DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM YÖNTEMİNİN PADE YAKLAŞIMLARIYLA İYİLEŞTİRİLMESİ ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BENGÜL ÇİTİL
MATEMATİK ANABİLİM DALI
KONYA - 2009

T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTÜTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM YÖNTEMİNİN PADE YAKLAŞIMLARIYLA İYİLEŞTİRİLMESİ ÜZERİNE

HAZIRLAYAN
BENGÜL ÇİTİL

DANIŞMAN
YARD. DOÇ DR. AYDIN KURNAZ

KONYA - 2009

T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTÜTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM YÖNTEMİNİN PADE YAKLAŞIMLARIYLA İYİLEŞTİRİLMESİ ÜZERİNE

BENGÜL ÇİTİL
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez 31.07.2009 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından kabul edilmiştir.

Yard. Doç. Dr. Aydın KURNAZ
(Danışman)

Yard. Doç. Dr. Ayşe Dilek GÜNGÖR
(Üye)

Yard. Doç. Dr. Hasan KÖSE
(Üye)

İÇİNDEKİLER

sayfa

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM YÖNTEMİNİN PADE YAKLAŞIMLARIYLA İYİLEŞTİRİLMESİ ÜZERİNE

Bengül ÇİTİL
Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstütüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman:Yrd. Doç. Dr.Aydın KURNAZ
2009,37 Sayfa
Jüri: Yrd. Doç. Dr. Aydın KURNAZ
Yrd. Doç. Dr. Ayşe Dilek GÜNGÖR
Yrd. Doç. Dr. Hasan KÖSE

Bu tez çalışmasında, yüksek mertebeden doğrusal veya doğrusal olmayan adi diferansiyel denklemlerin(ODE'S) çözümü için Pade Yaklaşımları ile Diferansiyel Dönüşüm yönteminin birlikte kullanılması önerilmektedir. Önerilen yaklaşım klasik Diferansiyel Dönüşüm Metoduna göre çok daha hızlı çözüme yakınsamaktadır. Yöntemin etkinliği bazı sayısal örnekler yardımıyla incelenmiştir.

.

Anahtar kelimeler: *Lineer Diferansiyel Denklemler, Lineer Olmayan Diferansiyel Denklemler, Diferansiyel Dönüşüm, Pade Yaklaşımları*

ABSTRACT

Master Thesis

IMPROVING THE DIFERANTIAL TRANSFORM BY EMBEDDING PADE APROXIMATIONS

Bengül ÇİTİL
Selcuk University
Gradute School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor :Asst.Prof.Dr.Aydın KURNAZ

2009,37 Pages

Jüry: Asst.Prof.Dr.Aydın KURNAZ
Asst.Prof.Dr. Ayşe Dilek GÜNGÖR
Asst.Prof.Dr. Hasan KÖSE

In this study, Pade Embedded Differential Transformation Method is proposed for the solution of higher order nonlinear or linear ordinary differential equations (ODE's). The proposed approach provides a better iterative procedure to find the spectrum of the analytic solutions compared to the classical differential transformation. Illustrative examples are presented to show the preciseness and effectiveness of the proposed method.

Key Words: *Linear Differential Equations, Nonlinear Differential Equations, Differential Transformation, Pade Approximants*

ÖNSÖZ

Son zamanlarda oldukça kullanım alanı bulan ve birçok çalışmaya konu olan diferansiyal dönüşüm yöntemi diferansiyel denklemleri cebirsel denklemlere dönüştürerek çözüm kolaylığı sağlamaktadır. Diğer taraftan Pade yaklaşımları da seri formda verilen çözüm fonksiyonlarının, gerçek çözüme daha hızlı yaklaşmasını sağlayan etkin bir yöntemdir. Bu çalışma ile bu iki yöntem birlikte kullanılarak denklemlerin çözümlerinde çok daha iyi sonuçların elde edilebileceği ortaya konulmaya çalışılmıştır

Tez konusunun seçimi ve yürütülmesinde yardımlarından, anlayışından ve sabrından dolayı hocam Yard. Doç. Dr. Aydın KURNAZ'a teşekkür etmek isterim. Hayatımın her safhasında yanımda olup, bana daima destek olan haklarını ödeyemeyeceğim aileme teşekkür etmeyi kendime bir borç bilirim.

Eylül - 2009 Bengül ÇİTİL

1. GİRİŞ

Bu kısımda, tezin sonraki bölümlerinde gerekli olan Diferansiyel Dönüşüm Metodu ve Pade Yaklaşımlarıyla ilgili çalışmalardan kısaca bahsedilecektir.

1.1. Literatür Özeti

Jang ve arkadaşları 2000 ‘de parametre tanımlama problemleri için maximum olabilirlik tahmininde diferansiyel dönüşüm metodunu kullanmışlardır. Böylece, parametre tanımlama kriter fonksiyonu için diferansiyel dönüşüm kullanılmış olup avantaj ve dezavantajlarından bahsedilmiştir.

Kuo’un 2004 yılındaki makaledesinde yarı-sonsuz düz levha üzerindeki termal sınır tabakada hız ve ısı bölgesi araştırılmıştır. Diferansiyel Dönüşüm Metodu bu hız ve ısıl sınır tabaka problemlerinin çözümünün bulunmasında kullanılmıştır. Boyutsuz ısı profilleri için nümerik sonuçlar farklı Prandtl sayıları için grafiksel olarak gösterilmiştir. Bu sonuçlar diğer nümerik yöntemlerle karşılaştırılmıştır.

Darania ve Ebadian, 2007 ‘de birinci dereceden lineer Fredholm integro-diferansiyel denklemleri çözmek amacıyla diferansiyel dönüşümü uygulamışlardır. Integro-diferansiyel denklemleri çözmek için bir ve iki boyutlu diferansiyel dönüşümler arasında uygulanabilecek bir bağıntı vermişlerdir. Aynı zamanda metodu, yüksek dereceli Fredholm integro-diferansiyel denklemlerin nümerik çözümlerini aramak amacıyla genişletmişlerdir. Sunulan metodun kesinliğini ve etkinliğini göstermek amacıyla sayısal örnekler kullanmışlardır.

1998 yılındaki çalışmada ise Yu ve arkadaşları, Blasius denkleminin çözümünde diferansiyel dönüşüm metodunu kullanmışlar ve diğer nümerik çözüm yöntemleriyle karşılaştırmışlardır.

2004 yılında Abdel-Halim Hassan, yüksek dereceli başlangıç değer problemlerini (HOIVP) çözmek amacıyla diferansiyel dönüşüm metodunu kullanmıştır. Sunulan metod, komşu grid noktaları arasında Taylor serilerinin bulunmasını sağlar. Metodun güvenirliği ve etkinliğini göstermek için bazı sayısal örnekler verilmiştir.

Yu ve Chen 1998'de Blasius denklemini Diferansiyel Dönüşüm Metodunu kullanarak çözmüşlerdir. Çözüm, sadece nümerik değerlere bağlı değil aynı zamanda kuvvet serilerinin kapalı formunda da verilebilmektedir. Sonuçlar diferansiyel dönüşüm metodunun lineer olmayan problemler için en güçlü tekniklerden biri olduğunu göstermektedir.

Chen ve arkadaşı 1999 yılındaki çalışmalarında kısmi diferansiyel denklemlerin çözümü için iki boyutlu diferansiyel dönüşümü önermişlerdir. Öncelikle, iki boyutlu diferansiyel dönüşüm teorisi, sonrasında bir PDE probleminin iki boyutlu diferansiyel dönüşümünün bulunması gösterilmiş ve sonuçta PDE problemi, sabit ve değişken katsayılı üç farklı şekilde çözülmüştür. Hesaplanan sonuçların diğer yöntemlerle karşılaştırması yapılmıştır.

2005 'deki Kurnaz ve Oturanç tarafından çok boyutlu denklemlerin çözümü için ***n*** boyutlu diferansiyel dönüşüm metodunun genellemesi gösterilmiştir.

2008 'de Oturanç ve arkadaşları çalışmalarında, kesirli mertebeli diferansiyel denklemlerin çözümü amacıyla yeni bir analitik yaklaşım metodu önermişlerdir. Sembolik hesaplama gerektirmeyen bu yöntem yardımıyla hem doğrusal hem de doğrusal olmayan kesirli diferansiyel denklemler için çözüm seri formda verilmektedir.

Kurnaz ve arkadaşlarının 2005 yılındaki çalışmasında ise, doğrusal ve doğrusal olmayan diferansiyel denklem sistemleri çözmek amacıyla diferansiyel dönüşüm kullanılmıştır. Bu çalışmada ayrıca bu metod ile hata kontrolünün nasıl sağlanabileceği belirtilmiştir.

Khodier, bir çalışmasında yakınsak bir kuvvet serisine sahip bir f(x) fonksiyonunun pertürbe Pade yaklaşımını tanıtmıştır. Bu yaklaşım perturbe parametresine bağlıdır. Ayrıca, fonksiyonun türevlerinin perturbe Pade yaklaşımları da perturbe parametresini değiştirmeksizin doğrudan bulunmuştur.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu kısımda, öncelikle Diferansiyel Dönüşüm Yönteminin temel tanım ve teoremleri verilerek genel özelliklerinden bahsedilecektir. Daha sonra Pade Yaklaşımları ve özellikleri hakkında bilgiler sunulacak ve Pade Yaklaşımları kullanılarak yapılan çalışmalardan bazıları kısaca anlatılacaktır.

2.1. Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi

Özellikle lineer olmayan adi türevli denklemlerin çözümünde, tek boyutlu Diferansiyel Dönüşüm Metodu başarılı bir şekilde uygulanabilmektedir.

Bir boyutlu Diferansiyel Dönüşüm Metodu, akışkanlar teorisi, titreşim ve bunun gibi birçok mühendislik alanında karşılaşılan adi diferansiyel denklemlerin çözümünde kolayca uygulanabilmektedir. Metodun avantajı, lineer olmayan adi diferansiyel denklemlere uygulanabilmesi, sonuca hızlı bir şekilde hesaplama işlemlerini büyük oranda azaltarak doğruca ulaşabilmesidir. Üslü sayılar gibi lineer olmayan diğer dönüştürülmüş fonksiyonların hesaplanması için Zhou tarafından tanıtılan standart yol, lineer olmayan fonksiyonların sonsuz kuvvet serisini genişletmek için verilmiştir.

Bir boyutlu diferansiyel dönüşümün temel tanım ve özellikleri şöyle verilebilir.

Y(k) ***T-fonksiyonu*** olarak da adlandırılan, y(x)'in dönüştürülmüş fonksiyonu olmak üzere y(x) fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü

$$Y(k)=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k y(x)}{dx^k}\right]_{x=0}, \qquad (2.1.1)$$

şeklindedir. (Bu çalışmada büyük ve küçük harfler sırasıyla orijinal ve dönüştürülmüş fonksiyonları ifade eder). Böylece

$$y(x)=\sum_{k=0}^{\infty} Y(k)\,x^k \quad , \qquad (2.1.2)$$

yazıldığında ters dönüşüm fonksiyonu bulunur. Diğer ifadeyle

$$y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{d^k y(x)}{dx^k}\right]_{x=0}\frac{x^k}{k!} \quad , \qquad (2.1.3)$$

elde edilir. “c” sabit “n” negatif olmayan tam sayılar olmak üzere bir boyutlu diferansiyel dönüşümün temel teoremleri aşağıda verilmiştir. Teoremlerde [13] ve [14] referanslı makalelerden yararlanılmıştır.

Teorem2.1.1:Eğer w(x)=y(x) $\pm$ z(x),ise W(k)=Y(k) $\pm$ Z(k),

Teorem2.1.2: Eğer w(x)=cy(x) ise W(k)=cY(k)

Teorem2.1.3: Eğer w(x)= $\frac{dy(x)}{dx}$ ise W(k)=(k+1)Y(k+1)

Teorem2.1.4: Eğer w(x)= $\frac{d^n y(x)}{dx^n}$ ise W(k)= $\frac{(k+n)!}{k!}$ Y(k+n)

Teorem2.1.5: :Eğer w(x)=y(x). z(x),ise W(k)= $\sum_{m=0}^{k}$ Y(m) Z(k-m),

Teorem2.1.6: :Eğer w(x)=x ^{n} ,ise W(k)= $\delta(k-n)=\begin{cases}1, k=n\\ 0, k\neq n\end{cases}$.

Teorem2.1.7:w(x)=u(x) $\frac{d^2}{dx^2}v(x)$ ise,

W(k)= $\sum_{r=0}^{k}(k-r+2)(k-r+1)U(r)V(k-r+2)$

Teorem2.1.8:w(x)= $\frac{d}{\partial x}u(x)\frac{d}{\partial x}v(x)$ ise,

W(k)= $\sum_{r=0}^{k}(r+1)(k-r+1)U(r+1)V(k-r+1)$

Teorem2.1.9:w(x)=u(x)v(x)s(x) ise,

W(k)=U(k) $\otimes V(k)\otimes S(k)=\sum_{r=0}^{k}\sum_{r=0}^{k-r}U(r)V(t)S(k-r-t)$

Teorem2.1.10:w(x)=u(x)v(x) $\frac{d^2}{dx^2}s(x)$ ise,

W(k,h)= $\sum_{r=0}^{k}\sum_{r=0}^{k-r}(k-r-t+2)(k-r-t+2)U(r)V(t)S(k-r-t+2)$

Teorem2.1.11: $\lambda\in R$ olmak üzere w(x)=a $^{\lambda k}$ ise, W(k)= $\frac{\lambda^k(\ln a)^k}{k!}$

Teorem2.1.12: $\lambda \in R$ olmak üzere w(x)=e$^{\lambda k}$ ise, W(k)=$\frac{\lambda^k}{k!}$

Teorem2.1.13: $\lambda \in R$ olmak üzere w(x)=e$^{\lambda x+b}$ ise, W(k)=$\frac{\lambda^k}{k!}$ e^b

Teorem2.1.14: w(x)=sh(λ x) ise, W(k)=$\begin{cases} \frac{\lambda^k}{k!}, k, tek \\ 0, k, çift \end{cases}$

Teorem2.1.15: w(x)=ch(λ x) ise, W(k)=$\begin{cases} \frac{\lambda^k}{k!}, k, çift \\ 0, k, tek \end{cases}$

Teorem2.1.16: w(x)=sin(ax+b) ise, W(k)=$\frac{a^k}{k!}\sin(\frac{\pi}{2}k+b)$

Teorem2.1.17: w(x)=cos(ax+b) ise, W(k)=$\frac{a^k}{k!}\cos(\frac{\pi}{2}k+b)$

Teorem2.1.18:k$\in N$ w(x)=$\int_{x_0}^{x} u(t)d(t)$ ise, W(k)=$\frac{U(k-1)}{k}$

Teorem2.1.19: w(x)=v(x)$\int_{x_0}^{x} u(t)d(t)$ ise, W(k)=$V(k) \otimes \frac{U(k-1)}{k}$

Teorem2.1.20: w(x)= $\int_{x_0}^{x} u(t)v(t)d(t)$ ise, W(k)= $\frac{U(k-1) \otimes V(k-1)}{k}$

$$f(y)=\sum_{i=0}^{\infty} a_i y^i, \tag{2.1.4}$$

ile verilen denklemin diferansiyel dönüşümünü elde etmek için W$_i$(k), y^i ‘nin diferansiyel dönüşümü olmak üzere

$$F(k)= \sum_{i=0}^{\infty} a_i W_i(k), \tag{2.1.5}$$

elde edilir. Buradan

$$Y(0)W_i(k) = \begin{cases} [Y(0)]^{1+i}, k=0 \\ \sum_{m=1}^{k} \frac{(1+i)m-k}{k} Y(m)W_i(k-m), k \geq 1 \end{cases} \tag{2.1.6}$$

olur. Bu yaklaşımla ilgili problem; sonsuz serilerle çalışırken lineer olmayan diferansiyel dönüşümlerde hesaplama zorlukları çıkacak olmasıdır. Bu yüzden lineer olmayan fonksiyonların diferansiyel dönüşümünü hesaplamak ve kolay bir yolla çözmek için alternatif bir teknik bulunması önemlidir. Bazı lineer olmayan ODE'ler bu algoritmayı kullanarak çözülmüştür. Hesaplanan sonuçlar, diğer analitik ve yaklaşık metotlarla edilen sonuçlarla tam olarak aynıdır ve tekniğin güvenilirliği ile yeterliliğini gösterir.

2.2. Lineer Olmayan Fonksiyonların Dönüşümü

Bu bölümde lineer olmayan fonksiyonların diferansiyel dönüşümlerini hesaplamak için bazı kurallar verilecektir. Bu kurallar sadece türev ve 2.1.1.-2.1.5 temel teoremlerine dayanarak bulunabilir. Sonra dönüşümü alınan fonksiyon sadece sonlu serileri içeren reküråns bağıntıları yoluyla kolayca kararlaştırılır. Burada "*a*" ve "b" 'nin sabit olduğu kabul edilmektedir.

Durum2.2.1. Üstel doğrusalsızlık : [14]

$$F(0)=[e^{ay(x)}]_{x=0}=e^{ay(0)}=e^{aY(0)}, \qquad (2.2.1)$$

F(y)= e^{ay} fonksiyonunun "*x*"e göre türevi alınırsa

$$\frac{df(y)}{dx}=ae^{ay}\frac{dy(x)}{dx}=af(y)\frac{dy(x)}{dx} \quad , \qquad (2.2.2)$$

elde edilir. Diferansiyel dönüşüm kuralları uygulanırsa:

$$(k+1)F(k+1)=a\sum_{m=0}^{k}(m+1)Y(m+1)F(k-m) \qquad (2.2.3)$$

bulunur. k+1 yerine k yazıldığında denklem

$$F(k)=a\sum_{m=0}^{k-1}\frac{m+1}{k}Y(m+1)F(k-1-m),\, k\geq 1 \qquad (2.2.3)$$

şeklinde olur.(2.2.1) ve (2.2.4)'dan elde edilen sonuçlarda ortak çözüm yapılırsa T-fonksiyonunun genel olarak

$$F(k)=\begin{cases} e^{aY(0)}, & k=0, \\ a\sum_{m=0}^{k-1}\frac{m+1}{k}Y(m+1)F(k-1-m), & k\geqslant 1. \end{cases} \qquad (2.2.5)$$

şeklinde bulunur.

Durum 2.2.2. Logaritmik Doğrusalsızlık [14]

f(y)=ln(a+by) , a+by>0

$$F(0)=[\ \ln(a+by(x))]_{x=0} = \ln(a+by(0))= \ln(a+bY(0))\ , \qquad (2.2.6)$$

olmak üzere f(y)=ln(a+by)fonksiyonunda x'e göre türev alınırsa,

$$\frac{df(y(x))}{dx}=\frac{b}{a+by}\frac{dy(x)}{dx} \quad , \qquad (2.2.7)$$

bulunur. Denklem düzenlenirse,

$$a\frac{df(y(x))}{dx}=b\left(\frac{dy(x)}{dx}-y\frac{df(y)}{dx}\right), \qquad (2.2.8)$$

elde edilir. Diferansiyel dönüşüm uygulanırsa

$$aF(k+1)=b\left[Y(k+1)-\sum_{m=0}^{k}\frac{m+1}{k+1}F(m+1)Y(k-m)\right] \quad , \qquad (2.2.9)$$

denklemindeki k+1 değerleri k ile değiştirilerek sonuç

$$aF(k)=b\left[Y(k)-\sum_{m=0}^{k-1}\frac{m+1}{k}F(m+1)Y(k-1-m)\right] \ , \quad k\geq 1 \qquad (2.2.10)$$

şeklinde genellenebilir. Genel haldeki denklemde k=1 yazılırsa,

$$F(1)=\frac{b}{a+bY(0)}Y(1) \qquad (2.2.11)$$

olur. k ≥ 2 için genel denklem

$$F(k)=\frac{b}{a+bY(0)}\left[Y(k)-\sum_{m=0}^{k-2}\frac{m+1}{k}F(m+1)Y(k-1-m)\right] \ , \qquad (2.2.12)$$

şeklinde elde edilir. Buradan f(y)=(a+by) içinde T-fonksiyonunu hesaplamak için tekrarlanan bağıntı

$$F(k)=\begin{cases}\ln(a+bY(0)), & k=0,\\ \frac{b}{a+bY(0)}Y(1), & k=1,\\ \frac{b}{a+bY(0)}\left[Y(k)-\sum_{m=0}^{k-2}\frac{m+1}{k}F(m+1)Y(k-1-m)\right], & k\geqslant 2.\end{cases} \quad (2.2.13)$$

şeklinde bulunmuş olur.

Durum 2.2.3.Trigonometrik doğrusalsızlık: [14]

f (y) = sin (ay) ve g(y) =cos (ay) olmak üzere

$$F(0)=[\sin(ay(x)]_{x=o}=\sin ay(0)=\sin(aY(0))$$
$$G(0)=[\cos(ay(x)]_{x=o}=\cos ay(0)=\cos(aY(0)) \quad (2.2.14)$$

dönüşüm fonksiyonlarını bulmak için, f(y) = sin (ay) ve g(y)= cos (ay)' nin türevi alınırsa,

$$\frac{df(y)}{dx}=a\cos(ay)\frac{dy(x)}{dx}=ag(y)\frac{dy(x)}{dx}$$
$$\frac{dg(y)}{dx}=-a\sin(ay)\frac{dy(x)}{dx}=-af(y)\frac{dy(x)}{dx} \quad (2.2.15)$$

elde edilir. Diferansiyel dönüşüm uygulanırsa ,

$$(k+1)F(k+1)=\ a\sum_{m=0}^{k}(k+1-m)G(m)Y(k+1-m) \quad (2.2.16)$$
$$(k+1)G(k+1)=-a\sum_{m=0}^{k}(k+1-m)F(m)Y(k+1-m)$$

olur. Benzer şekilde "k+1", "k" ile değiştirildiğinde

$$F(k)=a\sum_{m=0}^{k-1}\frac{k-m}{k}G(m)Y(k-m) \quad ,k\geq 1$$
$$G(k)=-a\sum_{m=0}^{k-1}\frac{k-m}{k}F(m)Y(k-m) \quad ,k\geq 1 \quad (2.2.17)$$

elde edilir. Tekrarlanan bağıntıyı bulmak için (2.2.14) ve (2.2.17) denklemlerinde ortak çözüm yapılarak:

$$F(k)=\begin{cases}\sin(aY(0)), & k=0,\\ a\sum_{m=0}^{k-1}\frac{k-m}{k}G(m)Y(k-m), & k\geqslant 1,\end{cases} \quad (2.2.18)$$

bulunur. Buradan genel denklem

$$G(k)=\begin{cases}\cos(aY(0)), & k=0,\\ -a\sum_{m=0}^{k-1}\frac{k-m}{k}F(m)Y(k-m), & k\geqslant 1.\end{cases} \tag{2.2.19}$$

şeklindedir.

Durum2.2.4. Abartılı Doğrusalsızlık: [14]

f(y)= sin h(ay) ve g(y)= cosh(ay)

$$F(0)=[\sinh(ay(x)]_{x=o} = \sinh ay(0)=\sinh(aY(0)), \tag{2.2.20}$$

$$G(0)=[\cosh(ay(x)]_{x=o} = \cosh ay(0)=\cosh(aY(0)),$$

türev alınırsa

$$\frac{df(y)}{dx}=a\cosh(ay)\frac{dy(x)}{dx}=ag(y)\frac{dy(x)}{dx}, \tag{2.2.15}$$

$$\frac{dg(y)}{dx}=a\sinh(ay)\frac{dy(x)}{dx}=af(y)\frac{dy(x)}{dx}, \tag{2.2.21}$$

elde edilir. Diferansiyel dönüşüm uygulanırsa

$$(k+1)F(k+1)= a\sum_{m=0}^{k}(k+1-m)G(m)Y(k+1-m),$$

$$(k+1)G(k+1)= a\sum_{m=0}^{k}(k+1-m)F(m)Y(k+1-m), \tag{2.2.22}$$

bulunur. Buradan sırasıyla

$$F(k)= a\sum_{m=0}^{k-1}\frac{k-m}{k}G(m)Y(k-m), \quad k\geq 1,$$

$$G(k)= a\sum_{m=0}^{k-1}\frac{k-m}{k}F(m)Y(k-m), \quad k\geq 1, \tag{2.2.23}$$

elde edilir. (2.2.20) ve (2.2.23) denklemlerinin ortak çözümünden,

$$F(k)=\begin{cases}\sinh(aY(0)), & k=0,\\ a\sum_{m=0}^{k-1}\frac{k-m}{k}G(m)Y(k-m), & k\geqslant 1.\end{cases} \tag{2.2.24}$$

ve

$$G(k)=\begin{cases}\cosh(aY(0)), & k=0,\\ a\sum_{m=0}^{k-1}\frac{k-m}{k}F(m)Y(k-m), & k\geqslant 1.\end{cases} \tag{2.2.25}$$

sonucuna varılır.

Durum 2.2.5.Üslü Doğrusalsızlık [14]

$f(y)= e^{ay}$, $z(x)=y^b$,$f(z)= e^{az}$.

Durum 1 ile benzerdir. Öyleyse bu fonksiyonun diferansiyel dönüşümü (2.2.5) referanslı denklem yardımıyla verilen

$$F(k) = \begin{cases} e^{aZ(0)}, & k = 0, \\ a\sum_{m=0}^{k-1} \frac{m+1}{k} Z(m+1)F(k-1-m), & k \geqslant 1, \end{cases} \tag{2.2.26}$$

eşitliğinden

$$Y(0)Z(k) = \begin{cases} [Y(0)]^{1+b}, & k = 0, \\ \sum_{m=1}^{k} \frac{(1+b)m-k}{k} Y(m)Z(k-m), & k \geqslant 1. \end{cases} \tag{2.2.27}$$

elde edilir. Bu örnek; diğer daha karmaşık doğrusal olmayan fonksiyonların diferansiyel dönüşümü aynı yolla yapılabilir olduğunu göstermiştir. Konuyla ilgili çözülmüş örnekler için [14] referanslı makaleye bakılabilir.

Lineer olmayan fonksiyonların bir boyutlu diferansiyel dönüşümlerini hesaplamak için sadece diferansiyel dönüşümün ve hesabın temel işlem özelliklerine dayanan basit ve güvenilir bir algoritma geliştirilmiştir. Bu yeni teknik genellikle standart metottan kaynaklanan zorlukları ve sayısal çalışmayı önler. Önerilen algoritma, Troesch ve Bratu-tipi problemleri de kapsayan çeşitli lineer olmayan diferansiyel denklemlerin çözüm örnekleri ile açıklanır. Hesaplanan sonuçlar, diğer analitik ya da yaklaşık metotlardan elde edilenlerle tamamen aynıdır ve tekniğin güvenilirlik ve verimliliğini kanıtlar. Ayrıca önerilen teknik her doğrusalsızlık şeklinde dönüştürülmüş fonksiyonu hesaplamak için, hesaplama açısından daha kolay bir yaklaşım sunar. Bu da algoritmaya daha yaygın uygulanabilirlik kazandırır.

2.3. Pade Yaklaşımı

Pade serileri birçok alanda kullanılmaktadır. Örneğin mühendislik uygulamalarında; lineer olmayan sensörlerin algılanması problemlerinde, diferansiyel denklemlerin çözümlerinde[9,10], pertürbe sistemlerin özdeğerlerinin analizlerinin yapılmasında kullanılabilmektedir [11]. Şimdi Pade yaklaşımı hakkında bilgi verilecektir.

Yaklaşımlar, iki kuvvet serisinin bir oranının, bir fonksiyonun genişlemesi ve pay ile payda katsayılarının belirlenmesi şeklinde türetilir. Pade yaklaşımları farklı kutupları içerdiğinden genellikle Taylor açılımına yakındır. Çünkü rasyonel fonksiyonun kullanılması iyi belirtilmesine olanak tanır. $R_{L/0}$ Pade yaklaşımı McLauren serisine karşılık gelir. Pade serisi ,

$$A(x)=\sum_{j=0)}^{\infty} a_j x^j \quad , \tag{2.3.1}$$

şeklinde olan kuvvet serileri için tektir. Eğer A(x) transandantan bir fonksiyon ise terimleri x^0' ın bir Taylor serisi olarak verilebilir. Bu seri,

$$a_n = \frac{1}{n!} A^{(n)}(x_0) \quad , \tag{2.3.2}$$

şeklindedir ve buradaki katsayılar, denklemin katsayılarına eşitlenerek bulunur.

$$A(x)-\frac{P_L(x)}{Q_M(x)} = 0 \tag{2.3.3}$$

de $Q_M(x)$ diğer katsayıları etkileyebilecek bir keyfi sabitle çarpılabileceğinden ilave bir sınırlama yapılabilinir. Sıradan bir normalleştirme ile $Q_M(0)=1$ elde edilir.(2.3.3) genişletilirse ,

$$\begin{aligned} P_L(x) &= p_0 + p_1(x) + ... + p_L x^L \\ Q_L(x) &= q_0 + q_1(x) + ... + q_L x^L \end{aligned} \tag{2.3.4}$$

elde edilir. n<0 için $a_n=0$ ve j>M için $q_j=0$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
&a_0 = p_0 \\
&a_1 + a_0\, q_1 = p_1 \\
&a_2 + a_1\, q_1 + a_0\, q_2 = p_2 \\
&\vdots \\
&a_L + a_{L-1}\, q_1 + \ldots + a_0\, q_L = p_L \\
&a_{L+1} + a_L\, q_1 + \ldots + a_{L-M+1}\, q_M = 0 \\
&\vdots \\
&a_{L+M} + a_{L+M-1}\, q_1 + \ldots + a_L\, q_M = 0\, ,
\end{aligned} \tag{2.3.5}$$

denklem sistemi bulunur. Alt indisler üst indislerden büyük olduğu zaman toplamlar 0 olarak yerlerine yazılırsa

$$[L/M] = \frac{\begin{vmatrix} a_{L-m+1} & a_{L-m+2} & \cdots & a_{L+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_L & a_{L+1} & \cdots & a_{L+M} \\ \sum\limits_{j=M}^{L} a_{j-M}\, x^j & \sum\limits_{j=M-1}^{L} a_{j-M+1}\, x^j & \cdots & \sum\limits_{j=0}^{L} a_j\, x^j \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{L-M+1} & a_{L-M+2} & \cdots & a_{L+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_L & a_{L+1} & \cdots & a_{L+M} \\ x^M & x^{M-1} & \cdots & 1 \end{vmatrix}}, \tag{2.3.6}$$

elde edilir. $0 \le n \le M$. ise

$$[\mathrm{L/M}] = \sum_{j=0}^{L-M} a_j x^j + x^{L-M+1} W_{L/M}^T W_{L/M}^{-1} W_{L/M}$$

$$= \sum_{j=0}^{L+n} a_j x^j + x^{L+n+1} W_{(L+M)/M}^T W_{L/M}^{-1} W_{(L+n)/M} \tag{2.3.7}$$

biçiminde veya

$$[L/M] = \sum_{j=0}^{L-M} a_j\, x^j + x^{L-M+1}\, \mathbf{w_{L/M}}^{\mathrm{T}}\, W_{L/M}^{-1}\, \mathbf{w_{L/M}}$$

$$= \sum_{j=0}^{L+n} a_j\, x^j + x^{L+n+1}\, \mathbf{w}_{(L+M)/M}^{T}\, W_{L/M}^{-1}\, \mathbf{w_{(L+n)/M}} \tag{2.3.8}$$

şeklindedir. e^x için ilk birkaç Pade yaklaşımı,

$$\exp_{0/0}(x) = 1$$

$$\exp_{0/1}(x) = \frac{1}{1-x}$$

$$\exp_{0/2}(x) = \frac{2}{2-2x+x^2}$$

$$\exp_{0/3}(x) = \frac{6}{6-6x+3x^2-x^3}$$

$$\exp_{1/0}(x) = 1+x$$

$$\exp_{1/1}(x) = \frac{2+x}{2-x}$$

$$\exp_{1/2}(x) = \frac{6+2x}{6-4x+x^2}$$

$$\exp_{1/3}(x) = \frac{24 + 6x}{24 - 18x + 6x^2 - x^3}$$

$$\exp_{2/0}(x) = \frac{2 + 2x + x^2}{2}$$

$$\exp_{2/1}(x) = \frac{6 + 4x + x^2}{6 - 2x}$$

$$\exp_{2/2}(x) = \frac{12 + 6x + x^2}{12 - 6x + x^2}$$

$$\exp_{2/3}(x) = \frac{60 + 24x + 3x^2}{60 - 36x + 9x^2 - x^3}$$

$$\exp_{3/0}(x) = \frac{6 + 6x + 3x^2 + x^3}{6}$$

$$\exp_{3/1}(x) = \frac{24 + 18x + 16x^2 + x^3}{24 - 6x}$$

$$\exp_{3/2}(x) = \frac{60 + 36x + 9x^2 + x^3}{60 - 24x + 3x^2}$$

$$\exp_{3/3}(x) = \frac{120 + 60x + 12x^2 + x^3}{120 - 60x + 12x^2 - x^3},$$

biçimindedir. C, determinant olmak üzere iki değişken içeren özdeşlikler

$$\frac{P_{L+1}(x)}{Q_{M+1}(x)} - \frac{P'_L(x)}{Q'_M(x)} = \frac{{C_{(L+1)/(M+1)}}^2 x^{L+M+1}}{Q_{M+1}(x)\, Q'_M(x)}$$

$$\frac{P_{L+1}(x)}{Q_M(x)} - \frac{P'_L(x)}{Q'_M(x)} = \frac{C_{(L+1)/M}\, C_{(L+1)/(M+1)}\, x^{L+M+1}}{Q_M(x)\, Q'_M(x)}$$

$$\frac{P_L(x)}{Q_{M+1}(x)} - \frac{P'_L(x)}{Q'_M(x)} = \frac{C_{L/(M+1)}\, C_{(L+1)/(M+1)}\, x^{L+M+1}}{Q_M(x)\, Q'_M(x)}$$

$$\frac{P_L(x)}{Q_{M+1}(x)} - \frac{P'_{L+1}(x)}{Q'_M} = \frac{{C_{(L+1)/(M+1)}}^2 x^{L+M+2}}{Q_{M+1}\, Q'_M}$$

$$\frac{P_{L+1}}{Q_M(x)} - \frac{P'_{L-1}(x)}{Q'_M(x)} = \frac{C_{L/(M+1)}\, C_{(L+1)/M}\, x^{L+M} + C_{L/M}\, C_{(L+1)/(M+1)}\, x^{L+M+1}}{Q_M(x)\, Q'_M(x)}$$

$$\frac{P_L(x)}{Q_{M+1}(x)} - \frac{P'_L(x)}{Q'_{M-1}(x)} = \frac{C_{L/(M+1)}\, C_{(L+1)/M}\, x^{L+M} - C_{L/M}\, C_{(L+1)/(M+1)}\, x^{L+M+1}}{Q_{M+1}(x)\, Q'_{M-1}(x)},$$

şeklinde olup, üç bilinmeyenli özdeşlikler Frobenius Üçgen Özdeşliği kullanılarak türetilebilinir. Beş bilinmeyenli bir özdeşlik olan

$$S_{(L+1)/M}\,S_{(L-1)/M}-S_{L/(M+1)}\,S_{L/(M-1)}=S_{L/M}^{\;2}.$$

de işlem yapılarak

$$\frac{(R_{L/M}-R_{L/(M+1)})\,(R_{(L+1)/M}-R_{(L+1)/(M+1)})}{(R_{L/M}-R_{(L+1)/M})\,(R_{L/(M+1)}-R_{(L+1)/(M+1)})}=\frac{C_{L/(M+1)}\,C_{(L+2)/(M+1)}}{C_{(L+1)/M}\,C_{(L+1)/(M+2)}}$$

$$\frac{(R_{L/M}-R_{(L+1)/(M+1)})\,(R_{(L+1)/M}-R_{L/(M+1)})}{(R_{L/M}-R_{L/(M+1)})\,(R_{(L+1)/M}-R_{(L+1)/(M+1)})}=\frac{C_{(L+1)/(M+1)}^{\;2}\,x}{C_{L/(M+1)}\,C_{(L+2)/(M+1)}}$$

$$\frac{(R_{L/M}-R_{(L+1)/(M+1)})\,(R_{(L+1)/M}-R_{L/(M+1)})}{(R_{L/M}-R_{(L+1)/M})\,(R_{L/(M+1)}-R_{(L+1)/(M+1)})}=\frac{C_{(L+1)/(M+1)}^{\;2}\,x}{C_{(L+1)/M}\,C_{(L+1)/(M+2)}}$$

$$\frac{(R_{L/M}-R_{(L+1)/(M-1)})\,(R_{L/(M+1)}-R_{(L+1)/M})}{(R_{L/M}-R_{L/(M+1)})\,(R_{(L+1)/(M+1)}-R_{(L+1)/M})}=\frac{C_{(L+1)/M}\,C_{(L+1)/(M+1)}\,x}{C_{L/(M+1)}\,C_{(L+2)/M}}$$

$$\frac{(R_{L/M}-R_{(L-1)/(M+1)})\,(R_{(L+1)/M}-R_{L/(M+1)})}{(R_{L/M}-R_{(L+1)/M})\,(R_{(L-1)/(M+1)}-R_{L/(M+1)})}=\frac{C_{L/(M+1)}\,C_{(L+1)/(M+1)}\,x}{C_{(L+1)/M}\,C_{L/(M+2)}}.$$

elde edilir.

2.4 Pade Yaklaşımı ile İlgili Örnekler

Bu bölümde pade yaklaşımı ile ilgili örnekler [9] ve [10] referanslı makaleler yardımıyla açıklanmıştır.

Örnek 2.4.1

$$\begin{bmatrix}1 & -x\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1'\\ v_2'\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ \sin x\end{bmatrix} \qquad (2.4.1.1)$$

Diferansiyel cebirsel denklemini

$$\begin{bmatrix}v_1(0)\\ v_2(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}v_1'(0)\\ v_2'(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix} \qquad (2.4.1.2)$$

başlangıç koşulları altında göz önüne alalım. Bu denklemin kesin çözümü

$$\begin{bmatrix} v_1(x) \\ v_2(x) \end{bmatrix} == \begin{bmatrix} \exp(-x) + x\sin x \\ \sin x \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Başlangıç değerlerini kullanarak (2.4.1.1) denkleminin çözümünün

$$\begin{aligned} v_1(x) &= y_{0,1} + y_{1,1}x + e_1x^2 = 1 - x + e_1x^2, \\ v_2(x) &= y_{0,2} + y_{1,2}x + e_2x^2 = x + e_2x^2 \end{aligned} \qquad (2.4.1.3)$$

olduğunu kabul edelim. Buradan değerler yerine yazılıp yüksek dereceli terimler ihmal edilirse:

$$\begin{aligned} &(-3 + 2e_1)x + Q(x^2) = 0, \\ &e_2x + Q(x^3) = 0 \end{aligned} \qquad (2.4.1.4)$$

elde edilir. (2.4.1.4)'deki lineer denklem

Ae=B,

şeklinde ifade edilebilir. Buradaki

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}, e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}$$

değerleri denklemde yazılırsa:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

olur ki bu lineer denklem çözülürse aşağıdaki sonuç elde edilir.

$$e = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \begin{aligned} v_1(x) &= 1 - x + 1{,}5x^2 + e_1x^3 \\ v_2(x) &= x \end{aligned} \qquad (2.4.1.5)$$

(3.1.5) ten (3.1.1) in çözümü

$$\begin{aligned} v_1(x) &= 1 - x + 1{,}5x^2 + e_1x^3 \\ v_2(x) &= x + e_2x^3 \end{aligned} \qquad (2.4.1.6)$$

bulunur. (2.4.1.6) denkleminde bulunan sonuç (2.4.1.1) de yazılıp yüksek dereceli terimler ihmal edilirse:

$$\begin{aligned} &(0.5 + 3e_1)x^2 + Q(x^3) = 0, \\ &(0.1666667 + e_2)x^3 + Q(x^4) = 0, \end{aligned} \qquad (2.4.1.7)$$

elde edilir. Burada bulunan

$$\mathrm{A}=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}-0,5\\ -0,1666667\end{bmatrix}$$

değerleri (3.1.7) de yerine yazılırsa:

$$\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e_1\\ e_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0,5\\ -0,1666667\end{bmatrix}$$

lineer denklemi elde edilir. Bu lineer denklem çözüldüğünde

$$e=\begin{bmatrix}-0,1666667\\ -0,1666667\end{bmatrix}$$

ve

$$\begin{aligned}v_1(x)&=1-x+1,5x^2-0.1666667x^3,\\ v_2(x)&=x-0.1666667x^{3.}\end{aligned} \qquad (2.4.1.8)$$

dir. Yukarıdaki kural tekrar edilerek

$$\begin{aligned}v_1(x)&=1-x+1,5x^2-0.1666667x^3-0.125x^4-0.0083333x^5\\ &\quad+0.0013888x^6-0.0001984x^7-0.0000128x^8-0.2755731x10^5,\\ v_2(x)&=x-0.1666667x^3+0.083x^5-0.001984x^7+0.2755731x10^{-2}x^9.\end{aligned}$$

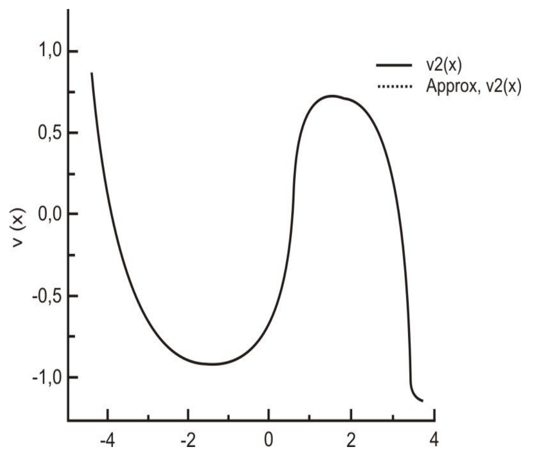
değerleri bulunur. $v_1(x)$ ifadesi uygun Pade serilerine dönüştürülebileceğinden

$$\begin{aligned}P&=[5/4]\\ &=\frac{1-0.6633044x+1.2576713x^2+0.2561786x^3-0.04712930-0.5249978x-1}{1+0.3366955x+0.0943669x^2+0.0121689x^3+0.0046050x''}\end{aligned}$$

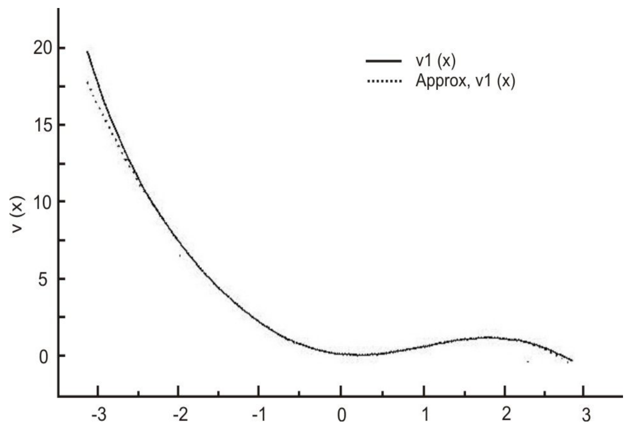
elde edilir. $v_2(x)$ kuvvet serilerinin uygun Pade serisi ise

$$\begin{aligned}q&=[5/4]\\ &=\frac{x+10.1338383x^2-0.0033128x^5}{1+0.0328282x'+0.0004509x^4}\end{aligned}$$

şeklindedir. h adım aralığı v_1 ve v_2 de yerine yazılırsa $v_1(x), v_2(x), v_1'(h)\, ve\, v_2'(h)$ değerleri bulunur. $v_1\, ve\, v_2$ kuvvet serileri çok hızlı yakınsıyorsa Pade Serilerinde ihmal edilebilir. $v_1(x)$ ve $v_2(x)$ çözümlerinin grafikleri aşağıda verilmiştir.



Şekil 1. [-4,4] aralığında $v_2(x)$ in $[5/4]$ Pade yaklaşımının grafiği



Şekil 2. [-3,3] aralığında $v_1(x)$ in $[5/4]$ ade yaklaşımının grafiği

Pade serilerinde kullanılan yaklaşım; denklem sistemlerinin tam sonucunun bulunmasında yardımcı olur.

Örnek2.4.2:

$$\begin{pmatrix} 1 & -x & x^2 \\ 0 & 1 & -x \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\upsilon' + \begin{pmatrix} 1 & -(x+1) & x^2+2x \\ 0 & -1 & x-1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\upsilon = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ sin(x) \end{pmatrix} \qquad (2.4.2.1)$$

diferansiyel cebirsel denklemini

$$\upsilon(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

başlangıç koşulları altında göz önüne alalım. Denklemin çözümleri,

$$\upsilon_1(x) = e^{-x} + xe^x,$$

$$\upsilon_2(x) = e^x + x\,sin(x),$$

$$\upsilon_3(x) = x\,sin(x).$$

olarak bulunup başlangıç koşulları bu çözümlerde yerine yazılırsa,

$$\upsilon_1(x) = y_{0,1} + e_1 x \Rightarrow \upsilon_1(x) = 1 + e_1 x,$$

$$\upsilon_2(x) = y_{0,2} + e_2 x \Rightarrow \upsilon_2(x) = 1 + e_2 x, \qquad (2.4.2.2)$$

$$\upsilon_3(x) = y_{0,3} + e_3 x \Rightarrow \upsilon_3(x) = e_3 x.$$

elde edilir. (2.4.2.2)'de bulunan değerler (2.4.2.1) denkleminde yerine yazılıp yüksek dereceli terimlere göre düzenleme yapılırsa,

$$e_1 + Q(x) = 0,$$

$$-1 + e_2 + Q(x) = 0, \qquad (2.4.2.3)$$

$$(-1 + e_3)x + Q(x^2) = 0.$$

sonucu elde edilir.

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\quad e=\begin{pmatrix}e_1\\e_2\\e_3\end{pmatrix}$$

değerleri

$$Ae=B, \tag{2.4.2.4}$$

denkleminde yerine yazılırsa:

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e_1\\e_2\\e_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

elde edilir ki; bu denklem çözüldüğünde

$$e=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

ve

$$\upsilon_1(x)=1,$$

$$\upsilon_2(x)=1+x, \tag{2.4.2.5}$$

$$\upsilon_3(x)=x.$$

değerleri bulunur. Bulunan değerler (2.4.2.1)'in çözümlerinde yerine yazılırsa:,

$$\upsilon_1(x)=1+e_1x^2,$$

$$\upsilon_2(x)=1+x+e_2x^2, \tag{2.4.2.6}$$

$$\upsilon_3(x)=x+e_3x^2.$$

sonucu elde edilir. (2.4.2.6)'da bulunan değerler (2.4.2.1)'de yerine yazılıp yüksek dereceli terimlere düzenleme yapılırsa

$$
\begin{aligned}
&(-3+2e_1)x+Q(x^2)=0,\\
&(-3+2e_2)x+Q(x^2)=0, \qquad (2.4.2.7)\\
&e_3x^2+Q(x^3)=0,
\end{aligned}
$$

olur. Buradan

$$A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}3\\3\\0\end{pmatrix},\quad e=\begin{pmatrix}e_1\\e_2\\e_3\end{pmatrix}.$$

dir. (2.4.2.7) den

$$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e_1\\e_2\\e_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\\0\end{pmatrix}.$$

lineer denklemi elde edilir. Bu lineer denklem çözüldüğünde

$$e=\begin{pmatrix}1.5\\1.5\\0\end{pmatrix}.$$

olur. Buradan elde edilen

$$
\begin{aligned}
&\upsilon_1(x)=1+1.5x^2,\\
&\upsilon_2(x)=1+x+1.5x^2, \qquad (2.4.2.8)\\
&\upsilon_3(x)=x.
\end{aligned}
$$

değerleri (2.4.2.1) in çözümlerinde yerlerine yazılırsa

$$\upsilon_1(x) = 1 + 1.5x^2 + e_1 x^3,$$

$$\upsilon_2(x) = 1 + x + 1.5x^2 + e_2 x^3, \qquad (2.4.2.9)$$

$$\upsilon_3(x) = x + e_3 x^3.$$

elde edilir ve (2.4.2.9)denklemi (2.4.2.1)’de yazılıp yüksek dereceli terimlere göre düzenleme yapılırsa

$$(-1 + 3e_1)x^2 + Q(x^3) = 0,$$

$$(-0,5 + 3e_2)x^2 + Q(x^3) = 0, \qquad (2.4.2.10)$$

$$(0.1666667 + e_3)x^3 + Q(x^4) = 0,$$

olur. Bu denklemden

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \\ -0.1666667 \end{pmatrix}, \quad e = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}.$$

değerleri elde edilir. (2.4.2.10) ’dan

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \\ -0.1666667 \end{pmatrix}.$$

lineer denklemi bulunur. Bu denklemin çözümünden

$$e = \begin{pmatrix} 0.3 \\ 0.1666667 \\ -0.1666667 \end{pmatrix}.$$

dir. Buradan

$$\upsilon_1(x) = 1 + 1.5x^2 + 0.3x^3,$$

$$\upsilon_2(x) = 1 + x + 1.5x^2 + 0.1666667x^3,$$

$$\upsilon_3(x) = x - 0.1666667x^3.$$

olur. Bu kural tekrarlanırsa,

$$\upsilon_1(x) = 1 + 1.5x^2 + 0.3x^3 + 0.125x^4 + 0.2083x^5 + 0.00972x^6$$

$$+0.0011904x^7 + 0.0002232x^8 + 0.0000220x^9,$$

$$\upsilon_2(x) = 1 + x + 1.5x^2 + 0.1666667x^3 - 0.125x^4 + 0.0083x^5 + 0.00972x^6$$

$$+0.0011984x^7 - 0.0001736x^8 + 0.2755731 \times 10^{-2}x^9,$$

$$\upsilon_3(x) = x - 0.1666667x^3 + 0.0083x^5 - 0.0001984x^7 + 0.2755731 \times 10^{-2}x^9.$$

$\upsilon_1(x)$, $\upsilon_2(x)$ ve $\upsilon_3(x)$ kuvvet serileri pade serilerine çevrilirse

$$p = [5/4]$$

$$= \frac{1 + 0.2788184x + 1.3965364x^2 + 0.7439892x^3 + 0.1494526x^4 + 0.0455749x^5}{1 + 0.2788184x - 0.1034635x^2 - 0.0075718x^3 + 0.0033752x^4}$$

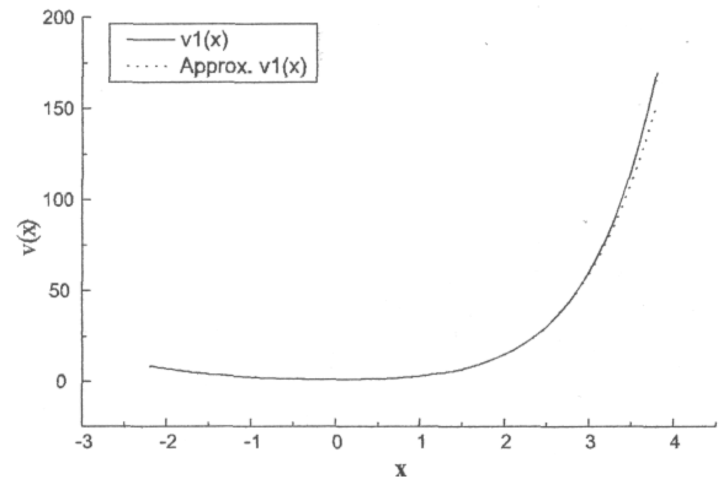
$$q = [5/4]$$

$$= \frac{1 + 0.6633044x + 1.2576713x^2 - 0.2561786x^3 - 0.0471293x^4 + 0.0524997x^5}{1 - 0.3366955x + 0.0943669x^2 - 0.0121689x^3 + 0.0046050x^4}$$

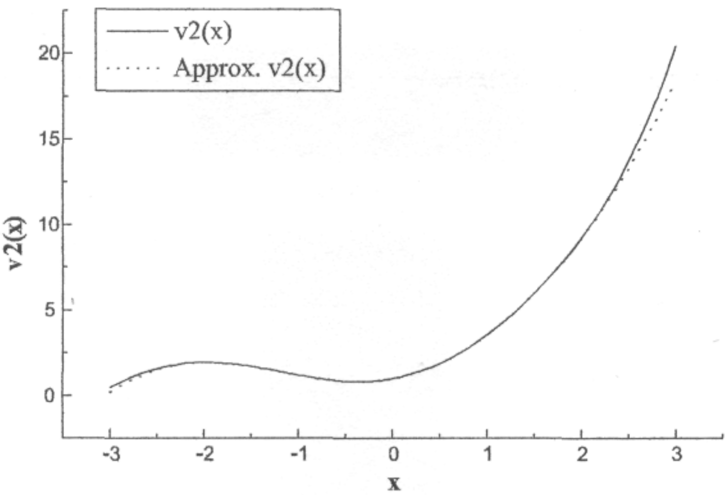
$$r = [5/4]$$

$$= \frac{x - 0.1338383x^3 + 0.0033128x^5}{1 + 0.0328282x^2 + 0.0004509x^4}$$

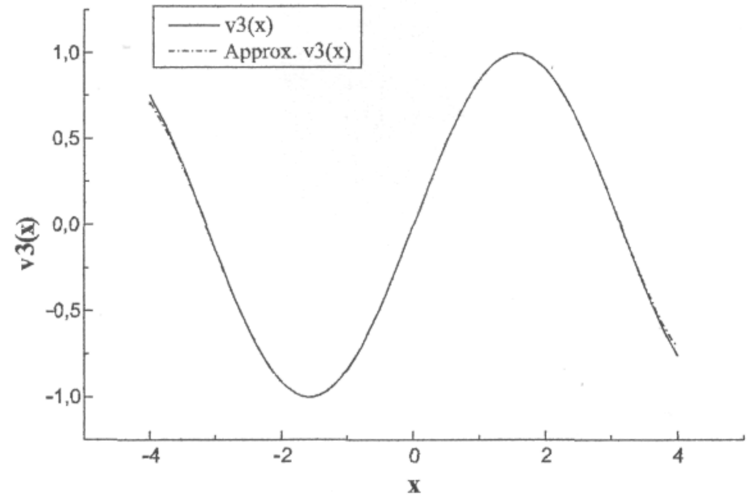
olup h adım aralığı seçilip $\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3$’de yerine yazılırsa $\upsilon_1(x)$, $\upsilon_2(x)$ ve $\upsilon_3(x)$ elde edilir. Buradan da $\upsilon'_1(h), \upsilon'_2(h), \upsilon'_3(h)$ bulunabilir. $\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3$ kuvvet serileri ile pade serilerine çevrilen $\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3$ değerlerinin sonuçları birbirini sağlamaktadır.



Şekil 1. [-2,4] aralığında $v_1(x)$ in $[5/4]$ Pade yaklaşımının grafiği



Şekil 2. [-3,3] aralığında $v_2(x)$ in $[5/4]$ Pade yaklaşımının grafiği



Şekil 3. [-4,4] aralığında $v_3(x)$ in $[5/4]$ Pade yaklaşımının grafiği

Pade yaklaşımımın diferansiyel cebirsel denklemlerin çözümünde oldukça basit ve etkin bir yöntem olduğu görülmektedir Pade Serilerinin başka alanlara da uygulanabilmesi mümkündür.

3. PADE İLAVELİ DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM YÖNTEMİ

Bu bölümde bizim çalışmamızın asıl amacı olan Pade Yaklaşımlı Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi anlatılarak örneklerle yöntemin etkinliği gösterilecektir.

Diferansiyel Dönüşüm Metodu seri çözümleri sağladığından, genelde belli bir doğruluk için gerekli terim sayısını belirlemek zordur. Bu nedenle, belirli zaman aralığı, örneğin $t \in (0,H]$ birçok alt aralıklara bölünmüştür. Bu bölümde, yüksek mertebeli lineer olmayan problemlere daha iyi yaklaşım elde etmek için Diferansiyel Dönüşüm Metodu (DT) metodu ve Pade Yaklaşımlarını (P-DT) birlikte kullanacağız. Genel olarak n. Mertebeden difarensiyel denklem

$$y^{(n)}(t) = f(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \quad a \le t \le b \tag{3.1}$$

ve başlangıç koşulları

$$y(a) = \alpha_1,\ y'(a) = \alpha_2, y''(a) = \alpha_3, \ldots, y^{(n-1)}(a) = \alpha_n \tag{3.2}$$

şeklinde tanımlanır. (3.1) denklemi (0,T] aralığında çözülebilir olsun. $t_0=0$ ve $h_n = [t_n+1 - t_n]$ şeklinde ayrık aralıklar tanımlandığında $\bigcup_{n=0}^{N-1} h_n = (0,T]$ yazılabilir. N sayısı (0,T] ‘nin ayrık alt aralıklarının sayısıdır. (3.1)’e diferansiyel dönüşüm uyguladığımızda , $f(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ ve fonksiyonların dönüşüm fonksiyonları sırasıyla F ve Y(k) olmak üzere

$$\frac{(k+n)!}{k!} Y(k+n) = F(Y(k), Y(k+1), \ldots, Y(k+n-1)) \tag{3.3}$$

bulunur. Başlangıç koşulları (3.2) denkleminden

$$\begin{aligned} Y(0) &= \alpha_1 \\ Y(1) &= \frac{\alpha_2}{1!} \\ &\vdots \\ Y(n-1) &= \frac{\alpha_n}{(n-1)!} \end{aligned} \tag{3.4}$$

bulunur. İlk alt aralık olan $(t_0, t_1]$ ‘ da ilk yaklaşım fonksiyonu $y_0(t)$ olmak üzere (3.3) ve (3.4)’

$$y_0(t) = \sum_{k=0}^{2m} Y_0(k)(t-a)^k = Y_0(0) + Y_0(1)(t-a) + \ldots + Y_0(2m)(t-a)^{2m} \tag{3.5}$$

elde edilir. Bu fonksiyon için Y_p^0 [m/m] Pade diagonal yaklaşımı uygulanırsa

$$y(t_1)=Y_1(0)=Y_p^0\left[{}^{m}\!/_{m}\right]=\frac{\begin{vmatrix} Y_0(1) & Y_0(2) & \cdots & Y_0(m) & Y_0(m+1) \\ Y_0(2) & Y_0(3) & \cdots & Y_0(m+1) & Y_0(m+2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ Y_0(m) & Y_0(m+1) & \ddots & Y_0(2m-1) & Y_0(2m) \\ \sum_{i=0}^{0} Y_0(i)(t_1-a)^{m+i} & \sum_{i=0}^{1} Y_0(i)(t_1-a)^{m+i-1} & \cdots & \cdots & \sum_{i=0}^{m} Y_0(i)(t_1-a)^{i} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Y_0(1) & Y_0(2) & \cdots & Y_0(m) & Y_0(m+1) \\ Y_0(2) & Y_0(3) & \cdots & Y_0(m+1) & Y_0(m+2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ Y_0(m) & Y_0(m+1) & \ddots & Y_0(2m-1) & Y_0(2m) \\ (t_1-a)^m & (t_1-a)^{m-1} & \cdots & (t_1-a) & 1 \end{vmatrix}} \tag{3.6}$$

bulunur. Daha sonra, ikinci alt aralık için başlangıç koşulları (3.4) Taylor serisi için

$$Y_1(0)=\sum_{k=1}^{2m} kY_0(k)(t-a)^{k-1}$$

$$Y_1(1)=\sum_{k=2}^{2m} k(k-1)Y(k)(t-a)^{k-2}$$

$$Y_1(n-1)=\sum_{k=1}^{2m} k(k-1)\cdots(k-n)Y(k)(t-a)^{k-n}$$

şeklinde değiştirilerek yazılır. Burada bulunan denklemler $\left[t_1,t_2\right]$ de (3.3) denkleminin yeni başlangıç koşullarıdır. Benzer bir şekilde ikinci aralıktaki diferansiyel dönüşümün yaklaşımı,

$$y_1(t)=\sum_{k=0}^{2m} Y_1(k)(t_2-t_1)^k = Y_1(0)+Y_1(1)(t_2-t_1)+\cdots+Y_1(2m)(t_2-t_1)^{2m}$$

dır. y(t)' nin t_2 sınır noktasında değeri Y_p^1 [m/m] pade yaklaşımını verir.

$$y(t_2)=Y_2(0)=Y_p^1\left[{}^{m}\!/_{m}\right]=\frac{\begin{vmatrix} Y_1(1) & Y_1(2) & \cdots & Y_1(m) & Y_1(m+1) \\ Y_1(2) & Y_1(3) & \cdots & Y_1(m+1) & Y_1(m+2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ Y_1(m) & Y_1(m+1) & \ddots & Y_1(2m-1) & Y_1(2m) \\ \sum_{i=0}^{0} Y_1(i)(t_2-t_1)^{m+i} & \sum_{i=0}^{1} Y_1(i)(t_2-t_1)^{m+i-1} & \cdots & \cdots & \sum_{i=0}^{m} Y_1(i)(t_2-t_1)^{i} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Y_1(1) & Y_1(2) & \cdots & Y_1(m) & Y_1(m+1) \\ Y_1(2) & Y_1(3) & \cdots & Y_1(m+1) & Y_1(m+2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ Y_1(m) & Y_1(m+1) & \ddots & Y_1(2m-1) & Y_1(2m) \\ (t_2-t_1)^m & (t_2-t_1)^{m-1} & \cdots & (t_2-t_1) & 1 \end{vmatrix}}$$

Aynı kural en son yaklaşım bulunana kadar her bir alt aralığa uygulanırsa.,

$$y(t_N)=Y_p^{N-1}\left[{}^{m}\!/_{m}\right]$$

elde edilir.

4. UYGULAMALAR

Bu bölümde bu metodun etkinliğinin anlaşılabilmesi için açıklayıcı örnekler verilecektir. [15]

Örnek 4.1. Öncelikle

$$\frac{dy}{dx} = 3y \tag{4.1.1}$$

lineer denklemini $y(0)=1$ başlangıç koşulu altında ele alalım. DT uygulanırsa,

$$(k+1)Y(k+1)=3Y(k) \tag{4.1.2}$$

bulunur. $Y_0(0)=1$ olmak üzere adım aralığı h=0,2 seçilerek $0 \leq t < 0.2$ için yaklaşım denklemi

$$Y_0(x)=1+3x+4{,}5x^2+4{,}5x^3+3.375x^4+2{,}025x^5+1{,}0125x^6 \tag{4.1.3}$$

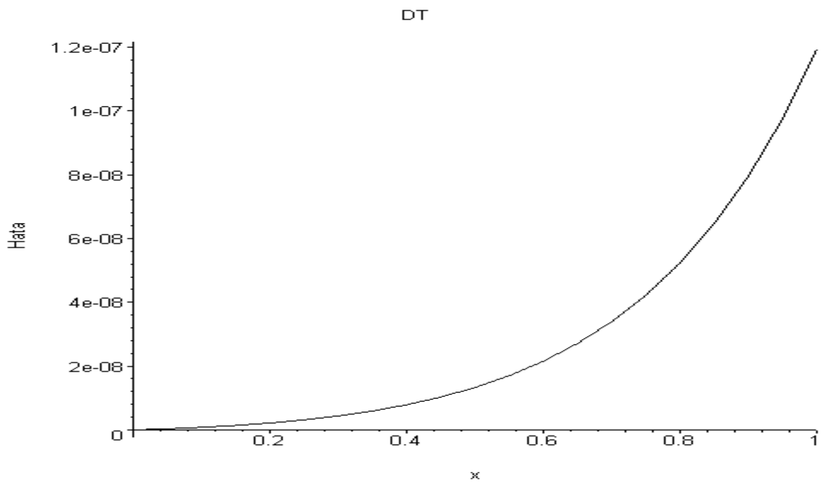
olarak bulunur. Bu denklemin Pade yaklaşımı da,

$$Y_p^0[3,3] = \frac{1+1{,}5x+0{,}9x^2+0{,}225x^3}{1-1{,}5x+0{,}9x^2-0{,}225x^3} \tag{4.1.4}$$

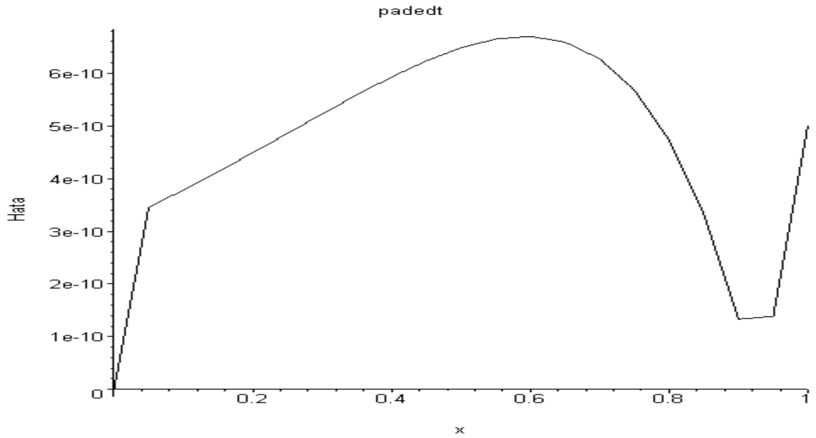
dir. Denklemden bulunan değeri t_1 noktasında kullanarak ikinci aralık için başlangıç koşulu olan

$$y(t_1) = Y_p^0[3/3](t_1) = Y_1(0) \tag{4.1.5}$$

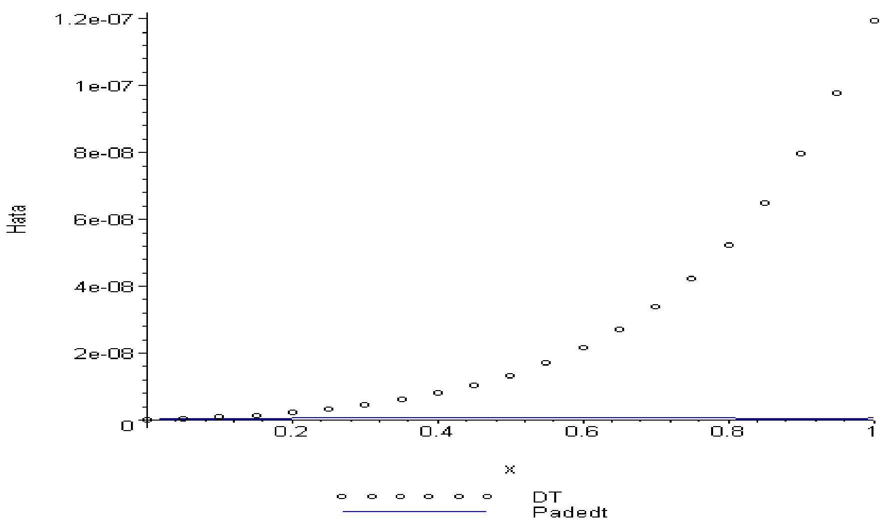
bulunur. Daha sonra ikinci aralıktaki tekrarlama bağıntısı bulunabilir. Başlangıç koşulunu kullanarak Y_0^1 [3/3] yaklaşımını buluruz Aynı kural her bir alt aralıkta uygulanarak problemin kesin çözümü olan $y=e^{3x}$ ile uyum sağlayan çözümü bulunur. Aşağıdaki grafiklerde klasik DT ve P-DT yöntemlerinin hataları gösterilmektedir.



(a)



(b)



(c)

Şekil 1:Örnek 4.1 için
(a)Klasik DT çözümünün [0,1]aralığındaki x değerleri için hata grafiği
(b)P-DT çözümünün [0,1]aralığındaki x değerleri için hata grafiği
(c)DT ve P-DT yöntemlerinin hatalarının aynı grafikte gösterimi

Örnek 4. 2. Lineer olmayan

$$\frac{dy}{dt} = -(y+1)(y+3) \qquad (4.2.1)$$

denklemini y(0)=-2 başlangıç şartı altında inceleyelim [15] .Bu probleme DT metodu uygulandığında rekürans bağıntısı

$$Y_i(k+1) = \left(\sum_{r=0}^{k} Y_i(r) Y_i(k-r) + 4Y_i(k) + 3\delta(k) \right) / (k+1) \qquad (4.2.2)$$

olur ve denklem ve $Y_0(0)$=-2 başlangıç şartını verir. Yukarıda belirtilen kuralı kullanarak $0 \le t < 0.1$ için 8. mertebeden diferansiyel dönüşüm yaklaşımı,

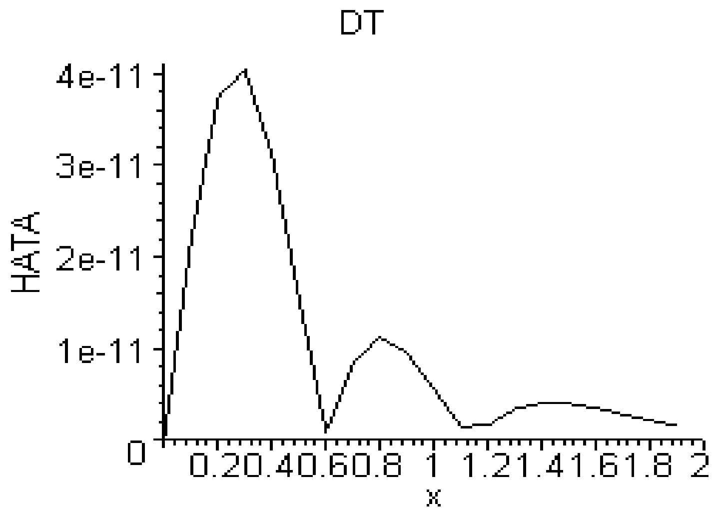
$$y_0(t) = -2 + t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{15}t^5 - \frac{17}{315}x^7 \qquad (4.2.3)$$

bulunur. Ayrıca [4,4] Pade Yaklaşımı kullanılarak,

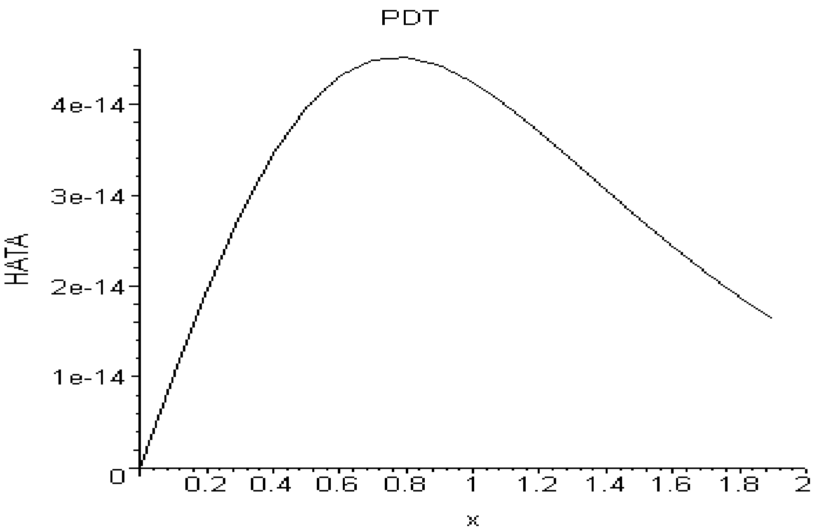
$$Y_p^0[4/4] = \frac{-2 + t - \frac{6}{7}t^2 + \frac{2}{21}t^3 - \frac{2}{105}t^4}{1 + \frac{3}{7}t^2 + \frac{1}{105}t^4} \qquad (4.2.4)$$

dir. Aynı kuralı her bir alt aralıkta uygulanarak problemin kesin çözümüyle tam bir uyum sağlayan çözümü buluruz. Problemin kesin çözümü ise

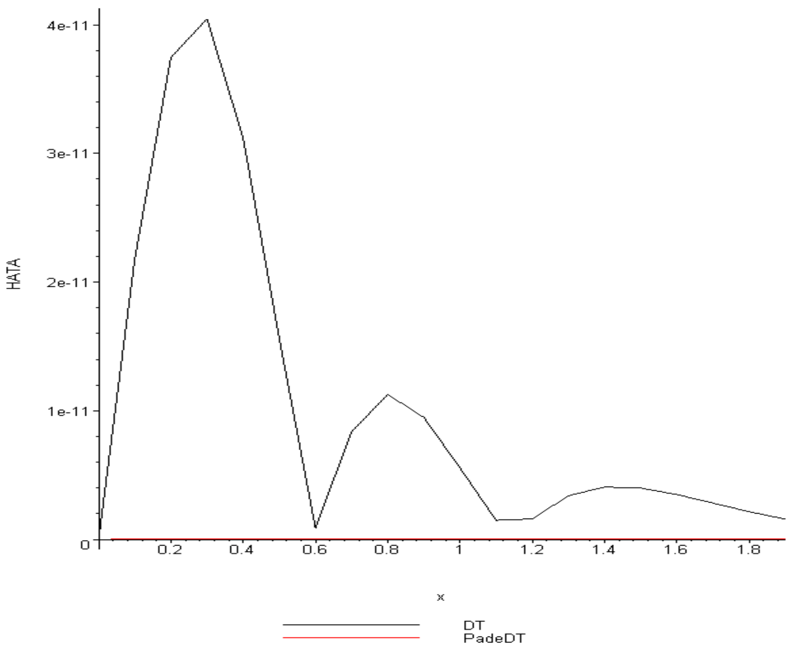
$y(t) = -3 + 2(1+e^{-2t})^{-1}$. dir. Aşağıdaki Şekil 2 de klasik DT metodu ile Pade ilaveli P-DT nin hatalarını göstermektedir.



(a)



(b)



(c)

Şekil 2:Örnek4.2 için için

(a)Klasik DT çözümünün [0,2]aralığındaki x değerleri için hata grafiği

(b)P-DT çözümünün [0,2]aralığındaki x değerleri için hata grafiği

(c)DT ve P-DT yöntemlerinin hatalarının aynı grafikte gösterimi

.

Örnek 4.3. Denklemi

$$\frac{d^2y}{dt^2}+y+\varepsilon y^3=0 \qquad (4.3.1)$$

olan Duffing denklemine y(0)=1, y'(0)=0 başlangıç şartı altında inceleyelim. DT metodu uygulayarak,

$$Y_i(k+2)=\left(-\varepsilon\sum_{r=0}^{k}\sum_{m=0}^{k-r}Y_i(r)Y_i(m)Y_i(k-r-m)-Y_i(k)\right)/(k+1)(k+2) \qquad (4.3.2)$$

olur ve $Y_0(0)=1$, $Y_0(1)=0$ başlangıç şartını elde ederiz. Yukarıda belirtilen kuralı kullanarak h=0,3 seçilerek $0\le t\le 0{,}3$ için yaklaşım fonksiyonu

$$y_0(t)=1-0.55t^2+0.05958t^4-0.00560t^6+0.00077t^8 \qquad (4.3.3)$$

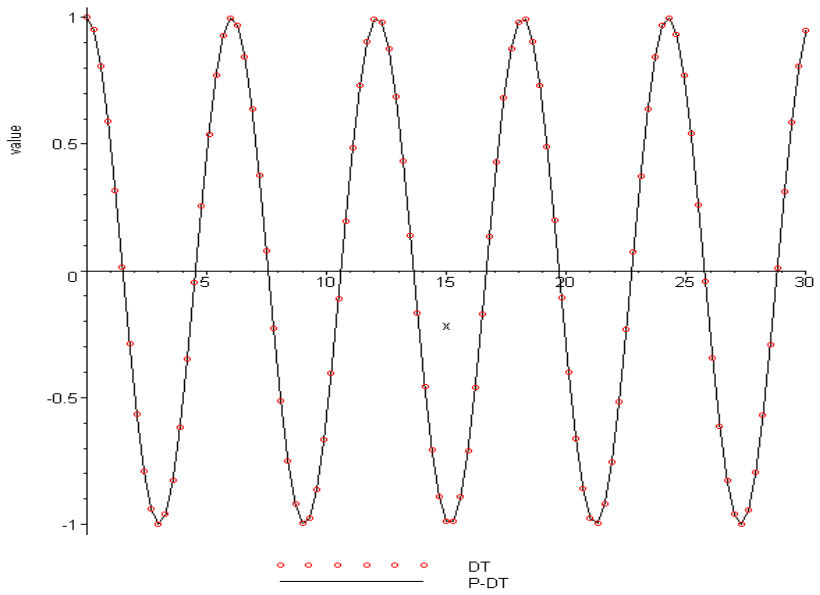
olan altı terimli yaklaşım denklemini buluruz ve Pade[4,4] Pade yaklaşımı da

$$Y_p^0[4/4]=\frac{1-0.75161t^2+0.13843t^4}{1-0.20161t^2-0.03203t^4} \qquad (4.3.4)$$

dir. Aynı kuralı her bir alt aralıkta uygulanarak problemin kesin çözümüyle tam bir uyum sağlayan çözümü buluruz. Problemin kesin çözümü

$y(t)=0.997306\cos(1.03712t)+0.00269412\cos(3.18188t)$ ‘dir.

.



Şekil 4 klasik DT ve P-DT nin hatalarını göstermektedir.

5. SONUÇ

Bu çalışmada P-DT metodu lineer ve lineer olmayan adi diferansiyel denklemlerin çözümü için uygulandı. Verilen örneklerde, klasik DT metodu ile P-DT metodunun karşılaştırılması yapılmıştır. P-DT metodunun etkinliği ve kesinliği açıkça görülmektedir. Sınır noktalarını vererek çözüm yapmak bütün aşamalarda ıraksak serilerin çözümünü elde etme avantajını vermektedir. Pade Yaklaşımlarını bu sınır noktalarında kullanmak daha iyi yaklaşım fonksiyonları bulmamızda bize yardımcı olur. Böylece kesin sonuçlar elde eden yakın sonuçlar bulabiliriz ve sınır noktalarında P-DT çözümünün klasik DT çözümlerinden daha iyi yaklaşımlar verdiğini söyleyebiliriz.

6. KAYNAKLAR

[1] P.Henrici, Applied Computational Complex Analysis, vol. 1, Wiley, New York, (Chapter 1),1974

[2] G.Corliss, Y.F.Chang, Solving Ordinary Differential Equtaions using Taylor Series, ACM Trans. Math. Soft. 8 (1982) 114-144.

[3] K.E.Brenan, S.L.Campbell, L.R.Petzold, Numerical Solution of Initial-value Problems in Differential-Algebraic, North-Holland. Amsterdam, 1989.

[4] E.Hairer, G.Wanner, Solving Ordinary Differential Equations II: Stiff and Differential-Algebraic Problems, Springer, Berlin, 1991.

[5] G.A.Baker, G.Morris, Essentials of Padé Approximations, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

[6] U.M.Ascher, L.R. Petzold, Computer Methods for Ordinary Differential Equations and Differential-Algebraic Equations, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1998.

[7] H.Hirayama, Arbitrary Order and A-stable Numerical Method for Solving Algebraic Ordinary Ddifferential Equation by Power Series. in: 2nd International Conference on Mathemathics and Computers in Physics, Vouliagmeni, Athens, Greece, July 9-16, 2000.

[8] G.Frank, MAPLE V, CRC Pres, Boca Raton, FL 33431, 1996.

[9] E.Çelik, M.Bayram,Arbitrary Order Numerical Mmethod for Solving Differential Algebraic Equation by Pade Series ,Appl .Math Comp.,137(2003)57-65

[10] E.Çelik ,M.Bayram, Onthe Numerical Soluation of Differential – Algebrac Equations by Pade Series

[11] X.Yang,S.Chen,B.Wu ,Eigen Value Reanalysis Of Structures Using Perturbations and Pade Aproximation,Mecanical Systems and Signal Processing,257-263,15,2001

[12] Weisstein, Eric W. "Padé Approximant." From MathWorld-A, Wolfram Web Resourcehttp://mathworld.wolfram.com/PadeApproximant.html

[13] Y.Keskin,Diferansiyel Dönüşüm Yöntemiyle Diferansiyel Denklemlerin Çözülmesi,Yüksek Lisans Tezi,S.Ü,Fen Bilimleri Enstütüsü, Konya,2008

[14] S.H.Cheng,L.Chen , A New Algorithm for Calculating One – Dimensional Differential Transform of Nonlinear Functions,Applied Mathematics and Computation 195799-808,2008

[15] Y.Çenesiz,A.B.Koç,B.Çitil,A.Kurnaz, Pade Embedded Piecewise Differantial Transform Method For The Solition of ODE'S,to appear Mathematical and Computational Applications

[16] M.J.Jang,C.L. Chen, Y.Liy,On Solving the Initial value Problems Using the Differantial Transformation Method,Applied Math. And Comp.,115, 145-160, 2000.

[17] L.Kuo,Thermal Boundary-Layer Problems in A Semi-Infinite Flat Plate by the Differential Transformation Method, Applied Mathematics and Computation 150, 303–320,2004.

[18] P. Darania, A. Ebadian , A Method for the Numerical Solution of the Integro-Differential Equations, Applied Mathematics and Computation 188, 657–668, 2007.

[19] L.Tyuo, C.K.Chen, ,The Soluation of the Differantial Transformation, Mathl. Comput. Modelling Vol. 28, No. 1, pp. 101-111, 1998

[20] I.H. Abdel-H.Hassan Differential Transformation Technique for Solving Higher-Order Initial Value Problems, Applied Mathematics and Computation 154 299–311,2004

[21] L.Yu, C.CHEN, The Solution of the Blasius Equation by the Differential Transformation Method, Mathl. Comput. Modelling Vol. 28, No. 1, pp. 101-111, Elsevier Science Ltd. All rights reserved,1998

[22] C.Chen , S.Ho,Solving Partial Differential Equations Bytwo-Dimensional Diferential Transform Method, Applied Mathematics and Computation 106 ,171-179,1999

[23] A.Kurnaz, G.Oturanç, M.Kiriş, n-Dimensional Differential Transformation Methodfor Solving PDE, International Journal of Computer MathematicsVol. 82, No. 3, 369–380,2005

[24] G.Oturanç, A.Kurnaz ,Y.Keskin, A New Analytical Approximate Method for the Solution of Fractional Differential Equations, International Journal of Computer MathematicsVol. 85, No. 1, 131–142,2008

[25] A.Kurnaz , G.Oturanç,The Differential Transform Approximation for the System of Ordinary Differential Equations, International Journal of Computer MathematicsVol. 82, No. 6, 709–719,2005

[26] P.Ruge,Resticted Pade Scheme İn Computational Structural Dynamics.Computers and Structures 79,1913-1921,2001

[27] A.Khoidier, Perturbed Pade Approximation With High Accuracy, Applied Mathematics and Computation ,2003

[28] M.J.Jang,C.L.Chen,Y.C.Liy,On Solving the Initial Value Problems Using 115(2000),145-160

7. ÖZGEÇMİŞ

Konya ili Beyşehir ilçesinde 01.07.1977 yılında doğdu. İlk ve orta öğrenimini Konya' da tamamladı. 1995' de Konya Selçuklu Lisesi' nden mezun oldu. 1996 yılında Selçuk Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünü kazandı. 2000 yılında Matematik öğretmeni olarak atandı. Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü' nün açtığı Yüksek Lisans sınavını kazanarak 2000 yılında Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Anabilim Dalı' nda Yüksek Lisans eğitimine başladı. Evli ve iki çocuk annesidir.