

T.C.
ÇANAKKALE ONSEKİZ MART ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
YÜKSEK LİSANS TEZİ

YARI LİNEER ELİPTİK DENKLEMLER İÇİN LOKAL OLMAYAN
SINIR DEĞER PROBLEMİ
Esra DEMİREL

Matematik Anabilim Dalı
Tezin Sunulduğu Tarih: 01/06/2016

Tez Danışmanı:
Yrd. Doç. Dr. Elif ÖZTÜRK BEIGMOHAMMADI

ÇANAKKALE

Esra DEMİREL tarafından Yrd. Doç. Dr. Elif ÖZTÜRK BEIGMOHAMMADI yönetiminde hazırlanan ve **01/06/2016** tarihinde aşağıdaki jüri karşısında sunulan “**Yarı Lineer Eliptik Denklemler İçin Lokal Olmayan Sınır Değer Problemi**” başlıklı çalışma, Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**’nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak oybirliği ile kabul edilmiştir.

JÜRİ

Yrd. Doç. Dr. Elif ÖZTÜRK BEIGMOHAMMADI

Başkan

Prof. Dr. Hüsnü BAYSAL

Üye

Prof. Dr. Allaberen ASHYRALYEV

Üye

Prof. Dr. Levent GENÇ

Müdür

Fen Bilimleri Enstitüsü

Sıra No:.....

İNTİHAL (AŞIRMA) BEYAN SAYFASI



Bu tezde görsel, işitsel ve yazılı biçimde sunulan tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uyularak tarafımdan elde edildiğini, tez içinde yer alan ancak bu çalışmaya özgü olmayan tüm sonuç ve bilgileri tezde kaynak göstererek belirttiğimi beyan ederim.

Esra DEMİREL

TEŞEKKÜR

Bu tezin gerçekleştirilmesinde, çalışmam boyunca benden bir an olsun yardımlarını esirgemeyen, çalışma azmimi canlı tutan ve hayatın getirdiği tüm sıkıntılarda yanımda olan saygı değer danışman hocam Yrd. Doç. Dr. Elif ÖZTÜRK BEIGMOHAMMADI' ye, çalışma süresince tüm zorlukları benimle göğüsleyen desteğini, sabrını ve sevgisini hep yanımda hissettiğim canım eşim Hakan DEMİREL' e, varlığıyla hayatıma renk katan canım oğlum Hamza DEMİREL' e ve hayatımın her evresinde bana destek olan değerli aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Esra DEMİREL
Çanakkale, Haziran 2016

SİMGELER VE KISALTMALAR

H	Hilbert uzayı
$C([0,1]; H)$	Banach uzayı
$\mathbb{R}$	Reel sayılar
$\mathbb{R}^n$	n-boyutlu Öklid uzay
A_k	Adomian polinomu
A	Kendisine eşlenik pozitif tanımlı operatör
E_M^N	Gerçek çözüm ile fark şemasındaki yaklaşık çözüm arasındaki hata
H_M^N	Sayısal çözümde iterasyonlar arasındaki hata

ÖZET

YARI LİNEER ELİPTİK DENKLEMLER İÇİN LOKAL OLMAYAN SINIR DEĞER PROBLEMİ

Esra DEMİREL

Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi

Danışman : Yrd. Doç. Dr. Elif ÖZTÜRK BEİGMOHAMMADI

01/06/2016, 57

Bu tezde, Hilbert uzayında, kendisine eşlenik pozitif tanımlı A operatörlü lokal olmayan Bitsadze-Samarskii tipi yarı-lineer eliptik denklemler için sınır değer problemi çalışılmıştır. Problemin çözümünün varlığı ve tekliği incelenerek sabit nokta teoremiyle ispatlanmıştır. Bu problemin yaklaşık çözümü için birinci mertebeden fark şeması kurulmuştur. Kurulan fark şeması modifiye edilmiş Gauss eliminasyon metodu ve iterasyon metodu kullanılarak matrislerden oluşan bir sisteme dönüştürülmüştür. Sayısal analizde kullanılan paket programıyla sistem çözülmüştür. Hata analizi verilmiştir.

Anahtar sözcükler: Yarı-lineer Eliptik Denklem, Fark Şeması, Bitsadze-Samarskii Tipi Problem.

ABSTRACT

NONLOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE SEMI-LINEAR ELLIPTIC EQUATION

Esra DEMIREL

Çanakkale Onsekiz Mart University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Master of Science Thesis in Mathematics

Advisor : Yrd. Doç. Dr. Elif OZTURK BEIGMOHAMMADI

01/06/2016, 57

In this thesis, we study Bitsadze- Samarskii type nonlocal boundary value problem for the semi-linear elliptic equation in a Hilbert space H with the self-adjoint positive definite operator A . The existence and uniqueness of the solution of this problem is searched and proved by fixed point theorem. We present the first order of accuracy difference scheme for approximate solution of this problem. Founded difference scheme is transformed into a system of equations with matrix coefficients and modified Gauss elimination method and iteration method are used for solution of this difference scheme. The system is solved by package program for using numerical analysis. Error analysis are given.

Keywords: Semi-linear Elliptic Equation, Difference Scheme, Bitsadze-Samarskii Type Problem.

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

TEZ SINAV SONUÇ FORMU	ii
İNTİHAL (AŞIRMA) BEYAN SAYFASI.....	iii
TEŞEKKÜR.....	iv
SİMGELER VE KISALTMALAR	v
ÖZET	vi
ABSTRACT.....	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ	ix
ÇİZELGELER DİZİNİ	x
BÖLÜM 1	
GİRİŞ	1
1.1. Adomian Ayırıştırma Yöntemi.....	15
1.2. Önceki Çalışmalar.....	18
BÖLÜM 2	
YARI LİNEER ELİPTİK DENKLEM İÇİN BİTSADZE-SAMARSKİİ TİPİNDE LOKAL OLMAYAN SINIR DEĞER PROBLEMİ	23
2.1. Problemin Çözümünün Varlığı ve Tekliği.....	23
2.2. Birinci Mertebeden Doğruluk Fark Şeması ve Yakınsaklığı	30
BÖLÜM 3	
SAYISAL SONUÇLAR	40
3.1. Lineer Eliptik Denklemler İçin Birinci Mertebeden Doğruluk Fark Şemasının Sayısal Sonuçları	40
3.2. Yarı-Lineer Eliptik Denklemler İçin Birinci Mertebeden Doğruluk Fark Şemasının Sayısal Sonuçları	46
BÖLÜM 4	
ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA	52
KAYNAKLAR	54
ÖZGEÇMİŞ	I

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa No

Şekil 3.1. (3.1) probleminin tam çözüm grafiği.....	45
Şekil 3.2. (3.1) probleminin birinci mertebeden doğruluk fark şemasının yaklaşık çözüm grafiği.....	46
Şekil 3.3. (3.7) probleminin tam çözüm grafiği.....	50
Şekil 3.4. (3.7) probleminin birinci mertebeden doğruluk fark şemasının yaklaşık çözüm grafiği.....	51



ÇİZELGELER DİZİNİ

Sayfa No

Çizelge 3.1. Lineer eliptik denklemler için birinci mertebeden fark şemasının hatası.....	45
Çizelge 3.2. Yarı-lineer eliptik denklemler için birinci mertebeden doğruluk fark şeması için hatalar.....	50
Çizelge 3.3. Yarı-lineer eliptik denklemler için birinci mertebeden doğruluk fark şeması hatalarının karşılaştırılması	51



BÖLÜM 1

GİRİŞ

Yarı-lineer denklemler üzerinde yüzyıldan daha fazla süredir araştırmalar yapılmaktadır. Bunun temel sebebi plazma fiziği, kuantum alan teorisi, lineer olmayan dalga yayılımı, lineer olmayan fiber optik gibi mühendislik ve fizik problemlerinde bu tip denklemler bilim insanlarının karşısına çok çıkmaktadır. Diğer yandan eliptik tipteki diferansiyel denklemlerle akışkanlar mekaniğinde, dinamik, elastikiyet ve diğer mühendislik alanlarında, fizikte, biyolojik sistemlerin birçok problemde karşılaşılır.

Eliptik denklemler için basit lokal olmayan sınır değer problemi ilk kez Bitsadze ve Samarskii tarafından keşfedilmiştir (1969). Bu problemi diğer problemlerden ayıran nokta, sınır değerlerinden birinin biliniyor olmasıdır. Diğer sınır değer şartı ise herhangi bir değer ile arasındaki bağıntıyı içerir.

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} u \, dx = 0 \\ & u|_{\partial\Omega} = 0 \end{aligned}$$

şartı Bitsadze-Samarskii şartı olarak adlandırılır. Bitsadze ve Samarskii (1969) çalışmasından sonra birçok denkleme Bitsadze-Samarskii tipinde problem yerleştirilmiştir.

Eliptik denklemler için Bitsadze-Samarskii tipinde problem için; Gordeziani (1970), Skubachevskii (1984), Skubachevskii (1985), Kapanadze (1987), Soldatov (2006), Ashyralyev (2008), Ashyralyev (2010), Ashyralyev ve Ozturk (2012), Ashyralyev ve Ozturk (2013), Ashyralyev ve Ozesenli Tetikoglu (2013), Jangveladze ve ark. (2010), Orlovsky ve Piskarev (2013), Ashyralyev ve Ozturk (2014a), Ashyralyev ve Ozturk (2014b) yayınlarına ulaşılmıştır. Diğer taraftan lineer eliptik denklemlerin fark şemalarının kararlılığı ve diferansiyel problemin kararlı koersif kestirimleri üzerine önemli araştırmacılar ve araştırmalar vardır: Ashyralyev ve Altay (2006), Ashyralyev (1999), Ashyralyev ve ark. (2008), Sapagovas (2008).

Eliptik denklemler üzerine yapılmış çalışmalardan bazıları şunlardır:

Agmon (1965), eliptik sınır değer problemleri üzerinde çalışmıştır. Eliptik operatörleri, eliptik sistemlerde çözümün lokal düzgünlüğünü, güçlü eliptik denklemlerde çözümün global düzgünlüğünü ve eliptik denklemler için özdeğer problemlerini incelemiştir.

Sapagovas ve Chegis (1987), çalışmalarında lokal olmayan problemleri incelemiş; sürekli ve sürekli olmayan problemlerde çözümün varlığı ve tekliği için gerek ve yeter koşulu kanıtlamıştır.

Soldatov (2003), düzlemde eliptik sistemler için birinci ve ikinci mertebeden sınır değer problemini araştırmıştır.

Eliptik denklemler için karmaşık problemler analitik olarak Fourier serileri, Laplace dönüşümü ve Fourier dönüşümü yöntemleriyle çözülebilir. Şimdi bu üç farklı analitik yöntem örneklerle gösterilecektir.

Örnek 1.1. Eliptik denklemler için

$$\begin{cases} -\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u = 4(t^2 - 1)\sin x, 0 < t < 1, 0 < x < \pi, \\ u(0, x) = 0, u(1, x) = u(\frac{1}{2}, x) + \frac{3}{2}\sin x, 0 < x < \pi, \\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0, 0 < t < 1 \end{cases}$$

lokal olmayan sınır değer probleminin çözümünde Fourier seri yöntemi kullanır. Bu problemi çözmek için $u(t, x)$, iki kısma ayrılır.

$$u(t, x) = b(t, x) + l(t, x) \quad (1.1)$$

Burada $b(t, x)$

$$\begin{cases} -\frac{\partial^2 b}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 b}{\partial x^2} + b = 0, 0 < t < 1, 0 < x < \pi, \\ b(0, x) = 0, b(1, x) = b(\frac{1}{2}, x) + \frac{3}{2}\sin x, 0 < x < \pi, \\ b(t, 0) = b(t, \pi) = 0, 0 < t < 1 \end{cases} \quad (1.2)$$

homojen denklemin ve $l(t, x)$

$$\begin{cases} -\frac{\partial^2 l}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 l}{\partial x^2} + l = 4(t^2 - 1)\sin x, & 0 < t < 1, 0 < x < \pi, \\ l(0, x) = 0, l(1, x) = l(\frac{1}{2}, x), & 0 < x < \pi, \\ l(t, 0) = l(t, \pi) = 0, & 0 < t < 1 \end{cases} \quad (1.3)$$

homojen olmayan kısmın çözümüdür. İlk olarak, (1.2) probleminin çözümü değişkenlerine ayırma yöntemiyle bulunur. Bu yöntem uygulanarak

$$b(t, x) = D^2 l(t, x) = 0,$$

kabul edilir. Kısmi türevler alınıp (1.2) probleminde yerine koyularak

$$\frac{D^2 l(t, x)}{D^2 l(t, x)} = \frac{Z^2(t, x)}{Z^2(t, x)} = 0,$$

ya da

$$\frac{D^2 l(t, x)}{D^2 l(t, x)} = \frac{Z^2(t, x)}{Z^2(t, x)} = 0 \quad (1.4)$$

bulunur. (1.2) probleminde $Z(0) = Z(\pi) = 0$ şartları verilmiştir. (1.4) denklemi

$$Z^2(t, x) = Z^2(t, x) = Z^2(t, x) = 0, \quad (1.5)$$

şeklinde adi diferansiyel denklemdir. $\lambda \geq 0$ ise (1.5) sınır değer problemi sadece $Z(x) = 0$ aşıkâr çözüme sahiptir. $\lambda < 0$ ise (1.5) sınır değer probleminin aşıkâr olmayan çözümü

$$Z_k(x) = \sin kx, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad \lambda_k = -k^2$$

dir. (1.4) denklemindeki diğer adi diferansiyel denklem

$$D_k^2 u = D_k^2 v + \tilde{D}_k^2 u, \quad k = 1, 2, \dots,$$

dir. Bu adi diferansiyel denklemin çözümü

$$D_k u = A_k e^{\sqrt{1+k^2} t} + B_k e^{-\sqrt{1+k^2} t}, \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

şeklindedir.

$$b(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k e^{\sqrt{1+k^2} t} + B_k e^{-\sqrt{1+k^2} t}) \sin kx,$$

yazılır.

$$b(0, x) = 0, \quad b(1, x) = b\left(\frac{1}{2}, x\right) = \frac{3}{2} \sin x,$$

lokal olmayan sınır değer şartları kullanılarak

$$A_1 = \frac{3}{2} \left(e^{\sqrt{2}} - e^{\frac{\sqrt{2}}{2}} - e^{-\sqrt{2}} + e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} \right)^{-1},$$

$$B_1 = \frac{3}{2} \left(e^{-\sqrt{2}} + e^{\frac{\sqrt{2}}{2}} - e^{\sqrt{2}} - e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} \right)^{-1},$$

$$A_k = B_k = 0, \quad k = 2, 3, \dots$$

bulunur. Böylece (1.2) probleminin çözümü

$$b(t, x) = \left(\frac{3e^{\sqrt{2} t}}{2e^{\sqrt{2}} - 2e^{\frac{\sqrt{2}}{2}} - 2e^{\frac{\sqrt{2}}{2}} + 2e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}} - \frac{3e^{\frac{\sqrt{2}}{2} t}}{2e^{-\sqrt{2}} - 2e^{\frac{\sqrt{2}}{2}} - 2e^{\sqrt{2}} - 2e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}} \right) \sin x,$$

olarak hesaplanır.

İkinci olarak (1.3) probleminin çözümü hesaplanır.

$$l(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k(t) \sin kx, \quad (1.6)$$

şeklinde bir çözüm aranır. (1.6), (1.3) yerine yazılırsa

$$-l_{tt} - l_{xx} + l = \sum_{k=1}^{\infty} \left[-C_k''(t) + (1 + k^2) C_k(t) \right] \sin kx = 4(t^2 - 1) \sin x$$

ve $k \neq 1$ için

$$-C_k''(t) + (1 + k^2) C_k(t) = 0$$

elde edilir. Bu denklem çözüldüğünde

$$C_k(t) = c_1 e^{\sqrt{1+k^2}t} + c_2 e^{-\sqrt{1+k^2}t}$$

elde edilir. Bu denklemi çözmek için lokal olmayan sınır değer şartları

$$C_k(0) = 0, \quad C_k(1) = C_k\left(\frac{1}{2}\right)$$

kullanılarak, $c_1 = c_2 = 0$ ve $C_k(t) = 0$ bulunur.

$k = 1$ ise

$$-C_1''(t) + 2C_1(t) = 4(t^2 - 1)$$

dır.

Lokal olmayan sınır değer şartları

$$C_1(0) = 0, C_1(1) = C_1\left(\frac{1}{2}\right)$$

kullanılarak

$$c_1 = \frac{3}{2} \left(e^{\sqrt{2}} - e^{\frac{\sqrt{2}}{2}} - e^{\sqrt{2}} + e^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \right),$$

$$c_2 = \frac{3}{2} \left(e^{-\sqrt{2}} - e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} - e^{-\sqrt{2}} + e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} \right),$$

hesaplanır ve özel çözümünden

$$C_1(t) = 2t^2$$

bulunur. (1.3) probleminin çözümü

$$l(t, x) = \left(-\frac{3e^{\sqrt{2}t}}{2e^{\sqrt{2}} - 2e^{\frac{\sqrt{2}}{2}} - 2e^{\sqrt{2}} + 2e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}} - \frac{3e^{-\sqrt{2}t}}{2e^{-\sqrt{2}} + 2e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} - 2e^{-\sqrt{2}} - 2e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}} \right) \sin x + 2t^2 \sin x$$

dir. Sonuç olarak (1.1) formülünden

$$u(t, x) = b(t, x) + l(t, x) = 2t^2 \sin x$$

e ulaşılır.

Örnek 1.2. Eliptik denklemler için

$$\begin{cases} -\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u = 2t^2 \cos x, 0 < t < 1, 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ u(0, x) = \cos x, u(1, x) = u\left(\frac{1}{2}, x\right) + \frac{3}{4} \cos x, 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ u_x(t, 0) = u_x\left(t, \frac{\pi}{2}\right) = 0, 0 < t < 1 \end{cases}$$

lokal olmayan sınır değer probleminin çözümünde Fourier seri yöntemi kullanılır. Bu problemi çözmek için $u(t, x)$ değişkenlerine ayrılır.

$$u(t, x) = b(t, x) + l(t, x) \quad (1.7)$$

Burada $b(t, x)$

$$\begin{cases} -\frac{\partial^2 b}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 b}{\partial x^2} + b = 0, & 0 < t < 1, 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ b(0, x) = \cos x, & b(1, x) = b(\frac{1}{2}, x) + \frac{3}{4} \cos x, & 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ b_x(t, 0) = b(t, \frac{\pi}{2}) = 0, & 0 < t < 1 \end{cases} \quad (1.8)$$

ve

$$\begin{cases} -\frac{\partial^2 l}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 l}{\partial x^2} + l = 2t^2 \cos x, & 0 < t < 1, 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ l(0, x) = 0, & l(1, x) = l(\frac{1}{2}, x), & 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ l_x(t, 0) = l(t, \frac{\pi}{2}) = 0, & 0 < t < 1 \end{cases} \quad (1.9)$$

problemlerinin çözümüdür. İlk olarak, (1.8) probleminin çözümü değişkenlerine ayırma yöntemiyle bulunur. Bunun için

$$b(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n(t) Z_n(x),$$

kabul edilir. Kısmi türevler alınıp (1.8) probleminde yerine koyularak

$$\frac{D_n''(t)}{D_n(t)} = -\frac{Z_n''(x)}{Z_n(x)} = 0,$$

ya da

$$\frac{-D''(t)+D(t)}{D(t)} = \frac{Z''(x)}{Z(x)} = \lambda \quad (1.10)$$

bulunur. (1.8) de $Z'(0) = Z(\frac{\pi}{2}) = 0$ şartları verilmiştir. (1.10) denklemi

$$Z''(x) = \lambda Z(x), Z(0) = Z(\pi) = 0 \quad (1.11)$$

şeklinde adi diferansiyel denklemdir. $\lambda \geq 0$ ise (1.11) sınır değer problemi sadece $Z(x) = 0$ aşıkâr çözüme sahiptir. $\lambda < 0$ ise (1.11) sınır değer probleminin aşıkâr olmayan çözümü

$$Z_k(x) = \cos kx, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad k = \sqrt{-\lambda}$$

dir. (1.10) denklemindeki diğer adi diferansiyel denklem

$$D''(t) + D(t) = \lambda D(t), \quad k = \sqrt{-\lambda_k}, \quad k = 1, 2, \dots$$

dir. Bu adi diferansiyel denklemin çözümü

$$D_k(t) = A_k e^{\sqrt{1+k^2}t} + B_k e^{-\sqrt{1+k^2}t}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

şeklindedir.

$$b(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k e^{\sqrt{1+k^2}t} + B_k e^{-\sqrt{1+k^2}t} \right) \cos kx$$

yazılır.

$$b(0, x) = \cos x, \quad b(1, x) = b\left(\frac{1}{2}, x\right) + \frac{3}{4} \cos x,$$

lokal olmayan sınır değer şartları kullanılarak

$$A_1 = \frac{3 - 4e^{\sqrt{2}} + 4e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}}{4e^{\sqrt{2}} - 4e^{\frac{\sqrt{2}}{2}} - 4e^{\sqrt{2}} + 4e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}},$$

$$B_1 = \frac{4e^{\frac{\sqrt{2}}{2}} - 4e^{\sqrt{2}} + 3}{4e^{-\sqrt{2}} + 4e^{\frac{\sqrt{2}}{2}} - 4e^{\sqrt{2}} - 4e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}},$$

$$A_k = B_k = 0, \quad k = 2, 3, \dots$$

bulunur. Böylece (1.8) probleminin çözümü

$$b(t, x) = \left(\frac{3 - 4e^{\sqrt{2}} + 4e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}}{4e^{\sqrt{2}} - 4e^{\frac{\sqrt{2}}{2}} - 4e^{\sqrt{2}} + 4e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}} e^{\sqrt{2}t} + \frac{4e^{\frac{\sqrt{2}}{2}} - 4e^{\sqrt{2}} + 3}{4e^{-\sqrt{2}} + 4e^{\frac{\sqrt{2}}{2}} - 4e^{\sqrt{2}} - 4e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}} e^{\sqrt{2}t} \right) \cos x$$

olarak hesaplanır.

İkinci olarak (1.9) probleminin çözümü hesaplanır.

$$l(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k(t) \cos kx$$

şeklinde bir çözüm aranır.

$$-l_{tt} - l_{xx} + l = \sum_{k=1}^{\infty} \left[-C_k''(t) + (1 + k^2) C_k(t) \right] \cos kx = 2t^2 \cos x$$

dir. $k \neq 1$ ise

$$C_k''(t) - (1 + k^2) C_k(t) = 0,$$

ve

$$C_k(t) = c_1 e^{\sqrt{1+k^2}t} + c_2 e^{-\sqrt{1+k^2}t}$$

olur. Lokal olmayan sınır değer şartları

$$C_k(0) = 0, C_k(1) = C_k\left(\frac{1}{2}\right)$$

kullanılarak $c_1 = c_2 = 0$ ve $C_k(t) = 0$ bulunur.

$k = 1$ ise

$$-C_1''(t) + 2C_1(t) = 2t^2$$

dir.

Lokal olmayan sınır değer şartları

$$C_1(0) = 0, C_1(1) = C_1\left(\frac{1}{2}\right)$$

kullanılarak

$$c_1 = \frac{4e^{\sqrt{2}} - 4e^{\frac{\sqrt{2}}{2}} - 3}{4e^{\sqrt{2}} - 4e^{\frac{\sqrt{2}}{2}} - 4e^{\sqrt{2}} + 4e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}},$$

$$c_2 = \frac{4e^{\sqrt{2}} - 4e^{\frac{\sqrt{2}}{2}} - 3}{-4e^{\sqrt{2}} + 4e^{\frac{\sqrt{2}}{2}} + 4e^{\sqrt{2}} - 4e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}}$$

ve özel çözümünden

$$C_1(t) = t^2 + 1$$

bulunur. (1.9) probleminin çözümü

$$l(t, x) = \left(\frac{4e^{\sqrt{2}} - 4e^{\frac{\sqrt{2}}{2}} - 3}{4e^{\sqrt{2}} - 4e^{\frac{\sqrt{2}}{2}} - 4e^{\sqrt{2}} + 4e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}} e^{\sqrt{2}t} - \frac{4e^{\sqrt{2}} - 4e^{\frac{\sqrt{2}}{2}} - 3}{-4e^{\sqrt{2}} + 4e^{\frac{\sqrt{2}}{2}} + 4e^{\sqrt{2}} - 4e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}} e^{-\sqrt{2}t} \right) \cos x + (t^2 + 1) \cos x$$

dür. Sonuç olarak (1.7) formülünden

$$u(t, x) = b(t, x) + l(t, x) = (t^2 + 1) \cos x$$

çözümüne ulaşılır.

Aynı yol izlenerek çok boyutlu eliptik denklemler için aşağıdaki lokal olmayan sınır değer probleminin çözümü de bulunabilir.

$$\begin{cases} -\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} + \sum_{r=1}^n \alpha_r \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x_r^2} = h(t, x), \\ x = (x_1, \dots, x_n) \in \bar{\Omega}, \quad 0 < t < T, \\ u(0, x) = \eta(x), \quad x \in \bar{\Omega}, \\ u(T, x) = \sum_{k=1}^j \alpha_k u(\lambda_k, x) + \xi(x), \quad x \in \bar{\Omega}. \end{cases}$$

Burada $h(t, x)$ ($t \in [0, T]$, $x \in \bar{\Omega}$), $\eta(x)$, $\xi(x)$ ($x \in \bar{\Omega}$) düzgün fonksiyon olarak verilmiştir $\alpha_r < 0$. Ω , S sınırlı n -boyutlu Öklit uzayında R^n ($0 < x_k < 1, 1 \leq k \leq n$)

birim açık küptür $\bar{\Omega} = \Omega \cup S$, $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_j < T$.

Örnek 1.3. Lokal olmayan sınır değer probleminin çözümü

$$\begin{cases} -\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u = -2e^{-x}, \quad 0 < t < 1, 0 < x < \infty \\ u(0, x) = 0, \quad u(1, x) = u(\frac{1}{2}, x) + \frac{3}{4}e^{-x}, \quad 0 < x < \infty \\ u_x(t, 0) = -t^2, \quad u(t, 0) = t^2, \quad 0 < t < 1 \end{cases} \quad (1.12)$$

çözümü için Laplace dönüşüm yöntemi kullanılır.

$$\mathcal{F}^{-1}\{v(t,s)\} = u(t,x)$$

dönüşümü yapılır. Laplace dönüşüm özelliği kullanılarak

$$-v_{tt}(t,s) + (1-s^2)v(t,s) = (1-s)t^2 - \frac{2}{1+s}$$

elde edilir. Bu denklem çözüldüğünde

$$v(t,s) = c_1 e^{(\sqrt{1-s^2})t} + c_2 e^{-(\sqrt{1-s^2})t} + \frac{t^2}{1+s}$$

bulunur. (1.12) lokal olmayan sınır değer şartları

$$v(0,s) = 0, v(1,s) = v\left(\frac{1}{2},s\right) + \frac{3}{4(1+s)}$$

kullanılarak

$$v(t,s) = \frac{t^2}{1+s}$$

olarak hesaplanır. Bu denkleme ters Laplace dönüşümü uygulanarak, çözüm

$$u(t,x) = \mathcal{F}^{-1}\{v(t,s)\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{t^2}{1+s}\right\} = t^2 \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{1+s}\right\} = t^2 e^{-x}$$

dir.

Aynı yol izlenerek çok boyutlu eliptik denklemler için aşağıdaki lokal olmayan sınır değer probleminin çözümü de bulunabilir.

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} + \sum_{r=1}^n \alpha_r \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x_r^2} = h(t, x), \\ x = (x_1, \dots, x_n) \in \bar{\Omega}^+, \quad 0 < t < T, \\ u(0, x) = \eta(x), \quad x \in \bar{\Omega}, \\ u(T, x) = \sum_{k=1}^j \alpha_k u(\lambda_k, x) + \xi(x), \quad x \in \bar{\Omega}^+, \\ u(t, x)|_{x_k=0} = \alpha(t), \quad \frac{\partial u(t, x)}{\partial x_k}|_{x_k=0} = \beta(t), \\ 1 \leq k \leq n, \quad x \in \bar{\Omega}^+, \quad 0 \leq t \leq T. \end{array} \right.$$

Burada $h(t, x)$ ($t \in [0, T]$, $x \in \bar{\Omega}^+$), $\eta(x)$, $\xi(x)$ ($x \in \bar{\Omega}^+$) düzgün fonksiyon olarak verilmiştir $\alpha_r < 0$. Ω^+ , S^+ sınırlı n -boyutlu Öklit uzayında $\mathbb{R}^n$ ($0 < x_k < \infty$, $1 \leq k \leq n$) açık kümedir $\bar{\Omega}^+ = \Omega^+ \cup S^+$, $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_j < T$.

Örnek 1.4. Bu örnekte lokal olmayan eliptik problemin çözümü için

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u = [-2 - (1-t)^2(4x^2 - 3)]e^{-x^2} \\ 0 < t < 1, \quad -\infty < x < \infty \\ u(0, x) = e^{-x^2}, \quad u(1, x) = u(\frac{1}{2}, x) - \frac{1}{4}e^{-x^2}, \quad -\infty < x < \infty \end{array} \right. \quad (1.13)$$

Fourier dönüşüm yöntemi uygulanır.

$$v(t, s) = \mathbf{F}\{u(t, x)\}$$

dönüşümü yapılır.

(1.13) diferansiyel denkleminin iki tarafının Fourier transformu alınırsa

$$-v_{tt}(t, s) + (s^2 + 1)v(t, s) = \mathbf{F}\{[-2 - (1-t)^2(4x^2 - 3)]e^{-x^2}\}$$

bulunur. Bu denklem çözülürse

$$v(t, s) = c_1 e^{\sqrt{s^2 - 1}} + c_2 e^{-\sqrt{s^2 - 1}} + F\{e^{-x^2}\},$$

elde edilir. (1.13) diferansiyel denklemindeki lokal olmayan sınır değer şartlarına Fourier dönüşümü yapılırsa

$$v(0, s) = F\{e^{-x^2}\}, \quad v(1, s) = v\left(\frac{1}{2}, s\right) - \frac{1}{4} F\{e^{-x^2}\}$$

dır ve bu şartlar kullanılırsa

$$v(t, s) = (t - 1)^2 F\{e^{-x^2}\}$$

ulaşılır. Son olarak, ters Fourier dönüşümü yapılırsa (1.13) probleminin sonucu

$$u(t, x) = (t - 1)^2 e^{-x^2}$$

bulunur.

Aynı yol izlenerek

$$\begin{cases} -\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \sum_{|r|=2m} \alpha_r \frac{\partial^{|r|} u}{\partial x_1^{r_1} \dots \partial x_n^{r_n}} = h(t, x), \\ 0 \leq t \leq T, \quad x, r \in \mathbb{R}^n, \quad |r| = r_1 + \dots + r_n, \\ x = (x_1, \dots, x_n) \in \bar{\Omega}^+, \quad 0 < t < T, \\ u(0, x) = \eta(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ u(T, x) = \sum_{k=1}^j \alpha_k u(\lambda_k, x) + \xi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

çok boyutlu eliptik denklemler için aşağıdaki lokal olmayan sınır değer probleminin çözümü

de bulunabilir. Burada $\alpha_r < 0$ ve $h(t, x)$ ($t \in [0, T]$, $x \in \mathbb{R}^n$), $\eta(x)$, $\xi(x)$ ($x \in \mathbb{R}^n$) düzgün fonksiyon olarak verilmiştir. $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_j < T$.

Değişkenlerine ayırma yöntemi, Laplace dönüşüm yöntemi ve Fourier dönüşüm yöntemi sabit katsayılı lineer denklemlerin analitik çözümlerini bulmak için kullanılabilir. t veya x değişkenlerine bağlı katsayıları içeren kısmi diferansiyel denklemlerin çözümünde bu yöntemler çalışmaz. Bu tür denklemleri çözmek için uygulanan en kullanışlı yöntemlerden biri fark şeması yöntemidir.

Lineer diferansiyel denklemlerin aksine lineer olmayan diferansiyel denklemler için analitik çözümü elde etmede kullanılan genel bir yöntem yoktur. Fakat varyasyonlar prensibi gibi yöntemler lineer olmayan diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılır. Dönüşüm yöntemleri bazen lineer olmayan diferansiyel denklemlerin adi diferansiyel denklemlere dönüştürme ya da adi diferansiyel denklem sistemine dönüştürme görevini yapar. Pertürbasyon tekniği ve ayrıştırma metodu da bazı denklem çeşitleri için kullanılır; fakat bu yöntemler çok fazla hesap yükü oluşturur. Lineer olmayan diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılan bir diğer yöntem Adomian ayrıştırmasıdır. Bu metod hesap yükünü azaltmasından ve yakınsak seri içinde çözümü sağlamasından dolayı çok etkilidir. Şimdi kısaca bu yöntem anlatılacaktır.

1.1. Adomian Ayrıştırma Yöntemi

L ikinci mertebeden operatör olmak üzere

$$L_t u = \frac{d^2 u}{dt^2}$$

şeklinde tanımlanırken ters operatör

$$L_t^{-1} u = \int_0^t \int_0^s \frac{d^2 u}{dy^2} dy ds,$$

olarak tanımlanır.

$$u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) + au(x, t) + F(u(x, t)) = h(x, t)$$

denkleminin başlangıç şartları

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x)$$

dir. Bu denklemden

$$u(x, t) = f(x) + tg(x) + L_t^{-1} \left(u_{xx}(x, t) \right) \quad (1.14)$$

yazılır.

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t)$$

dönüşümü yapılır. Burada

$$\begin{cases} u_0(x, t) = f(x) + tg(x) + L_t^{-1}(h(x, t)) \\ u_{k+1}(x, t) = L_t^{-1}(u_{k_{xx}}(x, t) - u_k(x, t)) - L_t^{-1}(A_k) \end{cases} \quad (1.15)$$

dir. A_k Adomian polinomu olarak adlandırılır. Adomian polinomunu hesaplamak için kullanılan genel algoritma

$$A_n = \left(\frac{1}{n!} \right) \left(\frac{d^n}{d\lambda^n} \right) F(u(\lambda)) \Big|_{\lambda=0}, \quad (1.16)$$

$$\frac{d^n}{d\lambda^n} u(\lambda) \Big|_{\lambda=0} = n! u_n$$

dir. Bu formül açılarak

$$\left\{ \begin{array}{l} A_0 = F(u_0) \\ A_1 = u_1 F'(u_0) \\ A_2 = u_2 F'(u_0) + \frac{1}{2!} u_1^2 F''(u_0) \\ A_3 = u_3 F'(u_0) + u_1 u_2 F''(u_0) + \frac{1}{3!} u_1^3 F'''(u_0) \\ A_4 = u_4 F'(u_0) + \left(\frac{1}{2!} u_2^2 + u_1 u_3 \right) F''(u_0) + \frac{1}{2!} u_1^2 u_2 F'''(u_0) + \frac{1}{4!} u_1^4 F^{(4)}(u_0) \end{array} \right. \quad (1.17)$$

yazılır. Benzer şekilde diğer polinomlar hesaplanır. (1.15) ve (1.16) formüllerinin birleşiminden tüm $u_n(x, t)$ hesaplanabilir. u_0 ve u_1 arasındaki gürültü terim yok sayıldığında u_0 da geriye kalan terim tam çözümü verir. Eğer gürültü terim bulunamazsa ya da gürültü terim çıkarıldığında u_0 tam çözümü vermiyorsa iterasyona devam edilerek diğer u_n ler bulunur. u_0 ve u_1 in bileşenlerinde zıt işaretli aynı terimlere gürültü terim denir. Zıt işaretli aynı terimler sadece homojen olmayan diferansiyel denklemlerde ortaya çıkar (Wazwaz, 2009).

Örnek 1.5. Eliptik denklemler için

$$\left\{ \begin{array}{l} -u_{tt} - u_{xx} + u = xt \\ u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = x \end{array} \right. \quad (1.18)$$

probleminin çözümü için Adomian ayrıştırma yöntemi kullanılır.

(1.18) problemi operatör tanımıyla ve

$$u_n(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t)$$

dönüşümünden

$$-L_t \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) \right) - L_x \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) \right) + \sum_{n=0}^{\infty} A_n = xt$$

yazılır. (1.14) formülü ve ters operatör tanımından

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) = xt + \frac{xt^3}{6} - L_t^{-1} \left[\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) \right)_{xx} \right] + L_t^{-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n \right),$$

bulunur. (1.15) formülünden

$$u_0 = xt - \frac{xt^3}{6},$$

$$u_{k+1}(x, t) = -L_t^{-1} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} u_k(x, t) \right) - L_t^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial x} A_k \right), \quad k \geq 0,$$

$$u_1 = -L_t^{-1} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} u_0 \right) - L_t^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial x} A_0 \right)$$

şeklindedir. (1.17) Adomian polinomu kullanıldığında

$$A_0 = xt - \frac{xt^3}{6},$$

$$u_1 = \frac{xt^3}{6} - \frac{xt^5}{120}, \quad u_1 = \frac{xt^3}{6} - \frac{xt^5}{120},$$

hesaplanır. u_0 ve u_1 arasındaki gürültü terim $\frac{xt^3}{6}$ dır. Bu terim u_0 dan çıkarıldığında $u(t, x) = xt$ tam çözümü verir.

1.2. Önceki Çalışmalar

Yarı-lineer eliptik sınır değer problemleri

$$\begin{cases} \Delta u = f(x) \psi(u) & \text{in } \Omega, \\ u = 0, & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

şeklindedir. Burada f, u nun türevini içermeyen lineer olmayan operatördür.

Son yıllarda lineer olmayan eliptik denklemler üzerine yapılan çalışmalardan bazıları şunlardır:

Keller (1975), lineer olmayan problemlerin çözümlerinin kararlılığı ve izolasyonu arasındaki ilişkiyi araştırmıştır. Lineer olmayan problem izole çözüme ve kararlı Lipschitz sürekli doğrusallaştırmaya sahipse, problemin kararlı bir çözüme sahip olduğunu bulmuştur.

Sapagovas (1984),

$$\frac{d}{dx} \left(k_1(x, u, p) \frac{du}{dx} \right) + k_0(x, u, p) f(x) = 0, \quad x \in (a, b),$$

$$u(a) = \phi_1, \quad u(b) = \phi_2,$$

adi lineer olmayan diferansiyel denklemi için sınır problemini çalışmıştır. Burada

$$\int_a^b p(x) \frac{du}{dx} dx = V$$

integral şartıyla $p = \frac{du}{dx}$ dir.

Chabrowski (1992), yarı-lineer eliptik denklemler için lokal olmayan bir sınıf problem üzerinde birden fazla çözümün varlığını ispatlamıştır.

Pao (1995), çalışmasında lokal olmayan eliptik denklemlerin sayısal çözümleri blok monoton iteratif yöntemi ile araştırmıştır.

Lui (1998), tarafından yapılan çalışmada monoton yöntemle çözümü bulunan lineer olmayan eliptik problemler için Schwarz alternatif metodu ile yakınsaklığı incelenmiştir. Schwarz alternatif metodu ile eliptik denklemlerin sınır değer problemleri çözülmüştür.

Moiseev (2001), yaptığı çalışmada lokal olmayan sınır değer problemlerinin çözümleri üzerinde çalışmıştır.

Ferrero ve Gazzola (2001), $\mathbb{R}^n$ sınırlı bölgesinde yarı lineer eliptik denklemde teklik ve kritik büyüme üzerine çalışarak varlık sonuçlarına varyasyon yöntemiyle ulaşmıştır.

Bae (2002),

$$\Delta u + u^p + f(x) = 0$$

yarı-lineer eliptik denkleminin pozitif çözümlerin asimptotik davranışlarını incelemiştir.

Burada $n \geq 3$, $\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ Laplace operatörü, $p > 1$ olmak üzere $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ da sürekli fonksiyondur.

Bayrak (2003), doktora çalışmasında lineer olmayan eliptik denklem için

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x_1} \left(k(|\nabla u|^2) \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(k(|\nabla u|^2) \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) = F(x_1, x_2) \\ (x_1, x_2) \in \Omega \\ u(x_1, x_2) = 0, (x_1, x_2) \in \Gamma_1 \\ k(|\nabla u|^2) \frac{\partial u}{\partial n} = \varphi(x_1, x_2), (x_1, x_2) \in \Gamma_2 \end{cases}$$

karışık sınır değer problemini inceleyerek, zayıf çözümün varlığı ve tekliğini araştırmıştır. Sonlu farklar yöntemi ve sonlu elemanlar yöntemi ile fark şemaları oluşturularak, bu iki metot lineer olmayan eliptik denklemin sayısal çözümü için uygulanmıştır. Çıkan sonuçlar karşılaştırıldığında sonlu elemanlar yönteminin, sonlu farklar yöntemine göre yaklaşım hatasının daha küçük olduğu bulunmuştur.

Zhou ve Hu (2004),

$$\begin{cases} \Delta u = f(u), u > 0, u \in \Omega \\ u = 0, \end{cases}$$

yarı-lineer eliptik denklemi üzerine çalışmıştır. Burada $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ sınırlı dışbükey çokgen alanıdır. $W^{1,2}$ de hata kestirimleri verilmiştir ve L^2 düzeyli doğrusallaştırma metodu normudur.

Li ve Guo (2005), $\Omega \setminus \{0\}$ da $\Delta u = f(u)$ yarı lineer eliptik denkleminde tek pozitif kopma çözümünün varlığını çalışmıştır. $\lim_{|x| \rightarrow 0} u(x) = 0$ iken

$\Omega = B_R = \{x \in \mathbb{R}^N, |x| < R\} (n \geq 3)$ yuvarlaktır ve $f \in C^1(\mathbb{R}^1 \setminus \{0\})$ lineer olmayan

fonksiyon şu şartı sağlar: $q > 1, A > 0$ olmak üzere $(q-1)F(u) \leq uf(u)$, $0 < u \leq A$ ve

$$F(A) > 0, \quad F(u) = \int_u^\infty f(s)ds \text{ dir.}$$

Wang (2007)

$$\begin{cases} \Delta(k(x)\Delta u) = f(x, u, \Delta u), & x \in \Omega \\ B[u] = g_1(x), \quad B[k\Delta u] = g_2(x), & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

dördüncü mertebeden yarı-lineer sınır değer problemi üzerine çalışmıştır. Burada Δ , Laplace operatörü ve B , $B[w] = w$ olarak verilen lineer sınır operatörü ya da $\partial\Omega$ da $B[w] = \frac{\partial w}{\partial \nu} + \beta(\cdot)w$, $\beta(x) \geq 0$ ve $\beta \in C(\partial\Omega)$ dır. Bu çalışmada bazı koşullar formüle edilerek yakınsaklığın geometrik oranı garanti edilmiştir. Araştırmadaki ana fikir ve teknik diğer sınır değer problemlerine uygulanabilir.

Korkmaz (2008), tez çalışmasında

$$\begin{cases} Lu + g(x, u) = h(x) & x \in \Omega \\ \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} + a(x')u \right)_{\partial\Omega} = \varphi(x') & x' \in \partial\Omega \end{cases}$$

yarı doğrusal eliptik denklem için üçüncü sınıf sınır değer probleminin çözümünün varlığı ve tekliği üzerine çalışmıştır. Bu problemin model durumunda çözümün tek olması için gerekli koşullar tespit edilerek, çözümün tekliği ispatlanmıştır.

Bu çalışmalardan yola çıkarak, yarı lineer eliptik tipteki kısmi türevli diferansiyel denklemleri Bitsadze Samarskii (1969) lokal olmayan

$$\begin{cases} -\frac{d^2 u(t)}{dt^2} + Au(t) = f(t, u(t)), & 0 < t < 1 \\ u(0) = \varphi \\ u(1) = \sum_{j=1}^J \alpha_j u(\lambda_j) + \psi, & 0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_J < 1, \sum_{j=1}^J |\alpha_j| < 1 \end{cases} \quad (1.19)$$

sınır değer problemi incelenmiştir. Tezin amacı, (1.19) yarı-linear eliptik denklemler için sınır değer problemlerinin çözümünün varlığının ve tekliğinin araştırılması, problemin yaklaşık çözümleri için çözüm metotları elde etmektir.

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Şimdi kısaca bu bölümlerde yapılanlar anlatılacaktır.

Birinci bölüm giriştir. Bu bölümde problemle ilgili yapılan çalışmalar açıklandı. Tezin amacı ve bu tezde yapılacaklar verildi. Eliptik denklemler için analitik yöntemlerle linear örnekler ve linear olmayan örnek Adomian ayrıştırma yöntemiyle çözüldü.

İkinci bölüm iki alt bölüm içerir. Birinci kısımda Bitsadze-Samarskii tipinde lokal olmayan yarı-linear eliptik denklemin çözümünün varlığı ve tekliği Hilbert uzayında incelendi. Sabit nokta teoremi kullanılarak ispatlandı. İkinci kısımda birinci mertebeden doğruluk fark şeması kuruldu. Bu kısım fark şemasının çözümü için yakınsaklık teoremini ve ispatını kapsar.

Üçüncü bölüm sayısal analizi içerir. Çalışılan problemin linear eliptik denklemler ve yarı linear eliptik denklemlerin yaklaşık çözümleri için birinci mertebeden doğruluk fark şemasının sayısal uygulamaları ele alındı. Bu fark şeması modifiye edilmiş Gauss eliminasyon metodu ve iterasyon metodu kullanılarak matrislerden oluşan bir sisteme dönüştürüldü. Bu sistemin çözümü paket program kullanılarak yapıldı. Grafikleri ve hata analizlerini içeren tablolar verildi.

Dördüncü bölüm sonuç bölümüdür. Bulunan sonuçlar burada özetlenmiştir.

BÖLÜM 2

YARI LİNEER ELİPTİK DENKLEM İÇİN BİTSADZE-SAMARSKİİ TİPİNDE LOKAL OLMAYAN SINIR DEĞER PROBLEMİ

2.1. Problemin Çözümünün Varlığı ve Tekliği

Bu bölümde, yarı-lineer eliptik denklemler için Bitsadze-Samarskii tipi

$$\begin{cases} -\frac{d^2 u(t)}{dt^2} + Au(t) = f(t, u(t)), & 0 < t < 1, \\ u(0) = \varphi, \\ u(1) = \sum_{j=1}^J \alpha_j u(\lambda_j) + \Psi, & 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_J < 1, \sum_{j=1}^J |\alpha_j| < 1 \end{cases} \quad (2.1)$$

lokal olmayan sınır değer problemi H Hilbert uzayında, kendisine eşlenik pozitif tanımlanmış $A \geq \delta I$ ($\delta > \delta_0 > 0$) operatörü ve

$$\sum_{j=1}^J |\alpha_j| < 1 \quad (2.2)$$

varsayımı ile ele alınır. Burada $B = A^{\frac{1}{2}}$ dir.

Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa $u(t)$ fonksiyonu (2.1) probleminin çözümüdür.

i) $u(t)$, $[0,1]$ aralığında ikinci mertebeden sürekli türevlenebilir. $[0,1]$ aralığının başlangıç ve bitim noktalarında türevler, uygun tek yönlü türev olarak anlaşılır.

ii) $u(t)$, tüm $t \in [0,1]$ için $D(A)'$ ya aittir ve $Au(t)$ fonksiyonu $[0,1]$ aralığında süreklidir.

iii) $u(t)$, denklemi ve (2.1) probleminin lokal olmayan sınır değer şartlarını sağlar.

(2.1) probleminin çözümü $C([0,1], H)$ uzayında $[0,1]$ aralığında $\varphi(t)$ tüm sürekli fonksiyonların normu

$$\|\varphi\|_{C([0,1], H)} = \max_{0 \leq t \leq 1} \|\varphi(t)\|_H$$

şeklinde tanımlanacaktır.

Aşağıda ilerleyen kısımlarda gerekli olacak bazı lemmalar verildi.

Lemma 2.1.

$$I - e^{-2B} - \sum_{j=1}^J \alpha_j \left(e^{-(1-\lambda_j)B} - e^{-(1+\lambda_j)B} \right)$$

operatörünün

$$P \left(I - e^{-2B} - \sum_{j=1}^J \alpha_j \left(e^{-(1-\lambda_j)B} - e^{-(1+\lambda_j)B} \right) \right)^{-1}$$

ters operatörü vardır. Aşağıdaki kestirim sağlanır.

$$\|P\|_{H \rightarrow H} \leq M \quad (2.3)$$

İspat. B operatörünün spektral temsilini kullanarak

$$P = \int_0^\infty \frac{1}{1 - e^{-2\mu} - \sum_{j=1}^J \alpha_j (e^{-(1-\lambda_j)\mu} - e^{-(1+\lambda_j)\mu})} dE_\mu$$

elde edilir. Sonra üçgen eşitsizliğini kullanarak

$$\begin{aligned} & \left\| \left(I - \sum_{j=1}^J \alpha_j (1 - e^{-2B})^{-1} (e^{-(1-\lambda_j)B} - e^{-(1+\lambda_j)B}) \right)^{-1} \right\|_{H \rightarrow H} \\ & \leq \sup_{\mu \geq \delta} \frac{1}{\left| 1 - \sum_{j=1}^J \alpha_j \frac{(e^{-(1-\lambda_j)\mu} - e^{-(1+\lambda_j)\mu})}{(1 - e^{-2\mu})} \right|} \end{aligned}$$

bulunur.

$$\left| \frac{(e^{-(1-\lambda_j)\mu} - e^{-(1+\lambda_j)\mu})}{(1 - e^{-2\mu})} \right| \leq e^{-(1-\lambda_j)\mu} \frac{(1 - e^{-2\lambda_j\mu})}{(1 - e^{-2\mu})}$$

olduğundan

$$\sup_{\substack{j \in \mathbb{N} \\ j \neq 0}} \frac{1}{\left| 1 - \sum_{j=1}^J \frac{e^{-2\delta_j}}{e^{-2\delta_j} + e^{-2\delta_j}} \right|} \leq \sup_{\substack{j \in \mathbb{N} \\ j \neq 0}} \frac{1}{1 - \sum_{j=1}^J \frac{e^{-2\delta_j}}{e^{-2\delta_j} + e^{-2\delta_j}}}$$

dır. Böylece

$$\left\| \left(I - \sum_{j=1}^J \frac{e^{-2\delta_j}}{e^{-2\delta_j} + e^{-2\delta_j}} \right)^{-1} \right\|_{H \rightarrow H} \leq \frac{1}{1 - \sum_{j=1}^J \frac{e^{-2\delta_j}}{e^{-2\delta_j} + e^{-2\delta_j}}} \leq K$$

elde edilir. (2.3) kestirimi sağlanmıştır. Lemma 2.1. ispatlanmıştır.

Lemma 2.2.

$$\| (I - e^{-2B})^{-1} \|_{H \rightarrow H} \leq \frac{1}{1 - e^{-2\delta}} \quad (2.4)$$

$$\| B^\alpha \exp(-tB) \|_{H \rightarrow H} \leq t^{-\alpha}, \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \quad (2.5)$$

eşitsizlikleri geçerlidir (Ashyralyev ve Sobolevskii, 2004).

Teorem 2.1. Kabul edelim ki $f \in C([0,1], H)$ ve $L \frac{13}{2 \left(1 - \sum_{j=1}^J |\alpha_j| \right) (1 - e^{-2\delta}) (\sqrt{\delta})} < 1$

kabulu altında tüm $t \in [0,1], u, v \in H$ için $L > 0$ vardır ve Lipschitz şartını

$$\| f(t, u) - f(t, v) \|_H \leq L \| u - v \|_H \quad (2.6)$$

sağlar. Bu taktirde, (2.1) Bitsadze-Samarskii tipi lokal olmayan yarı-lineer eliptik denklemler için sınır değer problemi $C([0,1], H)$ uzayında tek çözüme sahiptir.

İspat. Bu teoremin ispatı sabit nokta teoremine dayanır. Bu yüzden (2.1) problemi eşdeğer integral $u(t) = Fu(t)$ eşitliğini yazmamız gerekir. F operatörü $C([0,1], H)$ uzayında

$$\begin{aligned}
Fu(t) = & \left(1 - e^{-2B}\right)^{-1} \left\{ \left(e^{-tB} - e^{-(2-t)B}\right) \varphi + \left(e^{-(1-t)B} - e^{-(1+t)B}\right) u(1) \right. \\
& \left. - \left(e^{-(1-t)B} - e^{-(1+t)B}\right) (2B)^{-1} \int_0^1 \left(e^{-(1-s)B} - e^{-(1+s)B}\right) f(s, u(s)) ds \right\} \\
& + (2B)^{-1} \int_0^1 \left(e^{-|t-s|B} - e^{-(t+s)B}\right) f(s, u(s)) ds, 0 < t < 1
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Burada,

$$\begin{aligned}
u(1) = & \left(I - e^{-2B} - \sum_{j=1}^J \alpha_j \left(e^{-(1-\lambda_j)B} - e^{-(1+\lambda_j)B} \right) \right)^{-1} \\
& \times \left[\sum_{j=1}^J \alpha_j \left\{ \left(e^{-\lambda_j B} - e^{-(2-\lambda_j)B} \right) \varphi - \left(e^{-(1-\lambda_j)B} - e^{-(1+\lambda_j)B} \right) \right. \right. \\
& \times \frac{1}{2} B^{-1} \int_0^1 \left(e^{-(1-s)B} - e^{-(1+s)B} \right) f(s, u(s)) ds + \left(I - e^{-2B} \right) \frac{1}{2} B^{-1} \Bigg) \\
& \times \left(\int_0^{\lambda_j} e^{-(\lambda_j-s)B} f(s, u(s)) ds + \int_{\lambda_j}^1 e^{-(s-\lambda_j)B} f(s, u(s)) ds - \int_0^1 e^{-(\lambda_j+s)B} f(s, u(s)) ds \right) \Bigg\} \\
& + (I - e^{-2B}) \Psi \Big]
\end{aligned}$$

dır. $Fu(t)$, $C([0,1], H)$ uzayını $C([0,1], H)$ uzayının içine

$$\begin{aligned}
Fu(t) = & (I - e^{-2B})^{-1} \left\{ \left(e^{-tB} - e^{-(2-t)B} \right) \varphi + \left(e^{-(1-t)B} - e^{-(1+t)B} \right) \right. \\
& \times \left(I - e^{-2B} - \sum_{j=1}^J \alpha_j \left(e^{-(1-\lambda_j)B} - e^{-(1+\lambda_j)B} \right) \right)^{-1} \\
& \times \left[(I - e^{-2B}) \Psi + \sum_{j=1}^J \alpha_j \left\{ \left(e^{-\lambda_j B} - e^{-(2-\lambda_j)B} \right) \varphi - \left(e^{-(1-\lambda_j)B} - e^{-(1+\lambda_j)B} \right) \right. \right. \\
& \times \frac{1}{2} B^{-1} \int_0^1 \left(e^{-(1-s)B} - e^{-(1+s)B} \right) f(s, u(s)) ds \Bigg\} \\
& + (I - e^{-2B}) \frac{1}{2} B^{-1} \Bigg) \\
& \times \left(\int_0^{\lambda_j} e^{-(\lambda_j-s)B} f(s, u(s)) ds + \int_{\lambda_j}^1 e^{-(s-\lambda_j)B} f(s, u(s)) ds - \int_0^1 e^{-(\lambda_j+s)B} f(s, u(s)) ds \right) \Bigg] \\
& - \left(e^{-(1-t)B} - e^{-(1+t)B} \right) \frac{1}{2} B^{-1} \int_0^1 \left(e^{-(1-s)B} - e^{-(1+s)B} \right) f(s, u(s)) ds \Bigg\} \\
& + \frac{1}{2} B^{-1} \left(\int_0^t e^{-(t-s)B} f(s, u(s)) ds + \int_t^1 e^{-(s-t)B} f(s, u(s)) ds - \int_0^1 e^{-(t+s)B} f(s, u(s)) ds \right)
\end{aligned}$$

dönüştürür. F 'in $C([0,1], H)$ 'de kısalma eşleyen operatör olduğunu ispatlayabiliriz.

$$\begin{aligned}
J_1 &= (I - e^{-2B})^{-1} (e^{-(1-t)B} - e^{-(1+t)B}) \\
&\times \left(I - e^{-2B} - \sum_{j=1}^J \alpha_j (e^{-(1-\lambda_j)B} - e^{-(1+\lambda_j)B}) \right)^{-1} \\
&\times \left(\sum_{j=1}^J \alpha_j (e^{-(1+\lambda_j)B} - e^{-(1-\lambda_j)B}) \right. \\
&\times \left. \frac{1}{2} \int_0^1 (e^{-(1-s)B} - e^{-(1+s)B}) B^{-1} (f(s, u(s)) - f(s, v(s))) ds \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_2 &= (e^{-(1-t)B} - e^{-(1+t)B}) \\
&\times \left(I - e^{-2B} - \sum_{j=1}^J \alpha_j (e^{-(1-\lambda_j)B} - e^{-(1+\lambda_j)B}) \right)^{-1} \\
&\times \frac{1}{2} \left(\int_0^{\lambda_j} e^{-(\lambda_j-s)B} ds (B^{-1} (f(s, u(s)) - f(s, v(s)))) \right. \\
&+ \int_{\lambda_j}^1 e^{-(s-\lambda_j)B} ds (B^{-1} (f(s, u(s)) - f(s, v(s)))) \\
&\left. - \int_0^1 e^{-(\lambda_j+s)B} ds (B^{-1} (f(s, u(s)) - f(s, v(s)))) \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_3 &= (I - e^{-2B})^{-1} (e^{-(1-t)B} - e^{-(1+t)B}) \\
&\times \frac{1}{2} \int_0^1 (e^{-(1-s)B} - e^{-(1+s)B}) ds (B^{-1} (f(s, u(s)) - f(s, v(s))))
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
J_4 &= \frac{1}{2} \left(\int_0^t e^{-(t-s)B} ds (B^{-1} (f(s, u(s)) - f(s, v(s)))) \right. \\
&+ \int_t^1 e^{-(s-t)B} ds (B^{-1} (f(s, u(s)) - f(s, v(s)))) \\
&\left. - \int_0^1 e^{-(t+s)B} ds (B^{-1} (f(s, u(s)) - f(s, v(s)))) \right)
\end{aligned}$$

dir. J_1, J_2, J_3 ve J_4 ün ayrı ayrı kestirimleri hesaplanır.

(2.3), (2.4) ve (2.5) kestirimleri kullanılarak ve (2.2) kabulünden

$$\begin{aligned} \|J_1\|_H &\leq \|(I - e^{-2B})^{-1}\|_{H \rightarrow H} \|(e^{-(1-t)B} - e^{-(1+t)B})\|_{H \rightarrow H} \|P\|_{H \rightarrow H} \\ &\times \sum_{j=1}^J |\alpha_j| \|(e^{-(1+\lambda_j)B} - e^{-(1-\lambda_j)B})\|_{H \rightarrow H} \frac{1}{2} \|B^{-1}\|_{H \rightarrow H} \\ &\times \|1 - 2e^{-B} - e^{-2B}\|_{H \rightarrow H} \|B^{-1}(f(s, u(s)) - f(s, v(s)))\|_H, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|J_1\|_H &\leq \|(I - e^{-2B})^{-1}\|_{H \rightarrow H} \|(e^{-(1-t)B} (1 - e^{-2tB}))\|_{H \rightarrow H} \|P\|_{H \rightarrow H} \\ &\times \sum_{j=1}^J |\alpha_j| \|(e^{-(1-\lambda_j)B} (1 - e^{-2\lambda_j B}))\|_{H \rightarrow H} \frac{1}{2} \|B^{-1}\|_{H \rightarrow H} \\ &\times \|1 - 2e^{-B} - e^{-2B}\|_{H \rightarrow H} \|B^{-1}(f(s, u(s)) - f(s, v(s)))\|_H \\ &< \frac{8L}{(1 - \sum_{j=1}^J |\alpha_j|)(1 - e^{-2\sqrt{\delta}})(\sqrt{\delta})} \|u - v\|_{C([0,1], H)} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \|J_2\|_H &\leq \|e^{-(1-t)B} (1 - e^{-2tB})\|_{H \rightarrow H} \|P\|_{H \rightarrow H} \\ &\times \frac{1}{2} \left(\|B^{-1}\|_{H \rightarrow H} \|1 - e^{-\lambda_j B}\|_{H \rightarrow H} \|B^{-1}(f(s, u(s)) - f(s, v(s)))\|_H \right. \\ &+ \|B^{-1}\|_{H \rightarrow H} \|1 - e^{-(1-\lambda_j)B}\|_{H \rightarrow H} \|B^{-1}(f(s, u(s)) - f(s, v(s)))\|_H \\ &\left. + \|B^{-1}\|_{H \rightarrow H} \|e^{-\lambda_j B} (1 - e^{-B})\|_{H \rightarrow H} \|B^{-1}(f(s, u(s)) - f(s, v(s)))\|_H \right) \\ &\leq \frac{3L}{2\sqrt{\delta}(1 - \sum_{j=1}^J |\alpha_j|)} \|u - v\|_{C([0,1], H)}, \end{aligned}$$

her $t \in [0,1]$ elde edilir. J_3 ve J_4 ün kestirimlerini hesaplamalarında (2.4) ve (2.5) kestirimlerinden faydalanılarak

$$\begin{aligned}
\|J_3\| &\leq \|(I - e^{-2B})^{-1}\|_{H \rightarrow H} \|e^{-(1-t)B} (1 - e^{-2tB})\|_{H \rightarrow H} \\
&\quad \times \frac{1}{2} \|B^{-1}\|_{H \rightarrow H} \|1 - 2e^{-B} - e^{-2B}\|_{H \rightarrow H} \\
&\quad \times \|B^{-1}(f(s, u(s)) - f(s, v(s)))\|_H \\
&\leq \left(\frac{L}{(1 - e^{-2\sqrt{\delta}})(\sqrt{\delta})} \right) \|u - v\|_{C([0,1], H)},
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\|J_4\|_H &< \frac{1}{2} (\|1 - e^{-tB}\|_{H \rightarrow H} \|B^{-1}\|_{H \rightarrow H} \|B^{-1}(f(s, u(s)) - f(s, v(s)))\|_H \\
&+ \|1 - e^{-(1-t)B}\|_{H \rightarrow H} \|B^{-1}\|_{H \rightarrow H} \|B^{-1}(f(s, u(s)) - f(s, v(s)))\|_H \\
&+ \|e^{-tB}(1 - e^{-B})\|_{H \rightarrow H} \|B^{-1}\|_{H \rightarrow H} \|B^{-1}(f(s, u(s)) - f(s, v(s)))\|_H) \\
&\leq \frac{3L}{\sqrt{\delta}} \|u - v\|_{C([0,1], H)},
\end{aligned}$$

her $t \in [0, 1]$ için bulunur.

Bulduğumuz sonuçları birleştirerek

$$\|Fu(t) - Fv(t)\|_{C([0,1], H)} < \alpha_\mu \|u - v\|_{C([0,1], H)}$$

ulaşılır. Burada $\alpha_\mu = L \frac{13}{2 \left(1 - \sum_{j=1}^J |\alpha_j|\right) (1 - e^{-2\sqrt{\delta}})(\sqrt{\delta})}$ dir. Sabit nokta teoreminden; F ,

(2.1) probleminin tek bir çözümü olan tek bir sabit noktayı sağlar.

2.2. Birinci Mertebeden Doğruluk Fark Şeması ve Yakınsaklığı

(2.1) lokal olmayan Bitsadze-Samarskii sınır değer probleminin yaklaşık çözümü için birinci mertebeden doğruluk fark şeması

$$\begin{cases} -\tau^{-2}(u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}) + Au_k = f(t_k, u_k) \\ t_k = k\tau, 1 \leq k \leq N-1, N\tau = 1, u_0 = \varphi \\ u_N = \sum_{j=1}^J \alpha_j u_{\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]} + \Psi \end{cases} \quad (2.7)$$

dır.

Bu tezde, $F([0,1]_\tau, H)$, $\varphi^\tau = \{\varphi_k\}_{k=1}^{N-1}$ Hilbert uzayında değerleriyle ağ (mesh) fonksiyonlarının oluşturduğu lineer uzayıdır.

$$\|\varphi^\tau\|_{C([0,1]_\tau, H)} = \max_{1 \leq k \leq N-1} \|\varphi_k\|_H$$

normlu bütün $\varphi^\tau = \{\varphi_k\}_{k=1}^{N-1}$ ağ (mesh) fonksiyonlarının uzayları da $C([0,1]_\tau, H)$ Banach uzaylarıdır. İspatlarda gerekecek bazı lemmalar aşağıda verilmiştir.

Lemma 2.3.

$$\|R^k\|_{H \rightarrow H} \leq M(\delta)(1 + \delta_\tau \tau)^{-k}, k\tau \|BR^k\|_{H \rightarrow H} \leq M(\delta), k \geq 1, \delta > 0, \quad (2.8)$$

$$\|B^\beta(R^{k+r} - R^k)\|_{H \rightarrow H} \leq M(\delta) \frac{(r\tau)^\alpha}{(k\tau)^{\alpha+\beta}}, 1 \leq k < k+r \leq N, 0 \leq \alpha, \beta \leq 1, \quad (2.9)$$

$$\|(I - R^{2N})^{-1}\|_{H \rightarrow H} \leq M(\delta) \quad (2.10)$$

(Ashyralyev ve Sobolevskii, 2004).

Lemma 2.4.

$$I - \sum_{j=1}^J \alpha_j (I - R^{2N})^{-1} \left(R^{N-\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]} - R^{N+\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]} \right)$$

operatörünün

$$T_h = \left[I - \sum_{j=1}^J \alpha_j (I - R^{2N})^{-1} \left(R^{N-\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]} - R^{N+\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]} \right) \right]^{-1}$$

tersi vardır ve

$$\|T_h\|_{H \rightarrow H} \leq \left(1 - \sum_{j=1}^J |\alpha_j| \right)^{-1} \langle u, u \rangle \quad (2.11)$$

kestirimi sağlanır.

İspat.

$$z = \sum_{j=1}^J \left(R^{N-\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]} - R^{N+\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]} \right) u$$

olsun. B nin spektral temsili ve Cauchy eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned} & \left\langle \left(I - R^{2N} \right)^{-1} \left(R^{N-\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]} - R^{N+\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]} \right) u, u \right\rangle \\ & \leq \left\| \left(I - R^{2N} \right)^{-1} \left(R^{N-\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]} - R^{N+\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]} \right) u \right\|_{H \rightarrow H} \|u\|_H \\ & \leq \left\| \left(I - \left(I + \tau \frac{1}{2} \left(\tau A + \sqrt{4A + \tau^2 A^2} \right) \right)^{-2N} \right)^{-1} \right. \\ & \quad \times \left(\left(I + \tau \frac{1}{2} \left(\tau A + \sqrt{4A + \tau^2 A^2} \right) \right)^{-(N-\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right])} \right. \\ & \quad \left. \left. - \left(I + \tau \frac{1}{2} \left(\tau A + \sqrt{4A + \tau^2 A^2} \right) \right)^{-(N+\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right])} \right) \right\| \|u\|_H \|u\|_H \\ & \leq \sup_{\delta^{1/2} \leq \mu < \infty} \left\| \left(1 - \left(1 + \frac{\tau}{2} \left(\tau \mu + \sqrt{4\mu + \tau^2 \mu^2} \right) \right)^{-2N} \right)^{-1} \right. \\ & \quad \times \left(\left(1 + \frac{\tau}{2} \left(\tau \mu + \sqrt{4\mu + \tau^2 \mu^2} \right) \right)^{-(N-\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right])} \right. \\ & \quad \left. \left. - \left(1 + \frac{\tau}{2} \left(\tau \mu + \sqrt{4\mu + \tau^2 \mu^2} \right) \right)^{-(N+\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right])} \right) \right\| \|u\|_H^2 \\ & \leq \left(I + \tau \frac{1}{2} \left(\tau \delta^{\frac{1}{2}} + \sqrt{4\delta^{\frac{1}{2}} + \tau^2 \delta} \right) \right)^{-(N-\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right])} \\ & \quad \sup_{\delta^{1/2} \leq \mu < \infty} \left\| \left(I - \left(I + \tau \frac{1}{2} \left(\tau \mu + \sqrt{4\mu + \tau^2 \mu^2} \right) \right)^{-2N} \right)^{-1} \right. \\ & \quad \left. \left. - \left(I + \tau \frac{1}{2} \left(\tau \mu + \sqrt{4\mu + \tau^2 \mu^2} \right) \right)^{-2\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]} \right\| \langle u, u \rangle \\ & \leq \left(I + \tau \frac{1}{2} \left(\tau \delta^{\frac{1}{2}} + \sqrt{4\delta^{\frac{1}{2}} + \tau^2 \delta} \right) \right)^{-(N-\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right])} \langle u, u \rangle \leq \langle u, u \rangle \end{aligned}$$

bulunur. Üçgen eşitsizliği kullanılmasıyla

$$\|u\|_{C([0,1], H)} \leq \|u\|_{C([0,1], H)} + \|u\|_{C([0,1], H)}$$

$$\|u\|_{C([0,1], H)} \leq \sum_{j=1}^J \|u\|_{C([0,1], H)} + \|u\|_{C([0,1], H)}$$

$$\left(1 + \sum_{j=1}^J \|u\|_{C([0,1], H)}\right) \|u\|_{C([0,1], H)}$$

olduğunu gösterir. Böylece Lemma 2.4. ün ispatı tamamlanır.

Aşağıdaki teorem normu

$$\|u\|_{C([0,1], H)} = \max_{1 \leq k \leq N} \|u_k\|_H,$$

olan $C([0,1]_r, H)$ grid fonksiyon uzayında (2.7) fark şemasının $u^\tau = \{u_k\}_{k=1}^N$ çözümünün tekliğiyle ilgilidir.

Teorem 2.2. Kabul edelim ki $f, C([0,1]_r, H)$ uzayında (2.6) Lipschitz şartını sağlasın. (2.7) fark şemasının $C([0,1]_r, H)$ uzayında tek çözümü vardır.

İspat. Bu teoremin ispatı $C([0,1]_r, H)$ uzayında F operatörü kullanılarak Teorem 2.1 e dayanır. F operatörü

$$\begin{aligned} Fu_k &= (I - R^{2N})^{-1} \left\{ (R^k - R^{2N-k})\varphi + (R^{N-k} - R^{N+k})u_N \right. \\ &\quad \left. - (R^{N-k} - R^{N+k})S \sum_{i=1}^{N-1} B^{-1} (R^{N-1-i} - R^{N-1+i}) f(t_i, u_i) \tau \right\} \\ &\quad + S \sum_{i=1}^{N-1} (R^{|k-i|-1} - R^{k+i-1}) B^{-1} f(t_i, u_i) \tau, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \end{aligned}$$

dir. Burada

$$S = (2I + \tau B)^{-1}, B = \frac{1}{2}(\tau A + \sqrt{4A + \tau^2 A^2}), R = (I + \tau B)^{-1}$$

ve

$$\begin{aligned} u_N = & T_h \left[\sum_{j=1}^J \alpha_j (I - R^{2N})^{-1} \left\{ \left(R^{\left[\frac{\lambda_j}{\tau} \right]} - R^{2N - \left[\frac{\lambda_j}{\tau} \right]} \right) \varphi \right. \right. \\ & - \left(R^{N - \left[\frac{\lambda_j}{\tau} \right]} - R^{N + \left[\frac{\lambda_j}{\tau} \right]} \right) S \sum_{i=1}^{N-1} (R^{N-1-i} - R^{N-1+i}) f(t_i, u_i) \tau \Big\} \\ & \left. + S \sum_{i=1}^{N-1} (R^{\left[\frac{\lambda_j}{\tau} \right] - i - 1} - R^{\left[\frac{\lambda_j}{\tau} \right] + i - 1}) f(t_i, u_i) \tau + \Psi \right] \end{aligned}$$

dır. Burada

$$T_h = \left[I - \sum_{j=1}^J \alpha_j (I - R^{2N})^{-1} \left(R^{N - \left[\frac{\lambda_j}{\tau} \right]} - R^{N + \left[\frac{\lambda_j}{\tau} \right]} \right) \right]^{-1}$$

şeklinde tanımlanır. (2.6) Lipschitz şartı ve (2.8), (2.10) kestirimleri kullanılarak

$$\begin{aligned} \|Fu_k - Fv_k\|_H & \leq \|(I - R^{2N})^{-1}\|_{H \rightarrow H} \left\| R^{N-k} (I - R^{2k}) \right\|_{H \rightarrow H} \|u_N - v_N\|_H \\ & + \left\| R^{N-k} (I - R^{2k}) \right\|_{H \rightarrow H} \|S\|_{H \rightarrow H} \sum_{i=1}^{N-1} \left\| R^{N-1-i} (I - R^{2i}) \right\|_{H \rightarrow H} \\ & \times \tau \left\| B^{-1} (f(t_i, u_i) - f(t_i, v_i)) \right\|_H + \|S\|_{H \rightarrow H} \\ & \times \sum_{i=1}^{k-1} \left\| R^{k-1-i} (I - R^{2i}) \right\|_{H \rightarrow H} \tau \left\| B^{-1} (f(t_i, u_i) - f(t_i, v_i)) \right\|_H \\ & + \left\| S \right\|_{H \rightarrow H} \sum_{i=k}^{N-1} \left\| R^{i-k-1} (I - R^{2k}) \right\|_{H \rightarrow H} \tau \left\| B^{-1} (f(t_i, u_i) - f(t_i, v_i)) \right\|_H \Big\} \\ & \leq \frac{7LM(\delta)}{1 - \sum_{j=1}^J |\alpha_j|} \|u_i - v_i\|_H \end{aligned}$$

bulunur. Burada

$$\|u_N - v_N\|_H \leq \frac{4LM(\delta)}{1 - \sum_{j=1}^J |\alpha_j|} \|u_i - v_i\|_H$$

dır. Bu (2.8), (2.10), (2.11) kestirimleri (2.6) Lipschitz şartından ve (2.2) şartından

$$\begin{aligned} \|u_N - v_N\|_H &\leq \|T_h\|_{H \rightarrow H} \left(\sum_{j=1}^J |\alpha_j| \|(I - R^{2N})^{-1}\|_{H \rightarrow H} \left\| R^{N - \left\lceil \frac{\lambda_j}{\tau} \right\rceil} \left(I - R^{2 \left\lceil \frac{\lambda_j}{\tau} \right\rceil} \right) \right\|_{H \rightarrow H} \right. \\ &\times \|S\|_{H \rightarrow H} \sum_{i=1}^{N-1} \|R^{N-1-i} (I - R^{2i})\|_{H \rightarrow H} \tau \|B^{-1}(f(t_i, u_i) - f(t_i, v_i))\|_H \\ &+ \|S\|_{H \rightarrow H} \sum_{i=1}^{\left\lceil \frac{\lambda_j}{\tau} \right\rceil - 1} \|R^{\left\lceil \frac{\lambda_j}{\tau} \right\rceil - 1 - i}\|_{H \rightarrow H} \tau \|B^{-1}(f(t_i, u_i) - f(t_i, v_i))\|_H \\ &+ \|S\|_{H \rightarrow H} \sum_{i=\left\lceil \frac{\lambda_j}{\tau} \right\rceil}^{N-1} \|R^{i - \left\lceil \frac{\lambda_j}{\tau} \right\rceil - 1}\|_{H \rightarrow H} \tau \|B^{-1}(f(t_i, u_i) - f(t_i, v_i))\|_H \\ &\left. + \|S\|_{H \rightarrow H} \sum_{i=1}^{N-1} \|R^{\left\lceil \frac{\lambda_j}{\tau} \right\rceil - 1 + i}\|_{H \rightarrow H} \tau \|B^{-1}(f(t_i, u_i) - f(t_i, v_i))\|_H \right) \\ &\leq \frac{4LM(\delta)}{1 - \sum_{j=1}^J |\alpha_j|} \|u_i - v_i\|_H \end{aligned}$$

bulunur. Böylece Teorem 2.2. nin ispatı tamamlanır.

Teorem 2.3. Kabul edelim ki (2.7) deki fark şemasının çözümü t_k da u_k ve $u(t_k)$, (2.1) probleminin tam çözümü olsun. Eğer $u''(t)$ sürekli fonksiyon ve f (2.6) Lipschitz şartını sağlarsa yakınsaklık kestirimi

$$\|u_k - u(t_k)\|_H \leq \mu \tau \tag{2.12}$$

μ, τ dan bağımsız olduğunda sağlanır.

İspat. (2.1) problemini (2.7) birinci mertebeden fark şemasına yerleştirerek

$$\begin{cases} -\tau^{-2}(z_{k+1} - 2z_k + z_{k-1}) + Az_k = A_k, 1 \leq k \leq N-1 \\ z_0 = A_0 \\ z_N = \sum_{j=1}^J \alpha_j z_{\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]} + A_N = \psi \end{cases} \quad (2.13)$$

elde edilir. Burada $z_k = u(t_k) - u_k$ (2.13) fark şemasının yakınsaklık hatasını gösterir. A_k formülü

$$\begin{aligned} A_k &= f(t_k, u_k) - f(t_k, u(t_k)) + \left(\frac{d^2 u(t_k)}{dt^2} - \frac{u(t_{k+1}) - 2u(t_k) + u(t_{k-1}))}{\tau^2} \right), \\ 1 \leq k \leq N-1, \\ A_0 &= u(t_0) - u_0 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_N &= u(t_N) - u_N = \sum_{j=1}^J \alpha_j \left(u\left(\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]\right) - u_{\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]} \right) \\ &= u(t_N) - \sum_{j=1}^J \alpha_j \left(u\left(\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]\tau\right) - u(t_N) \right) + \sum_{j=1}^J \alpha_j u(\lambda_j) \\ &= \sum_{j=1}^J \alpha_j \left(u(\lambda_j) - u\left(\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]\tau\right) \right) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.

(2.13) birinci mertebeden fark şemasının çözümü

$$\begin{aligned} z_k &= -(I - R^{2N})^{-1} \left[(R^k - R^{2N-k})z_0 + (R^{N-k} - R^{N+k})z_N + (R^{N-k} - R^{N+k}) \right. \\ &\quad \times (I + \tau B)(2I + \tau B)^{-1} B^{-1} \sum_{i=1}^{N-1} (R^{N-i} - R^{N+i}) A_i \tau \left. \right] + (I + \tau B)(2I + \tau B)^{-1} \\ &\quad \times \left(B^{-1} \sum_{i=1}^k R^{k-i} A_i \tau + \sum_{i=k+1}^{N-1} R^{i-k} A_i \tau - \sum_{i=1}^{N-1} R^{k+i} A_i \tau \right), 1 \leq k \leq N-1 \end{aligned} \quad (2.14)$$

dır. $z_0 = 0$ olduğunda

elde edilir. (2.14) denklemi kullanılarak ve $\|R\|_{H \rightarrow H} \leq 1$ ve $\left\| (I - R^{2N})^{-1} \right\|_{H \rightarrow H} < M(\delta)$ eşitsizlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned} \|z_k\|_H &\leq M_1 \tau \sum_{i=1}^{N-1} \|A_i\|_H \leq M_1 \sum_{i=1}^{N-1} \tau L \|u_k - u(t_k)\|_H + M_1 \sum_{i=1}^{N-1} \mu \tau^2 \\ &\leq M_1 \tau L \sum_{j=1}^{N-1} \|u_j - u(t_j)\|_H + M_2 \tau^2 \end{aligned}$$

elde edilir.

$$M_1 = \frac{5}{2 \left(1 - \sum_{j=1}^J |\alpha_j| \right) \sqrt{\delta} (1 - e^{-2\sqrt{\delta}})} \text{ ve } 1 - M_1 \tau L < 1$$

olduğundan

$$\square_k \square_H \diamond M^{\circ} \mathcal{Q}$$

dır. Sınır şartı incelenirse

[illegible]

olduğundan

$$z_N = \sum_{j=1}^J \alpha_j z_{\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]} + \Psi$$

bulunur. Kestirimi alınırsa

$$\begin{aligned} \|z_N\| &\leq \|u(1) - u_N\|_H \\ &\leq \sum_{j=1}^J |\alpha_j| \left\| u(\lambda_j) - u_{\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]} \right\|_H \\ &\leq \sum_{j=1}^J |\alpha_j| \left\| z_{\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]} \right\|_H + \|\Psi\|_H \end{aligned}$$

$$\|\Psi\|_H \leq M_1 \tau$$

elde edilir. Burada

$$\Psi = \sum_{j=1}^J \alpha_j \left(u(\lambda_j) - u\left(\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]\tau\right) \right)$$

dır. Böylece (2.13) birinci mertebeden doğruluk fark şemasının çözümü için (2.12) yakınsaklık kestirimi sağlanır. İspat tamamlanmış olur.

BÖLÜM 3

SAYISAL SONUÇLAR

Lineer eliptik denklemler için Bitsadze-Samarskii tipi lokal olmayan sınır değer problemi olarak

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} + u = e^{-t} \cos x, \\ 0 < t < 1, 0 < x < \pi, \\ u(0, x) = \cos x + 1, \\ u(1, x) = u(\frac{1}{2}, x) + (e^{-1} - e^{-\frac{1}{2}})(\cos x + 1), 0 < x < \pi, \\ u_x(t, 0) = u(t, \pi) = 0, 0 < t < 1 \end{array} \right. \quad (3.1)$$

ele alalım. Bu problemin tam çözümü

$$u(t, x) = e^{-t} (\cos x + 1)$$

dir.

Bu bölümde; (3.1) lokal olmayan Bitsadze-Samarskii sınır değer probleminin yaklaşık çözümü için birinci mertebeden doğruluk fark şeması kullanılır. n ye bağlı matris katsayılı ikinci mertebeden fark denklemleri oluşur. Bu fark denklemlerini çözmek için modifiye edilmiş Gauss eliminasyon metodu uygulanır.

3.1. Lineer Eliptik Denklemler İçin Birinci Mertebeden Doğruluk Fark Şemasının Sayısal Sonuçları

İlk olarak (3.1) lokal olmayan Bitsadze-Samarskii sınır değer probleminin yaklaşık çözümü için,

$$\begin{aligned} [0, 1]_\tau \times [0, \pi]_h = \{ (t_k, x_n) : t_k = k\tau, 1 \leq k \leq N-1, N\tau = 1, \\ x_n = nh, 1 \leq n \leq M-1, Mh = \pi \} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan τ ve h küçük parametrelerine bağlı grid noktalar ailesi $[0,1]_\tau \times [0,\pi]_h$ kümesidir.

Yaklaşım formülü

$$\frac{u(x_{n+1}) - u(x_n)}{h} - u'(x_n) = O(h)$$

ve (2.7) fark şemasından faydalanılarak, (3.1) lokal olmayan Bitsadze-Samarskii sınır değer probleminin yaklaşık çözümü için birinci mertebeden doğruluk fark şeması

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{u_n^{k+1} - 2u_n^k + u_n^{k-1}}{\tau^2} - \frac{u_{n+1}^k - 2u_n^k + u_{n-1}^k}{h^2} + u_n^k = f(t_k, x_n), \\ 1 \leq k \leq N-1, 1 \leq n \leq M-1, \\ u_n^0 = \varphi(x_n), 0 \leq n \leq M, \\ u_n^N = u_n^{\frac{N}{2}} + \left[e^{-1} - e^{-\frac{1}{2}} \right] (\cos x_n + 1), 0 \leq n \leq M, \\ u_0^k = u_1^k, u_M^k = 0, 0 \leq k \leq N, \\ f(t_k, x_n) = e^{-t_k} \cos x_n, \\ \varphi(x_n) = \cos x_n + 1 \end{array} \right. \quad (3.2)$$

dir. Burada $(N+1) \times (M+1)$ lineer denklem sistemi oluşur. Bu denklem sistemi

$$\left\{ \begin{array}{l} (-\frac{1}{h^2})u_{n+1}^k + (\frac{2}{\tau^2} + \frac{2}{h^2} + 1)u_n^k + (-\frac{1}{h^2})u_{n-1}^k + (-\frac{1}{\tau^2})u_n^{k+1} + (-\frac{1}{\tau^2})u_n^{k-1} = f(t_k, x_n), \\ 1 \leq k \leq N-1, 1 \leq n \leq M-1, \\ u_n^0 = \varphi(x_n), 0 \leq n \leq M, \\ u_n^N = u_n^{\frac{N}{2}} + (e^{-1} - e^{-\frac{1}{2}})(\cos x_n + 1), 0 \leq n \leq M, \\ u_0^k = u_1^k, u_M^k = 0, 0 \leq k \leq N, \\ \varphi(x_n) = \cos x_n + 1 \end{array} \right. \quad (3.3)$$

olup matris formunda

$$\begin{aligned} AU_{n+1} + BU_n + CU_{n-1} &= D\varphi_n, 1 \leq n \leq M-1 \\ U_0 &= U_1 \end{aligned} \quad (3.4)$$

olarak yazılır. Burada,

$$\varphi_n^k = \begin{cases} \cos x_n + 1, & k = 0 \\ f(t_k, x_n), & 1 \leq k \leq N-1 \\ (e^{-1} - e^{-\frac{1}{2}})(\cos x_n + 1), & k = N \end{cases}$$

$$\varphi_n = \begin{bmatrix} \varphi_n^0 \\ \varphi_n^1 \\ \vdots \\ \varphi_n^{N-1} \\ \varphi_n^N \end{bmatrix}_{(N+1) \times 1}, \quad U_s = \begin{bmatrix} u_s^0 \\ u_s^1 \\ \vdots \\ u_s^{N-1} \\ u_s^N \end{bmatrix}_{(N+1) \times 1}, \quad s = n-1, n, n+1,$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c & b & c & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & b & c & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & b & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & c & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & c & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & -1 & \cdot & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}$$

ve $C = A$ dır. A, B, C ve D matrislerindeki elemanlar

$$a = \frac{1}{h^2}, \quad b = \frac{2}{\partial} \frac{\partial^2}{h^2} \frac{\partial}{\partial}, \quad c = \frac{1}{\partial},$$

olarak tanımlanır.

Böylece n ye bağlı matris katsayılı ikinci mertebeden fark denkleminde ulaşılır. Bu fark

denklemini çözmek için modifiye edilmiş Gauss eliminasyon metodu uygulanır.

$$U_n = \begin{bmatrix} \alpha_n & \beta_n \end{bmatrix}, n = 1, 2, \dots, M \quad (3.5)$$

şeklinde bir çözüm aranır. Burada α_n ($n = 1, \dots, M$) $(N+1) \times (N+1)$ kare matris ve β_n ($n = 1, \dots, M$) $(N+1) \times (1)$ sütun matristir. (3.4) ve (3.5) formülleri kullanılarak

$$\begin{aligned} \alpha_{n+1} &= -(B + C\alpha_n)^{-1}A, \quad n = 1, 2, \dots, M-1 \\ \beta_{n+1} &= (B + C\alpha_n)^{-1}(D\varphi_n - C\beta_n), \quad n = 1, 2, \dots, M-1 \end{aligned} \quad (3.6)$$

elde edilir. $U_0 = U_1$ sınır değer şartından

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & 1 \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}$$

ve

$$\beta_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{(N+1) \times 1}$$

yazılır. (3.6) formülünü kullanarak tüm α_{n+1} ve β_{n+1} ' ler hesaplanır. Sonra, (3.5) formülü ve $u_M^k = 0$ şartı ile $M-1 \leq n \leq 1$ aralığında tüm U_n ' ler bulunur.

(3.1) Bitsadze-Samarskii tipi lokal olmayan sınır değer probleminin çözümü için paket program kullanılır. $u(t_k, x_n)$ tam çözüm ve u_n^k , fark şemasındaki (t_k, x_n) deki yaklaşık sayısal çözümdür. M ve N nin farklı değerleri için tam çözüm ve yaklaşık

çözüm farkından oluşan hata

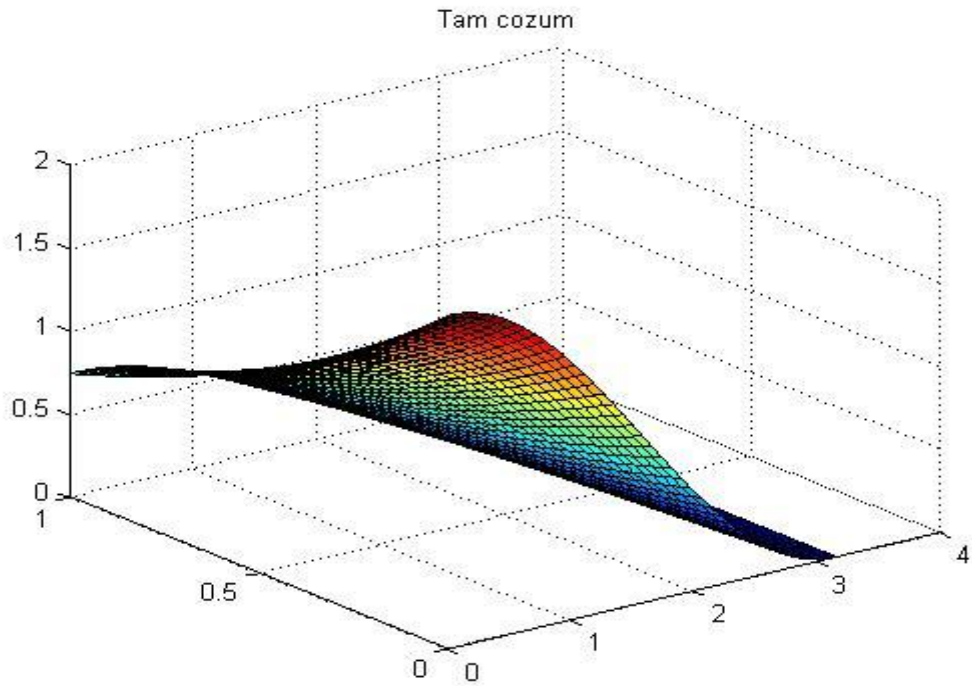
$$E_M^N = \max_{1 \leq k \leq N-1} \left(\max_{n=1}^{M-1} |u(t_k, x_n) - u_n^k|^2 h \right)^{\frac{1}{2}}$$

formülüyle hesaplanır. Sonuçlar Çizelge 3.1. de gösterilmiştir.

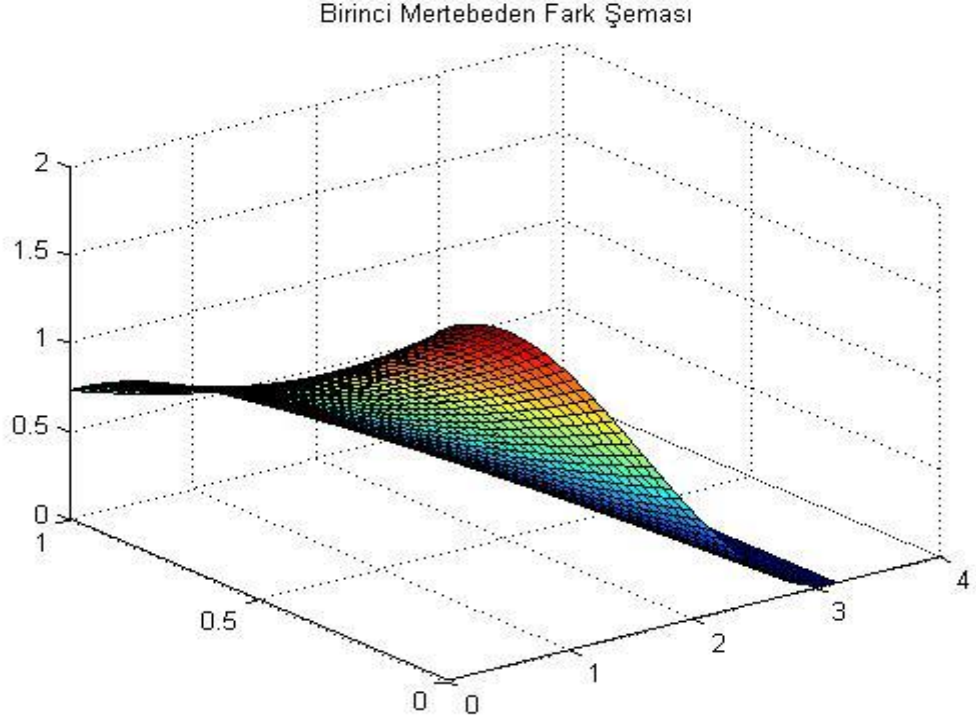
Çizelge 3.1. Lineer eliptik denklemler için birinci mertebeden fark şemasının hatası

	E_M^N
N=M=40	0,0065
N=M=80	0,0030

Şekil 3.1. tam çözümü, Şekil 3.2. birinci mertebeden doğruluk fark şemasının yaklaşık çözüm grafiğini gösterir.



Şekil 3.1. (3.1) probleminin tam çözüm grafiği



Şekil 3.2. (3.1) probleminin birinci mertebeden doğruluk fark şemasının yaklaşık çözüm grafiği

3.2. Yarı-Linear Eliptik Denklemler İçin Birinci Mertebeden Doğruluk Fark Şemasının Sayısal Sonuçları

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{d^2 u(t, x)}{dt^2} - \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} + u = f(t, x, u(t, x)), \\ f(t, x, u(t, x)) = e^{-t} \cos x + \frac{1}{10} \sin(\pi(u(t, x))) - \frac{1}{10} \sin(\pi(e^{-t}(\cos x + 1))), \\ 0 < t < 1, 0 < x < \pi, \\ u(0, x) = \cos x + 1, \\ u(1, x) = u(\frac{1}{2}, x) + (e^{-1} - e^{-\frac{1}{2}})(\cos x + 1), 0 < x < \pi, \\ u_x(t, 0) = u(t, \pi) = 0, 0 < t < 1. \end{array} \right. \quad (3.7)$$

Bu kısımda, (2.7) birinci mertebeden fark şeması kullanılarak (3.7) lokal olmayan Bitsadze-Samarskii tipi sınır değer probleminin sayısal sonuçları incelenecektir. Bu

problemin tam çözümü

$$u(t, x) = e^{-t} (\cos(x) + 1)$$

dir. $f(t, x, u(t, x))$ fonksiyonu $L = \frac{1}{10}$ için Lipschitz şartını sağlar.

Lokal olmayan (3.7) Bitsadze-Samarskii tipi sınır değer probleminin yaklaşık çözümü için (2.3) doğruluk fark şeması kullanılarak

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{u_n^{k+1,m} - 2u_n^{k,m} + u_n^{k-1,m}}{\tau^2} - \frac{u_{n+1}^{k,m} - 2u_n^{k,m} + u_{n-1}^{k,m}}{h^2} + u_n^{k,m} = f(t_k, x_n, u_n^{k,m-1}), \\ f(t_k, x_n, u_n^{k,m-1}) = e^{-t_k} \cos x_n + \frac{1}{10} \sin(\pi(u(t, x))) - \frac{1}{10} \sin(\pi(e^{-t_k} (\cos x_n + 1))), \\ u_n^{0,m} = \varphi(x_n), 1 \leq n \leq M-1, m = 1, \dots, \\ u_n^{N,m} = u_n^{\frac{N}{2},m} + (e^{-1} - e^{-\frac{1}{2}})(\cos x_n + 1) \\ 1 \leq n \leq M-1, m = 1, \dots, \\ u_n^{k,0} = 1, u_0^{k,m} = u_1^{k,m}, u_M^{k,m} = 0, 0 \leq k \leq N-1, 1 \leq n \leq M-1, m = 1, \dots, \\ \varphi(x_n) = (\cos x_n + 1) \end{array} \right. \quad (3.8)$$

birinci mertebeden doğruluk fark şeması elde edilir. (3.8) fark şeması $(N+1) \times (M+1)$ denklem sistemine sahiptir. Bu denklem sistemi

$$\left\{ \begin{array}{l} A U_{n+1}^m + B U_n^m + C U_{n-1}^m = D \varphi_n^m, 1 \leq n \leq M-1 \\ U_0^m = U_1^m, U_M^m = 0 \end{array} \right. \quad (3.9)$$

matris formunda yazılır. Burada

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c & b & c & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & b & c & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & b & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & c & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & c & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & -1 & \cdot & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}$$

$C = A$ ve $D = [I]_{(N+1) \times (N+1)}$ dır. A ve B matrisleri için

$$a = \frac{1}{h^2}, \quad b = \frac{2}{\partial^2} \frac{2}{h^2} \frac{1}{\partial^2}, \quad c = \frac{1}{\partial^2}$$

dir.

$$\varphi_n^{k,m} = \begin{cases} \cos x_n + 1, & k = 0 \\ f(t_k, x_n, u_n^{k,m-1}), & 1 \leq k \leq N-1 \\ (e^{-1} - e^{-\frac{1}{2}})(\cos x_n + 1), & k = N \end{cases}$$

$$U_s^m = \begin{bmatrix} u_s^{0,m} \\ u_s^{1,m} \\ \vdots \\ u_s^{N-1,m} \\ u_s^{N,m} \end{bmatrix}_{(N+1) \times 1}, s = n-1, n, n+1$$

dir.

(3.9) matrisini çözmek için modifiye edilmiş Gauss eliminasyon ve iterasyon metodu uygulanır.

$$U_n^m = \alpha_n^m U_{n+1}^m + \beta_n^m, n = M-1, \dots, 2, 1 \quad (3.10)$$

şeklinde bir çözüm aranır. Burada α_n^m ($n=1, \dots, M$) $(N+1) \times (N+1)$ kare matris ve β_n ($n=1, \dots, M$) $(N+1) \times 1$ sütun matristir. (3.9) ve (3.10) formülleri kullanılarak

$$\begin{cases} \alpha_{n+1}^m = -(B_m + C_m \alpha_n^m)^{-1} A_m, n = 1, 2, \dots, M-1 \\ \beta_{n+1}^m = (B_m + C_m \alpha_n^m)^{-1} (D_m \varphi_n^m - C_m \beta_n^m), n = 1, 2, \dots, M-1 \end{cases} \quad (3.11)$$

elde edilir. $U_0^m = U_1^m$ sınır değer şartından $\alpha_1^m = [I]_{(N+1) \times (N+1)}$, $\beta_1^m = [0]_{(N+1) \times 1}$ şeklindedir. (3.11) formülü kullanılarak tüm α_{n+1}^m ve β_{n+1}^m hesaplanır. (3.10) ve $u_M^{k,m} = 0$ şartları kullanılarak $n=M-1, \dots, 2, 1$ için U_n^m ler hesaplanır.

(3.7) probleminin yaklaşık çözümü paket programı kullanılarak bulunur. İterasyonlar arasındaki farkın 10^{-8} den küçük olması beklenir.

$u_n^{k,m}$, m . iterasyon adımındaki (t_k, x_n) de fark şemalarının yaklaşık sayısal çözümünü vermek üzere; ardışık iterasyonlar arasındaki hata

$$H_N^M(m, m-1) = \max_{0 \leq k \leq N} \left(\sum_{n=1}^M |u_n^{k,m} - u_n^{k,m-1}|^2 h \right)^{\frac{1}{2}}$$

ile hesaplanır.

$u(t_k, x_n)$ (t_k, x_n) de tam çözüm ile m. iterasyondaki fark şemalarının yaklaşık sayısal çözümleri arasındaki hata

$$E_N^M(m) = \max_{0 \leq k \leq N} \left(\sum_{n=1}^M |u_n^{k,m} - u(t_k, x_n)|^2 h \right)^{\frac{1}{2}}$$

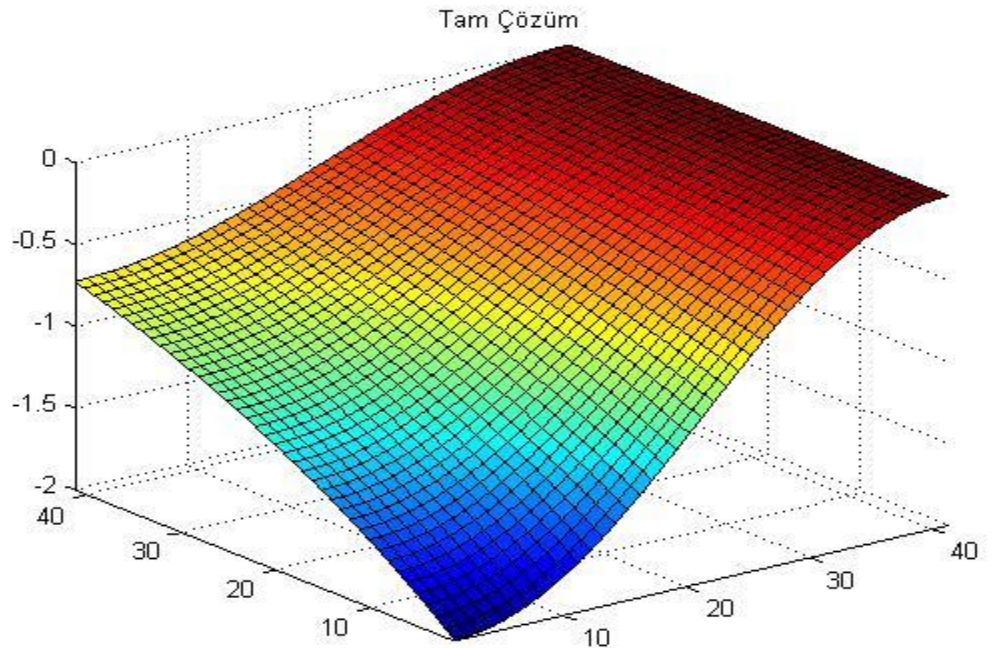
formülü kullanılarak hesaplanır.

Birinci mertebeden doğruluk fark şeması için, dördüncü ve beşinci iterasyondaki hata kıyaslamaları Çizelge 3.2. de gösterilmiştir.

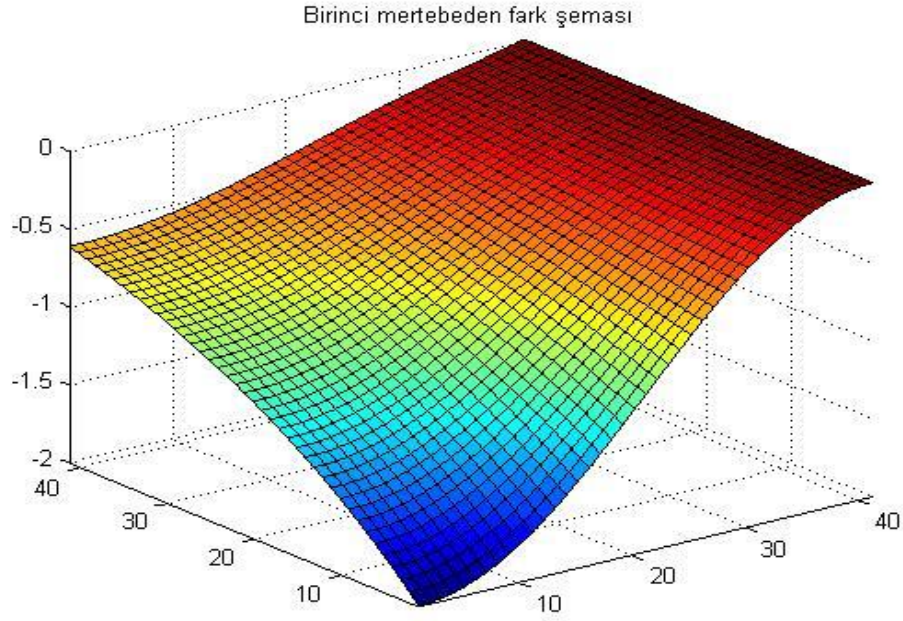
Çizelge 3.2. Yarı-linear eliptik denklemler için birinci mertebeden doğruluk fark şeması için hatalar

	$H_N^M(4)$	$E_N^M(4)$	$H_N^M(5)$	$E_N^M(5)$
$N=40, M=40$	$2,782 \times 10^{-7}$	0,0045	$7,041 \times 10^{-9}$	0,0045
$N=80, M=80$	$1,382 \times 10^{-7}$	0,0021	$3,507 \times 10^{-9}$	0,0021

Şekil 3.3. tam çözümü, Şekil 3.4. birinci mertebeden doğruluk fark şemasının yaklaşık çözümünü göstermektedir.



Şekil 3.3. (3.7) probleminin tam çözüm grafiği



Şekil 3.4. (3.7) probleminin birinci mertebeden doğruluk fark şemasının yaklaşık çözüm grafiği

H_N^M birinci mertebeden doğruluk fark şemasındaki yaklaşık çözümler için ardışık iterasyonlar arasındaki hatayı E_N^M tam çözüm ve birinci mertebeden doğruluk fark şeması için yaklaşık çözümü arasındaki hatayı göstermek üzere farklı L değerleri için hata analizi Çizelge 3.3. te verilir. L değeri 1 e ve 0 a yaklaştıkça hata oranı yükselir. En küçük hata $L = 0,5$ için elde edilir.

Çizelge 3.3. Yarı-lineer eliptik denklemler için birinci mertebeden doğruluk fark şeması hatalarının karşılaştırılması

L	$N = M$	Birinci Mertebeden $H_N^M(5)$ ve $E_N^M(5)$	
0,9	40-40	$7,583 \times 10^{-5}$	0,0052
	80-80	$3,765 \times 10^{-5}$	0,0026
0,5	40-40	$5,792 \times 10^{-6}$	0,0044
	80-80	$2,875 \times 10^{-6}$	0,0020
0,01	40-40	$6,584 \times 10^{-13}$	0,0046
	80-80	$3,272 \times 10^{-13}$	0,0021
0,001	40-40	$6,600 \times 10^{-17}$	0,0046
	80-80	$3,200 \times 10^{-17}$	0,0021

BÖLÜM 4

ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA

Bu tezde; yarı-lineer eliptik denklemler için Bitsadze Samarskii tipi

$$\begin{cases} -\frac{d^2 u(t)}{dt^2} + Au(t) = f(t, u(t)), & 0 < t < 1 \\ u(0) = \varphi, \\ u(1) = \sum_{j=1}^J \alpha_j u(\lambda_j) + \psi, & 0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_J < 1, \end{cases} \quad (4.1)$$

lokal olmayan sınır değer probleminin

$$\sum_{j=1}^J \alpha_j u(\lambda_j) + \psi$$

varsayımı altında H Hilbert uzayında incelendi. Burada A kendisine eşlenik pozitif operatördür. Yarı-lineer (4.1) probleminin yaklaşık çözümü için birinci mertebeden doğruluk fark şeması

$$\begin{cases} -\tau^{-2}(u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}) + Au_k = f(t_k, u_k) \\ t_k = k\tau, 1 \leq k \leq N-1, N\tau = 1, u_0 = \varphi \\ u_N = \sum_{j=1}^J \alpha_j u\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right] + \Psi \end{cases}$$

kuruldu. Birinci mertebeden doğruluk fark şeması için çözümün varlığı ve tekliği ispat edildi. Lineer eliptik denklemin sayısal örneği için bilgisayar programı yazıldı ve sayısal analiz yapıldı. Bu program (4.1) Bitsadze-Samarskii tipi yarı-lineer lokal olmayan sınır değer probleminin sayısal örneğine uyarlanarak sayısal analiz sonuçları elde edildi. Modifiye edilmiş Gauss eliminasyon ve iterasyon metotları kullanıldı. Hata analizleri yapıldı. Sayısal hesaplamaların dördüncü ve beşinci iterasyon adımındaki sonuçları

Çizelgelerde verildi. Sayısal hesaplamaların sonuçlarına göre; 8. iterasyon adımımda hatanın sıfıra çok yakın bir değer olduğu görülmüştür.



KAYNAKLAR

- Agmon S., 1965. On Kernels, Eigenvalues, and Eigenfunctions of Operators Related to Elliptic Problems. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 18 (4): 627-663.
- Ashyralyev A., 1999. The Stability of Difference Schemes for Partial Differential Equations of Mixed Types. *The Sec. Int. Symp. on Math. and Comp. Appl.*, Baku. 314-316.
- Ashyralyev A., 2008. A Note on the Bitsadze--Samarskii Type Nonlocal Boundary Value Problem in a Banach Space. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 344 (1): 557-573.
- Ashyralyev A., 2010. Nonlocal Boundary-Value Problems for Elliptic Equations: Well-Posedness in Bochner Spaces. In *ICMS International Conference on Mathematical Science*. 1309: 66-84.
- Ashyralyev A., Altay N., 2006. A Note on the Well-Posedness of the Nonlocal Boundary Value Problem for Elliptic Difference Equations. *Applied Mathematics and Computation*, 175 (1): 49-60.
- Ashyralyev A., Cuevas C., Piskarev S., 2008. On Well-Posedness of Difference Schemes for Abstract Elliptic Problems in $L_p([0, T]; E)$ Spaces. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 29 (1-2): 43-65.
- Ashyralyev A., Ozturk E., 2012. The Numerical Solution of the Bitsadze-Samarskii Nonlocal Boundary Value Problems with the Dirichlet-Neumann Condition. *Abstract and Applied Analysis*, 2012: 1-8.
- Ashyralyev A., Ozturk E., 2013. On a Difference Scheme of Fourth Order of Accuracy for the Bitsadze--Samarskii Type Nonlocal Boundary Value Problem. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 36 (8): 936-955.
- Ashyralyev A., Ozturk E., 2014a. On a Difference Scheme of Second Order of Accuracy for the Bitsadze-Samarskii Type Nonlocal Boundary-Value Problem. *Boundary Value Problems*, 2014 (1): 14.
- Ashyralyev A., Ozturk E., 2014b. Stability of Difference Schemes for Bitsadze-Samarskii Type Nonlocal Boundary Value Problem Involving Integral Condition. *Filomat*, 28

(5): 1027-1047.

Ashyralyev A., Özesenli Tetikoğlu F. S., 2013. A note on Bitsadze-Samarskii Type Nonlocal Boundary Value Problems: Well-Posedness. Numerical Functional Analysis and Optimization, 34 (9): 939-975.

Ashyralyev A., Sobolevskii P. E., 2004. New Difference Scheme for Partial Differential Equations, Birkhauser Verlag-Berlin. 410 p.

Bae S., 2002. Asymptotic Behavior of Positive Solutions of Inhomogeneous Semilinear Elliptic Equations. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 51 (8): 1373-1403.

Bayrak M. A., 2003. Monoton Potansiyel Operatörler ve Lineer Olmayan Eliptik Denklem İçin Karışık Sınır Değer Probleminin Sayısal Çözümü (Doktora Tezi). Kocaeli Üniversitesi, Kocaeli, Türkiye.

Bitsadze A. V., 1984. On the Theory of Nonlocal Boundary Value Problems. Soviet Mathematics Doklady, 30 (1): 8-10.

Bitsadze A. V., Samarskii A. A., 1969. On Some Simple Generalizations of Linear Elliptic Boundary Value Problems. Soviet Mathematics Doklady 10 (2): 398-400.

Chabrowski J., 1992. Multiple Solutions for a Class of Non-local Problems for Semilinear Elliptic Equations. Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences, 28 (1): 1-11.

Ferrero A., Gazzola, F., 2001. Existence of Solutions for Singular Critical Growth Semilinear Elliptic Equations. Journal of Differential Equations, 177 (2): 494-522.

Gordeziani D. G., 1970. On a Method of Resolution of Bitsadze-Samarskii Boundary Value Problem. Reports of Inst. Appl. Math. Tbilisi State Univ, 2, 38-40.

Jangveladze T., Kiguradze Z., Lobjanidze G., 2010. On Decomposition Methods and Variational Formulation for Bitsadze-Samarskii Nonlocal Boundary Value Problem for Two-Dimensional Second Order Elliptic Equations. 15th WSEAS International Conference on Applied Mathematics, 116-121.

Kapanadze D. V., 1987. On a Nonlocal Bitsadze-Samarskii Boundary Value Problem. Differentsial'nye Uravneniya, 23 (3): 543-545.

- Keller H. B., 1975. Approximation Methods for Nonlinear Problems with Application to Two-Point Boundary Value Problems. *Mathematics of Computation*, 29 (130): 464-474.
- Korkmaz K., 2008. Bir Yarı Doğrusal Eliptik Denklem için 3. Sınıf Sınır Değer Probleminin İncelenmesi. Yüksek Lisans Tezi. Hacettepe Üniversitesi, Türkiye.
- Kumar M., Mishra G., 2012. A Review on Nonlinear Elliptic Partial Differential Equations and Approaches for Solution. *International Journal of Nonlinear Science*, 13 (4): 401-418.
- Li K., Guo H., Guo Z., 2005. Positive Single Rupture Solutions to a Semilinear Elliptic Equation. *Applied Mathematics Letters*, 18 (10): 1177-1183.
- Lui S. H., 1998. On Schwarz Alternating Methods for Nonlinear Elliptic PDEs. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 21 (4): 1506-1523.
- Moiseev E. I., 2001. Solvability of a Nonlocal Boundary Value Problem. *Differential Equations*, 37 (11): 1643-1646.
- Orlovsky D., Piskarev S., 2013. The Approximation of Bitsadze-Samarsky Type Inverse Problem for Elliptic Equations with Neumann Conditions. *Contemporary Analysis and Applied Mathematics*, 1 (2): 118-131.
- Pao C. V., 1995. Block Monotone Iterative Methods for Numerical Solutions of Nonlinear Elliptic Equations. *Numerische Mathematik*, 72 (2): 239-262.
- Sapagovas M. P., 1984. Solution of a Nonlinear Ordinary Integral Equation with an Integral Condition. *Lithuanian Math. J.* 24 (1): 60-68.
- Sapagovas M. P., 2008. Difference Method of Increased Order of Accuracy for the Poisson Equation with Nonlocal Conditions. *Differential Equations. Numerical Methods*, 44 (7): 1018-1028.
- Sapagovas M. P., Chegis R. Y., 1987. Boundary-Value-Problems with Nonlocal Conditions. *Differential Equations*, 23 (7): 858-863.
- Skubachevskii A. L., 1984. The Elliptic Problems of AV Bitsadze and AA Samarskii. In *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 278 (4): 813-816.

- Skubaczewski A. L., 1985. Solvability of Elliptic Problems with Boundary Conditions of Bitsadze--Samarskii Type. *Differ. Uravn.*, 21 (4): 701-706.
- Soldatov A. P., 2003. On the First and Second Boundary Value Problems for Elliptic Systems on the Plane. *Differential Equations*, 39 (5): 712-725.
- Soldatov A. P., 2006. Problem of Bitsadze-Samarskii Type for Second Order Elliptic Systems on the Plane. Russian in *Doklady Akademii Nauk*, 74 (2): 736-740.
- Wang Y. M., 2007. Monotone Iterative Technique for Numerical Solutions of Fourth-Order Nonlinear Elliptic Boundary Value Problems. *Applied Numerical Mathematics*, 57 (10): 1081-1096.
- Wazwaz A. M., 2009. *Partial Differential Equations and Solitary Waves Theory*. Higher Education Press, Beijing and Springer- Berlin. 741 p.
- Zhou S., Hu H., 2004. On the Convergence of a Cascadic Multigrid Method for Semilinear Elliptic Problem. *Applied Mathematics and Computation*, 159 (2): 407-417.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Esra DEMİREL

Doğum Yeri : İstanbul

Doğum Tarihi : 01. 04. 1988

EĞİTİM DURUMU

Lisans Öğrenimi : İstanbul Teknik Üniversitesi, Matematik Mühendisliği

2006-2011

Anadolu Üniversitesi, İşletme, 2008-2013

Bildiği Yabancı Diller : İngilizce

BİLİMSEL FAALİYETLERİ

Demirel E., Ozturk E., "Numerical Solution of Semilinear Elliptic Equation via Difference Schemes", Third International Conference on Recent Advances in Pure and Applied Mathematics(ICRAPAM 2016), Bodrum-Muğla, TURKIYE, 19-23 Mayıs 2016.

Demirel E., Ozturk E., "A note on the numerical solution of the semilinear elliptic equation", Second International Conference on Analysis and Applied Mathematics(ICAAM 2014), Shymkent, KAZAKISTAN, 11-13 Eylül 2014.

Demirel E., Ozturk E., "A modelling of geothermal resource's efficiency via data envelopment analysis", Second International Conference on Analysis and Applied Mathematics (ICAAM 2014), Shymkent, KAZAKISTAN, 11-13 Eylül 2014.

İŞ DENEYİMİ

Çalıştığı Kurumlar ve Yıl : Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi, 2012-

İLETİŞİM

E-posta Adresi : esrademirel@comu.edu.tr