

**İKİ PARAMETRELİ ÜSTEL DAĞILIMDA REKOR DEĞERLER  
İLE ORTAK DEĞİŞİM KATSAYISI  
VE GÜVENİRLİK TAHMİN EDİCİLERİ**

**NURTEN BIYIKLI**

Hacettepe Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin

İSTATİSTİK Anabilim Dalı için öngördüğü

DOKTORA TEZİ

olarak hazırlanmıştır.

2009

**İKİ PARAMETRELİ ÜSTEL DAĞILIMDA REKOR DEĞERLER  
İLE ORTAK DEĞİŞİM KATSAYISI  
VE GÜVENİRLİK TAHMİN EDİCİLERİ**

**COMMON COEFFICIENT OF VARIATION AND RELIABILITY  
ESTIMATORS USING RECORD VALUES  
IN TWO PARAMETER EXPONENTIAL DISTRIBUTION**

**NURTEN BIYIKLI**

Hacettepe Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin

İSTATİSTİK Anabilim Dalı için öngördüğü

DOKTORA TEZİ

olarak hazırlanmıştır.

2009

# İKİ PARAMETRELİ ÜSTEL DAĞILIMDA REKOR DEĞERLER İLE ORTAK DEĞİŞİM KATSAYISI VE GÜVENİRLİK TAHMİN EDİCİLERİ

**Nurten Bıyıklı**

## **ÖZ**

Bu çalışmanın amacı, iki parametrelü üstel dağılım durumunda ortak değışim katsayısının ve güvenirlüğün tahmin edicilerini elde etmektir. Ayrıca, ortak değışim katsayısı tahmin edicisi ve güvenirlük tahmin problemi, veri rekor değeri olduğunda da düşünölmüştür. En çok olabilirlük tahmin edicileri üzerine çalışma yapılmıştır. İki parametrelü üstel dağılım verisi benzetim yöntemiyle elde edilip, ortak değışim katsayısı tahmin edicisi kullanıldığında, güvenirlük tahmininin daha iyi olduğü gözlenmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** İki parametrelü üstel dağılım, Ortak değışim katsayısı, Rekor değeri, Güvenirlük

**Danışman :** Doç. Dr. Durdu KARASOY , Hacettepe Üniversitesi, İstatistik Bölümü, Risk Analizi Anabilim Dalı

# **COMMON COEFFICIENT OF VARIATION AND RELIABILITY ESTIMATORS USING RECORD VALUES IN TWO PARAMETER EXPONENTIAL DISTRIBUTION**

**Nurten Bıyıklı**

## **ABSTRACT**

The aim of this study is to obtain the estimators of common coefficient of variation and reliability in two parameter exponential distribution. Also, we have considered the problem of estimating the common coefficient of variation and the reliability when the available data is in the form of record values. We focused on the maximum likelihood estimator. We simulated data in two parameter exponential distribution and we showed that if we use reliability estimator using common coefficient of variation estimator, we can get better results.

**Key words:** Two parameter exponential distribution, Common coefficient of variation, Record values, Reliability

**Advisor :** Associate Prof. Dr. Durdu KARASOY, Hacettepe University, Department of Statistics, Risk Analysis Section

## TEŞEKKÜR

Öncelikle bu tezi hazırlarken, Rider Üniversitesi'nde bana sağladığı olanaklar, yönlendirmeleri ve inanılmaz sabrı nedeniyle çok büyük maddi ve manevi katkısı olan Sayın Prof. Dr. Mohammad Ahsanullah'a sonsuz teşekkür ediyorum. İnanılmaz çalışkanlığı, kibarlığı, bir o kadar sakinliği ve pozitif bakış açısı nedeniyle, kendisini tanımış olmaktan büyük mutluluk duydum.

Hacettepe Üniversitesi İstatistik Bölüm Başkanı Sayın Prof. Dr. Süleyman Günay'a ve değerli öğretim üyelerine, bana verdikleri eğitim için ve araştırma görevlisi arkadaşlarıma da, destekleri nedeniyle teşekkür ediyorum.

Danışmanım Sayın Doç. Dr. Durdu Karasoy'a katkıları nedeniyle teşekkür ediyorum.

Yüksek lisans danışmanlığımı da yapmış olan Sayın Prof. Dr. F. Zehra Muluk'a güler yüzü, anaç kişiliği, daima pozitif yaklaşımı ve katkıları nedeniyle çok teşekkür ediyorum.

Çalışma hayatımın yoğunluğu nedeniyle yeterince yardımcı olamadığım, annem Havva Dervişoğlu'na ve eğitimimi daima destekleyen babam Erol Dervişoğlu'na teşekkür ediyorum.

Bu tezin hazırlanma aşamasının en zor döneminde beni ayakta tutan, sonunu göremediğim zamanlarda bana ümit veren, eşim Kasım Bıyıklı'ya teşekkür ediyorum.

Bu tezi, hayatımıza katılmasını sabırsızlıkla beklediğimiz bebeğimize hediye ediyorum.

## İÇİNDEKİLER

	<b>Sayfa</b>
ÖZ.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
İÇİNDEKİLER.....	iv
ÇİZELGELER DİZİNİ.....	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	viii
EKLER DİZİNİ.....	ix
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	x
1. GİRİŞ.....	1
2. DEĞİŞİM KATSAYISI.....	3
2.1. Değişim Katsayısının Tanımı.....	3
2.2. Çeşitli Değişim Katsayısı Yaklaşımları .....	4
2.3. Değişim Katsayısının Tarihi.....	5
2.4. İki Değişim Katsayısını Karşılaştırmak için Geliştirilen Testler.....	7
2.5. k Tane Değişim Katsayısını Karşılaştırmak için Geliştirilen Testler .....	7
2.6. Değişim Katsayısının Tahmin Edicisi.....	9
2.7. Çeşitli Testlere Göre Ortak Değişim Katsayısı Formülleri.....	9
3. ÜSTEL DAĞILIM.....	12
3.1. İki Parametrelili Üstel Dağılım.....	12
3.2. Bir Parametrelili Üstel Dağılım.....	13
3.3. Üstel Dağılımın Uygulama Alanları.....	15
3.4. Üstel Dağılımın Tarihi .....	17
3.5. İki Parametrelili Üstel Dağılımda Tahmin Ediciler.....	18
3.5.1. İki parametrelili üstel dağılımda bir kitle için parametrelerin en çok olabilirlik tahmin edicileri.....	18

3.5.2. İki parametrelili üstel dağılımda iki kitle için parametrelerin en çok olabilirlik tahmin edicileri.....	19
3.5.3. İki parametrelili üstel dağılımda iki kitle için ortak standart sapmanın en çok olabilirlik tahmin edicisi.....	21
4. GÜVENİRLİK.....	23
4.1. İki Parametrelili Üstel Dağılımda Güvenirlik.....	28
4.1.1. İki parametrelili üstel dağılımda $R = P(X > Y)$ .....	28
4.1.2. İki parametrelili üstel dağılımda $R = P(X < Y)$ .....	30
4.1.3. İki parametrelili üstel dağılımın farklı bir formuyla $R = P(X < Y)$ .....	33
5. REKOR DEĞERLER.....	33
5.1. Rekor Değerleri Kullanarak Üstel Dağılımın Parametrelerinin Tahmin Edicileri.....	36
5.1.1. İki parametrelili üstel dağılımda bir kitle için artan rekor değerleri kullanarak parametrelerin en çok olabilirlik tahmin edicileri.....	36
5.1.2. İki parametrelili üstel dağılımda iki kitle için artan rekor değerleri kullanarak parametrelerin en çok olabilirlik tahmin edicileri.....	37
6. İKİ PARAMETRELİLİ ÜSTEL DAĞILIMDA REKOR DEĞERLERİLİ KULLANMADAN VE KULLANARAK DEĞİŞİM KATSAYISI, ORTAK DEĞİŞİM KATSAYISI VE GÜVENİRLİK TAHMİN EDİCİLERİLİ .....	39
6.1. İki Parametrelili Üstel Dağılımda Bir Kitle ve İki Kitle için Değişim Katsayısı ve Ortak Değişim Katsayısının En Çok Olabilirlik Tahmin Edicileri.....	39
6.1.1. İki parametrelili üstel dağılımda bir kitle için değişim katsayısının en çok olabilirlik tahmin edicisi.....	39
6.1.2. İki parametrelili üstel dağılımda iki kitle için değişim katsayısının en çok olabilirlik tahmin edicisi.....	41
6.1.3. İki parametrelili üstel dağılımda iki kitle için ortak değişim katsayısının en çok olabilirlik tahmin edicisi.....	43

6.2. İki Parametrelİ Üstel Dağılımda Değişim Katsayısı ve Ortak Değişim Katsayısı Tahmin Edicilerini Kullanarak Güvenirlik Tahmin Edicileri.....	45
6.2.1. İki parametrelİ üstel dağılımda değişim katsayısı tahmin edicisini kullanarak $R=P(X<Y)$ tahmin edicisi.....	45
6.2.2. İki parametrelİ üstel dağılımda ortak değişim katsayısı tahmin edicisini kullanarak $R=P(X>Y)$ tahmin edicisi.....	46
6.3. Rekor Değerleri Kullanarak Değişim Katsayısı, Ortak Değişim Katsayısı ve Güvenirlik Tahmin Edicileri.....	47
6.3.1. İki parametrelİ üstel dağılımda bir kitle için artan rekor değerleri kullanarak değişim katsayısının en çok olabilirlik tahmin edicisi.....	47
6.3.2. İki parametrelİ üstel dağılımda iki kitle için artan rekor değerleri kullanarak değişim katsayılarının en çok olabilirlik tahmin edicileri....	48
6.3.3. İki parametrelİ üstel dağılımda iki kitle için artan rekor değerleri kullanarak ortak değişim katsayısının en çok olabilirlik tahmin edicisi..	49
6.3.4. İki parametrelİ üstel dağılımda artan rekor değerleri kullanarak elde edilen tahmin edicilerle $R=P(X<Y)$ tahmin edicisi.....	50
6.3.5. İki parametrelİ üstel dağılımda artan rekor değerleri kullanarak elde edilen tahmin edicilerle $R=P(X>Y)$ tahmin edicisi.....	51
6.3.6. İki parametrelİ üstel dağılımda artan rekor değerleri kullanarak elde edilen ortak değişim katsayısı tahmin edicisi ile $R=P(X>Y)$ tahmin edicisi .....	51
6.4. Örnek.....	52
7. UYGULAMA.....	55
8. SONUÇ VE TARTIŞMA.....	65
KAYNAKLAR DİZİNİ.....	67
EK 1.....	72

## ÇİZELGELER DİZİNİ

	<b>Sayfa</b>
Çizelge 7.1. Exp(1, 2) ve Exp(2, 4) kitlelerini n = 15, 20, 50 ve 100 iken R=P(X>Y)'ye göre karşılaştırma sonuçları.....	56
Çizelge 7.2. Exp(2, 4) ve Exp(1, 2) kitlelerini n = 15, 20, 50 ve 100 iken R=P(X>Y)'ye göre karşılaştırma sonuçları.....	59
Çizelge 7.3. Exp(2, 4) ve Exp(2, 4) kitlelerini n = 15, 20, 50 ve 100 iken R=P(X>Y)'ye göre karşılaştırma sonuçları.....	62

## ŞEKİLLER DİZİNİ

	<b>Sayfa</b>
Şekil 3.1. Bir parametrelili üstel dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu grafiği.....	14
Şekil 3.2. Bir parametrelili üstel dağılımın dağılım fonksiyonu grafiği.....	15
Şekil 7.1. Exp(1, 2) ve Exp(2, 4) kitlelerini n = 15, 20, 50 ve 100 iken R=P(X>Y)'ye göre karşılaştırma sonuçlarının grafiği.....	58
Şekil 7.2. Exp(2, 4) ve Exp(1, 2) kitlelerini n = 15, 20, 50 ve 100 iken R=P(X>Y)'ye göre karşılaştırma sonuçlarının grafiği.....	61
Şekil 7.3. Exp(2, 4) ve Exp(2, 4) kitlelerini n = 15, 20, 50 ve 100 iken R=P(X>Y)'ye göre karşılaştırma sonuçlarının grafiği.....	64

**EKLER DİZİNİ****Sayfa**

EK 1. ÇİZELGE 7.1., ÇİZELGE 7.2. ve ÇİZELGE 7.3.'DE YER ALAN

DEĞERLERİ BULMAK İÇİN KULLANILAN BİLGİSAYAR PROGRAMI..... 72

## **SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ**

DK Değişim Katsayısı

LRT Olabilirlik Oran Testi

DAD Miller Asimtotik Normallik Testi

SRT Karesele İşaret Testi

R Güvenirlık

## 1. GİRİŞ

İstatistikte gruplar arasındaki farkı belirlemek için bir çok analiz yöntemi geliştirilmiştir. Elde edilen verilerin birimleri aynıken ve bazı gerekli varsayımları sağlaması durumunda varyans analizi (ANOVA) gibi yöntemler uygulanmıştır. Farklı birimli veri gruplarını karşılaştırmak için, birimsiz bir değer olan değişim katsayısı kullanılmıştır. Grupların birlikte değişimini ifade edebilmek için ortak değişim katsayısı gündeme gelmiştir. Değişim katsayılarının eşitliği için bir çok test geliştirilmiştir. Bu testler çeşitli dağılımlar, örneklem büyüklükleri ve değişim katsayısı değerleri için birbiri ile karşılaştırılmıştır. Literatürde, çeşitli tahmin yöntemleri ile ortak değişim katsayısının tahmin edicileri geliştirilmiş ve hala bu konu üzerinde çalışmalar devam etmektedir.

Bu çalışmada, iki grup veriyi karşılaştırmak için değişim katsayısı bilgisinden faydalanmak amaçlanmıştır. Birlikte değişimi gösteren ortak değişim katsayısının elde edilmesi ve bunun güvenilirlik ile karşılaştırılması üzerinde çalışılmıştır.

Bu çalışmanın, İkinci Bölümünde değişim katsayısı hakkında bilgi verilmiş ve literatürde geliştirilen değişim katsayılarının eşitliği testleri ve çeşitli dağılımlara göre elde edilen ortak değişim katsayısı formülasyonlarına yer verilmiştir.

Üçüncü Bölümde iki parametrelili üstel dağılım tanıtılmış ve parametrelerin tahmin edicilerine yer verilmiştir. Dördüncü Bölümde ise güvenilirlik kavramı açıklanmış ve iki parametrelili üstel dağılıma göre güvenilirlik formülasyonlarının nasıl elde edildiğine yer verilmiştir. Beşinci Bölümde tarihi çok yeni olan rekor değer kavramı açıklanmıştır. Rekor değerler kullanılması durumunda, iki parametrelili üstel dağılım için parametrelerin tahmin edicileri verilmiştir. Bu bölüme kadar olan bilgiler tamamen literatürde yer alan bilgilerdir.

Bu çalışmada elde edilmesi hedeflenen bulguların yer aldığı Altıncı Bölümde iki parametrelili üstel dağılım için ortak değişim katsayısının tahmin edicisi elde edilmiştir. Daha sonra bu tahmin edici, iki grubun farkının bulunmasında kullanılan, güvenilirlik formüllerine uyarlanmıştır. Aynı işlemler verinin rekor değer olduğu gözönüne alınarak tekrarlanmıştır. Rekor değerler için ortak değişim katsayısı tahmin edicisi elde edildikten sonra, rekor değerlere göre güvenilirlik formülleri uyarlanmıştır.

Uygulama Bölümü'nde elde edilen bulgular, bir benzetim çalışmasıyla karşılaştırılmıştır. Farklı iki parametrelili üstel dağılım kitleleri, çeşitli örneklem büyüklüklerine göre üretilmiş ve tahmin ediciler hesaplanarak güvenilirlikler hesaplanmıştır. Benzetim çalışması sonucunda, elde edilen ortak değişim katsayısının tahmin edicisinin kullanılmasının faydalı olduğu, güvenilirliği yükseltmesi nedeniyle uygun görülmüştür. Ayrıca rekor değer tahmin edicileri kullanıldığında güvenirliliğin daha yüksek olduğu gözlemlenmiştir. Sonuç olarak, eğer gruplar ortak bir değişim gösteriyorsa, ortak değişim katsayısı tahmin edicisinin kullanılması ve aynı zamanda rekor değerler üzerinde çalışılıyorsa, rekor değer tahmin edicilerinin kullanılması gerektiği sonucuna varılmıştır.

## 2. DEĞİŞİM KATSAYISI

### 2.1. Değişim Katsayısının Tanımı

İstatistikte, değişim katsayısı (coefficient of variation) dağılım ölçümleri sınıfına girmektedir. Ortalaması  $\mu$  ve varyansı  $\sigma^2$  olan bir kitle için, değişim katsayısı (DK), ortalama ve standart sapmanın oranı olarak tanımlanmıştır ve  $\gamma$  sembolü ile gösterilecektir. Bu durumda DK,

$$\gamma = \frac{\sigma}{\mu} \quad (2.1)$$

biçimindedir. DK, yalnızca ortalama sıfır olmamak üzere tanımlanır. DK genellikle, Eşitlik (2.1)'de tanımlanan formül 100 ile çarpılarak, yüzde olarak ifade edilir (Wikipedia, 2008).

Standart sapma her zaman ortalamaya bağlı olarak yorumlandığı için, DK kullanım açısından daha faydalıdır. DK'nın önemli bir özelliği, birimsiz bir sayı olmasıdır. Farklı birimli ya da çok farklı ortalamalı veri kümelerini karşılaştırırken, standart sapma yerine DK kullanılmakta; böylelikle daha anlamlı bilgiler elde edilmektedir.

Ortalama sıfıra yaklaştıkça, DK'nın ortalamadaki küçük değişikliklere duyarlılığı artar (Wikipedia, 2008).

DK'nın bir diğer tanımı; her birim ortalamadaki, standart sapmadır (Gupta and Ma, 1996). Örneğin, standart sapmanın değeri 20 olsun, bu bilgi, ortalama hakkında bilgi olmaksızın çok anlam içermemektedir. Fakat ortalamanın 8000 olduğu bilgisi varsa, o zaman değişimin miktarı ortalama ile ilgili olarak açıklanabilir (Ahmed, 1995).

DK'sı en küçük olan örneklem, diğer örneklemelere göre ortalama etrafında daha homojen dağılır.

DK, yaygın olarak uygulamalı istatistik alanında, örneğin kuyruk kuramı ve güvenilirlik teorisinde kullanılır. Bu alanlarda, üstel dağılım, normal dağılımdan daha çok kullanılmaktadır. Bir parametrelili üstel dağılımın standart sapması, ortalamasına eşittir, dolayısıyla DK, bire eşittir.  $\gamma < 1$  olan bir dağılımda, örneğin Erlang dağılımında,

varyansın küçük olduğu söylenebilir.  $\gamma > 1$  olduğunda ise, örneğin hiper-üstel dağılımda, varyansın büyük olduğu söylenebilir (Wikipedia, 2008).

DK, iki grubun göreceli değişkenliğini karşılaştırmak için kullanılır. Ortalama ve varyans farklı olsa bile, gruplar aynı göreceli değişkenliğe sahip olabilir. Mesela, paranoid şizofreni, paranoid olmayan şizofreni ve bir kontrol grubunda, bir görev için reaksiyon zamanı farklı olsa da, göreceli değişkenlik benzer olabilir. Buna benzer durumlarda, bağımlı değişkene dönüşüm uygulanarak, varyanslar homojen hale getirilir ve bu işlemden sonra ANOVA uygulanabilir. Fakat varyansların homojenliği, dönüşüm ile de sağlanamazsa o zaman DK'larının eşitliğini test etmek uygun bir yaklaşım olacaktır (Shafer and Sullivan, 1986).

DK, literatürde çeşitli amaçlar için kullanılmıştır. Ekonomistler, DK'yı, bir kitle veya bir köyün hanehalkının gelirlerinin farklılığını ölçmede kullanmıştır. Genel bir kanıya varabilmek için çeşitli kitlelerin DK'larının karşılaştırılmasıyla ilgilenilmiştir (Singh, 1993).

Örneklem DK'sı, örneklem varyansının karekökü, örneklem ortalamasına bölünerek aşağıdaki gibi elde edilir;

$$\hat{\gamma} = \frac{s}{\bar{x}} \quad (2.2)$$

(Singh, 1993).

## 2.2. Çeşitli Değişim Katsayısı Yaklaşımları

Örneklem dağılımının yapısına bağlı olarak farklı değişim katsayıları tanımlanmıştır. Bunlardan bazıları ters örneklem değişim katsayısı, hata değişim katsayısı, yayılım katsayısı ve çeyrek değişim katsayısıdır.

Ters örneklem değişim katsayısı,  $\widehat{TDK} = \frac{1}{\hat{\gamma}}$  olarak tanımlanır. Ters örneklem değişim katsayısının tercih edilmesinin nedeni, matematiksel işlemlerde kolaylıklar sağlamasıdır (Singh, 1993).

Hata değişim katsayısı ise, tıp ve biyoloji bilimlerinde sıklıkla kullanılmıştır. Hata değişim katsayısı, hatanın standart sapmasının ortalamaya bölünmesiyle elde edilir ve

$$\text{HDK} = \frac{\sigma_e}{\mu} \quad (2.3)$$

biçiminde tanımlanır. Tek yönlü rasgele etki modelinin varsayımları altında, bir örnekleme ait hata değişim katsayısı için testler ve genelleştirilmiş güven aralıkları geliştirilmiştir (Tian, 2005).

Diğer bir değişim katsayısı olan, yayılım katsayısı (coefficient of dispersion),

$$\text{YK} = \frac{\tau}{\eta} \quad (2.4)$$

biçiminde tanımlanır.  $\eta$ , medyan ve  $\tau$ , medyandan ortalama sapma olarak tanımlanır. Normal dağılımlı olmayan örneklerde yayılım katsayısının, DK'na tercih edilebilir olduğu gösterilmiş ve yayılım katsayısı için güven aralığı önerilmiştir. Bonett ve Serier (2005), yayılım katsayısı üzerine çalışmalar yapmıştır.

Bir diğer değişim katsayısı ise, çeyrek değişim katsayısıdır ve kitle değeri aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\text{ÇDK} = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} \quad (2.5)$$

Burada,

$Q_1$ : 1. çeyrek değer

$Q_3$ : 3. çeyrek değerdir.

Standart sapmanın tahmini, basık (platykurtic) ve sivri (leptokurtic) dağılımlarda iyi etkinliğe sahip değildir. Bu nedenle standart sapmanın kullanımı normal olmayan dağılımlarda uygun olmayabilir. Bu durumda çeyrek değişim katsayısının kullanılması daha uygun bulunmuştur (Bonett, 2006).

### **2.3. Değişim Katsayısının Tarihi**

Literatürde DK ilk kez Pearson tarafından, 1896 yılında kullanılmıştır. Pearson, DK'nın formülünü, kadınlar ve erkekler üzerinde yapılan ölçümleri karşılaştırarak tanımlamıştır.

DK, bir çok biyolojik veri uygulamasında dağılım ölçüsü olarak kullanılmıştır (Forkman, 2005).

Tarihdeki ikinci gelişme, McKay tarafından 1932 yılında, DK'nın yaklaşık güven aralığının tanımlanmasıyla gerçekleşmiştir. Daha sonra bu yaklaşım Vangel(1996) tarafından geliştirilmiştir.

DK üzerine çok sayıda çalışma yapılmıştır. DK'ların eşitliği için, farklı örneklem büyüklükleri ve farklı DK değerleri için çok sayıda test geliştirilmiştir. Miller ve Karson (1977), iki DK'nın eşitliği için bir test geliştirmiştir. Doornbos ve Dijkstra (1983) ve Bennett (1976), k tane normal kitleden gelen örneklemelerin DK'larının eşitliği için bir test geliştirmiştir.

Bennett (1976)'in k normal dağılımlı kitleler için geliştirdiği test daha sonra Shafer ve Sullivan (1986) tarafından geliştirilmiştir. Rao ve Vidya (1992), eşit örneklem büyüklüğüne sahip iki kitleden DK'ların eşitliğini test etmek için, Wald tarafından önerilmiş olan Wald testini geliştirmişlerdir. Gupta ve Ma (1996) bir test geliştirmiş ve bu test skor (score) testi olarak isimlendirilmiştir. Ayrıca yazarlar, eşit olmayan örneklem büyüklüklerine göre ikiden fazla kitle için Wald testini genişletmişlerdir.

Gupta ve Ma (1996), normal kitleler için çeşitli testlerin güçlerini karşılaştırmak için bir benzetim çalışması yapmışlardır. Bu çalışmada, Bennett testi, geliştirilmiş Bennett testi, merkezsiz olmayan t-testi, olabilirlik oran testi (LRT), Wald testi ve skor testini karşılaştırmışlardır. Bu çalışma sonucunda özellikle örneklem büyüklüğü küçük olduğunda, LRT, bütün testler içinde en yüksek güce sahiptir. Feltz ve Miller (1996), geliştirilmiş Miller asimtotik normallik testini (DAD) , LRT, Wald ve skor testi hariç, yukarıdaki testlerle karşılaştırmışlardır. DAD testinin, normal, gamma, lognormal ve tekbiçimli (uniform) dağılım durumunda diğer testlere göre daha iyi sonuç verdiği belirlenmiştir. Sonuç olarak LRT ve DAD testleri, DK'ların eşitliği için iki uygun parametrik test olarak belirlenmiştir (Fung and Tsang,1998).

## **2.4. İki Değişim Katsayısını Karşılaştırmak için Geliştirilen Testler**

Çeşitli yazarlar tarafından iki değişim katsayısını karşılaştırmak için, Yaklaşık F Testi, Bennett Testi, Miller Testi, Wald Testi, Skor Testi, Doornbos ve Dijkstra Testi, Log Testi, Naive Testi geliştirilmiştir.

Bhoj ve Ahsanullah (1993), bir Olabilirlik Oranı Testi, Dudewicz ve Mishra (1987) Standart Normal Test istatistiği geliştirmişlerdir.

Forkman (2005), İki değişim katsayısını karşılaştırmak için yaklaşık bir F testi tanıtmıştır. Yapılan karşılaştırmalardan sonra, Olabilirlik Oranı Testi, Wald Testi, Skor Testi ve Doornbos ve Dijkstra Testi, örneklem büyüklüğü küçük olması durumunda kullanılması gerektiği sonucuna varmıştır. Önerilen yaklaşık F testi, örneklem büyüklüğü küçük olduğu zaman, en iyi sonucu vermiştir. Bu nedenle, iki değişim katsayısını karşılaştırmak için, yaklaşık F testi önerilmiştir (Forkman, 2005).

## **2.5. k Tane Değişim Katsayısını Karşılaştırmak için Geliştirilen Testler**

Doornbos ve Dijkstra (1983), k tane normal dağılımlı kitlenin değişim katsayılarının eşitliği hipotezi için LRT testini elde etmişler ve Miller ve Karson (1977) tarafından önerilen D-testi ile karşılaştırmışlardır. Küçük örneklem büyüklüklerinde her iki testin de kullanılmaması gerektiğine karar vermişlerdir.

Shafer ve Sullivan (1986), k tane normal dağılımlı kitleden çekilen örneklemelerin değişim katsayılarının eşitliğinin testini araştırmışlardır. Çalışmada normal, gamma, lognormal, tekbiçimli dağılımlarından alınan bağımsız örneklemeler kullanılmış; önerilen test ile Doornbos ve Dijkstra (1983)'nın geliştirdiği iki test karşılaştırılmıştır. Test istatistiğinin daha kolay hesaplandığı görülmüştür.

Iglewich ve Myers (1970), Bennett testinin ufak değişiklikler yapılmış bir versiyonunu sunmuşlardır. Bennett testi ve geliştirilmiş Bennett testinin her ikisi için de yapılan bir benzetim çalışmasında, her iki testin de örneklem büyüklüğü küçükken gücünün çok iyi olduğu gösterilmiştir. Ayrıca, her iki testin de, Doornbos ve Dijkstra (1983) tarafından önerilen teste göre, hesaplama açısından daha avantajlı olduğu görülmüştür.

Shafer ve Sullivan (1986), eşit örneklem büyüklükleri için  $DK < 1$  olduğunda Bennett ve geliştirilmiş Bennett testlerinin arasında fark olmadığını bulmuştur. Tekbiçimli dağılım için, her iki testin de uygun olmadığı görülmüştür. Gamma ve lognormal dağılımlar için sonuçların, normal dağılımdan çok farklı olmadığı tespit edilmiştir.

Bennett ve geliştirilmiş Bennett testleri için sonuçlar, dağılım çan eğrisine yaklaştıkça iyileşir. İki test arasındaki fark örneklem varyansındaki düzeltme faktörüdür. Düzeltme faktörünün kullanıldığı test, örneklem büyüklüğü ve değişim katsayısı küçük olduğunda daha iyi sonuç vermiştir. Bennett ve geliştirilmiş Bennett testlerinin, büyük örneklem büyüklükleri kullanıldığında çok farklı olmadığı, dolayısıyla testlerin yalnızca, küçük örneklem büyüklükleri için kullanılması önerilmiştir. Bennett ve geliştirilmiş Bennett testlerinin, LRT ve D testine avantajı, hesaplanmasının kolay olmasıdır. Sonuç olarak, istatistiksel hesaplamalar açısından Bennett testleri, LRT ve D-testi ile aynı ya da daha iyidir (Shafer and Sullivan, 1986).

Gupta ve Ma (1996),  $k$  tane normal dağılımlı kitleden alınan örneklemelerin değişim katsayılarının eşitliğini test etmek için çeşitli testler sunmuştur. Geliştirilen test, Skor testi diye isimlendirilmiştir. Ayrıca, eşit olmayan örneklem büyüklüklerinde ve ikiden fazla kitle için Wald testi geliştirilmiştir. Çalışmada Skor testi; Geliştirilmiş Bennett testi, Olabilirlik Oranı testi, Merkezsel olmayan  $t$  testi ve Wald testi ile karşılaştırılmıştır. Örneklem büyüklüğü arttıkça, bu testlerin tümünün güçleri birbirine yakın olmaktadır. Büyük örneklem durumunda, hesaplama kolaylığı açısından Bennett testi önerilebilir. Örneklem büyüklüğü küçük olduğunda, LRT en yüksek güce sahiptir ve Skor testi ikinci sıradadır. Örneklem büyüklüğü düştükçe, Wald testinin gücü düşer. Bennett ve geliştirilmiş Bennett testi hemen hemen testin gücü bakımından aynıdır.

Miller ve Karson (1977),  $DK$ 'larının eşit olup olmadıklarını test etmek için iki test önermiştir. Bunlardan ilki geliştirilmiş Miller asimtotik normallik testi (DAD) ve karesel işaret testi (SRT) dir.

Fung ve Tsang (1998), DAD testinin, normal kitleden çekilen örneklemelerin büyüklükleri eşit olduğunda, en iyi test olduğu sonucuna varmışlardır. SRT, verinin normalliğini gerektirmez. SRT, büyük  $DK$ 'larda farklılık göstermez. Asimetrik dağılımlar için, testlerin

performansı simetrik olanlardan oldukça farklıdır. Asimetrik dağılımlar için SRT, LRT'den daha iyidir. LRT, tek biçimli dağılım hariç en yüksek güce sahiptir.

## 2.6. Değişim Katsayısının Tahmin Edicisi

İki değişim katsayısının aynı olması beklentisi, değişim katsayısı tahmin problemini ortaya çıkarmıştır. Ahmed (1995)'in yaklaşımında, her iki değişim katsayısının eşit olduğu beklentisi varken ve iki örneklemden bilgi birleştirilmek istendiği zaman, birinci kitlenin değişim katsayısının, tahmini ile ilgilenilir. Fakat bir çok durumda iki kitlenin eşit olup olmadığı kesin değildir. Bu kesin olmayışlık ele alınacak olursa, önsel bilginin geçerliliği üzerine bir ön test uygulamak istenilebilir. Buna yönelik Pre-test ve Shrinkage prensibine dayanan tahmin ediciler önerilmiştir (Ahmed, 1995).

Tian (2005), çeşitli bağımsız örneklemelerin, bir ortak değişim katsayısı ile ifade edilebilir kitlelerden olduğuna dair beklenti üzerine çalışmıştır. Çeşitli bağımsız örneklemelerden ortak değişim katsayısı için, hipotez testi ve aralık tahmini için geliştirilecek yöntemlerde, genelleştirilmiş değişken içeriği, genelleştirilmiş p-değeri ve genelleştirilmiş güven aralığı tahmin içeriği kullanılmıştır.

## 2.7.Çeşitli Testlere Göre Ortak Değişim Katsayısı Formülleri

Miller ve Karson (1977), asimtotik normalliğe dayanan bir test önermiştir. Kitle değişim katsayısı, ağırlıklandırılmış ortalama ile tahmin edilmiştir. Örneklem DK'sı;

$$\hat{\gamma}_w = \frac{(n_1-1)\hat{\gamma}_1 + (n_2-2)\hat{\gamma}_2}{n_1 + n_2 - 2} \quad (2.6)$$

biçimindedir. Bu tahmin edici, değişim katsayılarının eşitliğini test etmek için kullanılan, test istatistiğinin hesaplanmasında kullanılır (Forkman, 2005).

Gerig ve Sen (1980)'e göre  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  ve DK'nın en çok olabilirlik tahmin edicileri sırasıyla,

$$\hat{\mu}_1 = \frac{n_1 m_1 \hat{\mu}_2}{(n_1 + n_2) \hat{\mu}_2 - n_2 m_2} \quad (2.7)$$

$$\hat{\mu}_2 = -\frac{q}{2p} + \sqrt{\frac{q^2}{4p^2} - \frac{r}{p}},$$

(2.8)

$$\hat{\gamma} = \sqrt{\frac{\frac{n_2-1}{n_2}\hat{\gamma}_2^2 m_2^2 - m_2 \hat{\mu}_2}{\hat{\mu}_2}} \quad (2.9)$$

biçimindedir. Burada,

$m_i$ ,  $i$ . örneklem için ortalamayı gösterir ve

$$p = (n_1 + n_2)\hat{\gamma}_1^2 + n_2, \quad (2.10)$$

$$q = -(2n_2\hat{\gamma}_1 + (2n_2 - n_1))m_2, \quad (2.11)$$

$$r = \frac{(n_2^2(\hat{\gamma}_1^2+1) - n_1^2(\hat{\gamma}_2^2+1))m_2^2}{n_1+n_2} \quad (2.12)$$

biçimindedir (Forkman, 2005).

Doornbos ve Dijkstra (1983), örneklem DK'sının tersinin dağılımına dayanan bir test geliştirmiştir.

$b_i = \frac{1}{\hat{\gamma}_i}$   $i = 1,2$ , olmak üzere,  $b_w$ ,  $b_1$  ve  $b_2$ 'nin ağırlıklandırılmış ortalamasıdır ve

$$b_w = \frac{n_1 b_1 + n_2 b_2}{n_1 + n_2} \quad (2.13)$$

biçiminde gösterilir.

Bir diğer ortak değişim katsayısı eşitliği, Forkman (2005) tarafından önerilmiştir.

$\hat{\gamma}_p$ , ortak kitle değişim katsayısının bir tahmin edicisidir ve

$$\hat{Y}_p^2 = \frac{\frac{n_1(n_1-1)}{n_1-3} + \frac{n_2(n_2-1)}{n_2-3}}{n_1 b_1^2 + n_2 b_2^2 - \left[ \frac{n_1-1}{n_1-3} + \frac{n_2-1}{n_2-3} \right]} \quad (2.14)$$

biçimindedir. Ortak DK formüllerinden yararlanarak test istatistikleri bulunmuştur (Forkman, 2005).

### 3. ÜSTEL DAĞILIM

İstatistikte, üstel dağılım ailesi geniş bir alanda kullanılmaktadır. En fazla uygulama alanı ise, yaşam testi (life-testing) alanıdır. Yaşam süresi (lifetime) genellikle bir üstel dağılımlı rasgele değişkenle ifade edilir. Üstel dağılımla ifade edilemeyen durumlarda, üstel dağılım ailesindeki farklı dağılım türleri olan Weibull dağılımı, Rayleigh dağılımı, Gumbel dağılımı, Laplace dağılımı, genelleştirilmiş üstel, karışık (mixture) üstel dağılım gibi dağılımlar kullanılmıştır (Johnson et al.,1994).

Üstel dağılımın türlerinden bazıları, bir parametrelili, iki parametrelili ve genelleştirilmiş üstel dağılımdır. Bu çalışmada iki parametrelili üstel dağılım kullanılmıştır.

#### 3.1. İki Parametrelili Üstel Dağılım

X rasgele değişkeni, iki parametrelili üstel dağılıma sahip olsun. Bu durumda X'in olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_x(x; \alpha, \beta) = \frac{1}{\beta} e^{-(x-\alpha)/\beta}, \quad \alpha \leq x; \beta > 0$$

(3.1)

$$= 0, \quad x < \alpha$$

biçimindedir. Bu fonksiyonda,  $\alpha$  ve  $\beta$  parametreleri göstermektedir.

İki parametrelili üstel dağılımın, beklenen değeri, varyansı, dağılım fonksiyonu, değişim katsayısı, moment çıkarıcı fonksiyonu sırasıyla,

$$E(x) = \alpha + \beta \quad (3.2)$$

$$V(x) = \beta^2 \quad (3.3)$$

$$F(x) = 1 - e^{-\frac{(x-\alpha)}{\beta}}, \quad x \geq \alpha \quad (3.4)$$

$$= 0, \quad x < \alpha$$

$$\gamma = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \quad (3.5)$$

$$M_x(t) = E(e^{tX}) = \frac{1}{1 - \beta t} e^{\alpha t} \quad (3.6)$$

biçimindedir. Üstel dağılım, gamma dağılımının özel bir durumudur (Johnson and Kotz, 1970).

### 3.2. Bir Parametrelili Üstel Dağılım

İki parametrelili üstel dağılımda,  $\alpha = 0$  alınırsa bir parametrelili standart üstel dağılım elde edilir (Wikipedia, 2008).

Bir parametrelili üstel dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_x(x; \beta) = \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x}{\beta}}, \quad x \geq 0; \beta > 0 \quad (3.7)$$

$$= 0, \quad x < 0$$

biçimindedir. Bu dağılımın beklenen değeri, varyansı, değişim katsayısı, moment çıkaran fonksiyonu ve karakteristik fonksiyonu sırasıyla,

$$E(x) = \beta \quad (3.8)$$

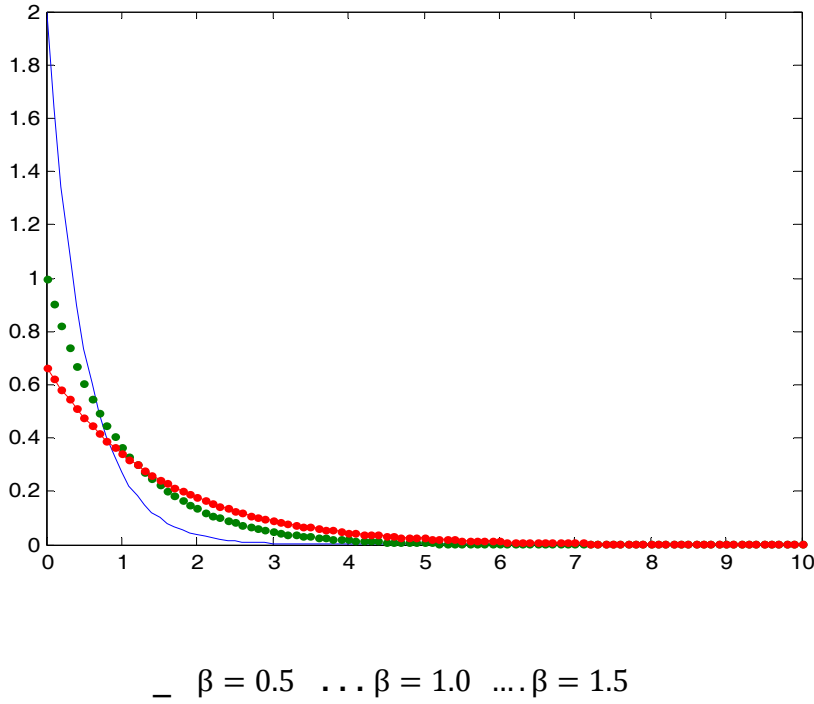
$$V(x) = \beta^2 \quad (3.9)$$

$$\gamma = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\sigma}{\sigma} = 1 \quad (3.10)$$

$$M_x(t) = \frac{1}{1 - \beta t} \quad (3.11)$$

$$\phi_x(t) = \frac{1}{1 - \beta t i} \quad (3.12)$$

biçimindedir. Bir parametrelili üstel dağılım ya da standart üstel dağılım  $[0, \infty)$  aralığında tanımlıdır. Şekil 3.1.'de verilen olasılık yoğunluk fonksiyonu grafiği  $\beta = 0.5, 1.0$  ve  $1.5$  için çizilmiştir.



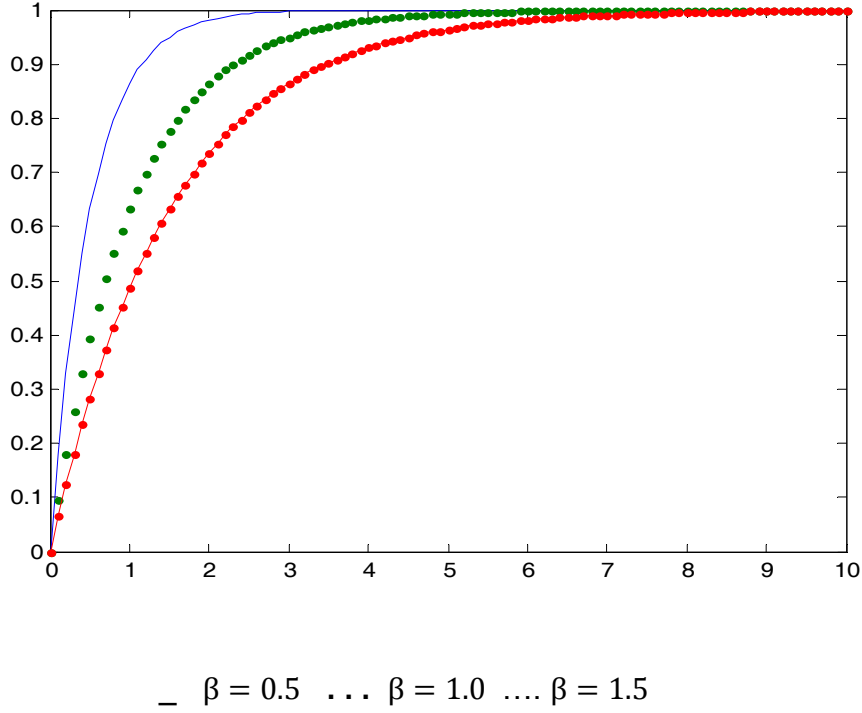
Şekil 3.1. Bir parametrelili üstel dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu grafiği

Bir parametrelili standart üstel dağılım fonksiyonu aşağıda verilmiştir.

$$F(x) = 1 - e^{-\frac{x}{\beta}}, \quad x \geq 0 \quad (3.13)$$

$$= 0, \quad x < 0$$

$\beta = 0.5$   $\beta = 1.0$   $\beta = 1.5$  için dağılım fonksiyonu grafiği Şekil 3.2' deki gibidir.



Şekil 3.2. Bir parametrelili üstel dağılımın dağılım fonksiyonu grafiği

Bir parametrelili üstel dağılım,

$$f(x; \beta) = \beta e^{-\beta x}, \quad x \geq 0, \quad \beta > 0 \quad (3.14)$$

$$= 0, \quad x < 0$$

biçiminde de ifade edilebilir. Fakat kavram karmaşasına neden olmaması açısından ve daha kullanışlı olduğundan birinci gösterimi, bazı istatistikçiler üstel dağılımın standart gösterimi kabul etmişlerdir.

### 3.3. Üstel Dağılımın Uygulama Alanları

Bir Poisson sürecinde, varış zamanları arasındaki geçen zaman için, üstel dağılımın kullanılması gündeme gelir. Üstel dağılım kesikli dağılım olan geometrik dağılımın, sürekli dağılım karşılığı olarak görülebilir (Wikipedia, 2008).

Kuyruk teorisinde üstel dağılım, servis zamanını temsil eden bir rasgele değişkenin olasılık dağılımını modellemek için kullanılmıştır.

Örneğin, bir marketteki müşterilerin gelişleri arasında geçen zaman, bir doktor ofisinde hastaların muayeneleri arasındaki zaman, havaalanındaki pasaport kontrolleri arasındaki zaman, bir banka memurunun hizmet verdiği müşterilerin gelişleri arasındaki zaman ve buna benzer örnekleri arttırmak mümkündür. Güvenirlik uygulamalarında, üstel dağılım, bozulan parçaların kullanım ömürlerini modellemek için kullanılmıştır. Buna örnek olarak, elektrik lambalarının ömürleri, pillerin ömürleri, aletlerin ve transistörlerin ömürleri gibi bir çok örnek verilebilir (Pal et al., 2006).

Aşağıda yaklaşık olarak üstel dağılan değişken örnekleri verilmiştir:

- Bir radyoaktif partikülün çürümesine kadar geçen süre,
- Bir bipli sayacın bipleri arasındaki zaman,
- Bir sonraki telefon konuşmasına kadar geçen zaman,
- Kredi risk modelinde, müşterilerin borçlarını ödeyene kadar geçen zaman.

(Engineering statistics handbook, 2008).

Fizikte, bir yerçekimi sahasında sabit bir sıcaklık ve basınçta bir gaz gözlemlendiğinde, çeşitli moleküllerin yükseklikleri yaklaşık üstel dağılım gösterir. Bu entropi özelliğinin bir sonucudur.

Üstel dağılım hafızasızlık (memoryless) özelliğine sahiptir, örneğin en son olayın oluşma zamanı biliniyor olsun, bu bilgi sonraki olayın ne zaman oluşacağına ilişkin tahminde bulunmaya yardım etmesinin olanağı yoktur.

Bir çok durumda, gözlenen değişkenliği tanımlamak için üstel dağılım kullanılmaktadır. En çok karşılaşılan durumlardan biri, rasgele zaman içinde oluşan olaylardır.

Varsayalım ki, bir şeyin gelecekteki yaşam zamanı üstel dağılıma sahip olsun. Bu anlamda bir rasgele değişken  $T$  üstel dağılmışsa, onun koşullu olasılığı

$$P[T \geq s + t | T > s] = P[T \geq t] , \quad s, t \geq 0 \quad (3.15)$$

biçiminde ifade edilir. Örneğin,

$$P[T \geq 30 + 10 | T > 30] = P[T \geq 10] , \quad s, t \geq 0 \quad (3.16)$$

ilk varışın 30 saniyeden daha fazla sürede olduğu bilinsin, ikinci varışın 10 saniyede ya da daha fazla sürede olma olasılığı, ilk varışın bilinmesinden bağımsızdır. Yani toplam ikinci varışa kadar geçen süre ilk ve ikinci varış sürelerinin toplamının 40'a eşit ya da büyük olma olasılığı, ikinci varışın 10'dan büyük olma olasılığına eşittir. Bu hafızasızlık özelliğinden kaynaklanmaktadır.

Yalnızca üstel dağılım ve geometrik dağılım, hafızasızlık özelliğine sahip olasılık dağılımlarıdır (Wikipedia, 2008).

### 3.4. Üstel Dağılımın Tarihi

1960'larda üstel dağılımdan çekilen örneklemelerden elde edilen tahmin edicilerin çalışmaları, sıralı istatistiklerin çalışmalarıyla yakın bir şekilde ilişkilendirilmiştir. 1952' de Lloyd, sıralı istatistikleri kullanarak bir dağılımın parametrelerinin en iyi doğrusal yansız tahmin edicisini (BLUE) elde etmek için bir yöntem tanımlamıştır. 1953'de Epstein ve Sobel, sağdan kesikli durumda bir parametrelili üstel dağılımın  $\beta = \lambda$  olmak üzere  $\sigma$  parametresinin en çok olabilirlik tahmin edicisinin elde edildiği bir makale yayınlamıştır. Aynı yazarlar, 1954'de iki parametrelili üstel dağılım için 1953'de yaptıkları çalışmayı genişletmiştir. Aynı yıl Sarhan, kesikli olmayan durumda iki parametrelili üstel dağılım için  $\beta = \lambda$  ve  $\theta$ 'nin en iyi doğrusal yansız tahmin edicilerini elde etmek amacıyla Lloyd tarafından elde edilmiş olan yöntemi kullanmıştır. 1955'de, Sarhan, Epstein ve Sobelin sonuçlarını, yalnızca  $\beta = \lambda$ 'nin en iyi doğrusal yansız tahmin edicisini değil, ayrıca en çok olabilirlik tahmin edicisini de geliştirmiştir. 1960'da Epstein, sağdan ve/veya soldan kesikli durumda bir ve iki parametrelili üstel dağılım için  $\beta = \lambda$ 'nin tahmin edicileri için kendi sonuçlarını genişletmiştir (Johnson and Kotz, 1970). Siddiqui, en iyi doğrusal yansız tahmin edicilerin sıralı istatistiklerin optimum bir çiftini elde etmek için Euler-Maclaurin formülüne dayanan bir analitik yöntem geliştirmiştir (Johnson et al., 1994).

### 3.5. İki Parametrelili Üstel Dağılımda Tahmin Ediciler

#### 3.5.1. İki parametrelili üstel dağılımda bir kitle için parametrelerin en çok olabilirlik tahmin edicileri

$x_1, x_2, \dots, x_n$  rasgele örnekleme,  $\text{Exp}(\alpha, \beta)$  dağılımından alınmış olsun. İki parametrelili üstel dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu, Eşitlik (3.1)'deki gibidir. Standart sapmanın ( $\beta$ ) en çok olabilirlik tahmin edicisi için olabilirlik fonksiyonu,

$$L = f(x_1) \dots f(x_n) \quad (3.17)$$

$$= \frac{1}{\beta} e^{-(x_1-\alpha)/\beta} \dots \frac{1}{\beta} e^{-(x_n-\alpha)/\beta}$$

$$= \frac{1}{\beta^n} e^{-\sum_{i=1}^n (x_i-\alpha)/\beta} \quad (3.18)$$

biçimindedir. Olabilirlik fonksiyonunun doğal logaritması alınır,

$$\ell nL = -n \ell n \beta - \frac{1}{\beta} \sum_{i=1}^n (x_i - \alpha)$$

$$= -n \ell n \beta - \frac{1}{\beta} n \bar{x} + n \alpha \frac{1}{\beta} \quad (3.19)$$

elde edilir.  $\alpha$  için tahmin edici bu fonksiyondan bulunamaz, çünkü  $\alpha$ 'nın tanım aralığı  $x$ 'e bağlıdır.  $\alpha$ , tanım aralığı içine girdiğinden, en küçük sıralı istatistik  $\alpha$ 'nın tahmin edicisi olacaktır. Standart sapmanın tahmin edicisini bulmak için ise standart sapmaya göre türev alınır,

$$\frac{\partial \ell nL}{\partial \beta} = -\frac{n}{\beta} + \frac{n \bar{x}}{\beta^2} - \frac{n \alpha}{\beta^2} = 0$$

$$\hat{\beta} = \bar{x} - \hat{\alpha} \quad (3.20)$$

$\hat{\beta}$  için tahmin edici,  $\bar{x} - \hat{\alpha}$ , elde edilmiş olur. Tahmin edicinin yanlı olup olmadığı kontrol edilirse,

$$E(\hat{\beta}) = E(\bar{x} - \hat{\alpha}) = \beta + \alpha - \alpha$$

$$E(\hat{\beta}) = \beta$$

olduğundan,  $\hat{\beta}$  'nin yansız bir tahmin edici olduğu söylenebilir.

### 3.5.2. İki parametrelili üstel dağılımda iki kitle için parametrelerin en çok olabilirlik tahmin edicileri

$x_1, x_2, \dots, x_n$  rasgele örnekleme,  $\text{Exp}(\alpha_1, \beta_1)$  dağılımından,  $y_1, y_2, \dots, y_n$  rasgele örnekleme, ilk kitleden bağımsız olarak  $\text{Exp}(\alpha_2, \beta_2)$  dağılımından çekilmiş olsun. Bu iki dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonları,

$$\begin{aligned} f(x; \alpha_1, \beta_1) &= (1/\beta_1)e^{-(x-\alpha_1)/\beta_1}, & \alpha_1 \leq x, & \beta_1 > 0 \\ &= 0, & x < \alpha_1 \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} f(y; \alpha_2, \beta_2) &= (1/\beta_2)e^{-(y-\alpha_2)/\beta_2}, & \alpha_2 \leq y, & \beta_2 > 0 \\ &= 0, & y < \alpha_2 \end{aligned} \quad (3.22)$$

biçimindedir. Bu iki dağılımın ortalama ve varyansları sırasıyla,

$$E(x) = \alpha_1 + \beta_1, \quad V(x) = \beta_1^2 \quad (3.23)$$

$$E(y) = \alpha_2 + \beta_2, \quad V(y) = \beta_2^2 \quad (3.24)$$

olur. İki dağılımın birleşik olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x, y) = \frac{1}{\beta_1\beta_2} e^{-\frac{(x-\alpha_1)}{\beta_1}} e^{-\frac{(y-\alpha_2)}{\beta_2}} \quad (3.25)$$

biçimindedir. Olabilirlik fonksiyonu,

$$\begin{aligned} L &= f(x_1, y_1)f(x_2, y_2) \dots f(x_{n_1}, y_{n_2}) \\ &= \frac{1}{\beta_1\beta_2} e^{-\frac{(x_1-\alpha_1)}{\beta_1}} e^{-\frac{(y_1-\alpha_2)}{\beta_2}} \dots \frac{1}{\beta_1\beta_2} e^{-\frac{(x_n-\alpha_1)}{\beta_1}} e^{-\frac{(y_n-\alpha_2)}{\beta_2}} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\beta_1^{n_1} \beta_2^{n_2}} e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n_1} (x_i - \alpha_1)}{\beta_1}} e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n_2} (y_i - \alpha_2)}{\beta_2}} \quad (3.26)$$

olarak elde edilir. Olabilirlik fonksiyonunun doğal logaritması,

$$\begin{aligned} \ell nL &= -n_1 \ell n \beta_1 - n_2 \ell n \beta_2 - \frac{1}{\beta_1} \sum_{i=1}^{n_1} (x_i - \alpha_1) - \frac{1}{\beta_2} \sum_{i=1}^{n_2} (y_i - \alpha_2) \\ &= -n_1 \ell n \beta_1 - n_2 \ell n \beta_2 - \frac{1}{\beta_1} n_1 (\bar{x} - \alpha_1) - \frac{1}{\beta_2} n_2 (\bar{y} - \alpha_2) \end{aligned} \quad (3.27)$$

biçimindedir.  $\alpha_1$  ve  $\alpha_2$  için tahmin edicileri elde edilemez, çünkü  $\alpha_1$ ,  $x$ 'e ve  $\alpha_2$ 'de  $y$ 'ye bağımlıdır.  $\alpha_1$  ve  $\alpha_2$  için en çok olabilirlik tahmin edicileri, en küçük sıralı istatistikler olacaktır.  $\beta_1$  ve  $\beta_2$  'ye göre türev alınırsa,

$$\frac{\partial \ell nL}{\partial \beta_1} = -\frac{n_1}{\beta_1} - \left( \frac{-n_1(\bar{x} - \alpha_1)}{\beta_1^2} \right) = 0$$

$$\hat{\beta}_1 = (\bar{x} - \hat{\alpha}_1) \quad (3.28)$$

$$\hat{\beta}_2 = (\bar{y} - \hat{\alpha}_2) \quad (3.29)$$

$\beta_1$  ve  $\beta_2$  'nin tahmin edicileri sırasıyla  $(\bar{x} - \hat{\alpha}_1)$  ve  $(\bar{y} - \hat{\alpha}_2)$  elde edilir. Bu tahmin edicilerin yanlı olup olmadıklarına bakılırsa,

$$E(\hat{\beta}_1) = E(\bar{x} - \hat{\alpha}_1) = \beta_1 + \alpha_1 - \alpha_1$$

$$E(\hat{\beta}_1) = \beta_1$$

$$E(\hat{\beta}_2) = E(\bar{y} - \hat{\alpha}_2) = \beta_2 + \alpha_2 - \alpha_2$$

$$E(\hat{\beta}_2) = \beta_2$$

elde edildiğinden  $\hat{\beta}_1$  ve  $\hat{\beta}_2$  'nin her ikisinin de yansız tahmin ediciler olduğu söylenebilir.

### 3.5.3. İki parametrelili üstel dağılımda iki kitle için ortak standart sapmanın en çok olabilirlik tahmin edicisi

$x_1, x_2, \dots, x_n$ , rasgele örnekleme  $\text{Exp}(\alpha_1, \beta_1)$  dağılımından,  $y_1, y_2, \dots, y_n$  rasgele örnekleme, ilk kitleden bağımsız olarak  $\text{Exp}(\alpha_2, \beta_2)$  dağılımından çekilmiş olsun. Bu iki dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonları Eşitlik (3.21) ve (3.22) 'de verildiği gibidir. Bu iki dağılımın birleşik olasılık yoğunluk fonksiyonu, Eşitlik (3.25)'de ve olabilirlik fonksiyonu ise, Eşitlik (3.26) 'da verildiği gibidir. Standart sapmaların ortak olduğu varsayılırsa,

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta_0$$

olur ve  $\beta_0$ , ortak standart sapmadır. Eşitlik (3.26)'da her standart sapma yerine, ortak standart sapma konulursa, olabilirlik fonksiyonu,

$$L = \frac{1}{\beta_0^{n_1+n_2}} e^{-\frac{1}{\beta_0} [\sum_{i=1}^{n_1} (x_i - \alpha_1) + \sum_{i=1}^{n_2} (y_i - \alpha_2)]} \quad (3.30)$$

biçiminde elde edilir. Bu fonksiyonun doğal logaritması alınırsa,

$$\ell nL = -(n_1 + n_2) \ell n \beta_0 - \frac{1}{\beta_0} [\sum_{i=1}^{n_1} (x_i - \alpha_1) + \sum_{i=1}^{n_2} (y_i - \alpha_2)] \quad (3.31)$$

elde edilir. Ortak standart sapmaya göre türev alınırsa,

$$\frac{\partial \ell nL}{\partial \beta_0} = -(n_1 + n_2) \frac{1}{\beta_0} + \frac{1}{\beta_0^2} [\sum_{i=1}^{n_1} (x_i - \alpha_1) + \sum_{i=1}^{n_2} (y_i - \alpha_2)] = 0$$

$$\hat{\beta}_0 = \frac{n_1(\bar{x} - \hat{\alpha}_1) + n_2(\bar{y} - \hat{\alpha}_2)}{n_1 + n_2}$$

$$\hat{\beta}_0 = \frac{n_1 \hat{\beta}_1 + n_2 \hat{\beta}_2}{n_1 + n_2} \quad (3.32)$$

elde edilir.  $\beta_0$  'nin tahmin edicisi  $\frac{n_1 \hat{\beta}_1 + n_2 \hat{\beta}_2}{n_1 + n_2}$  'dir . Bu tahmin edicinin yanlı olup olmadığına bakılırsa,

$$\begin{aligned}
E(\hat{\beta}_0) &= E\left(\frac{n_1\hat{\beta}_1+n_2\hat{\beta}_2}{n_1+n_2}\right) \\
&= E\left(\frac{n_1(\bar{x}-\hat{\alpha}_1)+n_2(\bar{y}-\hat{\alpha}_2)}{n_1+n_2}\right) \\
&= \frac{1}{n_1+n_2} [n_1(E(\bar{x}) - \alpha_1) + n_2(E(\bar{y}) - \alpha_2)] \\
&= \frac{1}{n_1+n_2} [n_1((\mu_1 + \beta_1) - \alpha_1) + n_2((\mu_2 + \beta_2) - \alpha_2)] \\
\beta_1 &= \beta_2 = \beta_0 \\
&= \beta_0
\end{aligned}$$

elde edilir ve ortak standart sapmanın tahmin edicisinin, yansız bir tahmin edici olduğu bulunmuş olur.

#### 4. GÜVENİRLİK

Bilim ve teknolojinin gelişimi, gün geçtikçe katlanarak büyümektedir. Kamu kurumları ve sanayi, performans, emniyet, maliyetle birlikte güvenilirliği (reliability) arttırmak için, ileri bilimsel yöntemlere daha da güvenmektedir. Maalesef gerçek dünyanın politika, maliyet, performans ve diğer kısıtlamaları, geleneksel yöntemlerle elde edilen ölçümlerin etkinliğinin ve doğruluğunun hesaplanmasında, araştırmacıları zorlamaktadır. Benzer kısıtlamalar nedeniyle, güvenilirlik evrimsel bir değişime uğramak zorundadır. Bu evrim sürecinin ilk adımı, yeni yüzyılın gereksinimleriyle buluşmak için güvenilirlik hesaplamalarından sorumlu bilim adamlarının sorumluluklarını ve düşüncelerini yeniden yorumlamaktır. Bundan sonraki adım ise, güvenilirlik ölçümü ve ilişkili olduğu, uzman bilgisi, ortak hafıza, matematiksel modelleme ve benzetim gibi yardımcı kaynakları ve deneysel yöntemlerin her ikisini kullanarak, bir disiplinler arası yaklaşım kurmaktır (Keller-McNulty and Wilson, 2002).

Güvenirlik ne demektir? İlk olarak güvenilirlik, endüstride stres-mukavemet (stress-strength) problemlerini çözmek için kullanılmıştır. Dolayısıyla, güvenilirlik tanımına stres-mukavemet problemlerini açıklayarak başlamak faydalı olacaktır.

Stres terimi yirminci yüzyılın ikinci yarısında, modern insanın kullandığı bir olgu olarak karşımıza çıkmaktadır. Sürekli stres altındayız ve üstesinden gelmek için her zaman mukavemete sahip değiliz. Son zamanlarda stres-mukavemet ilişkisi bilimin bir çok dalında, örneğin psikoloji, ilaç, eğitim ve bakım ürünleri endüstrisinde çalışılmaktadır. Stres terimi iki ayrı anlamda kullanılmıştır; biri mühendislerin çalıştığı mekaniksel ve yapısal stres ve diğeri psikolojik stresdir (Kotz et al., 2003).

Psikolojide stres; vücudun bir kısmında meydana gelen baskının, vücudun tamamının her biriminde meydana getirdiği baskıya denir. Mühendislikte ise; eski çağlarda Yunanlılar ve Romalılar büyük yapılar inşa ederken, kullandıkları malzemenin mukavemet bilgisini kullanmışlardır. Fakat modern bilim, Galileo Galilei (1564-1642) ile başlamıştır ve ilk matematikçi, fizikçi ve mühendis olarak bu sahayı oluşturmuş ve geliştirmiştir. Son zamanlarda konu, mühendislik okullarında, reklam, endüstri ve kamu destekli laboratuvarlarda ve çeşitli derneklerde araştırılmaktadır. Bu derneklerin ilki

1943 yılında, yöntem ve uygulamaları diğer enstitülere yaymak için organize edilen Deneysel Stres Analiz Derneğidir (Kotz et al., 2003).

Güvenirlilik, R harfi ile gösterilir ve  $P(X<Y)$ ,  $P(X>Y)$  ve buna benzer olasılıkların hesaplanmasıdır. Bu alandaki çalışmalar stres-mukavemet modelleri olarak isimlendirilmiştir. Bu tür olasılıklar mühendislikte güvenirlilik teorisinde, psikolojide, genetikde, klinik denemelerinde hesaplanmaktadır (Kotz et al., 2003).

Deneysel bilimlerde güvenirlilik ve geçerlilik arasındaki farkı açığa kavuşturmak için, yaygın kullanılan baskül örneği verilmiştir. 200 kilo ağırlığında biri, basküle 10 kez çıksın ve her defasında ağırlık 200 kg okunsun, bu durumda ölçümler güvenilir ve geçerlidir. Eğer her defasında 150 kg okunursa, ölçümler geçerli değildir fakat hala güvenilirdir, çünkü ölçümler sabittir. Ölçek 200 kg civarında (190, 205, 192, 209 gibi) değişiyorsa, ölçüm geçerlidir fakat güvenilir değildir (Wikipedia, 2008).

Güvenirlilik çalışmaları, X rasgele değişkeninin, bağımsız Y rasgele değişkeninden daha küçük ya da daha büyük olması olasılığını tahmin etme problemidir. Y rasgele değişkeni, bir alet kitlesinde, parçadan parçaya değişen mukavemeti temsil eder. Güvenirlilik –rasgele olarak seçilen aletlerin başarılı performans gösterme olasılığıdır-  $P(Y>X)$  ile tanımlanır. Biometride, X, A ilacı ile tedavi edilmiş olan bir hastanın tedavi sonrası yaşadığı süreyi gösterir ve Y, B ilacı ile tedavi edilen hastanın tedavi sonrası yaşadığı süreyi gösterir. İlacın seçimi hastaya bırakılırsa, hasta tercihini  $P(Y>X)$  olasılığının 0.5'den büyük olup olmamasına göre yapacaktır (Pal et al., 2005).

Bir diğer örnek, roket motoru deney verisinde, X motor operasyon basıncı, Y motor odacık patlama mukavemetidir. Araştırmacı, roket motorunun bozulma olasılığı ile ilgilenir. İki uygulamayı karşılaştırmak için,  $H: \mu_1 - \mu_2 > \delta$  hipotezi ile test etmektense, birimden bağımsız, R güvenirlilik ile test etmek daha bilgi verici olacaktır ( Weerahandi and Johnson, 1992).

$P(X<Y)$  olasılığı, bir bileşenin güvenirliliğine değer biçmek olarak tanımlanabilir. X rasgele değişkeni, bir makinaya uygulanan stresi ve Y ise makinanın gösterdiği mukavemeti gösterir. Bu basit senaryoya göre, stres, mukavemeti aşarsa makina

bozular. Bu durumda güvenilirlik, makinanın bozulmama olasılığı olarak tanımlanmıştır:  $P(X<Y)$  (Kotz et al., 2003).

Güvenirliğin tanımını ilk kez Birnbaum yapmış ve Birnbaum ve McCarty geliştirmiştir (Kotz et al., 2003).

Birnbaum, Esary ve Saunders tarafından, “ Çoklu-makina sistemleri ve onların yapıları ve güvenilirlikleri” adlı makale ile birlikte 1961’de ayrı bir disiplin olarak matematiksel güvenilirlik teorisi geliştirilmiştir. Bundan önce matematikçiler, mühendislikte güvenilirlik problemleri için istatistik, olasılık, ve kuyruk kuramı gibi standart matematiksel yöntemlere başvuruyordu.

İlk İngiliz reklam uçağı Havilland’ın düşmesi, aynı dönemde Amerikan roketlerinin de düşmesine denk gelmesi nedeniyle 1950’lerde güvenilirlik mühendislik alanında önemli bir konu olmuştur. Mühendisler yaşam testiyle ilgileniyorlardı. Epstein ve Sobel’ in 1953’ de üstel dağılım üzerine yazdığı makale, bu konuda en büyük katkıyı sağlayan kilometre taşlarından biriydi. Ancak 1961’de Birnbaum, Esary ve Saunders’in makalesi, güvenilirlik konusunun ayrı bir alan olarak tanımlanmasını sağlamıştır. Bu makalede güvenilirliğin teorisi ele alınmıştır. 1965’de Matematiksel Güvenirlik Teorisi kitabı yazılmıştır (Barlow, 2002).

Daha sonra makale başlıklarında  $P(X<Y)$  ifadesinin yer aldığı görülmüştür. Stres-mukavemet ifadesi ilk kez Church ve Harris, makalesinin başlığında görülmüştür (Kotz et al., 2003).

$P(X<Y)$ 'yi belirlemeye yönelik, önemli sayıda makale bulunmaktadır. Bu makaleler,  $X$  ve  $Y$  nin çeşitli varsayımları altında örneklemlerden etkili ve güvenilir tahminler elde etmeye yöneliktir. Çalışmaların çoğunda her iki rasgele değişken aynı aileden dağılımlara sahiptir (örneğin normal, üstel, log-normal, Weibull) ve daha önemlisi rasgele değişkenler bağımsızdır.  $X$  ve  $Y$ 'nin süre olarak alınıp güvenilirlik ölçümü yapılması çok çalışılmamıştır. Yazarlar yapılan uygulamalara dayanarak şu konuya dikkat çekmiştir; bir aletin gerçekten dayanıklı bir ömre sahip olduğunu göstermek için güvenilirliğin 1'e yakın olması gerekmektedir. Bu sonucu elde edebilmek için, güvenilirlik

tahminlerinin yeterli tahmin olabilmesi için çok büyük örneklem büyüklükleri kullanmak gerekebilir (Kotz et al., 2003).

Güvenirlilik genellikle makinenin bir parçasının görevini iyi yapıp yapmadığının belirlenmesinde kullanılmaktadır. Örneğin, bir uçakta birden fazla motor bulundurma gereksinimi, tek motora itimat edilmemesinden kaynaklanmaktadır. Aynı mantıkla, bir sistemin düşük güvenirliliği belirlenmişse, bunu telafi etmek için dışdan desteklere başvurulmuştur (Lindqvist and Doksum, 2002).

Güvenirlilik, bir maddenin yaşam döngüsü boyunca, görevini yerine getirmenin olasılığı olarak karakterize edilmiştir ve matematiksel olarak 'Güvenirlilik ne demektir?' sorusu ilk kez, Richard E. Barlow ve Frank Proschan, 1964'de yazdıkları "Matematiksel Güvenirlilik Teorisi" kitabının ön yüzünde sorulmuştur ve onların verdiği cevap hala çok uygun ve yerinde bir tanım olarak literatürde yer almaktadır (Lindqvist and Doksum, 2002).

Genel anlamda güvenirlilik çalışmaları, ortalama yaşam veya daha genel olarak sistem ya da bileşenlerinin yaşam dağılımlarının olasılıklarını tahmin etmek, yorumlamak veya optimize etme problemlerinin çözümüne yönelik yöntemler ya da matematiksel modelleri içeren çalışmalardır. Yine güvenirlilik, sistemin parçalarının doğru çalışıp çalışmadığına ilişkin olasılıkları, belli bir zamanda ya da aralıkta düzgün çalışması olasılığı gibi konuları içerir. Güvenirlilik, bakım, yedek parça değişimi, tamir, veya gözden geçirme gibi durumlara uygulanabilir. Böylece güvenirlilik problemlerinin çözümü, bakım politikasını izleme açısından kararlar üzerinde etkili olabilir (Lindqvist and Doksum, 2002).

Güvenirlilik teorisinin yapı taşları son elli yılda inşa edilmiştir. Bundan sonra bu alanda önemli gelişmeler sağlanmıştır. Bugünkü araştırmaların çoğu, kalite ve ürün geliştirmeye yöneliktir, güvenirlilik teorisi inşaat, nükleer güç santralleri, deniz petrol endüstrisi ve modern uçakların üretim ve tasarımı gibi önemli sahalarda uygulanarak bu özellikler sağlanmaya çalışılmaktadır. Ayrıca son yıllarda, güvenirlilik üzerine çalışan araştırmacılar ve biyoistatistik alanında çalışan araştırmacılar arasında verimli ve giderek artan bir iş birliği görülmektedir (Lindqvist and Doksum, 2002).

Güvenirliliğin bir başka tanımı, bazı özel şartlarda çalışan sistemin verilen bir zaman aralığında tasarlanan fonksiyonları yerine getirme olasılığıdır. Güvenirlilik fonksiyonu:

$$R(t) = P(T > t) = \int_t^{\infty} f(x)dx = 1 - F(t)$$

olarak belirlenmiştir. Güvenirlik yöntemleri endüstri, toplu üretilen ürünler ve tüketici malları gibi alanlara uygulanmıştır. Bununla birlikte bugünün problemleri daha karmaşıktır çünkü sistemler, nükleer silahlar, altyapı sistem ağları, ileri bilgisayar kodları, jumbo jetler gibi alanları içermektedir (Keller-McNulty and Wilson, 2002).

Gupta, Ramakrishnan ve Zhou (1999), X ve Y bağımsız normal dağılımlı olmak üzere, değişim katsayılarının eşitliği varsayımı altında R' nin tahmin problemini incelemişlerdir.

Choa, bir parametrelili üstel dağılım durumunda en çok olabilirlik tahmin edicilerine dayalı bir çok yöntemi karşılaştırmıştır. Kunchur ve Munoli, üstel dağılımlar üzerine dayanan bir çok bileşenli stres-mukavemet modeli için tahmin problemini ele almışlardır. Aminzadeh, stres-mukavemet için bazı açıklayıcı değişkenler olması durumunda R'nin güven aralıkları için yaklaşık bir yöntem geliştirmiştir (Krishnamoorthy et al., 2006).

Son zamanlarda Baklizi ve El-Masri,  $\alpha_1$  ve  $\alpha_2$  parametreleri ortak olduğunda, iki parametrelili üstel dağılımlı X ve Y bağımsız rasgele değişkenleri için R'nin shrinkage tahmin edicisini araştırmışlardır (Krishnamoorthy et al., 2006).

Biomedikal çalışmalarda, X rasgele değişkeni bir ilaç türüyle tedavi edilen bir hastanın kalan yaşam süresini ve Y bir diğer ilaçla tedavi edilen hastanın kalan yaşam süresini gösterdiğinde  $Pr(X < Y)$ 'nin 0.5' den daha büyük ya da küçük olmasıyla ilgilenilir (Baklizi, 2008).

Yaşam analizinde, X kontrol grubu ve Y deneme grubunun cevabı olmak üzere, R, denemenin bir ölçümü olarak yorumlanabilir (Baklizi, 2006).

Güvenirlik sahasındaki gelişmeler tam veri, açıklayıcı değişkenlerle birlikte sansürlenmiş veri türlerini kapsamaktadır. Bu veri türlerinden biri, var olan gözlem değerinden daha büyük ya da daha küçük gözlemlerin kaydedilmesiyle elde edilen veri türüdür. Bu türde veriye rekor veriler (record data), rekor değerler (record values), rekor istatistikleri (record statistics) veya rekorlar (records) adı verilir. Son yıllarda rekor değerler üzerine bir çok çalışma yapılmıştır. Bu çalışmalar çeşitli yaşam zamanı verileri üzerine

yapılmıştır. Baklizi, hem stres hem de mukavemet ölçümlerinin rekor değerlerle elde edildiği stres-mukavemet modelleri geliştirmiştir. Baklizi (2008), üstel dağılımdan iki bağımsız örnek olarak, stres-mukavemet modelleri için nokta tahminleri ve aralık tahmini yapmıştır. Bir parametrelili üstel dağılım gibi iki parametrelili üstel dağılımı da düşünerek, hem  $\alpha$  parametrelerini hem de  $\beta$  parametrelerini ortak varsayarak, en çok olabilirlik tahmin edicilerini ve güven aralıklarını üretmiştir (Baklizi, 2008).

Kotz, Lumel'skii ve Pensky (2003)'de ifade edildiği gibi, iki parametrelili üstel dağılım durumu önemlidir, çünkü birebir dönüştürmelerle elde edilen Pareto ve güç dağılımlarında güvenilirlik parametresi için güven aralıklarının oluşturulmasında kullanılır.

#### 4.1. İki Parametrelili Üstel Dağılımda Güvenirlik

##### 4.1.1. İki parametrelili üstel dağılımda $R = P(X > Y)$

$X \sim \text{Exp}(\alpha_1, \beta_1)$  ve  $Y \sim \text{Exp}(\alpha_2, \beta_2)$  bağımsız dağılıyor olsun.  $X$ 'in olasılık yoğunluk fonksiyonu  $f(x; \alpha_1, \beta_1)$  ve  $Y$ 'nin olasılık yoğunluk fonksiyonu  $f(y; \alpha_2, \beta_2)$  olsun. Burada olasılık yoğunluk fonksiyonları Eşitlik (3.21) ve (3.22)'de verildiği gibidir.  $R = P(X > Y)$ , güvenilirlik parametresi, aşağıda yer alan integral ile elde edilir. Buradaki integral  $\{(x, y): x > \alpha_1, y > \alpha_2, x > y\}$  aralığına göre tanımlanmalıdır.

Eğer  $\alpha_1 > \alpha_2$  ise,  $R$  güvenilirlik parametresi,

$$R = P(X > Y) = \int_{\alpha_1}^{\infty} \int_y^{\infty} \frac{1}{\beta_1 \beta_2} e^{-\frac{(x-\alpha_1)}{\beta_1} - \frac{(y-\alpha_2)}{\beta_2}} dx dy$$

$$+ \int_{\alpha_2}^{\alpha_1} \int_{\alpha_1}^{\infty} \frac{1}{\beta_1 \beta_2} e^{-\frac{(x-\alpha_1)}{\beta_1} - \frac{(y-\alpha_2)}{\beta_2}} dx dy \quad (4.1)$$

$$= \frac{1}{\beta_2} \int_{\alpha_2}^{\alpha_1} e^{-\frac{(y-\alpha_2)}{\beta_2}} dy + \frac{1}{\beta_2} \int_{\alpha_1}^{\infty} e^{-\frac{(y-\alpha_1)}{\beta_1}} e^{-\frac{(y-\alpha_2)}{\beta_2}} dy$$

$$= 1 - \frac{\beta_2 e^{-\frac{(\alpha_2-\alpha_1)}{\beta_2}}}{\beta_1 + \beta_2} \quad (4.2)$$

biçimindedir. Eğer  $\alpha_1 \leq \alpha_2$  ise,  $R$  güvenilirlik parametresi,

$$\begin{aligned}
R &= P(X > Y) = \int_{\alpha_2}^{\infty} \int_y^{\infty} \frac{1}{\beta_1 \beta_2} e^{-\frac{(x-\alpha_1)}{\beta_1} - \frac{(y-\alpha_2)}{\beta_2}} dx dy \\
&= \frac{1}{\beta_2} \int_{\alpha_2}^{\infty} e^{-\frac{(y-\alpha_1)}{\beta_1}} e^{-\frac{(y-\alpha_2)}{\beta_2}} dy \\
&= \frac{\beta_1 e^{-\frac{(\alpha_1-\alpha_2)}{\beta_1}}}{\beta_1 + \beta_2}.
\end{aligned} \tag{4.3}$$

olarak elde edilir. Dolayısıyla güvenilirlik parametresi R ,

$$R = \left(1 - \frac{\beta_2 e^{(\alpha_2 - \alpha_1)/\beta_2}}{\beta_1 + \beta_2}\right) I_{(\alpha_1 > \alpha_2)} + \left(\frac{\beta_1 e^{-\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\beta_1}}}{\beta_1 + \beta_2}\right) I_{(\alpha_1 \leq \alpha_2)}$$

biçiminde ifade edilebilir ve burada  $I_{(.)}$  gösterge fonksiyonudur. Diğer bir gösterimle R,

$$R = P(X > Y) = \begin{cases} 1 - \frac{\beta_2 e^{(\alpha_2 - \alpha_1)/\beta_2}}{\beta_1 + \beta_2} & , \alpha_1 > \alpha_2 \\ \frac{\beta_1 e^{-\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\beta_1}}}{\beta_1 + \beta_2} & , \alpha_1 \leq \alpha_2 \end{cases} \tag{4.4}$$

olarak da ifade edilebilir. Eğer  $\alpha_1 = \alpha_2$  ise, R güvenilirlik parametresi  $\frac{\beta_1}{(\beta_1 + \beta_2)}$  olur (Krishnamoorthy et al., 2006).

Güvenirlik parametresinin tahmin edicisi ise,

$$\hat{R} = P(X > Y) = \begin{cases} 1 - \frac{\hat{\beta}_2 e^{(\hat{\alpha}_2 - \hat{\alpha}_1)/\hat{\beta}_2}}{\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2} & , \hat{\alpha}_1 > \hat{\alpha}_2 \\ \frac{\hat{\beta}_1 e^{-\frac{\hat{\alpha}_1 - \hat{\alpha}_2}{\hat{\beta}_1}}}{\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2} & , \hat{\alpha}_1 \leq \hat{\alpha}_2 \end{cases} \tag{4.5}$$

biçiminde olacaktır.

#### 4.1.2. İki parametrelili üstel dağılımda $R=P(X<Y)$

$X \sim \text{Exp}(\alpha_1, \beta_1)$  ve  $Y \sim \text{Exp}(\alpha_2, \beta_2)$  bağımsız dağılıyor olsun.  $X$ 'in olasılık yoğunluk fonksiyonu  $f(x; \alpha_1, \beta_1)$  ve  $Y$ 'nin olasılık yoğunluk fonksiyonu  $f(y; \alpha_2, \beta_2)$  olsun. Olasılık yoğunluk fonksiyonları Eşitlik (3.21) ve (3.22)' de verildiği gibidir.  $R=P(X<Y)$ , güvenilirlik parametresi, aşağıda yer alan integral ile elde edilir. Buradaki integral  $\{(x, y): x > \alpha_1, y > \alpha_2, x < y\}$  aralığına göre tanımlanmalıdır.

Eğer  $\alpha_1 > \alpha_2$  ise,  $R$  güvenilirlik parametresi,

$$R = \frac{1}{\beta_1\beta_2} \int_{\alpha_1}^{\infty} \int_x^{\infty} e^{-\frac{(x-\alpha_1)}{\beta_1} - \frac{(y-\alpha_2)}{\beta_2}} dy dx \quad (4.6)$$

$$= \frac{\beta_2}{\beta_2 + \beta_1} e^{\frac{1}{\beta_2}(\alpha_2 - \alpha_1)} \quad (4.7)$$

biçiminde elde edilir.

$\alpha_1 \leq \alpha_2$  olduğu durumda  $R$ 'yi elde etmek için,

$$P(X < Y) = 1 - P(X \geq Y)$$

kullanılır ve aşağıdaki formülasyon elde edilir.

$$R = P(X < Y) = \begin{cases} \frac{\beta_2}{\beta_1 + \beta_2} e^{\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\beta_2}} & , \alpha_1 > \alpha_2 \\ 1 - \frac{\beta_1}{\beta_1 + \beta_2} e^{\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\beta_1}} & , \alpha_1 \leq \alpha_2 \end{cases} \quad (4.8)$$

(Pal et al., 2005).  $X < Y$  iken, Eşitlik (4.8)'deki formülde tahmin ediciler yerine konularak  $R$  parametresinin tahmin edicisi,

$$P(X < Y) = \begin{cases} \frac{\bar{y}-y_{(1)}}{(\bar{x}-x_{(1)})+(\bar{y}-y_{(1)})} e^{\frac{y_{(1)}-x_{(1)}}{\bar{y}-y_{(1)}}} & , \hat{\alpha}_1 > \hat{\alpha}_2 \\ 1 - \frac{\bar{x}-x_{(1)}}{(\bar{x}-x_{(1)})+(\bar{y}-y_{(1)})} e^{\frac{x_{(1)}-y_{(1)}}{\bar{x}-x_{(1)}}} & , \hat{\alpha}_1 \leq \hat{\alpha}_2 \end{cases} \quad (4.9)$$

biçiminde elde edilir.

#### 4.1.3. İki parametrelü üstel dağılımın farklı bir formuyla $R = P(X < Y)$

$X \sim \text{Exp}(\alpha_1, \beta_1)$  ve  $Y \sim \text{Exp}(\alpha_2, \beta_2)$  bağımsız rasgele değişkenler olsun. İki parametrelü üstel dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$\begin{aligned} f_x(x; \alpha, \beta) &= \beta e^{-\beta(x-\alpha)} , & \alpha \leq x ; \beta > 0 \\ &= 0 , & x < \alpha \end{aligned} \quad (4.10)$$

biçimindedir. İki kitle için ise,

$$\begin{aligned} f_x(x; \alpha_1, \beta_1) &= \beta_1 e^{-\beta_1(x-\alpha_1)} , & \alpha_1 \leq x ; \beta_1 > 0 \\ &= 0 , & x < \alpha_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_y(y; \alpha_2, \beta_2) &= \beta_2 e^{-\beta_2(y-\alpha_2)} , & \alpha_2 \leq y ; \beta_2 > 0 \\ &= 0 , & y < \alpha_2 \end{aligned}$$

biçimindedir. Bu durumda  $R$ , Eşitlik (4.1)'deki gibi integral  $\{(x, y): x > \alpha_1, y > \alpha_2, x < y\}$  aralığında hesaplanmalıdır.

Eğer  $\alpha_1 > \alpha_2$  ise, integral aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned} R &= \beta_1 \beta_2 \int_{\alpha_1}^{\infty} e^{-\beta_1(x-\alpha_1)} \left[ \int_x^{\infty} e^{-\beta_2(y-\alpha_2)} dy \right] dx \\ &= \int_{\alpha_1}^{\infty} \beta_1 e^{-x(\beta_1+\beta_2)+\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2} dx \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$= \frac{\beta_1}{\beta_1 + \beta_2} e^{-\beta_2(\alpha_1 - \alpha_2)} \quad (4.12)$$

Eğer  $\alpha_1 \leq \alpha_2$  ise, basit bir formülle,

$$P(X < Y) = 1 - P(X \geq Y)$$

$$R = 1 - \frac{\beta_2}{\beta_1 + \beta_2} e^{-\beta_1(\alpha_2 - \alpha_1)} \quad (4.13)$$

şeklinde elde edilir.

Sonuç olarak,

$$R = P(X < Y) = \begin{cases} \frac{\beta_1}{\beta_1 + \beta_2} e^{-\beta_2(\alpha_1 - \alpha_2)} & , \alpha_1 > \alpha_2 \\ 1 - \frac{\beta_2}{\beta_1 + \beta_2} e^{-\beta_1(\alpha_2 - \alpha_1)} & , \alpha_1 \leq \alpha_2 \end{cases} \quad (4.14)$$

elde edilir.

$\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$  parametrelerinin, tümü ya da bazıları bilinmediğinde, bilinmeyen parametreler en çok olabilirlik tahmin edicileriyle ( $\hat{\alpha}_1 = x_{(1)}, \hat{\alpha}_2 = y_{(1)}, \hat{\beta}_1 = (\bar{x} - x_{(1)})^{-1}$  ve  $\hat{\beta}_2 = (\bar{y} - y_{(1)})^{-1}$ ) yer değiştirdiğinde, R'nin tahmin edicisi elde edilmiş olur (Kotz et al., 2003).

Örneğin parametrelerin tümü bilinmiyorsa, R'nin en çok olabilirlik tahmin edicisi,

$$\hat{R} = \begin{cases} \frac{\bar{y} - y_{(1)}}{\bar{x} + \bar{y} - x_{(1)} - y_{(1)}} \exp\left(-\frac{x_{(1)} - y_{(1)}}{\bar{y} - y_{(1)}}\right) & , \quad x_{(1)} > y_{(1)} \\ 1 - \frac{\bar{x} - x_{(1)}}{\bar{x} + \bar{y} - x_{(1)} - y_{(1)}} \exp\left(-\frac{y_{(1)} - x_{(1)}}{\bar{x} - x_{(1)}}\right) & , \quad x_{(1)} \leq y_{(1)} \end{cases} \quad (4.15)$$

biçiminde elde edilir.

## 5. REKOR DEĞERLER

Rekor değer kavramı, yeni adlandırılan bir veri türü olarak karşımıza çıkmaktadır. Elli yıllık geçmişi olsa da, son on yıllık süreç içinde büyük gelişme göstermiştir. Konu, son yıllarda çeşitli dağılımlar için ve güvenilirlik gibi analizlerde ele alınmıştır. Bazı formülasyonlar hakkında hala fikir ayrılıkları ve tartışmalar bulunmaktadır. Dolayısıyla rekor değerlere ilişkin teorik yapı henüz oturmamıştır ve çalışmalar araştırmacılar tarafından hızla devam etmektedir (Ahsanullah, 2004).

Rekor değerleri anlamak için bir örnek vererek açıklamaya çalışalım. Bir baskül düşünölsün öyle ki, üstüne tartmak için bir şey konulduğunda, yayı tekrar eski haline geri dönmessin. Mesela bir nesne konulduğunda, doğru olarak tartсын fakat, nesneyi kaldırdığımızda, ibre artık eski haline geri dönmessin. Son tartılan değer neyse onu göstersin. Dolayısıyla ikinci nesne konduğunda, eğer bir öncekinden ağırsa ibre ilerleyecektir, fakat bir öncekinden hafifse, bu nesnenin ağırlığını tartamayacaktır. Bu durumda sadece ilk tartılan nesneden daha ağır olan nesnelere veri olarak kaydedilecektir. İşte bu değerlere rekor değerler denilmektedir. Bir diğere örnek, bir nehirdeki, farklı yerlerdeki su seviyesi olsun. İlgilenilen değer, su seviyesinin her günkü yükselme miktarı olsun.  $i$  nehirdeki bölgeyi göstersin,  $j$  ise ölçüm yapılan günü göstersin,  $X_{ij}$  ise  $i$ . bölgede  $j$ . gün alınan en yüksek ölçümü göstersin. Bu durumda  $X_{ij}$ , her bölgedeki en yüksek su seviyesini gösterecektir. Bu değerlere artan (upper) rekor değerler denir. Kaydedilen değer bir öncekinden daha düşük ise bu değerlere azalan rekor değerler denir. Örneğin; atletizmde 100m koşusunda, bir öncekinden daha az sürede koşan rekor kırmış olur ve bu süreler azalan (lower) rekor değerler olarak elde edilir (Ahsanullah, 2004).

Chadler, rekor değerler, rekor zamanları ve rekor aralık (inter records) zamanları tanıtmıştır. Ayrıca, rasgele değişken olarak, sonlu rekor aralık zamanlarının beklenen değerlerinin herhangi verilen bir dağılımı için ilgili sonuçları ispatlamıştır. Feller, risk problemlerinde rekor değerlerin bazı örneklerini vermiştir (Ahsanullah, 2004).

Rekor değerler, gözlemlerin oluşum sırasına göre belirlendiği için sıralı istatistikler olarak görülebilir. Otuz yılı aşkın bir süredir, bu konuda çok sayıda makalenin yayınlanmış olduğu görülmektedir. Bunun nedeni günlük yaşamda sıklıkla karşılaşıyor olunmasıdır ve özellikle kayıt gerektiren durumlarda ya da yinelenen olaylarda rekor değerler kullanılmaktadır (Jaheen, 2005).

Zamana bağlı olaylarda ve yaşam analizinde, istatistiksel modeller ve yöntemler çok geniş bir sahada kullanılmıştır. Bunların başlıcaları, tıp bilimleri, mühendislik, çevresel bilimler, ekonomik veriler, aktüeryal bilimler, yönetim ve sosyal bilimler gibi alanlardır (Jaheen, 2005).

İstatistikçiler, ardışık olaylar üzerine rekor değerlerin davranışlarını çalışmışlar ve elde ettikleri bulguları çeşitli olaylara uygulamışlardır. Bu alanlar küresel ısınma, atletik performans kayıtları, trafik, ve tolerans testi gibi alanlardır.

Gerçek sayıların bir kümesi  $\{X_m\}_{m=1}^M$  olsun.  $n > 1$  olmak üzere,  $R_n$ , n. rekor değeri,  $L_n$  ise n. rekor değer kaydedilme anındaki sırasını gösterecektir. Bu durumda,

$$L_n = \min\{m: X_m > X_{L_{n-1}}\}$$

$$R_n = X_{L_n}$$

biçimindedir. Örnek verilecek olursa, her yıl aynı tarihte belirlenen bir bölgede ortalama günlük hava sıcaklığı Fahrenheit olarak kaydedilmiş olsun. Bu kayıta ilişkin veriler aşağıdadır.

$$\{65,61,68,69,63,67,64,66, \dots\}$$

Bir başlangıç yapabilmek amacıyla ilk gözlem bir rekordur, dolayısıyla  $L_1 = 1$  dir ve  $R_1 = 65$  dir. İlk rekor değeri ilk aşan değer 3. gözlemdir yani  $L_2 = 3$  dür ve dolayısıyla ikinci rekor değeri  $R_2 = 68$  olmalıdır. Bundan sonra en son rekor değeri aşan değer 4. gözlem yani  $L_3 = 4$  dür ve  $R_3 = 69$ . Dolayısıyla orijinal veri zinciri  $\{X_m\}$  den,  $\{R_n\}$  rekor değerler zinciri oluşturulabilir:

{65,68,69,..}

Bir başka gösterimde ise  $X_1, X_2, \dots$  bağımsız ve aynı dağılımlı veri grubu için  $X_j$ , artan rekor değer olarak belirlenir ve onu aşan değerler rekor değerler olarak kaydedilir. Yani  $i < j$  olması şartıyla  $X_j > X_i$  dir.  $X_j$  'nin  $j$ . sırada olduğu varsayılmıştır. Bu durumda rekor değer zinciri,  $T_0 = 1$  ve  $T_n = \min\{j: X_j > X_{T_{n-1}}\}$  olarak belirlenir. Artan rekor değerler ise  $R_0, R_1, \dots, R_n$  ifadesi ile gösterilir.  $R_n = X_{T_n}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  Daha sonra elde edilecek bu zincire ilişkin ortalama ve varyans tahmin edicileri için, ilk değer indisi için sıfır ya da bir verilmesi önemlidir.

Eğer rekor süreçleri, bağımsız ve aynı dağılımlı değilse, karakterize etmek çok zordur. Arnold, Balakrishnan, ve Nagaraja (1998) son zamanlarda, bu konu hakkındaki bilgilerin bir özeti olan kitabında, bazı özel durumlar için sonuçlar geliştirmiştir.

Sıralı istatistikler ve rekor istatistikler arasındaki ilişki önemlidir.  $n$ . en büyük sıralı istatistik,  $X_{n:n}$  olarak gösterilmiştir ve  $n$  tane rasgele değişkenin en büyüğüdür yani  $\max\{X_1, \dots, X_n\}$  gösterimiyle ifade edilir. Buna karşılık,  $n$ . rekor değer  $R_n$  'dir ve  $L_n$  rasgele değişkenin en büyüğüdür ve  $\max\{X_1, \dots, X_{L_n}\}$  gösterimiyle ifade edilir. Sıralı istatistikler için doğru olan sonuçlar, rekor değerler için doğru olmayabilir. Örneğin, herhangi bir sonlu örneklem büyüklüğü için sıralı istatistiklerin ortalama değeri oluşabildiği halde  $n$ . rekor değerinin ortalaması oluşmayabilir. Dolayısıyla, sıralı istatistikler ve rekor değerler ilişkili olmalarına rağmen, aynı değildir (Barlevy, 2005).

Rekor veri tanımına uyacak bir çok örneği doğada görmek mümkündür. Endüstriyel stres testi en iyi ve üzerinde araştırmalar yapılan örnektir, farklı örnekler için Ahmadi ve Arghami incelenebilir. Son zamanlarda rekor değerlerin incelenmesine yönelik artan bir ilgi görülmektedir. Arnold, Balakrishnan ve Nagaraja (1998) kitabında rekor değerler konusunda araştırmalar için geniş bir bibliyografi hazırlamışlardır. Bir çok yazar tarafından, yaşam modelleriyle birlikte rekor değerler üzerine dayanan problemler düşünülmüştür: Awad ve Raqad, Jasean, Ahmadi ve Balakrishnan ve Baklizi gibi yazarların makale ve kitaplarında bir çok bilgi bulunabilir. Baklizi, stres-mukavemet modellerinde, hem stres ölçümlerini hem de mukavemet ölçümlerini rekor değerler olarak ele almıştır (Baklizi, 2008).

Bu tez çalışmasında, artan rekor değerler üzerinde durulmuştur. Aynı işlemler azalan rekor değerler için de uyarlanabilir. Artan rekor değerler için Arnold, Balakrishnan ve Nagaraja (1998)'nin kitabındaki formülasyonlar kullanılmıştır.

## 5.1. Rekor Değerleri Kullanarak Üstel Dağılımın Parametrelerinin Tahmin Edicileri

### 5.1.1 İki parametrelili üstel dağılımda bir kitle için artan rekor değerleri kullanarak parametrelerin en çok olabilirlik tahmin edicileri

$R_0, R_1, \dots, R_n$  rasgele örnekleme,  $\text{Exp}(\alpha, \beta)$  dağılımında gözlenen artan rekor değerler olsun. Üstel dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu Eşitlik (3.1)'de verildiği gibidir. Olabilirlik fonksiyonu, aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} L = f_{R_0, R_1, \dots, R_n}(r_0, r_1, \dots, r_n) &= \frac{\prod_{i=0}^n f(r_i)}{\prod_{i=0}^{n-1} [1-F(r_i)]} \\ &= f(r_n) \prod_{i=0}^{n-1} h(r_i), \quad -\infty < r_0 < r_1 < \dots < r_n < \infty \end{aligned}$$

Burada  $h(r) = \frac{dH(r)}{dr} = \frac{f(r)}{[1-F(r)]}$  biçimindedir. Bu durumda,

$$\begin{aligned} L &= f(r_n)[h(r_0)h(r_1) \dots h(r_{n-1})] \\ &= f(r_n) \left[ \frac{f(r_0)}{[1-F(r_0)]} \cdot \frac{f(r_1)}{[1-F(r_1)]} \dots \frac{f(r_{n-1})}{[1-F(r_{n-1})]} \right] \\ &= f(r_n) \left[ \frac{1}{\beta} \dots \frac{1}{\beta} \right] \\ &= \frac{1}{\beta} e^{-\frac{(r_n-\alpha)}{\beta}} \left[ \frac{1}{\beta^n} \right] \end{aligned}$$

$$L = \frac{1}{\beta^{n+1}} e^{-\frac{(r_n-\alpha)}{\beta}}, \quad \alpha \leq r_0 < r_1 < \dots < r_n < \infty \quad (5.1)$$

elde edilir. Bu olabilirlik fonksiyonundan rekor değerlere bağlı olarak parametrelerin tahmin edicileri elde edilmek istensin.  $\alpha$  parametresinin en çok olabilirlik tahmin edicisi en küçük sıralı istatistiktir dolayısıyla,

$$\hat{\alpha} = R_0 \quad (5.2)$$

biçimindedir.  $\beta$  parametresine göre, olabilirlik fonksiyonunun doğal logaritmasının türevi alınırsa,

$$\ell nL = -(n+1)\ell n\beta - \frac{(r_n - \alpha)}{\beta}$$

$$\frac{\partial \ell nL}{\partial \beta} = -\frac{(n+1)}{\beta} + \frac{(r_n - \alpha)}{\beta^2} = 0$$

$$\hat{\beta} = \frac{1}{n+1}(R_n - R_0) \quad (5.3)$$

elde edilir. İki parametrelili üstel dağılım için en çok olabilirlik tahmin edicileri, aşağıdaki gibi elde edilmiş olur

$$(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = (R_0, \frac{1}{n+1}(R_n - R_0)) \quad (5.4)$$

(Arnold et al., 1998).

### 5.1.2. İki parametrelili üstel dağılımda iki kitle için artan rekor değerleri kullanarak parametrelerin en çok olabilirlik tahmin edicileri

$R_0, R_1, \dots, R_n$  rasgele örnekleme  $\text{Exp}(\alpha_1, \beta_1)$  dağılımından gözlenmiş artan rekor değerler olsun.  $S_0, S_1, \dots, S_m$  rasgele örnekleme ilk örneklemden bağımsız,  $\text{Exp}(\alpha_2, \beta_2)$  dağılımında gözlenmiş artan rekor değerler olsun. Üstel dağılım birleşik olasılık yoğunluk fonksiyonu Eşitlik (3.25)'de verildiği gibidir. Parametrelerin tahmin edicilerini elde etmek için olabilirlik fonksiyonu Eşitlik (5.1)'den aşağıdaki gibi elde edilir:

$$L = \frac{1}{\beta_1^{n+1}\beta_2^{m+1}} e^{-\frac{(r_n - \alpha_1)}{\beta_1}} e^{-\frac{(s_m - \alpha_2)}{\beta_2}} \quad (5.5)$$

$\alpha_1$  ve  $\alpha_2$  parametrelerinin en çok olabilirlik tahmin edicileri en küçük sıralı istatistiklerdir dolayısıyla,

$$\hat{\alpha}_1 = R_0 \quad (5.6)$$

$$\hat{\alpha}_2 = S_0 \quad (5.7)$$

biçimindedir.  $\beta_1$  ve  $\beta_2$  parametreleri için bu olabilirlik fonksiyonunun logaritması alınırsa,

$$\ell nL = -(n+1)\ell n\beta_1 - (m+1)\ell n\beta_2 - \frac{(r_n - \alpha_1)}{\beta_1} - \frac{(s_m - \alpha_2)}{\beta_2}$$

bulunur ve daha sonra  $\beta_1$  ve  $\beta_2$  'ye göre türev alınarak tahmin ediciler bulunmak istenirse,

$$\frac{\partial \ell nL}{\partial \beta_1} = -\frac{(n+1)}{\beta_1} - \left[ -\frac{(r_n - \alpha_1)}{\beta_1^2} \right] = 0$$

olur ve aşağıdaki tahmin edici elde edilir.

$$\hat{\beta}_1 = \frac{1}{n+1} (R_n - R_0) \quad (5.8)$$

$\beta_2$  için tahmin ediciyi bulmak için ise,  $\beta_2$ 'ye göre türev alınır;

$$\frac{\partial \ell nL}{\partial \beta_2} = -\frac{(m+1)}{\beta_2} - \left[ -\frac{(s_m - \alpha_2)}{\beta_2^2} \right] = 0$$

ve tahmin edici aşağıdaki gibi elde edilmiş olur.

$$\hat{\beta}_2 = \frac{1}{m+1} (s_m - s_0) \quad (5.9)$$

Sonuç olarak, en çok olabilirlik tahmin edicileri aşağıda verildiği gibi elde edilmiştir:

$$(\hat{\alpha}_1, \hat{\beta}_1) = (R_0, \frac{1}{n+1} (R_n - R_0)) \quad (5.10)$$

$$(\hat{\alpha}_2, \hat{\beta}_2) = (S_0, \frac{1}{m+1} (S_m - S_0)) \quad (5.11)$$

(Pal et al., 2005).

## **6. İKİ PARAMETRELİ ÜSTEL DAĞILIMDA REKOR DEĞERLERİ KULLANMADAN VE KULLANARAK DEĞİŞİM KATSAYISI, ORTAK DEĞİŞİM KATSAYISI VE GÜVENİRLİK TAHMİN EDİCİLERİ**

Bu bölümde, çalışmada amaçlanan ortak değişim katsayısı için tahmin ediciler elde edilmiştir. İlk önce iki parametrelü üstel dağılım için değişim katsayısının ve ortak değişim katsayısının en çok olabilirlik tahmin edicileri elde edilmiştir. Bu tahmin ediciler güvenirlük formüllerine uyarlanmıştır. Daha sonra rekor değeri tahmin edicileri kullanılarak değişim katsayısının ve ortak değişim katsayısının en çok olabilirlik tahmin edicileri elde edilmiştir. Bu tahmin ediciler de güvenirlük formüllerinin elde edilmesinde kullanılmıştır.

Yapılan literatür taramasında, bu bölümde elde edilen tahmin edicilere rastlanmadığından, yeni bir yaklaşım olarak değerlendirilebilir.

### **6.1. İki Parametrelü Üstel Dağılımda Bir Kitle ve İki Kitle için Değişim Katsayısı ve Ortak Değişim Katsayısının En Çok Olabilirlik Tahmin Edicileri**

#### **6.1.1. İki parametrelü üstel dağılımda bir kitle için değişim katsayısının en çok olabilirlik tahmin edicisi**

$x_1, x_2, \dots, x_n$  rasgele örnekleme,  $Exp(\alpha, \beta)$  dağılımından alınmış olsun. İki parametrelü üstel dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu Eşitlik (3.1)'de, değişim katsayısı, Eşitlik (3.5)' de verildiği gibidir. Değişim katsayısının en çok olabilirlik tahmin edicisi aşağıda elde edilmiştir. Değişim katsayısı formülünden  $\beta$  çekilirse,

$$\beta = \frac{\gamma\alpha}{1-\gamma} \quad (6.1)$$

elde edilir. Bu formül Eşitlik (3.1)'deki olasılık yoğunluk fonksiyonunda yerine konulursa

$$f(x) = \frac{1}{\gamma\alpha} e^{-\frac{(x-\alpha)}{\gamma\alpha}} \quad (6.2)$$

biçiminde elde edilmiş olur. Olabilirlik fonksiyonu ise,

$$\begin{aligned} L &= f(x_1) \dots f(x_n) \\ &= \frac{1-\gamma}{\gamma\alpha} e^{-\frac{(x_1-\alpha)(1-\gamma)}{\gamma\alpha}} \dots \frac{1-\gamma}{\gamma\alpha} e^{-\frac{(x_n-\alpha)(1-\gamma)}{\gamma\alpha}} \\ L &= \frac{(1-\gamma)^n}{\gamma^n \alpha^n} e^{-\frac{(1-\gamma)\sum_{i=1}^n (x_i-\alpha)}{\gamma\alpha}} \end{aligned} \quad (6.3)$$

biçiminde elde edilmiş olur. Bu fonksiyonun doğal logaritması alınır,

$$\begin{aligned} \ell n L &= n \ell n(1-\gamma) - n \ell n(\gamma\alpha) - \frac{(1-\gamma)}{\gamma\alpha} \sum_{i=1}^n (x_i - \alpha) \\ &= n \ell n(1-\gamma) - n \ell n(\gamma\alpha) - \frac{(1-\gamma)}{\gamma\alpha} n(\bar{x} - \alpha) \end{aligned} \quad (6.4)$$

elde edilir. Değişim katsayısının tahmin edicisini bulabilmek için bu fonksiyonun  $\gamma$  'ya göre türevi alınır,

$$\frac{\partial \ell n L}{\partial \gamma} = n \frac{(-1)}{1-\gamma} - n \frac{\alpha}{\gamma\alpha} + \frac{\alpha(\bar{x}-\alpha)n}{\gamma^2 \alpha^2} = 0$$

$$-\frac{1}{1-\gamma} - \frac{1}{\gamma} + \frac{\bar{x}-\alpha}{\gamma^2 \alpha} = 0$$

$$\frac{\bar{x}-\alpha}{\gamma^2 \alpha} = \frac{1}{\gamma(1-\gamma)}$$

$$\hat{\gamma} = 1 - \frac{\hat{\alpha}}{\bar{x}} \quad (6.5)$$

elde edilir.  $\hat{\gamma}$ , değişim katsayısının tahmin edicisidir. Bu tahmin edicinin yanlı olup olmadığı kontrol edilirse,

$$E(\hat{\gamma}) = E\left(1 - \frac{\hat{\alpha}}{\bar{x}}\right) = 1 - \frac{\alpha}{\beta + \alpha} = \frac{\beta}{\beta + \alpha} = \gamma$$

olduğundan değişim katsayısının yansız bir tahmin edici olduğu görülmüş olur.

### 6.1.2. İki parametrelili üstel dağılımda iki kitle için değişim katsayısının en çok olabilirlik tahmin edicisi

$x_1, x_2, \dots, x_n$  rasgele örnekleme,  $\text{Exp}(\alpha_1, \beta_1)$  dağılımından,  $y_1, y_2, \dots, y_n$  rasgele örnekleme, ilk kitleden bağımsız olarak  $\text{Exp}(\alpha_2, \beta_2)$  dağılımından çekilmiş olsun. Bu iki dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonları Eşitlik (3.21) ve (3.22)' de olduğu gibidir. Değişim katsayıları ise Eşitlik (6.6) ve (6.7)' de verilmiştir.

$$\gamma_1 = \frac{\beta_1}{\beta_1 + \alpha_1} \quad (6.6)$$

$$\gamma_2 = \frac{\beta_2}{\beta_2 + \alpha_2}$$

(6.7)

Standart sapmalar, değişim katsayısı cinsinden yazılırsa,

$$\beta_1 = \frac{\gamma_1 \alpha_1}{1 - \gamma_1} \quad (6.8)$$

$$\beta_2 = \frac{\gamma_2 \alpha_2}{1 - \gamma_2} \quad (6.9)$$

formülleri elde edilir. Olasılık yoğunluk fonksiyonunda bu değerler yerine yazılırsa,

$$f(x; \alpha_1, \beta_1) = \frac{1}{\frac{\gamma_1 \alpha_1}{1 - \gamma_1}} e^{-\frac{(x - \alpha_1)}{\frac{\gamma_1 \alpha_1}{1 - \gamma_1}}} \quad (6.10)$$

$$f(y; \alpha_2, \beta_2) = \frac{1}{\frac{\gamma_2 \alpha_2}{1 - \gamma_2}} e^{-\frac{(y - \alpha_2)}{\frac{\gamma_2 \alpha_2}{1 - \gamma_2}}} \quad (6.11)$$

fonksiyonları elde edilir. Birleşik olasılık yoğunluk fonksiyonu ise,

$$f(x, y) = \frac{(1-\gamma_1)(1-\gamma_2)}{\gamma_1\alpha_1\gamma_2\alpha_2} e^{-\frac{(x-\alpha_1)(1-\gamma_1)}{\gamma_1\alpha_1} - \frac{(y-\alpha_2)(1-\gamma_2)}{\gamma_2\alpha_2}} \quad (6.12)$$

biçimindedir. Olabilirlik fonksiyonu yazılıp doğal logaritması alınırsa,

$$\begin{aligned} L &= f(x_1, y_1) \dots f(x_{n_1}, y_{n_2}) \\ &= \frac{(1-\gamma_1)^{n_1}(1-\gamma_2)^{n_2}}{\gamma_1^{n_1}\alpha_1^{n_1}\gamma_2^{n_2}\alpha_2^{n_2}} e^{-\frac{(1-\gamma_1)}{\gamma_1\alpha_1}\sum_{i=1}^{n_1}(x_i-\alpha_1) - \frac{(1-\gamma_2)}{\gamma_2\alpha_2}\sum_{i=1}^{n_2}(y_i-\alpha_2)} \end{aligned} \quad (6.13)$$

$$\begin{aligned} \ell n L &= n_1 \ell n(1 - \gamma_1) + n_2 \ell n(1 - \gamma_2) - n_1 \ell n(\gamma_1 \alpha_1) - n_2 \ell n(\gamma_2 \alpha_2) \\ &\quad - \frac{(1-\gamma_1)}{\gamma_1\alpha_1} \sum_{i=1}^{n_1} (x_i - \alpha_1) - \frac{(1-\gamma_2)}{\gamma_2\alpha_2} \sum_{i=1}^{n_2} (y_i - \alpha_2) = 0 \\ &= n_1 \ell n(1 - \gamma_1) + n_2 \ell n(1 - \gamma_2) - n_1 \ell n(\gamma_1 \alpha_1) - n_2 \ell n(\gamma_2 \alpha_2) \\ &\quad - \frac{(1-\gamma_1)}{\gamma_1\alpha_1} n_1 (\bar{x} - \alpha_1) - \frac{(1-\gamma_2)}{\gamma_2\alpha_2} n_2 (\bar{y} - \alpha_2) = 0 \end{aligned} \quad (6.14)$$

elde edilir ve daha sonra bu fonksiyonun  $\gamma$  'lara göre türevi alınır,

$$\frac{\partial \ell n L}{\partial \gamma_1} = -\frac{n_1}{1-\gamma_1} - \frac{n_1\alpha_1}{\gamma_1\alpha_1} + \frac{(\bar{x}-\alpha_1)n_1}{\gamma_1^2\alpha_1} = 0$$

$$\frac{\partial \ell n L}{\partial \gamma_2} = -\frac{n_2}{1-\gamma_2} - \frac{n_2\alpha_2}{\gamma_2\alpha_2} + \frac{(\bar{y}-\alpha_2)n_2}{\gamma_2^2\alpha_2} = 0$$

ifadesinden aşağıdaki değişim katsayısı tahmin edicileri elde edilir.

$$\hat{\gamma}_1 = 1 - \frac{\hat{\alpha}_1}{\bar{x}}, \quad \hat{\gamma}_2 = 1 - \frac{\hat{\alpha}_2}{\bar{y}} \quad (6.15)$$

Bu tahmin edicilerin yanlı olup olmadıkları incelenirse,

$$E(\hat{\gamma}_1) = E\left(1 - \frac{\hat{\alpha}_1}{\bar{x}}\right) = 1 - \frac{\alpha_1}{E(\bar{x})} = 1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \sigma_1} = \gamma_1$$

$$E(\hat{\gamma}_2) = E\left(1 - \frac{\hat{\alpha}_2}{\bar{y}}\right) = 1 - \frac{\alpha_2}{E(\bar{y})} = 1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_2 + \beta_2} = \gamma_2$$

$$E(\hat{\gamma}_1) = \gamma_1$$

$$E(\hat{\gamma}_2) = \gamma_2$$

olduğundan  $\hat{\gamma}_1$  ve  $\hat{\gamma}_2$  'nin yansız tahmin ediciler olduğu ispatlanmış olur.

### 6.1.3. İki parametrelili üstel dağılımda iki kitle için ortak değişim katsayısının en çok olabilirlik tahmin edicisi

$x_1, x_2, \dots, x_n$  rasgele örnekleme  $\text{Exp}(\alpha_1, \beta_1)$  dağılımından,  $y_1, y_2, \dots, y_n$  rasgele örnekleme, ilk kitleden bağımsız olarak  $\text{Exp}(\alpha_2, \beta_2)$  dağılımından çekilmiş olsun. Bu iki dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonları Eşitlik (3.21) ve (3.22) 'de ve değişim katsayıları ise sırasıyla Eşitlik (6.6) ve (6.7)'de verildiği gibidir. Değişim katsayılarının eşit olduğu varsayılırsa, ortak değişim katsayısı formülü kullanılarak, standart sapma ifade edilebilir.

Değişim katsayılarının ortak olduğu varsayılırsa,

$$\gamma_0 = \gamma_1 = \gamma_2 \quad \gamma_0 = \gamma_1 = \frac{\beta_1}{\beta_1 + \alpha_1} \quad \gamma_0 = \gamma_2 = \frac{\beta_2}{\beta_2 + \alpha_2}$$

$$\beta_1 = \frac{\gamma_0 \alpha_1}{1 - \gamma_0} \quad \beta_2 = \frac{\gamma_0 \alpha_2}{1 - \gamma_0} \quad (6.16)$$

formülleri elde edilmiş olur. Bu formüller fonksiyonlarda yerine konulacak olursa,

$$f(x; \alpha_1, \gamma_0) = \frac{1}{\frac{\gamma_0 \alpha_1}{1 - \gamma_0}} e^{-\frac{(x - \alpha_1)}{\frac{\gamma_0 \alpha_1}{1 - \gamma_0}}} \quad (6.17)$$

$$f(y; \alpha_2, \gamma_0) = \frac{1}{\frac{\gamma_0 \alpha_2}{1 - \gamma_0}} e^{-\frac{(y - \alpha_2)}{\frac{\gamma_0 \alpha_2}{1 - \gamma_0}}} \quad (6.18)$$

elde edilir. Birleşik olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x, y) = \frac{(1 - \gamma_0)^2}{\gamma_0^2 \alpha_1 \alpha_2} e^{-\frac{(x - \alpha_1)(1 - \gamma_0)}{\gamma_0 \alpha_1} - \frac{(y - \alpha_2)(1 - \gamma_0)}{\gamma_0 \alpha_2}} \quad (6.19)$$

biçimindedir. Olabilirlik fonksiyonu,

$$L = f(x_1, y_1) \dots f(x_{n_1}, y_{n_2})$$

$$= \frac{((1-\gamma_0)^2)^{n_1+n_2}}{(\gamma_0^2)^{n_1+n_2} \alpha_1^{n_1} \alpha_2^{n_2}} e^{-\frac{(1-\gamma_0)}{\gamma_0 \alpha_1} \sum_{i=1}^{n_1} (x_i - \alpha_1) - \frac{(1-\gamma_0)}{\gamma_0 \alpha_2} \sum_{i=1}^{n_2} (y_i - \alpha_2)} \quad (6.20)$$

elde edilir. Fonksiyonun doğal logaritması,

$$\ell nL = (n_1 + n_2) \ell n \frac{(1-\gamma_0)^2}{\gamma_0^2} - n_1 \ell n \alpha_1 - n_2 \ell n \alpha_2$$

$$- \frac{(1-\gamma_0)}{\gamma_0 \alpha_1} \sum_{i=1}^{n_1} (x_i - \alpha_1) - \frac{(1-\gamma_0)}{\gamma_0 \alpha_2} \sum_{i=1}^{n_2} (y_i - \alpha_2) \quad (6.21)$$

olur.  $\alpha$ 'nın en çok olabilirlik tahmin edicisi en küçük sıralı istatistiktir. Ortak değişim katsayısına göre türev alınarak tahmin edici bulunmak istenirse,

$$\frac{\partial \ell nL}{\partial \gamma_0} = (n_1 + n_2) \frac{(-2)}{\gamma_0(1-\gamma_0)} + \frac{n_1(\bar{x} - \alpha_1)}{\gamma_0^2 \alpha_1} + \frac{n_2(\bar{y} - \alpha_2)}{\gamma_0^2 \alpha_2} = 0$$

$$\frac{1}{n_1+n_2} \left[ \frac{n_1 \bar{x}}{\alpha_1} + \frac{n_2 \bar{y}}{\alpha_2} \right] = \frac{1+\gamma_0}{1-\gamma_0}$$

$$\hat{\gamma}_0 = \frac{n_1 \bar{x} \hat{\alpha}_2 + n_2 \bar{y} \hat{\alpha}_1 - \hat{\alpha}_1 \hat{\alpha}_2 (n_1 + n_2)}{n_1 \bar{x} \hat{\alpha}_2 + n_2 \bar{y} \hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_1 \hat{\alpha}_2 (n_1 + n_2)} \quad (6.22)$$

elde edilir. Ortak değişim katsayısı tahmin edicisinin yanlı olup olmadığı kontrol edilirse,

$$E(\hat{\gamma}_0) = \frac{n_1 E(\bar{x}) \alpha_2 + n_2 E(\bar{y}) \alpha_1 - \alpha_1 \alpha_2 (n_1 + n_2)}{n_1 E(\bar{x}) \alpha_2 + n_2 E(\bar{y}) \alpha_1 + \alpha_1 \alpha_2 (n_1 + n_2)}$$

$$= \frac{n_1(\alpha_1 + \beta_1) \alpha_2 + n_2(\alpha_2 + \beta_2) \alpha_1 - \alpha_1 \alpha_2 (n_1 + n_2)}{n_1(\alpha_1 + \beta_1) \alpha_2 + n_2(\alpha_2 + \beta_2) \alpha_1 + \alpha_1 \alpha_2 (n_1 + n_2)}$$

$$= \frac{n_1(\alpha_1 + \frac{\gamma_0 \alpha_1}{1-\gamma_0}) \alpha_2 + n_2(\alpha_2 + \frac{\gamma_0 \alpha_2}{1-\gamma_0}) \alpha_1 - \alpha_1 \alpha_2 (n_1 + n_2)}{n_1(\alpha_1 + \frac{\gamma_0 \alpha_1}{1-\gamma_0}) \alpha_2 + n_2(\alpha_2 + \frac{\gamma_0 \alpha_2}{1-\gamma_0}) \alpha_1 + \alpha_1 \alpha_2 (n_1 + n_2)}$$

$$E(\hat{\gamma}_0) = \frac{\gamma_0}{2-\gamma_0} \neq \gamma_0$$

olduğundan yanlı bir tahmin edici olduğu görülür.

## 6.2. İki Parametrelili Üstel Dağılımda Değişim Katsayısı ve Ortak Değişim Katsayısı Tahmin Edicilerini Kullananarak Güvenirlik Tahmin Edicileri

### 6.2.1. İki parametrelili üstel dağılımda değişim katsayısı tahmin edicisini kullanarak $R = P(X < Y)$ tahmin edicisi

$X \sim \text{Exp}(\alpha_1, \beta_1)$  ve  $Y \sim \text{Exp}(\alpha_2, \beta_2)$  bağımsız rasgele değişkenler olsun.  $X$ 'in olasılık yoğunluk fonksiyonu  $f(x; \alpha_1, \beta_1)$  ve  $Y$ 'nin olasılık yoğunluk fonksiyonu  $f(y; \alpha_2, \beta_2)$  olsun. Olasılık yoğunluk fonksiyonları sırasıyla Eşitlik (3.21) ve (3.22)'de verildiği gibidir. İki ayrı dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonlarının değişim katsayısına göre yazılımı, Eşitlik (6.10) ve (6.11)'de verildiği gibidir. Birleşik olasılık yoğunluk fonksiyonu, Eşitlik (6.12)'de verilmiştir.

Eğer  $\mu_1 > \mu_2$  ise,  $R$  güvenirlik parametresi,

$$\begin{aligned} R &= \int_{\mu_1}^{\infty} \int_x^{\infty} \frac{(1-\gamma_1)(1-\gamma_2)}{\gamma_1\gamma_2\alpha_1\alpha_2} e^{-\frac{(x-\alpha_1)(1-\gamma_1)}{\gamma_1\alpha_1} - \frac{(y-\alpha_2)(1-\gamma_2)}{\gamma_2\alpha_2}} dy dx \\ &= \frac{(1-\gamma_1)\gamma_2\alpha_2}{(1-\gamma_1)\gamma_2\alpha_2 + (1-\gamma_2)\gamma_1\alpha_1} e^{-\frac{(\alpha_1-\alpha_2)(1-\gamma_2)}{\gamma_2\alpha_2}} \end{aligned} \quad (6.23)$$

biçiminde elde edilmiş olur.  $\alpha_1 \leq \alpha_2$  durumu da benzer biçimde elde edilirse,

$$R = \begin{cases} \frac{(1-\gamma_1)\gamma_2\alpha_2}{(1-\gamma_1)\gamma_2\alpha_2 + (1-\gamma_2)\gamma_1\alpha_1} e^{-\frac{(\alpha_1-\alpha_2)(1-\gamma_2)}{\gamma_2\alpha_2}} & , \alpha_1 > \alpha_2 \\ 1 - \frac{(1-\gamma_2)\gamma_1\alpha_1}{(1-\gamma_1)\gamma_2\alpha_2 + (1-\gamma_2)\gamma_1\alpha_1} e^{-\frac{(1-\gamma_1)(\alpha_2-\alpha_1)}{\gamma_1\alpha_1}} & , \alpha_1 \leq \alpha_2 \end{cases} \quad (6.24)$$

güvenirlik olasılığı elde edilmiş olur.

$$\hat{\alpha}_1 = x_{(1)} \quad \hat{\alpha}_2 = y_{(1)}$$

$$\hat{\gamma}_1 = 1 - \frac{x_{(1)}}{\bar{x}} \quad \hat{\gamma}_2 = 1 - \frac{y_{(1)}}{\bar{y}}$$

tahmin edicileri Eşitlik (6.24)' de yerine konulursa, R'nin en çok olabilirlik tahmin edicisi,

$$\hat{R} = P(X < Y) = \begin{cases} \frac{\bar{y}-y_{(1)}}{(\bar{x}-x_{(1)})+(\bar{y}-y_{(1)})} e^{-\frac{x_{(1)}-y_{(1)}}{\bar{y}-y_{(1)}}} & , X_{(1)} > Y_{(1)} \\ 1 - \frac{\bar{x}-x_{(1)}}{(\bar{x}-x_{(1)})+(\bar{y}-y_{(1)})} e^{-\frac{y_{(1)}-x_{(1)}}{\bar{x}-x_{(1)}}} & , X_{(1)} \leq Y_{(1)} \end{cases} \quad (6.25)$$

biçiminde elde edilmiş olur.

### 6.2.2. İki parametrelü üstel dağılımda ortak değişim katsayısı tahmin edicisini kullanarak $R = P(X > Y)$ tahmin edicisi

$x_1, x_2, \dots, x_n$  rasgele örnekleme,  $\text{Exp}(\alpha_1, \beta_1)$  dağılımından,  $y_1, y_2, \dots, y_n$  rasgele örnekleme, ilk kitleden bağımsız olarak  $\text{Exp}(\alpha_2, \beta_2)$  dağılımından çekilmiş olsun. Bu iki dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonları Eşitlik (3.21) ve (3.22)' de verildiği gibidir. Değişim katsayıları sırasıyla Eşitlik (6.6) ve (6.7)'de verildiği gibidir. Değişim katsayılarının ortak olduğu varsayılırsa, ortak değişim katsayısı kullanılarak güvenilirlik ifade edilebilir. Eşitlik (4.4)'de yer alan güvenilirlik fonksiyonunda, değişim katsayıları eşit varsayılırsa, ortak değişim katsayısı yerine konularak,

$$\gamma_0 = \gamma_1 = \gamma_2$$

$$R = P(X > Y) = \begin{cases} 1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} e^{-\frac{(\alpha_1 - \alpha_2)(1 - \gamma_0)}{\gamma_0 \alpha_2}} & , \alpha_1 > \alpha_2 \\ \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} e^{-\frac{(\alpha_1 - \alpha_2)(1 - \gamma_0)}{\gamma_0 \alpha_1}} & , \alpha_1 \leq \alpha_2 \end{cases} \quad (6.26)$$

ifadesi elde edilir ve Eşitlik (6.22)'deki ortak değişim katsayısının tahmin edicisi yerine yazılırsa,

$$\hat{\gamma}_0 = \frac{n_1 \bar{x} y_{(1)} + n_2 \bar{y} x_{(1)} - x_{(1)} y_{(1)} (n_1 + n_2)}{n_1 \bar{x} y_{(1)} + n_2 \bar{y} x_{(1)} + x_{(1)} y_{(1)} (n_1 + n_2)}$$

$$\hat{R} = 1 - \frac{\hat{\alpha}_2}{\hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2} e^{-\frac{(\hat{\alpha}_1 - \hat{\alpha}_2)(1 - \hat{\gamma}_0)}{\hat{\gamma}_0 \hat{\alpha}_2}} , \quad X_{(1)} > Y_{(1)} \quad (6.27)$$

elde edilir. Ortak değişim katsayısının tahmin edicisine bağlı olarak güvenilirlik tahmin edicisi,

$$\widehat{R} = 1 - \frac{y_{(1)}}{x_{(1)}+y_{(1)}} e^{-\frac{(x_{(1)}-y_{(1)}) \left(1 - \frac{n_1 \bar{x} y_{(1)} + n_2 \bar{y} x_{(1)} - x_{(1)} y_{(1)} (n_1+n_2)}{n_1 \bar{x} y_{(1)} + n_2 \bar{y} x_{(1)} + x_{(1)} y_{(1)} (n_1+n_2)}\right)}{y_{(1)} \frac{n_1 \bar{x} y_{(1)} + n_2 \bar{y} x_{(1)} - x_{(1)} y_{(1)} (n_1+n_2)}{n_1 \bar{x} y_{(1)} + n_2 \bar{y} x_{(1)} + x_{(1)} y_{(1)} (n_1+n_2)}}} \quad (6.28)$$

$$\widehat{R} = 1 - \left[ \frac{y_{(1)}}{x_{(1)}+y_{(1)}} e^{-\frac{(x_{(1)}-y_{(1)}) 2x_{(1)} (n_1+n_2)}{n_1 \bar{x} y_{(1)} + n_2 \bar{y} x_{(1)} - x_{(1)} y_{(1)} (n_1+n_2)}} \right], \quad X_{(1)} > Y_{(1)} \quad (6.29)$$

biçiminde elde edilir. Her iki duruma göre güvenilirlik ifade edilecek olursa,

$$\widehat{R} = P(X > Y)$$

$$= \begin{cases} 1 - \left[ \frac{y_{(1)}}{x_{(1)}+y_{(1)}} e^{-\frac{(x_{(1)}-y_{(1)}) 2x_{(1)} (n_1+n_2)}{n_1 \bar{x} y_{(1)} + n_2 \bar{y} x_{(1)} - x_{(1)} y_{(1)} (n_1+n_2)}} \right], & X_{(1)} > Y_{(1)} \\ \frac{x_{(1)}}{x_{(1)}+y_{(1)}} e^{-\frac{(x_{(1)}-y_{(1)}) 2y_{(1)} (n_1+n_2)}{n_1 \bar{x} y_{(1)} + n_2 \bar{y} x_{(1)} - x_{(1)} y_{(1)} (n_1+n_2)}} & , X_{(1)} \leq Y_{(1)} \end{cases} \quad (6.30)$$

tahmin edicisi bulunmuş olur.

### 6.3. Rekor Değerleri Kullanarak Değişim Katsayısı, Ortak Değişim Katsayısı ve Güvenirlik Tahmin Edicileri

#### 6.3.1 İki parametrelili üstel dağılımda bir kitle için artan rekor değerleri kullanarak değişim katsayısının en çok olabilirlik tahmin edicisi

$R_0, R_1, \dots, R_n$ , rasgele örnekleme  $\text{Exp}(\alpha, \beta)$  dağılımında gözlenen artan rekor değerler olsun. Eşitlik (5.1)'de yer alan olabilirlik fonksiyonunda  $\beta = \frac{\gamma\alpha}{1-\gamma}$  yerine yazılırsa,

$$L = \frac{1}{\left(\frac{\gamma\alpha}{1-\gamma}\right)^{(n+1)}} e^{-\frac{(r_n-\alpha)(1-\gamma)}{\gamma\alpha}} \quad (6.31)$$

elde edilir. Bu fonksiyonun doğal logaritması alınırsa,

$$\ell nL = -(n+1)\ell n \frac{\gamma\alpha}{(1-\gamma)} - \frac{(r_n-\alpha)(1-\gamma)}{\gamma\alpha} \quad (6.32)$$

ve daha sonra değişim katsayısına göre türev alınırsa,

$$\frac{\partial \ell nL}{\partial \gamma} = -\frac{n+1}{\gamma(1-\gamma)} + \frac{r_n-\alpha}{\gamma^2\alpha} = 0$$

$$\frac{r_n-\alpha}{\alpha(n+1)} = \frac{\gamma}{1-\gamma}$$

$$\hat{\gamma} = \frac{\hat{r}_n - \hat{\alpha}}{n\hat{\alpha} + \hat{r}_n}$$

elde edilir ve örneklemdaki değerleri yerine yazılırsa değişim katsayısının tahmin edicisi elde edilmiş olur.

$$\hat{\gamma} = \frac{R_n - R_0}{nR_0 + R_n} \quad (6.33)$$

### 6.3.2 İki parametrelü üstel dağılımda iki kitle için artan rekor değerleri kullanarak değişim katsayılarının en çok olabilirlik tahmin edicileri

$R_0, R_1, \dots, R_n$  , rasgele örnekleme  $\text{Exp}(\alpha_1, \beta_1)$  dağılımından gözlenmiş artan rekor değerler olsun.  $S_0, S_1, \dots, S_m$  rasgele örnekleme ilk örneklemden bağımsız olarak  $\text{Exp}(\alpha_2, \beta_2)$  dağılımında gözlenmiş artan rekor değerler olsun. Eşitlik (5.5)'de yer alan olabilirlik fonksiyonunda  $\beta_1 = \frac{\gamma_1\alpha_1}{1-\gamma_1}$  ve  $\beta_2 = \frac{\gamma_2\alpha_2}{1-\gamma_2}$  yerine yazılırsa, olabilirlik fonksiyonu,

$$L = \frac{1}{\left(\frac{\gamma_1\alpha_1}{1-\gamma_1}\right)^{(n+1)} \left(\frac{\gamma_2\alpha_2}{1-\gamma_2}\right)^{(m+1)}} e^{-\frac{(r_n-\alpha_1)(1-\gamma_1)}{\gamma_1\alpha_1}} e^{-\frac{(s_m-\alpha_2)(1-\gamma_2)}{\gamma_2\alpha_2}} \quad (6.34)$$

elde edilir. Olabilirlik fonksiyonunun logaritması alınırsa,

$$\ell nL = -(n+1)\ell n \frac{\gamma_1^{\alpha_1}}{1-\gamma_1} - (m+1)\ell n \frac{\gamma_2^{\alpha_2}}{1-\gamma_2} - \frac{(r_n - \alpha_1)(1-\gamma_1)}{\gamma_1^{\alpha_1}} - \frac{(s_m - \alpha_2)(1-\gamma_2)}{\gamma_2^{\alpha_2}}$$

biçiminde olur ve bu fonksiyonun  $\gamma_1$  'e göre türevi alınarak,

$$\frac{\partial \ell nL}{\partial \gamma_1} = -\frac{(n+1)}{\gamma_1(1-\gamma_1)} + \frac{(r_n - \alpha_1)}{\gamma_1^2 \alpha_1} = 0 \quad (6.35)$$

$$\hat{\gamma}_1 = \frac{\hat{r}_n - \hat{\alpha}_1}{\hat{r}_n + n\hat{\alpha}_1}$$

biçiminde  $\gamma_1$ 'in tahmin edicisi elde edilmiş olur ve örneklemdaki değerler yerine yazıldığında,

$$\hat{\gamma}_1 = \frac{R_n - R_0}{R_n + nR_0} \quad (6.36)$$

bulunur. Fonksiyonun  $\gamma_2$  'ye göre türevi alındığında ise,

$$\frac{\partial \ell nL}{\partial \gamma_2} = -\frac{(m+1)}{\gamma_2(1-\gamma_2)} + \frac{(s_m - \alpha_2)}{\gamma_2^2 \alpha_2} = 0 \quad (6.37)$$

$$\hat{\gamma}_2 = \frac{\hat{s}_m - \hat{\alpha}_2}{\hat{s}_m + m\hat{\alpha}_2}$$

biçiminde  $\gamma_2$ 'nin tahmin edicisi elde edilmiş olur ve örneklemdaki değerler yerine yazıldığında,

$$\hat{\gamma}_2 = \frac{S_m - S_0}{S_m + mS_0} \quad (6.38)$$

elde edilir.

### 6.3.3. İki parametrelili üstel dağılımda iki kitle için artan rekor değerleri kullanarak ortak değişim katsayısının en çok olabilirlik tahmin edicisi

Eşitlik (6.34)'de yer alan iki parametrelili üstel dağılımın iki kitle durumunda rekor değerlere göre olabilirlik fonksiyonunda  $\gamma_0 = \gamma_1 = \gamma_2$  olduğu varsayılırsa, ortak değişim katsayısına dayanan olabilirlik fonksiyonu,

$$L = \frac{1}{\left(\frac{\gamma_0 \alpha_1}{1-\gamma_0}\right)^{n+1} \left(\frac{\gamma_0 \alpha_2}{1-\gamma_0}\right)^{m+1}} e^{-\frac{(r_n - \alpha_1)(1-\gamma_0)}{\gamma_0 \alpha_1}} e^{-\frac{(s_m - \alpha_2)(1-\gamma_0)}{\gamma_0 \alpha_2}}, \quad (6.39)$$

biçiminde elde edilmiş olur. Bu olabilirlik fonksiyonunun doğal logaritması alınırsa,

$$\begin{aligned} \ell n L = (n + m + 2) \ell n \left( \frac{1}{\gamma_0} - 1 \right) - (n + 1) \ell n \alpha_1 - (m + 1) \ell n \alpha_2 \\ - \frac{(r_n - \alpha_1) \alpha_2 - (r_n - \alpha_1) \gamma_0 \alpha_2}{\gamma_0 \alpha_1 \alpha_2} - \frac{(s_m - \alpha_2) \alpha_1 - (s_m - \alpha_2) \gamma_0 \alpha_1}{\gamma_0 \alpha_1 \alpha_2} \end{aligned}$$

elde edilir ve daha sonra ortak değişim katsayısı,  $\gamma_0$ 'ya göre türev alınırsa,

$$\frac{\partial \ell n L}{\partial \gamma_0} = (n + m + 2) \frac{(-1)}{\gamma_0(1-\gamma_0)} + \frac{(r_n - \alpha_1) \alpha_2 + (s_m - \alpha_2) \alpha_1}{\gamma_0^2 \alpha_1 \alpha_2} = 0 \quad (6.40)$$

ifadesinden  $\gamma_0$ 'nun tahmin edicisi aşağıdaki gibi elde edilmiş olur:

$$\hat{\gamma}_{ro} = \frac{R_n \hat{\alpha}_2 + S_m \hat{\alpha}_1 - 2 \hat{\alpha}_1 \hat{\alpha}_2}{R_n \hat{\alpha}_2 + S_m \hat{\alpha}_1 + (n+m) \hat{\alpha}_1 \hat{\alpha}_2} \quad (6.41)$$

$$\hat{\gamma}_{ro} = \frac{R_n S_0 + S_m R_0 - 2 R_0 S_0}{R_n S_0 + S_m R_0 + (n+m) R_0 S_0}$$

Eğer veriler  $R_0$  değilse,  $R_1$ 'den başlarsa olabilirlik fonksiyonu,

$$L = \frac{1}{\left(\frac{\gamma_0 \alpha_1}{1-\gamma_0}\right)^n \left(\frac{\gamma_0 \alpha_2}{1-\gamma_0}\right)^m} e^{-\frac{(r_n - \alpha_1)(1-\gamma_0)}{\gamma_0 \alpha_1}} e^{-\frac{(s_m - \alpha_2)(1-\gamma_0)}{\gamma_0 \alpha_2}} \quad (6.42)$$

olacaktır ve buna bağlı rekor değerlere dayalı ortak değişim katsayısı tahmin edicisi,

$$\hat{\gamma}_{ro} = \frac{R_n S_0 + S_m R_0 - 2 R_0 S_0}{R_n S_0 + S_m R_0 + (n+m-2) R_0 S_0} \quad (6.43)$$

biçiminde olacaktır.

**6.3.4. İki parametrelili üstel dağılımda artan rekor değerleri kullanarak elde edilen tahmin edicilerle  $R = P(X < Y)$  tahmin edicisi**

$R_0, R_1, \dots, R_n$  , rasgele örnekleme  $\text{Exp}(\alpha_1, \beta_1)$  dağılımından gözlenmiş artan rekor değerler olsun.  $S_0, S_1, \dots, S_m$  rasgele örnekleme ilk örneklemeden bağımsız olarak,  $\text{Exp}(\alpha_2, \beta_2)$  dağılımında gözlenmiş artan rekor değerler olsun. En çok olabilirlik tahmin edicileri ilk örneklem için Eşitlik(5.6) ve (5.8)'de, ikinci örneklem için Eşitlik (5.7) ve

(5.9)'da verildiği gibidir.  $P(X < Y)$  için güvenilirlik Eşitlik (4.8)' de verildiği gibidir. Bu tahmin ediciler Eşitlik (4.8)'deki güvenilirlik eşitliğinde yerine konulursa, güvenilirlik tahmin edicisi,

$$\hat{R} = \begin{cases} 1 - \frac{(m+1)(R_n - R_0)}{(m+1)(R_n - R_0) + (n+1)(S_m - S_0)} e^{-\frac{(n+1)(S_0 - R_0)}{(R_n - R_0)}} & , R_0 \leq S_0 \\ \frac{(n+1)(S_m - S_0)}{(m+1)(R_n - R_0) + (n+1)(S_m - S_0)} e^{-\frac{(m+1)(R_0 - S_0)}{(S_m - S_0)}} & , R_0 > S_0 \end{cases} \quad (6.44)$$

biçiminde elde edilir.

### 6.3.5. İki parametrelili üstel dağılımda artan rekor değerleri kullanarak elde edilen tahmin edicilerle $R = P(X > Y)$ tahmin edicisi

$R_0, R_1, \dots, R_n$  rasgele örnekleme  $\text{Exp}(\alpha_1, \beta_1)$  dağılımından gözlenmiş artan rekor değerler olsun.  $S_0, S_1, \dots, S_m$  rasgele örnekleme, ilk örneklemeden bağımsız olarak  $\text{Exp}(\alpha_2, \beta_2)$  dağılımından gözlenmiş artan rekor değerler olsun. En çok olabilirlik tahmin edicileri ilk örneklem için Eşitlik (5.6) ve (5.8)'de, ikinci örneklem için Eşitlik (5.7) ve (5.9)'da verildiği gibidir. Bu tahmin ediciler Eşitlik (4.4)'deki güvenilirlik eşitliğinde yerine konulursa, güvenilirlik tahmin edicisi,

$$\hat{R}_r = \begin{cases} 1 - \frac{(n+1)(S_m - S_0)}{(m+1)(R_n - R_0) + (n+1)(S_m - S_0)} e^{-\frac{(m+1)(S_0 - R_0)}{(S_m - S_0)}} & , R_0 > S_0 \\ \frac{(m+1)(R_n - R_0)}{(m+1)(R_n - R_0) + (n+1)(S_m - S_0)} e^{-\frac{(n+1)(R_0 - S_0)}{(R_n - R_0)}} & , R_0 \leq S_0 \end{cases} \quad (6.45)$$

biçiminde elde edilir.

### 6.3.6. İki parametrelili üstel dağılımda artan rekor değerleri kullanarak elde edilen ortak değişim katsayısı tahmin edicisi ile $R = P(X > Y)$ tahmin edicisi

$R_0, R_1, \dots, R_n$  rasgele örnekleme  $\text{Exp}(\alpha_1, \beta_1)$  dağılımından gözlenmiş artan rekor değerler olsun.  $S_0, S_1, \dots, S_m$  rasgele örnekleme, ilk örneklemden bağımsız olarak  $\text{Exp}(\alpha_2, \beta_2)$  dağılımından gözlenmiş artan rekor değerler olsun. Ortak değişim katsayısının rekor değerlere göre en çok olasılık tahmin edicisi, Eşitlik (6.41)'de verilmiştir. Ortak değişim katsayısının tahmin edicisine göre güvenilirlik formülü Eşitlik (6.26)'da yerine konulursa,

$$\hat{R}_{r_0} = P(X > Y) = \begin{cases} 1 - \frac{S_0}{R_0 + S_0} e^{-\frac{(R_0 - S_0)(1 - \hat{\gamma}_{r_0})}{\hat{\gamma}_{r_0} S_0}}, & R_0 > S_0 \\ \frac{R_0}{R_0 + S_0} e^{-\frac{(R_0 - S_0)(1 - \hat{\gamma}_{r_0})}{\hat{\gamma}_{r_0} R_0}}, & R_0 \leq S_0 \end{cases} \quad (6.46)$$

biçiminde elde edilmiş olur. Burada  $\hat{\gamma}_{r_0}$  Eşitlik (6.41)'de verildiği gibidir.

### 6.4. Örnek

Krishnamoorthy, Mukherjee ve Guo (2006) 'nın makalelerindeki örnek kullanılarak, ortak değişim katsayısının kullanıldığı güvenilirlik tahmini aşağıdaki gibi hesaplanmıştır.  $X \sim \text{Exp}(4,5)$  ve  $Y \sim \text{Exp}(1,2)$  olmak üzere veri benzetim ile elde edilmiştir. Rekor değer yapısına uygun veri aşağıda verildiği gibidir.

X: 4.21 4.88 5.17 5.64 6.31 7.42 7.89 8.14 8.27 9.92

10.45 10.59 11.37 12.98 13.94 14.18 14.19 14.94 18.83 20.91

Y: 1.07 1.09 1.16 1.17 1.65 1.98 2.12 2.13 2.54 3.18

3.19 3.30 3.33 3.40 3.62 4.29 5.80 5.95 6.39 6.74

Örneklem için elde edilen hesaplamalar,

$$\hat{\alpha}_1 = x_{(1)} = 4.21 \quad \bar{x} = 10.51 \quad \hat{\beta}_1 = \bar{x} - x_{(1)} = 6.3$$

$$\hat{\alpha}_2 = y_{(1)} = 1.07 \quad \bar{y} = 3.20 \quad \hat{\beta}_2 = \bar{y} - y_{(1)} = 2.13$$

biçimindedir. Eşitlik (4.4)' de bulunan değerler yerine yazılırsa,

$$\hat{R} = 0.942$$

olasılığı elde edilir.

Güvenirlilik tahmininde artan rekor değer formülü kullanılırsa,

$$\hat{\alpha}_1 = R_0 = 4.21 \quad \hat{\alpha}_2 = S_0 = 1.07$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{1}{n+1}(R_n - R_0) = 0.835 \quad \hat{\beta}_2 = \frac{1}{m+1}(S_m - S_0) = 0.2835$$

Eşitlik (6.45)' den aşağıdaki güvenirlilik olasılığı hesaplanır.

$$\hat{R}_r = P(X > Y)$$

$$= 1 - \frac{(n+1)(S_m - S_0)}{(m+1)(R_n - R_0) + (n+1)(S_m - S_0)} e^{-\frac{(m+1)(S_0 - R_0)}{(S_m - S_0)}}, \quad R_0 > S_0$$

$$\hat{R}_r = 0.999$$

Ortak değişim katsayısına bağlı güvenirlilik formülü kullanılırsa, güvenirlilik tahmin edicisi Eşitlik (6.26)' dan aşağıdaki gibi elde edilmiş olur.

$$\hat{R}_0 = 1 - \left[ \frac{y_{(1)}}{x_{(1)} + y_{(1)}} e^{-\frac{(x_{(1)} - y_{(1)})^2 x_{(1)} (n_1 + n_2)}{n_1 \bar{x} y_{(1)} + n_2 \bar{y} x_{(1)} - x_{(1)} y_{(1)} (n_1 + n_2)}} \right], \quad \alpha_1 > \alpha_2$$

$$\hat{R}_0 = 0.993$$

Ortak değişim katsayısı tahmin edicisi kullanıldığında, güvenirliliğin yükseldiği söylenebilir.

Artan rekor değerler kullanıldığında ortak değişim katsayısı tahmin edicisi ile hesaplandığında, Eşitlik (6.43)' deki artan rekor değerler için ortak değişim katsayısı formülünden Eşitlik (6.46)' daki güvenilirlik,

$$\hat{R}_{ro} = 1 - \frac{S_0}{R_0 + S_0} e^{-\frac{(R_0 - S_0)(1 - \hat{\gamma}_{ro})}{\hat{\gamma}_{ro} S_0}}, \quad R_0 > S_0$$

$$\hat{R}_{ro} = 0.9983$$

elde edilir. Bu durumda, rekor değer formüllerini kullanarak elde edilen güvenilirlik tahmini, kullanılmadığı duruma göre güvenilirlik 1'e daha yakın sonuç vermiştir. Ortak değişim katsayısını kullanıldığında ise, güvenirlığın daha da yükseldiği gözlenmiştir.

## 7. UYGULAMA

Önceki bölümlerde elde edilen bulgular, benzetim çalışması ile karşılaştırılmıştır. Bu karşılaştırma yapılırken iki kitlenin değişim katsayılarının ortak olması göz önüne alınarak kitlelerin değişim katsayıları belirlenmiştir. Buna göre ilk benzetim  $\text{Exp}(2,4)$  ve  $\text{Exp}(1,2)$ 'ye göre yapılmıştır. Bu iki kitlenin  $P(X>Y)$  güvenilirliği bulunmuştur. Daha sonra  $\text{Exp}(1,2)$  ile  $\text{Exp}(2,4)$  ve  $\text{Exp}(2,4)$  ile  $\text{Exp}(2,4)$  kitleleri karşılaştırılmıştır. Her durum için  $\hat{\alpha}_1, \hat{\beta}_1, \hat{\alpha}_2, \hat{\beta}_2, \hat{\gamma}_0, \hat{R}, \hat{R}_r, \hat{R}_o$  ve  $\hat{R}_{r0}$  hesaplanarak karşılaştırılmıştır. Örneklem büyüklükleri eşit,  $n_1 = n_2 = n$ , olduğu varsayılmıştır ve örneklem büyüklükleri  $n = 15, 20, 50$  ve  $100$  olarak alınmıştır. Her kombinasyon 100 kez tekrarlanmıştır. Bulunan güvenilirliğin aşağıdaki gibi yorumlanması gerekir.

$$0 \leq R = P(X > Y) \leq 1$$

$$R = P(X > Y) > 0.5 \text{ ise } X > Y,$$

$$R = P(X > Y) < 0.5 \text{ ise } X < Y,$$

$$R = P(X > Y) = 0.5 \text{ ise } X = Y \text{ dir.}$$

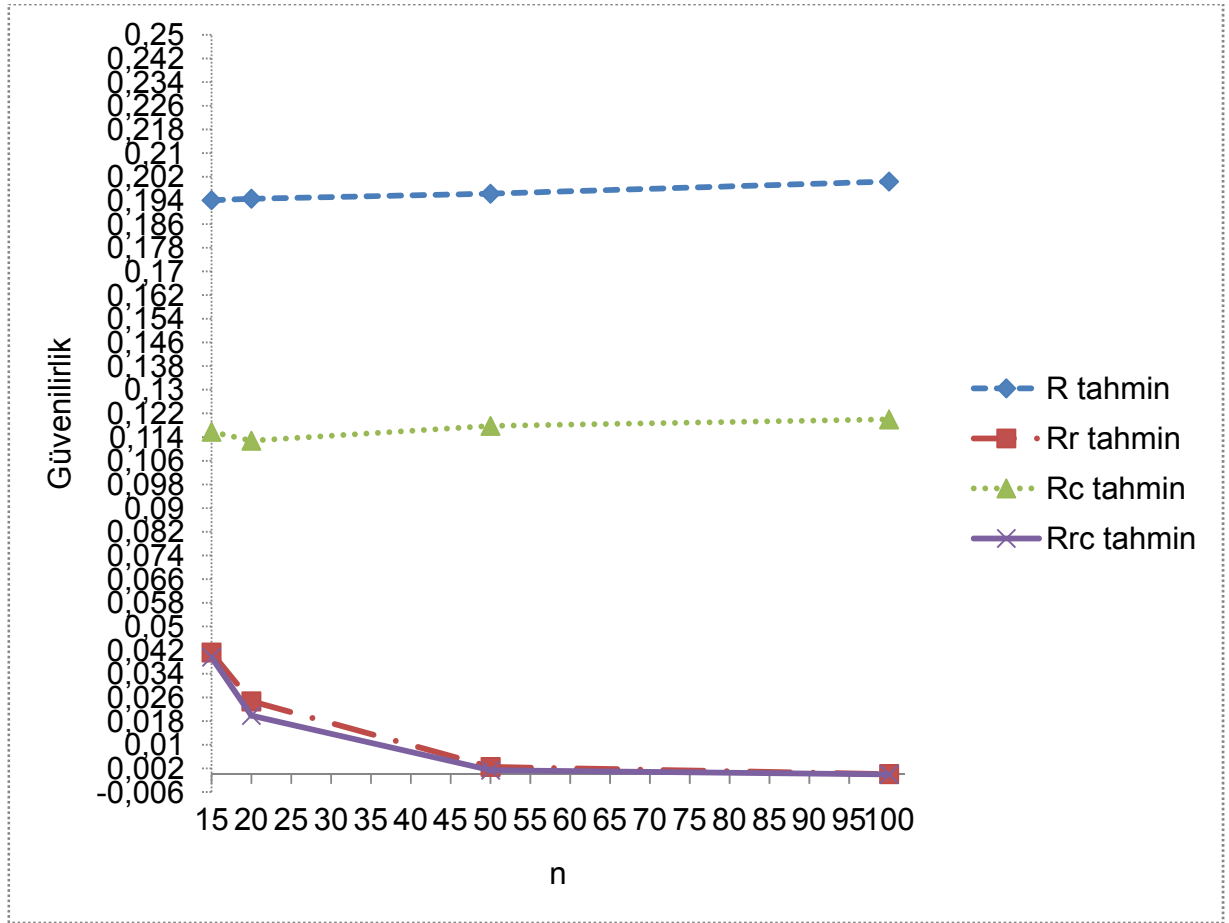
Eğer  $X > Y$  ise, güvenilirlik 1'e çok yakın bir değer olması,  $X < Y$  ise 0'a çok yakın bir değer olması beklenir.

Çizelge 7.1. Exp(1, 2) ve Exp(2, 4) kitlelerini n = 15, 20, 50 ve 100 iken  $R=P(X>Y)$ 'ye göre karşılaştırma sonuçları

Exp1 Exp2	n	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\gamma}_1$	$\hat{\gamma}_2$	$\hat{\gamma}_o$	$\hat{\gamma}_{ro}$	$\hat{R}$
$\alpha_1 = 1$ $\beta_1 = 2$ $\alpha_2 = 2$ $\beta_2 = 4$	15	1.1488	1.9227	2.2750	3.7632	-2.2951	-1.4784	0.4545	0.2701	0.1941
	20	1.0928	1.9433	2.1781	3.8184	-2.1752	-1.7302	0.4665	0.2364	0.1946
	50	1.0378	1.9628	2.0692	3.9824	-2.1450	-1.8945	0.4870	0.1425	0.1963
	100	1.0176	2.0062	2.0388	4.0140	-2.0191	-1.9751	0.4955	0.0919	0.2004

Çizelge 7.1.'de  $\text{Exp}(1, 2)$  ve  $\text{Exp}(2, 4)$  kitlelerinden benzetim yapılarak elde edilen örneklemelerin, Bölüm 7'de elde edilen güvenilirlik formülleri,  $\hat{R}$ ,  $\hat{R}_r$ ,  $\hat{R}_o$  ve  $\hat{R}_{ro}$  karşılaştırılmıştır. Örneklem büyüklükleri eşit ve 15, 20, 50 ve 100 iken karşılaştırma işlemleri yapılmıştır. Her kitle için  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  tahmin edicileri, rekor değer formülleri kullanılarak ve kullanılmadan ortak değişim katsayısı tahmin edicileri,  $\hat{\gamma}_o$ ,  $\hat{\gamma}_{ro}$  bulunmuştur.

Çizelge 7.1'de elde edilen sonuçlar yorumlanırsa,  $R=P(X>Y)$  'nin tahminleri,  $n = 100$  için  $\hat{R} = 0.2004$ ,  $\hat{R}_r = 0.0001$ ,  $\hat{R}_o = 0.1200$  ve  $\hat{R}_{ro} = 0.0000$  elde edilmiştir. Birinci örneklemelerin  $\alpha$  parametrelerinin tahminleri, ikinci örneklemin  $\alpha$  parametrelerinin tahminlerinden küçük olduğundan  $R$ 'nin değeri 0'a yakın bir değer olmalıdır.  $\hat{R} = 0.2004$  ve  $\hat{R}_r = 0.0001$  değerleri karşılaştırılacak olursa,  $\hat{R}_r$ , 0'a daha yakın olduğundan, rekor değer formülasyonlarının kullanılmasının daha yüksek güvenilirlik verdiğini söyleyebiliriz.  $\hat{R} = 0.2004$  ve  $\hat{R}_o = 0.1200$  değerleri karşılaştırılırsa,  $\hat{R}_o$ 'nin, 0'a daha yakın olması nedeniyle ortak değişim katsayısının kullanılmasının güvenilirliği yükselttiği söylenebilir.  $\hat{R}_r = 0.0001$  ve  $\hat{R}_{ro} = 0.0000$  karşılaştırılacak olursa, rekor değer formülleri kullanıldığında, ortak değişim katsayısını içeren güvenilirlik formülasyonunun daha iyi sonuçlar verdiği söyleyebilir. Sonuç olarak, güvenilirlik hesaplamasında, rekor değer formülasyonları ve ortak değişim katsayısı kullanıldığında güvenirliliğin yükseldiği söylenebilir.



Şekil 7.1. Exp(1, 2) ve Exp(2, 4) kitlelerini n = 15, 20, 50 ve 100 iken karşılaştırma sonuçlarının grafiği

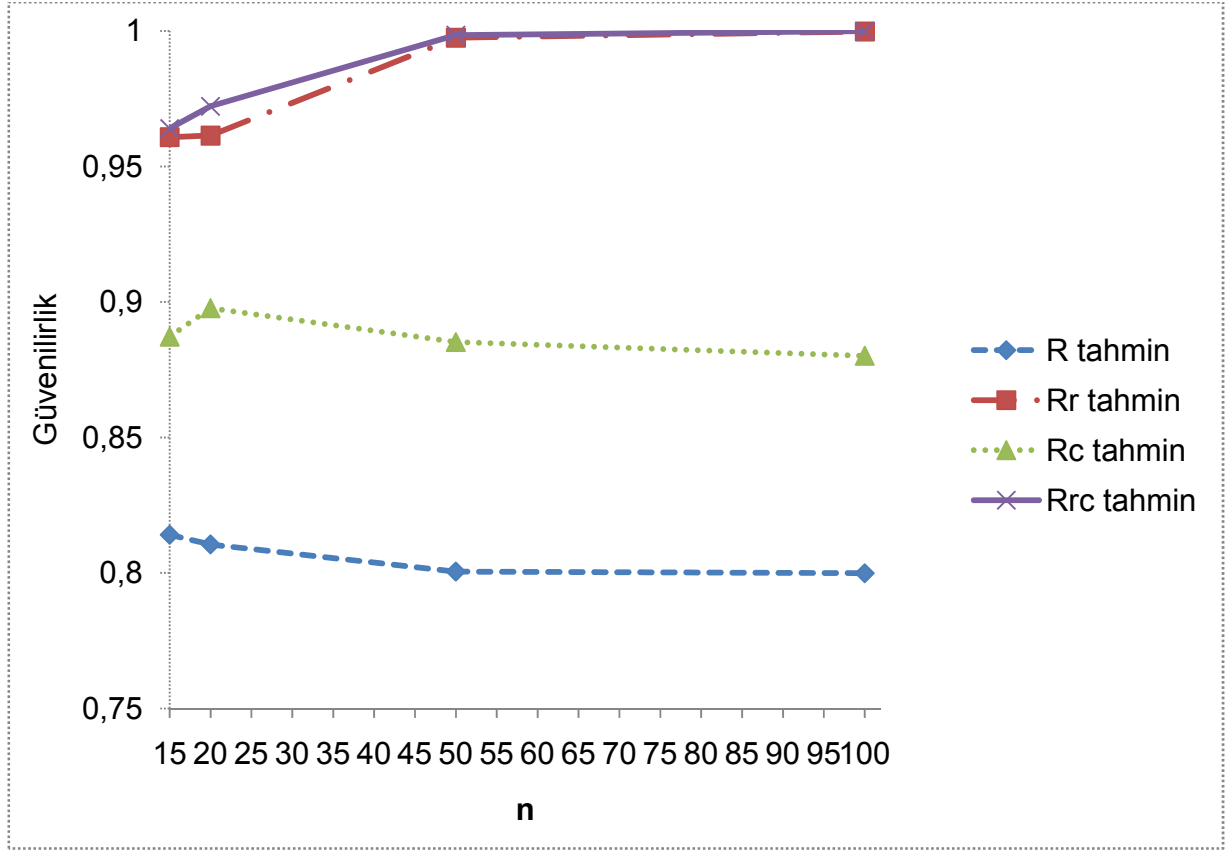
Grafik incelendiğinde,  $\hat{R}$  ve  $\hat{R}_0$  arasındaki fark, ortak değişim katsayısının kullanılması sonucunda güvenirliliğin yükseldiğini göstermektedir.  $\hat{R}$  ve  $\hat{R}_0$  ile  $\hat{R}_r$  ve  $\hat{R}_{r0}$  arasındaki fark rekor değer tahmin edicilerinin kullanılmasının güvenirlilik üzerinde oluşturduğu farkı göstermektedir. Güvenirliliğin sıfıra en yakın olduğu sonuçlar,  $\hat{R}_r$  ve  $\hat{R}_{r0}$  için olmuştur. Hatta  $\hat{R}_{r0}$ , daha sıfıra yakın olduğu görülmektedir. Örneklem büyüklüğü arttıkça,  $\hat{R}_r$  ve  $\hat{R}_{r0}$ ' nun diğer tahmin edicilere göre daha çok değişim gösterdiği görülmektedir. Sonuç olarak grafik üzerinde de rekor değer tahmin edicileri kullanıldığında ve ortak değişim katsayısı kullanıldığında daha iyi güvenirliliğin elde edildiği söylenebilir.

Çizelge 7.2. Exp(2, 4) ve Exp(1, 2) kitlelerini n = 15, 20, 50 ve 100 iken  $R=P(X>Y)$ 'ye göre karşılaştırma sonuçları

Exp1 Exp2	n	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\gamma}_1$	$\hat{\gamma}_2$	$\hat{\gamma}_0$	$\hat{\gamma}_{ro}$	$\hat{R}$
$\alpha_1 = 2$ $\beta_1 = 4$ $\alpha_2 = 1$ $\beta_2 = 2$	15	2.2722	3.7632	1.1513	1.8501	-2.0246	-1.6142	0.4493	0.2650	0.8141
	20	2.2731	3.7036	1.1238	1.9044	-1.1105	-1.6330	0.4518	0.2650	0.8105
	50	2.0783	3.8580	1.0392	1.9598	-1.7732	-1.8744	0.4826	0.1438	0.8005
	100	2.0305	3.9007	1.0230	1.9574	-2.0276	-2.2011	0.4888	0.0903	0.7999

Çizelge 7.2.'de  $\text{Exp}(2, 4)$  ve  $\text{Exp}(1, 2)$  kitlelerinden benzetim yapılarak elde edilen örneklerin Bölüm 6'da elde edilen güvenilirlik formülleri,  $\hat{R}$ ,  $\hat{R}_r$ ,  $\hat{R}_o$  ve  $\hat{R}_{ro}$  karşılaştırılmıştır. Örneklem büyüklükleri eşit ve 15, 20, 50 ve 100 iken karşılaştırma işlemleri yapılmıştır. Her kitle için  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  tahmin edicileri, rekor değer formülleri kullanılarak ve kullanılmadan ortak değişim katsayısı tahmin edicileri,  $\hat{\gamma}_o$ ,  $\hat{\gamma}_{ro}$  bulunmuştur.

Çizelde 7.2'de elde edilen sonuçlar yorumlanırsa,  $R=P(X>Y)$  'nin tahmin edicileri,  $n = 100$  için  $\hat{R} = 0.7999$ ,  $\hat{R}_r = 0.9998$ ,  $\hat{R}_o = 0.8801$  ve  $\hat{R}_{ro} = 0.9999$  elde edilmiştir. Birinci örneklerin  $\alpha$  parametrelerinin tahminleri, ikinci örneğin  $\alpha$  parametrelerinin tahminlerinden büyük olduğundan  $R$ 'nin değeri 1'e yakın bir değer olmalıdır.  $\hat{R} = 0.7999$  ve  $\hat{R}_r = 0.9998$  değerlerini karşılaştıracak olursak,  $\hat{R}_r$ , 1'e daha yakın olduğundan, rekor değerlerin kullanılmasının daha yüksek güvenilirlik sağladığı söylenebilir.  $\hat{R} = 0.7999$  ve  $\hat{R}_o = 0.8801$  değerleri karşılaştırılırsa,  $\hat{R}_o$ 'nin, 1'e daha yakın olması nedeniyle ortak değişim katsayısının kullanılmasının daha yüksek güvenilirlik sağladığı söylenebilir.  $\hat{R}_r = 0.9998$  ve  $\hat{R}_{ro} = 0.9999$  karşılaştırılırsa, rekor değer formülleri kullanıldığında, ortak değişim katsayısını içeren güvenilirlik formülasyonunun güvenirliliği yükselttiği söylenebilir. Sonuç olarak, güvenilirlik hesaplamasında, rekor değer formülasyonları ve ortak değişim katsayısı kullanıldığında daha yüksek güvenilirlik elde edildiği söylenebilir.



Şekil 7.2. Exp(2, 4) ve Exp(1, 2) kitlelerini n = 15, 20, 50 ve 100 iken karşılaştırma sonuçlarının grafiği

Grafik incelendiğinde,  $\hat{R}$  ve  $\hat{R}_0$  arasındaki fark, ortak değişim katsayısının kullanılması sonucunda güvenirliliğin yükseldiğini göstermektedir.  $\hat{R}$  ve  $\hat{R}_0$  ile  $\hat{R}_r$  ve  $\hat{R}_{r0}$  arasındaki fark rekor değer tahmin edicilerinin kullanılmasının güvenirlilik üzerinde oluşturduğu farkı göstermektedir. Güvenirliliğin bire en yakın olduğu sonuçlar,  $\hat{R}_r$  ve  $\hat{R}_{r0}$  için olmuştur. Hatta  $\hat{R}_{r0}$ , daha bire yakın olduğu görülmektedir. Örneklem büyüklüğü arttıkça,  $\hat{R}_r$  ve  $\hat{R}_{r0}$ ' nun diğer tahmin edicilere göre daha çok değişim gösterdiği görülmektedir. Sonuç olarak grafik üzerinde de rekor değer tahmin edicileri kullanıldığında ve ortak değişim katsayısı kullanıldığında güvenirliliğin yükseldiği söylenebilir.

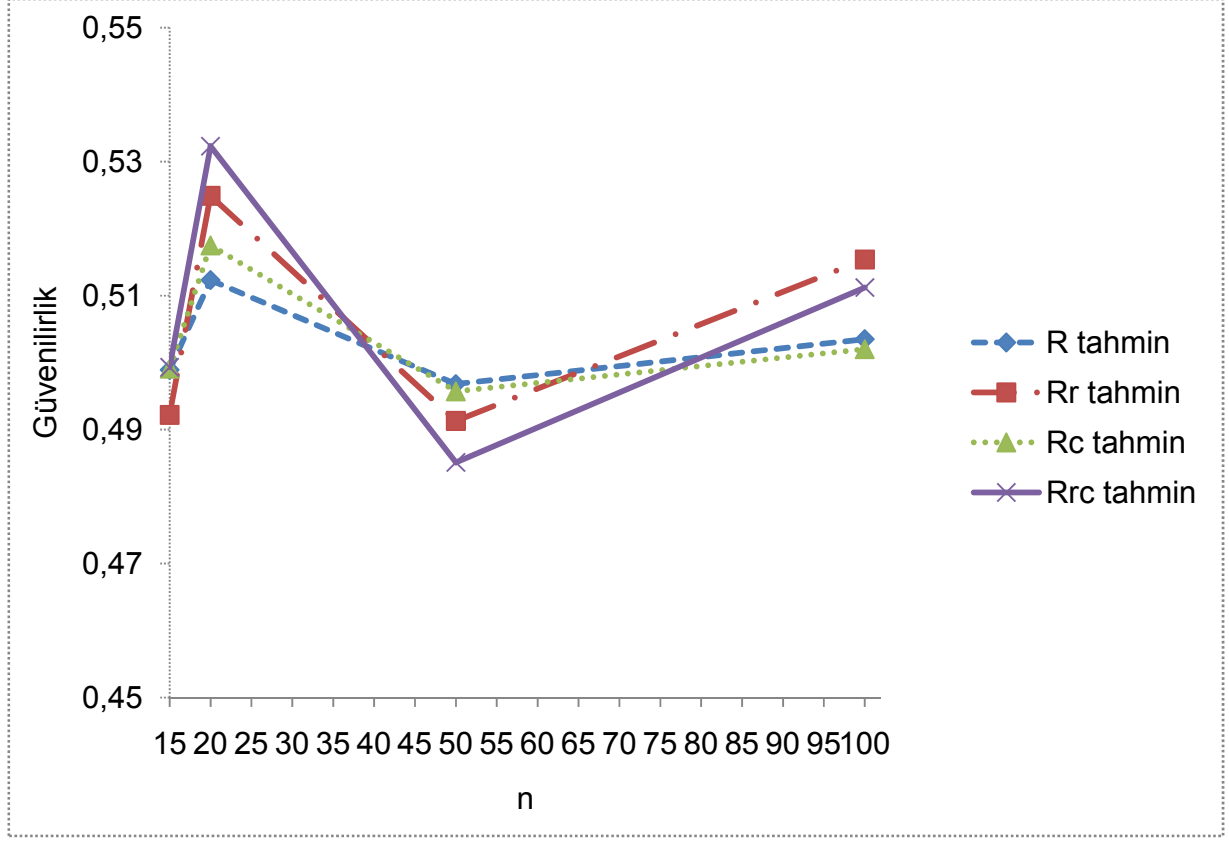
Çizelge 7.3. Exp(2, 4) ve Exp(2, 4) kitlelerini n = 15, 20, 50 ve 100 iken  $R=P(X>Y)$ 'ye göre karşılaştırma sonuçları

Exp1 Exp2	n	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{Y}_1$	$\hat{Y}_2$	$\hat{Y}_0$	$\hat{Y}_{ro}$	$\hat{R}$
$\alpha_1 = 2$ $\beta_1 = 4$ $\alpha_2 = 2$ $\beta_2 = 4$	<b>15</b>	2.3058	3.7782	2.3227	3.7868	-2.2028	-1.8608	0.4498	0.2567	0.4989
	<b>20</b>	2.2107	3.8592	2.1580	3.7657	-1.4731	-1.8609	0.4642	0.2376	0.5123
	<b>50</b>	2.0788	3.9839	2.0884	3.9992	-1.6057	-1.5900	0.4881	0.1464	0.4968
	<b>100</b>	2.0405	4.0259	2.0352	3.9800	-1.7749	-2.2415	0.4949	0.0898	0.5035

Çizelge 7.3 'de Exp (2, 4) ve Exp (2, 4) kitlelerinden benzetim yapılarak elde edilen örneklemelerin Bölüm 6'da elde edilen güvenilirlik formülleri,  $\hat{R}$ ,  $\hat{R}_r$ ,  $\hat{R}_o$  ve  $\hat{R}_{ro}$  karşılaştırılmıştır. Örneklem büyüklükleri eşit ve 15, 20, 50 ve 100 iken karşılaştırma işlemleri yapılmıştır. Her kitle için  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  tahmin edicileri, rekor değer formülleri kullanılarak ve kullanılmadan ortak değişim katsayısı tahmin edicileri,  $\hat{\gamma}_o$ ,  $\hat{\gamma}_{ro}$  bulunmuştur.

Çizelge 7.3.'de elde edilen sonuçlar yorumlanırsa,  $R = P(X>Y)$  'nin tahmin edicileri,  $n = 100$  için  $\hat{R} = 0.5035$ ,  $\hat{R}_r = 0.5154$ ,  $\hat{R}_o = 0.5020$  ve  $\hat{R}_{ro} = 0.5112$  elde edilmiştir. Birinci örneklemelerin  $\alpha$  parametrelerinin tahmini, ikinci örneklemin  $\alpha$  parametresinin tahmininden çok az da olsa büyük ya da küçük olması R üzerinde fark oluşturmaktadır. Her iki örneklemin  $\alpha$  parametrelerinin tahminlerinin eşit olması durumunda, R'nin değeri 0.5'e yakın bir değer olmalıdır. Çok az farkla da olsa,  $\hat{\alpha}_1 > \hat{\alpha}_2$  olduğundan, R'nin 0.5'den daha büyük olması beklenir.  $\hat{R} = 0.5035$  ve  $\hat{R}_r = 0.5020$ ,  $\hat{R}_o = 0.5154$  ve  $\hat{R}_{ro} = 0.5112$  'den daha büyük olduğundan, rekor değer formülasyonlarının kullanılmasının daha yüksek güvenilirlik verdiği söylenebilir.

Çizelgelerde elde edilen tüm sonuçlar incelendiğinde, örneklem büyüklüğü arttıkça, daha yüksek güvenilirlik elde edildiği görülmektedir. Yapılan denemeler sonucunda örneklem büyüklükleri arasında çok büyük farklar olmadıkça, sonuçlar üzerinde çok büyük farklar oluşmamıştır.



Şekil 7.3. Exp(2, 4) ve Exp(2, 4) kitlelerini n = 15, 20, 50 ve 100 iken karşılaştırma sonuçlarının grafiği

Grafik incelendiğinde,  $\hat{R}$ ,  $\hat{R}_r$ ,  $\hat{R}_o$  ve  $\hat{R}_{r0}$  arasında şu şekilde bir fark görülmektedir; dalgalanma açısından  $\hat{R}$ ,  $\hat{R}_o$ ,  $\hat{R}_r$ ,  $\hat{R}_{r0}$  sıralaması yapılabilir. Bu durum, bu tahmin edicilerin sırasıyla  $\hat{\alpha}$ 'lere daha duyarlı olduğunu göstermektedir.  $\hat{\alpha}$ 'ler arasındaki fark bire ya da sıfıra yakın olmasına göre sırasıyla  $\hat{R}_{r0}$ ,  $\hat{R}_r$ ,  $\hat{R}_o$  ve  $\hat{R}$ 'de daha büyük fark oluşmaktadır.

## 8. SONUÇ VE TARTIŞMA

Bu çalışmada, iki parametrelili üstel dağılım için, ortak değişim katsayısının tahmin edicisi bulunması amaçlanmıştır. Ayrıca rekor değerler için de ortak değişim katsayısının bulunması ve güvenilirlik formülasyonlarında bu tahmin ediciler kullanılıp, güvenilirlik değerine göre karşılaştırma yapılması amaçlanmıştır.

İki parametrelili üstel dağılıma göre ortak değişim katsayısının en çok olabilirlik tahmin edicisi elde edilmiştir. Daha sonra rekor değerlere göre yine ortak değişim katsayısının en çok olabilirlik tahmin edicisi elde edilmiştir. Güvenirlik formülasyonları bulunan tahmin edicilere göre uyarlanmıştır.

Literatürde yapılan güvenilirlik hesaplamaları ile elde edilen yeni ortak değişim katsayısı tahmin edicisine göre güvenilirlik tahminleri karşılaştırılmıştır. Bu durumda literatürde bilinen güvenilirlik formülleriyle elde edilen güvenilirlik tahmini, rekor değer tahmin edicilerine göre uyarlanmış güvenilirlik tahmini, ortak değişim katsayısına göre elde edilen güvenilirlik tahmini ve rekor değerlere göre ortak değişim katsayısının tahmin edicisinin kullanılarak elde edilen güvenilirlik tahmini birbiri ile karşılaştırılmıştır.

Benzetim çalışmasında, farklı değişim katsayısı kombinasyonları, farklı örneklem büyüklükleri için, elde edilen ortak değişim katsayısı tahmin edicilerine göre uyarlanmış güvenilirlik tahminleri elde edilmiştir.

Sonuçlar karşılaştırıldığında, literatürde yapılagelen güvenilirlik tahminine göre rekor değer tahmin edicileriyle elde edilen güvenilirliğin daha yüksek olduğu görülmüştür. İkinci karşılaştırma literatürde bilinen yöntemlerle yapılan güvenilirlik tahmini ile ortak değişim katsayısı kullanılarak güvenilirlik tahmini arasında yapılmıştır. Ortak değişim katsayısının kullanılmasının güvenirliliği yükselttiği görülmüştür. Üçüncü karşılaştırma, rekor değerler kullanıldığında güvenilirlik tahminleri ile rekor değerlerle birlikte ortak değişim katsayısı tahmin edicisine göre uyarlanmış güvenilirlik tahminleri arasında yapılmıştır. Bu durumda da yine ortak değişim katsayısı tahmin edicisinin kullanılmasının güvenirliliği yükselttiği görülmüştür.

Sonuç olarak, iki grubun değişim katsayıları için bir ortak değişim katsayısının kullanılması söz konusu ise ortak değişim katsayısı tahmin edicisinin kullanılmasının, güvenilirlik analizi sonucunda daha iyi olduğu söylenebilir. Ayrıca eğer kullanılan veri rekor değer özelliği taşıyorsa, rekor değerlere göre elde edilen tahmin edicilerin kullanılması gerektiği sonucuna varılmıştır.

Bu çalışmada yer alan tüm işlemler başka dağılımlar için de geliştirilebilir. Örneğin üstel dağılım ailesinden olan Weibull dağılımı, genelleştirilmiş üstel dağılım, karışık üstel dağılım için uygulanabilir.

Değişim katsayılarının eşitliği yani ortak değişim katsayısı ile ifade edilebilmesi için test istatistiği geliştirilebilir.

BLUE ve shrinkage gibi farklı tahmin edici yöntemleri kullanılarak ortak değişim katsayısı tahmin edicisi elde edilebilir, değişim katsayılarının eşitliği için test istatistiği geliştirilebilir.

Bu çalışmada artan rekor değerler için tahmin ediciler elde edilmiştir, aynı işlemler azalan rekor değerler için de yapılabilir.

## KAYNAKLAR

- Ahmed, S. E., 1995, A Pooling Methodology for Coefficient of Variation, Sankhya : The Indian Journal of Statistics, Volume 57, Series B, Pt.1, pp. 57-75.
- Ahsanullah, M., 2004, Record Values-Theory and Applications, University Press of America, pp. 322, USA.
- Arnold, B. C., Balakrishnan, N., Nagaraja, H.N., 1998, Records, John Willey & Sons, Inc., pp. 312, Canada.
- Baklizi, A., 2006, Inference: Asymptotic and Resampling-Based Confidence Intervals for  $P(X < Y)$ , Communications in Statistics-Simulation and Computation, 35, pp. 295-307.
- Baklizi, A., 2008, Ordered Data Analysis: Estimation of  $\Pr(X < Y)$  Using Record Values in the One and Two Parameter Exponential Distributions, Communications in Statistics-Theory and Methods, 37, pp. 692-698.
- Barlevy, G., 2005, Identification of Search Models Using Record Statistics, Economics Colloquium University of California, Irvine, pp. 31.
- Barlow, R. E., 2002, Mathematical Reliability Theory: From The Beginning to the Present Time, Series on Quality, Reliability and Engineering Statistics, Vol. 7, 2002.
- Bennett, B.M., 1976, On an Approximate Test for Homogeneity of Coefficients of Variation, Contributions to Applied Statistics, Walter Joh. Ziegler, Birkhauser Verlag, Basel and Stuttgart, pp. 169-171.

- Bhoj, D. S., Ahsanullah, M., 1993, Testing Equality of Coefficient of Variation of Two Populations, *Biom.J.*, 35 (1993)3, pp. 355-359.
- Bonett, D. G., 2006, Confidence Interval for a Coefficient of Quartile Variation, *Computational Statistics and Data Analysis*, Vol.50, pp. 785-782.
- Bonett D. G., Serier E., 2005, Confidence Interval for a Coefficient of Dispersion in Nonnormal Distributions, *Biomedical Journal*, 47(2005)5, pp. 1-5.
- Doornbos, R., Dijkstra, J.B., 1983, A Multi Sample Test For The Equality of Coefficient of Variation In Normal Population, *Commun.Statist-Simula. Computa.*, 12(2), pp. 147- 158.
- Dudewicz, S., Mishra, N., 1987, *Modern Mathematical Statistics*, John Wiley & Sons, New York.
- Engineering statistics handbook, 2008 ,  
<http://www.itl.nist.gov/div898/handbook/apr/section1/apr161.htm>
- Feltz, C.J., Miller, G.E., 1996, An Asymptotic Test for the Coefficients of Variation From k Populations, *Statistics in Medicine*, 15, 647-658.
- Forkman, F.J., 2005, *Coefficient of Variation-an Approximate F-Test*, SLU, M.Sc. Thesis, Upsala.
- Fung W. K., Tsang, T. S., 1998, A Simulation Study Comparing Tests for the Equality of Coefficients of Variation, *Statistics in Medicine*, 17, pp.2003-2014.
- Gerig, T. M., Sen A. R., 1980, MLE in Two Normal Samples With Equal but Unknown Population Coefficient of Variation, *Journal of the American Statistical Association*, September 1980, Volume 75, Number 371, Theory and Methods Section, pp. 704-708.

- Gupta, R. C., Ma, S., 1996, Testing the Equality of Coefficients of Variation in K Normal Populations, *Commun.Statist.-Theory Math.*, 25(1), pp. 115-132.
- Gupta, R., Ramakrishnan, S., Zhou, X., 1999, Point and interval Estimation of  $P(X<Y)$ : The Normal Case With Common Coefficient of Variation, *Ann.Inst. Statist. Math.* Vol.51, No.3, pp. 571-584.
- Iglewicz, B., Myers, R.H., 1970, Comparisons of Approximations to the Percentage Points of the Sample Coefficient of Variation, *Technometrics*, Vol.12, No.1, pp.166-169.
- İnan, A., 2004, *MATLAB ve Programlama*, Papatya Yayımcılık Eğitim, pp. 608 , İstanbul,Türkiye.
- Jaheen, Z. F., 2005, On record statistics from a mixture of two exponential distributions, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, Vol. 75, No.1, January 2005, pp. 1-11.
- Johnson, N. L., Kotz, S., 1970, *Continuous Univariate Distributions-1*, pp. 344, Boston, USA.
- Johnson, N. L., Kotz, S., Balakrishnan, N., 1994, *Continuous Univariate Distributions-2*, John- Wiley and Sons, pp. 410, USA.
- Kotz, S., Lumel'skii, I., Pensky, M., 2003, *The Stress-Strength Model and its generalizations: Theory and Applications*, Singapore: River Edge, NJ: World Scientific.
- Keller-McNulty, S. A., Wilson, A., G., 2002, *Reliability for the 21<sup>st</sup> Century*, Series on Quality, Reliability and Engineering Statistics, Vol.7, 2002.

- Krishnamoorthy, K., Mukherjee, S., Guo, H., 2006, Inference on reliability in two-parameter exponential stress-strength model, *Metrika*, DOI10.1.1007/s00184-006-0074-7, Springer-Verlag.
- Lindqvist, B.H., Doksum, K.A., 2002, *Mathematical and Statistical Methods in Reliability*, Series on Quality, Reliability and Engineering Statistics, Vol.7, 2002.
- McKay, A.T., 1932, Distribution of the Coefficient of Variation and the Extended 't' Distribution, *Journal of the Royal Statistical Society*, Vol. 95, 695-698.
- Miller, E.G., Karson, M.J., 1977, Testing Equality of Two Coefficients of Variation, *American Statistical Association: Proceedings of the Business and Economics Section*, Part I, 278-283.
- Pal, M., Ali, M. M., Woo, J., 2005, Estimation and testing of  $P(Y < X)$  in two-parameter exponential distributions, *Statistics*, Vol. 39, No. 5, October 2005, pp. 415-428.
- Pal, N., Jin, C., Lim, W. K., 2006, *Handbook of Exponential and Related Distributions for Engineers and Scientists*, Chapman & Hall, USA.
- Rao, K.A., Vidya, R., 1992, On the Performance of a Test for Coefficient of Variation, *Calcutta Statistical Association Bulletin*, Vol. 42, Nos. 165-66, 87-95.
- Shafer, N. J., Sullivan, J. A., 1986, A Simulation Study of A Test for The Equality of the Coefficient of Variation, *Commun.Statist-Simula.*, 15(3), pp. 681-695.
- Singh, M., 1993, Behaviour of Sample Coefficient of Variation Drawn from Several Distributions, *Sankhya: The Indian Journal of Statistics*, Volume 55, Series B, Pt.1, pp. 65-76.

Tian, L., 2005 , Inferences on the Common Coefficient of Variation, *Statistics in Medicine*, 2005, 24, pp. 2213-2220.

Vangel, M.G.,1996, Confidence Intervals for a Normal Coefficient of Variation, *The American Statistician*, Vol. 15, No.1, pp. 21-26.

Weerahandi, S., Johnson, R., A., 1992, Testing Reliability in a Stress-Strength Model When X and Y are Normally Distributed, *American Statistical Association and The American Society for Quality Control, Technometrics*, February, Vol. 34, No. 1.

Wikipedia, 2008, [http://en.wikipedia.org/wiki/ Reliability](http://en.wikipedia.org/wiki/Reliability)

## **EK 1. ÇİZELGE 7.1., ÇİZELGE 7.2. VE ÇİZELGE 7.3.'DE YER ALAN DEĞERLERİ BULMAK İÇİN KULLANILAN BİLGİSAYAR PROGRAMI**

Bu bilgisayar program hazırlanırken, İnan (2004)'ın MATLAB ve Programlama adlı kitabından faydalanılmıştır.

```
%Reliability of Two parameter-Exponential Distribution
%First part: generating data- two parameter exponential distribution
clear all
repeat=100;
for r=1:1:repeat;
n1=100;%first sample size
for n=1:1:n1;
mu1=2;%location parameter is first distribution
sigma1=4;%scale parameter is first distribution
y1=rand(1,1);%y is probability that is interval 0-1.
X(n)=-log(1-y1)*sigma1+mu1;%This function get from Exp.Disp.Cum.Dist.Funct.
end
Xo=sort(X);%record values for first sample
mu1est(1,r)=min(Xo);%location parameter estimation for first sample
n2=100;%second sample size
for m=1:1:n2;
mu2=2;%location parameter is second distribution
sigma2=4;%scale parameter is second distribution
y2=rand(1,1);%y is probability that is interval 0-1.
Y(m)=-log(1-y2)*sigma2+mu2;%This function get from Exp.Disp.Cum.Dist.Funct.
end
Yo=sort(Y);%record values for second sample
mu2est(1,r)=min(Yo);%location parameter estimation for second sample
Xmean=mean(X);%sample mean for first sample
Ymean=mean(Y);%sample mean for second sample
sigma1est(1,r)=Xmean-mu1est(1,r);%scale parameter estimation for first sample
```

```

sigma2est(1,r)=Ymean-mu2est(1,r);%scale parameter estimation for second sample
cov1=1-(Xmean/mu1est(1,r));%coefficient of variation estimation for first sample
cov2=1-(Ymean/mu2est(1,r));%coefficient of variation estimation for second sample
Rn=max(Xo);%n.record value
Sm=max(Yo);%m.record value
%common coefficient of variation
E=(n1*Xmean*mu2est(1,r)+(n2*Ymean*mu1est(1,r))-
(mu1est(1,r)*mu2est(1,r)*(n1+n2)));
F=(n1*Xmean*mu2est(1,r)+(n2*Ymean*mu1est(1,r))+(mu1est(1,r)*mu2est(1,r)*(n1+n2)
);
commoncov(1,r)=E/F;%common coefficient of variation for two-parameter exponential
distribution
S=(Rn*mu2est(1,r)+(Sm*mu1est(1,r))-2*(mu1est(1,r)*mu2est(1,r)));
T=(Rn*mu2est(1,r)+(Sm*mu1est(1,r))+((n+m)*mu1est(1,r)*mu2est(1,r)));
recommon(1,r)=S/T;
%reliability P(X>Y)
if mu1est(1,r)>mu2est(1,r)
    %mu1>mu2
    %R's estimator
    A=sigma2est(1,r)/(sigma1est(1,r)+sigma2est(1,r));
    B=(mu2est(1,r)-mu1est(1,r))/sigma2est(1,r);
    R(1,r)=1-(A*(exp(B)));
    %R's estimator with record estimators while mu1>mu2
    K=(n*(Sm-mu2est(1,r)))/((m*(Rn-mu1est(1,r)))+(n*(Sm-mu2est(1,r))));
    L=((mu2est(1,r)-mu1est(1,r))*m)/(Sm-mu2est(1,r));
    M=exp(L);
    Rrecord(1,r)=1-(K*M);
    %R's estimation using common coefficient of variation
    G=mu2est(1,r)/(mu1est(1,r)+mu2est(1,r));
    H=((mu2est(1,r)-mu1est(1,r))*(1-commoncov(1,r)))/(commoncov(1,r)*mu2est(1,r));
    Rcommon(1,r)=1-(G*exp(H));%Rcommon

```

```

    %R estimate using record common coefficient of variation
    U=mu2est(1,r)/(mu1est(1,r)+mu2est(1,r));
    V=((mu2est(1,r)-mu1est(1,r))*(1-recommon(1,r)))/(recommon(1,r)*mu2est(1,r));
    Rrecommon(1,r)=1-(U*exp(V));%Rrecommon
else
    %mu1<mu2
    %R's estimator
    C=sigma1est(1,r)/(sigma1est(1,r)+sigma2est(1,r));
    D=(mu1est(1,r)-mu2est(1,r))/sigma1est(1,r);
    R(1,r)=C*(exp(D));
    %%R's estimator with record estimators while mu1<mu2
    N=(m*(Rn-mu1est(1,r)))/((m*(Rn-mu1est(1,r)))+(n*(Sm-mu2est(1,r))));
    O=((mu1est(1,r)-mu2est(1,r))*n)/(Rn-mu1est(1,r));
    P=exp(O);
    Rrecord(1,r)=N*P;
    %R's estimation using common coefficient of variation
    I=mu1est(1,r)/(mu1est(1,r)+mu2est(1,r));
    J=((mu1est(1,r)-mu2est(1,r))*(1-commoncov(1,r)))/(commoncov(1,r)*mu1est(1,r));
    Rcommon(1,r)=I*exp(J);%Reliability using common
    %R estimator using record common coefficient of variation
    W=mu1est(1,r)/(mu1est(1,r)+mu2est(1,r));
    X=((mu1est(1,r)-mu2est(1,r))*(1-recommon(1,r)))/(recommon(1,r)*mu1est(1,r));
    Rrecommon(1,r)=W*exp(X); %Reliability using record common
end
disp(' ')
disp(' mu1est   sigma1est  mu2est  sigma2est  cov1  cov2  commoncov
recommon    R   Rrecord  Rcommon Rrecommon ')
fprintf('%f ',mu1est );
fprintf('%f ',sigma1est );
fprintf('%f ',mu2est );
fprintf('%f ',sigma2est );

```

```

fprintf('%f ',cov1 );
fprintf('%f ',cov2 );
fprintf('%f ',commoncov );
fprintf('%f ',recommon );
fprintf('%f ',R );
fprintf('%f ',Rrecord );
fprintf('%f ',Rcommon );
fprintf('%f ',Rrecommon );
end
ortmu1est=mean(mu1est);
ortsigma1est=mean(sigma1est);
ortmu2est=mean(mu2est);
ortsigma2est=mean(sigma2est);
ortcov1=mean(cov1);
ortcov2=mean(cov2);
ortcommoncov=mean(commoncov);
ortrecommon=mean(recommon);
ortR=mean(R);
ortRrecord=mean(Rrecord);
ortRcommon=mean(Rcommon);
ortRrecommon=mean(Rrecommon);
disp(' ')
disp('ortmu1est ortsigma1est ortmu2est ortsigma2est ortcov1 ortcov2
ortcommoncov ortrecommon ortR ortRrecord ortRcommon ortRrecommon ');
fprintf('%f ',ortmu1est );
fprintf('%f ',ortsigma1est );
fprintf('%f ',ortmu2est );
fprintf('%f ',ortsigma2est );
fprintf('%f ',ortcov1 );
fprintf('%f ',ortcov2 );
fprintf('%f ',ortcommoncov );

```

```
fprintf('%f ',ortrecommon );  
fprintf('%f ',ortR );  
fprintf('%f ',ortRrecord );  
fprintf('%f ',ortRcommon );  
fprintf('%f ',ortRrecommon );
```

## ÖZGEÇMİŞ

**Adı Soyadı** : Nurten Bıyıklı

**Doğum Yeri** : Trabzon

**Doğum Yılı** : 20 Mart 1976

### Eğitim ve Akademik Durumu

**Lise** : 1989-1992 Of Şehit Ahmet Türkkkan Lisesi

**Lisans** : 1993-1998 Gazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi İstatistik Bölümü

**Yabancı Dil** : 1999-2000 Orta Doğu Teknik Üniversitesi Yabancı Diller Yüksek Okulu

**Yüksek Lisans:** 2000-2003 Hacettepe Üniversitesi Fen Fakültesi İstatistik Bölümü

**Özel Çalışma** : 2006-2008 Rider University, Department of Management Science,  
New Jersey,USA, International Student

**Yabancı Dil** : İngilizce

### İş Tecrübesi

2000 – 2009 İnönü Üniversitesi adına Hacettepe Üniversitesi İstatistik Bölümü'nde  
Araştırma Görevlisi

