlanan ve 27/06/2016 tarihinde aşağıdaki jüri karşısında sunulan “**Genelleştirilmiş Türevli Asal Halkalarda İdealler**” başlıklı çalışma, Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**’nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak oybirliği/oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

JÜRİ

Prof. Dr. Neşet AYDIN

.....

Başkan

Prof. Dr. Öznur GÖLBAŞI

.....

Üye

Yrd. Doç. Dr. Serdar ENGİNOĞLU

.....

Üye

Prof. Dr. Levent GENÇ

Müdür

Fen Bilimleri Enstitüsü

Sıra No:.....

İNTİHAL (AŞIRMA) BEYAN SAYFASI



Bu tezde görsel, işitsel ve yazılı biçimde sunulan tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uyularak tarafımdan elde edildiğini, tez içinde yer alan ancak bu çalışmaya özgü olmayan tüm sonuç ve bilgileri tezde kaynak göstererek belirttiğimi beyan ederim.

Murat ÇELİK

TEŞEKKÜR

Bu tezin gerçekleŐtirilmesinde, çalıŐmam boyunca benden bir an olsun yardımlarını esirgemeyen saygı değer danışman hocam Prof. Dr. Neşet AYDIN'a, çalışma sũresince tũm zorlukları benimle gũęũsleyen Selin TũRKMEN'e, Didem CAMCI'ya, AyŐe AYRAN'a, Enise ALTUNKAYNAK'a ve hayatımın her evresinde bana destek olan değerli aileme sonsuz teŐekkũrlerimi sunarım.

Murat ÇELİK
anakkale, Haziran 2016



SİMGELER VE KISALTMALAR

| | |
|-------------------|----------------------|
| \in | Elemanı |
| \notin | Elemanı değil |
| \emptyset | Boş küme |
| $=$ | Eşit |
| \neq | Eşit değil |
| \cup | Birleşim |
| \cap | Kesişim |
| \subseteq | Kapsanır veya eşit |
| \subset | Kapsanır |
| $\not\subset$ | Kapsanmaz |
| \Leftrightarrow | Gerek ve yeter koşul |
| \Rightarrow | İse |
| \vee | Veya |
| $-$ | Fark |
| \forall | Her |

ÖZET

GENELLEŞTİRİLMİŞ TÜREVLİ ASAL HALKALARDA İDEALLER

Murat ÇELİK

Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi

Danışman : Prof. Dr. Neşet AYDIN

27/06/2016, 71

Bu tez, asal ve yarı-asal halkalar üzerinde türev, genelleştirilmiş türev ve çarpımsal (genelleştirilmiş)-türev arasındaki ilişkilerin detaylı incelenmesi amacıyla hazırlanmıştır.

Yukarıdakilere ek olarak, yarı-asal halka üzerinde çarpımsal (genelleştirilmiş)-türev kullanılarak elde edilen bazı sonuçlar, yarı-asal halkanın sol yarıgrup ideali üzerinde genelleştirilmiştir.

Anahtar sözcükler: Asal halka, Yarı-asal Halka, Genelleştirilmiş Türev, Çarpımsal (Genelleştirilmiş)- Türev, Çarpımsal α - (Genelleştirilmiş) Türev, Çarpımsal β - (Genelleştirilmiş) Türev.

ABSTRACT

IDEALS OF PRIME RINGS WITH GENERALIZED DERIVATIONS

Murat ÇELİK

Çanakkale Onsekiz Mart University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Master of Science Thesis in Mathematical Science

Advisor : Prof. Dr. Neşet AYDIN

27/06/2016, 71

This thesis is prepared to examine in detail the relations between the derivation, generalized derivation and multiplicative (generalized)-derivation on prime and semiprime rings.

In addition, some results which is obtained by using multiplicative (generalized)-derivation on a semiprime ring are generalized on a semigroup ideal of a semiprime ring.

Keywords: Prime Ring, Semiprime Ring, Generalized Derivation, Multiplicative (Generalized)-Derivation, Multiplicative α - (Generalized) Derivation, Multiplicative β - (Generalized) Derivation.

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

| | |
|--|-----|
| TEZ SINAVI SONUÇ FORMU..... | ii |
| İNTİHAL (AŞIRMA) BEYAN SAYFASI..... | iii |
| TEŞEKKÜR..... | iv |
| SİMGELER VE KISALTMALAR | v |
| ÖZET | vi |
| ABSTRACT..... | vii |
| BÖLÜM 1 | |
| GİRİŞ | 1 |
| BÖLÜM 2 | |
| GENEL BİLGİLER | 2 |
| BÖLÜM 3 | |
| ASAL HALKALARDA TÜREVLER VE GENELLEŞTİRİLMİŞ TÜREVLER..... | 10 |
| 3.1. Asal Halkalarda Türevler ve Değişmelilik..... | 10 |
| 3.1.1. Asal Halkalarda Türevler | 10 |
| 3.1.2. Herstein'in Türevler Üzerine Bir Notu..... | 24 |
| 3.1.3. Asal Halkalarda Merkezileştirici Dönüşümler ve Türevler..... | 28 |
| 3.2. Asal Halkalarda Genelleştirilmiş Türevler..... | 42 |
| BÖLÜM 4 | |
| YARI-ASAL HALKALARDA ÇARPIMSAL (GENELLEŞTİRİLMİŞ)-TÜREVLER.... | 47 |
| BÖLÜM 5 | |
| YARI-ASAL HALKALARDA ÇARPIMSAL (GENELLEŞTİRİLMİŞ)-TÜREVLERİN BİR GENELLEŞTİRMESİ..... | 64 |
| KAYNAKLAR | 71 |
| ÖZGEÇMİŞ | I |

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde tez konusu hakkında açıklamalar ve konuyla ilgili daha önce yapılmış çalışmalar hakkında bilgiler bulunmaktadır.

İkinci bölümde ise bu tezi okumakta yardımcı olacak genel bilgiler verilmiştir.

Üçüncü bölümde Posner (1967), Herstein (1979), Bresar (1993) tarafından asal halkalarda türev ve Aydın (2011) tarafından geliştirilmiş türev ile ilgili yapılmış çalışmalar incelenmiştir.

Dördüncü bölümde Dhara ve Ali (2013) tarafından yarı-asal halkaların idealleri için çarpımsal (geliştirilmiş)-türevler üzerine yaptıkları çalışmadaki sonuçlar incelenmiştir.

Beşinci bölümde ise dördüncü bölümde halkalar için ele alınan bazı problemler çarpımsal (geliştirilmiş)-türevli halkaların sol yarıgrup idealleri için geliştirilmiştir.

BÖLÜM 2

GENEL BİLGİLER

Tanım 2.1. G boş olmayan bir küme ve $*: G \times G \rightarrow G$, $(a, b) \rightarrow a * b$ işlemi tanımlansın. O halde

$$[\mathbf{G1}] \text{ Her } a, b, c \in G \text{ için } a * (b * c) = (a * b) * c$$

$$[\mathbf{G2}] \text{ Her } a \in G \text{ için } a * e = e * a = a \text{ olacak şekilde bir } e \in G \text{ vardır}$$

$$[\mathbf{G3}] \text{ Her } a \in G \text{ için } a * x = x * a = e \text{ olacak şekilde bir } x \in G \text{ vardır}$$

koşulları sağlanıyorsa G kümesine $*$ işlemine göre bir **grup** denir ve $(G, *)$ ile gösterilir.

Üstelik her $a, b \in G$ için $a * b = b * a$ koşulu da sağlanıyorsa G grubuna **değişmeli grup** denir.

Tanım 2.2. G bir grup ve H , G kümesinin boştan farklı bir altkümesi olsun. Eğer H kümesi G üzerindeki işleme göre tek başına bir grup oluyorsa H kümesine G grubunun bir **altgrubu** denir.

Tanım 2.3. G bir grup olsun. G grubunun G ve $\{e\}$ dışındaki bir altgrubuna **öz altgrup** denir.

Teorem 2.4. (Brauer Trick) Bir grup iki öz altgrubunun birleşimi şeklinde yazılamaz.

İspat : $(G, *)$ bir grup, A ve B iki öz altgrubu olmak üzere $G = A \cup B$ olsun. Farz edelim ki $A \not\subset B$ ve $B \not\subset A$ olsun. Bu durumda $a \in A - B$ ve $b \in B - A$ olacak şekilde, grubun a ve b gibi iki elemanı vardır. Dolayısıyla $a * b \in A \cup B$ olur. Bu ise $(a * b) \in A$ veya $(a * b) \in B$ demektir. $(a * b) \in A$ olması durumunda $a, a^{-1} \in A$ olması kullanılarak $b = a^{-1} * (a * b) \in A$ olarak yazılır. Yani $b \in A$ demektir. Bu ise $b \in B - A$ olmasıyla çelişir. Dolayısıyla $(a * b) \in B$ olur. Bu durumda da $a \in B$ bulunur. Bu ise $a \in A - B$ olmasıyla çelişir. Böylece $A \subset B$ veya $B \subset A$ olduğu bulunur. $A \subset B$ olması durumunda $G = B$ olur. Benzer olarak $B \subset A$ olması durumunda da $G = A$ olur. O halde bir G grubu A ve B gibi iki altgrubunun birleşimi olarak yazılıyorsa ya $G = A$ ya da $G = B$ dir.

Tanım 2.5. R boş olmayan bir küme

$$+ : R \times R \rightarrow R, (x, y) \rightarrow x + y \text{ ve } \cdot : R \times R \rightarrow R, (x, y) \rightarrow x \cdot y$$

işlemleri tanımlansın. O halde

$$[\mathbf{R1}] (R, +) \text{ değişmeli grup}$$

$$[\mathbf{R2}] \text{ Her } x, y, z \in R \text{ için } x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$$

$$[\mathbf{R3}] \text{ Her } x, y, z \in R \text{ için } x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \text{ ve } (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$$

koşulları sağlanıyor ise R kümesine bu işlemlere göre bir **halka** denir ve $(R, +, \cdot)$ ile gösterilir. R halkası

[R4] Her $x, y \in R$ için $x \cdot y = y \cdot x$ koşulunu sağlıyorsa R halkasına **değişmeli halka**,

[R5] Her $x \in R$ için $x \cdot 1_R = 1_R \cdot x = x$ olacak biçimde bir $1_R \in R$ varsa R halkasına **birimli halka** denir.

Tanım 2.6. R bir halka olmak üzere A , R halkasının boş olmayan altkümesi R halkası üzerinde tanımlı işlemlere göre tek başına halka olma koşullarını sağlıyorsa A kümesine R halkasının bir **althalkası** denir.

Tanım 2.7. $(R, +, \cdot)$ ve $(P, \blacksquare, \Delta)$ iki halka olmak üzere $f: R \rightarrow P$ fonksiyonu her $x, y \in R$ için $f(x + y) = f(x) \blacksquare f(y)$ ve $f(x \cdot y) = f(x) \Delta f(y)$ koşullarını sağlıyorsa f fonksiyonuna bir **halka homomorfizması** denir

Tanım 2.8. R, P iki halka ve $f: R \rightarrow P$ bir halka homomorfizması olmak üzere

$$\ker f = \{ x \in R \mid f(x) = 0_P \}$$

kümesine f homomorfizmasının **çekirdeği** denir.

Tanım 2.9. R ve P iki halka olmak üzere $f: R \rightarrow P$ bir halka homomorfizması olsun.

$$\text{Im} f = f(R) = \{ f(x) \mid x \in R \}$$

kümesine f homomorfizmasının **görüntü kümesi** denir.

Tanım 2.10. R bir halka olmak üzere A , R halkasının boş olmayan bir altkümesi olsun

$$\ell(A) = \{ x \in R \mid xa = 0_R, \forall a \in A \}$$

kümesine A kümesinin **sol sıfırlayan kümesi**,

$$r(A) = \{ x \in R \mid ax = 0_R, \forall a \in A \}$$

kümesine de A kümesinin **sağ sıfırlayan kümesi** denir.

Tanım 2.11. R bir halka ve a , R halkasının sıfırdan farklı bir elemanı olsun. Bu durumda $ab = 0$ olacak şekilde halkanın sıfırdan farklı bir b elemanı varsa $a \in R$ bir **sol sıfır bölen**, eğer, $ca = 0$ olacak biçimde halkanın sıfırdan farklı bir c elemanı varsa $a \in R$ bir **sağ sıfır bölen** olarak adlandırılır. Eğer a elemanı hem sağ sıfır bölen hem de sol sıfır bölen ise **sıfır bölen** adını alır.

Uyarı 2.12. Sıfır bölen buldurmeyen halkaya **sıfır bölensiz halka** denir.

Tanım 2.13. R bir halka ve X , R halkasının boş olmayan bir altkümesi olsun.

$$C_R(X) = \{ a \in R \mid ra = ar, \forall r \in X \}$$

kümesine A kümesinin R halkasındaki *merkezleştiricisi* denir.

Tanım 2.14. R bir halka olmak üzere

$$Z(R) = \{a \in R \mid ar = ra, \forall r \in R\}$$

kümesine R halkasının *merkezi* adı verilir.

Not 2.15. Bir halkanın merkezi kendisinin bir althalkasıdır.

Tanım 2.16. R bir halka ve L , R halkasının boş olmayan bir altkümesi olmak üzere

- i. Her $r \in R$ ve $a \in L$ için $ra \in L$ ise L kümesine R halkasının *sol yarıgrup ideali*,
 - ii. Her $r \in R$ ve $a \in L$ için $ar \in L$ ise L kümesine R halkasının *sağ yarıgrup ideali*,
- denir.

Uyarı 2.17. Her halka kendisinin bir yarıgrup idealidir

Tanım 2.18. R bir halka ve A , R halkasının bir althalkası olmak üzere

- i. Her $x \in R$ ve $a \in A$ için $xa \in A$ ise A althalkasına R halkasının *sol ideali*,
 - ii. Her $x \in R$ ve $a \in A$ için $ax \in A$ ise A althalkasına R halkasının *sağ ideali*,
- denir. A , R halkasının hem sağ ideali hem sol ideali ise A althalkasına R halkasının *iki yanlı ideali* veya *ideali* denir.

Uyarı 2.19. Her halka kendisinin bir idealidir.

Uyarı 2.20. R bir halka, A ve B , R halkasının iki ideali olsun. O halde $A \cap B$ kümesi R halkasının idealidir.

İspat A ve B , R halkasının idealleri olduğu için $0_R \in A$ ve $0_R \in B$ dir. Böylece, $0_R \in A \cap B$ olur. Bu ise $A \cap B$ boş kümeden farklı demektir. Bu durumda her $x, y \in A \cap B$ için $x - y \in A$ ve $x - y \in B$ olur. Yani $x - y \in A \cap B$ dir. Üstelik A ve B , R halkasının birer ideali olduğundan her $r \in R$ için $xr, rx \in A$ ve $xr, rx \in B$ olur. Yani her $r \in R$ için xr ve $x \in A \cap B$ için $rx \in A \cap B$ dir. Böylece $A \cap B$, R halkasının bir ideali olur.

Uyarı 2.21. R bir halka, A ve B , R halkasının idealleri olmak üzere

$$AB = \{\sum_{sonlu} a_i \cdot b_i \mid a_i \in A, b_i \in B\}$$

kümesi R halkasının bir idealidir.

İspat : A ve B , R halkasının idealleri olsun. $0_R \in A$ olduğundan $b_i \in B$ olmak üzere $0_R = 0_R b_1 + 0_R b_2 + \dots + 0_R b_n$ olarak yazılabildiğinden $0_R \in AB$ dir. O halde $AB \neq \emptyset$ dir. $x, y \in AB$ için $a_i, c_j \in A$ ve $b_i, d_j \in B$ olmak üzere $x = \sum_{sonlu} a_i b_i$ ve $y = \sum_{sonlu} c_j d_j$ biçiminde olduğundan

$$x - y = \sum_{sonlu} a_i b_i - \sum_{sonlu} c_j d_j$$

elemanındaki toplam yeniden düzenlenerek $m_k \in A$ ve $n_k \in B$ olmak üzere

$$x - y = \sum_{\text{sonlu}} a_i b_i - \sum_{\text{sonlu}} c_j d_j = \sum_{\text{sonlu}} m_k n_k$$

olarak yazılabilir. Böylece $x - y \in AB$ dir. Öte yandan $r \in R$ olmak üzere

$$rx = r \left(\sum_i a_i b_i \right) = \sum_i (r a_i) b_i \in AB$$

dir. Benzer şekilde

$$xr = \left(\sum_i a_i b_i \right) r = \sum_i a_i (b_i r) \in AB$$

dir. O halde AB kümesi R halkasının iki yanlı idealidir.

Tanım 2.22. R bir halka olsun. $a \in R$ olmak üzere $a^n = 0$ olacak şekilde bir n pozitif tamsayısı varsa a elemanına R halkasının bir **nilpotent elemanı** denir. Bu koşulu sağlayan n pozitif tamsayılarının en küçüğüne a elemanının **nilpotentlik indeksi** denir.

Tanım 2.23. R bir halka ve I sıfırdan farklı bir ideali olmak üzere $I^n = (0)$ olacak şekilde bir pozitif n tam sayısı varsa I idealine R halkasının **nilpotent ideali** denir.

Tanım 2.24. R halka ve I bir ideali olmak üzere I idealinin her elemanı nilpotentse I idealine R halkasının **nil ideali** denir.

Tanım 2.25. R bir halka, A, B ve P , R halkasının idealleri ve $P \neq R$ olsun.

$$AB \subset P \Rightarrow A \subset P \vee B \subset P$$

koşulu sağlanıyorsa P idealine R halkasının **asal ideali** denir.

Tanım 2.26. (0) ideali asal ideal olan halkaya **asal halka** denir.

Not 2.27. R halkası bir asal halka olsun. $a, b \in R$ için

$$aRb = (0) \text{ ise } a = 0 \text{ ya da } b = 0$$

dır.

Tanım 2.28. Sıfırdan farklı nilpotent ideali olmayan halkaya **yarı-asal halka** denir.

Not 2.29. R bir yarı-asal halka olsun. $a \in R$ için

$$aRa = (0) \text{ ise } a = 0$$

dır.

Sonuç 2.30. Her asal halka bir yarı-asal halkadır.

Lemma 2.31. (Bresar, 1993, p. 386) R bir asal halka ve $0 \neq a \in Z(R)$ ise a sıfır bölen değildir. Başka bir deyişle asal halkanın merkezinde sıfır bölen yoktur.

Lemma 2.32. (Bresar, 1993, p. 386) R bir asal halka, d , R halkası üzerinde tanımlı sıfırdan farklı bir türev ve I , R halkasının bir sol ideali olmak üzere $d(I) \neq 0$ dır.

Lemma 2.33. (Bresar, 1993, p. 386) R bir asal halka olsun. R halkasının değişmeli bir sol ideali varsa R halkası değişmelidir.

Lemma 2.34. (Bresar, 1993, p. 386) R bir asal halka ve $a, b \in R$ olmak üzere $ab \in Z(R)$ ve $a \in Z(R)$ ise $a = 0$ veya $b \in Z(R)$ dir.

Lemma 2.35. (Herstein, 1969, p. 1) R bir asal halka ise sıfırdan farklı sonlu indeksli bir sol nil ideali yoktur.

Tanım 2.36. R bir halka olsun. Her $r \in R$ için $nr = 0$ olacak biçimde bir pozitif n tamsayısı varsa, bu şekildeki en küçük pozitif n tam sayısına R halkasının *karakteristiği* denir ve $CharR = n$ ile gösterilir.

Tanım 2.37. R bir halka ve n pozitif bir tamsayı olsun. $r \in R$ olmak üzere $nr = 0$ iken $r = 0$ ise R halkasına bir *n -torsion free* halka denir.

Uyarı 2.38. R bir halka olmak üzere R halkası n -torsion free ise $CharR \neq n$ dir.

Uyarı 2.39. R , $CharR \neq 2$ olan bir asal halka ise R , 2-torsion free bir halkadır.

İspat : $CharR \neq 2$ olsun. Kabul edelim ki $x \in R$ için $2x = 0$ olsun. O halde her $a, b \in R$ için $0 = 2xab = xa(2b)$ olur. Yani her $b \in R$ için $xR(2b) = (0)$ dır. R bir asal halka olduğundan $x = 0$ ya da her $b \in R$ için $2b = 0$ dır. $CharR \neq 2$ olduğundan $x = 0$ olur. O halde R , 2-torsion free halkadır.

Tanım 2.40. R bir halka olsun.

$$[,]: R \times R \rightarrow R, [r, s] = rs - sr$$

olacak biçimde tanımlanan dönüşüme *Lie komütatör* denir. Lie komütatör aşağıdaki özellikleri sağlar.

Her $r, s, t \in R$ için

- i. $[r, r] = 0$
- ii. $[r + s, t] = [r, t] + [s, t]$
- iii. $[r, s + t] = [r, s] + [r, t]$
- iv. $[r, [s, t]] + [s, [t, r]] + [t, [r, s]] = 0$ (Jakobi özdeşliği)

Tanım 2.41. R bir halka ve U boştan farklı bir altkümesi

- i. U bir toplamsal değişmeli grup
- ii. Her $u, v \in U$ ve için $[u, v] = uv - vu \in U$

koşullarını sağlıyorsa U kümesine R halkasının *Lie althalkası* denir.

Sonuç 2.42. Her halka kendisinin bir Lie althalkasıdır.

Sonuç 2.43. R halkasının her ideali kendisinin bir Lie althalkasıdır.

Tanım 2.44. R bir halka ve U , R halkasının boştan farklı altkümesi

- i. U toplamsal değişmeli grup
- ii. Her $u \in U$ ve her $r \in R$ için $[u, r] = ur - ru \in U$

koşullarını sağlıyorsa U kümesine R halkasının bir **Lie ideali** denir.

Sonuç 2.45. Her halka kendisinin bir Lie idealidir.

Sonuç 2.46. Bir halkanın her ideali halkanın bir Lie idealidir.

Uyarı 2.47. Halkanın bir Lie ideali, ideal olmayabilir.

Tanım 2.48. R bir halka olmak üzere

$$(\cdot, \cdot): R \times R \rightarrow R, (r, s) = rs + sr$$

olacak biçimde tanımlanan dönüşüme **Jordan komütatör** denir. Jordan komütatör aşağıdaki özellikleri sağlar

Her $r, s, t \in R$ için

- i. $(r + s, t) = (r, t) + (s, t)$
- ii. $(r, s + t) = (r, s) + (r, t)$
- iii. $(r, s) = (s, r)$

Tanım 2.49. R bir halka ve U , R halkasının boştan farklı altkümesi

- i. U toplamsal değişmeli grup
- ii. Her $u, v \in U$ ve için $(u, v) = uv + vu \in U$

koşullarını sağlıyorsa U kümesine R halkasının bir **Jordan althalkası** denir.

Sonuç 2.50. Her halka kendisinin bir Jordan althalkasıdır.

Sonuç 2.51. R halkasının her ideali kendisinin bir Jordan althalkasıdır.

Tanım 2.52. R bir halka ve U , R halkasının boştan farklı altkümesi

- i. U toplamsal değişmeli grup
- ii. Her $u \in U$ ve her $r \in R$ için $(u, r) = ur + ru \in U$

koşullarını sağlıyorsa U kümesine R halkasının bir **Jordan ideali** denir.

Sonuç 2.53. Her halka kendisinin bir Jordan idealidir.

Sonuç 2.54 R halkasının her ideali kendisinin bir Jordan idealidir.

Tanım 2.55. R bir halka ve d , R halkası üzerinde tanımlı bir toplamsal dönüşüm olmak üzere her $r, s \in R$ için

$$d(rs) = d(r)s + rd(s)$$

koşulunu sağlayan d dönüşümüne R halkası üzerinde bir **türev** denir.

Örnek : R bir halka olmak üzere $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0_R & 0_R \end{pmatrix} \mid a, b \in R \right\}$ kümesi matrisler kümesi üzerinde tanımlı olan toplama ve çarpma işlemlerine göre bir halkadır.

$$d: S \rightarrow S, d \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ile tanımlı dönüşüm S halkası üzerinde bir türedir.

Not 2.56. R bir halka ve $a \in R$ olsun.

$$I_a: R \rightarrow R, I_a(x) = [a, x] = ax - xa$$

dönüşümü bir türedir.

Tanım 2.57. R bir halka ve $a \in R$ olsun.

$$I_a(x) = [a, x]$$

ile tanımlanan türeve ***a ile belirli iç türev*** adı verilir.

Tanım 2.58. R bir halka olsun. F , R halkası üzerinde bir dönüşüm ve A , R halkasının boş olmayan bir altkümesi olmak üzere her $a \in A$ için $[a, F(a)] \in Z(R)$ ise F dönüşümüne A kümesi üzerinde ***merkezileştirici dönüşüm*** denir.

Tanım 2.59. R bir halka, F , R halkası üzerinde bir dönüşüm ve A , R halkasının boş kümeden farklı bir altkümesi olmak üzere her $a \in A$ için $[a, F(a)] = 0$ ise F dönüşümüne A kümesi üzerinde ***değişmeli dönüşüm*** denir.

Tanım 2.60. R bir halka ve M bir toplamsal değişmeli grup olsun.

$$\cdot : R \times M \rightarrow M, \quad \cdot (r, a) = r \cdot a$$

ile tanımlanan dış işlem her $r_1, r_2, r \in R$ ve $m_1, m_2, m \in M$ için

$$i. r \cdot (m_1 + m_2) = r \cdot m_1 + r \cdot m_2$$

$$ii. (r_1 + r_2) \cdot m = r_1 \cdot m + r_2 \cdot m$$

$$iii. (r_1 \cdot r_2) \cdot m = r_1 \cdot (r_2 \cdot m)$$

koşullarını sağlıyor ise M kümesine bir sol R – modül denir.

Tanım 2.61. R bir halka ve M toplamsal değişmeli bir grup olsun

$$\cdot : M \times R \rightarrow M, \quad \cdot (a, r) = a \cdot r$$

ile tanımlanan dış işlem her $r_1, r_2, r \in R$ ve $m_1, m_2, m \in M$ için

$$i. (m_1 + m_2) \cdot r = m_1 \cdot r + m_2 \cdot r$$

$$ii. m \cdot (r_1 + r_2) = m \cdot r_1 + m \cdot r_2$$

$$iii. m \cdot (r_1 \cdot r_2) = (m \cdot r_1) \cdot r_2$$

koşullarını sağlıyor ise M kümesine bir sağ R – modül denir.

Tanım 2.62. R bir halka, M ve N iki R – modül olsun. $f: M \rightarrow N$ toplamsal fonksiyonu her $a \in M$ ve her $x \in R$ için $f(ax) = f(a)x$ koşulunu sağlıyor ise f fonksiyonuna bir sağ R – modül homomorfizması denir.

Tanım 2.63. R bir halka, M ve N iki R – modül olsun. $f: M \rightarrow N$ toplamsal fonksiyonu her $a \in M$ ve her $x \in R$ için $f(ax) = xf(a)$ koşulunu sağlıyor ise f

fonksiyonuna bir sol R –modül homomorfizması denir.

Not 2.64. R bir asal halka, U , R halkasının sıfırdan farklı bir ideali, $f: U \rightarrow R$ bir sağ R –modül homomorfizması olmak üzere

$$\mathcal{M} = \{ (U; f) \mid f: U \rightarrow R \text{ sağ } R \text{ –modül homomorfizması} \}$$

kümesi ve \mathcal{M} kümesi üzerinde ' $(U; f) \sim (V; g) \Leftrightarrow$ sıfırdan farklı $M \subseteq U \cap V$ olacak şekildeki M ideali üzerinde $f = g$ dir' bağıntısı \mathcal{M} kümesi üzerinde bir denklik bağıntısıdır ve bu kümeyi denklik sınıflarına ayırır. (f, U) elemanının denklik sınıfı $(\widetilde{f}, \widetilde{U})$ olmak üzere $(\widetilde{f}, \widetilde{U}) = \tilde{f}$ ile gösterilsin. Bu denklik sınıflarının kümesi

$$Q = \{ \tilde{f} \mid \tilde{f} = (\widetilde{f}, \widetilde{U}) \}$$

olarak tanımlanır. Q kümesi

$$+: Q \times Q \rightarrow Q, \tilde{f} + \tilde{g} = (\widetilde{U \cap V}, f + g) \text{ ve } \cdot: Q \times Q \rightarrow Q, \tilde{f} \cdot \tilde{g} = (\widetilde{VU}, fg)$$

işlemleriyle birlikte birimli bir halkadır.

Tanım 2.65. Yukarıdaki nottaki Q halkasına R halkasının *Martindale Kesirler Halkası* denir.

Uyarı 2.66. Q halkası bir asal halkadır.

Tanım 2.67. Q halkasının merkezine *genelleştirilmiş merkez (extended centroid)* denir ve C ile gösterilir.

Uyarı 2.68. Genelleştirilmiş merkez olan C bir cisimdir.

Teorem 2.69. (Herstein, 1976, p. 22) $0 \neq a_i, 0 \neq b_i \in R$ olmak üzere her $x \in R$ için $\sum a_i x b_i = 0$ ise a_i ler ve b_i ler C bağımlıdır.

Sonuç 2.70. (Herstein, 1976, p. 23) R bir asal halka ve $a, b \in R$ olmak üzere her $x \in R$ için $axb = bxa$ olsun. O halde $a \neq 0$ ise $b = \lambda \cdot a$ olacak biçimde en az bir $\lambda \in C$ vardır.

Lemma 2.71. (Herstein, 1976, p. 7) R bir halka ve $u \in R$ olsun. $V = \{a \in R \mid a[u, x] = 0, \forall x \in R\}$ kümesi R halkasının bir idealidir.

Sonuç 2.72. (Herstein, 1976, p. 9) R , 2 –torsion free olan bir yarı-asal halka ve d, R halkası üzerinde tanımlı bir türev olsun. $d^2 = 0$ ise $d = 0$ dir.

Lemma 2.73. (Bell ve ark., 1987, p. 93) R bir yarı-asal halka, U , R halkasının sıfırdan farklı bir sol ideali ve d, R halkası üzerinde tanımlı bir türev olmak üzere d, U ideali üzerinde bir merkezileştirici dönüşüm ise d, U üzerinde bir değişmeli dönüşümdür.

BÖLÜM 3

ASAL HALKALARDA TÜREVLER VE GENELLEŞTİRİLMİŞ TÜREVLER

3.1. Asal Halkalarda Türevler ve Değişmelilik

Bu bölümde asal halkalarda türevler ve değişmelilik üzerine yapılan bazı çalışmalar özetlenmiştir.

3.1.1. Asal Halkalarda Türevler

Bu kısımda Posner (1957) tarafından yapılmış olan “*Derivations in Prime Rings*” adlı çalışma incelenmiştir.

Lemma 3.1.1.1. R bir asal halka, d , R halkası üzerinde tanımlı bir türev ve $a \in R$ olsun. Her $x \in R$ için $ad(x) = 0$ ise $a = 0$ ya da $d = 0$ dır.

İspat : Her $x \in R$ için $ad(x) = 0$ dır. x yerine $y \in R$ olmak üzere xy yazılıp elde edilen ifade türev özellikleri ve hipotez kullanılarak düzenlenirse her $x, y \in R$ için

$$0 = ad(xy) = a(d(x)y + xd(y)) = ad(x)y + axd(y) = axd(y)$$

elde edilir. Yani her $y \in R$ için

$$aRd(y) = (0)$$

dır. R halkasının asal olması kullanılarak $a = 0$ ya da her $y \in R$ için $d(y) = 0$ bulunur. O halde $a = 0$ ya da $d(R) = (0)$ dır. Bu ise

$$a = 0 \text{ ya da } d = 0$$

demektir.

Lemma 3.1.1.2. R bir asal halka olmak üzere $p, q, r \in R$ olsun. Her $a \in R$ için $paqar = 0$ ise p, q, r elemanlarından en az biri sıfırdır.

İspat : Her $a \in R$ için $paqar = 0$ dır. Burada a yerine $b \in R$ olmak üzere $a + b$ yazılırsa

$$0 = p(a + b)q(a + b)r = paqar + paqbr + pbqar + pbqbr$$

bulunur. Bu eşitlik hipotez uygulanarak düzenlendiğinde her $a, b \in R$ için

$$paqbr + pbqar = 0$$

olur.

Kabul edelim ki $a \in R$ için $pa = 0$ olsun. Yukarıdaki eşitlik $pa = 0$ olması kullanılarak düzenlenirse her $b \in R$ için $pbqar = 0$ elde edilir. Bu ise

$$pRqar = (0)$$

demektir. R halkasının asal olması kullanılarak $p = 0$ ya da $qar = 0$ bulunur. Yani

$$pa = 0 \text{ iken } p = 0 \text{ ya da } qar = 0$$

dir. Böylece $pa = 0$ olduğundan keyfi bir $t \in R$ için $pat = 0$ olur. O halde $p = 0$ ya da her $t \in R$ için $qatr = 0$ dir. Yani $p = 0$ ya da $qaRr = (0)$ dir. R halkasının asal olması kullanılarak $p = 0$ veya $qa = 0$ veya $r = 0$ olduğu bulunur. Böylece

$$pa = 0 \text{ iken } p = 0 \text{ veya } qa = 0 \text{ veya } r = 0$$

dir. Hipotezden her $a \in R$ için $paqar = 0$ dir. Son bulunan ifadede a yerine $aqar$ düşünülürse her $a \in R$ için $paqar = 0$ iken $p = 0$ veya $r = 0$ veya $qaqar = 0$ elde edilir.

Kabul edelim ki $p \neq 0$, $r \neq 0$ olsun. Bu durumda her $a \in R$ için $qaqar = 0$ dir. Elde edilen bu eşitlikte $b \in R$ olmak üzere a yerine $a + b$ yazılırsa her $a, b \in R$ için $q(a + b)q(a + b)r = 0$ bulunur. Bu eşitlik her $a \in R$ için $qaqar = 0$ olması kullanılarak düzenlenirse

$$0 = qaqar + qaqbr + qbqar + qbqbr = qaqbr + qbqar$$

bulunur. Yani her $a \in R$ için

$$qaqbr + qbqar = 0$$

dir.

Şimdi de kabul edelim ki $ar = 0$ olsun. Yukarıdaki eşitlik $ar = 0$ olması kullanılarak düzenlenirse her $b \in R$ için $qaqbr = 0$ elde edilir. Bu ise

$$qaqRr = (0)$$

demektir. R halkasının asal olması kullanılarak $qaq = 0$ veya $r = 0$ bulunur. $r \neq 0$ olduğundan $qaq = 0$ olur. Yani

$$ar = 0 \text{ iken } qaq = 0$$

dir. Böylece $ar = 0$ olduğundan keyfi bir $t \in R$ için $tar = 0$ olur. O halde her $t \in R$ için $qtaq = 0$ bulunur. Yani

$$qRaqa = (0)$$

dir. R halkasının asal olması kullanılarak $q = 0$ veya $aq = 0$ elde edilir. $q \neq 0$ olduğundan $aq = 0$ elde edilir. Yani

$$ar = 0 \text{ iken } aq = 0$$

dir. Burada a yerine $qaqa$ düşünülürse her $a \in R$ için $qaqar = 0$ iken $qaqaaq = 0$ elde edilir. Elde edilen eşitlikte a yerine $b \in R$ olmak üzere $a + b$ yazılırsa

$$0 = qaqaq + qaqbq + qbqaq + qbqb$$

olur. Bu eşitlikte her $a \in R$ için $qaqar = 0$ olması kullanılırsa her $a, b \in R$ için

$$qaqbq + qbqaq = 0$$

bulunur. Son ifadede b yerine aqb yazılırsa $0 = qaqaqbq + qaqbqaq$ elde edilir. Elde

edilen bu ifade $qaqqaq = 0$ olması kullanılarak düzenlendiğinde her $b \in R$ için $qaqbqaq = 0$ olur. Yani

$$qaqRqaq = (0)$$

dir. R halkasının asal olması kullanılarak her $a \in R$ için $qaq = 0$ olduğu görülür. Bu ise

$$qRq = (0)$$

demektir. R halkasının asal olması kullanılırsa $q = 0$ bulunur. Böylece $p \neq 0, r \neq 0$ iken $q = 0$ dır.

Teorem 3.1.1.3. R karakteristiği ikiden farklı bir asal halka ve d_1, d_2, R halkası üzerinde tanımlı türevler olsun. $d_1 d_2$ bir türev ise d_1 veya d_2 den en az biri sıfırdır.

İspat : $d_1 d_2, R$ üzerinde bir türev olduğundan her $a, b \in R$ için

$$d_1 d_2(ab) = d_1 d_2(a)b + ad_1 d_2(b)$$

eşitliği sağlanır. Aynı zamanda d_1 ve d_2 dönüşümleri de türev olduğundan

$$\begin{aligned} d_1 d_2(ab) &= d_1(d_2(ab)) = d_1(d_2(a)b + ad_2(b)) \\ &= d_1(d_2(a)b) + d_1(ad_2(b)) \\ &= d_1 d_2(a)b + d_2(a)d_1(b) + d_1(a)d_2(b) + ad_1 d_2(b) \end{aligned}$$

bulunur. Yani her $a, b \in R$ için

$$d_1 d_2(ab) = d_1 d_2(a)b + d_2(a)d_1(b) + d_1(a)d_2(b) + ad_1 d_2(b)$$

dir. Böylece her $a, b \in R$ için

$$d_1 d_2(a)b + ad_1 d_2(b) = d_1 d_2(a)b + d_2(a)d_1(b) + d_1(a)d_2(b) + ad_1 d_2(b)$$

olur. Halka üzerindeki toplama işleminin kısaltma özelliği kullanılarak her $a, b \in R$ için

$$d_2(a)d_1(b) + d_1(a)d_2(b) = 0 \tag{3.1}$$

eşitliği elde edilir. (3.1) ifadesinde a yerine $c \in R$ olmak üzere $ad_1(c)$ yazılır ve elde edilen ifade türev özellikleri kullanılarak düzenlenirse

$$\begin{aligned} 0 &= d_2(ad_1(c))d_1(b) + d_1(ad_1(c))d_2(b) \\ &= d_2(a)d_1(c)d_1(b) + ad_2 d_1(c)d_1(b) + d_1(a)d_1(c)d_2(b) + ad_1 d_1(c)d_2(b) \\ &= d_2(a)d_1(c)d_1(b) + d_1(a)d_1(c)d_2(b) + a(d_2(d_1(c))d_1(b) + d_1(d_1(c))d_2(b)) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifade (3.1) eşitliği kullanılarak yeniden düzenlendiğinde $a(d_2(d_1(c))d_1(b) + d_1(d_1(c))d_2(b)) = 0$ olduğu görülür. Böylece her $a, b, c \in R$ için

$$d_2(a)d_1(c)d_1(b) + d_1(a)d_1(c)d_2(b) = 0 \tag{3.2}$$

bulunur. Yeniden (3.1) eşitliğinde a yerine c yazılırsa her $b, c \in R$ için $d_2(c)d_1(b) + d_1(c)d_2(b) = 0$ elde edilir. Yani $d_1(c)d_2(b) = -d_2(c)d_1(b)$ olur. Bu ifade (3.2) numaralı denklemde yerine yazılırsa her $a, b, c \in R$ için $d_2(a)d_1(c)d_1(b) - d_1(a)d_2(c)d_1(b) = 0$ eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte gerekli düzeltmeler yapılarak her $a, b, c \in R$ için

$$(d_2(a)d_1(c) - d_1(a)d_2(c))d_1(b) = 0$$

bulunur. *Lemma 3.1.1.1.* uygulanarak $d_2(a)d_1(c) - d_1(a)d_2(c) = 0$ ya da her $b \in R$ için $d_1(b) = 0$ elde edilir. Bu da

$$d_2(a)d_1(c) - d_1(a)d_2(c) = 0 \text{ ya da } d_1 = 0$$

dır. (3.1) eşitliğinde b yerine c yazılırsa her $a, c \in R$ için

$$d_2(a)d_1(c) + d_1(a)d_2(c) = 0$$

bulunur. $d_2(a)d_1(c) - d_1(a)d_2(c) = 0$ ve $d_2(a)d_1(c) + d_1(a)d_2(c) = 0$ eşitlikleri taraf tarafa toplanarak $2d_2(a)d_1(c) = 0$ elde edilir. Halkanın karakteristiği ikiden farklı olduğu için her $a, c \in R$ için

$$d_2(a)d_1(c) = 0$$

olur. Burada *Lemma 3.1.1.1.* kullanılarak her $a \in R$ için $d_2(a) = 0$ ya da $d_1 = 0$ bulunur. Yani $d_2 = 0$ ya da $d_1 = 0$ dır.

Lemma 3.1.1.4. R bir asal halka ve d , R halkası üzerinde tanımlı bir türev olsun. Her $a \in R$ için $ad(a) - d(a)a = 0$ ise R halkası değişmelidir ya da $d = 0$ dır.

İspat : Her $a \in R$ için $ad(a) - d(a)a = 0$ dır. Bu eşitlikte a yerine $b \in R$ olmak üzere $a + b$ yazılırsa

$$0 = (a + b)d(a + b) - d(a + b)(a + b)$$

$$= ad(a) + ad(b) + bd(a) + bd(b) - d(a)a - d(a)b - d(b)a - d(b)b$$

olur. Bu ifade hipotez kullanılarak düzenlenirse her $a, b \in R$ için $ad(b) + bd(a) - d(a)b - d(b)a = 0$ bulunur. Bu da her $a, b \in R$ için

$$ad(b) - d(a)b = d(b)a - bd(a)$$

demektir. Bu eşitliğin her iki tarafına $d(ab) \in R$ eklenerek $ad(b) - d(a)b + d(ab) = d(b)a - bd(a) + d(ab)$ elde edilir. Buradan

$$ad(b) - d(a)b + d(a)b + ad(b) = d(b)a - bd(a) + d(ab)$$

olur. Gerekli düzenlemeler yapılarak her $a, b \in R$ için

$$2ad(b) = d(b)a - bd(a) + d(ab) \tag{3.3}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte b yerine $x \in R$ olmak üzere ax yazılır ve türev özellikleri kullanılırsa

$$2ad(a)x + 2a^2d(x) = d(a)xa + ad(x)a - axd(a) + 2ad(a)x + a^2d(x)$$

bulunur. Bu ifade tekrar düzenlenerek her $a, x \in R$ için

$$a^2d(x) = d(a)xa + ad(x)a - axd(a) \quad (3.4)$$

eşitliği elde edilir. (3.3) eşitliğinde b yerine xa yazılarak

$$2ad(xa) = d(xa)a - xad(a) + d(axa)$$

ifadesi elde edilir. Bu eşitlik türev özellikleri kullanılarak düzenlenirse

$$2ad(x)a + 2axd(a) = d(x)a^2 + xd(a)a - xad(a) + d(a)xa + ad(x)a + axd(a)$$

bulunur. Bu ifade hipotez kullanılarak düzenlenirse

$$2ad(x)a + 2axd(a) = d(x)a^2 + d(a)xa + ad(x)a + axd(a)$$

elde edilir. Bu eşitlik türev özellikleri kullanılarak düzenlenirse $ad(x)a + axd(a) = d(x)a^2 + d(a)xa$ olur. Bu da her $a, x \in R$ için

$$d(x)a^2 = ad(x)a + axd(a) - d(a)xa \quad (3.5)$$

demektir. (3.4) ve (3.5) eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa $d(x)a^2 + a^2d(x) = ad(x)a + axd(a) - d(a)xa + d(a)xa + ad(x)a - axd(a)$ elde edilir. Bu eşitlikten de her $a, x \in R$ için

$$a^2d(x) + d(x)a^2 = 2ad(x)a \quad (3.6)$$

bulunur. Son ifade düzenlenerek $ad(x)a - a^2d(x) = d(x)a^2 - ad(x)a$ olur. Buradan da her $a, x \in R$ için

$$a(d(x)a - ad(x)) = (d(x)a - ad(x))a \quad (3.7)$$

elde edilir. (3.7) eşitliğinde a yerine $a + d(x)$ yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa $ad(x)a - a^2d(x) + d(x)^2a - d(x)ad(x) = d(x)a^2 - ad(x)a + d(x)ad(x) - ad(x)^2$ bulunur. Bu ise

$$d(x)^2a - d(x)ad(x) = a^2d(x) + d(x)a^2 - 2ad(x)a + d(x)ad(x) - ad(x)^2$$

demektir. Bu ifade (3.6) eşitliği kullanılarak düzenlenirse $d(x)^2a - d(x)ad(x) = d(x)ad(x) - ad(x)^2$ elde edilir. Bu ise her $a, x \in R$ için

$$d(x)(d(x)a - ad(x)) = (d(x)a - ad(x))d(x)$$

demektir. Yani her $a, x \in R$ için $d(x)$ elemanı $d(x)a - ad(x)$ ile değişmelidir. Bu sonuçtan yola çıkarak keyfi bir $x \in R$ için $I_{d(x)}: R \rightarrow R$, $I_{d(x)}(a) = d(x)a - ad(x)$ iç türev fonksiyonu olmak üzere son eşitlik her $a \in R$ için $I_{d(x)}(I_{d(x)}(a)) = 0$ olarak yazılabilir. Bu da her $a \in R$ için $I_{d(x)}^2(a) = 0$ demektir. O halde

$$I_{d(x)}^2 = 0$$

dır.

Kabul edelim ki R karakteristiği ikiden farklı bir halka olsun. Sıfır fonksiyonu bir türev olduğundan $I_{d(x)}^2$ de bir türevdir. O halde *Teorem 3.1.1.3.* uygulanırsa $I_{d(x)} = 0$ olur. Yani $a \in R$ için $I_{d(x)}(a) = 0$ olduğundan $d(x)a - ad(x) = 0$ dır. Bu ise her $a \in R$ için

$$d(x)a = ad(x)$$

demektir. O halde $d(x) \in Z(R)$ dir. Bu her $x \in R$ için yapılabilir. Böylece her $x \in R$ için

$$d(x) \in Z(R)$$

olur.

Keyfi bir $a \in R$ için $I_a: R \rightarrow R$, $I_a(x) = ax - xa$ şeklinde tanımlanan iç türev fonksiyonu alınırsa $d(x) \in Z(R)$ olduğu kullanılarak $I_a d(x) = 0 = I_a(d(x)) = ad(x) - d(x)a = 0$ bulunur. O halde her $x \in R$ için $I_a d(x) = 0$ dır. Yani $I_a d = 0$ dır. Sıfır fonksiyonu bir türev olduğundan $I_a d$ bileşke fonksiyonuda bir türevdir. Böylece *Teorem 3.1.1.3.* uygulanarak $I_a = 0$ ya da $d = 0$ bulunur. Bu her $a \in R$ için yapılabilir. Dolayısıyla her $a \in R$ için

$$I_a = 0 \text{ ya da } d = 0$$

dır. Yani her $a \in R$ için

$$a \in Z(R) \text{ ya da } d = 0$$

olur. O halde R halkası değişmelidir ya da $d = 0$ dır.

Kabul edelim ki R karakteristiği iki olan bir halka olsun. Buna göre her $a \in R$ için $a = -a$ olduğundan (3.6) eşitliği $a, x \in R$ için $a^2 d(x) - d(x)a^2 = 0$ şeklinde yazılır. O halde her $a, x \in R$ için

$$a^2 d(x) = d(x)a^2$$

dir.

Kabul edelim ki $e \in R$ her elemanın karesi ile değişmeli olan bir eleman olsun. Yani her $a \in R$ için

$$ea^2 = a^2e \quad (3.8)$$

dir. Bu eşitlikte a yerine $b \in R$ olmak üzere $a + b$ yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa her $a, b \in R$ için

$$e(ab + ba) = (ab + ba)e \quad (3.9)$$

elde edilir. (3.9) eşitliğinde b yerine ae yazılırsa $e(a^2e + ae a) = (a^2e + aea)e$ olur. Bu ifade (3.8) eşitliği kullanılarak düzenlenirse her $a \in R$ için

$$eaea = aeae \quad (3.10)$$

elde edilir. (3.9) eşitliğinde b yerine e yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa her $a \in R$ için $e^2a = ae^2$ bulunur. Yani

$$e^2 \in Z(R) \quad (3.11)$$

dir. $(ae + ea)^2$ elemanı incelenecek olursa $(ae + ea)^2 = eaea + ae^2a + ea^2e + aeae$ olduğundan bu eşitlikte (3.10) ve (3.11) eşitlikleri kullanılarak

$$(ae + ea)^2 = eaea + e^2a^2 + eaea + e^2a^2 = 2eaea + 2e^2a^2$$

elde edilir. R karakteristiği iki olan bir halka olduğundan dolayı her $a \in R$ için

$$(ae + ea)^2 = 0 \quad (3.12)$$

bulunur. Kabul edelim ki $x, y \in R$ için $xy = 0$ olsun. (3.9) eşitliğinde a yerine x , b yerine y düşünülürse $e(xy + yx) = (xy + yx)e$ olur. $xy = 0$ kabulünden

$$yxe = eyx \quad (3.13)$$

elde edilir. Bu sefer (3.9) eşitliğinde a yerine x^2 , b yerine y düşünülürse

$$e(x^2y + yx^2) = (x^2y + yx^2)e$$

olur. Bu eşitlik $xy = 0$ iken $x^2y = 0$ olduğundan $eyx^2 = yx^2e$ olarak düzenlenir. Burada (3.8) eşitliği kullanılırsa $eyx^2 = yex^2$ elde edilir. Bu da $0 = (ey - ye)x^2$ demektir. R karakteristiği iki olan bir halka olduğundan

$$(ey + ye)x^2 = 0 \quad (3.14)$$

olarak yazılabilir. Yani

$$xy = 0 \text{ iken } (ey + ye)x^2 = 0$$

dir. Her $a \in R$ için $(ax)y = 0$ olacağından her $a \in R$ için $(ey + ye)axax = 0$ olur.

Lemma 3.1.1.2. uygulanırsa $x = 0$ ya da $ey + ye = 0$ elde edilir. Yani

$$xy = 0 \text{ iken } x = 0 \text{ ya da } ey + ye = 0$$

dir. Kabul edelim ki $x \neq 0$ olsun. O halde $ey + ye = 0$ olur. Yani $ey = ye$ dir. Her $u \in R$ için $x(yu) = 0$ olacağından her $u \in R$ için $eyu + yue = 0$ bulunur. Bu ifade $ey = ye$ olması kullanılarak düzenlenirse

$$y(eu - ue) = 0$$

elde edilir. $e \in R$ için $I_e: R \rightarrow R$, $I_e(x) = ex - xe$ iç türevi tanımlanırsa son ifade $yI_e(u) = 0$ olur. Burada *Lemma 3.1.1.1.* uygulandığında $y = 0$ ya da $I_e = 0$ bulunur. Yani $y = 0$ ya da $e \in Z(R)$ dir. O halde

$$xy = 0 \text{ iken } x = 0 \text{ veya } y = 0 \text{ veya } e \in Z(R)$$

olur. Bu sonuca göre $x = ae + ea$ ve $y = ae + ea$ olarak alınır (3.12) eşitliğinden

$$(ae + ea)^2 = 0 \text{ ise } ae + ea = 0 \text{ ya da } e \in Z(R)$$

olur. Bununla birlikte $a^2d(x) = d(x)a^2$ olduğundan dolayı her $x \in R$ için $d(x) \in Z(R)$ dir.

Kabul edelim ki $b \in R$ için $d(b) = 0$ olsun. O halde her $a \in R$ için $d(ab) = d(a)b + ad(b) = d(a)b$ olur. Yani $d(ab) \in Z(R)$ olduğundan

$$d(b) = 0 \text{ iken } d(a)b \in Z(R)$$

dir. Kabul edelim ki $d \neq 0$ olsun. O halde en az bir $a \in R$ için $d(a) \neq 0$ dir. $d(b) = 0$ iken $d(a)b \in Z(R)$ olduğundan her $x \in R$ için $d(a)bx = xd(a)b$ olur. $d(a) \in Z(R)$ olması kullanılırsa $d(a)bx = d(a)xb$ olarak düzenlenir. Bu ise

$$d(a)(bx - xb) = 0$$

demektir. Bu eşitlik $b \in R$ için $I_b: R \rightarrow R$, $I_b(x) = bx - xb$ iç türevi tanımlanırsa her $x \in R$ için $d(a)I_b(x) = 0$ olur. *Lemma 3.1.1.1* uygulanarak $d(a) = 0$ ya da $I_b = 0$ elde edilir. Bu da $d(a) = 0$ ya da $b \in Z(R)$ demektir. $d(a) \neq 0$ olduğundan $b \in Z(R)$ olduğu

görülür. Yani

$$d(b) = 0 \text{ iken } b \in Z(R)$$

dir. $c \in R$ için

$$d(c^2) = d(c)c + cd(c) = cd(c) + cd(c) = 2cd(c) = 0$$

olur. Yani

$$d(c^2) = 0$$

dir. Dolayısıyla $c^2 \in Z(R)$ dir. O halde $c \in R$ için $c^2 \in Z(R)$ dir. Bu yüzden her elemanın karesi halkanın merkezindedir. Buradan her $x \in R$ için $c^2x = xc^2$ yazılır. Her elemanın karesi ile değişmeli olan elemanlar halkanın merkezinde olduğu için her $x \in R$ $x \in Z(R)$ dir. Yani $d \neq 0$ iken R halkası değişmelidir. O halde R halkası değişmelidir ya da $d = 0$ dır.

Lemma 3.1.1.5. A , R halkasının bir Lie halkası, I , A Lie halkasının bir Lie ideali ve $d \in A$ olsun. Her $x \in I$ için $dx \cdot x = 0$ ise her $a, x \in R$ için $(da \cdot x)x = 0$ dır.

Teorem 3.1.1.6. R bir asal halka ve d , R halkası üzerinde tanımlı bir türev olmak üzere her $a \in R$ için $ad(a) - d(a)a \in Z(R)$ olsun. O halde $d \neq 0$ ise R halkası değişmelidir.

İspat : A , R halkası üzerinde tanımlı türevlerden oluşan bir Lie halka ve I , A Lie halkasının iç türevlerinden oluşan bir Lie ideali olsun. $a \in R$ için $I_a: R \rightarrow R$, $I_a(x) = ax - xa$ iç türevi ve $d \in A$ olmak üzere $y \in R$ için

$$\begin{aligned} [d, I_a](y) &= (dI_a - I_a d)(y) = dI_a(y) - I_a d(y) = d(I_a(y)) - I_a(d(y)) \\ &= d(ay - ya) - ad(y) + d(y)a = d(ay) - d(ya) - ad(y) + d(y)a \\ &= d(a)y + ad(y) - d(y)a - yd(a) - ad(y) + d(y)a = d(a)y - yd(a) \\ &= [d(a), y] = I_{d(a)}(y) \end{aligned}$$

olur. Yani her $a \in R$ için

$$[d, I_a] = I_{d(a)}$$

dir. Keyfi $x, y \in R$ için

$$\begin{aligned} [I_x, I_y](a) &= (I_x I_y - I_y I_x)(a) = I_x I_y(a) - I_y I_x(a) = I_x(I_y(a)) - I_y(I_x(a)) \\ &= I_x(ya - ay) - I_y(xa - ax) \\ &= xya - xay - yax + ayx - yxa + yax + xay - axy \\ &= (xa - ax)y - y(xa - ax) = [[x, y], a] = I_{[x, y]}(a) \end{aligned}$$

sağlanır. Yani her $x, y \in R$ için

$$[I_x, I_y] = I_{[x, y]}$$

dir. O halde $[[d, I_a], I_a] = [I_{d(a)}, I_a] = I_{[d(a), a]}$ olduğundan hipotez kullanılarak her $a \in R$ için $[[d, I_a], I_a] = 0$ elde edilir. Bu eşitliğe *Lemma 3.1.1.5* uygulanırsa her $a, x \in R$ için $[[[d, I_x], I_a], I_a] = 0$ bulunur. Bu ifade düzenlenecek olursa

$$0 = [[[d, I_x], I_a], I_a] = [[I_{d(x)}, I_a], I_a] = [I_{[d(x), a]}, I_a] = I_{[[d(x), a], a]}$$

elde edilir. Yani her $x, a \in R$ için

$$[[d(x), a], a] \in Z(R)$$

dir. Bu ise

$$\begin{aligned} [[d(x), a], a] &= (d(x)a - ad(x))a - a(d(x)a - ad(x)) \\ &= d(x)a^2 - ad(x)a - ad(x)a + a^2d(x) \\ &= d(x)a^2 + a^2d(x) - 2ad(x)a \end{aligned}$$

demektir. Yani her $x, a \in R$ için

$$d(x)a^2 + a^2d(x) - 2ad(x)a \in Z(R) \quad (3.15)$$

dir. (3.15) ifadesinden her $a, x \in R$ için

$$\begin{aligned} 0 &= [d(x)a^2 + a^2d(x) - 2ad(x)a, a] \\ &= d(x)a^3 + a^2d(x)a - 2ad(x)a^2 - ad(x)a^2 - a^3d(x) + 2a^2d(x)a \\ &= d(x)a^3 + 3a^2d(x)a - 3ad(x)a^2 - a^3d(x) \end{aligned}$$

bulunur. Yani her $a, x \in R$ için

$$d(x)a^3 + 3a^2d(x)a = 3ad(x)a^2 + a^3d(x) \quad (3.16)$$

dir.

Kabul edelim ki $\text{Char}R = 3$ olsun. O zaman (3.16) eşitliği her $a, x \in R$ için $d(x)a^3 = a^3d(x)$ olur. Bu ise her $x \in R$ için

$$0 = a^3d(x) - d(x)a^3 = [a^3, d(x)] = I_{a^3}(d(x)) = I_{a^3}d(x)$$

demektir. Yani

$$I_{a^3}d = 0$$

dır. Sıfır fonksiyonu bir türev olduğundan $I_{a^3}d$ fonksiyonu da bir türevdir. Buradan $I_{a^3}d$ ifadesine *Teorem 3.1.1.3.* uygulanırsa $I_{a^3} = 0$ ya da $d = 0$ olur. $d \neq 0$ olduğundan her $a \in R$ için $I_{a^3} = 0$ olur. Böylece her $a \in R$ için $a^3 \in Z(R)$ dir. $b \in R$ için $(a + b)^3 = a^3 + aba + ba^2 + b^2a + a^2b + ab^2 + bab + b^3$ olduğundan

$$(a + b)^3 - a^3 - b^3 = aba + ba^2 + b^2a + a^2b + ab^2 + bab$$

bulunur. Bu ifade her $a \in R$ için $a^3 \in Z(R)$ olması ve $Z(R)$ kümesinin R halkasının bir altalkası olması kullanılarak düzenlenirse

$$aba + ba^2 + b^2a + a^2b + ab^2 + bab \in Z(R)$$

elde edilir. Elde edilen bu ifadede a yerine $-a$ elemanı yazılırsa

$$aba + ba^2 - b^2a + a^2b - ab^2 - bab \in Z(R)$$

bulunur. Son iki ifade taraf tarafa toplanırsa $2(aba + ba^2 + a^2b) \in Z(R)$ olur. R karakteristiği üç olan bir halka olduğundan her $x \in R$ için $2x = -x$ dir. O halde

$$2(aba + ba^2 + a^2b) \in Z(R) \text{ iken } -(aba + ba^2 + a^2b) \in Z(R)$$

dir. $Z(R)$ kümesi, R halkasının bir altalkası olduğundan $aba + ba^2 + a^2b \in Z(R)$ olur.

Burada b yerine ab yazılıp düzenlenirse $a(aba + ba^2 + a^2b) \in Z(R)$ elde edilir. Elde edilen bu ifadede *Lemma 2.34.* uygulanırsa $aba + ba^2 + a^2b \in Z(R)$ olduğundan $a \in Z(R)$ veya $aba + ba^2 + a^2b = 0$ olur. R karakteristiği üç olan bir halka olduğundan $a \in Z(R)$ veya $ba^2 - 2aba + a^2b = 0$ dir. O halde her $b \in R$ için

$$0 = ba^2 - 2aba + a^2b = a(ab - ba) - (ab - ba)a = I_a I_a(b)$$

bulunur. Bu ise $I_a^2 = 0$ demektir. Sıfır fonksiyonu bir türev olduğundan I_a^2 fonksiyonu da bir türevdir. Buradan I_a^2 ifadesine *Teorem 3.1.1.3.* uygulanırsa $I_a = 0$ olur. Yani her $a \in R$ için

$$a \in Z(R) \text{ ya da } I_a = 0$$

dir. O halde her $a \in R$ için $a \in Z(R)$ dir. Böylece R halkası değişmelidir.

Kabul edelim ki $\text{Char}R \neq 3$ olsun. (3.16) eşitliğinde x yerine a yazılıp hipotez kullanılarak düzenlenirse her $a \in R$ için

$$d(a)a^3 - a^3d(a) = 3(ad(a) - d(a)a)a^2 \quad (3.17)$$

elde edilir. $(ad(a) - d(a)a)a \in Z(R)$ ifadesi düzenlenirse $(ad(a) - d(a)a)a = a(ad(a) - d(a)a) = a^2d(a) - ad(a)a$ bulunur. Yani

$$(ad(a) - d(a)a)a = a^2d(a) - ad(a)a$$

dir. Öte yandan

$$(ad(a) - d(a)a)a = ad(a)a - d(a)a^2$$

olur. Son iki eşitlik taraf tarafa toplanarak her $a \in R$ için

$$2(ad(a) - d(a)a) = a^2d(a) - d(a)a^2 \quad (3.18)$$

elde edilir. Şimdi ise (3.16) eşitliğinde x yerine $ad(x)$ yazılıp türev özellikleri kullanılarak düzenlenirse her $a, x \in R$ için

$$3ad(a)d(x)a^2 + a^3d(a)d(x) - 3a^2d(a)d(x)a - d(a)d(x)a^3 = 0 \quad (3.19)$$

bulunur. (3.19) eşitliği soldan $d(a)$ ile çarpılırsa her $a, x \in R$ için

$$3d(a)ad(x)a^2 + d(a)a^3d(x) - 3d(a)a^2d(x)a + d(a)d(x)a^3 = 0 \quad (3.20)$$

olur. (3.20) eşitliğinden (3.19) eşitliği çıkarılırsa her $a, x \in R$ için

$3(ad(a) - d(a)a)d(x)a^2 + (a^3d(a) - d(a)a^3)d(x) - 3(a^2d(a) - d(a)a^2)d(x)a = 0$ elde edilir. Bu ifade (3.17) ve (3.18) eşitlikleri ve $\text{Char}R \neq 3$ olması kullanılarak düzenlenirse her $a, x \in R$ için

$$(ad(a) - d(a)a)(d(x)a^2 + a^2d(x) - ad(x)a) = 0$$

bulunur. Son ifade $t \in R$ ile soldan çarpılıp hipotez kullanılarak düzenlenirse her $t \in R$ için $(ad(a) - d(a)a)t(d(x)a^2 + a^2d(x) - ad(x)a) = 0$ olur. O halde

$$(ad(a) - d(a)a)R(d(x)a^2 + a^2d(x) - ad(x)a) = (0)$$

dır. R halkasının asal olması kullanılarak her $a \in R$ için

$$ad(a) - d(a)a = 0 \text{ ya da } d(x)a^2 + a^2d(x) - ad(x)a = 0$$

bulunur.

Kabul edelim ki $ad(a) - d(a)a \neq 0$ olsun. Buradan her $x \in R$ için

$$d(x)a^2 + a^2d(x) - ad(x)a = 0 \quad (3.21)$$

bulunur. (3.21) ifadesinde x yerine ax yazılıp tekrardan (3.21) eşitliği kullanılarak düzenlenirse her $x \in R$ için

$$d(a)xa^2 + a^2d(a)x - 2ad(a)xa = 0 \quad (3.22)$$

elde edilir. Öte yandan (3.21) eşitliğinde x yerine a yazılıp sağdan x ile çarpılırsa her $x \in R$ için

$$d(a)a^2x + a^2d(a)x - 2ad(a)ax = 0 \quad (3.23)$$

olur. (3.22) ve (3.23) eşitlikleri taraf tarafa çıkarılarak her $x \in R$ için

$$d(a)(xa^2 - a^2x) - 2ad(a)(xa - ax) = 0 \quad (3.24)$$

bulunur. (3.24) ifadesinde x yerine ax yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa her $x \in R$ için

$$d(a)a(xa^2 - a^2x) - 2ad(a)a(xa - ax) = 0 \quad (3.25)$$

elde edilir. (3.24) eşitliği soldan a ile çarpılırsa her $x \in R$ için

$$ad(a)(xa^2 - a^2x) - 2a^2d(a)(xa - ax) = 0 \quad (3.26)$$

olur. (3.26) eşitliğinden (3.25) eşitliği çıkarılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa her $x \in R$ için

$$(ad(a) - d(a)a)(xa^2 - a^2x - 2a(xa - ax)) = 0$$

elde edilir. Bu eşitlik $t \in R$ için soldan çarpılır ve hipotez kullanılarak düzenlenirse her $t \in R$ için $(ad(a) - d(a)a)t(xa^2 - a^2x - 2a(xa - ax)) = 0$ olur. Yani

$$(ad(a) - d(a)a)R(xa^2 - a^2x - 2a(xa - ax)) = (0)$$

dır. R halkasının asal olması kullanılarak $ad(a) - d(a)a = 0$ ya da $xa^2 - a^2x - 2a(xa - ax) = 0$ bulunur. $ad(a) - d(a)a \neq 0$ olduğundan her $x \in R$ için

$$xa^2 - a^2x - 2a(xa - ax) = 0 \quad (3.27)$$

elde edilir. Bu eşitlik yeniden düzenlenirse

$$\begin{aligned} 0 &= xa^2 - a^2x - 2a(xa - ax) \\ &= xa^2 + a^2x - axa - axa \\ &= a(ax - xa) - (ax - xa)a \\ &= [a, [a, x]] = I_a^2(x) \end{aligned}$$

olur. O halde her $x \in R$ için $I_a^2(x) = 0$ olur. Yani $I_a^2 = 0$ dır.

Kabul edelim ki $CharR \neq 2$ olsun. Son ifadeye *Teorem 3.1.1.3.* uygulanarak $I_a = 0$

elde edilir. Yani $ad(a) - d(a)a \neq 0$ iken $a \in Z(R)$ dir. O halde her $a \in R$ için

$$ad(a) - d(a)a = 0 \text{ ya da } a \in Z(R)$$

dir. $ad(a) - d(a)a = 0$ olsun. Bu ifadeye *Lemma 3.1.1.4.* uygulanırsa $d \neq 0$ olduğundan R halkası değişmelidir. Yani her $a \in R$ için $a \in Z(R)$ ya da R değişmelidir. Böylece R halkasının değişmeli olduğu sonucuna varılır.

Kabul edelim ki $CharR = 2$ olsun. (3.27) eşitliği $CharR = 2$ olması kullanılarak düzenlenirse $ad(a) - d(a)a \neq 0$ iken her $x \in R$ için $xa^2 - a^2x = 0$ olur. O halde $a^2 \in Z(R)$ dir. Kabul edelim ki $a^2 = 0$ olsun. Buradan

$$0 = d(a^2) = d(a)a + ad(a)$$

olur. Yani $d(a)a + ad(a) = 0$ dir. $CharR = 2$ olduğundan $d(a)a - ad(a) = 0$ olur. Bu ise $ad(a) - d(a)a \neq 0$ olmasıyla çelişir. O halde

$$ad(a) - d(a)a \neq 0 \text{ iken } 0 \neq a^2 \in Z(R)$$

dir. Kabul edelim ki keyfi bir $y \in R$ için $ya = 0$ olsun. Bu ifade sağdan $t \in R$ olmak üzere at ile çarpılırsa $ya^2t = 0$ olur. Bu eşitlik $a^2 \in Z(R)$ olması kullanılarak her $t \in R$ için $yta^2 = 0$ olarak düzenlenir. Yani $yRa^2 = (0)$ dir. R halkasının asal olması kullanılarak $y = 0$ ya da $a^2 = 0$ bulunur. $a^2 \neq 0$ olduğundan $y = 0$ dir. Böylece

$$ya = 0 \text{ iken } y = 0$$

dir. O halde a sağ sıfır bölen değildir.

Benzer şekilde a sol sıfır bölen de değildir. $ad(a) - d(a)a \neq 0$ iken $0 \neq a^2 \in Z(R)$ olduğundan a yerine axa düşünülürse $(axa)d(axa) - d(axa)(axa) \neq 0$ iken $0 \neq (axa)^2 \in Z(R)$ olur. $(axa)^2 = (axa)(axa) = axa^2xa = (ax^2a)a^2$ olduğundan $(ax^2a)a^2 \in Z(R)$ dir. Bu son ifadeye *Lemma 2.34.* uygulanırsa $a^2 \neq 0$ olduğundan $ax^2a \in Z(R)$ olur. Üstelik

$$(axa)^2 = (axa)(axa) = axa^2xa = (ax^2a)a^2 = a(ax^2a)a = (a^2x^2)a^2 \in Z(R)$$

bulunur. Yani $(a^2x^2)a^2 \in Z(R)$ dir. Bu ifadeye *Lemma 2.34.* uygulanırsa $a^2 \neq 0$ olduğundan $a^2x^2 \in Z(R)$ olur. Bu ifadeye yeniden *Lemma 2.34.* uygulanarak $x^2 \in Z(R)$ bulunur. Yani

$$x^2 \notin Z(R) \text{ ise } xd(x) - d(x)x = 0 \text{ ve } (axa)d(axa) - d(axa)(axa) = 0$$

dir. $(axa)d(axa) - d(axa)(axa) = 0$ ifadesi türev özellikleri ve $a^2 \in Z(R)$, $xd(x) - d(x)x = 0$ ifadeleri kullanılarak düzenlenirse

$$((ad(a) + d(a)a)ax^2 + (ax^2d(a) + d(a)x^2a)a) = 0$$

elde edilir. Bu ifade a sol sıfır bölen olmadığından

$$(ad(a) + d(a)a)ax^2 + (ax^2d(a) + d(a)x^2a)a = 0$$

olarak düzenlenir. Bu eşitlik $ad(a) + d(a)a \in Z(R)$ olması kullanılarak düzenlenirse

$$\begin{aligned} 0 &= ax^2(ad(a) + d(a)a) + (ax^2d(a) + d(a)x^2a)a \\ &= ax^2ad(a) + ax^2d(a)a + ax^2d(a)a + d(a)x^2a^2 \\ &= ax^2ad(a) + 2ax^2d(a)a + d(a)x^2a^2 \end{aligned}$$

olur. Yani

$$ax^2ad(a) + 2ax^2d(a)a + d(a)x^2a^2 = 0$$

elde edilir. Bu eşitlikte $CharR = 2$ olması kullanılarak $ax^2ad(a) + d(a)x^2a^2 = 0$ bulunur. Bu ifade $a^2 \in Z(R)$ olması kullanılarak düzenlenirse

$$a(x^2ad(a) + ad(a)x^2) = 0$$

olduğu görülür. a sağ sıfır bölen olmadığından dolayı $x^2ad(a) + ad(a)x^2 = 0$ dir. Yani

$$x^2 \notin Z(R) \text{ iken } [x^2, ad(a)] = 0$$

olur. Bu ise her $x \in R$ için $x^2 \in Z(R)$ ya da $[x^2, ad(a)] = 0$ demektir.

Kabul edelim ki keyfi bir $x \in R$ için $x^2 \in Z(R)$ olsun. O halde

$$[x^2, ad(a)] = x^2ad(a) - ad(a)x^2 = x^2ad(a) - x^2ad(a) = 0$$

olur. Bu her $x \in R$ için yapılabilir. Dolayısıyla her $x \in R$ için

$$[x^2, ad(a)] = 0$$

dir. *Lemma 3.1.1.4.* te gösterildiği gibi her elemanın karesiyle değişmeli olan elemanlar halkanın merkezinde olduğundan $ad(a) \in Z(R)$ dir. Bundan dolayı

$$0 = [a, ad(a)] = aad(a) - ad(a)a = a(ad(a) - d(a)a)$$

olur. Yani $a(ad(a) - d(a)a) = 0$ dir. a sağ sıfır bölen olmadığından her $a \in R$ için $ad(a) - d(a)a = 0$ dir. Bu ifadede *Lemma 3.1.1.4.* uygulanırsa $d \neq 0$ olduğundan dolayı R halkasının değişmeli olduğu görülür.

3.1.2. Herstein'in Türevler Üzerine Bir Notu

Bu kısımda Herstein (1979) tarafından yapılan "A Note on Derivations II" adlı çalışma ele alınmıştır.

Teorem 3.1.2.1. R bir asal halka, d , R halkası üzerinde tanımlı sıfırdan farklı bir türev olmak üzere $a \in R$ ve her $x \in R$ için $ad(x) = d(x)a$ olsun. O zaman;

i. R halkası karakteristiği ikiden farklı bir halka ise $a \in Z(R)$ dir.

ii. R halkası karakteristiği iki olan bir halka ise $a^2 \in Z(R)$ dir. Ayrıca $a \notin Z(R)$ ise $\lambda \in C$ olmak üzere d türevi, $d(x) = [\lambda a, x]$ şeklinde olan bir iç türevdir.

İspat : Kabul edelim ki $a \in R$ olmak üzere $a \notin Z(R)$ olsun. Hipotezden her $x, y \in R$ için $[a, d(xy)] = 0$ dir. Bu eşitlik Lie komütatör özellikleri ve hipotez kullanılarak

düzenlenirse

$$\begin{aligned} 0 &= [a, d(xy)] = [a, d(x)y + xd(y)] \\ &= [a, d(x)]y + d(x)[a, y] + [a, x]d(y) + x[a, d(y)] \\ &= d(x)[a, y] + [a, x]d(y) \end{aligned}$$

olur. Yani her $x, y \in R$ için

$$0 = d(x)[a, y] + [a, x]d(y) \quad (3.28)$$

eşitliği elde edilir.

Kabul edelim ki $[a, y] = 0$ olsun. Bu durumda (3.28) eşitliği düzenlenirse her $x \in R$ için $[a, x]d(y) = 0$ olur. *Lemma 3.1.1.1.* kullanılırsa $a \notin Z(R)$ olduğundan $d(y) = 0$ dir.

Yani

$$[a, y] = 0 \text{ iken } d(y) = 0$$

dir. $C_R(a) = \{y \in R \mid [a, y] = 0\}$ kümesi tanımlansın. Hipotezden her $x \in R$ için $d(x) \in C_R(a)$ dir. Yani $[a, d(x)] = 0$ dir. O halde her $x \in R$ için $0 = d(d(x)) = d^2(x)$ dir. Yani $d^2 = 0$ dir.

Kabul edelim ki $\text{Char}R \neq 2$ olsun. $d^2 = 0$ ifadesi *Lemma 2.72.* kullanılarak $d = 0$ olur. Bu ise $d \neq 0$ olmasıyla çelişir. O halde kabulümüz yanlıştır. Yani $a \notin Z(R)$ iken $\text{Char}R = 2$ dir. Bu ise $\text{Char}R \neq 2$ ise $a \in Z(R)$ demektir.

(3.28) eşitliğine dönülürse $a \notin Z(R)$ iken $\text{char}R = 2$ olduğundan her $x, y \in R$ için

$$d(x)[a, y] = [a, x]d(y) \quad (3.29)$$

eşitliği elde edilir. Kabul edelim ki $d(y) = 0$ olsun. (3.29) eşitliği her $x \in R$ için $d(x)[a, y] = 0$ olur. Bu ifadeye *Lemma 3.1.1.1.* uygulanırsa $d = 0$ ya da $[a, y] = 0$ bulunur. $d \neq 0$ olduğundan $[a, y] = 0$ dir. Yani

$$d(y) = 0 \text{ iken } [a, y] = 0$$

dir. O halde $C_R(a) = \{y \in R \mid d(y) = 0\}$ olarak düzenlenebilir. (3.29) eşitliğinde x yerine $w \in R$ olmak üzere xw yazılırsa her $x, y, w \in R$ için $d(xw)[a, y] = [a, xw]d(y)$ olur. Bu eşitlik (3.29) eşitliği kullanılarak düzenlenirse her $x, y, w \in R$ için

$$[a, x]wd(y) = d(x)w[a, y] \quad (3.30)$$

elde edilir. (3.30) eşitliğinde y yerine x yazılırsa her $x, w \in R$ için

$$[a, x]wd(x) = d(x)w[a, x]$$

bulunur. $a \notin Z(R)$ olduğundan $[a, x] \neq 0$ olacak şekilde en az bir $x \in R$ vardır. Bu sabit $x \in R$ için son eşitliğe *Sonuç 2.70.* uygulanırsa

$$d(x) = \lambda(x)[a, x]$$

olacak şekilde $\lambda(x) \in C$ vardır. $\lambda(x) = 0$ ise $d(x) = 0$ dır. O zaman $[a, x] = 0$ olur. Yani $\lambda(x) = 0$ iken $[a, x] = 0$ dır. Böylelikle $[a, x] \neq 0$ olduğundan $\lambda(x) \neq 0$ dır. Öte yandan $[a, x] = 0$ olsaydı $d(x) = \lambda(x)[a, x]$ eşitliğinden $d(x) = 0$ olurdu. O zaman $0 \in C$ olmak üzere $0 = d(x) = 0[a, x]$ olarak yazılabilir. Dolayısıyla her $x \in R$ için $d(x) = \lambda(x)[a, x]$ olarak yazılır.

Eğer $[a, x] = 0$ ise $[a, [a, x]] = 0$ dır. Kabul edelim ki $[a, x] \neq 0$ olsun. O halde $d(x) = \lambda(x)[a, x]$ olacak şekilde $0 \neq \lambda(x) \in C$ vardır. Hipotezden

$$0 = [a, d(x)] = [a, \lambda(x)[a, x]] = [a, \lambda(x)][a, x] + \lambda(x)[a, [a, x]]$$

olur. Bu eşitlik $\lambda(x) \in C$ olması kullanılarak yeniden düzenlenirse $\lambda(x)[a, [a, x]] = 0$ elde edilir. $\lambda(x) \neq 0$ ve C bir cisim olduğundan $\lambda(x)^{-1} \in C$ dir. $\lambda(x)[a, [a, x]] = 0$ ifadesi soldan $\lambda(x)^{-1}$ elemanı ile çarpılırsa $0 = [a, [a, x]]$ bulunur. Yani her $x \in R$ için

$$[a, [a, x]] = 0$$

olduğu görülür. O halde

$$0 = [a, [a, x]] = a[a, x] - [a, x]a = a^2x - 2axa - xa^2 = a^2x - xa^2$$

olduğundan her $x \in R$ için $a^2x = xa^2$ dir. Dolayısıyla $a^2 \in Z(R)$ dir. $d(x) = \lambda(x)[a, x]$ ifadesinde x yerine xy yazılırsa $d(xy) = \lambda(xy)[a, xy]$ elde edilir. Bu eşitlik türev ve Lie komütatör özellikleri kullanılarak düzenlenirse

$$d(x)y + xd(y) = \lambda(xy)[a, x]y + \lambda(xy)x[a, y]$$

elde edilir. Bu ifade $d(x) = \lambda(x)[a, x]$ ve $d(y) = \lambda(y)[a, y]$ eşitlikleri kullanılıp $\lambda(x), \lambda(y) \in C$ olması kullanılarak düzenlenirse

$$(\lambda(x) + \lambda(xy))[a, x]y = (\lambda(xy) + \lambda(y))x[a, y]$$

elde edilir. $\mu = \lambda(x) + \lambda(xy)$ ve $\nu = \lambda(xy) + \lambda(y)$ olsun. O halde her $x, y \in R$ için

$$\mu[a, x]y = \nu x[a, y]$$

olur. $\text{Char}R = 2$ olduğundan $\mu[a, x]y + \nu x[a, y] = 0$ olarak yazılır. Yani $a \in R$ için $[a, \mu[a, x]y + \nu x[a, y]] = 0$ dır. Bu eşitlik $[a, [a, x]] = 0$, $\mu[a, x]y = \nu x[a, y]$ ve $\mu, \nu \in C$ olması kullanılarak düzenlenirse her $x, y \in R$ için $(\mu + \nu)[a, x][a, y] = 0$ elde edilir. Bu ifade $q \in Q$ elemanı ile soldan çarpılırsa $q(\mu + \nu)[a, x][a, y] = 0$ olur. $\mu + \nu \in C$

olduğundan her $q \in Q$ için $(\mu + \nu)q[a, x][a, y] = 0$ bulunur. O halde $(\mu + \nu)Q[a, x][a, y] = (0)$ dır. Burada Q halkasının asal olması kullanılarak her $x, y \in R$ için $\mu + \nu = 0$ ya da $[a, x][a, y] = 0$ elde edilir.

Kabul edelim ki $\mu + \nu \neq 0$ olsun. O halde her $x, y \in R$ için $[a, x][a, y] = 0$ dır. Bu ifadede x yerine $r \in R$ olmak üzere xr yazılıp $[a, x][a, y] = 0$ olması ve Lie komütatör özellikleri kullanılarak düzenlenirse her $r \in R$ için $0 = [a, x]r[a, y]$ bulunur. Bu ise

$$[a, x]R[a, y] = (0)$$

demektir. R halkasının asal olması kullanılırsa her $x, y \in R$ için $[a, x] = 0$ ya da $[a, y] = 0$ olur. O halde $a \in Z(R)$ dir. $a \notin Z(R)$ olduğundan $[a, x][a, y] \neq 0$ dır. O halde kabul yanlıştır. Yani

$$\mu + \nu = 0$$

dir. $\mu = \lambda(x) + \lambda(xy)$ ve $\nu = \lambda(xy) + \lambda(y)$ olduğundan $0 = \lambda(x) + \lambda(xy) + \lambda(xy) + \lambda(y)$ dır. $CharR = 2$ olduğundan $\lambda(x) = \lambda(y)$ bulunur. Yani

$$[a, x][a, y] \neq 0 \text{ ise } \lambda(x) = \lambda(y)$$

dir.

Kabul edelim ki $[a, x] \neq 0$ olsun. Eğer her $w \in R$ için $[a, x][a, w] = 0$ ise bu eşitlikte w yerine $r \in R$ olmak üzere rw yazılıp Lie komütatör özellikleri kullanılarak düzenlenirse $0 = [a, x]r[a, w]$ elde edilir. Yani her $x, w \in R$ için $[a, x]R[a, w] = (0)$ dır. R halkasının asal olması kullanılırsa her $w \in R$ için $[a, x] = 0$ ya da $[a, w] = 0$ olur. $[a, x] \neq 0$ olduğundan her $w \in R$ için $[a, w] = 0$ dır. O halde $a \in Z(R)$ olur. $a \notin Z(R)$ olduğundan $[a, x][a, w] \neq 0$ dır. Dolayısıyla $\lambda(x) = \lambda(w)$ dır.

Benzer şekilde $[a, y] \neq 0$ iken $[a, w][a, y] \neq 0$ olduğundan $\lambda(w) = \lambda(y)$ bulunur. O halde λ , a ile değişmeli olmayan elemanlardan bağımsızdır. Bundan dolayı $d(x) = \lambda[a, x]$ olarak yazılabilir. Her $x, y, z \in R$ için $[a, x][a, z][a, y] = 0$ olsun.

$$0 = [a, x](az - za)[a, y] = [a, x]az[a, y] + [a, x]za[a, y]$$

olur. Son ifadeye *Lemma 2.70*. uygulanırsa her $x \in R$ için

$$[a, x]a = \mu[a, x]$$

olacak şekilde en az bir $\mu \in C$ vardır. Bu eşitlik $\mu \in C$ olması kullanılarak düzenlenirse her $x \in R$ için $[a, x](a - \mu) = 0$ olur. Burada x yerine $r \in R$ olmak üzere xr yazılıp Lie komütatör özellikleri ve $[a, x](a - \mu) = 0$ eşitliği kullanılarak düzenlenirse

$$0 = [a, xr](a - \mu) = [a, x]r(a - \mu) + r[a, x](a - \mu) = [a, x]r(a - \mu)$$

olur. Yani her $r \in R$ için $[a, x]r(a - \mu) = 0$ dır. O halde $[a, x]R(a - \mu) = (0)$ dır. R halkasının asal olması kullanılırsa her $x \in R$ için $[a, x] = 0$ ya da $a - \mu = 0$ dır. Yani $a \in$

$Z(R)$ ya da $a = \mu$ dir. $\mu \in Z(R)$ olduğundan $a \in Z(R)$ dir. Bu ise $a \notin Z(R)$ olmasıyla çelişir. O halde her $x, y, z \in R$ için $[a, x][a, z][a, y] \neq 0$ dir.

3.1.3. Asal Halkalarda Merkezileştirici Dönüşümler ve Türevler

Bu kısımda Bresar (1993) tarafından yapılmış olan “*Centralizing Mapping and Derivations in Prime Rings*” adlı çalışma incelenmiştir.

Lemma 3.1.3.1. R bir asal halka d ve g , R halkası üzerinde tanımlı türevler olmak üzere her $x, y \in R$ için $d(x)g(y) = g(x)d(y)$ olsun. d sıfırdan farklı bir türev ise her $x \in R$ için $g(x) = \lambda d(x)$ olacak şekilde en az bir $\lambda \in C$ vardır.

İspat : Kabulden her $x, y \in R$ için

$$d(x)g(y) = g(x)d(y) \quad (3.31)$$

dir. (3.31) eşitliğinde y yerine $z \in R$ olmak üzere yz yazılıp türev özellikleri ve hipotez kullanılarak düzenlenirse her $x, y, z \in R$ için

$$d(x)yg(z) = g(x)yd(z) \quad (3.32)$$

elde edilir.

Kabul edelim ki keyfi $x \in R$ için bir $d(x) = 0$ olsun. O halde her $y, z \in R$ için $g(x)yd(z) = 0$ olur. Yani her $z \in R$ için

$$g(x)Rd(z) = (0)$$

olur. R halkasının asal olması kullanılırsa $g(x) = 0$ ya da her $z \in R$ için $d(z) = 0$ bulunur. Bu da $g(x) = 0$ ya da $d = 0$ demektir. $d \neq 0$ olduğundan $g(x) = 0$ dır. Böylece $\lambda(x) \in C$ olmak üzere $g(x) = 0 = \lambda(x)0 = \lambda(x)d(x)$ dır. Yani

$$g(x) = \lambda(x)d(x)$$

şeklinde yazılır. Bu sefer (3.32) eşitliğinde z yerine x yazılırsa her $y \in R$ için $d(x)yg(x) = g(x)yd(x)$ elde edilir.

Eğer $d(x) \neq 0$ ise bu son ifadeye *Sonuç 2.70.* uygulanırsa $g(x) = \lambda(x)d(x)$ olacak şekilde en az bir $\lambda(x) \in C$ vardır. O halde x elemanının her durumu için $g(x) = \lambda(x)d(x)$ olacak şekilde en az bir $\lambda(x) \in C$ vardır. Benzer şekilde (3.32) eşitliğinde x yerine z yazılırsa her $z \in R$ için $g(z) = \lambda(z)d(z)$ olacak şekilde $\lambda(z) \in C$ olur. $g(x) = \lambda(x)d(x)$

ve $g(z) = \lambda(z)d(z)$ ifadeleri (3.32) eşitliğinde yerlerine yazılıp $\lambda(z) \in C$ olması kullanılırsa

$$\lambda(z)d(x)yd(z) = \lambda(x)d(x)yd(z)$$

olur. Bu ise her $x, z \in R$ için

$$(\lambda(z) - \lambda(x))d(x)yd(z) = 0$$

demektir. Bu eşitlik $q \in Q$ ile soldan çarpılıp $\lambda(z) - \lambda(x) \in C$ olması kullanılırsa her $q \in Q$ için $(\lambda(z) - \lambda(x))qd(x)yd(z) = 0$ elde edilir. O halde

$$(\lambda(z) - \lambda(x))Qd(x)yd(z) = (0)$$

olur. Böylece Q halkasının asal olması kullanılarak her $x, y, z \in R$ için

$$\lambda(z) - \lambda(x) = 0 \text{ ya da } d(x)yd(z) = 0$$

bulunur. Her $x, y, z \in R$ için $d(x)yd(z) = 0$ olsun. Yani her $x, z \in R$ için

$$d(x)Rd(z) = (0)$$

dır. R halkasının asal olmasından dolayı her $x \in R$ için $d(x) = 0$ olduğu görülür. Bu ise $d = 0$ demektir. $d \neq 0$ olduğundan $\lambda(z) - \lambda(x) = 0$ dır. Yani $\lambda(z) = \lambda(x)$ dır. O halde her $x \in R$ için $g(x) = \lambda d(x)$ olacak şekilde en az bir $\lambda \in C$ vardır.

Lemma 3.1.3.2. R bir asal halka d, f, g ve h, R halkası üzerinde tanımlı türevler ve her $x, y \in R$ için $d(x)g(y) = h(x)f(y)$ olsun. $d \neq 0$ ve $f \neq 0$ ise her $x \in R$ için $g(x) = \lambda f(x)$ ve $h(x) = \lambda d(x)$ olacak şekilde en az bir $\lambda \in C$ vardır.

İspat : Kabulümüzden her $x, y \in R$ için

$$d(x)g(y) = h(x)f(y) \tag{3.33}$$

dir. (3.33) y yerine $z \in R$ olmak üzere yz yazılıp türev özellikleri ve hipotez kullanılarak düzenlenirse her $x, y, z \in R$ için

$$d(x)zg(y) = h(x)zf(y) \tag{3.34}$$

elde edilir. (3.34) eşitliğinde z yerine $w \in R$ olmak üzere $zf(w)$ yazılarak elde edilen ifade (3.34) eşitliği kullanılarak düzenlenirse her $x, y, z, w \in R$ için $d(x)z(f(w)g(y) - g(w)f(y)) = 0$ bulunur. Yani

$$d(x)R(f(w)g(y) - g(w)f(y)) = (0)$$

dir. R halkasının asal olması kullanılarak her $x \in R$ için $d(x) = 0$ ya da her $y, w \in R$ için $f(w)g(y) - g(w)f(y) = 0$ bulunur. Her $x \in R$ için $d(x) = 0$ ise $d = 0$ dir. $d \neq 0$ olduğundan her $y, w \in R$ için $f(w)g(y) - g(w)f(y) = 0$ elde edilir. Bu ifadede *Lemma 3.1.3.1.* uygulanırsa her $w \in R$ için $g(w) = \lambda f(w)$ olacak şekilde en az bir $\lambda \in C$ vardır. (3.34) ifadesi $g(w) = \lambda f(w)$ eşitliği kullanılarak düzenlenirse her $x, y, z \in R$ için $(\lambda d(x) - h(x))zf(y) = 0$ elde edilir. Yani

$$(\lambda d(x) - h(x))Rf(y) = (0)$$

dir. R halkasının asal olması kullanılarak her $x \in R$ için $h(x) = \lambda d(x)$ ya da her $y \in R$ için $f(y) = 0$ bulunur. Her $y \in R$ için $f(y) = 0$ olması $f \neq 0$ olmasıyla çelişir. Dolayısıyla her $x \in R$ için $h(x) = \lambda d(x)$ olacak şekilde en az bir $\lambda \in C$ vardır.

Teorem 3.1.3.3. R bir asal halka d , h ve f , R halkası üzerinde tanımlı türevler ve $a, b \in R$ olmak üzere her $x \in R$ için $d(x) = ag(x) + h(x)b$ olsun. $a, b \notin Z(R)$ ise her $x \in R$ için $d(x) = [\lambda ab, x]$, $g(x) = [\lambda b, x]$ ve $h(x) = [\lambda a, x]$ olacak şekilde en az bir $\lambda \in C$ vardır.

İspat : Kabulümüzden her $x \in R$ için

$$d(x) = ag(x) + h(x)b \quad (3.35)$$

dir. (3.35) eşitliğinde x yerine xy yazılarak elde edilen ifade türev özellikleri ve (3.35) ifadesi kullanılarak düzenlenirse her $x, y \in R$ için $[a, x]g(y) = h(x)[b, y]$ elde edilir. $I_a: R \rightarrow R$, $I_a(x) = [a, x]$ ve $I_b: R \rightarrow R$, $I_b(x) = [b, x]$ olarak tanımlanan birer iç türev fonksiyonları olmak üzere son eşitlik bu iç türev fonksiyonları kullanılarak düzenlenirse

$$I_a(x)g(y) = h(x)I_b(y)$$

olur. $a, b \notin Z(R)$ olduğundan $I_a \neq 0$ ve $I_b \neq 0$ dir. O halde son eşitliğe *Lemma 3.1.3.2.* uygulanırsa her $x \in R$ için

$$g(x) = \lambda [b, x] = [\lambda b, x] \text{ ve } h(x) = \lambda [a, x] = [\lambda a, x]$$

olacak şekilde en az bir $\lambda \in C$ var olduğu görülür. (3.35) ifadesi bu eşitlikler kullanılarak düzenlenirse her $x \in R$ için $d(x) = a[\lambda b, x] + [\lambda a, x]b = [\lambda ab, x]$ olacak şekilde en az bir $\lambda \in C$ olduğu bulunur.

Sonuç 3.1.3.4. R bir asal halka g ve h , R halkası üzerinde tanımlı türevler ve $a, b \in R$ olmak üzere her $x \in R$ için

$$ag(x) + h(x)b = 0$$

olsun. Eğer $a, b \notin Z(R)$ ise her $x \in R$ için $g(x) = [\lambda b, x]$ ve $h(x) = [\lambda a, x]$ olacak şekilde en az bir $\lambda \in C$ vardır. Üstelik $g \neq 0$ ise $ab \in Z(R)$ dir.

İspat : Sıfır dönüşümü R halkası üzerinde tanımlı bir türev olduğundan $ag(x) + h(x)b = 0$ ifadesi $0(x) = ag(x) + h(x)b$ olarak yazılır. Bu ifadeye *Teorem 3.1.3.3.* uygulanırsa her $x \in R$ için $[\lambda ab, x] = 0$, $g(x) = [\lambda b, x]$ ve $h(x) = [\lambda a, x]$ olacak şekilde en az bir $\lambda \in C$ var olduğu görülür.

Kabul edelim ki $g = 0$ olsun. Yani her $x \in R$ için $[\lambda b, x] = 0$ dır. Bu ifade $\lambda \in C$ olması kullanılarak düzenlenirse

$$0 = [\lambda b, x] = \lambda [b, x]$$

elde edilir. Bu eşitlik $q \in Q$ olmak üzere soldan q ile çarpılıp $\lambda \in C$ olması kullanılarak düzenlenirse her $q \in Q$ için $\lambda q [b, x] = 0$ bulunur. Yani

$$\lambda Q [b, x] = (0)$$

dır. Q halkasının asal olması kullanılarak $\lambda = 0$ ya da her $x \in R$ için $[b, x] = 0$ bulunur. Böylece $b \notin Z(R)$ olduğundan $\lambda = 0$ dır. Dolayısıyla

$$g \neq 0 \text{ iken } \lambda \neq 0$$

dır. C bir cisim olduğundan $0 \neq \lambda \in C$ için $\lambda^{-1} \in C$ dir. $[\lambda ab, x] = 0$ eşitliği soldan λ^{-1} ile çarpılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa her $x \in R$ için $[ab, x] = 0$ bulunur. Bu ise $ab \in Z(R)$ demektir.

Önerme 3.1.3.5. R bir 2 –torsion free yarı-asal halka ve U , R halkasının bir Jordan althalkası olsun. $F: R \rightarrow R$ toplamsal dönüşümü U üzerinde merkezileştirici dönüşüm ise F , U üzerinde değişmeli dönüşümdür.

İspat : Her $x \in U$ için $[F(x), x] \in Z(R)$ olur. U , R halkasının bir Jordan althalkası olduğu için $x, y \in U$ için $x + y \in U$ dir. O halde hipotezde x yerine $x + y$ yazılırsa

$$[F(x + y), x + y] \in Z(R)$$

elde edilir. Bu ifade Lie komütatör özellikleri kullanılarak düzenlenirse

$$[F(x + y), x + y] = [F(x), x] + [F(x), y] + [F(y), x] + [F(y), y]$$

bulunur. $Z(R)$ kümesinin, R halkasının bir althalkası olması ve $[F(x + y), x + y], [F(x), x], [F(y), y] \in Z(R)$ ifadeleri kullanılarak düzenlenirse her $x, y \in U$ için

$$[F(x), y] + [F(y), x] \in Z(R)$$

elde edilir. Bu ifadede $x \in U$ için $(x, x) = 2x^2 \in U$ olduğundan x yerine $2x^2$ yazılır ve Lie komütatör özellikleri kullanılarak düzenlenirse

$$2([F(x), x^2] + [F(x^2), x]) \in Z(R)$$

bulunur. R halkası 2 –torsion free bir halka olduğundan her $x \in U$ için

$$[F(x), x^2] + [F(x^2), x] \in Z(R)$$

olur. Bu eşitlikte $[F(x), x] \in Z(R)$ olması kullanılarak düzenlenirse $[F(x), x^2] = 2[F(x), x]x$ elde edilir. O halde her $x \in U$ için

$$2[F(x), x]x + [F(x^2), x] \in Z(R) \quad (3.36)$$

dir. $x \in U$ için $2x^2 \in U$ olduğundan hipotezde x yerine $2x^2$ yazılırsa $[F(2x^2), 2x^2] \in Z(R)$ elde edilir. Bu ifade Lie komütatör özellikleri ve halkanın 2 –torsion free olması kullanılarak düzenlenirse $[F(x^2), x^2] \in Z(R)$ bulunur. Bu ifade Lie komütatör özellikleri kullanılarak düzenlenirse her $x \in U$ için

$$x[F(x^2), x] + [F(x^2), x]x \in Z(R) \quad (3.37)$$

olur. $u = [F(x^2), x]$ ve $z = [F(x), x]$ olsun. (3.36) eşitliği $u = [F(x^2), x]$ ve $z = [F(x), x]$ kullanılarak düzenlenirse

$$2zx + u \in Z(R)$$

bulunur. O halde $[F(x), 2zx + u] = 0$ dir. Bu ifade Lie komütatör özellikleri kullanılarak düzenlenirse

$$0 = [F(x), 2zx + u] = 2[F(x), z]x + 2z[F(x), x] + [F(x), u]$$

olur. $z \in Z(R)$ ve $[F(x), x] = z$ olduğundan son eşitlikten

$$[F(x), u] = -2z^2 \quad (3.38)$$

elde edilir. (3.37) eşitliğini $xu + ux \in Z(R)$ ifadesi kullanılarak düzenlenirse

$$0 = [F(x), xu + ux] = [F(x), x]u + x[F(x), u] + [F(x), u]x + u[F(x), x]$$

olur. Bu eşitlikte $u = [F(x^2), x]$ ve $z = [F(x), x] \in Z(R)$ olması kullanılarak düzenlenirse

$$2zu = 4z^2x$$

elde edilir. $2zu = 4z^2x$ ifadesinde halkanın 2 –torsion free olması kullanılırsa

$$zu = 2z^2x$$

bulunur. $2zx + u \in Z(R)$ ve $z \in Z(R)$ olduğundan $2z^2x + zu \in Z(R)$ dir. Son ifade $2z^2x = zu$ olması kullanılarak düzenlenirse $2zu \in Z(R)$ elde edilir. Halka 2 –torsion free

olduğundan

$$zu \in Z(R)$$

dir. $z \in Z(R)$ olduğundan $zu \in Z(R)$ ifadesine *Lemma 2.34.* uygulanırsa $u \in Z$ ya da $z = 0$ bulunur. Kabul edelim ki $u \in Z(R)$ olsun. (3.38) eşitliği $u \in Z(R)$ olması kullanılarak düzenlenirse

$$-2z^2 = 0$$

olur. R bir yarı-asal halka olduğundan merkezinde sıfırdan farklı nilpotent eleman yoktur. Böylece $z = 0$ dır. O halde her $x \in U$ için $[F(x), x] = 0$ dır.

Teorem 3.1.3.6. R bir asal halka, F , R halkası üzerinde değışmeli dönüşüm ise $\xi: R \rightarrow C$ toplamsal dönüşüm olmak üzere her $x \in R$ için

$$F(x) = \lambda x + \xi(x)$$

olacak şekilde en az bir $\lambda \in C$ vardır.

İspat : Her $x \in R$ için $[F(x), x] = 0$ dır. Bu eşitlikte x yerinde $y \in R$ olmak üzere $x + y$ yazılıp hipotez kullanılarak düzenlenirse her $x, y \in R$ için

$$[F(x), y] = [x, F(y)]$$

elde edilir. Elde edilen eşitlikte y yerine $z \in R$ olmak üzere yz yazılır ve Lie komütatör özellikleri kullanılarak düzenlenirse her $x, y, z \in R$ için

$$[F(y), x]z + y[F(z), x] = [F(yx), x] \quad (3.39)$$

elde edilir.

Kabul edelim ki $y \notin Z(R)$ olsun. (3.39) ifadesinde z yerine y yazılırsa her $x \in R$ için

$$[F(y), x]y + y[F(y), x] = [F(y^2), x]$$

olur. $I_{F(y)}: R \rightarrow R$, $I_{F(y)}(x) = [F(y), x]$ ve $I_{F(y^2)}: R \rightarrow R$, $I_{F(y^2)}(x) = [F(y^2), x]$ olarak tanımlanan birer iç türev olmak üzere son eşitlik bu iç türevler kullanılarak her $x \in R$ için

$$I_{F(y)}(x)y + yI_{F(y)}(x) = I_{F(y^2)}(x)$$

olarak yazılır. $y \notin Z$ iken $I_{F(y)}, I_{F(y^2)} \neq 0$ olduğundan son eşitlikte *Teorem 3.1.3.3.* uygulanırsa $I_{F(y)}(x) = [\lambda(y)y, x]$ bulunur. Bu ise her $x \in R$ için

$$[x, F(y)] = [\lambda(y)y, x]$$

demektir.

Kabul edelim ki $y \in Z(R)$ olsun. $[F(x), y] = [x, F(y)]$ ifadesi $y \in Z(R)$ olması kullanılarak düzenlenirse $[x, F(y)] = 0$ olur. Bu eşitlik $0(y) \in C$ olmak üzere

$$[x, F(y)] = 0 = [0(y)y, x]$$

olarak yazılabilir. Yani $y \in Z(R)$ iken her $x \in R$ için $[x, F(y)] = [0(y)y, x]$ dir. Böylece her $x, y \in R$ için $[x, F(y)] = [\lambda(y)y, x]$ olacak şekilde en az bir $\lambda(y) \in C$ vardır. (3.39) ifadesi $[x, F(y)] = [\lambda(y)y, x]$ eşitliği kullanılarak düzenlenirse

$$[\lambda(yz)yz, x] = [\lambda(y)y, x]z + y[\lambda(z)z, x]$$

olur. Bu eşitlikte $\lambda(y), \lambda(z), \lambda(yz) \in C$ olması kullanılarak düzenlenirse her $x, y, z \in R$ için

$$[(\lambda(yz) - \lambda(y))y, x]z + y[(\lambda(yz) - \lambda(z))z, x] = 0 \quad (3.40)$$

elde edilir. $y, z \in R$ için

$$I_{(\lambda(yz)-\lambda(y))y}: R \rightarrow R, I_{(\lambda(yz)-\lambda(y))y}(x) = [(\lambda(yz) - \lambda(y))y, x]$$

ve

$$I_{(\lambda(yz)-\lambda(z))z}: R \rightarrow R, I_{(\lambda(yz)-\lambda(z))z}(x) = [(\lambda(yz) - \lambda(z))z, x]$$

olarak tanımlanan birer iç türev olmak üzere (3.40) eşitliği bu iç türevler kullanılarak düzenlenirse her $x \in R$ için

$$(I_{(\lambda(yz)-\lambda(y))y}(x))z + yI_{(\lambda(yz)-\lambda(z))z}(x) = 0$$

olur. $y, z \notin Z(R)$ olması durumunda bu ifadeye *Sonuç 3.1.3.4.* uygulanarak her $x \in R$ için $\mu(y, z) \in C$ olmak üzere

$$[(\lambda(yz) - \lambda(z))z, x] = [\mu(y, z)z, x] \text{ ve } [(\lambda(yz) - \lambda(y))y, x] = [\mu(y, z)y, x]$$

elde edilir. $[(\lambda(yz) - \lambda(z))z, x] = [\mu(y, z)z, x]$ ifadesi Lie komütatör özellikleri kullanılarak düzenlenirse her $x \in R$ için

$$(\lambda(yz) - \lambda(z) - \mu(y, z))[z, x] = 0$$

olur. Bu ifade $q \in Q$ ile soldan çarpılıp $\lambda(yz) - \lambda(z) - \mu(y, z) \in C$ olması kullanılarak düzenlenirse her $q \in Q$ için $(\lambda(yz) - \lambda(z) - \mu(y, z))q[z, x] = 0$ elde edilir. Bu ise

$$(\lambda(yz) - \lambda(z) - \mu(y, z))Q[z, x] = (0)$$

demektir. Q halkasının asal olması kullanılarak $\lambda(yz) - \lambda(z) - \mu(y, z) = 0$ ya da her $x \in R$ için $[z, x] = 0$ bulunur. Yani

$$\lambda(yz) - \lambda(z) - \mu(y, z) = 0 \text{ ya da } z \in Z(R)$$

dir. $z \notin Z(R)$ olduğundan $\lambda(yz) - \lambda(z) - \mu(y, z) = 0$ olur. Dolayısıyla

$$\mu(y, z) = \lambda(yz) - \lambda(z)$$

dir.

Benzer şekilde $[(\lambda(yz) - \lambda(y))y, x] = [\mu(y, z)y, x]$ ifadesi düzenlenirse

$$\mu(y, z) = \lambda(yz) - \lambda(y)$$

olduğu bulunur. Böylece $\mu(y, z) = \lambda(yz) - \lambda(z)$ ve $\mu(y, z) = \lambda(yz) - \lambda(y)$ eşitlikleri taraf tarafa çıkarılarak

$$\lambda(y) = \lambda(z)$$

elde edilir. O halde her $x, y \in R$ için

$$[F(y), x] = [\lambda y, x]$$

dir. Bu ifade Lie komütatör özellikleri kullanılarak düzenlenirse her $x, y \in R$ için $[F(y) - \lambda y, x] = 0$ olur. Yani her $y \in R$ için

$$F(y) - \lambda y \in C$$

dir.

$\xi: R \rightarrow C$, $\xi(y) = F(y) - \lambda y$ olarak tanımlanırsa F dönüşümü iyi tanımlı olduğundan ξ dönüşümü de iyi tanımlıdır. $x, y \in R$ için

$$\begin{aligned}\xi(x + y) &= F(x + y) - \lambda(x + y) = F(x) + F(y) - \lambda x - \lambda y \\ &= F(x) - \lambda x + F(y) - \lambda y = \xi(x) + \xi(y)\end{aligned}$$

sağlanır. Bundan dolayı ξ bir toplamsal dönüşümdür.

Lemma 3.1.3.7. R değişmeli olmayan bir asal halka, U , R halkasının sıfırdan farklı bir sol ideali ve d , R halkası üzerinde tanımlı bir türev olmak üzere $d(U) \subset Z(R)$ ise $d = 0$ dır.

İspat : Hipotez kullanılarak $u, v \in U$ için $d(uv) \in Z(R)$ olur. Böylece

$$[d(uv), u] = 0$$

dir. Bu ifade Lie komütatör özellikleri ve $d(u), d(v) \in Z(R)$ olması kullanılarak düzenlenirse her $u, v \in U$ için $d(u)[v, u] = 0$ elde edilir. Elde edilen eşitlik soldan $r \in R$ ile çarpılıp $d(u) \in Z(R)$ olması kullanılarak düzenlenirse her $r \in R$ için $d(u)r[v, u] = 0$ bulunur. Yani

$$d(u)R[v, u] = (0)$$

dir. R halkasının asal olması kullanılarak $d(u) = 0$ ya da her $v \in U$ için $[v, u] = 0$ olur. O halde

$$d(u) = 0 \text{ ya da } [u, U] = (0)$$

dir. $G = \{u \in U | d(u) = 0\}$ ve $H = \{u \in U | [u, U] = (0)\}$ kümeleri tanımlansın. G ve H kümeleri U idealinin altgruplarıdır ve $U = G \cup H$ olarak yazılır. *Teorem 2.4.* uygulanırsa $U = G$ ya da $U = H$ olur. Kabul edelim ki $U = H$ olsun. O zaman $[U, U] = (0)$ dır. Yani U , R halkasının değişmeli bir sol idealidir. *Lemma 2.33.* uygulanırsa R halkasının

değişmeli olduğu görülür. R değişmeli olmayan bir halka olarak seçildiğinden $U = G$ dir. O halde $d(U) = (0)$ dir. *Lemma 2.32.* uygulanarak $d = 0$ bulunur.

Teorem 3.1.3.8. R bir asal halka, U , R halkasının sıfırdan farklı bir sol ideali, d ve g , R halkası üzerinde tanımlı iki türev olmak üzere her $u \in U$ için $d(u)u - ug(u) \in Z(R)$ olsun. $d \neq 0$ ise R halkası değişmelidir.

İspat : Kabul edelim ki R halkası değişmeli olmayan bir halka olsun. $u, v \in U$ için $d(u + v)(u + v) - (u + v)g(u + v) \in Z(R)$ dir. Bu ifade $Z(R)$ kümesinin R halkasının bir alt halkası olması ve hipotez kullanılarak düzenlenirse

$$d(u)v + d(v)u - ug(v) - vg(u) \in Z(R) \quad (3.41)$$

elde edilir.

Kabul edelim ki $Z(R) \cap U \neq (0)$ olsun. O halde en az bir $0 \neq c \in Z(R) \cap U$ vardır. (3.41) eşitliğinde v yerine c yazılır ve $c, g(c) \in Z(R)$ olması kullanılarak düzenlenirse her $u \in U$ için

$$c(d(u) - g(u)) + (d(c) - g(c))u \in Z(R) \quad (3.42)$$

elde edilir. Öte yandan (3.41) eşitliğinde v yerinde c^2 yazılıp $c^2 \in Z(R)$ olması ve (3.42) eşitliği kullanılarak düzenlenirse her $u \in U$ için

$$c(d(c) - g(c))u \in Z(R)$$

elde edilir. $c(d(c) - g(c)) \in Z(R)$ olduğundan *Lemma 2.34.* uygulanırsa

$$c(d(c) - g(c)) = 0 \text{ ya da her } u \in U \text{ için } u \in Z(R)$$

olduğu bulunur. Her $u \in U$ için $u \in Z(R)$ ise U , R halkasının değişmeli bir sol ideali olduğundan *Lemma 2.33.* uygulanarak R halkasının değişmeli olduğu görülür. Bu ise kabulümüz ile çelişir. O halde $c(d(c) - g(c)) = 0$ dir. Bu ifade soldan $r \in R$ ile çarpılıp $c \in Z(R)$ olması kullanılırsa her $r \in R$ için $cr(d(c) - g(c)) = 0$ elde edilir. Yani

$$cR(d(c) - g(c)) = (0)$$

dir. R halkasının asal olması kullanılırsa

$$c = 0 \text{ yada } d(c) = g(c)$$

olur. $c \neq 0$ olduğundan $d(c) = g(c)$ dir. O halde (3.42) eşitliği $d(c) = g(c)$ olması kullanılarak düzenlenirse her $u \in U$ için

$$c(d(u) - g(u)) \in Z(R)$$

olur. Bu ifadede *Lemma 2.34* uygulanırsa $c \neq 0$ olduğundan her $u \in U$ için

$$d(u) - g(u) \in Z(R)$$

bulunur. $h: U \rightarrow Z$, $h(u) = d(u) - g(u)$ olarak tanımlansın. d ve g dönüşümleri birer türev olduğundan h dönüşümü de bir türevdir ve $d(u) - g(u) \in Z(R)$ olduğundan $h(U) \subset Z(R)$ olur. Bu ifadeye *Lemma 3.1.3.7.* uygulanırsa $h = 0$ bulunur. Yani her $u \in U$ için

$$d(u) = g(u)$$

olur. Hipotez bu sonuç kullanılarak düzenlenirse her $u \in U$ için $d(u)u - ud(u) \in Z(R)$ elde edilir. Bu ifadeye *Lemma 2.73.* uygulanarak her $u \in U$ için

$$d(u)u - ud(u) = 0$$

olduğu bulunur.

Kabul edelim ki $Z(R) \cap U = (0)$ olsun. Hipotezden $v \in U$ için

$$[d(u)u - ug(u), v] = 0$$

dır. Bu eşitlik U kümesinin R halkasının bir sol ideali olması ve Lie komütatör özellikleri kullanılarak düzenlenirse her $u, v \in U$ için $vug(u) \in U$ elde edilir. Elde edilen bu ifadede u yerine $w \in U$ olmak üzere $u + w$ yazılır ve U kümesinin R halkasının bir sol ideali olması kullanılarak düzenlenirse her $u, v, w \in U$ için

$$vug(w) + vwg(u) \in U$$

bulunur. Son ifadede w yerine vu yazılıp U kümesinin R halkasının bir sol ideali olması kullanılarak düzenlenirse her $u, v \in U$ için

$$vug(vu) \in U$$

elde edilir.

$u \in U$ olmak üzere $(0) \neq W = Uu$ olsun. Buradan $W \subset U$ dır ve U , R halkasının bir sol ideali olduğundan W kümesi de R halkasının bir sol idealidir. O halde hipotezden her $w \in W$ için

$$d(w)w - wg(w) \in Z(R)$$

olduğu görülür. Üstelik U kümesi R halkasının bir sol ideali olduğundan her $w \in W$ için

$$d(w)w - wg(w) \in U$$

dur. Yani her $w \in W$ için

$$d(w)w - wg(w) \in Z(R) \cap U$$

olur. $Z(R) \cap U = (0)$ olduğundan her $w \in W$ için $d(w)w - wg(w) = 0$ dır. O halde her $w \in W$ için

$$d(w)w = wg(w)$$

olduğu bulunur. Bu eşitlikte w yerine $u \in W$ olmak üzere $w + u$ yazılıp türev özellikleri kullanılarak düzenlenirse her $u, w \in W$ için

$$d(u)w + d(w)u = ug(w) + wg(u) \quad (3.43)$$

elde edilir. (3.43) ifadesinde w yerine wu yazılarak elde edilen ifade (3.43) eşitliği kullanılarak düzenlenirse her $u, w \in W$ için

$$wg(u)u = uwg(u) \quad (3.44)$$

olur. (3.44) ifadesinde w yerine $v \in W$ olmak üzere vw yazılarak elde edilen ifade (3.44) eşitliği kullanılarak düzenlenirse her $[W, u]Wg(u) = (0)$ bulunur. Bu eşitlik $RW \subset W$ olması kullanılarak düzenlenirse

$$[W, u]RWg(u) = (0)$$

elde edilir. R halkasının asal olması kullanılırsa

$$[W, u] = (0) \text{ ya da } Wg(u) = (0)$$

olur. $A = \{u \in W \mid [W, u] = (0)\}$ ve $B = \{u \in W \mid Wg(u) = (0)\}$ kümeleri tanımlansın. A ve B kümeleri W idealinin altgruplarıdır ve $W = A \cup B$ olarak yazılır. *Teorem 2.4.* uygulanırsa $W = A$ ya da $W = B$ olur. Kabul edelim ki $W = A$ olsun. Yani her $u \in W$ için $[W, u] = (0)$ dır. O halde W , R halkasının değişmeli bir sol idealidir. *Lemma 2.33.* uygulanırsa R halkası değişmeli olur. R halkası değişmeli olmayan bir halka olarak seçildiğinden $W = B$ dir. Yani her $u \in W$ için

$$ug(u) = 0$$

dır. $d(u)u = ug(u)$ olduğundan her $u \in W$ için

$$d(u)u = 0 \quad (3.45)$$

bulunur. (3.45) eşitliğinde u yerine $u + v$ yazılarak elde edilen ifade (3.45) eşitliği kullanılarak düzenlenirse her $u, v \in U$ için

$$d(u)v + d(v)u = 0 \quad (3.46)$$

olur. (3.46) ifadesinde v yerine $d(u)v$ yazılarak elde edilen ifade tekrardan (3.46) eşitliği kullanılarak düzenlenirse her $u \in W$ için $d^2(u)Wu = (0)$ olur. W, R halkasının bir sol ideali olduğundan $RW \subset W$ dir. $d^2(u)Wu = (0)$ olması kullanılarak her $u \in W$ için

$$d^2(u)RWu = (0)$$

bulunur. R halkasının asal olması kullanılırsa

$$d^2(u) = 0 \text{ ya da } Wu = (0)$$

elde edilir. $C = \{u \in W | d^2(u) = 0\}$ ve $D = \{u \in W | Wu = (0)\}$ kümeleri tanımlansın. C ve D kümeleri W idealinin altgruplarıdır ve $W = C \cup D$ olarak yazılır. *Teorem 2.4.* uygulanarak $W = C$ ya da $W = D$ olduğu görülür. Kabul edelim ki $W = D$ olsun. Bu durumda

$$W^2 = (0)$$

olur. W, R halkasının bir sol ideali olduğundan $RW \subset W$ dir. O halde $W^2 = (0)$ ifadesi kullanılarak

$$WRW = (0)$$

bulunur. R halkasının asal olması kullanılırsa $W = (0)$ olur. $W \neq (0)$ olduğundan $W = C$ dir. Böylece her $u \in W$ için $d^2(u) = 0$ olur. Bu durumda $d(u)u \in W$ olduğundan $d^2(d(u)u) = 0$ dir. Bu ifade $d^2(u) = 0$ olması kullanılarak düzenlenirse her $u \in W$ için

$$d(u)d(u) = 0$$

olur. Son eşitlikte u yerine $v \in W$ olmak üzere $u + v$ yazılıp $d(u)d(u) = 0$ olması ve türev özellikleri kullanılarak düzenlenirse her $u, v \in W$ için

$$d(v)d(u) + d(u)d(v) = 0$$

elde edilir. Elde edilen ifade soldan $d(u)$ ile çarpılır ve $d(u)d(u) = 0$ olması kullanılarak düzenlenirse

$$d(u)d(v)d(u) = 0$$

olur. $d(v)d(u) + d(u)d(v) = 0$ eşitliği $t \in W$ olmak üzere $d(t)v$ ile sağdan çarpılırsa her $u, v, t \in W$ için

$$d(v)d(u)d(t)v + d(u)d(v)d(t)v = 0$$

olur. Son ifade $d(u)d(u) = 0$ olması ve (3.46) eşitliği kullanılarak düzenlenirse her $u, v, t \in W$ için

$$d(v)d(u)d(t)v = 0$$

elde edilir. $d(u)d(v)d(u) = 0$ eşitliğinde v yerine $w \in W$ olmak üzere wv yazılıp türev özellikleri ve $d(v)d(u)d(t)v = 0$ olması kullanılarak düzenlenirse $u, w \in W$ için

$$d(u)d(w)ud(u) = 0$$

bulunur. Bu eşitlik $d(w)v$ ile sağdan çarpılırsa her $u, v, w \in W$ için

$$(d(u)d(w)v)^2 = 0$$

olur. $k \in W$ olmak üzere $(kd(u)d(w))^3$ elemanını ele alalım. Her $u, v, w \in W$ için $(d(u)d(w)v)^2 = 0$ olduğundan her $k \in W$ için $(kd(u)d(w))^3 = 0$ dır. O halde

$$(Wd(u)d(w))^3 = (0)$$

olur. *Uyarı 2.35.* uygulanarak

$$Wd(u)d(w) = (0)$$

bulunur. Bu ifadede u yerine $v \in W$ olmak üzere uv yazılıp türev özellikleri ve $Wd(u)d(w) = (0)$ ifadesi kullanılarak düzenlenirse

$$Wd(W)RWd(W) = (0)$$

elde edilir. R halkasının asal olması kullanılırsa

$$Wd(W) = (0)$$

olur. (3.46) eşitliğinde v yerine uv yazılıp (3.45) ifadesi ve son eşitlik kullanılarak düzenlenirse her $u, v \in W$ için $d(u)vu = 0$ bulunur. Bu ise $d(u)Wu = (0)$ demektir. $RW \subset R$ olduğundan bu ifade $d(u)RWu = (0)$ olur. R halkasının asal olması kullanılırsa

$$d(u) = 0 \text{ ya da } Wu = (0)$$

olduğu görülür. $E = \{u \in W \mid d(u) = 0\}$ ve $F = \{u \in W \mid Wu = (0)\}$ kümeleri tanımlansın. E ve F kümeleri W idealinin altgruplarıdır ve $W = E \cup F$ olarak yazılır.

Teorem 2.4. uygulanarak $W = E$ ya da $W = F$ olduğu bulunur. Kabul edelim ki $W = F$ olsun. Bu durumda $W^2 = (0)$ olur. W , R halkasının bir sol ideali olduğundan $RW \subset W$ dir. O halde $W^2 = (0)$ ifadesi kullanılarak

$$WRW = (0)$$

bulunur. R halkasının asal olması kullanılırsa $W = (0)$ olur. $W \neq (0)$ olduğundan $W = E$ dir. Böylece her $u \in W$ için $d(u) = 0$ dır. *Lemma 2.32.* uygulanırsa $d = 0$ olduğu görülür. Bu ise $d \neq 0$ olmasıyla çelişir. O halde başlangıç kabulü yanlıştır. Yani R halkası değişmelidir.

Sonuç 3.1.3.9. R bir asal halka, U , R halkasının sıfırdan farklı bir sol ideali ve d , R halkası üzerinde tanımlı sıfırdan farklı bir türev olmak üzere her $u \in U$ için $[d(u), u] \in Z(R)$ veya $(d(u), u) \in Z(R)$ ise R halkası değişmelidir.

İspat : Her $u \in U$ için

$$[d(u), u] \in Z(R)$$

olsun. Bu durumda her $u \in U$ için

$$d(u)u - ud(u) \in Z(R)$$

dir. $d \neq 0$ olduğundan *Teorem 3.1.3.8.* uygulanarak R halkası değişmeli olur.

Şimdi de kabul edelim ki her $u \in U$ için

$$(d(u), u) \in Z(R)$$

olsun. Bu durumda her $u \in U$ için

$$d(u)u + ud(u) \in Z(R)$$

dir. $d \neq 0$ olduğundan *Teorem 3.1.3.8.* uygulanırsa R halkası değişmeli olur.

Sonuç 3.1.3.10. R değişmeli olmayan bir asal halka, U , R halkasının sıfırdan farklı bir sol ideali ve d , R halkası üzerinde tanımlı bir türev olmak üzere $a, b \in R$ için $F(x) = d(x) + ax + xb$ olsun. F , U üzerinde merkezileştirici dönüşüm ise $d(x) = [a, x]$ dir.

İspat : F , U üzerinde merkezileştirici dönüşüm olsun. Yani her $u \in U$ için

$$[d(u) + au + ub, u] \in Z(R)$$

dir. Bu ifade $Z(R)$ kümesinin R halkasının bir alt halkası olması ve Lie komütatör özellikleri kullanılarak düzenlenirse

$$(d(u) - [a, u])u - u(d(u) - [b, u]) \in Z(R)$$

elde edilir.

$d_0(u) = d(u) - [a, u]$ ve $d_1(u) = d(u) - [b, u]$ olarak tanımlansın. d bir türev olduğundan d_0 ve d_1 fonksiyonları da birer türevdir. O halde her $u \in U$ için

$$d_0(u)u - ud_1(u) \in Z(R)$$

dir. *Teorem 3.1.3.8.* uygulanırsa R değişmeli olmayan bir halka olduğundan $d_0 = 0$ elde edilir. Yani her $x \in R$ için $d(x) = [a, x]$ dir.

Sonuç 3.1.3.11. R bir asal halka, U , R halkasının sıfırdan farklı bir sol ideali ve $a, b \in R$ olsun. $F: R \rightarrow R$, $F(x) = ax + xb$ bir toplamsal dönüşüm olmak üzere her $u \in U$ için $[F(u), u] = 0$ ise $a \in Z(R)$ dir.

İspat : R halkası değişmeli ise $a \in Z(R)$ dir. R halkası değişmeli değilse *Sonuç 3.1.3.10.* uygulanarak $d = 0$ olduğu görülür. Yani her $u \in U$ için $[u, a] = 0$ dır. Bu ifadede u yerine $x \in R$ olmak üzere xu yazılıp $[u, a] = 0$ olması kullanılarak düzenlenirse her $x \in R$ için $[x, a]U = (0)$ bulunur. U kümesi R halkasının bir sol ideali olduğundan $RU \subset U$ dir. Böylece

$$[x, a]RU = (0)$$

elde edilir. R halkasının asal olması kullanılırsa $U = (0)$ ya da her $x \in R$ için $[x, a] = 0$ olur. $U \neq (0)$ olduğundan $a \in Z(R)$ dir.

3.2. Asal Halkalarda Genelleştirilmiş Türevler

Bu bölümde Aydın (2011) tarafından yapılmış olan “*A Note on Generalized Derivations of Prime Rings*” adlı çalışma incelenmiştir.

Tanım 3.2.1. (Bresar, 1991, p. 89) R bir halka, F, R halkası üzerinde bir toplamsal dönüşüm olsun. Her $x, y \in R$ için

$$F(xy) = F(x)y + xd(y)$$

olacak şekilde $d: R \rightarrow R$ türevi varsa F dönüşümüne bir *genelleştirilmiş türev* denir.

Lemma 3.2.2. R değişmeli olmayan bir asal halka, I, R halkasının bir ideali, d, R halkası üzerinde tanımlı bir türev olmak üzere F, d ile belirli bir genelleştirilmiş türev ve $a \in R$ olsun. $a \notin Z(R)$ ve her $x \in I$ için $[F(x), a] = 0$ ise her $x \in I$ için $F([x, a]) = 0$ dır.

İspat : Kabulümüzden $a \notin Z(R)$ olmak üzere her $x \in I$ için

$$[F(x), a] = 0 \tag{3.47}$$

dır. Bu ifadede x yerine $r \in R$ olmak üzere xr yazılıp (3.47) eşitliği kullanılarak düzenlenirse her $r \in R$ ve $x \in I$ için

$$F(x)[r, a] + [x, a]d(r) + x[d(r), a] = 0 \tag{3.48}$$

elde edilir. (3.48) eşitliğinde x yerine $y \in I$ olmak üzere xy yazılıp (3.48) eşitliği kullanılarak düzenlenirse her $x, y \in I$ ve $r \in R$ için

$$(F(x)y + xd(y) - xF(y))[r, a] + [x, a]yd(r) = 0 \tag{3.49}$$

bulunur. (3.49) eşitliğinde r yerine a yazılırsa her $x, y \in I$ için $[x, a]yd(a) = 0$ olur. Yani

$$[x, a]Rd(a) = (0)$$

dır. R halkasının asal olması kullanılırsa her $x \in I$ için $[x, a] = 0$ ya da $d(a) = 0$ elde edilir. Bu ise $a \in Z(R)$ ya da $d(a) = 0$ demektir. $a \notin Z(R)$ olduğundan

$$d(a) = 0$$

dır. (3.49) eşitliğinde x yerine $s \in R$ olmak üzere xs yazılıp F dönüşümünün tanımı ve Lie komütatör özellikleri kullanılarak düzenlenirse her $r, s \in R$ ve $x, y \in I$ için

$$(F(s)x + sd(x) - sF(x))y[r, a] + [s, a]xyd(r) = 0 \tag{3.50}$$

bulunur. (3.50) eşitliğinde s yerine a yazılırsa her $x, y \in I$ ve her $r \in R$ için

$$(F(a)x + ad(x) - aF(x))y[r, a] = 0 \quad (3.51)$$

elde edilir. R halkasının asal olması kullanılarak

$$F(a)x + ad(x) - aF(x) = 0, \forall x \in I \text{ ya da } [r, a] = 0, \forall r \in R$$

olur. $a \notin Z(R)$ olduğundan her $x \in R$ için

$$F(a)x + ad(x) - aF(x) = 0$$

dir. $x \in I$ olmak üzere $F(ax)$ ifadesi $F(a)x + ad(x) - aF(x) = 0$ olması kullanılarak düzenlenirse

$$\begin{aligned} F(ax) &= F(a)x + ad(x) \\ &= aF(x) - ad(x) + ad(x) = aF(x) \end{aligned}$$

olur. Yani her $x \in I$ için

$$F(ax) = aF(x) \quad (3.52)$$

dir. Öte yandan $F(xa)$ ifadesi incelenirse

$$F(xa) = F(x)a + xd(a)$$

bulunur. $d(a) = 0$ olması kullanılırsa her $x \in I$ için

$$F(xa) = F(x)a \quad (3.53)$$

dir. (3.52) ve (3.53) eşitlikleri birlikte düşünüldüğünde

$$F([x, a]) = F(xa) - F(ax) = F(x)a - aF(x) = [F(x), a]$$

bulunur. Yani her $x \in I$ için

$$F([x, a]) = [F(x), a] = 0$$

olur.

Lemma 3.2.3. R değişmeli olmayan bir asal halka, I , R halkasının bir ideali, d , R halkası üzerinde tanımlı bir türev olmak üzere F , d ile belirli bir genelleştirilmiş türev ve $a \in R$ olsun. $a \notin Z(R)$ ve her $x \in I$ için $F([x, a]) = 0$ ise her $x \in I$ için $[F(x), a] = 0$ dir.

İspat : Kabulden x yerine xa yazılıp F dönüşümünün tanımı kullanılarak düzenlenirse $F([x, a])a + [x, a]d(a) = 0$ olur. Bu eşitlikte $F([x, a]) = 0$ olması

kullanılarak düzenlenirse her $x \in I$ için

$$[x, a]d(a) = 0 \quad (3.54)$$

bulunur. (3.54) ifadesinde x yerine $y \in I$ olmak üzere yx yazılıp hipotez ve (3.54) eşitliği kullanılarak düzenlenirse her $x, y \in I$ için

$$[x, a]yd(a) = 0 \quad (3.55)$$

elde edilir. Yani

$$[x, a]Rd(a) = (0)$$

dır. R halkasının asal olması kullanılırsa her $x \in I$ için

$$[x, a] = 0 \text{ ya da } d(a) = 0$$

olur. $a \notin Z(R)$ olduğundan

$$d(a) = 0$$

dır. Hipotezde x yerine $y \in I$ olmak üzere xy yazılıp F dönüşümünün tanımı ve Lie komütatör özellikleri kullanılarak düzenlenirse her $x, y \in I$ için

$$[x, a]d(y) + F(x)[y, a] + x([d(y), a] + [y, d(a)])$$

olur. Son ifade $d(a) = 0$ olması kullanılarak düzenlenirse her $x, y \in I$ için

$$[x, a]d(y) + F(x)[y, a] + x[d(y), a] = 0 \quad (3.56)$$

bulunur. (3.56) eşitliğinde y yerine $z \in I$ olmak üzere yz yazılıp türev ve Lie komütatör özellikleri kullanılarak düzenlenirse her $x, y, z \in I$ için

$$(F(x)y + xd(y) - xF(y))[z, a] + [x, a]yd(z) = 0 \quad (3.57)$$

elde edilir. (3.57) ifadesinde x yerine xa yazılıp Lie komütatör özellikleri kullanılarak düzenlenirse

$$(F(ax)y + axd(y) - axF(y))[z, a] + [ax, a]yd(z) = 0$$

olur. Bu ifade (3.57) eşitliği kullanılarak düzenlenirse her $x, y, z \in I$ için

$$(F(ax) - aF(x))y[z, a] = 0 \quad (3.58)$$

bulunur. R halkasının asal olması kullanılırsa

$$F(ax) = aF(x), \forall x \in I \text{ ya da } [z, a] = 0, \forall z \in R$$

dir. $a \notin Z(R)$ olduğundan her $x \in I$ için

$$F(ax) = aF(x) \quad (3.59)$$

bulunur. (3.59) ifadesi F dönüşümünün tanımı ve $d(a) = 0$ olması kullanılarak düzenlenirse her $x \in I$ için

$$F(xa) = F(x)a \quad (3.60)$$

elde edilir. $[F(x), a]$ ifadesi (3.59) ve (3.60) eşitlikleri kullanılarak düzenlenirse

$$[F(x), a] = F(x)a - aF(x) = F(xa) - F(ax) = F(xa - ax) = F([x, a])$$

olur. Yani $[F(x), a] = F([x, a])$ dir. Hipotezden her $x \in I$ için $[F(x), a] = 0$ bulunur.

Teorem 3.2.4. R değişmeli olmayan bir asal halka, I , R halkasının bir ideali, d , R halkası üzerinde tanımlı bir türev olmak üzere F , d ile belirli bir genelleştirilmiş türev ve $a \in R$ olsun. $a \notin Z(R)$ olmak üzere her $x \in I$ için $F([x, a]) = 0$ ya da $[F(x), a] = 0$ ise her $x \in I$ için $d(x) = \lambda[x, a]$ olacak şekilde en az bir $\lambda \in C$ vardır.

İspat : $a \notin Z(R)$ olmak üzere her $x \in I$ için $[F(x), a] = 0$ olsun. *Lemma 3.2.2.* uygulanırsa her $x \in I$ için

$$F([x, a]) = 0 \text{ ya da } d(a) = 0$$

bulunur. (3.49) eşitliğinde y yerine $[a, y]$ yazılarak elde edilen ifade (3.49) eşitliği ve Lie komütatör özellikleri kullanılarak düzenlenirse

$$-(F(x)[y, a] + x[d(y), a])[r, a] + [x, a][a, y]d(r) = 0$$

elde edilir. Elde edilen ifade (3.56) eşitliği kullanılarak düzenlenirse

$$[a, x](d(y)[r, a] - [y, a]d(r)) = 0$$

bulunur. $h: R \rightarrow R$, $h(x) = [a, x]$ olarak tanımlanan bir iç türev fonksiyonu olmak üzere $[a, x](d(y)[r, a] - [y, a]d(r)) = 0$ ifadesi bu iç türev fonksiyonu kullanılarak düzenlenirse

$$h(x)(d(y)[r, a] - [y, a]d(r)) = 0$$

olur. Bu ifadeye *Lemma 3.1.1.1.* uygulanırsa $a \notin Z(R)$ olduğundan her $y \in I$ ve $r \in R$ için

$$d(y)[r, a] = [y, a]d(r) \quad (3.61)$$

elde edilir. (3.61) r yerine $s \in R$ olmak üzere sr yazılarak elde edilen ifade (3.61) eşitliği, türev ve Lie komütatör özellikleri kullanılarak düzenlenirse her $r, s \in R$ ve $y \in I$ için

$$d(y)r[s, a] = [y, a]rd(s) \quad (3.62)$$

elde edilir. (3.62) ifadesinde y yerine $z \in R$ olmak üzere yz yazılarak elde edilen ifade (3.62) eşitliği, türev ve Lie komütatör özellikleri kullanılarak düzenlenirse

$$d(z)r[s, a] = [z, a]rd(s) \quad (3.63)$$

bulunur. $g: R \rightarrow R$, $g(x) = [x, a]$ olarak tanımlanan bir iç türev olmak üzere (3.63) ifadesi g iç türev fonksiyonu kullanılarak düzenlenirse $r, s \in R$ için

$$d(z)rg(s) = g(z)rd(s)$$

elde edilir. $g = 0$ ise $a \in Z(R)$ dir. $a \notin Z(R)$ olduğundan $g \neq 0$ dir. $g \neq 0$ olduğundan $r, s \in R$ için $d(z)rg(s) = g(z)rd(s)$ ifadesine *Sonuç 2.70.* uygulanarak

$$d(x) = \lambda[x, a]$$

olacak şekilde en az bir $\lambda \in C$ olduğu görülür.

BÖLÜM 4

YARI-ASAL HALKALARDA ÇARPIMSAL (GENELLEŞTİRİLMİŞ)-TÜREVLER

Bu bölümde Dhara ve Ali (2013) tarafından yapılan “*On Multiplicative (generalized)-derivations in Prime and Semiprime Rings*” adlı çalışma incelenmiştir.

Tanım 4.1. (Dhara ve Ali, 2013, p. 66) R bir halka, F , R halkası üzerinde tanımlı bir dönüşüm olsun. Her $a, b \in R$ için

$$F(ab) = F(a)b + ag(b)$$

olacak şekilde $d: R \rightarrow R$ dönüşümü varsa F dönüşümüne çarpımsal (genelleştirilmiş)-türev denir.

Bu bölüm boyunca R bir yarı-asal halka, T , R halkasının sıfırdan farklı bir sol ideali ve g , R halkası üzerinde tanımlı bir dönüşüm olmak üzere F , R halkası üzerinde g ile belirli bir çarpımsal (genelleştirilmiş)-türev olarak alınmıştır.

Teorem 4.2. Her $a, b \in T$ için $F(ab) \pm ab = 0$ ise $Tg(T) = (0)$ dır. Üstelik her $a, b \in T$ için $F(ab) = F(a)b$ ve her $a \in T$ için $[F(a), a] = 0$ dır.

İspat : Kabul edelim ki her $a, b \in T$ için

$$F(ab) - ab = 0 \tag{4.1}$$

olsun. (4.1) eşitliğinde b yerine $c \in T$ olmak üzere bc yazılırsa her $a, b, c \in T$ için

$$F(abc) - abc = 0$$

olur. Bu eşitlik F dönüşümünün tanımı kullanılarak düzenlenirse her $a, b, c \in T$ için

$$(F(ab) - ab)c + abg(c) = 0$$

bulunur. Son eşitlik (4.1) ifadesi kullanılarak düzenlenirse her $a, b, c \in T$ için

$$abg(c) = 0$$

elde edilir. Elde edilen ifadede b yerine $r \in R$ olmak üzere $g(c)ra$ yazılırsa her $r \in R$ için $ag(c)rag(c) = 0$ elde edilir. Yani

$$ag(c)Rag(c) = (0)$$

dır. R halkasının yarı-asal olması kullanılırsa her $a, c \in T$ için $ag(c) = 0$ olur. Bu ise

$$Tg(T) = (0)$$

demektir. Buna göre, F dönüşümünün tanımı düzenlenirse her $a, b \in T$ için

$$F(ab) = F(a)b$$

elde edilir. (4.1) eşitliği son ifade kullanılarak düzenlenirse her $a, b \in T$ için

$$F(a)b - ab = 0$$

olur. Yani her $a, b \in T$ için

$$(F(a) - a)b = 0$$

olur. Bu eşitlikte b yerine $r \in R$ olmak üzere rb yazılırsa $(F(a) - a)rb = 0$ elde edilir. Elde edilen bu ifade soldan b , sağdan $F(a) - a$ ile çarpılırsa her $r \in R$ ve $a, b \in T$ için $b(F(a) - a)rb(F(a) - a) = 0$ bulunur. Bu ise $b(F(a) - a)Rb(F(a) - a) = (0)$ demektir. R halkasının yarı-asal olması kullanılarak her $a, b \in R$ için

$$b(F(a) - a) = 0$$

bulunur. Son iki eşitlik taraf tarafa çıkarılır ve Lie komütatör özellikleri kullanılarak düzenlenirse her $a, b \in T$ için $[F(a), b] - [a, b] = 0$ elde edilir. Bu eşitlikte b yerine a yazılırsa her $a \in T$ için $[F(a), a] = 0$ olur.

Benzer olarak her $a, b \in T$ için $F(ab) + ab = 0$ durumunda da aynı sonuçlara ulaşılır.

Sonuç 4.3. Her $a, b \in R$ için $F(ab) \pm ab = 0$ ise $g = 0$ ve her $a \in R$ için $F(a) = \pm a$ dir.

Teorem 4.4. Her $a, b \in T$ için $F(ab) \pm ba = 0$ ise $T[T, T] = (0)$ ve $Tg(T) = (0)$ dir. Üstelik her $a, b \in T$ için $F(ab) = F(a)b$ ve her $a \in T$ için $[F(a), a] = 0$ dir.

İspat : Kabul edelim ki her $a, b \in T$ için

$$F(ab) - ba = 0 \tag{4.2}$$

olsun. (4.2) ifadesinde b yerine $c \in T$ olmak üzere bc yazılırsa her $a, b, c \in T$ için

$$F(abc) - bca = 0$$

olur. Bu ifade F dönüşümünün tanımı kullanılarak düzenlenirse her $a, b, c \in T$ için

$$(F(ab) - ba)c + b[a, c] + abg(c) = 0$$

bulunur. Yukarıdaki eşitlik (4.2) eşitliği kullanılarak düzenlenirse her $a, b, c \in T$ için

$$b[a, c] + abg(c) = 0 \tag{4.3}$$

elde edilir. (4.3) eşitliğinde c yerine a yazılırsa

$$abg(a) = 0$$

olur. Bu ifadede b yerine $r \in R$ olmak üzere $g(a)ra$ yazılırsa her $a \in T$ için $ag(a)rag(a) = 0$ bulunur. Bu ise

$$ag(a)Rg(a)a = (0)$$

demektir. R halkasının yarı-asal olması kullanılırsa her $a \in T$ için

$$ag(a) = 0$$

bulunur. (4.3) eşitliğinde c yerine b yazılıp son eşitlik kullanılarak düzenlenirse

$$b[a, b] = 0$$

elde edilir. Bu eşitlik a yerine ca yazılıp $b[a, b] = 0$ eşitliği ve Lie komütatör özellikleri kullanılarak tekrar düzenlenirse her $a, b, c \in T$ için $bc[a, b] = 0$ olur. Son eşitlik soldan a ile çarpılırsa

$$abc[a, b] = 0$$

bulunur. $bc[a, b] = 0$ eşitliğinde c yerine ac yazılırsa

$$bac[a, b] = 0$$

olur. $abc[a, b] = 0$ ve $bac[a, b] = 0$ ifadeleri taraf tarafa çıkarılıp Lie komütatör özellikleri kullanılarak düzenlenirse

$$[a, b]c[a, b] = 0$$

elde edilir. Bu eşitlikte c yerine $r \in R$ olmak üzere rc yazılır ve elde edilen eşitlik soldan c ile çarpılırsa her $a, b, c \in T$ ve $r \in R$ için $c[a, b]rc[a, b] = 0$ bulunur. Yani

$$c[a, b]Rc[a, b] = (0)$$

dır. R halkasının yarı-asal olması kullanılırsa her $a, b, c \in T$ için $c[a, b] = 0$ elde edilir. Bu ise

$$T[T, T] = (0)$$

demektir. (4.3) ifadesi bu sonuç kullanılarak düzenlenirse her $a, b, c \in T$ için $abg(c) = 0$ olur. Bu eşitlikte b yerine $r \in R$ olmak üzere $g(c)ra$ yazılırsa her $a, c \in T$ ve $r \in R$ için $ag(c)rag(c) = 0$ bulunur. Yani

$$ag(c)Rag(c) = (0)$$

dır. R halkasının yarı-asal olması kullanılırsa her $a, c \in T$ için $ag(c) = 0$ elde edilir. Bu ise

$$Tg(T) = (0)$$

demektir. F dönüşümünün tanımı $Tg(T) = (0)$ olması kullanılarak düzenlenirse her $a, b \in T$ için

$$F(ab) = F(a)b$$

bulunur. (4.2) eşitliği her $a, b \in T$ için $F(ab) = F(a)b$ olması kullanılarak düzenlenirse her $a, b \in T$ için

$$F(a)b - ba = 0 \quad (4.4)$$

olur. (4.4) ifadesinde b yerine ab yazılırsa her $a, b \in T$ için

$$F(a)ab - aba = 0 \quad (4.5)$$

elde edilir. (4.4) eşitliği soldan a ile çarpılırsa her $a, b \in T$ için

$$aF(a)b - aba = 0$$

olur. Bu eşitlik ve (4.5) ifadesi taraf tarafa çıkarılıp Lie komütatör özellikleri kullanılarak tekrar düzenlenirse her $a, b \in T$ için $[F(a), a]b = 0$ bulunur. Son ifadede b yerine $r \in R$ olmak üzere ra yazılırsa $[F(a), a]ra = 0$ olur. Bu ise her $a, b \in T$ için

$$[F(a), a]Ra = (0) \quad (4.6)$$

demektir. (4.6) eşitliği sağdan $F(a) \in R$ ile çarpılırsa

$$[F(a), a]RaF(a) = (0) \quad (4.7)$$

olur. (4.6) eşitliği $RF(a) \subset R$ olması kullanılarak düzenlendiğinde

$$[F(a), a]RF(a)a = (0)$$

olur. Son eşitlik ve (4.7) ifadesi taraf tarafa çıkarılıp Lie komütatör özellikleri kullanılarak düzenlenirse her $a \in T$ için

$$[F(a), a]R[F(a), a] = (0)$$

elde edilir. R halkasının yarı-asal olması kullanılırsa her $a \in T$ için $[F(a), a] = 0$ bulunur.

Benzer olarak her $a, b \in T$ için $F(ab) + ba = 0$ durumunda da aynı sonuçlar elde edilir.

Sonuç 4.5. Her $a, b \in R$ için $F(ab) \pm ba = 0$ ise $g = 0$ dır. Üstelik R halkası değişmelidir ve her $a \in R$ için $F(a) = \pm a$ dir.

Teorem 4.6. Her $a, b \in T$ için $F(a)F(b) \pm ab = 0$ ise $Tg(T) = (0)$ dır. Üstelik her $a, b \in T$ için $F(ab) = F(a)b$ ve her $a \in T$ için $T[F(a), a] = (0)$ dır.

İspat : Kabul edelim ki her $a, b \in T$ için

$$F(a)F(b) - ab = 0 \quad (4.8)$$

olsun. (4.8) eşitliğinde b yerine $c \in T$ olmak üzere bc yazılırsa her $a, b, c \in T$ için

$$\begin{aligned} 0 &= F(a)F(bc) - abc \\ &= F(a)(F(b)c + bg(c)) - abc \\ &= (F(a)F(b) - ab)c + F(a)bg(c) \end{aligned}$$

olur. Yani her $a, b, c \in T$ için

$$(F(a)F(b) - ab)c + F(a)bg(c) = 0$$

dır. Son ifade (4.8) eşitliği kullanılarak yeniden düzenlenirse her $a, b, c \in T$ için

$$F(a)bg(c) = 0$$

elde edilir. Elde edilen bu eşitlikte a yerine $d \in T$ olmak üzere da yazılır ve F dönüşümünün tanımı kullanılarak düzenlenirse

$$0 = F(da)bg(c) = (F(d)a + dg(a))bg(c) = F(d)abg(c) + dg(a)bg(c)$$

bulunur. Yani her $a, b, c \in T$ için

$$F(d)abg(c) + dg(a)bg(c) = 0$$

dır. Bu ifade, T kümesinin R halkasının bir sol ideali olması ve her $a, b, c \in T$ için $F(a)bg(c) = 0$ olması kullanılarak düzenlenirse her $a, b, c, d \in T$ için $dg(a)bg(c) = 0$ elde edilir. Son eşitlikte b yerine $r \in R$ olmak üzere rb yazılırsa her $a, b, c, d \in T$ için $dg(a)rbg(c) = 0$ bulunur. Yani her $r \in R$ için

$$Tg(T)RTg(T) = (0)$$

dır. R halkasının yarı-asal olması kullanılırsa

$$Tg(T) = (0)$$

olur. F dönüşümünün tanımı bu sonuç kullanılarak tekrar düzenlenirse her $a, b \in T$ için

$$F(ab) = F(a)b$$

elde edilir. (4.8) eşitliğinde a yerine ab yazılır ve $F(ab) = F(a)b$ eşitliği kullanılarak düzenlenirse her $a, b \in T$ için

$$F(a)bF(b) - ab^2 = 0 \tag{4.9}$$

bulunur. Öte yandan (4.8) eşitliği sağdan b ile çarpılırsa her $a, b \in T$ için

$$F(a)F(b)b - ab^2 = 0$$

olur. Yukarıdaki ifade ve (4.9) eşitliği taraf tarafa çıkarılıp Lie komütatör özellikleri kullanılarak düzenlenirse her $a, b \in T$ için $F(a)[F(b), b] = 0$ elde edilir. Elde edilen bu eşitlikte a yerine $c \in T$ olmak üzere ac yazılır ve $F(ab) = F(a)b$ sonucu kullanılarak

düzenlenirse $F(a)c[F(b), b] = 0$ bulunur. Bu eşitlikte c yerine ac yazılırsa

$$F(a)ac[F(b), b] = 0$$

olur. Öte yandan $F(a)c[F(b), b] = 0$ eşitliği soldan a ile çarpılırsa

$$aF(a)c[F(b), b] = 0$$

olduğu görülür. $F(a)ac[F(b), b] = 0$ ve $aF(a)c[F(b), b] = 0$ eşitlikleri taraf tarafa çıkarılıp Lie komütatör özellikleri kullanılarak düzenlenirse $[F(a), a]c[F(b), b] = 0$ bulunur. T, R halkasının bir sol ideali olduğundan $r \in R$ için $[F(a), a]rc[F(b), b] = 0$ dır. Bu eşitlik soldan c ile çarpılıp b yerine a yazılırsa her $r \in R$ ve $a, c \in T$ için $c[F(a), a]rc[F(a), a] = 0$ elde edilir. Yani $a, c \in T$ için

$$c[F(a), a]Rc[F(a), a] = (0)$$

dır. R halkasının yarı-asal olması kullanılırsa her $a, c \in T$ için $c[F(a), a] = 0$ olur. Bu ise her $a \in T$ için

$$T[F(a), a] = (0)$$

demektir.

Benzer olarak her $a, b \in T$ için $F(a)F(b) + ab = 0$ durumunda da aynı sonuçlar bulunur.

Sonuç 4.7. Her $a, b \in R$ için $F(a)F(b) \pm ab = 0$ ise $g = 0$ dır. Üstelik her $a, b \in R$ için $F(ab) = F(a)b$ ve her $a \in R$ için $[F(a), a] = 0$ dır.

Teorem 4.8. Her $a, b \in T$ için $F(a)F(b) \pm ba = 0$ ise $Tg(T) = (0)$ ve $T[T, T] = (0)$ dır. Üstelik her $a, b \in T$ için $F(ab) = F(a)b$ ve her $a \in T$ için $T[F(a), a] = (0)$ dır.

İspat : Kabul edelim ki her $a, b \in T$ için

$$F(a)F(b) - ba = 0 \tag{4.10}$$

olsun. (4.10) eşitliğinde b yerine ba yazılıp F dönüşümünün tanımı kullanılarak düzenlenirse her $a, b, c \in T$ için

$$\begin{aligned} 0 &= F(a)F(ba) - ba^2 = F(a)(F(b)a + bg(a)) - ba^2 \\ &= (F(a)F(b) - ba)a + F(a)bg(a) \end{aligned}$$

elde edilir. Yani her $a, b, c \in T$ için

$$(F(a)F(b) - ba)a + F(a)bg(a) = 0$$

dır. Bu ifade (4.10) eşitliği kullanılarak düzenlenirse her $a, b \in T$ için $F(a)bg(a) = 0$ elde edilir. Elde edilen bu eşitlik $c \in T$ olmak üzere soldan $F(c) \in R$ ile çarpılıp (4.10) ifadesi kullanılarak düzenlenirse her $a, b, c \in T$ için $acb(c) = 0$ bulunur. Bu ise

$$aTRTg(a) = (0)$$

demektir.

$\mathcal{P} = \{P_i | i \in I\}$ kümesi R halkasının asal ideallerinin bir ailesi olsun. R bir yarı-asal halka olduğundan

$$\bigcap P_i = (0)$$

dır. O halde

$$aTRTg(a) = (0) = \bigcap P_i$$

yazılır. Böylece $i \in I$ olmak üzere $aTRTg(a) \subset P_i$ olacak şekilde en az bir $P_i \in \mathcal{P}$ vardır.

P_i kümesinin R halkasının bir asal ideali olması kullanılırsa

$$aT \subset P_i \text{ ya da } Tg(a) \subset P_i$$

olur. Bu iki ifade birlikte düşünülürse her $i \in I$ için $aTg(a) \subset P_i$ elde edilir. O halde $aTg(a) \subset \bigcap P_i$ dir. $\bigcap P_i = (0)$ olduğundan

$$aTg(a) = (0)$$

dır. T , R halkasının bir sol ideali olduğundan $aRTg(a) = (0)$ olur. $\bigcap P_i = (0)$ ve

$$aRTg(a) = (0) \text{ olması kullanılarak } i \in I \text{ olmak üzere}$$

$$aRTg(a) \subset P_i$$

koşulu sağlanır. P_i kümesinin R halkasının bir asal ideali olması kullanılırsa

$$a \in P_i \text{ ya da } Tg(a) \subset P_i$$

olur. Bu iki ifade birlikte düşünülürse $a \in T$ olduğu için her $i \in I$ için $ag(a) \in P_i$

bulunur. Böylece $ag(a) \in \bigcap P_i$ dir. $\bigcap P_i = (0)$ olması kullanılarak her $a \in T$ için

$$ag(a) = 0$$

olur. (4.10) ifadesinde b yerine $c \in T$ olmak üzere bc yazılır ve F dönüşümünün tanımı kullanılarak düzenlenirse

$$\begin{aligned} 0 &= F(a)F(bc) - bca = F(a)(F(b)c + bg(c)) - bca \\ &= F(a)F(b)c + F(a)bg(c) - bca \\ &= (F(a)F(b) - ba)c + b[a, c] + F(a)bg(c) \end{aligned}$$

elde edilir. Yani

$$(F(a)F(b) - ba)c + b[a, c] + F(a)bg(c) = 0$$

dır. Bu eşitlik (4.10) ifadesi kullanılarak düzenlenirse her $a, b, c \in T$ için

$$b[a, c] + F(a)bg(c) = 0 \tag{4.11}$$

bulunur. (4.11) eşitliğinde c yerine b yazılıp her $a \in T$ için $ag(a) = 0$ olması kullanılarak düzenlenirse her $a, b \in T$ için $b[a, b] = 0$ elde edilir. Son eşitlikte a yerine $c \in T$ olmak üzere ca yazılıp F dönüşümünün tanımı ve Lie komütatör özellikleri kullanılarak düzenlenirse her $a, b, c \in T$ için

$$bc[a, b] = 0$$

bulunur. Bu ifade soldan a ile çarpılırsa

$$abc[a, b] = 0$$

elde edilir. $bc[a, b] = 0$ eşitliğinde c yerine ac yazılırsa

$$bac[a, b] = 0$$

olur. $abc[a, b] = 0$ ve $bac[a, b] = 0$ eşitliklerinden $[a, b]c[a, b] = 0$ bulunur. Son eşitlikte c yerine $r \in R$ olmak üzere rc yazılıp soldan c ile çarpılırsa her $a, b, c \in T$ ve $r \in R$ için $c[a, b]rc[a, b] = 0$ elde edilir. Yani her $a, b, c \in T$ için

$$c[a, b]Rc[a, b] = (0)$$

dir. R halkasının yarı-asal olması kullanılırsa her $a, b, c \in T$ için $c[a, b] = 0$ bulunur. Bu ise

$$T[T, T] = (0)$$

demektir. Bu sonuç kullanılarak (4.11) ifadesi düzenlenirse her $a, b, c \in T$ için $F(a)bg(c) = 0$ elde edilir. Elde edilen bu eşitlikte a yerine ac yazılıp F dönüşümünün tanımı kullanılarak düzenlenirse

$$0 = F(ac)bg(c) = (F(a)c + ag(c))bg(c) = F(a)cbg(c) + ag(c)bg(c)$$

bulunur. Bu ifade her $a, b, c \in T$ için $F(a)bg(c) = 0$ olması ve T kümesinin, R halkasının bir sol ideali olması kullanılarak düzenlenirse her $a, b, c \in T$ için $ag(c)bg(c) = 0$ bulunur. Son ifadede b yerine $r \in R$ olmak üzere ra yazılırsa $ag(c)rag(c) = 0$ elde edilir. Bu ise

$$ag(c)Rag(c) = (0)$$

demektir. R halkasının yarı-asal halka olması kullanılırsa her $a, c \in T$ için $ag(c) = 0$ olur. Yani

$$Tg(T) = (0)$$

dir. F dönüşümünün tanımı bu sonuç kullanılarak düzenlenirse her $a, b \in T$ için

$$F(ab) = F(a)b$$

olduğu bulunur.

(4.10) eşitliğinde a yerine ab yazılıp $F(ab) = F(a)b$ ifadesi kullanılarak düzenlenirse her $a, b \in T$ için

$$F(a)bF(b) - bab = 0 \quad (4.12)$$

elde edilir. (4.10) ifadesi sağdan b ile çarpılırsa her $a, b \in T$ için

$$F(a)F(b)b - bab = 0$$

olur. Bu ifade (4.12) ifadesi kullanılıp düzenlenirse her $a, b \in T$ için

$$F(a)[F(b), b] = 0$$

elde edilir. Elde edilen ifadede a yerine $c \in T$ olmak üzere ac yazılıp $F(ab) = F(a)b$ ifadesi kullanılarak düzenlenirse her $a, b \in T$ için

$$F(a)c[F(b), b] = 0$$

olur. Son eşitlikte c yerine ac yazılıp F dönüşümünün tanımı kullanılarak düzenlenirse

$$F(a)ac[F(b), b] = 0$$

elde edilir. Öte yandan $F(a)c[F(b), b] = 0$ eşitliği soldan a ile çarpılırsa

$$aF(a)c[F(b), b] = 0$$

bulunur. $F(a)ac[F(b), b] = 0$ ve $aF(a)c[F(b), b] = 0$ eşitlikleri birlikte kullanılıp düzenlenirse $[F(a), a]c[F(b), b] = 0$ elde edilir. T kümesi, R halkasının bir sol ideali olduğundan $r \in R$ için $[F(a), a]rc[F(b), b] = 0$ olur. Bu eşitlik soldan c ile çarpılıp b yerine a yazılırsa her $r \in R$ ve her $a, c \in T$ için $c[F(a), a]rc[F(a), a] = 0$ bulunur. Yani her $a, c \in T$ için

$$c[F(a), a]Rc[F(a), a] = (0)$$

dır. R halkasının yarı-asal olması kullanılarak her $a, c \in T$ için $c[F(a), a] = 0$ bulunur. Yani her $a \in T$ için

$$T[F(a), a] = (0)$$

dır.

Benzer şekilde her $a, b \in T$ için $F(a)F(b) + ba = 0$ olması durumunda da aynı sonuçlar elde edilir.

Sonuç 4.9. Her $a, b \in R$ için $F(a)F(b) \pm ba = 0$ ise $g = 0$ ve R halkası değişmelidir. Üstelik her $a, b \in R$ için $F(ab) = F(a)b$ ve her $a \in T$ için $[F(a), a]=0$ dır.

Teorem 4.10. Her $a, b \in T$ için $F(ab) \pm ab \in Z(R)$ ise her $a, b \in T$ için $T[g(a), a] = (0)$ dır.

İspat : Kabul edelim ki her $a, b \in T$ için

$$F(ab) - ab \in Z(R) \quad (4.13)$$

olsun. (4.13) ifadesinde b yerine $c \in T$ olmak üzere bc yazılırsa

$$F(abc) - abc = F(ab)c + abg(c) - abc = (F(ab) - ab)c + abg(c) \in Z(R)$$

elde edilir. Yani her $a, b, c \in T$ için

$$(F(ab) - ab)c + abg(c) \in Z(R)$$

dir. Son ifade ve (4.13) eşitliği birlikte düşünülürse her $a, b, c \in T$ için

$$[abg(c), c] = 0 \quad (4.14)$$

bulunur. (4.14) ifadesinde a yerine $r \in R$ olmak üzere ra yazılır ve Lie komütatör özellikleri kullanılarak düzenlenirse

$$0 = [r abg(c), c] = r[abg(c), c] + [r, c]abg(c)$$

elde edilir. Son eşitlik (4.14) ifadesi kullanılarak düzenlenirse her $a, b, c \in T$

$$[r, c]abg(c) = 0$$

olur. Bu ifadede a yerine $s \in R$ olmak üzere $g(c)sa$ yazılırsa her $a, b, c \in T$ ve $s \in R$ için

$$[r, c]g(c)sabg(c) = 0 \quad (4.15)$$

elde edilir. (4.15) eşitliğinde a ve b elemanları yer değiştirilirse her $a, b, c \in T$ ve her $s \in R$ için

$$[r, c]g(c)sbag(c) = 0$$

elde edilir. Son eşitlik ve (4.15) ifadesi birlikte düzenlenirse her $a, b, c \in T$ ve $r \in R$ için

$[r, c]g(c)R[a, b]g(c) = (0)$ bulunur. Bu eşitlikte r yerine a , b yerine c yazılırsa

$$[a, c]g(c)R[a, c]g(c) = (0)$$

olur. R halkasının yarı-asal olması kullanılarak her $a, c \in T$ için

$$[a, c]g(c) = 0 \quad (4.16)$$

elde edilir. (4.16) ifadesi sağdan c ile çarpılırsa her $a, b, c \in T$ için

$$[a, c]g(c)c = 0 \quad (4.17)$$

dir. (4.16) ifadesinde a yerine ac yazılıp $[a, c]g(c)c = 0$ ifadesi ve Lie komütatör

özellikleri kullanılarak düzenlenirse

$$0 = [ac, g(c)] = [a, c]cg(c)$$

bulunur. Yani her $a, c \in T$ için

$$[a, c]cg(c) = 0$$

dır. Bu ifade ve (4.17) eşitliği birlikte kullanılıp düzenlenirse her $a, c \in T$ için

$$[a, c][g(c), c] = 0 \tag{4.18}$$

elde edilir. Bu eşitlikte a yerine $g(c)a$ yazılıp $[a, c][g(c), c] = 0$ ifadesi ve Lie komütatör özellikleri kullanılarak düzenlenirse

$$0 = [g(c)a, c][g(c), c] = [g(c), c]a[g(c), c] + g(c)[a, c][g(c), c]$$

bulunur. Son eşitlik (4.18) ifadesi kullanılarak düzenlenirse $[g(c), c]a[g(c), c] = 0$ elde edilir. Bu ifade soldan $b \in T$ ile çarpılır ve a yerine $r \in R$ olmak üzere ra yazılıp düzenlenirse her $a, b, c \in T$ ve $r \in R$ için $b[g(c), c]ra[g(c), c] = 0$ elde edilir. Bu ise her $c \in T$ için

$$T[g(c), c]RL[g(c), c] = (0)$$

demektir. R halkasının yarı-asal olması kullanılırsa her $c \in T$ için

$$T[g(c), c] = (0)$$

elde edilir.

Benzer şekilde her $a, b \in T$ için $F(ab) + ab \in Z(R)$ olması durumunda da aynı sonuçlar bulunur.

Sonuç 4.11. Her $a, b \in R$ için $F(ab) \pm ab \in Z(R)$ ise her $a \in R$ için $[g(a), a] = 0$ dır.

Teorem 4.12. Her $a, b \in T$ için $F(ab) \pm ba \in Z(R)$ ise her $a \in T$ için $a[a, T] \subseteq Z(R)$ ve her $a \in T$ için $T[g(a), a] = (0)$ dır.

İspat : Kabul edelim ki her $a, b \in T$ için

$$F(ab) - ba \in Z(R) \tag{4.19}$$

olsun. (4.19) ifadesinde a yerine ab yazılırsa her $a, b, c \in T$ için

$$F(ab^2) - bab \in Z(R)$$

elde edilir. Öte yandan (4.19) ifadesinde b yerine b^2 yazılırsa

$$F(ab^2) - b^2 a \in Z(R)$$

bulunur. $Z(R)$ kümesinin R halkasının bir altkalkası olması kullanılarak $F(ab^2) - bab \in Z(R)$ ve $F(ab^2) - b^2 a \in Z(R)$ ifadeleri taraf tarafa çıkarılırsa

$$F(ab^2) - bab - (F(ab^2) - b^2 a) \in Z(R) \quad (4.20)$$

olur. (4.20) ifadesi Lie komütatör özellikleri kullanılarak düzenlenirse her $a, b \in T$ için $b[b, a] \in Z(R)$ elde edilir. Bu ise her $a \in T$ için

$$a[a, T] \subseteq Z(R)$$

demektir. (4.20) ifadesinde b yerine $c \in T$ olmak üzere bc yazılıp F dönüşümünün tanımı ve Lie komütatör özellikleri kullanılarak düzenlenirse

$$F(abc) - bca = F(ab)c + bag(c) - bca = (F(ab) - ba)c + b[a, c] + abg(c)$$

elde edilir. Elde edilen ifade Lie komütatör özellikleri kullanılarak düzenlenirse her $a, b, c \in T$ için

$$(F(ab) - ba)c + b[a, c] + abg(c) \in Z(R)$$

olur. Böylece her $c \in T$ için

$$[(F(ab) - ba)c + b[a, c] + abg(c), c] = 0$$

elde edilir. Bu ifade (4.19) ifadesi kullanılarak düzenlenirse her $a, b, c \in T$ için

$$[b[a, c], c] + [abg(c), c] = 0 \quad (4.21)$$

bulunur. (4.21) ifadesinde a yerine ac yazılıp Lie komütatör özellikleri kullanılarak düzenlenirse her $a, b, c \in T$ için

$$[b[a, c], c]c + [abcg(c), c] = 0 \quad (4.22)$$

elde edilir. Öte yandan (4.21) eşitliği sağdan c ile çarpılıp (4.22) ifadesi kullanılarak düzenlenirse her $a, b, c \in T$ için

$$[a[bg(c), c], c] = 0$$

bulunur. Bu ifadede a yerine $r \in R$ olmak üzere ra yazılıp (4.22) eşitliği kullanılarak düzenlenirse

$$[r, c]a[bg(a), c] = 0$$

elde edilir. Özel olarak $r = bg(c)$ alınırsa her $a, b, c \in T$ için

$$[bg(c), c]a[bg(a), c] = 0$$

bulunur. Bu eşitlikte a yerine $r \in R$ olmak üzere ra yazılır ve soldan a elemanı ile çarpılırsa her $a, b, c \in T$ ve $r \in R$ için $a[bg(c), c]ra[bg(a), c] = 0$ elde edilir. Yani her $a, b, c \in T$ için

$$a[bg(c), c]Ra[bg(a), c] = (0)$$

dır. R halkasının yarı-asal olması kullanılırsa her $a, b, c \in T$ için $a[bg(c), c] = 0$ bulunur. Bu eşitlikte b yerine $g(c)b$ yazılıp Lie komütatör özellikleri kullanılarak düzenlenirse

$$a[g(c)bg(c), c] = 0 \quad (4.23)$$

elde edilir. Bu ise

$$a(g(c)bg(c)c - cg(c)bg(c)) = 0 \quad (4.24)$$

demektir. (4.24) ifadesinde b yerine $d \in T$ olmak üzere $bg(c)d$ yazılırsa

$$a(g(c)bg(c)dg(c)c - cg(c)bg(c)dg(c)) = 0$$

bulunur. Bu ifade (4.24) eşitliği kullanılarak düzenlenirse

$$a(g(c)bcg(c)dg(c) - g(c)bg(c)cdg(c)) = 0$$

olur. Lie komütatör özellikleri kullanılarak düzenlenirse her $a, b, c, d \in T$ için

$$ag(c)b[g(c), c]dg(c) = 0 \quad (4.25)$$

elde edilir. (4.25) eşitliğinde b yerine cb , d yerine dc yazılırsa

$$ag(c)cb[g(c), c]dcg(c) = 0$$

olur. Öte yandan (4.25) ifadesinde a yerine ac yazılıp sağdan c ile çarpılırsa

$$acg(c)b[g(c), c]dg(c)c = 0$$

bulunur. $ag(c)cb[g(c), c]dcg(c) = 0$ ve $acg(c)b[g(c), c]dg(c)c = 0$ eşitlikleri birlikte kullanılarak her $a, b, c, d \in T$ için $a[g(c), c]b[g(c), c]d[g(c), c] = 0$ elde edilir. Bu ise

$$T[g(c), c]T[g(c), c]T[g(c), c] = (0)$$

demektir. Yani $(T[g(c), c])^3 = (0)$ olur. R halkasının yarı-asal olması kullanılarak her $c \in L$ için

$$T[g(c), c] = (0)$$

bulunur.

Benzer olarak her $a, b \in T$ için $F(ab) + ba \in Z(R)$ olması durumunda da aynı

sonuçlara ulaşılır.

Sonuç 4.13. Her $a, b \in R$ için $F(ab) \pm ba \in Z(R)$ ise her $a \in R$ için $a[a, R] \subseteq Z(R)$ ve her $a \in R$ için $[g(a), a] = 0$ dır.

Teorem 4.14. Her $a, b \in T$ için $F(a)F(b) \pm ab \in Z(R)$ ise her $a \in T$ için $T[g(a), a] = (0)$ dır.

İspat : Kabul edelim ki her $a, b \in T$ için

$$F(a)F(b) - ab \in Z(R)$$

olsun. b yerine $c \in T$ olmak üzere bc yazılırsa her $a, b, c \in T$ için

$$F(a)F(bc) - abc \in Z(R)$$

olur. F dönüşümünün tanımı kullanılarak düzenlenirse

$$F(a)(F(b)c + bg(c)) - abc \in Z(R) \quad (4.26)$$

bulunur. Böylece $[F(a)(F(b)c + bg(c)) - abc, c] = 0$ sağlanır. Bu eşitlik (4.26) ifadesi kullanılarak düzenlenirse

$$[F(a)bg(c), c] = 0 \quad (4.27)$$

elde edilir. (4.27) eşitliğinde b yerine cb yazılırsa her $a, b, c \in T$ için

$$[F(a)cbg(c), c] = 0 \quad (4.28)$$

olur. Öte yandan (4.27) eşitliğinde a yerine ac yazılırsa

$$0 = [F(ac)bg(c), c] = [(F(a)c + ag(c))bg(c), c]$$

bulunur. Bu ise her $a, b, c \in T$ için

$$[(F(a)c + ag(c))bg(c), c] = 0$$

demektir. (4.28) eşitliği kullanılarak düzenlenirse her $a, b, c \in T$ için

$$[ag(c)bg(c), c] = 0 \quad (4.29)$$

elde edilir. (4.29) ifadesinde a yerine $g(c)a$ yazılırsa

$$0 = [g(c)ag(c)bg(c), c] = g(c)[ag(c)bg(c), c] + [g(c), c]ag(c)bg(c)$$

olur. Son ifade (4.29) eşitliği kullanılarak düzenlenirse her $a, b, c \in T$ için

$$[g(c), c]ag(c)bg(c) = 0$$

bulunur. Bu eşitlikte a yerine ac , b yerine bc yazılırsa

$$[g(c), c]acg(c)bcg(c) = 0$$

elde edilir. $[g(c), c]ag(c)bg(c) = 0$ eşitliğinde b yerine cb yazılır ve elde edilen ifade sağdan c ile çarpılırsa

$$[g(c), c]ag(c)cbg(c)c = 0$$

bulunur. $[g(c), c]acg(c)bcg(c) = 0$ ve $[g(c), c]ag(c)cbg(c)c = 0$ eşitlikleri taraf tarafa çıkarılır ve Lie komütatör özellikleri kullanılarak düzenlenirse

$$[g(c), c]a[g(c), c]b[g(c), c] = 0$$

elde edilir. Bu ifade soldan $d \in T$ ile çarpılırsa her $a, b, c, d \in T$ için $d[g(c), c]a[g(c), c]b[g(c), c] = 0$ olur. Bu ise her $c \in T$ için

$$T[g(c), c]T[g(c), c]T[g(c), c] = (0)$$

demektir. Dolayısıyla $(T[g(c), c])^3 = (0)$ dır. R halkasının yarı-asal olması kullanılarak

$$T[g(c), c] = (0)$$

elde edilir.

Benzer olarak her $a, b \in T$ için $F(a)F(b) + ab \in Z(R)$ olması durumunda da aynı sonuçlar bulunur.

Sonuç 4.15. Her $a, b \in R$ için $F(a)F(b) \pm ab \in Z(R)$ ise her $a \in R$ için $[g(a), a] = 0$ dır.

Teorem 4.16. Her $a, b \in T$ için $F(a)F(b) \pm ba \in Z(R)$ ise her $a \in T$ için $T[g(a), a] = (0)$

İspat : Kabul edelim ki her $a, b \in T$ için

$$F(a)F(b) - ba \in Z(R) \tag{4.30}$$

olsun. (4.30) ifadesinde b yerine $c \in T$ olmak üzere bc yazılırsa her $a, b, c \in T$ için

$$F(a)(F(b)c + bg(c)) - bca \in Z(R)$$

olur. Elde edilen ifade düzenlenirse

$$\begin{aligned} F(a)(F(b)c + bg(c)) - abc &= F(a)F(b)c + F(a)bg(c) - bca \\ &= (F(a)F(b) - ba)c + b[a, c] + F(a)bg(c) \end{aligned}$$

olur. Yani her $a, b, c \in T$ için

$$(F(a)F(b) - ba)c + b[a, c] + F(a)bg(c) \in Z(R) \tag{4.31}$$

dir. O halde $c \in T$ için $[(F(a)F(b) - ba)c + b[a, c] + F(a)bg(c), c] = 0$ dır. Bu eşitlik (4.30) ve (4.31) ifadeleri kullanılarak düzenlenirse her $a, b, c \in T$ için

$$[b[a, c], c] + [F(a)bg(c), c] = 0 \quad (4.32)$$

bulunur. (4.32) eşitliğinde a yerine ac yazılıp Lie komütatör özellikleri kullanılarak

$$[b[a, c], c]c + [(F(a)c + ag(c))bg(c), c] = 0 \quad (4.33)$$

elde edilir. (4.32) ifadesinde b yerine cb yazılıp Lie komütatör özellikleri uygulanırsa her $a, b, c \in T$ için

$$c[b[a, c], c] + [F(a)cbg(c), c] = 0$$

olur. Son ifade (4.33) eşitliği ile birlikte düşünüldüğünde her $a, b, c \in T$ için

$$[[b[a, c], c], c] + [ag(c)bg(c), c] = 0 \quad (4.34)$$

elde edilir. (4.34) eşitliğinde a yerine ac yazılıp Lie komütatör özellikleri kullanılarak düzenlenirse her $a, b, c \in T$ için

$$[[b[a, c], c], c]c + [acg(c)bg(c), c] = 0$$

bulunur. (4.34) ifadesi sağdan c ile çarpılıp son eşitlik kullanılarak düzenlenirse her $a, b, c \in T$ için

$$[a[g(c)bg(c), c], c] = 0 \quad (4.35)$$

elde edilir. Son eşitlikte a yerine $g(c)bg(c)a$ yazılıp Lie komütatör özellikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= [g(c)bg(c)a[g(c)bg(c), c], c] \\ &= g(c)bg(c)[a[g(c)bg(c), c], c] + [g(c)bg(c), c]a[g(c)bg(c), c] \end{aligned}$$

bulunur. Yani

$$g(c)bg(c)[a[g(c)bg(c), c], c] + [g(c)bg(c), c]a[g(c)bg(c), c] = 0$$

olur. Bu ifade (4.35) eşitliği ile birlikte düşünüldüğünde her $a, b, c \in T$ için

$$[g(c)bg(c), c]a[g(c)bg(c), c] = 0$$

bulunur. a yerine $r \in R$ olmak üzere ra yazılıp elde edilen ifade soldan a ile çarpılırsa her

$a, b, c \in T$ ve $r \in R$ için

$$a[g(c)bg(c), c]ra[g(c)bg(c), c] = 0$$

bulunur. R halkasının yarı-asal olması kullanılarak her $a, b, c \in T$ için

$$a[g(c)bg(c), c] = 0$$

olur. Devamında (4.23) eşitliğinden sonraki adımlar takip edilerek aynı sonuçlar elde edilir.

Benzer olarak her $a, b \in T$ için $F(a)F(b) + ba \in Z(R)$ durumunda da aynı sonuçlara ulaşılır.

Sonuç 4.17. Her $a, b \in R$ için $F(a)F(b) \pm ba \in Z(R)$ ise her $a \in R$ için $[g(a), a] = 0$ dır.



BÖLÜM 5

YARI-ASAL HALKALARDA ÇARPIMSAL (GENELLEŞTİRİLMİŞ)- TÜREVLERİN BİR GENELLEŞTİRMESİ

Bu bölümde, dördüncü bölümde ele alınan bazı problemler çarpımsal α - (genelleştirilmiş)-türevli ve çarpımsal β - (genelleştirilmiş)-türevli yarı-asal halkaların sıfırdan farklı bir sol yarıgrup ideali üzerinde incelenerek genelleştirmeler yapılmıştır.

Tanım 5.1. R bir halka, $F: R \rightarrow R$ olsun. Her $x, y \in R$ için

$$F(xy) = F(x)\alpha(y) + xd(y)$$

olacak şekilde $\alpha, d: R \rightarrow R$ dönüşümleri varsa F dönüşümüne *çarpımsal α - (genelleştirilmiş) türev* denir. Benzer şekilde $G: R \rightarrow R$ olmak üzere her $x, y \in R$ için

$$G(xy) = G(x)y + \beta(x)h(y)$$

olacak şekilde $\beta, h: R \rightarrow R$ dönüşümleri varsa G dönüşümüne *çarpımsal β - (genelleştirilmiş) türev* denir.

Bu bölüm boyunca R bir yarı-asal halka, L, R halkasının sıfırdan farklı bir sol yarıgrup ideali, α ve β , R halkası üzerinde örten bir halka homomorfizması, F, d dönüşümü ile belirli bir çarpımsal α - (genelleştirilmiş) türev, G, h dönüşümü ile belirli bir çarpımsal β - (genelleştirilmiş) türevdir.

Lemma 5.2. R bir yarı-asal halka, L, R halkasının sıfırdan farklı bir sol yarıgrup ideali ve $a \in R$ olmak üzere $aL = (0)$ ise $La = (0)$ dır.

İspat : L, R halkasının sol yarıgrup ideali olduğu için $a(RL) = (0)$ dır. Buradan $(La)R(La) = (0)$ elde edilir. Böylece R bir yarı-asal halka olduğundan $La = (0)$ dır.

Teorem 5.3. Her $x, y \in L$ için $F(xy) \pm \alpha(x)\alpha(y) = 0$ ise $Ld(L) = (0)$ dır. Üstelik her $x, y \in L$ için $F(xy) = F(x)\alpha(y)$ ve her $x \in L$ için $[F(x), \alpha(x)] = 0$ dır.

İspat : Her $x, y \in L$ için

$$F(xy) - \alpha(x)\alpha(y) = 0$$

olsun. Bu eşitlikte y yerine $z \in L$ olmak üzere yz yazılırsa her $x, y, z \in L$ için $F(xyz) - \alpha(x)\alpha(yz) = 0$ olur. Burada F dönüşümünün tanımı ve α dönüşümünün homomorfizma olması kullanılırsa her $x, y, z \in L$ için

$$(F(xy) - \alpha(x)\alpha(y))\alpha(z) + xyd(z) = 0$$

bulunur. Bu ifade hipotez kullanılarak düzenlenirse her $x, y, z \in L$ için

$$xyd(z) = 0$$

elde edilir. Son eşitlikte y yerine $r \in R$ olmak üzere $d(z)rx$ yazılırsa her $r \in R$ için $xd(z)rx = 0$ olur. Bu ise $xd(z)Rxd(z) = (0)$ demektir. Böylelikle R bir yarı-asal halka olduğundan her $x, z \in L$ için $xd(z) = 0$ olur. Yani

$$Ld(L) = (0)$$

dır. $F(xy) = F(x)\alpha(y) + xd(y)$ ifadesi $Ld(L) = (0)$ olması kullanılarak düzenlenirse her $x, y \in L$ için

$$F(xy) = F(x)\alpha(y)$$

elde edilir. Hipotez bu sonuç kullanılarak düzenlenirse her $x, y \in L$ için

$$F(x)\alpha(y) - \alpha(x)\alpha(y) = 0$$

olur. Yani her $x, y \in L$ için $(F(x) - \alpha(x))\alpha(y) = 0$ dır. Bu ise $x \in L$ için

$$(F(x) - \alpha(x))\alpha(L) = (0)$$

demektir. Üstelik α örten bir halka homomorfizması olduğundan L kümesi R halkasının bir sol yarıgrup ideali iken $\alpha(L)$ kümesi de R halkasının bir sol yarıgrup idealidir. Böylece Lemma 5.2. uygulanarak her $x \in L$ için $\alpha(L)(F(x) - \alpha(x)) = (0)$ elde edilir. Dolayısıyla her $x, y \in L$ için

$$\alpha(y)(F(x) - \alpha(x)) = 0$$

dır. $(F(x) - \alpha(x))\alpha(y) = 0$ ve $\alpha(y)(F(x) - \alpha(x)) = 0$ eşitlikleri birlikte düşünüldüğünde her $x, y \in L$ için

$$[F(x), \alpha(y)] - [\alpha(x), \alpha(y)] = 0$$

elde edilir. Elde edilen bu eşitlikte y yerine x yazılırsa her $x \in L$ için $[F(x), \alpha(x)] = 0$ olur.

Her $x, y \in L$ için $F(xy) + \alpha(x)\alpha(y) = 0$ olması durumunda da aynı sonuçlara ulaşılır.

Teorem 5.4. Her $x, y \in L$ için $F(x)F(y) \pm \alpha(x)\alpha(y) = 0$ ise $Ld(L) = (0)$ dır. Üstelik her $x, y \in L$ için $F(xy) = F(x)\alpha(y)$ ve her $x \in L$ için $\alpha(L)[F(x), \alpha(x)] = (0)$ dır.

İspat : Kabul edelim ki her $x, y \in L$ için

$$F(x)F(y) - \alpha(x)\alpha(y) = 0 \tag{5.1}$$

olsun. (5.1) ifadesinde y yerine $z \in L$ olmak üzere yz yazılırsa her $x, y, z \in L$ için

$$\begin{aligned} 0 &= F(x)F(yz) - \alpha(x)\alpha(yz) \\ &= F(x)(F(y)\alpha(z) + yd(z)) - \alpha(x)\alpha(y)\alpha(z) \\ &= (F(x)F(y) - \alpha(x)\alpha(y))\alpha(z) + F(x)yd(z) \end{aligned}$$

olur. Elde edilen ifade (5.1) eşitliği kullanılarak düzenlendiğinde her $x, y, z \in L$ için $F(x)yd(z) = 0$ bulunur. Bu eşitlikte x yerine $u \in L$ olmak üzere ux yazılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= F(ux)yg(z) = (F(u)\alpha(x) + ud(x))yd(z) \\ &= F(u)\alpha(x)yd(z) + ud(x)yd(z) \end{aligned}$$

olduğu görülür. Son eşitlikte $\alpha(x)y \in L$ olduğundan her $x, y, z \in L$ için $F(x)yd(z) = 0$ olması kullanılırsa her $u, x, y, z \in L$ için $ud(x)yd(z) = 0$ elde edilir. Bu ifadede y yerine $r \in R$ olmak üzere ry yazılırsa her $u, x, y, z \in L$ için $ud(x)ryd(z) = 0$ olur. Yani her $r \in R$ için

$$Ld(L)RLd(L) = (0)$$

dır. R bir yarı-asal halka olduğundan

$$Ld(L) = (0)$$

elde edilir. Her $x, y \in L$ için $F(xy) = F(x)\alpha(y) + xd(y)$ ifadesi $Ld(L) = (0)$ olması kullanılarak düzenlenirse her $x, y \in L$ için

$$F(xy) = F(x)\alpha(y)$$

olur. (5.1) ifadesinde x yerine xy yazılır ve elde edilen ifade $F(xy) = F(x)\alpha(y)$ olması kullanılarak düzenlenirse her $x, y \in L$ için

$$F(x)\alpha(y)F(y) - \alpha(x)\alpha(y)^2 = 0 \quad (5.2)$$

bulunur. Öte yandan (5.1) ifadesi sağdan $\alpha(y)$ ile çarpılırsa her $x, y \in L$ için

$$F(x)F(y)\alpha(y) - \alpha(x)\alpha(y)^2 = 0 \quad (5.3)$$

olur. (5.2) ve (5.3) ifadeleri taraf tarafa çıkartılıp Lie komütatör özellikleri kullanılarak düzenlendiğinde her $x, y \in L$ için

$$F(x)[F(y), \alpha(y)] = 0$$

bulunur. Son eşitlikte x yerine $z \in L$ olmak üzere xz yazılır ve elde edilen ifade $F(x) = F(x)\alpha(y)$ olması kullanılarak düzenlenirse $F(x)\alpha(z)[F(y), \alpha(y)] = 0$ eşitliğine ulaşılır. Bu eşitlikte z yerine xz yazılırsa

$$F(x)\alpha(x)\alpha(z)[F(y), \alpha(y)] = 0$$

bulunur. Öte yandan $F(x)\alpha(z)[F(y), \alpha(y)] = 0$ ifadesi soldan $\alpha(x)$ ile çarpıldığında

$$\alpha(x)F(x)\alpha(z)[F(y), \alpha(y)] = 0$$

olur. Böylece $F(x)\alpha(x)\alpha(z)[F(y), \alpha(y)] = 0$ ve $\alpha(x)F(x)\alpha(z)[F(y), \alpha(y)] = 0$ eşitlikleri birlikte düşünüldüğünde

$$[F(x), \alpha(x)]\alpha(z)[F(y), \alpha(y)] = 0$$

elde edilir. Bu eşitlikte z yerine $r \in R$ olmak üzere rz yazılır ve α dönüşümünün halka homomorfizması olması kullanılarak düzenlenirse

$$[F(x), \alpha(x)]\alpha(r)\alpha(z)[F(y), \alpha(y)] = 0$$

bulunur. Bu eşitlik soldan $\alpha(z)$ ile çarpılır ve y yerine x yazılırsa her $x, z \in L$ için

$$\alpha(z)[F(x), \alpha(x)]\alpha(R)\alpha(z)[F(x), \alpha(x)] = (0)$$

elde edilir. α örten olduğundan $\alpha(R) = R$ dir. Son eşitlikte $\alpha(R) = R$ olması kullanılırsa

$$\alpha(z)[F(x), \alpha(x)]R\alpha(z)[F(x), \alpha(x)] = (0)$$

olur. Böylece R bir yarı-asal halka olduğundan her $x, z \in L$ için $\alpha(z)[F(x), x] = 0$ dir.

Yani her $x \in L$ için $\alpha(L)[F(x), x] = (0)$ olur.

Her $x, y \in L$ için $F(x)F(y) + \alpha(x)\alpha(y) = 0$ olması durumunda da aynı sonuçlara ulaşılır.

Teorem 5.5. Her $x, y \in L$ için $G(xy) \pm xy = 0$ ise $\beta(L)h(L) = (0)$ dir. Üstelik her $x, y \in L$ için $G(xy) = G(x)y$ ve her $x \in L$ için $[G(x), x] = 0$ dir.

İspat : Kabul edelim ki her $x, y \in L$ için

$$G(xy) - xy = 0$$

olsun. Bu eşitlikte y yerine $z \in L$ olmak üzere yz yazılırsa her $x, y, z \in L$ için $G(xyz) - xyz = 0$ olur. Burada G dönüşümünün tanımı ve β dönüşümünün homomorfizma olması kullanılırsa her $x, y, z \in L$ için

$$(G(xy) - xy)z + \beta(x)\beta(y)h(z) = 0$$

bulunur. Bu ifade hipotez kullanılarak düzenlenirse her $x, y, z \in L$ için

$$\beta(x)\beta(y)h(z) = 0$$

elde edilir. Son eşitlikte y yerine $r \in R$ olmak üzere ry yazılır ve β dönüşümünün homomorfizma olması kullanılırsa her $r \in R$ için $\beta(x)\beta(r)\beta(y)h(z) = 0$ olur. Bu ise $\beta(x)\beta(R)\beta(y)h(z) = (0)$ demektir. β örten olduğu için $\beta(R) = R$ dir. Dolayısıyla son eşitlikte $\beta(R) = R$ olması kullanılarak

$$\beta(x)R\beta(y)h(z) = (0)$$

olduğu bulunur. Buradan da her $s \in R$ için $\beta(x)s\beta(y)h(z) = 0$ olur. Bu eşitlikte s yerine $h(z)s$, y yerine x yazılırsa her $s \in R$ için

$$\beta(x)h(z)s\beta(x)h(z) = 0$$

elde edilir. R halkasının yarı-asal olması kullanılırsa her $x, z \in L$ için $\beta(x)h(z) = 0$ olur.

Yani

$$\beta(L)h(L) = (0)$$

dır. $G(xy) = G(x)y + \beta(x)h(y)$ ifadesi $\beta(L)h(L) = (0)$ olması kullanılarak düzenlendiğinde her $x, y \in L$ için

$$G(xy) = G(x)y$$

elde edilir. Hipotez bu sonuç kullanılarak düzenlenirse her $x, y \in L$ için $G(x)y - xy = 0$ olur. Yani her $x, y \in L$ için

$$(G(x) - x)y = 0$$

dır. Bu ise $(G(x) - x)L = (0)$ demektir. L, R halkasının bir sol yarıgrup ideali olduğundan son eşitliğe *Lemma 5.2.* uygulanarak her $x \in L$ için $L(G(x) - x) = (0)$ elde edilir. Böylece her $x, y \in L$ için

$$y(G(x) - x) = 0$$

dır. $(G(x) - x)y = 0$ ve $y(G(x) - x) = 0$ eşitlikleri birlikte kullanıldığında her $x, y \in L$ için $[G(x), y] - [x, y] = 0$ elde edilir. Elde edilen bu eşitlikte y yerine x yazılırsa her $x \in L$ için $[G(x), x] = 0$ olur.

Her $x, y \in L$ için $G(xy) + xy = 0$ olması durumunda da aynı sonuçlara ulaşılır.

Teorem 5.6. Her $x, y \in L$ için $G(x)G(y) \pm xy = 0$ ise $\beta(L)h(L) = (0)$ dır. Üstelik her $x, y \in L$ için $G(xy) = G(x)y$ ve her $x \in L$ için $L[G(x), x] = (0)$ dır.

İspat : Kabul edelim ki her $x, y \in L$ için

$$G(x)G(y) - xy = 0 \tag{5.4}$$

olsun. (5.4) ifadesinde y yerine $z \in L$ olmak üzere yz yazılırsa her $x, y, z \in L$ için

$$\begin{aligned} 0 &= G(x)G(yz) - xyz \\ &= G(x)(G(y)z + \beta(y)h(z)) - xyz \\ &= (G(x)G(y) - xy)z + G(x)\beta(y)h(z) \end{aligned}$$

olur. Elde edilen ifade (5.4) eşitliği kullanılarak düzenlendiğinde her $x, y, z \in L$ için $G(x)\beta(y)h(z) = 0$ bulunur. Bu eşitlikte x yerine $u \in L$ olmak üzere ux yazılırsa

$$0 = G(u)x\beta(y)h(z) + \beta(u)h(x)\beta(y)h(z)$$

olduğu görülür. Son eşitlikte $x\beta(y) \in \beta(L)$ olduğundan her $x, y, z \in L$ için $G(x)\beta(y)h(z) = 0$ olması kullanılırsa her $u, x, y, z \in L$ için $\beta(u)h(x)\beta(y)h(z) = 0$ elde edilir. Bu ifadede y yerine $r \in R$ olmak üzere ry yazılırsa her $u, x, y, z \in L$ için $\beta(u)h(x)\beta(r)\beta(y)h(z) = 0$ olur. Yani

$$\beta(L)h(L)\beta(R)\beta(L)h(L) = (0)$$

dır. β örten olduğundan

$$\beta(L)h(L)R\beta(L)h(L) = (0)$$

elde edilir. Böylece R bir yarı-asal halka olduğundan

$$\beta(L)h(L) = (0)$$

olur. Her $x, y \in L$ için $G(xy) = G(x)y + \beta(x)h(y)$ ifadesi $\beta(L)h(L) = (0)$ olması kullanılarak düzenlenirse her $x, y \in L$ için

$$G(xy) = G(x)y$$

olduğu görülür. (5.4) ifadesinde x yerine xy yazılır ve elde edilen ifade $G(xy) = G(x)y$ olması kullanılarak düzenlenirse

$$G(x)yG(y) - xy^2 = 0, \forall x, y \in L \quad (5.5)$$

elde edilir. Öte yandan (5.4) eşitliği sağdan y ile çarpılırsa her $x, y \in L$ için

$$G(x)G(y)y - xy^2 = 0, \forall x, y \in L \quad (5.6)$$

olur. (5.5) ve (5.6) ifadeleri taraf tarafa çıkartılıp Lie komütatör özellikleri kullanılarak düzenlendiğinde her $x, y \in L$ için $G(x)[G(y), y] = 0$ bulunur. Son eşitlikte x yerine $z \in L$ olmak üzere xz yazılır ve elde edilen ifade $G(xy) = G(x)y$ olması kullanılarak düzenlenirse $G(x)z[G(y), y] = 0$ eşitliğine ulaşılır. Bu eşitlikte z yerine xz yazılırsa $G(x)xz[G(y), y] = 0$ bulunur. Öte yandan $G(x)z[G(y), y] = 0$ ifadesi soldan x ile çarpılırsa $xG(x)z[G(y), y] = 0$ olur. Böylece $G(x)xz[G(y), y] = 0$ ve $xG(x)z[G(y), y] = 0$ eşitliklerinden

$$[G(x), x]z[G(y), y] = 0$$

bulunur. Son eşitlikte z yerine $r \in R$ olmak üzere rz yazılırsa

$$[G(x), x]rz[G(y), y] = 0$$

olur. Bu eşitlik soldan z ile çarpılıp y yerine x yazılırsa $x, z \in L$ için $z[G(x), x]rz[G(y), y] = 0$ elde edilir. Yani

$$z[G(x), x]Rz[G(y), y] = (0)$$

dır. R halkasının yarı-asal olması kullanılırsa her $x, z \in L$ için $z[G(x), x] = 0$ olur. Yani her $x \in L$ için $L[G(x), x] = (0)$ dır.

Her $x, y \in L$ için $G(x)G(y) + xy = 0$ olması durumunda da aynı sonuçlar elde

edilir.



KAYNAKLAR

- Aydın N., Kandamar H., 2015a. Soyut Cebir (3. Baskı). Paradigma Akademi. Çanakkale.
- Aydın N., Kandamar H., Kaya K., 2015b. Soyut Cebir Problemleri ve Çözümleri. Paradigma Akademi. Çanakkale.
- Aydın N., 2011. A Note on Generalized Derivations of Prime Rings. International Journal of Algebra. 5: 17-23.
- Bell H.E., Martindale W.S., 1987. Centralizing Mappings of Semiprime Rings. Canad. Math. Bull. 30: 92-101.
- Bresar M., 1991. On the distance of the composition of two derivations to the generalized derivations. Glasgow Math. J. 33: 89-93.
- Bresar M., 1993. Centralizing Mapping and Derivations in Prime Rings. Journal of Algebra. 156: 385-394.
- Dhara B., Ali S., 2013. On Multiplicative (generalized)-derivations in prime and semiprime rings. Aequat. Math. 86: 65-79.
- Herstein I. N., 1979. A Note on Derivations II. Canad. Math. Bull. 22: 509-511.
- Herstein I. N., 1976. Ring With Involution. Univ. Of Chicago Press. Chicago.
- Herstein I. N., 1969. Topics in Ring Theory. Univ. Of Chicago Press. Chicago.
- Posner E.C., 1957. Derivations in Prime Rings. Proc. Amer. Math. Soc. 8: 1093-1100.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Murat ÇELİK

Doğum Yeri : İstanbul

Doğum Tarihi : 05/06/1990

EĞİTİM DURUMU

Lisans Öğrenimi : Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi

Bildiği Yabancı Diller : İngilizce

BİLİMSEL FAALİYETLERİ

Trakyalar Üniversiteler Birliği Lisansüstü Öğrenci Kongresi 29-30 Nisan 2016

Poster Sunumu

Bildiri Başlığı: Çarpımsal (Genelleştirilmiş)-Türevlerin Bir Genelleştirmesi

İLETİŞİM

E-posta Adresi : murath.celik17@gmail.com