

BRAİDED REGÜLER 2-GRUPOİDLER

Veysel ZEYBEK

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Temmuz - 2009

BRAİDED REGÜLER 2-GRUPOİDLER

Veysel ZEYBEK

Dumlupınar Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Lisansüstü Yönetmeliđi Uyarınca  
Matematik Anabilim Dalında  
YÜKSEK LİSANS TEZİ  
Olarak Hazırlanmıştır.

Danışman : Doç. Dr. Erdal ULUALAN

Temmuz - 2009

**KABUL ve ONAY SAYFASI**

Veysel ZEYBEK'in YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı Braided Regüler 2-Grupoidler başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

13/07/2009

Üye : Yrd.Doç.Dr. Enver Önder USLU

Üye : Yrd.Doç.Dr. Sedat PAK

Üye : Doç.Dr. Erdal ULUALAN (Danışman)

Fen Bilimleri Enstitüsün Yönetim Kurulu'nun ...../...../..... gün ve ..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof.Dr.Atalay KÜÇÜKBURSA

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

## BRAİDED REGÜLER 2-GRUPOİDLER

Veysel Zeybek

Matematik, Yüksek Lisans Tezi, 2009

Tez Danışmanı: Doç.Dr.Erdal Ulualan

### ÖZET

Bu tez 5 bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, tezde kullanılacak olan kategori, çaprazlanmış modüller, fonktorlar, grupların yarı-direkt çarpımı gibi temel kavramlar açıklanmıştır. Ayrıca ön çaprazlanmış modüller kategorisinden çaprazlanmış modüller kategorisine bir fonktorun nasıl tanımlandığı verilmiştir. Grupoid kavramı ile gruplar üzerinde çaprazlanmış modüllerin ilişkileri incelenmiştir.

İkinci bölümde, [11] den yararlanılarak, grupoidler üzerinde çaprazlanmış modül kavramı incelenmiştir. İçen [26] tarafından yapılan 2-grupoidler ve çaprazlanmış modüller arasındaki denklik benzer bir yol kullanılarak kategoriksel grupoidlere uyarlanmıştır. Ayrıca bu bölümde monoidal kategori üzerindeki braiding dönüşümü kavramı [27] den verilmiştir. Bu bölümde ayrıca Brown ve Gilbert [11] tarafından verilen braided regüler çaprazlanmış modüller ile 2-çaprazlanmış modüller arasındaki denklik, kısaca ileriki bölümlerde kullanılacak olduğundan dolayı yeniden verilmiştir.

4. bölümde Ulualan [37] , tarafından tanımlanmış olan braided regüler 2-grupoidler kavramına yer verilmiştir. Bu bölümde ayrıca [37] den braided regüler 2-grupoidler ve braided regüler çaprazlanmış modüller kategorisi arasındaki denklik verilmiştir.

Son olarak 5. Bölümde ise, 3. ve 4. bölümlerdeki sonuçlardan yararlanılarak; 2-çaprazlanmış modüller kategorisi ile braided regüler 2-grupoidler kategorisi arasındaki denklik kurulmuştur.

**Anahtar Kelimeler** : 2-grupoidler, braiding dönüşümü, çaprazlanmış modüller, grupoidler, monoidal kategori.

## **BRAIDED REGULAR 2-GROUPOIDS**

Veysel Zeybek

Mathematics, M.S.Thesis, 2009

Thesis Supervisor: Assoc.Prof.Erdal Uualan

### **SUMMARY**

This thesis consists of 5 chapters. In the first chapter, we give some basic informations to use they in this thesis such as category, crossed modules, functors, semi-direct product of groups, Furthermore, we define a functor from the category of pre-crossed modules to that of crossed modules of groups. We investigate the relations between the concepts of groupoids and crossed modules of groups.

In the second chapter, from [11] , we investigate the notion of crossed modules over groupoids. By using a similar construction to İcen [26], we have constructed an equivalence between categorical groupoids and crossed modules of groupoids. Moreover, in this chapter, we gave the equivalence between braided regular crossed modules and 2-crossed modules from [11], to use it in the next sections.

In chapter 4, we give the notion of braided regular 2-groupoids from Ulualan [37], and again, from [37] we gave the construction of the equivalence between braided regular 2-groupoids and braided regular crossed modules.

Consequently, in the last chapter, by using these results given in the chapter 3 and 4, we gave an equivalence between the category of 2-crossed modules of groups and the category of braided regular 2-groupoids.

**Keywords:** 2-groupoids, braiding map, crossed modules, groupoids, monoidal categories.

## TEŐEKKÜR

Bu çalıőmada bana yardımcı olan ve büyük emek harcayan, değerli zamanını aldığım danışman hocam Doç. Dr. Erdal Ulualan'a, beni sabırla gönülden destekleyen eőim Rukiye Zeybek'e ve emeği geçen herkese teőekkür ederim.

## İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET .....	iv
SUMMARY .....	v
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	viii
1. GİRİŞ .....	1
1.1. Kategori Örnekleri.....	1
1.2. Çaprazlanmış Modüller .....	2
1.3. Çaprazlanmış Modül Örnekleri.....	3
1.4. Funktorlar .....	5
1.4.1. Ön çaprazlanmış modüllerden çaprazlanmış modüllere.....	6
1.5. Grupoidler .....	8
1.6.Çaprazlanmış Modüllerden Grupoidlere .....	9
2. GRUPOİDLER ÜZERİNDE ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLER .....	13
2.1.Çaprazlanmış Modüllerden Kategoriksel Grupoidlere.....	16
3. 2-ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLER VE BRAİDED REGÜLER ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLER .....	21
3.1. 2-Çaprazlanmış Modüller.....	27
3.2. Braided Regüler Çaprazlanmış Modüller ve 2-Çaprazlanmış Modüller .....	34
4. BRAİDED REGÜLER 2-GRUPOİDLER .....	39
4.1. Braided Regüler 2-Grupoidler ve Çaprazlanmış Modüller .....	44
5. BRAİDED REGÜLER 2-GRUPOİDLER VE 2- ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLER .....	49
5.1. 2-Çaprazlanmış modüllerden Braided Regüler 2- Grupoidlere.....	49
5.2. Braided Regüler 2- Grupoidlerden 2- Çaprazlanmış Modüllere .....	57
KAYNAKLAR DİZİNİ .....	61

## SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklama</u>
<b><i>Ab</i></b>	Abelian gruplar kategorisi
<b><i>BR2G</i></b>	Braided Regüler 2-grupoidler kategorisi
<b><i>BRCM</i></b>	Braided regüler çaprazlanmış modüller kategorisi
<b><i>C</i></b>	Kategori
<b><i>G ⋈ H</i></b>	<i>G</i> ve <i>H</i> gruplarının yarı-direkt çarpım grubu
<b><i>Grp</i></b>	Gruplar kategorisi
<b><i>Gpoid</i></b>	Grupoidler kategorisi
<b><i>Gpoid / C<sub>0</sub></i></b>	Obje kümesi <i>C<sub>0</sub></i> olan tüm grupoidlerin kategorisi
<b><i>Halka</i></b>	Halkalar kategorisi
<b><i>İç(G)</i></b>	<i>G</i> grubunun iç otomorfizmler grubu
<b><i>Morf</i></b>	Morfizmler sınıfı
<b><i>Ob(C)</i></b>	Objeler sınıfı
<b><i>oto(G)</i></b>	<i>G</i> grubunun otomorfizmler grubu
<b><i>PreX – Mod</i></b>	Ön çaprazlanmış modüller kategorisi
<b><i>R-mod</i></b>	R-modüller kategorisi
<b><i>Top</i></b>	Topolojik uzaylar kategorisi
<b><i>XMod</i></b>	Çaprazlanmış modüller kategorisi
<b><i>XModG/C<sub>0</sub></i></b>	Obje kümesi <i>C<sub>0</sub></i> olan tüm grupoidler üzerinde tanımlanan çaprazlanmış modüller kategorisi
<b><i>X<sub>2</sub>Mod</i></b>	2-çaprazlanmış modüller kategorisi
<b><i>Z – Mod</i></b>	$\mathbb{Z}$ – modüller kategorisi

## 1. GİRİŞ

Bu bölümde tezde kullanılacak bazı ön bilgiler [9] verilecektir.

**Tanım 1.1:**  $\mathcal{C}$  ile göstereceğimiz bir kategori aşağıdaki özellikleri sağlayan bir sistemdir.

### A. Verilenler:

a.  $\mathcal{C}$  nin  $Ob(\mathcal{C})$  ile gösterilecek olan bir objeler sınıfı var olmalıdır.  $Ob(\mathcal{C})$  nin elemanlarına  $\mathcal{C}$  nin objeleri denir ve  $A, B, C, \dots$  gibi büyük harflerle temsil edilirler.

b.  $Mor\mathcal{C}$  ile gösterilen  $\mathcal{C}$  nin morfizmler sınıfı var olmalıdır.  $f \in Mor(A, B)$  ile  $f, A$  dan  $B$  ye bir morfizmdir denir ve  $f: A \rightarrow B$  notasyonu ile gösterilir.

$$\begin{aligned} \text{c. } \circ : Mor(A, B) \times Mor(B, C) &\rightarrow Mor(A, C) \\ (f, g) &\mapsto g \circ f \end{aligned}$$

ile tanımlı morfizmler sınıfı üzerinde bir " $\circ$ " işlemi var olmalıdır. Bu işleme  $\mathcal{C}$  nin kompozisyon işlemi denir.

### B. İstenilenler:

a. Birimlik özelliği: Her  $f \in Mor(A, B)$  için  $I_B: B \rightarrow B$  ve  $I_A: A \rightarrow A$  birim morfizmleri vardır ve  $I_B \circ f = f = f \circ I_A$  dır.

b. Asosyatiflik özelliği:  $\forall f, g, h \in Mor(\mathcal{C})$  için  $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$  dir.

### 1.1. Kategori Örnekleri

**Örnek 1.1.1:** Gruplar kategorisini oluşturalım. Bu kategoriyi **Grp** ile gösterelim. Objeler olarak tüm grupları alalım. Morfizmler olarak da grup homomorfizmlerini alırsak birimlik ve asosyatiflik özelliğinin sağlandığını göstermek kolaydır. Burada kompozisyon işlemi bilinen fonksiyonların bileşke işlemi olarak alınabilir.

**Örnek 1.1.2:** Benzer şekilde halkalar kategorisi **Halka**, R-modüller kategorisi **R-mod**, topolojik uzaylar kategorisi **Top** kategorileri de tanımlanabilir.

## 1.2. Çaprazlanmış Modüller

Çaprazlanmış modüller, homotopi tipi 2-tip olan topolojik yapılara cebirsel bir karşılık bulma amacıyla 1949'da Whitehead [38] tarafından tanımlanmıştır. Çaprazlanmış modül tanımını vermeden önce bazı ön bilgiler verilmelidir.

**Tanım 1.2.1:**  $G_1$  ve  $G_0$  iki grup olsun. Eğer,

$$\begin{aligned} G_0 \times G_1 &\rightarrow G_1 \\ (g, h) &\mapsto h^g \end{aligned}$$

notasyonu ile verilen fonksiyon için  $g, g' \in G_0$  ve  $h, h' \in G_1$  olduğunda

1.  $h^{(gg')} = (h^g)^{g'}$
2.  $(hh')^g = h^g(h')^g$
3.  $h^e = h$
4.  $e^g = e$

özellikleri sağlanıyorsa;  $G_0$  a  $G_1$  grubu üzerine sağdan etki ediyor denir veya  $G_1$  e bir  $G_0$ -grup adı verilir.

**Tanım 1.2.2:**  $\partial: G_1 \rightarrow G_0$  bir grup homomorfizmi olsun.  $G_1$  grubu bir  $G_0$ -grup olmak üzere her  $g \in G_0$  ve  $h \in G_1$  için;

$$\mathbf{CM1)} \quad \partial(h^g) = g^{-1}\partial(h)g$$

özelligi sağlanıyorsa  $\partial$  ya bir *ön çaprazlanmış modül* adı verilir.

**Tanım 1.2.3:**  $\partial: G_1 \rightarrow G_0$  bir ön çaprazlanmış modül olsun  $x, y \in G_1$  için

$$\langle x, y \rangle = x^{-1}y^{-1}xy^{\partial(x)}$$

şeklindeki bir elemana  $x$  ve  $y$  nin bir *Peiffer komütatörü* adı verilir. Eğer bir ön çaprazlanmış modülde her  $x, y \in G_1$  için

$$\langle x, y \rangle = 1$$

oluyorsa  $\partial: G_1 \rightarrow G_0$  ön çaprazlanmış modülüne *çaprazlanmış modül* adı verilir.

Şimdi çaprazlanmış modül tanımını tam olarak aşağıdaki şekilde verebiliriz.

**Tanım 1.2.4:**  $\partial: M \rightarrow N$  bir grup homomorfizmi ve  $M$  de bir  $N$  – grup olsun. Eğer her  $m, m' \in M$  ve  $n \in N$  için

$$\text{CM1)} \quad \partial(m^n) = n^{-1}\partial(m)n$$

$$\text{CM2)} \quad m^{\partial m'} = (m')^{-1}mm'$$

özellikleri sağlanıyorsa  $\partial$  ya bir çaprazlanmış modül adı verilir. Buradaki **CM2)** aksiyomuna *Pieffer özdeşliği* denir.

### 1.3. Çaprazlanmış Modül Örnekleri

**Örnek 1.3.1:**  $G$  bir grup ve  $N \trianglelefteq G$  olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} G \times N &\rightarrow N \\ (g, n) &\mapsto g^{-1}ng \end{aligned}$$

eşlenik etkisi  $N \trianglelefteq G$  olduğundan iyi tanımlı bir grup etkisi olup  $N$  bir  $G$  – grup tur.

$$\begin{aligned} i: N &\rightarrow G \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

ile tanımlı içine dönüşümü bir çaprazlanmış modül olur.

**Örnek 1.3.2:**  $G$  bir grup ve  $\dot{I}\zeta(G)$  de  $G$  nin iç otomorfizmler grubu olsun.  $f_g \in \dot{I}\zeta(G)$  ve  $x \in G$  için;

$$f_g(x) = g x g^{-1}$$

ile

$$\begin{aligned} \dot{I}\zeta(G) \times G &\rightarrow G \\ (f_g, x) &\mapsto g x g^{-1} \end{aligned}$$

etkisini tanımlayalım. Bu durumda  $G$  bir  $\dot{I}\zeta(G)$  – grup tur.

$$\begin{aligned} \partial: G &\rightarrow \dot{I}\zeta(G) \\ g &\mapsto f_g \end{aligned}$$

temsil homomorfizması bu etkiyle birlikte bir çaprazlanmış modül olur.

**Örnek 1.3.3:**  $\partial : M \rightarrow N$  bir ön çaprazlanmış modül olsun. Eğer  $\partial$  bir izomorfizm ise aynı zamanda bir çaprazlanmış modül olur. Gerçektende her  $n \in N$  için  $\partial(m) = n$  olacak şekilde bir tek  $m \in M$  var olup her  $m, m' \in M$  için **CM1**) aksiyomundan

$$\partial(m^n) = n^{-1} (\partial m) n$$

olup

$$n = \partial m'$$

olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned} \partial(m^{\partial m'}) &= (\partial m')^{-1} \partial(m) \partial(m') \\ &= \partial(m'^{-1} m m') \end{aligned}$$

olup  $\partial$  1:1 olduğundan her  $m, m' \in M$  için

$$m^{\partial m'} = m'^{-1} m m'$$

bulunur. Bu da **CM2**) aksiyomudur.

**Tanım 1.3.1:**  $C = (\partial : M \rightarrow N)$  ve  $C' = (\partial' : M' \rightarrow N')$  iki çaprazlanmış modül olsun.  $C$  den  $C'$  ne giden bir morfizm

$$(v, m) : C \rightarrow C'$$

şeklinde bir homomorfizm çiftidir ki burada  $v : M \rightarrow M'$ ,  $m : N \rightarrow N'$  ve aşağıdaki özellikler sağlanır.

1.

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{v} & M' \\ \partial \downarrow & & \downarrow \partial' \\ N & \xrightarrow{m} & N' \end{array}$$

diyagramı komütatifdir. Yani  $\partial' v = m \partial$  dır.

2. Her  $m \in M$  ve  $n \in N$  için;

$$v(m^n) = v(m)^{m(n)}$$

dir. Böylece çaprazlanmış modüllerin kategorisini oluşturmuş oluruz. Bu kategoriyi  $\mathbf{XMod}$  ile göstereceğiz.

#### 1.4. Funktorlar

Matematiğin hemen hemen her dalında en önemli yapılan çalışmalardan biri iki yapıyı karşılaştırmak ve bir uzayda yapılamayan veya çözümü zor olan bazı problemleri o yapı ile aynı özellikleri taşıyan başka bir yapı üzerinde yaparak kolaylıkla çözüme ulaşabilmektedir. Bu anlamda iki cebirsel yapı arasındaki yapı koruyan dönüşümler homomorfizmler, veya iki topolojik yapı arasındaki yapı koruyan dönüşümler sürekli dönüşümler olduğu gibi, iki kategori arasındaki yapı koruyan yani kategori yapısını koruyan dönüşümler fonktordur. Bir fonktorun açık tanımını [9] dan bakınız.

**Tanım 1.4.1:**  $\mathcal{C}$  ve  $\mathcal{D}$  herhangi iki kategori olsun.  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  ile gösterilen  $\mathcal{C}$  den  $\mathcal{D}$  ye tanımlı bir fonktor aşağıdaki özellikleri sağlar.

1.  $\forall A \in Ob(\mathcal{C})$  için  $F(A) \in Ob(\mathcal{D})$
2.  $f \in Mor_{\mathcal{C}}(A, B)$  ise  $F(f) \in Mor_{\mathcal{D}}(F(A), F(B))$
3.  $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$
4.  $F(I_A) = I_{F(A)}$

dir. Bu özellikleri sağlayan  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  ye  $\mathcal{C}$  den  $\mathcal{D}$  ye bir fonktor denir.

**Örnek 1.4.1:**  $\mathbb{Z} - Mod$ ,  $\mathbb{Z} - mod$ üller kategori ve  $\mathbf{Ab}$  de Abelian gruplar kategorisi olsun.

$$U : \mathbb{Z} - Mod \rightarrow \mathbf{Ab}$$

fonktorunu tanımlayalım. Her abelyen grup bir  $\mathbb{Z} - modül$  olduğundan  $A$  bir  $\mathbb{Z} - modül$  olduğunda;  $(A, +)$  bir Abelyen grup olduğundan

$$U(A) = (A, +)$$

ile tanımlayabiliriz.

**Örnek 1.4.2:**  $Grp$ , gruplar kategorisi olsun.  $Ab$ , Abelyen gruplar kategorisi olmak üzere;

$$F : Grp \rightarrow Ab$$

funktorunu  $F(G) = G / [G, G]$  şeklinde  $G$  grubunun Abelyenleştirilmesini göz önüne alabiliriz. Bu funktora *Abelyenleştirme fonktoru* denir.

#### 1.4.1. Ön çaprazlanmış modüllerden çaprazlanmış modüllere

Burada ön çaprazlanmış modüller kategori  $PreX - Mod$  dan çaprazlanmış modüller kategorisi olan  $XMod$  a bir fonktor tanımlayacağız.

$$\partial : M \rightarrow N$$

bir ön çaprazlanmış modül olsun. Her  $m, m' \in M$  için

$$\langle m, m' \rangle = m^{-1} m'^{-1} m m'^{\partial m}$$

*Peiffer* elemanları tarafından üretilen  $P_2(\partial)$  alt grubu  $M$  nin bir normal alt grubudur. Böylece;

$$M^{cr} = M / P_2(\partial)$$

bir bölüm grubu tanımlayabiliriz.

$$\begin{aligned} q : M &\rightarrow M / P_2(\partial) \\ m &\mapsto m P_2(\partial) \end{aligned}$$

doğal projeksiyon dönüşümü olsun.  $\partial$  bir ön çaprazlanmış modül olduğundan

$$\begin{aligned} \partial(\langle m, m' \rangle) &= \partial(m^{-1} m'^{-1} m m'^{\partial m}) \\ &= \partial(m^{-1}) \partial(m'^{-1}) \partial(m) \partial(m'^{\partial m}) \\ &= \partial(m^{-1}) \partial(m'^{-1}) \partial(m) \partial(m^{-1}) \partial(m') \partial(m) \\ &= 1 \end{aligned}$$

olup;

$$\partial(P_2(\partial)) = 1$$

bulunur. O halde

$$\begin{aligned}\partial^{cr} : M^{cr} &\rightarrow N \\ mP_2(\partial) &\mapsto \partial(m)\end{aligned}$$

ile tanımlı  $\partial^{cr}$  iyi tanımlıdır. Gerçektende  $m, m' \in M$  için;

$$mP_2(\partial) = m'P_2(\partial) \implies m^{-1}m' \in P_2(\partial)$$

olup;

$$\partial(m^{-1}m') = \partial(m^{-1})\partial(m') = (\partial(m))^{-1}(\partial(m')) \in \partial(P_2(\partial)) = 1$$

den

$$\partial(m) = \partial(m')$$

yani

$$\partial^{cr}(mP_2(\partial)) = \partial^{cr}(m'P_2(\partial))$$

bulunur. Böylece aşağıdaki komütatif diyagramı elde ederiz.

$$\begin{array}{ccc} & & \partial \\ & & \nearrow \\ M & \xrightarrow{\quad} & N \\ \downarrow q & & \nearrow \partial^{cr} \\ & & M^{cr}\end{array}$$

O halde  $\partial: M \rightarrow N$  şeklinde verilen bir ön çaprazlanmış modülüne  $\partial^{cr}$  şeklinde bir yapı karşılık getirmiş oluruz. Bu  $\partial^{cr}$  bir çaprazlanmış modüldür. Çünkü

$$\begin{aligned}\langle mP_2(\partial), m'P_2(\partial) \rangle &= \langle m, m' \rangle P_2(\partial) \\ &= P_2(\partial) \quad (\because \langle m, m' \rangle \in P_2(\partial))\end{aligned}$$

dır. Böylece

$$(-)^{cr}: \mathbf{PreX-Mod} \rightarrow \mathbf{XMod}$$

şeklinde ön çaprazlanmış modüllerden çaprazlanmış modüllere bir fonktor tanımlanmış olur.

## 1.5. Grupoidler

Aşağıdaki tanımı Tonks [34] den bulabilirsiniz.

$\mathcal{C}$  aşağıdaki özellikleri sağlayan bir sistem ise  $\mathcal{C}$  ye bir küçük kategori denir.

1.  $Ob(\mathcal{C})$  ile gösterilen bir objeler kümesi vardır.
2.  $Mor(\mathcal{C})$  ile gösterilen morfizmler kümesi vardır.
3.  $Mor(\mathcal{C})$  den  $Ob(\mathcal{C})$  ye giden kaynak ve hedef dönüşümleri olarak adlandırılan sırasıyla  $s$  ve  $t$  ile gösterilen dönüşümler vardır.
4. Her bir obje içinde objeler kümesinden morfizmler kümesine giden  $e$  ile gösterilen birim morfizm vardır.
5.  $m: Mor(\mathcal{C}) \times Mor(\mathcal{C}) \rightarrow Mor(\mathcal{C})$  tanımlı kompozisyon işlemi vardır.  $m(b, a)$  yerine  $a \cdot b$  veya  $a \circ b$  yazacağız.  $x \in Ob(\mathcal{C})$  olduğunda  $e(x) \in Mor(\mathcal{C})$  morfizmi  $x$  den  $x$  e giden birim morfizmdir  $1_x$  veya  $e_x$  ile gösterilir.

Bu verilerin aşağıdaki özellikleri sağlaması gerekir.

1.  $a \circ b$  şeklinde iki morfizmin kompozisyonunu tanımlı olabilmesi için gerek ve yeter şart  $t(a) = s(b)$  olmasıdır. Bu durumda  $s(a \circ b) = s(a)$  ve  $t(a \circ b) = t(b)$  olur.
2. Her  $x \in Ob(\mathcal{C})$  için  $s(e_x) = t(e_x) = x$  ve her  $a \in Mor(\mathcal{C})$  için

$$a \circ e_{t(a)} = e_{s(a)} \circ a = a$$

dır.

3. Her  $(a \circ b) \circ c$  ve  $a \circ (b \circ c)$  kompozisyonları tanımlanabilir ise bunlar eşit olmalıdır.

$Ob(\mathcal{C}) = C_0$  ve  $Mor(\mathcal{C}) = C_1$  ile gösterirsek bir  $\mathcal{C}$  küçük kategorisini  $C_0$  bir küme olmak üzere

$$\mathcal{C} = (C_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow{t} \\ \xleftarrow{e} \end{array} C_0, \circ)$$

diyagramı ile kısaca temsil edebiliriz.

Bir  $\mathcal{C}$  küçük kategorisi ve  $x, y \in Ob(\mathcal{C})$  olsun.  $s(a) = x$  ve  $t(a) = y$  olan  $a$  morfizmlerinin kümesini  $C_1(x, y)$  ile göstereceğiz. Eğer  $x \neq y$  olduğunda  $C_1(x, y)$  kümeleri boş ise  $\mathcal{C}$  küçük kategorisine total bağlantısız kategori adı verilir.

Bir grupoid

$$\mathcal{C} = (C_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow{t} \\ \xleftarrow{e} \end{array} C_0, \circ)$$

şeklinde bir küçük kategori olup her morfizmi bir izomorfizmdir. Yani her  $a \in Mor(\mathcal{C})$  veya  $a \in C_1(x, y)$  için  $a : x \rightarrow y$  olduğunda  $a^{-1} : y \rightarrow x$ ,  $a \circ a^{-1} = e_{s(a)}$  ve  $a^{-1} \circ a = e_{t(a)}$  olacak şekilde  $a^{-1} \in C_1(y, x)$  morfizmi vardır.

Objekt kümesi bir tek noktadan oluşan bir grupoidde monoid denir. Bu durumda  $\mathcal{C}$  kategorisine ise monoidal kategori adı verilir.

Şimdi çaprazlanmış modüller ve grupoidler arasındaki ilişkiyi verelim:

Bunun için önce yarı-direkt çarpım grubunu tanımlamalıyız.

**Tanım 1.5.1:**  $G$  ve  $H$  iki grup  $oto(G)$  de  $G$  grubunun otomorfizmler grubu olsun.

$\theta: H \rightarrow oto(G)$  bir homomorfizm olmak üzere  $G \times H$  kümesi üzerinde aşağıdaki işlemi tanımlayalım:

$$(g, h) \cdot (g', h') = (g \theta(h)g', hh')$$

her  $g, g' \in G$  ve  $h, h' \in H$  için bu işleme göre  $G \times H$  kümesi bir gruptur. Bu gruba  $G$  ve  $H$  gruplarının yarı-direkt çarpım grubu denir ve kısaca  $G \bowtie H$  ile gösterilir. Burada  $(e_G, e_H)$  grubun birimidir ve  $(g, h)$  nin tersi  $(g, h)^{-1} = (\theta(h^{-1})g^{-1}, h^{-1})$  şeklindedir.

## 1.6. Çaprazlanmış Modüllerden Grupoidlere

Bu bölümde çaprazlanmış modüller kategorisi ile grupoidler kategorisi arasındaki ilişkiyi inceleyerek çaprazlanmış modüller kategorisinden grupoidler kategorisine bir fonktor

oluşturacağız. Benzer oluşturma kategoriksel gruplar için Brown ve Spencer [14] tarafından yapılmıştır.

$\partial: M \rightarrow N$  bir çaprazlanmış modül olsun. Bu durumda  $M$  nin bir  $N - grup$  olduğu açıktır. Yani

$$\begin{aligned} f_n : N \times M &\rightarrow M \\ (n, m) &\mapsto m^n \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı bir homomorfizm vardır.

$$\begin{aligned} \theta: N &\rightarrow oto(M) \\ n &\mapsto f_n \end{aligned}$$

ile tanımlanırsa

$$\theta(n)(m) = f_n(m) = m^n$$

şeklinde dir. Buna göre  $M \rtimes N$  yarı-direk çarpım grubu

$$\begin{aligned} (m, n) (m', n') &= (m\theta(n') m', nn') \\ &= (mm'^{n'}, nn') \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.  $(m, n)$  nin tersi  $(m^{-1n^{-1}}, n^{-1})$  şeklinde olur. Bu işleme göre  $M \rtimes N$  kümesi bir grup olur. Oluşturacağımız olan

$$\mathcal{C} = (C_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} C_0, \circ)$$

grupoidinin objeler kümesi  $C_0 = N$  ve morfizmler kümesi  $C_1 = M \rtimes N$  olsun.  $(m, n) \in M \rtimes N$  olmak üzere  $t, s: M \rtimes N \rightarrow N$ ,  $s(m, n) = (\partial m)n$  ve  $t(m, n) = n$  ile tanımlayalım. Şimdi geriye " $\circ$ " kompozisyon işlemini tanımlamak kalır.

$$(m, n): (\partial m)n \rightarrow n$$

ve

$$(m', n'): (\partial m')n' \rightarrow n' \in M \rtimes N$$

olmak üzere;

$$t(m, n) = n = \partial m' n' = s(m', n')$$

olduğunda

$$(m, n) \circ (m', n') = (m m', n')$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda

$$\begin{aligned} s((m, n) \circ (m', n')) &= s(m m', n') \\ &= \partial(mm')n' \\ &= \partial(m)\partial(m')n' \\ &= \partial(m)n \quad (\because n = \partial(m')n') \\ &= s(m, n) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} t((m, n) \circ (m', n')) &= t(mm', n') \\ &= n' \\ &= t(m', n') \end{aligned}$$

bulunur.

$(m, n): x \rightarrow y \in C_1(x, y)$  olduğunda  $x = \partial(m) n$  ve  $y = n$  şeklindedir. Buna göre;

$$(m, n)^{-1} = ((m^{-1})^{n^{-1}}, n^{-1}) \text{ için;}$$

$$\begin{aligned} s((m, n)^{-1}) &= s((m^{-1})^{n^{-1}}, n^{-1}) \\ &= \partial((m^{-1})^{n^{-1}})n^{-1} \\ &= n^{-1}\partial(m^{-1})nn^{-1} \\ &= (\partial(m)n)^{-1} \\ &= s(m, n)^{-1} \end{aligned}$$

ve

$$t((m, n)^{-1}) = t(m^{-1})^{n^{-1}}, n^{-1}$$

$$\begin{aligned}
&= n^{-1} \\
&= t(m, n)^{-1} \quad (\because n = t(m, n))
\end{aligned}$$

bulunur.

$$e : C_0 \rightarrow C_1; e(n) = (1, n)$$

olarak tanımlanırsa;

$$s(e(n)) = (\partial (1) n) = n = t(e(n)) = n$$

olup;  $\partial : M \rightarrow N$  bir çaprazlanmış modülü verildiğinde

$$\begin{array}{ccc}
& s & \\
((M \times N) & \xrightarrow{\quad} & (N, \circ) \\
& \xleftarrow{t} & \\
& e &
\end{array}$$

şeklinde bir grupoid yapısı elde edilir. Bu elde edilen grupoid aslında tanımlanmış olan grupoid yapısından daha kuvvetli bir yapıdır. Çünkü burada elde edilen  $N$  ve  $M \times N$  yapıları ek olarak birer grup yapılarıdır.

Aslında elde edilen

$$\begin{array}{ccc}
& s & \\
((M \times N) & \xrightarrow{\quad} & (N, \circ) \\
& \xleftarrow{t} & \\
& e &
\end{array}$$

yapısı bir kategoriksel grup olur. Böylece her kategoriksel grup bir grupoiddir diyebiliriz. Bu yapılandırmanın değişmeli cebirler versiyonu Arvası [6] dan bulunabilir.

## 2. GRUPOİDLER ÜZERİNDE ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLER

Bu bölümde grupoidler üzerinde çaprazlanmış modül kavramını vereceğiz. Detaylı bilgi için [10], [11], [14] ve [26] 'ya bakınız. Grupoidler üzerinde çaprazlanmış modüller ilk olarak Brown ve Gilbert [11] tarafından tanımlanmış olup Tonks [34] bu yapının kategoriksel özelliklerini incelemiştir.

**Tanım 2.1:**  $\mathcal{C}$  ve  $\mathcal{D}$  iki grupoid ve obje kümeleri aynı olsun.  $\mathcal{C}$  total bağlantısız bir grupoid olsun. Yani;

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{C} & & \mathcal{D} \\
 \parallel & & \parallel \\
 C_1 & & D_1 \\
 \begin{array}{c} \uparrow \\ s \\ \downarrow \\ t \end{array} & & \begin{array}{c} \downarrow \\ s' \\ \downarrow \\ t' \end{array} \\
 e & & e' \\
 \hline
 C_0 & \xrightarrow{id} & C_0 = D_0
 \end{array}$$

diyagramını düşünebiliriz.  $\mathcal{D}$  grupoidinin  $\mathcal{C}$  grupoidi üzerindeki etkisi morfizmleri üzerinde tanımlı

$$\begin{aligned}
 \text{Mor}(\mathcal{D}) \times \text{Mor}(\mathcal{C}) &\rightarrow \text{Mor}(\mathcal{C}) \\
 (d, c) &\mapsto c^d
 \end{aligned}$$

şeklinde bir fonksiyon olup aşağıdaki özellikler sağlar:

1.  $c^d$  nin tanımlı olması için gerek ve yeter şart  $t(c) = s(d)$  olmalıdır ve bu durumda  $t(c^d) = t(d)$  dir.
2.  $(c_1 \circ c_2)^{d_1} = c_1^{d_1} \circ c_2^{d_1}$  ve  $e_x^{d_1} = e^y$  dir.
3.  $c_1^{d_1 \circ d_2} = (c_1^{d_1})^{d_2}$  ve  $c_1^{e_x} = c_1$  dir. Burada  $c_1, c_2 \in C_1(x, x)$  ve  $d_1 \in D_1(x, y)$ ,  $d_2 \in D_1(y, z)$  dir.

**Tanım 2.2:** [34]  $\mathcal{C}$  ve  $\mathcal{D}$  aynı obje kümesinde iki grupoid,  $\mathcal{C}$  total bağlantısız ve  $\mathcal{D}$  nin  $\mathcal{C}$  üzerinde yukarıdaki gibi tanımlı bir grupoid etkisi var olsun.  $\delta: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  bir fonktor olmak üzere

aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa  $\delta$  fonktörüne *grupoidler üzerinde çaprazlanmış modül* adı verilir. (Burada  $\delta$  obje kümesi üzerinde birim fonksiyon görevini alır.)

Her  $c, c' \in \mathcal{C}(x, x)$  ve  $d \in \mathcal{D}(x, y)$  için;

$$1. \delta(c^d) = d^{-1} \circ \delta(c) \circ d$$

$$2. c^{\delta c'} = (c')^{-1} \circ c \circ c'$$

Tüm grupoidlerin oluşturduğu kategoriyi **Gpoid** ile gösterelim. Bu kategorinin bir objesi

$$\mathcal{C} = (C_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{s} \\ \xleftarrow{t} \\ \xleftarrow{e} \end{array} C_0, \circ)$$

şeklinde tanımlı bir grupoid olur. Bu kategoride obje sınıflarının hepsi aynı  $C_0$  kümesi olan objeleri değerlendirelim. Bu objelerin oluşturduğu kategoriyi **Gpoid** /  $C_0$  ile gösterelim. Yani **Gpoid** /  $C_0$  kategorisinin bir objesi, obje kümesi  $C_0$  kümesi olan bir grupoid olur. Böylece **Gpoid** /  $C_0$  kategorisi **Gpoid** kategorisinin bir tam alt kategorisidir.

Grupoidler üzerinde  $\delta: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  bir çaprazlanmış modül olsun. Bunu daha açık olarak

$$\delta: \begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{D} \\ \begin{array}{c} \uparrow s \\ \downarrow t \\ \downarrow e \end{array} & & \begin{array}{c} \downarrow s \\ \downarrow t \\ \uparrow e \end{array} \\ C_0 & \xrightarrow{id} & C_0 \end{array}$$

diyagramı ile ifade edelim. Aynı obje kümesi  $C_0$  olan tüm grupoidleri değerlendirelim.  $\delta': \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{D}'$  obje kümeleri aynı  $C_0$  kümesi olan  $\mathcal{C}'$  ve  $\mathcal{D}'$  grupoidleri üzerindeki başka bir çaprazlanmış modül olsun.

$\delta$  dan  $\delta'$  ne giden morfizmi aşağıdaki diyagram ile tanımlayabiliriz.

$$\begin{array}{ccc}
 C & \xrightarrow{\delta} & D \\
 \alpha \downarrow & & \downarrow \sigma \\
 C' & \xrightarrow{\delta'} & D'
 \end{array}$$

Bu diyagramda  $\alpha$  ve  $\sigma$  birer grupoid morfizmidir ve  $\sigma\delta = \delta'\alpha$  dir. Ayrıca  $\alpha$  ve  $\sigma$ ,  $\mathcal{D}$  nin  $\mathcal{C}$  üzerindeki etkisini korurlar. Yani  $d \in \mathcal{D}$  ve  $c \in \mathcal{C}$  için  $\alpha(c^d) = \alpha(c)^{\sigma(d)}$  şeklindedir.

Böylece obje kümesi  $C_0$  olan tüm grupoidler üzerinde tanımlanan çaprazlanmış modüller kategorisini oluşturabiliriz. Bu kategoriyi  $\mathbf{XModG}/C_0$  ile gösterelim.

**Tanım 2.3:**  $\mathbf{Gpoid}/C_0$ , obje kümesi  $C_0$  olan bütün grupoidlerin kategorisi olsun. Bu kategori içindeki bir kategoriksel grupoid;

$$\begin{array}{ccc}
 C & \begin{array}{c} \xrightarrow{d_0} \\ \xrightarrow{d_1} \end{array} & D, * \\
 & \xleftarrow{d_1} & \\
 & I &
 \end{array}$$

şeklinde bir grupoiddir. Bu grupoidin obje kümesi

$$\begin{array}{ccc}
 D & \begin{array}{c} \xrightarrow{s'} \\ \xrightarrow{t'} \end{array} & C_0, \circ \\
 & \xleftarrow{t'} & \\
 & e' &
 \end{array}$$

şeklinde bir grupoid ve morfizmler kümesi ise

$$\begin{array}{ccc}
 C & \begin{array}{c} \xrightarrow{s'} \\ \xrightarrow{t'} \end{array} & C_0, \circ' \\
 & \xleftarrow{t'} & \\
 & e' &
 \end{array}$$

şeklindeki bir  $C_0$  obje kümeli grupoiddir. Ayrıca  $a, b, c, d \in C$  olmak üzere;

$$(a * b) \circ (c * d) = (a \circ c) * (b \circ d)$$

şeklinde interchange kuralı sağlanır. Burada;

$$d_0(a) = d_1(b)$$

$$t(a * b) = s(c * d)$$

$$t(a) = s(c)$$

$$t(b) = s(d)$$

ve

$$d_0(a \circ c) = d_1(b \circ d)$$

şeklinde. Böylece bu özellikleri sağlayan

$$\begin{array}{ccc}
 (C & \xrightleftharpoons[d_1]{d_0} & D, *) \\
 \begin{array}{c} \uparrow e' \\ \downarrow s' \\ \downarrow t' \end{array} & \begin{array}{c} I \\ \downarrow s \\ \downarrow t \end{array} & \begin{array}{c} \downarrow s \\ \downarrow t \\ \uparrow e \end{array} \\
 C_0 & \xrightleftharpoons[id]{} & C_0
 \end{array}$$

Yapısına  $\mathbf{Gpoid}/C_0$  kategorisinde bir kategoriksel grupoid veya *strict 2 – grupoid* adı verilir.

## 2.1. Grupoidler Üzerinde Çaprazlanmış Modüllerden Kategoriksel Grupoidlere

Şimdi  $\mathbf{XModG}/C_0$  kategorisi ile  $\mathbf{Gpoid}/C_0$  kategorisindeki tüm kategoriksel grupoidlerin oluşturduğu kategori arasında bir fonktor tanımlayacağız. Benzer yapılandırma [26] da vardır.

$\delta : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  grupoidler üzerinde bir çaprazlanmış modül olsun.  $\mathcal{C}$  nin  $C_0$  obje kümesi üzerinde bir total bağlantısız grupoid ve  $\mathcal{D}$  nin de aynı  $C_0$  obje kümesi üzerinde bir grupoid ve yine  $\mathcal{D}$  nin  $\mathcal{C}$  üzerinde bir grupoid olduğunu biliyoruz. Buna göre  $\mathcal{D}$  nin  $\mathcal{C}$  üzerindeki bu grupoid etkisini kullanarak  $C \tilde{\times} D(x, y) = C(x) \times D(x, y)$  kümesi üzerinde  $c, c' \in C(x)$  ve  $d \in D(x, y), d' \in D(y, z)$  için

$$(c, d) \circ' (c', d') = (c \circ c', d^c \circ d')$$

şeklinde " $\circ'$ " işlemi tanımlayalım. Bu işleme göre  $C \tilde{\times} D$ ,  $C_0$  obje kümesi üzerinde bir yarı-direkt çarpım grupoidi olur. Ayrıca;

$$\begin{aligned} d_0 : C \tilde{\times} D &\rightarrow D \\ (c, d) &\mapsto d \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_1 : C \tilde{\times} D &\rightarrow D \\ (c, d) &\mapsto \delta(c) \circ d \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I : D &\rightarrow C \tilde{\times} D \\ d &\mapsto (1, d) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlarsak

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{d_0} & \\ C \tilde{\times} D & \xrightarrow{\quad} & D \\ & \xleftarrow{d_1} & \\ & \underbrace{\quad}_I & \end{array}$$

şeklinde bir yapı elde ederiz. Bu yapı üzerinde

$$d_0(c, d) = d = \delta(c') \circ d' = d_1(c', d')$$

olmak üzere  $d \in D(x, y)$  ve  $d' \in D(y, z)$  için

$$(c, d) * (c', d') = (c \circ c', d')$$

işlemi tanımlanırsa;

$$d_0((c, d) * (c', d')) = d_0(c \circ c', d')$$



$$\begin{array}{ccc}
(C \tilde{\times} D) & \begin{array}{c} \xrightarrow{d_0} \\ \xleftarrow{d_1} \end{array} & (D, *) \\
\begin{array}{c} \downarrow s' \\ \downarrow t' \end{array} & \begin{array}{c} \xrightarrow{I} \\ \xleftarrow{I} \end{array} & \begin{array}{c} \downarrow s \\ \downarrow t \end{array} \\
C_0 & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & C_0
\end{array}$$

şeklinde bir kategoriksel grupoid yapısı elde edilir. O halde geriye sadece interchange kuralının sağlandığını göstermek kalır.

$(c, a) \in C \tilde{\times} D$  nin  $*$  işlemine göre tersi  $(c \circ \delta a, a^{-1})$  dir. Burada  $a^{-1}$ ,  $C(y)$  içinde terstir.

$$k = (c, a), l = (c \circ \delta a, a')$$

ve

$$d_0(k * l) = d_0 k \text{ ve } d_1(k * l) = d_1 l$$

olsun.

$(c, a) \in C \tilde{\times} D(x, y)$  için;  $c \circ \delta a$ ,  $\delta$  objeleri üzerinde birim dönüşüm olduğundan  $x$  den  $y$  ye bir morfizm olur.

$$(c, a), (c \circ \delta a, a'): x \rightarrow y \in C \tilde{\times} D$$

ve

$$(d, b), (d \circ \delta b, b'): y \rightarrow z \in C \tilde{\times} D$$

olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
[(c, a) \circ (d, b)] * [(c \circ \delta a, a') \circ (d \circ \delta b, b')] &= \\
&= (c \circ d, a^d \circ b) * (c \circ \delta a \circ d \circ \delta b, (a')^{d \circ \delta b} \circ b') \\
&= (c \circ d, a^d \circ b \circ, (a')^{d \circ \delta b} \circ b') \\
&= (c \circ d, a^d \circ (a')^d \circ b \circ b')
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (c, a \circ a') \circ (d, b \circ b') \\
&= [(c, a) * (c \circ \delta a, a')] \circ [(d, b) * (d \circ \delta b, b')]
\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned}
d_0((c, a) \circ (d, b)) &= d_0(c \circ d, a^d \circ b) \\
&= c \circ d \\
&= d_0(c, a) \circ d_0(d, b)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
d_1((c, a) \circ (d, b)) &= d_1(c \circ d, a^d \circ b) \\
&= c \circ d \circ \delta(a^d \circ b) \\
&= c \circ d \circ d^{-1} \circ \delta(a) \circ d \circ \delta(b) \\
&= c \circ \delta(a) \circ d \circ \delta(b) \\
&= d_1(c, a) \circ d_1(c, d)
\end{aligned}$$

olduğundan  $d_0$  ve  $d_1$

$$\begin{array}{ccc}
& s & \\
C & \xrightarrow{\quad} & C_0 \\
& t &
\end{array}$$

grupoid yapısını korurlar.

Böylece grupoidler üzerinde çaprazlanmış modüller kategorisinden obje kümeleri aynı olan kategoriksel grupoidler kategorisine kategorisi ile

$$\mathbf{XModG}/C_0 \rightarrow \mathbf{Gpoid}/C_0$$

şeklinde yapı koruyan bir fonktor tanımlamış oluruz. Bu fonktoru ileriki bölümlerde kullanacağız.

### 3. 2-ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLER VE BRAİDED REGÜLER ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLER

Bu bölümde Brown ve Gilbert [11] tarafından verilen 2-çaprazlanmış modüller kategorisi ve braided regüler çaprazlanmış modüller kategorisi arasındaki denklik verilecektir. Joyal ve Street [27] de herhangi bir monoidal kategori üzerindeki braiding dönüşümünü tanımlamışlar ve braided monoidal kategori yapısını oluşturmuşlardır. Bu tanımlamadan sonra [27] de braided monoidal kategoriler ile monoidler üzerinde yarı-çaprazlanmış modüllerin bir parantez işlemi ile birlikte denk olduklarını göstermişlerdir. Bu çalışma aslında Brown ve Spencer [14] teoreminin özel bir halidir. Bu bölümde bir monoidal kategori üzerindeki braiding dönüşümünün nasıl tanımlanabileceğini ayrıntılı olarak vereceğiz.

$$\mathcal{V} = (V_0, \otimes, I, r, l, a)$$

yapısını göz önüne alalım. Bu yapı içinde  $V_0$  bir kategori

$$\otimes: V_0 \times V_0 \rightarrow V_0$$

bir fonktor,  $I$  da  $V_0$  in bir objeler kümesi ve

$$a = a_{ABC} : (A \otimes B) \otimes C \rightarrow A \otimes (B \otimes C)$$

doğal izomorfizmdir. Ayrıca

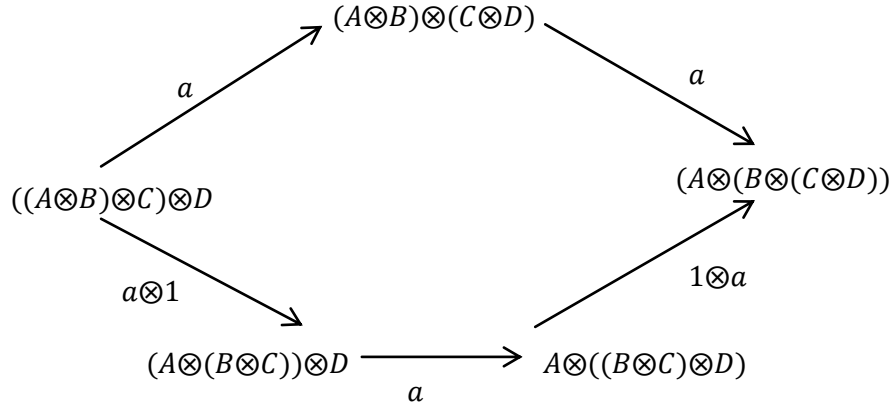
$$r = r_A : A \otimes I \rightarrow A, \quad l = l_A : I \otimes A \rightarrow A$$

sırasıyla sağ ve sol çarpımları olarak değerlendirilir. Aşağıdaki aksiyomlar sağlanırsa

$$\mathcal{V} = (V_0, \otimes, I, r, l, a)$$

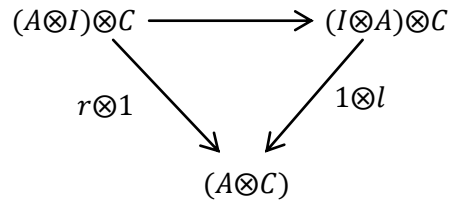
yapısına bir *monoidal kategori* denir.

**AP.**



diyagramı komütatiftir. Bu aksiyoma birleşme özelliği için *pentagon axiomu* denir.

**IT.**



diyagramı komütatiftir. Bu aksiyomda birimler için *üçgen aksiyomu* adı verilir.

Eğer  $a_{ABC}, r_A, l_A$  nın her biri  $\mathcal{V}$  içinde birer birim morfizm iseler monoidal kategorisine *strict monoidal kategori* denir.

**Tanım 3.1 [27]:**

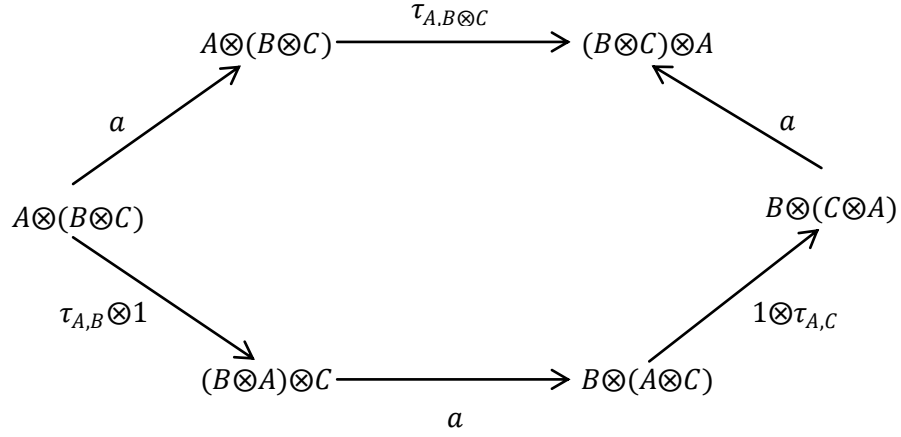
$$\mathcal{V} = (V_0, \otimes, I, r, l, a)$$

yukarıdaki gibi tanımlı bir monoidal kategori olsun.  $\mathcal{V}$  monoidal kategorisi üzerinde tanımlanan braiding,  $A, B, I$  da birer obje olmak üzere

$$\tau_{AB}: A \otimes B \rightarrow B \otimes A$$

şeklinde tanımlı bir dönüşüm olup aşağıdaki özellikler sağlanır:

B1. Aşağıdaki diyagram komütatiftir:

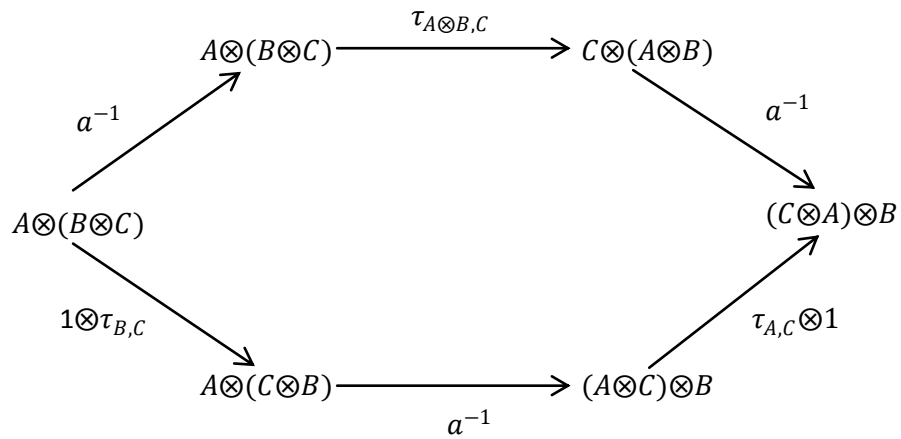


yani

$$\tau_{A,B \otimes C} = (1 \otimes \tau_{A,C}) \circ (\tau_{A,B} \otimes 1)$$

olmalıdır.

B2.



diyagramı komütatiftir. Yani

$$\tau_{A \otimes B,C} = (\tau_{A,C} \otimes 1) \circ (1 \otimes \tau_{B,C})$$

olmalıdır.

Bu  $\tau_{A,B}$  braiding dönüşümü ile birlikte  $\mathcal{V}$  monoidal kategorisine *braided monoidal kategori* adı verilir. Ek olarak  $\mathcal{V}$ ,  $\tau_{A,B}$  ile bir braided monoidal kategori olduğunda eğer her  $A, B$  obje çifti için;

$$\begin{array}{ccc}
 & B \otimes A & \\
 \tau_{A,B} \swarrow & & \searrow \tau_{B,A} \\
 (A \otimes C) & \xrightarrow{1} & (A \otimes I) \otimes C
 \end{array}$$

diyagramı değişmeli oluyorsa  $\mathcal{V}$  ye *simetrik monoidal kategori* denir.

Böylece bir monoidal kategori üzerinde "*braiding*" dönüşümünün tanımlanabilmesi için gerekli olan şey bu kategoride kompozisyon işleminden başka bir  $\otimes$  gibi çarpımın var olması ve bu çarpımın asosyatif olması gerekli fakat değişmeli olması gerekmemektedir.

**Tanım 3.2:**  $\mathcal{C}$  herhangi bir kategori olsun. Bu kategoride bir  $\mathcal{V}$  kategoriksel objesi veya internal kategorisi  $(V_1, V_0, s, t, e)$  ile tanımlı olup

$$\begin{array}{ccc}
 & \xrightarrow{s} & \\
 V_1 & \xrightarrow{\quad} & V_0 \\
 & \xleftarrow{t} & \\
 & \xleftarrow{e} &
 \end{array}$$

diyagramı ile temsil edilir ve  $V_0$  obje kümesi,  $V_1$  ise morfizmler kümesidir.  $s$  ye kaynak,  $t$  ye hedef ve  $e$  ye de birim dönüşüm adı verilir.

**Tanım 3.3 [23]:**

$$\begin{array}{ccc}
 & \xrightarrow{s} & \\
 \mathcal{C}: C_1 & \xrightarrow{\quad} & C_0 \\
 & \xleftarrow{t} & \\
 & \xleftarrow{e} &
 \end{array}$$

Gruplar kategorisinde kategoriksel bir grup olsun. Yani  $C_0$  ve  $C_1$  bir grup ve  $\mathcal{C}$  de " $\circ$ " işlemine göre bir kategori olsun. Bu durumda her grup aynı zamanda bir monoid olduğundan  $C_0$  bir monoid ve  $\mathcal{C}$  de obje kümesi monoid olan bir küçük kategori olduğundan bir monoidal kategori olarak değerlendirilebilir.  $C_1$  ve  $C_0$  ayrıca birer grup olduğundan

$$\otimes: C_0 \times C_0 \rightarrow C_0$$

işlemi yerine  $C_0$  grubunun grup işlemi alınabilir. Böylece  $(C_0, \otimes, l, r, e)$  şeklinde bir monoidal kategori elde edilir. Burada  $C_0$  Abelyen olması gerekmeyen bir grup olduğundan

$$l(a \otimes b) = ab$$

$$r(a \otimes b) = ba$$

olup

$$l(a \otimes b) = r(a \otimes b)$$

olması gerekmez. Yani  $\otimes$  işleminin değişmeli olması gerekmez. Böylece

$$\mathcal{C} = (C_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow{t} \\ \xleftarrow{e} \end{array} C_0, \otimes, e, r)$$

monoidal kategorisi veya kategoriksel grubu üzerindeki bir braiding dönüşümü tanımlanabilir.

Bu dönüşümün Joyal&Street [27] ve Garzon&Miranda [23] tarafından  $a, b \in C_0$  için

$$\tau_{a,b}: ab \rightarrow ba$$

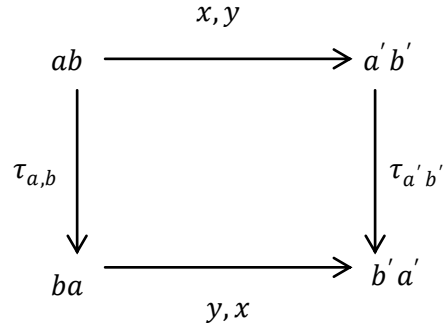
yani

$$\tau_{a,b}: l(a \otimes b) \rightarrow r(a \otimes b)$$

şeklinde tanımlanmış olup aşağıdaki özellikleri sağlar.

1.  $s\tau_{a,b} = ab$
2.  $t\tau_{a,b} = ba$

3.  $x: a \rightarrow a' \in C_1$ ,  $y: b \rightarrow b' \in C_1$  olmak üzere

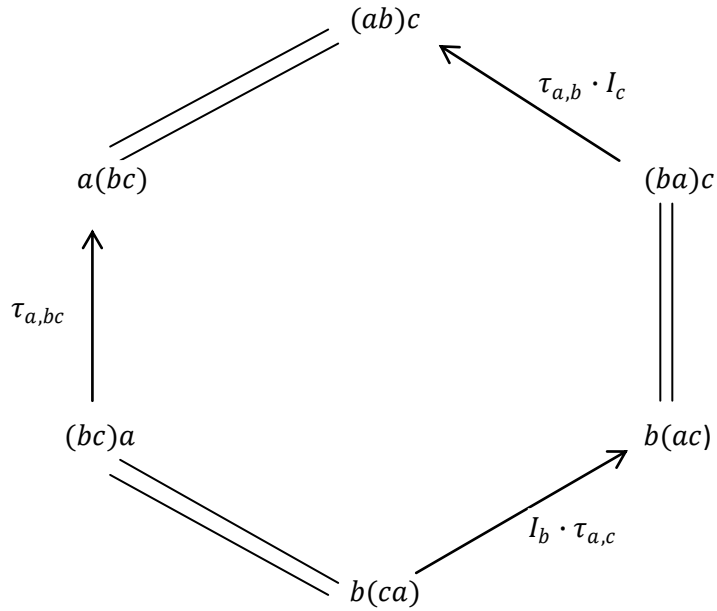


diyagramı komütatiftir. Yani

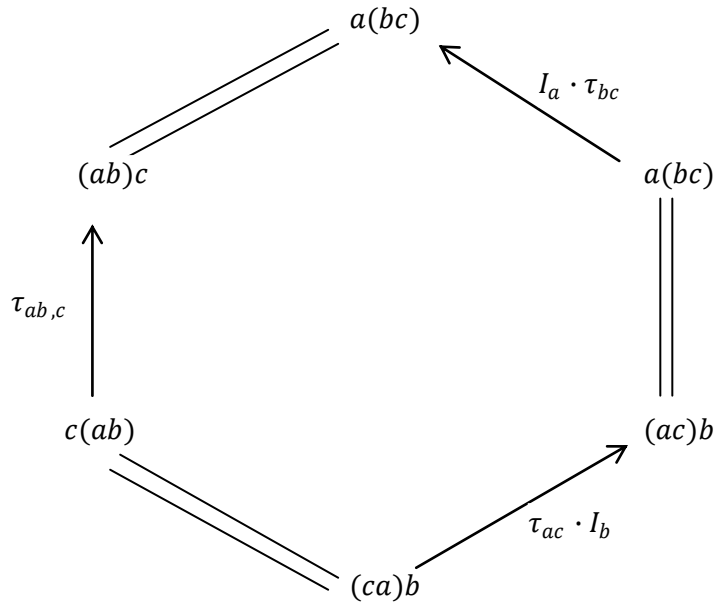
$$\tau_{a'b'} \circ xy = yx \circ \tau_{a,b}$$

dir.

4.



ve



diyagramı değişmelidir. Yani

$$\tau_{a,bc} = (\tau_{a,b} \cdot I_c) \circ (I_b \cdot \tau_{a,c})$$

ve

$$\tau_{ab,c} = (I_a \cdot \tau_{b,c}) \circ (\tau_{a,c} \cdot I_b)$$

dir.

Garzon ve Miranda [23] bu tanımlamayı yaptıktan sonra braided kategoriksel grupların homotopi yapılarını incelemiş ve bazı 3-tip cebirsel modellerin indirgenmiş hallerine denk olduklarını göstermişlerdir.

Ulualan [37] da braided kategoriksel gruplar ile braided çaprazlanmış modüllerin ve Moore kompleksinin boyutu  $\leq 2$  olan indirgenmiş simplisel gruplarını aralarındaki ilişkileri incelemiştir.

### 3.1. 2-Çaprazlanmış Modüller

2-çaprazlanmış modüller D.Conduché [18] tarafından homotopi tipi 3-tip olan basit bağlantılı topolojik uzayları (noktalanmış) cebirsel olarak modellemek amacıyla tanımlanmıştır.

$P$ -grupların

$$L \xrightarrow{\partial_2} M \xrightarrow{\partial_1} P$$

şeklindeki bir kompleksini göz önüne alalım. Burada  $\partial_1 \partial_2 = 1$  dir. Burada  $P$  kendisine eşlenik olma etkisi ile etki etsin. Böylece bu etkiye göre

$$L \xrightarrow{\partial_2} M$$

bir çaprazlanmış modül olup burada  $M, L$  üzerine  $P$  vasıtasıyla etki eder. Burada her  $l \in L$ ,  $m \in M$  ve  $p \in P$  için

$$(l^m)^p = (l^p)^{m^p}$$

şeklinde dir. Ayrıca

$$w: M \times M \rightarrow L$$

Peiffer lifting dönüşümü olarak adlandırılan bir dönüşüm vardır ve aşağıdaki özellikler her  $p \in P, m_0, m_1, m_2 \in M$  ve  $l \in L$  için sağlanır.

$$P1: \partial_2 w(m_0, m_1) = m_0^{-1} m_1^{-1} m_0 m_1^{\partial_1 m_0}$$

$$P2: w(\partial_2 l, m) = l^{-1} l^m$$

$$P3: w(m_0, m_1 m_2) = w(m_0, m_2) w(m_0, m_1)^{m_2^{\partial_1 m_0}}$$

$$P4: w(m_0 m_1, m_2) = w(m_0, m_2)^{m_1} w(m_1, m_2^{\partial_1 m_0})$$

$$P5: w(m_0, m_1)^p = w(m_0^p, m_1^p)$$

Bu  $w$ , Peiffer lifting dönüşümü ile birlikte

$$L \xrightarrow{\partial_2} M \xrightarrow{\partial_1} P$$

kompleksine 2 – çaprazlanmış modül adı verilir. Burada ayrıca

$$\partial_1: M \rightarrow P$$

bir pre-çaprazlanmış modüldür. Eğer  $P = \{1\}$  gibi sadece tek elemanlı yani özdeş elemanlı bir grup ise; bu durumda

$$\partial_2: L \rightarrow M \rightarrow \{1\}$$

yapısı için Peiffer lifting dönüşümü

$$w: M \times M \rightarrow L$$

aşağıdaki özellikleri her  $m_0, m_1 \in M$  ve  $l \in L$  için sağlar.

$$RP1: \partial_2 w(m_0, m_1) = [m_0, m_1] = m_0^{-1} m_1^{-1} m_0 m_1$$

$$RP2: w(\partial_2 l, m) = l^{-1} l^m$$

$$RP3: w(m_0, m_1 m_2) = w(m_0, m_2) w(m_0, m_1)^{m_2}$$

$$RP4: w(m_0 m_1, m_2) = w(m_0, m_2)^{m_1} w(m_1, m_2)$$

Bu özellikler ile birlikte  $(\partial_2: L \rightarrow M, w)$  yapısına indirgenmiş 2 – çaprazlanmış modül adı verilir.

Şimdi 2-çaprazlanmış modüller kategorisini oluşturalım.

$$X = (L \xrightarrow{\partial_2} M \xrightarrow{\partial_1} N, w)$$

ve

$$X' = (L' \xrightarrow{\partial_2'} M' \xrightarrow{\partial_1'} N', w')$$

birer 2-çaprazlanmış modül olsun.  $X$  den  $X'$  ne giden bir 2-çaprazlanmış modül morfizmi

$$\begin{array}{ccccc}
L & \xrightarrow{\partial_2} & M & \xrightarrow{\partial_1} & N \\
\downarrow f_3 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_1 \\
L' & \xrightarrow{\partial_2'} & M' & \xrightarrow{\partial_1'} & N'
\end{array}$$

şeklindeki bir diyagramdan elde edilir ve bu diyagram komütatif olup  $f_1, f_2$  ve  $f_3$ ,  $N$  nin  $M$  ve  $L$  üzerindeki etkisini korurlar. Böylece 2-çaprazlanmış modül kategorisini oluşturabiliriz. Bu kategoriyi  $\mathbf{X}_2\mathbf{Mod}$  ile gösterelim.

Brown ve Gilbert [11] de homotopi tipi 3-tip olan topolojik yapılara karşılık gelen yeni bir cebirsel model tanımlamışlar ve buna braided regüler çaprazlanmış modül adını vermişlerdir. Ayrıca [11] de Moore kompleksinin boyutu  $\leq 2$  olan simlisel gruplar ve 2-çaprazlanmış modüller arasındaki denklığı vermişlerdir. Bu denklığı verdikten sonra homotopi yapılarını incelemişlerdir.

Şimdi [11] den braided regüler çaprazlanmış modül tanımını hatırlayalım. Hatırlayalım ki bir grupoid morfizm kümesi  $C_1$  ve obje kümesi  $C_0$  olan

$$\begin{array}{ccc}
C_1 & \begin{array}{c} \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow{t} \end{array} & C_0 \\
& \xleftarrow{e} & \\
& & e
\end{array}$$

şeklindeki bir her morfizmi bir izomorfizm olan küçük kategoridir. Bu grupoidi kısaca  $(C_1, C_0)$  şeklinde gösterelim.  $p, q \in C_0$  iki obje olmak üzere  $p$  den  $q$  ya giden morfizmlerin kümesini  $C_1(p, q)$  ile gösterelim.  $a \in C_1(p, q)$  olduğunda

$$s(a) = p$$

ve

$$t(a) = q$$

ile tanımlıdırlar. Eğer  $a \in C_1(p, q)$  ve  $b \in C_1(q, r)$  olduğunda  $a$  ve  $b$  nin kompozisyonu  $a \circ b \in C_1(p, r)$  olur. Yani

$$s(a \circ b) = s(a)$$

ve

$$t(a \circ b) = t(b)$$

şeklinde olur.  $C_1(p, p)$  yerine  $C_1(p)$  yazacağız. Herhangi bir  $a \in C_1(p, q)$  morfizmi için

$$a \circ a^{-1} = e_{s(a)}$$

ve

$$a^{-1} \circ a = e_{t(a)}$$

olacak şekilde  $a^{-1} \in C_1(q, p)$  ters morfizmi vardır ve burada  $e: C_0 \rightarrow C_1$  objeler üzerinde birim morfizm verir. Yani  $p \in C_0$  için  $e_p \in C_1(p)$ ,  $p$  den  $p$  ye giden bir birim morfizmdir. Yine  $p \neq q$  olduğunda  $C_1(p, q)$  morfizm kümeleri boş ise  $(C_1, C_0)$  grupoidine total bağlantısız grupoid denildiğini biliyoruz.  $\mathcal{C}$  ve  $\mathcal{D}$  aynı  $C_0$  obje kümesi üzerinde iki grupoid ve  $\mathcal{C}$  total bağlantısız olduğunda  $\mathcal{D}$  grupoidinin  $\mathcal{C}$  üzerine grupoid etkisinin nasıl tanımlandığını daha önce verdik. Şimdi  $U$  bir monoid ve

$$\delta: C_2 \longrightarrow C_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow{t} \end{array} C_0$$

de grupoidler üzerinde bir çaprazlanmış modül olsun. Eğer aşağıdaki özellikleri sağlayacak şekilde  $U \times C_i \rightarrow C_i$  ve  $C_i \times U \rightarrow C_i$  ( $i = 0, 1, 2$ ) şeklinde dönüşümler varsa; (burada  $((u, c) \mapsto u \cdot c)$  ve  $((c, u) \mapsto c \cdot u)$  ile gösterirler)  $U$  ya  $\delta$  çaprazlanmış modülü üzerinde bir biyektisi vardır denir.

**BA1.**  $U \times C_i \rightarrow C_i$  şeklindeki her dönüşüm  $U$  nun  $C_0, C_1$  ve  $C_2$  üzerindeki sol etkisini ve  $C_i \times U \rightarrow C_i$  şeklindeki her dönüşüm de  $U$  nun  $C_0, C_1$  ve  $C_2$  üzerindeki sağ etkisini tanımlar.

BA2.  $U$  nun her etkisi  $C_1$  in  $C_0$  üzerindeki grupoid etkisini korur. Burada  $s$  ve  $t$  dönüşümleri  $U$  – *equivariant* dönüşümlerdir. Yani  $u \in U$  ve  $c \in C_1$  için

$$s(u \cdot c) = u \cdot s(c)$$

ve

$$t(u \cdot c) = u \cdot t(c)$$

dir.

BA3.  $U$  nun her etkisi  $C_2$  nin  $C_0$  üzerindeki total bağlantısız olan grupoid yapısını korur. Eğer  $x \in C_2(p)$  ve  $u \in U$  ise  $u \cdot x \in C_2(u \cdot p)$  ve  $x \cdot u \in C_2(p \cdot u)$  olur.

BA4.  $U$  nun her etkisi  $C_1$  in  $C_2$  üzerindeki çaprazlanmış modül etkisi ile uyumludurlar. Yani  $x \in C_2(p)$ ,  $a \in C_1(p \cdot q)$  ve  $u \in U$  için

$$u \cdot (x^a) = (u \cdot x)^{u \cdot a} \in C_2(u \cdot q)$$

$$(x^a) \cdot u = (x \cdot u)^{a \cdot u} \in C_2(q \cdot u)$$

olur.

BA5.  $\delta: C_2 \rightarrow C_1$  dönüşümü  $U$  nun her etkisini korur. Yani  $x \in C_2(p)$  ve  $u \in U$  için

$$\delta(u \cdot x) = u \cdot \delta(x)$$

ve

$$\delta(x \cdot u) = \delta(x) \cdot u$$

dır.

Şimdi

$$\delta: C_2 \longrightarrow C_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow{t} \\ \xleftarrow{e} \end{array} C_0$$

şeklindeki grupoidler üzerinde çaprazlanmış modülünü göz önüne alalım. Eğer  $C_0$  bir monoid ve  $\delta$  çaprazlanmış modülü üzerindeki yukarıdaki gibi tanımlanan bir biekisi varsa  $\delta$  çaprazlanmış modülüne *yarı – regüler çaprazlanmış modül* denir. Ayrıca  $C_0$  bir grup ise  $\delta$  ya *regüler çaprazlanmış modül* adı verilir.

Şimdi bu  $\delta$  regüler çaprazlanmış modülü üzerindeki tanımlı olan braiding kavramını [11] den verelim.

**Tanım 3.1.1:**

$$\delta: C_2 \longrightarrow C_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow{t} \end{array} C_0$$

bir regüler çaprazlanmış modül olsun. Bu çaprazlanmış modül üzerindeki braiding dönüşümü

$$\{-, -\}: C_1 \times C_1 \rightarrow C_2$$

aşağıdaki özellikleri sağlayan bir dönüşümdür.

B1.  $\{a, b\} \in C_2(t(a)t(b))$ ,  $\{1_e, b\} = 1_{t(b)}$  ve  $\{a, 1_e\} = 1_{t(a)}$  dir. Burada  $1_e \in C_1(e)$  birim morfizmdir ve  $e \in C_0$  birim elemandır.

$$B2. \quad \{a, b \circ b'\} = \{a, b\}^{t(a) \cdot b'} \circ \{a \circ b'\}$$

$$B3. \quad \{a \circ a', b\} = \{a', b\} \circ \{a, b\}^{a' \cdot t(b)}$$

$$B4. \quad \delta\{a, b\} = (t(a) \cdot b)^{-1} \circ (a^{-1} \cdot s(b)) \circ (s(a) \cdot b) \circ (a \cdot t(b))$$

$$B5. \quad \text{Eğer } y \in C_2(q) \text{ ise } \{a, \delta y\} = (t(a) \cdot y)^{-1} \circ (s(a) \cdot y)^{a \cdot q}$$

$$B6. \quad \text{Eğer } x \in C_2(p) \text{ ise } \{\delta x, b\} = ((x \cdot s(b))^{p \cdot b})^{-1} \circ (x \cdot t(b))$$

B7.  $p \cdot \{a, b\} = \{p \cdot a, b\}$ ,  $\{a, b\} \cdot p = \{a, b \cdot p\}$  ve  $\{a \cdot p, b\} = \{a, p \cdot b\}$  özellikleri  $p \in C_0$ ,  $a, b \in C_1$  ve  $x, y \in C_2$  için sağlanır. Bu durumda

$$\{-, -\}: C_1 \times C_1 \rightarrow C_2$$

braiding dönüşümü ile birlikte

$$\delta: C_2 \longrightarrow C_1 \underset{t}{\overset{s}{\rightrightarrows}} C_0$$

regüler çaprazlanmış modülüne *braided regüler çaprazlanmış modül* adı verilir. Braided regüler çaprazlanmış modüller kategorisini **BRCM** ile gösterelim. Bu kategorinin morfizmleri 2-çaprazlanmış modüllerin morfizmine benzer olarak tanımlanır.

### 3.2. Braided Regüler Çaprazlanmış Modüller ve 2-Çaprazlanmış Modüller

Brown ve Gilbert [11] de braided regüler çaprazlanmış modülleri tanımladıktan sonra bu kategorinin Conduché nin tanımladığı 2-çaprazlanmış modüller kategorisi olan  **$X_2\text{Mod}$**  ile denk olduklarını göstermişlerdir. İleriki bölümlerde bu denkliği kullanacağımız için burada kısa bir ispatını vereceğiz.

**Teorem 3.2.1 [11]:** Braided regüler çaprazlanmış modüller kategorisi **BRCM** ile 2-çaprazlanmış modüller kategorisi  **$X_2\text{Mod}$**  denktir.

**İspat:**

$$\delta: C_2 \longrightarrow C_1 \underset{t}{\overset{s}{\rightrightarrows}} C_0,$$

$$\{-, -\}: C_1 \times C_1 \rightarrow C_2$$

braiding dönüşümü ile birlikte bir braided regüler çaprazlanmış modül olsun.

$$K = \{a \in C_1: t(a) = e\} \subset C_1$$

alt kümesini göz önüne alalım.  $K$  kümesi  $a, b \in K$  için

$$ab = b \circ (a \cdot s(b))$$

işlemi altında bir grup yapısı oluşturur.  $s: K \rightarrow C_0$  kaynak dönüşümü bir grup homomorfizmi olur. Gerçektende

$$\begin{aligned} s(ab) &= s(b \circ (a \cdot s(b))) \\ &= s(a)s(b) \end{aligned}$$

olur. Ayrıca  $C_0$  in  $K$  üzerine bir etkisi vardır. Bu etki  $a \in K$  ve  $p \in C_0$  için

$$a^p = p^{-1} \cdot a \cdot p$$

şeklinde  $C_0$  in  $C_1$  üzerindeki etkisi kullanılarak tanımlanabilir. Bu etki bir grup etkisi olur. Bu durumda  $s: K \rightarrow C_0$  homomorfizmi  $C_0$  – *equivariant* olur. Yani

$$s(a^p) = p^{-1} \cdot s(a) \cdot p$$

şeklinde olur ki  $s: K \rightarrow C_0$  bir ön çaprazlanmış modül olur.

$C_2(e) = \{x \in C_2: s(x) = t(x) = e\}$  olsun. Burada  $e \in C_0$ ,  $C_0$  grubunun birim elemanı olsun. Bu durumda  $C_2(e)$  bir grup olur.  $c \in C_2(e)$  ve  $a \in K$  olmak üzere  $a$  nın  $c$  üzerindeki etkisini

$$c^a = (c \cdot s(a))^a$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda  $\delta: C_2 \rightarrow K$  bir çaprazlanmış modül olur. Dolayısıyla

$$\delta: C_2(e) \rightarrow C_2(e)$$

bir çaprazlanmış modül olur ve her  $c, c' \in C_2(e)$  için

$$(c)^{\delta c'} = (c \cdot s(\delta c'))^{\delta c'} = (c \cdot e)^{\delta c'} = (c')^{-1} \circ c \circ c'$$

bulunur. Böylece

$$\delta: C_2(e) \rightarrow K$$

bir çaprazlanmış modül olur. Böylece

$$C_2(e) \xrightarrow{\delta} K \xrightarrow{s} C_0$$

şeklinde grupların bir kompleksini elde ederiz. O halde geriye kalan  $K \times K$  dan  $C_2(e)$  ye tanımlı  $w$  Peiffer lifting dönüşümünü tanımlamak kalır. Bu  $w$  dönüşümünü

$$\{-, -\}: C_1 \times C_1 \rightarrow C_2$$

şeklinde braiding dönüşümünden yararlanarak

$$w(a, b) = \{a^{-1}, b\}^a$$

( $a, b \in K$  için) şeklinde tanımlayabiliriz. Burada

$$\{a^{-1}, b\}^a = (\{a^{-1}, b\} \cdot s(a))^a$$

şeklindedir. Böylece

$$(C_2(e) \xrightarrow{\delta} K \xrightarrow{s} C_0, w)$$

şeklinde bir 2-çaprazlanmış modül elde etmiş oluruz.

Şimdi tersine

$$(L \xrightarrow{\partial_2} G \xrightarrow{\partial_1} P, w)$$

bir 2-çaprazlanmış modül iken bu yapıdan bir braided regüler çaprazlanmış modül elde edelim.

Elde edeceğimiz braided regüler çaprazlanmış modülü

$$\delta: C_2 \longrightarrow C_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow{t} \\ \xleftarrow{e} \end{array} C_0$$

şeklinde gösterirsek  $C_0 = P$  olarak alabiliriz.  $C_1$  grupoidini  $G \times P$  ile gösterelim ve  $(g, p) \in G \times P$  için

$$s(g, p) = \partial_1(g)p \text{ ve } t(g, p) = p$$

olsun.  $C_1$  üzerindeki grupoid kompozisyonu eğer  $p_1 = (\partial_1 g_2)p_2$  ise

$$(g_1, p_1) \circ (g_2, p_2) = (g_1 g_2, p_2)$$

şeklinde tanımlanır. Burumda

$$\begin{aligned}
s((g_1, p_1) \circ (g_2, p_2)) &= s(g_1 g_2, p_2) \\
&= \partial_1(g_1) \partial_1(g_2) p_2 \\
&= \partial_1(g_1) p_1 \\
&= s(g_1, p_1)
\end{aligned}$$

ve

$$t(g_1 g_2, p_2) = p_2 = t(g_1, p_2)$$

olur.

$e: P \rightarrow G \times P$  dönüşümünü  $e(p) = (1, p)$  olarak tanımlarsak

$$s(e)(p) = p = t(e(p))$$

olur. Böylece

$$\begin{array}{ccc}
G \times P & \begin{array}{c} \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow{e} \end{array} & P \\
& \begin{array}{c} \xleftarrow{t} \\ \xleftarrow{e} \end{array} & 
\end{array}$$

şeklinde bir grupoid elde etmiş oluruz.

$C_2$  grupoidini ise  $L \times P$  ile tanımlayalım.  $L \times P$  üzerindeki grupoid kompozisyonu ise

$$(l_1, p) \circ (l_2, p) = (l_1 l_2, p)$$

şeklinde tanımlıdır.

$$\delta: L \times P \rightarrow G \times P, \delta(l, p) = (\partial_2 l, p)$$

şeklinde tanımlayalım. Bir  $(g, q) \in C_1 = G \times P$  nin;  $(l, p) \in C_2 = L \times P$  üzerindeki etkisini eğer  $p = (\partial_1 g)q$  ise

$$(l, p)^{(g, q)} = (l^g, q)$$

şeklinde tanımlarsak bu etki  $C_1$  grupoidinin  $C_2$  total bağlantısız grupoidi üzerindeki bir etkisini tanımlar. Böylece  $\delta: C_2 \rightarrow C_1$  bir grupoidler için çaprazlanmış modül olur.  $C_0 = P$  nin  $C_1$  ve  $C_2$  grupoidleri üzerindeki etkisi  $p \in P$  ve  $(g, q) \in C_1$  ve  $(l, q) \in C_2$  için

$$p \cdot (g, q) = (g^{p^{-1}}, pq),$$

$$(g, q) \cdot p = (g, qp)$$

ve

$$p \cdot (l, q) = (l^{p^{-1}}, pq),$$

$$(l, q) \cdot p = (l, qp)$$

şeklinde tanımlıdır. Dolayısıyla

$$\delta: L \times P \longrightarrow G \times P \begin{array}{c} \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow{t} \\ \xleftarrow{e} \end{array} P$$

şeklinde bir regüler çaprazlanmış modülünü elde ederiz. O halde geriye

$$\{-, -\}: C_1 \times C_1 \rightarrow C_2$$

şeklindeki braiding dönüşümünü tanımlamak kalır. Bu braiding dönüşümünü  $w: G \times G \rightarrow L$  şeklindeki Peiffer lifting dönüşümünü kullanarak

$$\{(g_1, p_1), (g_2, p_2)\} = (w(g_1^{-1}, g_2^{p_1})^{g_1}, p_1 p_2)$$

şeklinde tanımlarız. Burada  $g_1, g_2 \in G$  ve  $p_1, p_2 \in P$  dir. Böylece denklik gösterilmiş olur.

Bu denkliği 5. Bölümde Ulualan [36] tarafından tanımlanan Braided regüler 2- grupoidler yapısı ile 2- çaprazlanmış modüller arasındaki denkliği kurarken kullanacağız. Bunun için ilk önce Ulualan [36] tarafından tanımlanan Braided Regüler 2- grupoidler yapısını bir sonraki bölümde verelim.

#### 4. BRAİDED REGÜLER 2-GRUPOİDLER

Braided regüler 2-grupoidler Ulualan [36] tarafından tanımlanmış olup, Ulualan braided regüler çaprazlanmış modüller ile braided regüler 2-grupoidlerin denkleğini göstermiştir. 5. Bölümde bu denkleği kullanacağımız için bu bölümde kısaca bu sonucun ispatı verilecektir.

$$\begin{array}{ccc}
 & s & \\
 C_2 & \xrightarrow{\quad} & C_0 \\
 & \xleftarrow{t} & \\
 & e & 
 \end{array}$$

ve

$$\begin{array}{ccc}
 & s' & \\
 C_1 & \xrightarrow{\quad} & C_0 \\
 & \xleftarrow{t'} & \\
 & e' & 
 \end{array}$$

aynı obje kümesi  $C_0$  üzerinde iki grupoid olsun. Aşağıdaki diyagramı göz önüne alalım.

$$\begin{array}{ccc}
 & d_0 & \\
 C_2 & \xrightarrow{\quad} & C_1 \\
 & \xleftarrow{d_1} & \\
 & I & \\
 e & \begin{array}{c} \uparrow s \\ \downarrow t \end{array} & \begin{array}{c} \downarrow s' \\ \uparrow t' \end{array} & e' \\
 C_0 & \xrightarrow{\quad} & C_0
 \end{array}$$

Bu diyagramda

1.

$$\begin{array}{ccc}
 & d_0 & \\
 (C_2 & \xrightarrow{\quad} & C_1, *) \\
 & \xleftarrow{d_1} & \\
 & I & 
 \end{array}$$

bir grupoid yapısıdır ve  $d_0, d_1$  ve  $C_0$  in üzerinde birim dönüşümlerdir.

2.

$$\begin{array}{ccc}
 C_2 & \begin{array}{c} \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow{t} \\ \xleftarrow{e} \end{array} & C_0
 \end{array}$$

ve

$$\begin{array}{ccc}
 C_1 & \begin{array}{c} \xrightarrow{s'} \\ \xrightarrow{t'} \\ \xleftarrow{e'} \end{array} & C_0
 \end{array}$$

birer grupoid yapısıdır.

3.  $d_0$  ve  $d_1$  morfizmleri  $C_2$  nin  $C_1$  ve  $C_0$  obje kümeleri üzerindeki grupoid yapısını korurlar.

4.  $*$  ve  $\circ$  işlemleri için interchange kuralı sağlanır. Yani

$$(a * b) \circ (c * d) = (a \circ c) * (b \circ d)$$

olur.

Böyle bir 2-grupoidi  $X = (C_2, C_1, C_0, d_0, d_1, I, \circ, *)$  ile gösterelim.

$U$  bir monoid olsun.  $U$  nun  $X$  2-grupoidi üzerindeki bietikisini tanımlayalım.  $i = 0, 1, 2$  için

$$\begin{array}{l}
 U \times C_i \rightarrow C_i \\
 (u, c) \mapsto u \cdot c
 \end{array}$$

ve

$$\begin{array}{l}
 C_i \times U \rightarrow C_i \\
 (u, c) \mapsto c \cdot u
 \end{array}$$

ile gösterilen dönüşümler vardır ve aşağıdaki özellikler sağlanır.

1.  $U \times C_i \rightarrow C_i$  şeklindeki her dönüşüm  $U$  nun  $C_i$  grupoidleri üzerindeki sol etkilerini ve  $C_i \times U \rightarrow C_i$  lerde  $U$  nun sağ etkilerini belirler.

2.  $U$  nun her etkisi  $C_1$  in  $C_0$  üzerindeki grupoid yapısını korur ve

$$s(u \cdot c) = u \cdot s(c)$$

ve

$$t(u \cdot c) = u \cdot t(c)$$

olur

3.  $U$  nun her etkisi  $C_2$  nin de  $C_0$  üzerindeki grupoid yapısını korurlar.

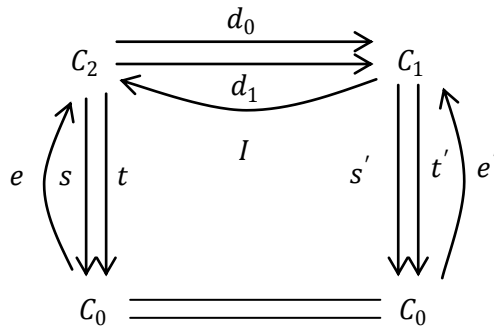
4.  $d_0$  ve  $d_1$  dönüşümleri  $U$  nun  $C_2$  üzerindeki etkisini korur. Yani  $u \in U$  ve  $x \in C_2$  için

$$d_0(x \cdot u) = d_0(x) \cdot u$$

ve

$$d_1(x \cdot u) = u \cdot d_1(x)$$

olur.



bir 2-grupoid olsun. Eğer  $C_0$  obje kümesi bir monoid ve bu 2-grupoid üzerine bir etkisi varsa bu 2-grupoide *yarı – regüler 2 – grupoid* denir. Ayrıca  $C_0$  bir grup ise bu yarı-regüler 2-grupoide *regüler 2 – grupoid* denir.

**Tanım 4.1 [36]:**  $(C_2, C_1, d_0, d_1, I, \circ, *)$  yukarıdaki gibi tanımlı bir regüler 2-grupoid olsun. Bu regüler 2-grupoid üzerindeki braiding dönüşümü

$$\begin{aligned} \tau_{a,b}: C_1 \times C_1 &\rightarrow C_2 \\ (a, b) &\mapsto \tau_{a,b} \end{aligned}$$

şeklinde olup aşağıdaki özellikleri sağlar.

1.  $a \in C_1(p, q), b \in C_1(l, m)$  için

$$d_0 \tau_{a,b} = b \cdot s(a) \circ t(b) \cdot a$$

dir.

2.  $a \in C_1(p, q), b \in C_1(l, m)$  için

$$d_1 \tau_{a,b} = s(b) \cdot a \circ b \cdot t(a)$$

dir. Yani

$$\tau_{a,b}: b \cdot s(a) \circ b \cdot t(a) \rightarrow s(b) \cdot a \circ b \cdot t(a) \in C_2$$

dir.

3.  $x, y \in C_2, d_0 x = a, d_1 x = a'$  ve  $d_0 y = b, d_1 y = b'$  olmak üzere aşağıdaki diyagram değişmelidir.

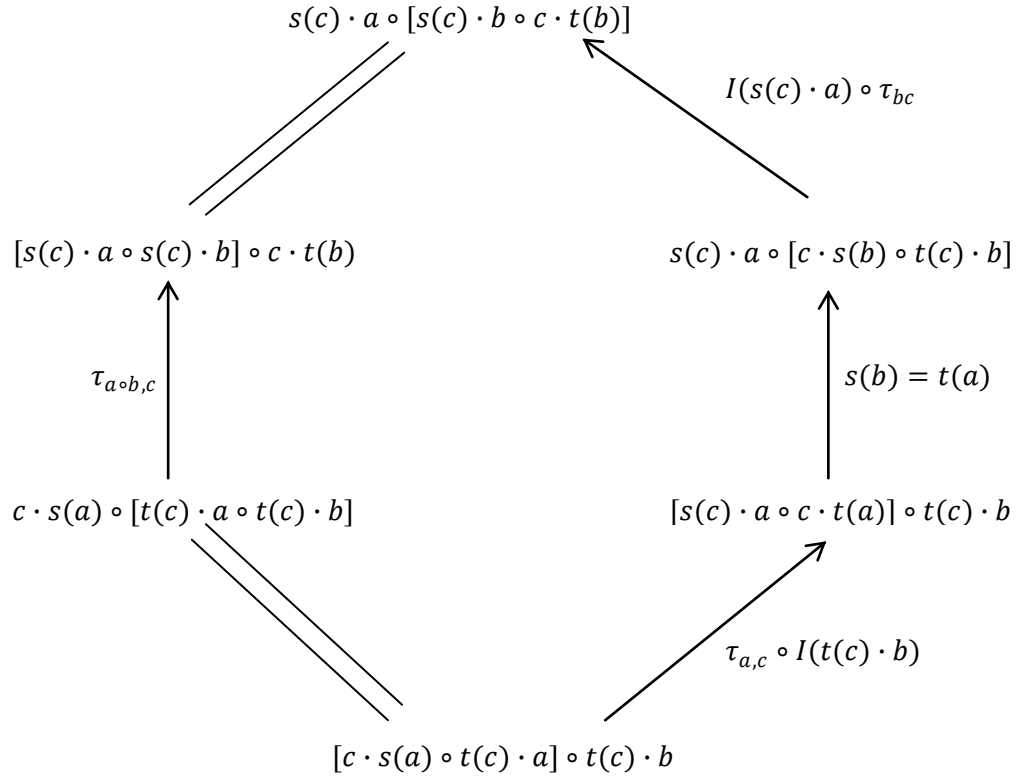
$$\begin{array}{ccc} & y \cdot s(a) \circ t(b) \cdot x & \\ & \xrightarrow{\hspace{10em}} & \\ b \cdot s(a) \circ t(b) \cdot a & & b' \cdot s(a') \circ t(b') \cdot a' \\ \downarrow \tau_{a,b} & & \downarrow \tau_{a',b'} \\ s(b) \cdot a \circ b \cdot t(a) & \xrightarrow{s(b) \cdot x \circ y \cdot t(a)} & s(b') \cdot a' \circ b' \cdot t(a') \end{array}$$

denk olarak

$$(y \cdot s(a)) \circ (t(b) \cdot x) * \tau_{a',b'} = \tau_{a,b} * (s(b) \cdot x \circ y \cdot t(a))$$

dir.

4.  $a \in C_1(d, f)$ ,  $b \in C_1(f, g)$  ve  $c \in C_1(h, j)$  için aşağıdaki diyagram değişmelidir.



veya denk olarak

$$\tau_{a \circ b, c} = (\tau_{a, c} \circ I(t(c) \cdot b)) * (I(s(c) \cdot a) \circ \tau_{b, c})$$

dir.

5.  $a \in C_1(k, l)$ ,  $b \in C_1(m, n)$  ve  $c \in C_1(n, p)$  için aşağıdaki diyagram değişmelidir.

$$\begin{array}{ccc}
& [s(b) \cdot a \circ b \cdot t(a)] \circ c \cdot t(a) & \\
& \swarrow \quad \searrow & \\
s(b) \cdot a \circ [b \cdot t(a) \circ c \cdot t(a)] & & [b \cdot s(a) \circ t(b) \cdot a] \circ c \cdot t(a) \\
\uparrow \tau_{a,b \circ c} & & \parallel t(b) = s(c) \\
[b \cdot s(a) \circ c \cdot s(a)] \circ t(c) \cdot a & & b \cdot s(a) \circ [s(c) \cdot a \circ c \cdot t(a)] \\
\swarrow \quad \searrow & & \nearrow I(b \cdot s(a)) \circ \tau_{a,c} \\
& b \cdot s(a) \circ [c \cdot s(a) \circ t(c) \cdot a] &
\end{array}$$

veya denk olarak

$$\tau_{a,b \circ c} = [I(b \cdot s(a)) \circ \tau_{a,c}] * [\tau_{a,b} \circ I(c \cdot t(a))]$$

dır.

6.  $a \in \mathcal{C}_1(x, y)$  ve  $o_e \in \mathcal{C}_1(e)$  için

$$\tau_{a, o_e} = I(a) = \tau_{o_e, a}$$

dır.

#### 4.1. Braided Regüler 2-Grupoidler ve Braided Regüler Çaprazlanmış Modüller

Ulualan [36] da grupoid etkisini ve yarı-direkt çarpım grupoidi kavramlarını kullanarak braided regüler 2-grupoidler ile braided regüler çaprazlanmış modüllerin denk olduklarını göstermiştir. Kısaca bu denkliği aşağıda verelim.

**Teorem 4.1.1 [36]:** Braided regüler 2-grupoidler ile braided regüler çaprazlanmış modüller denktir.

**İspat:**

$$A \xrightarrow{\delta} C \begin{array}{c} \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow{t} \end{array} O$$

bir braided regüler çaprazlanmış modül olsun.  $C$  nin  $A$  grupoidi üzerinde ve  $O$  nun da  $C$  ve  $A$  üzerindeki bietikisinin var olduğunu biliyoruz. Böylece;

$$C \tilde{\times} A(x, y) = C(x, y) \times A(y)$$

şeklinde

$$(c, a) \circ (c', a') = (c \circ c', a^{c'} \circ a')$$

kompozisyonu ile yarı-direkt çarpım grupoidi elde ederiz.

Şimdi

$$C \tilde{\times} A \begin{array}{c} \xrightarrow{d_0} \\ \xrightarrow{d_1} \\ \xleftarrow{I} \end{array} C$$

şeklindeki diyagramda  $d_0(c, a) = c$ ,  $d_1(c, a) = c \circ \delta(a)$  ve  $I(c) = (c, e_y)$ ,  $c \in C(x, y)$  ve  $a \in A(y)$  için tanımlayalım.

$$(c, a) * (c \circ \delta a, a') = (c, a \circ a')$$

tanımlaması ile grupoidler içinde bir internal grupoid elde ederiz.  $(c, a)$  nın  $*$  işlemine göre tersi  $(c \circ \delta a, a^{-1})$  olup burada  $a^{-1}, a \in A(y)$  nin " $\circ$ " işlemine göre tersidir.

Şimdi interchange kuralının sağlandığını gösterelim.

$(c, a) \in C \tilde{\times} A(x, y)$  olsun. Bu durumda  $(c \circ \delta a)$  da  $x$  den  $y$  ye bir morfizm olur. Çünkü  $\delta$ , objeler üzerinde birim dönüşümdür.

$$(c, a), (c \circ \delta a, a') : x \rightarrow y \in C \tilde{\times} A$$

ve

$$(d, b), (d \circ \delta b, b') : y \rightarrow z \in C \tilde{\times} A$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} [(c, a) \circ (d, b)] * [(c \circ \delta a, a') \circ (d \circ \delta b, b')] &= \\ &= (c \circ d, a^d \circ b) * (c \circ \delta a \circ d \circ \delta b, (a')^{d \circ \delta b} \circ b') \\ &= (c \circ d, a^d \circ b \circ (a')^{d \circ \delta b} \circ b') \\ &= [(c, a) * (c \circ \delta a, a')] \circ [(d, b) * (d \circ \delta b, b')] \end{aligned}$$

bulunur. Üstelik

$$d_0((c, a) * (d, b)) = d_0(c, a)$$

ve

$$d_1((c, a) \circ (d, b)) = d_1(d, b)$$

oldukları gösterilebilir. Böylece

$$\begin{array}{ccc} C \tilde{\times} A & \xrightleftharpoons[d_1]{d_0} & A \\ \begin{array}{c} \uparrow e \\ \downarrow e \end{array} \begin{array}{c} s \\ t \end{array} & \begin{array}{c} \longleftarrow I \\ \longrightarrow I \end{array} & \begin{array}{c} \downarrow s \\ \uparrow t \end{array} \\ O & \xlongequal{\quad} & O \end{array}$$

şeklinde bir 2-grupoid elde ederiz. Şimdi  $O$  obje kümesinin  $A$  ve  $C \tilde{\times} A$  üzerindeki etkilerini tanımlayalım.

$O$  nun  $C$  ve  $A$  grupoidleri üzerindeki etkisinin var olduğunu

$$\delta: C \longrightarrow A \begin{array}{c} \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow{t} \end{array} O$$

bir regüler çaprazlanmış modül olduğundan biliyoruz. Bu etkileri kullanarak  $O$  nun  $C \tilde{\times} A$  ve  $A$  üzerindeki bir etkilerini

$$p \cdot (c, a) = (p \cdot c, a)$$

$$(c, a) \cdot p = (c \cdot p, I(e_{p-1}) \circ a \circ I(e_p))$$

şeklinde tanımlayabiliriz. Böylece;

$$(C \tilde{\times} A, A, d_0, d_1, I, \circ, *)$$

şeklinde bir regüler 2-grupoid yapısı elde ederiz. Bu yapı üzerindeki braiding dönüşümü

$$\tau : C \times C \rightarrow C \tilde{\times} A$$

$$(a, b) \mapsto \tau_{a,b} = (b \cdot s(a) \circ t(b) \cdot a, \{b, a\})$$

şeklinde tanımlanır. Burada  $\{a, b\}: A \times A \rightarrow C$  şeklindeki braiding dönüşümdür. Böylece

$$\delta: C \longrightarrow A \begin{array}{c} \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow{t} \end{array} O$$

braided regüler çaprazlanmış modülünden bir braided regüler 2-grupoid yapısı elde edilir.  $\tau$  nun sağladığı aksiyomlar için [36] ya bakınız.

Tersine;

$$(D, C, O, d_0, d_1, I, \circ, *)$$

bir braided regüler 2-grupoid olsun. Her  $x \in O$  için

$$K(x) = \{d \in D: d_0(d) = e(x)\}$$

kümesini oluşturalım.  $K(x)$  kümesini  $\circ$  ve  $*$  kompozisyon işlemleri yardımıyla bir grup yapısı olur. Ayrıca  $k \in K(x)$  için  $\circ$  ve  $*$  işlemleri yardımıyla tersi

$$k_*^{-1} = I(d_1 k) \circ k_\circ^{-1}$$

şeklinde verilir.  $c \in C$  nin  $k \in K$  üzerindeki etkisini

$$k^c = I(c)^{-1} \circ k \circ I(c)$$

şeklinde verebiliriz. Böylece;

$$K \longrightarrow D \xrightarrow{d_0} C$$

şeklinde bir kompleks elde ederiz ve  $\partial: K \rightarrow C$   $d_1|_K$  kısıtlaması ile verilir. Burada  $\partial$  bir çaprazlanmış modül olur. Bunu interchange kuralının sağlandığını bildiğimiz için gösterebiliriz.

Böylece

$$\delta: K \longrightarrow C \begin{array}{c} \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow{t} \end{array} O$$

şeklinde bir regüler çaprazlanmış modül elde ederiz. O halde geriye  $\tau$  braiding dönüşümünü kullanarak bu regüler çaprazlanmış modül üzerindeki  $\{-, -\}: C \times C \rightarrow K$  braiding dönüşümünü tanımlamak kalır.  $a, b \in C$  için

$$\{-, -\}: C \times C \rightarrow K$$

$$\{a, b\} = I(t(b) \cdot a)^{-1} \circ I(b \cdot s(a))^{-1} \circ \tau_{a,b}$$

şeklinde tanımlanırsa  $\{-, -\}$  dönüşümü braiding aksiyomunu sağlar. Bunun için [36] ya bakınız.

Dolayısıyla verilen bir braided regüler 2- grupoid yapısından

$$(\delta: K \longrightarrow C \begin{array}{c} \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow{t} \end{array} O, \{-, -\})$$

şeklinde braided regüler çaprazlanmış modül yapısı elde edilmiş olur.

## 5. BRAİDED REGÜLER 2-GRUPOİDLER VE 2- ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLER

Bu bölümde 3. ve 4. bölümlerden yararlanarak 2-çaprazlanmış modüller kategorisi ile braided regüler 2-grupoidler kategorisinin denk olduklarını göstereceğiz.

2-grupoidler üzerinde regülerlik yapısı ve braiding dönüşümü 2006 yılında Ulualan [36] da tanımlanmıştır. Ulualan [36] çalışmasında bu yapının Brown ve Gilbert [11] tarafından tanımlana braided regüler çaprazlanmış modüller ile olan ilişkisini incelemiştir. Bunu 4. bölümde verdik bu yakın ilişkiyi kullanarak bu bölümde tanımlanan bu yapı ile 2-çaprazlanmış modüller arasındaki ilişkiyi kuracağız. Bunu yapmak için braided regüler 2-grupoidlerden 2-çaprazlanmış modüller kategorisine ve daha sonra 2-çaprazlanmış modüller kategorisinden braided regüler 2-grupoidler kategorisine fonktörler tanımlayıp bu fonktörler arasında doğal transformasyon elde edeceğiz.

### 5.1. 2-Çaprazlanmış Modüllerden Braided Regüler 2- Grupoidlere

Bu bölümde herhangi bir 2-çaprazlanmış modül verildiğinde bu yapıdan nasıl bir braided regüler 2-grupoid elde edileceğini göstereceğiz. Böylece 2-çaprazlanmış modüller kategorisinden yeni tanımlanmış olduğumuz braided regüler 2-grupoidler [36] kategorisine bir fonktör oluşturmuş olacağız.

$$L \xrightarrow{\partial_2} M \xrightarrow{\partial_1} P$$

$\{-, -\}: M \times M \rightarrow L$  şeklindeki Peiffer lifthing dönüşümü ile birlikte bir 2-çaprazlanmış modül olsun.  $\partial_1: M \rightarrow P$  nin bir ön çaprazlanmış modül olduğunu biliyoruz. Buna göre  $M$  bir  $P$  – grup tur. Yani  $P$  nin  $M$  üzerindeki sağdan bir etkisi vardır. Bu etkiye  $M \rtimes P$  kümesi

$$(m, p)(m', p') = (mm', pp')$$

işlemine göre bir gruptur. Bu grup yarı-direkt çarpım grubu olup  $M \times P$  ile gösterelim

$$s: M \rtimes P \rightarrow P ,$$

$$s(m, p) = \partial_1(m)p$$

ve

$$t: M \rtimes P \rightarrow P ,$$

$$t(m, p) = p$$

şeklinde ve

$$e: P \rightarrow M \times P,$$

$$e(p) = (1, p)$$

şeklinde tanımlayalım.

$$p_1 = \partial_1(m_2)p_2$$

olmak üzere  $(m_1, p_1)$  ve  $(m_2, p_2)$  nin kompozisyonu

$$(m_1, p_1) \circ (m_2, p_2) = (m_1 m_2, p_2)$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda

$$\begin{aligned} s((m_1, p_1) \circ (m_2, p_2)) &= s(m_1 m_2, p_2) \\ &= \partial_1(m_1) \partial_1(m_2) p_2 \\ &= \partial_1(m_1) p_1 \\ &= s(m_1, p_1) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} t((m_1, p_1) \circ (m_2, p_2)) &= t(m_1 m_2, p_2) \\ &= p_2 \\ &= t(m_2, p_2) \end{aligned}$$

özellikleri sağlanır. Ayrıca

$$se(p) = s(1, p) = p$$

ve

$$te(p) = t(1, p) = p$$

olup

$$se = te = id: P \rightarrow P$$

bulunur.  $(m, p) \in M \times P$  nin " $\circ$ " işlemine göre tersi  $(m^{-1}p^{-1}, p^{-1})$  şeklindedir.

Sonuç olarak  $C_0 = P$  ve  $C_1 = M \rtimes P$  olmak üzere

$$(C_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow{t} \\ \xleftarrow{e} \end{array} C_0, \circ)$$

şeklinde bir grupoid elde ederiz. Burada  $C_0 = P$  nin  $(C_1, C_0)$  grupoidi üzerindeki sağdan ve soldan etkilerini  $p \in P$  ve  $(m, q) \in C_1$  olmak üzere  $\partial_1: M \rightarrow P$  ön çaprazlanmış modülünden

$$p \cdot (m, q) = (m^{p^{-1}}, pq)$$

ve

$$(m, q) \cdot p = (m, qp)$$

şeklinde tanımlayalım. Şimdi yukarıda tanımladığımız  $s$  ve  $t$  fonksiyonlarının bu etkileri koruduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} s(p \cdot (m, q)) &= s(m^{p^{-1}}, pq) \\ &= \partial_1(m^{p^{-1}})pq \\ &= p\partial_1(m)p^{-1}pq \\ &= p(\partial_1 m)q \\ &= p \cdot s(m, q) \end{aligned}$$

ve yine

$$\begin{aligned} s((m, q) \cdot p) &= s(m, qp) \\ &= (\partial_1(m)q)p \\ &= s(m, q) \cdot p \end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde  $t$  nin de koruduğu gösterilebilir.

$L$  grubunun bir  $P$  – grup olduğunu 2-çaprazlanmış modül tanımından biliyoruz. Böylece benzer olarak  $L \rtimes P$  şeklinde yarı-direkt çarpım grubu tanımlayabiliriz.  $(l, p), (l', p) \in L \rtimes P$  olmak üzere

$$(l, p) \circ (l', p) = (ll', p)$$

işlemine göre  $L \times P$ ,  $P$  üzerinde bir grupoid olur.

$$s(l, p) = p = t(l, p)$$

şeklinde tanımlanırsa bu grupoid total bağlantısız bir grupoid olacaktır.

$$(L \times P \begin{array}{c} \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow{t} \\ \xleftarrow{e} \end{array} P)$$

total bağlantısız ve

$$(M \times P \begin{array}{c} \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow{t} \\ \xleftarrow{e} \end{array} P)$$

de bir grupoid olmak üzere  $M \times P$  nin  $L \times P$  üzerinde bir grupoid etkisi vardır. Bu etki;

$$p = \partial_1(m)q$$

olmak üzere

$$(l, p)^{(m, q)} = (l^m, q)$$

şeklinde verilebilir.

Şimdi bu etkinin bir grupoid etkisi olduğunu gösterelim.  $\partial_1(m')q' = q$  ve  $p = q$  olmak üzere

$$\begin{aligned} (l, p)^{(m, q) \circ (m', q')} &= (l, p)^{(mm', q')} \\ &= (l^{mm'}, q') \\ &= (l^m, q)^{(m', q')} \\ &= [(l, p)^{(m, q)}]^{(m', q')} \end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde  $p = \partial_1(m)q$  olmak üzere

$$\begin{aligned}
((l, p) \circ (l', p))^{(m, q)} &= (ll', p)^{(m, q)} \\
&= ((ll')^m, q) \\
&= (l^m l'^m, q) \\
&= (l^m, q) \circ (l'^m, q) \\
&= (l, p)^{(m, q)} \circ (l', p)^{(m, q)}
\end{aligned}$$

bulunur. Yani yukarıdaki gibi tanımlanan  $p = \partial_1(m)q$  olduğunda

$$(l, p)^{(m, q)} = (l^m, q)$$

etkisi bir grupoid etkisi olur.

O halde  $(M \times P) \times (L \times P)$  şeklinde bir yarı-direct çarpım grupoidi tanımlayabiliriz.

Bu küme;

$$((m, p), (e, p)) * ((m', p'), (e', p'))$$

işlemine göre  $(M \times P)$  üzerinde bir grupoid ve

$$\begin{aligned}
((m, p), (l, p)) \circ ((m', p'), (l', p')) &= ((mm', p'), ((l, p)^{(m', p')} \circ (l', p')) \\
&= ((mm', p'), (l, l', p'))
\end{aligned}$$

işlemine göre de  $C_0 = P$  grubu üzerinde bir grupoid olur.

$$s((m, p), (l, p)) = p = t((m, p), (l, p))$$

işlemine göre;

$$(M \times P) \times (L \times P) \begin{array}{c} \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow{t} \\ \xleftarrow{e} \end{array} P$$

grupoidini ve

$$d_0((m, p), (l, p)) = (m, p)$$

$$d_1((m, p), (l, p)) = (m\partial_2(l), p)$$

dönüşümlerine göre de

$$(M \ltimes P) \times (L \ltimes P) \begin{array}{c} \xrightarrow{d_0} \\ \xleftarrow{d_1} \\ \curvearrowright \\ I \end{array} M \ltimes P$$

grupoidini elde ederiz. Burada  $I(m, p) = ((m, p), (1, p))$  dir. Sonuç olarak

$$\begin{array}{ccc} (M \ltimes P) \times (L \ltimes P) = C_2 & \begin{array}{c} \xrightarrow{d_0} \\ \xleftarrow{d_1} \\ \curvearrowright \\ I \end{array} & M \ltimes P \\ \begin{array}{c} \downarrow s \\ \downarrow t \\ \downarrow e \end{array} & & \begin{array}{c} \downarrow s \\ \downarrow t \\ \downarrow e \end{array} \\ C_0 = p & \xlongequal{\quad} & C_0 = p \end{array}$$

diyagramını oluşturmuş oluruz.

Burada  $P$  nin  $C_2$  üzerindeki sağdan ve soldan etkilerini

$$p \cdot ((m, q), (l, q)) = ((m^{p^{-1}}, pq), (l^{p^{-1}}, pq))$$

ve

$$((m, q), (l, q)) \cdot p = ((m, qp), (l, qp))$$

şeklinde tanımlayabiliriz.

Bu etkiler altında

$$\begin{aligned} d_0(p \cdot ((m, q), (l, q))) &= (m^{p^{-1}}, pq) \\ &= p \cdot (m, q) \\ &= p \cdot d_0((m, q), (l, q)) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} d_0(p \cdot ((m, q), (l, q))) &= (m^{p^{-1}} \partial_2(l^{p^{-1}}), pq) \\ &= ((m \partial_2 l)^{p^{-1}}, pq) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= p \cdot (m\partial_2 l, pq) \\
&= p \cdot d_1((m, q), (l, q))
\end{aligned}$$

bulunur.

Böylece  $P$  nin bu özellikteki etkileri ile birlikte elde ettiğimiz 2-grupoid bir regüler 2-grupoid olur. Şimdi elde ettiğimiz.

$$\begin{array}{ccc}
(M \times P) \times (L \times P) & \xrightarrow{d_0} & M \times P \\
\downarrow s & \xrightarrow{d_1} & \downarrow s \\
P & \xrightarrow{I} & P \\
\uparrow t & & \uparrow t \\
P & & P
\end{array}$$

$e$  (left),  $e$  (right),  $I$  (curved arrow from  $M \times P$  to  $(M \times P) \times (L \times P)$ )

regüler 2-grupoidi üzerinde bir braiding dönüşümü tanımlayalım.

Bu braiding dönüşümünü  $\{-, -\}: M \times M \rightarrow L$  Peiffer lifting dönüşümünü kullanarak aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz:

$$a = (m_1, p_1), b = (m_2, p_2) \in C_1 = M \times P \text{ olmak üzere}$$

$$\begin{aligned}
\tau: C_1 \times C_1 &\rightarrow C_2 \\
(a, b) &\mapsto \tau_{a,b}
\end{aligned}$$

için

$$\tau_{a,b} = (b \cdot s(a) \circ t(b) \cdot a, (\{m_1^{-1}, m_2 p_1\}^{m_1}, p_2 p_1))$$

dir. Burada

$$\begin{aligned}
b \cdot s(a) &= (m_2, p_2) \cdot (\partial_1 m_1) p_1 \\
&= (m_2, p_2 (\partial_1 m_1) p_1)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} t(b) \cdot a &= p_2 \cdot (m_1, p_1) \\ &= (m_1^{p_2^{-1}}, p_2 p_1) \end{aligned}$$

olup

$$\begin{aligned} b \cdot s(a) \circ t(b) \cdot a &= (m_2, p_2 \partial_1(m_1) p_1) \circ (m_1^{p_2^{-1}}, p_2 p_1) \\ &= (m_2 m_1^{p_2^{-1}}, p_2 p_1) \end{aligned}$$

dir. Yani sonuç olarak  $a = (m_1, p_1)$ ,  $b = (m_2, p_2) \in C_1 = M \times P$  için

$$\tau_{a,b} = ((m_2 m_1^{p_2^{-1}}, p_2 p_1), (\{m_1^{-1}, m_2^{p_1}\}^{m_1}, p_2 p_1))$$

şeklinde braiding dönüşümü tanımlanır. Burada  $\{-, -\}: M \times M \rightarrow L$  2-çaprazlanmış modüldeki Peiffer lifting dönüşümüdür. Bu dönüşüm braiding aksiyomlarını sağlar. Örneğin;

$$\begin{aligned} B1. \quad d_0 \tau_{a,b} &= (m_2 m_1^{p_2^{-1}}, p_2 p_1) \\ &= [(m_2, p_2) \cdot (\partial_1 m_1) p_1] \circ [p_2 \cdot (m_1, p_1)] \\ &= b \cdot s(a) \circ t(b) \cdot a \end{aligned}$$

bulunur.

$$\begin{aligned} B2. \quad d_1 \tau_{a,b} &= d_1((m_2 m_1^{p_2^{-1}}, p_2 p_1), (\{m_1^{-1}, m_2^{p_1}\}^{m_1}, p_2 p_1)) \\ &= (m_2 m_1^{p_2^{-1}}, p_2 p_1) \circ (\partial_2 \{m_1^{-1}, m_2^{p_1}\}^{m_1}, p_2 p_1) \end{aligned}$$

dir. Burada  $\partial_2 \{m_1, m_2\} = m_1^{-1} m_2^{-1} \cdot m_1 m_2^{\partial_1 m_1}$  özelliğini kullanırsak

$$d_1 \tau_{a,b} = s(b) \cdot a \circ b \cdot t(a)$$

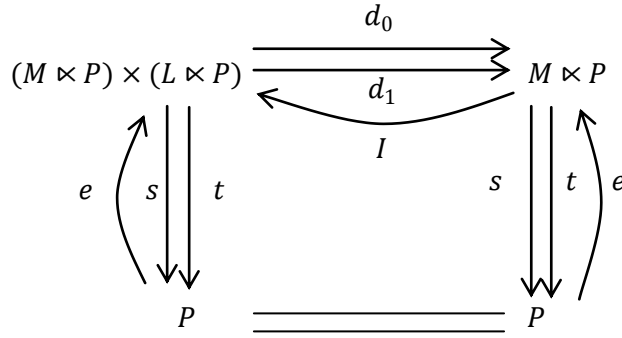
olduğu gösterilir.

Peiffer lifting dönüşümünün diğer özellikleri kullanılarak  $\tau_{a,b}$  braiding dönüşümünün geri kalan aksiyomlarının sağlandığını görmek kolaydır. Zaman alması ve işlem karmaşası yüzünden burada ihmal edilmiştir.

Böylece verilen bir

$$L \xrightarrow{\partial_2} M \xrightarrow{\partial_1} P$$

2-çaprazlanmış modülünden yukarıda oluşturduğumuz gibi bir braided regüler 2-grupoidini



şeklinde  $\tau_{a,b}$  braiding dönüşümü ile birlikte elde ederiz. Sonuç olarak 2-çaprazlanmış modüllerden braided regüler 2-grupoidler kategorisine bir fonktor oluşturmuş oluruz. Bu fonktoru

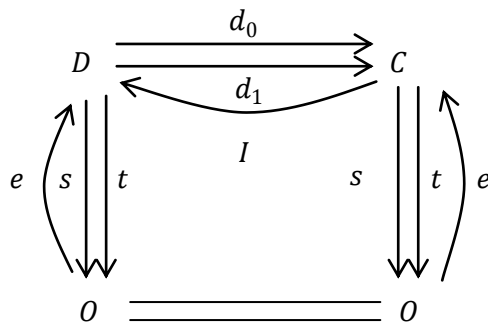
$$\Delta: X_2\mathbf{Mod} \rightarrow \mathbf{BR2G}$$

şeklinde gösterelim.

## 5.2. Braided Regüler 2- Grupoidlerden 2- Çaprazlanmış Modüllere

Bu bölümde son olarak, braided regüler 2-grupoidler kategorisi ile gruplar üzerinde 2-çaprazlanmış modüller kategorisinin denk olduğunu göstermek için Braided regüler 2-grupoidler kategorisinden gruplar üzerinde 2-çaprazlanmış modüller kategorisine bir fonktor tanımlayacağız. Hatırlayalım ki bir önceki bölümde 2-çaprazlanmış modüllerden braided regüler çaprazlanmış modüller kategorisine bir  $\Delta$  fonktoru tanımlamıştık. Aşağıda oluşturacağımız fonktor ile bu  $\Delta$  fonktoru arasında bir doğal transformasyon tanımlamak kolaydır.

$$(D, C, O, d_0, d_1, I, \circ, *) ,$$



diyagramı ile verilen bir braided regüler 2-grupoid olsun. Her bir  $x \in O$  için

$$K(x) = \{d \in D: d_0(d) = e(x)\}$$

şeklinde  $D$  nin bir alt kümesini tanımlayalım. Bu küme " $\circ$ " ve " $*$ " kompozisyon işlemine göre bir grup yapısı oluşturur.  $k \in K(x)$  in tersi

$$k_*^{-1} = I(d_1(k)) \circ k_*^{-1}$$

şeklinde verilebilir.  $k \in K(s(d))$  olmak üzere bir  $d \in D$  elemanı  $d = I(d_0(d)) \circ k$  şeklinde tek türlü yazılabilir.  $c \in C$  nin  $k \in K(x)$  üzerindeki etkisini ise

$$k^c = I(c)^{-1} \circ k \circ I(c)$$

şeklinde tanımlayalım. Böylece

$$K \longrightarrow D \xrightarrow{d_0} C$$

şeklinde bir diyagram elde ederiz. Burada  $\partial: K \rightarrow C$ ,  $d_1|_K$  kısıtlanması ile verilebilir.  $\partial: K \rightarrow C$  bir çaprazlanmış modül olur. Yani

$$K \xrightarrow{\partial} C \begin{array}{c} \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow{t} \end{array} O$$

şeklinde bir braided regüler çaprazlanmış modül elde ederiz. Burada  $\{-, -\}: C \times C \rightarrow K$  şeklindeki braiding dönüşümü  $a, b \in C$  için

$$\{b, a\} = I(t(b) \cdot a)^{-1} \circ I(b \cdot s(a))^{-1} \circ \tau_{a,b}$$

ile tanımlıdır. Burada  $\tau_{a,b}$ , 2-grupoid için braiding dönüşümüdür.

Şimdi bu yapıdan bir 2-çaprazlanmış modül elde edeceğiz.  $C$  içinde

$$M = \{a \in C: t(a) = e \in O\}$$

şeklinde tanımlayalım ve  $O = P$  olsun. Bu durumda  $M$  kümesi

$$ab = a \cdot s(b) \circ b$$

işlemine göre bir gruptur.  $s: M \rightarrow O$  şeklindeki kaynak dönüşümü  $C_0$  – *equavariant* bir dönüşüm olup bir grup homomorfizmi olur. Yani

$$S: M \rightarrow P$$

şeklindeki bir ön çaprazlanmış modül yapısı elde edeceğiz. Ayrıca  $P = O$  grubu  $C$  üzerine  $a \in C$  ve  $p \in O$  olmak üzere  $a^p = p^{-1} \cdot a \cdot p$  şeklinde bilet kullanarak etki eder. Diğer yandan  $e \in O$  birim eleman olmak üzere  $K$  grupoidi üzerinde

$$K(e) = \{a \in K: s(a) = t(a) = e\}$$

kümesi  $K$  nın grupoid kompozisyon işlemine göre bir grup olur. Bu durumda

$$K(e) \xrightarrow{\partial} M \xrightarrow{s} P$$

şeklinde  $P$ -grupların bir kompleksini elde ederiz. Burada  $S: M \rightarrow P$  bir ön çaprazlanmış modül ve

$$K(e) \xrightarrow{\partial} M$$

da bir çaprazlanmış modüldür. Bu yapı üzerindeki braiding dönüşümü ise

$$w: M \times M \rightarrow K(e)$$

$$w(a, b) = \{a^{-1}, b\}^a$$

şeklinde tanımlıdır. Böylece

$$K(e) \xrightarrow{\partial} M \xrightarrow{s} P$$

şeklinde  $w: M \times M \rightarrow K(e)$  Peiffer lifting dönüşümü ile birlikte bir 2-çaprazlanmış modül yapısı elde ederiz. Sonuç olarak

$$\theta: \mathbf{BR2G} \rightarrow \mathbf{X_2Mod}$$

şeklinde bir fonktor tanımlamış oluruz.

**Teorem 5.2.1:** 2-çaprazlanmış modüller kategorisi ile braided regüler 2-grupoidler kategorisi denktirler.

**İspat:** Yukarıdaki 5.1 ve 5.2 bölümlerinde 2-çaprazlanmış modüller kategorisinden braided regüler 2-grupoidlere  $\Delta$  fonktörünü ve braided regüler 2-grupoidlerden 2-çaprazlanmış modüller kategorisine  $\theta$  fonktörünü oluşturduk. Dolayısıyla aşağıdaki diyagramı oluşturmuş olduk.

$$\begin{array}{ccc}
 X_2Mod & \xrightarrow{\Delta} & BR2G \\
 & \searrow 1 & \downarrow \theta \\
 & & X_2Mod
 \end{array}$$

o halde

$$1_{X_2Mod} = \theta\Delta \text{ ve}$$

$$\begin{array}{ccc}
 BR2G & \xrightarrow{\theta} & X_2Mod \\
 & \searrow 1 & \downarrow \Delta \\
 & & BR2G
 \end{array}$$

diyagramından

$$1_{BR2G} = \Delta\theta$$

şeklinde doğal transformasyonlar tanımlanabilir.

### KAYNAKLAR DİZİNİ

- [1] M.André, Homologie des algébres commutatives, *Die Grundlehrender mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen*, Band 206, Springer-Verlag, 1974.
- [2] M. Artin and B. Mazur, Etale Homotopy, *Springer Lecture Notes in Math.*, 100, (1968).
- [3] Z.Arvasi, Applications in Commutative Algebra of the Moore complex of a Simplicial Algebra, *Ph.D. Thesis*, University of Wales, Bangor, (1994).
- [4] Z.Arvasi and T. Porter, Freness Conditions for 2-Crossed Modules of Commutative Algebras, *Applied Categorical Structures*, Vol. 6, 455-471, (1998).
- [5] Z.Arvasi and E.Ulualan, On Algebraic Models for Homotopy 3-types, *Journal of Homotopy and Related structures*, Vol.1,no:1,pp.1-27, (2006)
- [6] Z.Arvasi, Crossed Squares and 2-Crossed Modules of Commutative Algebras, *Theory and Applications of Categories* vol.3 No.7 pp 160-181
- [7] H.J.Baues, Algebraic homotopy, *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*, 15, (1998), 450 pages.
- [8] H.J.Baues, Combinatorial homotopy and 4-dimentional complexes, *Walter de Gruyter*, 15, (1991).
- [9] T.S.Blyth, Categories, *Longman edition* (1986)
- [10] R.Brown, From groups to groupoids, *Bull. London Math. Soc.*, 19,113-134, (1987)
- [11] R.Brown and N. D.Gilbert, algebraic Models of 3-Types and Automorphism structures for crossed modules, *Proc. London Math. Soc.* (3), 59, 51-73, (1989).
- [12] R.Brown and J-L. Loday, Van Kampen theorems for diagram ofspaces, *Topology* 26,311-335, (1987).
- [13] R.Brown and P.J.Higgins, Colimit Theorems for Relative HomotopyGroups, *J.P.A.A* 22, 11-44 (1981)
- [14] R.Brown and C.B.Spencer, G-Groupoids, Crossed modules and the fundamental groupoid of a topological group, *Proc. Konink. Neder.Akad. van Wetenschappen Amsterdam*, Vol: 79 (4), (1976).
- [15] R.Brown Possible connection between whiskered categories and groupoids, many object Lie algebras, auotomorphism structures and local-to-global questions, arXiv:0708.1677v1 [math.CT] 13Aug(2007)

### KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- [16] P.Carrasco, Complejos Hiper cruzados Cohomologia Extensiones, *Ph.D. Thesis*, Universidad de Granada, (1987).
- [17] P.Carrasco and A.M. Cegarra, Group-theoretic Algebraic Models for Homotopy Types, *Jour. Pure Applied Algebra*, 75, 195-235, (1991).
- [18] D. Conduché, Modules croisés généralisés de longueur 2, *J. Pure and Applied Algebra*, 34, 155-178, (1984).122
- [19] D. Conduché, Simplicial Crossed Modules and Mapping Cones, *Georgian Mathematical Journal*, 10(4), 623–636, (2003).
- [20] E.B.Curtis, Simplicial Homotopy Theory, *Adv. in Math.* vol.6, 107-209 (1971).
- [21] J.Duskin, Simplicial methods and the interpretation of triple cohomology, *Memoirs A.M.S.*vol.3, 163, (1975).
- [22] G.J. Ellis and R. Steiner, Higher Dimensional Crossed Modules and the Homotopy groups of  $(n+1)$ -ads. , *J. Pure and Applied Algebra*, 46,117-136, (1987).
- [23] A.R.Garzon and J.G.Miranda, Homotopy theory for (braided) cat-groups, cahiers de Topologie et géométrie différentielle catégoriques 38, no:2, pp.99-139, (1997).
- [24] A.R.Grandjéan and M.J.Vale, 2-Modulos Cruzados an la Cohomologia de André-Quillen. *Memorias de la Real Academia de Ciencias*, 22,(1986).
- [25] L.Illusie, Complex cotangent et déformation I, *Lectures Notes in Math* 239 (1971); II, 283 (1972).
- [26] İçen, İ., "The equivalence between 2-groupoids and crossed modules", *Comm. Fac. Sci. Univ. Ankara, Ser. A1*. 49, pp. 39-48,(2000).
- [27] A.Joyal and R.Street, Braided Monoidal Categories,*Mac. Math. Report*. 1986
- [28] J.L. Loday, Spaces with finitely many non-trivial homotopy groups ,*J. Pure and Applied Algebra* 24, 179-202, (1982).
- [29] S.Mac Lane, Cohomology theory in abstract groups III, *Ann. of Math.*50, 736-771 (1949)
- [30] S.Mac Lane and J.H.C. Whitehead, On the 3-type of a complex, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* Vol. 37, 41-48 (1950).
- [31] T.Porter, Some categorical results in the theory of crossed modules in commutative algebras, *J.Algebra* 109 415-429, (1987).

### KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- [32] T.Porter, Crossed Modules in Cat and a Brown-Spencer Theorem for 2-categories, *Chaires Topologie Geom. Differentielle Categoriquest* 26,381-388, (1985).
- [33] T.Porter, n-Type of simplicial groups and crossed n-cubes, *Topology* 32, 5-24, (1993).
- [34] A.Tonks, Theory and Applications of crossed complexes, PhD. thesis, University of Wales, 1993
- [35] D.Guin-Walery and J.L. Loday, Obstruction à l'excision en K-théorie algébrique. *In: Friedlander, E.M., Stein, M.R.(eds.) Evanston conf. on algebraic K-Theory* 1980. (Lect. Notes Math., vol.854, pp 179-216) Berlin Heidelberg New York: Springer (1981).
- [36] E.Ulualan, Braiding from 2-Groups to 2-groupoids, *Iranian Journal of science and Tecnology* vol:7, (2006)
- [37] E.Ulualan, "Relation Among Algebraic Models of 1- connected Homotopy 3-types", *Turkish Journal of Mathematics*, Vol:31, Issue 3, pp.230-225,(2007)
- [38] J.H.C. Whitehead, Combinatorial homotopy II, *Bull. Amer. Math.Soc.* 55, 453-496, (1949).