



T.C.  
GAZİOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**ÇÖZÜLEBİLEN BAZI ÖZDEĞER  
DENKLEMLERİNİN LİE CEBRİ İLE  
YENİDEN ÇÖZÜLMESİ VE ÜÇ PARAMETRELİ  
LİE GRUPLARININ TEMSİLLERİ**

**İbrahim ÇİNAR**

**Yüksek Lisans Tezi  
Fizik Anabilim Dalı  
Doç. Dr. Naci SÜNEL  
2009**

**Her hakkı saklıdır**

T.C.  
GAZİOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
FİZİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**ÇÖZÜLEBİLEN BAZI ÖZDEĞER DENKLEMLERİNİN LİE CEBRİ  
İLE YENİDEN ÇÖZÜLMESİ VE ÜÇ PARAMETRELİ LİE  
GRUPLARININ TEMSİLLERİ**

İbrahim ÇİNAR

TOKAT  
2009

Her hakkı saklıdır

Doç. Dr. Naci SÜNEL danışmanlığında, İbrahim ÇİNAR tarafından hazırlanan bu çalışma 14/07/2009 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/oy çokluğu ile Fizik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Doç. Dr. Naci SÜNEL

İmza:

Üye: Prof. Dr. Bahtiyar MEHMETOĞLU

İmza:

Üye: Prof. Dr. Oktay MUHTAROĞLU

İmza:

**Yukarıdaki sonucu onaylarım**  
(İmza)

Prof. Dr. Metin YILDIRIM  
**Enstitü Müdürü**  
.../.../.....

## TEZ BEYANI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlâk kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

İmza

İbrahim ÇİNAR

## ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

### ÇÖZÜLEBİLEN BAZI ÖZDEĞER DENKLEMLERİNİN LİE CEBRİ İLE YENİDEN ÇÖZÜLMESİ VE ÜÇ PARAMETRELİ LİE GRUPLARININ TEMSİLLERİ

İbrahim ÇİNAR

Gaziosmanpaşa Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Fizik Anabilim Dalı

Danışman : Doç. Dr. Naci SÜNEL

Bu çalışmanın ilk kısmında, üç parametrelİ Lie gruplarının temsilleri ve bu temsiller için Clebsch-Gordan katsayıları hakkında ayrıntılı bilgi verildi.  $SO(3)$  ve  $SO(2,1)$  grupları için Clebsch-Gordan katsayılarının bazı özellikleri incelendi. İkinci kısımda, özdeğer denklemlerini çözmek için Spektrum Üretme Cebri (SGA) kullanıldı. Genelleştirilmiş açısāl momentumun ve Kasimir operatörünün özdeğerleri elde edildi. Bulunan özdeğerler SGA'da kullanıldı ve çözülebilen bazı tür Hamilton işlemcilerinin bağılı durumunun kesikli enerji özdeğer spektrumu N boyutta çözüldü.

2009, 89 sayfa

**Anahtar kelimeler:** Spektrum Üretme Cebri (SGA),  $so(2,1)$  Cebri, Kasimir Operatörü, Genelleştirilmiş Açısāl Momentum, Üç parametrelİ Lie Grupları, Clebsch-Gordan Katsayıları.

## **ABSTRACT**

Master Thesis

### **SOLVEABLE SOME EIGENVALUE EQUATIONS ARE RESOLVED WITH LIE ALGEBRA AND REPRESENTATIONS OF THREE PARAMETER LIE GROUPS**

İbrahim ÇİNAR

Gaziosmanpasa University  
Graduate School of Natural and Applied Sciences  
Department of Physics

Supervisor : Doç. Dr. Naci SÜNEL

In the first part of this study, a detailed information about three parameter representations of Lie groups and their Clebsch-Gordan coefficients were given. Some properties of Clebsch-Gordan coefficients for  $SO(3)$  and  $SO(2,1)$  groups were investigated. In the second part, Spectrum Generating Algebra (SGA) was used to solve eigenvalue equations. Eigenvalues of generalized angular momentum and Casimir operator were obtained. The obtained eigenvalues were used in SGA and discrete energy eigenvalue spectrum for the connected situations of some solveable types of Hamilton operators were solved in  $N$  dimensions.

**2009, 89 pages**

**Keywords:** Spectrum Generating Algebra (SGA),  $so(2,1)$  Algebra, Casimir Operator, Generalized Angular Momentum, Representations of Three Parameter Lie Groups, Clebsch-Gordan Coefficients

## TEŞEKKÜR

Yüksek lisans çalışmalarım boyunca bilgi, tecrübe, hoşgörü ve desteğini hiçbir zaman esirgemeyen Doç. Dr. Naci SÜNEL'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Tez dönemi boyunca sabırla yardımlarını esirgemeyen arkadaşlarım Arş. Gör. Erhan ESER'e, Arş. Gör. Savaş SÖNMEZOĞLU'na ve Asaf Tolga ÜLGEN'e teşekkür ederim.

Çalışmalarımda yardımcı olan kardeşim Mustafa ÇİNAR'a ve arkadaşım Hüseyin KOÇ'a da ayrıca teşekkür ederim.

Ve öğrenim hayatım boyunca her zaman yanımda olan, maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen Aile'me en içten teşekkürlerimi sunarım.

## İÇİNDEKİLER

<b>ÖZET</b> . . . . .	<b>i</b>
<b>ABSTRACT</b> . . . . .	<b>ii</b>
<b>TEŞEKKÜR</b> . . . . .	<b>iii</b>
<b>1. GİRİŞ</b> . . . . .	<b>1</b>
<b>2. GENEL BİLGİLER</b> . . . . .	<b>2</b>
2.1 Grup Tanımı . . . . .	2
2.2 Lie Grupları ve Lie Cebri . . . . .	4
2.3 Kasimir Operatörü . . . . .	6
<b>3. MATERYAL ve YÖNTEM</b> . . . . .	<b>7</b>
3.1 Üç Parametrelili Lie Gruplarının Temsilleri . . . . .	7
3.1.1 Üç Parametrelili Lie Grupları . . . . .	7
3.1.2 Cebri Standart Biçimde Yazılışı . . . . .	7
3.1.3 İşlemcilerin Temel Temsilleri . . . . .	9
3.1.4 Ortogonal Uzayda İşlemcilerin Özdeğer Spektrumu . . . . .	12
3.1.5 Üniter Uzayda İşlemcilerin Özdeğer Spektrumu ve Matris Temsilleri	17
3.1.6 Sonlu Dönüşümlerin Grup Temsilleri . . . . .	21
3.1.7 Kuplaj Katsayıları . . . . .	26
3.1.8 Kuplaj Katsayıları ve Analitik Süreklilik . . . . .	33
3.2 Spektrum Üretme Cebri (SGA) . . . . .	35
<b>4. BULGULAR</b> . . . . .	<b>39</b>
4.1 Temsillerle İlgili Problemler . . . . .	39
4.2 Çözümü Bilinen Hamilton Operatörlerinin SGA ile Yeniden Çözülmesi .	48
4.2.1 Göreceli Olmayan Kepler Problemi . . . . .	48
4.2.2 $\frac{1}{r^2}$ Pertürbatif Potansiyelinin Göreceli Olmayan Kepler Problemine Etkisi . . . . .	53
4.2.3 Spinsiz Parçacıklar için Göreceli Kepler Problemi . . . . .	56
4.2.4 Spini $\frac{1}{2}$ olan Parçacıklar için Göreceli Kepler Problemi . . . . .	61
4.2.5 Harmonik Osilatör . . . . .	69

4.2.6	$\frac{1}{r^2}$ Pertürbatif Potansiyelinin Harmonik Osilatör Spektrumuna Etkisi . . . . .	77
<b>5.</b>	<b>SONUÇ VE TARTIŞMA . . . . .</b>	<b>80</b>
	<b>KAYNAKLAR . . . . .</b>	<b>81</b>
	<b>ÖZGEÇMİŞ . . . . .</b>	<b>84</b>

## 1.GİRİŞ

Kuantum mekaniğinde özdeğer problemlerin çözümünde ilk olarak cebir yönteminin kullanılması faktörizasyon metoduyla olmuştur (Schrödinger, 1940; Infeld, ve ark., 1951). Bu metotta altı çeşit faktörizasyon türü bulunmuş, alçaltma ve yükseltme işlemcileri kullanılarak, her bir türe indirgenen denklemler çözülmüştür. Bu metotla, kuantum mekaniğinde analitik olarak çözülebilen bütün diferansiyel denklemler çözülmüştür.

Grup teorisinde temsil teorisinin geliştirilmesiyle birlikte, üç parametrelili grupların genel ve üniter temsilleri yapılmıştır (Barut ve Fronsda, 1965 ). Daha sonrada spektrum üretme cebri (SGA) ile kuantum mekaniğindeki özdeğer problemleri çözülmeye başlanmıştır. İlk olarak Coulomb potansiyeli, harmonik osilatör potansiyeli ve bu potansiyellere eklenen  $\frac{1}{r^2}$  pertürbatif potansiyeli için Schrödinger denklemi çözülmüştür (Lanik, 1968; Aldrovandi, 1968; Cordero, 1970). Daha sonra bu metot göreceli denklemlere uygulanarak, Coulomb potansiyeli için Klein-Gordan ve Dirac denklemi çözülmüştür (Barut ve Bronzin, 1971). Ayrıca diferansiyel denklemlere uygulanması da sağlanmıştır (Stephani, 1989).

Tez kapsamında yukarıda sözü edilen denklemler  $N$  boyut için çözülmüştür. 2. Bölüm de Lie gruplarının bazı genel özellikleri ve bazı üç parametrelili Lie gruplarının temsil konusu işlenmiştir. 3. Bölüm de üç parametrelili Lie gruplarının standart biçimi ve temsillerinin nasıl olduğundan bahsedildi. Ortogonal ve unitary uzayda, grup temsilleri ve üreteçlerin özdeğer spektrumları verildi. Ayrıca bu temsiller için kuplaj katsayıları olan Clebsch-Gordan katsayıları verildi. 4. Bölüm de Clebsch-Gordan katsayıları için bazı özel durumlar çözüldü. Yukarıda bahsedilen durumlarına ek olarak aynı zamanda göreceli olmayan spinsiz ve spini  $\frac{1}{2}$  olan parçacıklar için Kepler problemleri çözüldü. Daha sonra göreceli Kepler problemi ve  $\frac{1}{r^2}$  pertürbatif etkisi eklenerek Kepler problemi çözüldü. Bundan sonra harmonik osilatör potansiyeli ile  $\frac{1}{r^2}$  pertürbatif etkisi eklenerek harmonik osilatör potansiyeli çözüldü. 5. Bölümde ise sonuç ve tartışma verilmiştir.

## 2. GENEL BİLGİLER

### 2.1 Grup Tanımı

Elemanları  $E, A, B, C, \dots$ 'den meydana gelen bir  $\mathcal{G}$  topluluğunun grup olarak tanımlana bilmesi için aşağıdaki dört şartı sağlaması gerekmektedir:

- Özdeşlik:

$$AE = EA = A \quad A, E \in \mathcal{G} \quad (2.1)$$

- Ters eleman:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E \quad A, A^{-1}, E \in \mathcal{G} \quad (2.2)$$

- Kapalılık:

$$AB = C \quad A, B, C \in \mathcal{G} \quad (2.3)$$

- Birleşme Özelliği:

$$ABC = (AB)C = A(BC) \quad A, B, C \in \mathcal{G} \quad (2.4)$$

Bu dört özelliğe sahip  $\mathcal{G}$  topluluğuna grup denir. Eğer birleşim yasaları komütatif ise,

$$AB = BA \quad (2.5)$$

$\mathcal{G}$  grubuna Abelyen grup denir.

Gruptaki eleman sayısına grubun mertebesi denir. Sonlu sayıda elemanları içinde bulunan gruba sonlu grup, sonsuz sayıda eleman bulunduran gruba ise sonsuz grup denir. Bir sonsuz grup kesikli veya sürekli olabilir; eğer grup elemanlarının sayısı sonsuz olarak teker teker sayılabılırsa kesikli grup, eğer grup elemanlarının sayısı sonsuz olarak teker teker sayılamıyorsa, yani elemanları topolojik olarak sürekliyse sürekli grup olarak adlandırılır.

Reel ve kompleks elemanlı  $n$ . dereceden düzenli (regüler)  $A$  matrislerinden grubu oluşturulabilir. Önemli bazı sürekli matris grupları aşağıdaki gibi sıralanabilir:

**a) Genel Lineer Gruplar:**  $GL(n, \mathbb{C})$  kompleks genel lineer gruptur.  $n$  dereceyi gösterirken  $\mathbb{C}$  hangi uzayda olduğunu göstermektedir. Kompleks uzayda olduğu için  $2n^2$  elemana sahiptir. Bunların  $n^2$  eleman reel kısımdan gelirken  $n^2$  eleman kompleks kısımdan gelmektedir. Kompleks uzay her zaman reel uzayı kapsamaktadır:  $GL(n, \mathbb{C}) \supset GL(n, \mathbb{R})$  Bu grup diğer tüm grupları içerisine almaktadır.

**b) Özel Lineer Gruplar:**  $SL(n, \mathbb{C})$  ile gösterilir.  $GL(n, \mathbb{C})$  gruplarının elemanlarının determinanı  $+1$  olanlarına  $SL(n, \mathbb{C})$  grubu denir ve  $2(n^2 - 1)$  eleman içerir. Bu grubun reel formu  $SL(n, \mathbb{R})$  olup determinanı  $+1$  ve  $(n^2 - 1)$  tane eleman içerir. Bu grup,  $GL(n, \mathbb{C}) \supset SL(n, \mathbb{C}) \supset SL(n, \mathbb{R})$  ve  $GL(n, \mathbb{R}) \supset SL(n, \mathbb{R})$  özelliğine sahiptir.

**c) Üniter Gruplar:**  $U(n)$  olarak gösterilir.  $n$ . dereceden üniter matrislerin oluşturduğu  $n^2$  elemanlı gruplardır. Üniter matrislerin

$$AA^\dagger = E \quad (2.6)$$

şartını sağlamaları gerektiğinden,  $a_{ij}$  matris elemanları

$$\sum_t a_{it} a_{tj}^* = \delta_{ij} \quad (2.7)$$

koşulu ile kısıtlanmaktadır.

**d) Özel Üniter Gruplar:**  $SU(n)$  olarak gösterilir. Determinanı  $+1$  olan üniter matrislerin oluşturduğu gruplardır. Bu nedenle  $(n^2 - 1)$  eleman içermektedir. Bu gruplarda  $SU(n) = U(n) \cap SL(n, \mathbb{C})$  ve  $SU(p, q) = U(p, q) \cap SL(p + q, \mathbb{C})$  olmaktadır.

**e) Ortogonal Gruplar:**  $O(n, \mathbb{C})$  olarak gösterilir.  $n$ . dereceden kompleks ortogonal matrislerin oluşturduğu  $O(n, \mathbb{C})$  gruplardır ve  $n(n - 1)$  elemana sahiptirler. Bu grubun elemanları

$$AA^t = E \quad \text{ve} \quad |A| = \pm 1 \quad (2.8)$$

koşulunu sağlamak zorundadır. İkinci koşul nedeniyle grup, sürekli olarak birinden diğerine geçilemeyen iki parçaya ayrılır.

**f) Özel Ortogonal Gruplar:**  $SO(n, \mathbb{C})$  olarak gösterilir. Ortogonal matrislerin oluşturduğu  $n(n - 1)/2$  elemanlı gruplarıdır ve  $SO(n, \mathbb{C}) = SL(n, \mathbb{C}) \cap O(n, \mathbb{C})$  olmaktadır.  $n$ . dereceden reel ortogonal  $O(n, \mathbb{R})$  grubunun  $+1$  determinanlı reel ortogonal  $SO(n, \mathbb{R})$  altgrubu  $n(n - 1)/2$  elemanlı olarak gösterilir.

**g) Simplektik Gruplar:**  $Sp(2n)$  olarak gösterilir. Regüler kompleks matrislerin oluşturduğu  $2n(2n + 1)$  elemanlı gruplarıdır.

## 2.2 Lie Grupları ve Lie Cebri

Herhangi iki elemanın çarpımı olan elemanın sürekli parametreleri ve  $n$ . komşuluktaki bir elemanlarının tersi, elemanlarının parametrelerinin sürekli diferansiyellenebilir fonksiyonları ise ve  $E$  özdeşlik elemanının  $n$ . komşuluğu olursa bu topolojik gruba  $r$  boyutlu Lie grubu denir.

Lie grubunun bütün özellikleri, grubun birim elemanı  $E = X(0, 0, \dots, 0)$  yakınlarında tanımlı olması gereken  $(1 \leq j \leq r)$   $r$  tane  $I_j$  operatöründen çıkarılabilir. Çarpım kuralının ardışık uygulanması ile birim elemandan sonlu uzaklıkta bulunan grubun bir elemanına ulaşılabilir. Yukarıdaki ifade matematiksel olarak

$$X(a_1, a_2, \dots, a_r) = \exp \left[ i \sum_{j=1}^r a_j I_j \right] \quad (2.9)$$

eşitliğine indirgenir.  $I_j$ 'ya Lie grubunun işlemcisi adı verilir.  $I_j$  üretici Hermityen özellik gösterir. Bir Lie grubu  $r$  sürekli parametresiyle birlikte  $r$  tane işlemciye sahiptir.

Sonlu gruplarda, grubun bütün özellikleri çarpım tablosundan bulunabilir. Sonsuz gruplar da ise böyle bir çarpım tablosu oluşturulamayacağından, bu gruplar için çarpım tablosunun yerine Lie grubu için işlemcilerinin komütasyonları grup yapısını belirlemektedir. Bu

komütasyonlar aşağıda verilen üç kurala uyarsa, bu komütasyonların oluşturduğu cebre Lie cebri denir.

Bir  $\mathcal{G}$  Lie cebri,  $(I_1, I_2, \dots)$  elemanları ile gerçek  $r$  boyutlu vektör uzayıdır. Öyleki  $I_k, I_\ell, I_m \in \mathcal{G}$  için

**i)**

$$[I_k, I_\ell] \in \mathcal{G} \quad (2.10)$$

**ii)**

$$[I_k, I_\ell] = -[I_\ell, I_k] \quad (2.11)$$

**iii)**

$$[I_k, [I_\ell, I_m]] + [I_\ell, [I_m, I_k]] + [I_m, [I_k, I_\ell]] = 0 \quad (2.12)$$

olur.

$[I_k, I_\ell]$  komütasyonu, işlemcilerin doğrusal komütasyonu olmalıdır. Yani,

$$[I_k, I_\ell] = \sum_{j=1}^r c_{k\ell}^j I_j \quad 1 \leq k, \ell \leq r \quad (2.13)$$

olur. Burada,  $c_{k\ell}^j$  belirli bir katsayıdır. Grup işlemcilerinin kombinasyonu sonlu grup çarpım tablosu ile karşılaştırıldığında tamamen Lie grubunun yapısını tayin eder. Bunun için  $c_{k\ell}^j$  katsayıları Lie grubunun yapı sabitleri olarak bilinir.  $c_{k\ell}^j$  katsayıları Lie grubunun belirgin özellikleridir ve işlemcilerin herhangi bir temsiline bağlı olmayan imajiner katsayılardır. Yukarıdaki cebirden dolayı, yapı sabitleri;

$$c_{k\ell}^j = -c_{\ell k}^j \quad (2.14)$$

$$c_{k\ell}^n c_{mm}^p + c_{\ell m}^n c_{kn}^p + c_{mk}^n c_{\ell n}^p = 0 \quad (2.15)$$

özelliklerine sahiptir.

### 2.3 Kasimir Operatörü

Lie gruplarının bütün operatörleri ile komüte eden bir operatöre Lie grubunun Kasimir operatörü denir. Lie grubunun bağımsız Kasimir operatör sayısı, grubun rankına eşittir.

Kasimir operatörü,

$$\Gamma = g^{k\ell} \Gamma_k \Gamma_\ell \quad (2.16)$$

ile tanımlanır. Buradaki  $g^{k\ell}$  terimi, metrik tensörü olarak ifade edilen Killing formununun tersini gösterir. Metrik tensörü

$$g_{k\ell} = g_{\ell k} = c_{k\rho}^\tau c_{\ell\tau}^\rho$$

ve tersi

$$g^{k\ell} g_{k\ell} = \delta_\ell^k$$

olarak ifade edilir. Burada,  $\delta_\ell^k$  Kronecker deltasını göstermektedir.

$so(2, 1)$  cebri için bir tane Kasimir operatörü vardır ve

$$\Gamma^2 = \Gamma_3^2 - \Gamma_1^2 - \Gamma_2^2 \quad (2.17)$$

ile verilir.

Temsil teorisine göre Kasimir operatörünün ve  $\Gamma_3$  operatörünün beklenen değeri (Wybourne, 1974)

$$\Gamma^2 \Psi = \phi(\phi + 1) \Psi \quad (2.18)$$

$$\Gamma_3 \Psi = (-\phi + x) \Psi \quad (x = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.19)$$

biçiminde verilir.

### 3.MATERYAL ve YÖNTEM

#### 3.1 Üç Parametrelili Lie Gruplarının Temsilleri

##### 3.1.1 Üç Parametrelili Lie Grupları

Üç parametrelili Lie grup ve cebirlerinin teorik fizikte önemli uygulamaları bulunmaktadır. Üç parametrelili Lie cebirleri, birbiriyle izomorfik olan  $A_1$ ,  $B_1$  ve  $C_1$  sınıflarında

$$A_1 \sim B_1 \sim C_1 = \begin{cases} so(3) \sim su(2) \sim sp(2), & \text{Kompakt Grup;} \\ so(2, 1) \sim su(1, 1) \sim sl(2, \mathbb{R}) \sim sp(2, \mathbb{R}), & \text{Kompakt Olmayan Grup;} \\ E_2 \sim T_2 \oplus_s so(2), & \text{Öteleme Grubu.} \end{cases}$$

sekiz tanedir. Burada  $\sim$  sembolü izomorfizmi gösterir. Bu sekiz Lie cebirinin temsilleri Barut tarafından bir tek çalışmada oluşturulmuştur (Barut, 1967).

##### 3.1.2 Cebirin Standart Biçimde Yazılışı

Fiziksel bir nicelik, dönüşüm altında değişmez kalabilir. Bu niceliklere değişmezler (invariantları) denir.  $SO(3)$  kompakt grubu ve  $SO(2, 1)$  kompakt olmayan grubun değişmezleri sırasıyla,

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = g^{\mu\nu} x_\mu x_\nu, \quad x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = g^{\mu\nu} x_\mu x_\nu \quad (3.1)$$

biçiminde tanımlanırlar. Burada  $g^{\mu\nu}$  metrik tensörünün elemanlarının değerleri,  $SO(3)$  ve  $SO(2, 1)$  grubu için sırasıyla,

$$g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1, \quad g_{11} = g_{22} = -g_{33} = 1 \quad (3.2)$$

olarak verilir. Diğer elemanları sıfıra eşittir.

Üç parametrelı Lie cebirlerinin üreteçlerini  $L_{12}$ ,  $L_{23}$  ve  $L_{13}$  olarak gösterirsek

$$L_{\mu\nu} = -L_{\nu\mu} \quad (3.3)$$

olur, yani  $L_{\mu\nu}$  üreteçleri antisimetriktir. Böylece, hem  $so(3)$  hem de  $so(2, 1)$  cebiri için komütasyon ilişkileri

$$[L_{\mu\nu}, L_{\nu\mu}] = ig_{\mu\mu}L_{\lambda\nu} \quad (3.4)$$

şeklinde yazılır.  $so(3) \rightsquigarrow su(2) \rightsquigarrow sp(2)$  Lie cebirleri için (3.2)'de ilk verilen metrik kullanılır ve kompakt olmayan  $so(2, 1) \rightsquigarrow su(1, 1) \rightsquigarrow sl(2, \mathbb{R}) \rightsquigarrow sp(2, \mathbb{R})$  Lie cebirleri için (3.2)'de ikinci verilen metrik kullanılır.

Yukarıdaki verilen cebirleri, standart biçimde yazılmalıdır. Bunun için işlemcilerden birini önce standart bazlarda kendisiyle komute eden uygun seçilmiş Weyl operatörlerin köşegenleştiği standart biçimde yazmalıyız. Bunu yaptıktan sonra geriye kalan iki işlemciden de yeni yükseltme ve indirme işlemcileri oluşturulur. Bu iki yeni işlemci, köşegen olan işlemcinin özdeğerlerini bir birim yükseltir ya da indirir.

Kompakt  $so(3)$ ,  $su(3)$  ve  $sp(3)$  Lie cebirlerinin standart baz işlemcileri cinsinden yazılması sırasında, köşegen olarak alınacak işlemcinin seçimi keyfidir. Çünkü, her işlemci kesikli bir spektruma sahiptir. Buna karşılık,  $so(2, 1)$ ,  $su(1, 1)$ ,  $sl(2, \mathbb{R})$  ve  $sp(2, \mathbb{R})$  Lie cebirlerinin standart baz işlemcileri cinsinden yazılması sırasında, cebir içerisinde bulunan işlemcilerden sadece  $L_{12}$ 'nin kesikli bir spektruma,  $L_{23}$  ile  $L_{13}$  işlemcilerinin ise sürekli bir spektruma sahip olması nedeniyle,  $L_{12}$  işlemcisi köşegen işlemci olarak seçilir. Jeneratörlerinin diagonalizasyonunun çıkarılmasında  $L_{12}$  doğurgan işlemcisi köşegenleşti rilmiş seçim olarak alınırsa, cebirin standart yazılışı,

$$[L_+, L_-] = g_{33}L_{12}, \quad [L_{12}, L_{\pm}] = \pm L_{\pm} \quad (3.5)$$

olur. Burada,

$$L_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}L_{13} \pm iL_{23} \quad (3.6)$$

dir. Ayrıca  $so(3)$ ,  $su(3)$  ve  $sp(3)$  Lie cebirleri için  $g_{33} = 1$ ,  $so(2, 1)$ ,  $su(1, 1)$ ,  $sl(2, \mathbb{R})$  ve  $sp(2, \mathbb{R})$  Lie cebirleri için  $g_{33} = -1$  ve  $E_2$  cebri için  $g_{33} = 0$  olur. Üniter

bir temsil için

$$L_{\mu\nu}^\dagger = L_{\mu\nu}^\dagger \quad \text{ve} \quad L_+^\dagger = L_-$$

olmak zorundadır.

Üç parametrelili grupların rankı 1'dir ve bu nedenle bir tane bağımsız Kasimir değişme zine sahiptir. Kasimir değişmezi,

$$\begin{aligned} C &= g_{33}L_{12}^2 + L_{13}^2 + L_{23}^2 \\ &= g_{33}L_{12}(L_{12} + 1) + 2L_-L_+ \end{aligned}$$

olarak yazılır. Böylece, Kasimir değişmezi  $so(3)$ ,  $su(3)$  ve  $sp(3)$  Lie cebirleri için

$$C = 2L_-L_+ + L_{12}(L_{12} + 1) \quad (3.7)$$

olur,  $g_{33} = 1$ ,  $so(2, 1)$ ,  $su(1, 1)$ ,  $sl(2, \mathbb{R})$  ve  $sp(2, \mathbb{R})$  Lie cebirleri için

$$C = 2L_-L_+ - L_{12}(L_{12} + 1) \quad (3.8)$$

olur ve  $E_2$  cebri için

$$C = 2L_-L_+ \quad (3.9)$$

olur.

### 3.1.3 İşlemcilerin Temel Temsilleri

Rankı  $\ell$  olan bir Lie cebri veya Lie grubu ile ilişkili  $\ell$  tane basit temsili ve bütün diğer temsilleri bu basit temsillerin Kronecker (direkt) çarpımlarından elde edilmektedir. Ayrıca basit temsillerin, temel temsillerin antisimetrik Kronecker güçlerinden oluşturulduğunu da biliyoruz. Temel temsiller, Dynkin diagramında uç noktalara karşılık gelen basit temsillerle ilişkili cümlelerin bir alt cümlesidir. İlk amacımız, ilgili cebir veya grubun temel temsillerini oluşturmak, sonra da temsillerin geriye kalanını elde etmektir.

İlgilendiğimiz Lie cebirlerinin tümünün rankının 1 olması nedeniyle bir tane basit temsile, bir tane de temel temsile sahip oluruz. Basit temsilin boyutu 2 olur. Böylece, rankı 2 olan matrisler cinsinden (3.5)'den tanımlanmış Lie cebirlerinin bir temsili arayacağız.

Rankı 2 olan herhangi bir matris,

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.10.a)$$

ile verilen Pauli spin matrislerinin Lineer bir kombinasyonu olarak yazılabilir (Merzbacher, 1970). Bu matrisler,

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k \quad (3.10.b)$$

ile verilen komütasyon ilişkisini sağlamaktadırlar. O halde,

$$L_{12} = \frac{\sigma_3}{2} \quad \text{ve} \quad L_{\pm} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\sigma_1 \pm \sigma_2) \quad (3.11)$$

değişkenlerini kullanırsak, rankı 1 olan kompakt Lie cebirlerinin sağladığı komütasyon ilişkilerini elde ederiz. Böylece  $so(3) \sim su(2) \sim sp(2)$  Lie cebirlerinin temel temsili, (3.11)'den görüldüğü gibi Pauli spin matrisleri cinsinden yazılır ve iyi bilinen  $so(3)$ 'ün spinör temsiline karşılık gelir.

(3.11) değişken değiştirmesini yaparken  $\lambda = \pm\sqrt{g_{33}}$  olmak üzere

$$L_{12} = \frac{\sigma_3}{2}, \quad L_{\pm} = \frac{\lambda}{2\sqrt{2}}(\sigma_1 \pm i\sigma_2) \quad (3.12)$$

biçiminde alınırsa (3.5) ile verilen komütasyon ilişkileri sağlanır.  $\lambda$  için pozitif değer seçilirse, üç parametrelili Lie cebirlerinin üç sınıfının temel temsilleri elde edilir.

$g_{33} = 1$  için  $so(3) \sim su(2) \sim sp(2)$ 'in temel temsili elde edilir ve temel temsil üniter ve indirgenemezdir.  $g_{33} = -1$  için  $so(2, 1) \sim su(1, 1) \sim sl(2, \mathbb{R}) \sim sp(2, \mathbb{R})$ 'in temel temsili bulunur, temel temsil hem indirgenemez hemde üniter değildir. Son olarak  $g_{33} = 0$  için öklidyen  $E_2$ 'nin Lie cebirinin temel gösterimleri elde edilir ve bu temsil de iki tane bir boyutlu temsile indirgenir.

Temsil iki boyutlu Pauli matrisler cinsinden verilmesi nedeniyle, spinör olarak adlandırılan baz vektörleri

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

gibi iki bileşeni olacak biçimde yazılır. (3.10), (3.12) ve (3.13) denklemlerinden

$$L_{12}\xi_1 = \frac{1}{2}\xi_1, \quad L_{12}\xi_2 = -\frac{1}{2}\xi_2 \quad (3.14)$$

ve

$$L_+\xi_2 = \sqrt{\frac{g_{33}}{2}}\xi_1, \quad L_-\xi_1 = -\sqrt{\frac{g_{33}}{2}}\xi_2 \quad (3.15)$$

elde edilir. Spinör temsili en yüksek ağırlığı  $\frac{1}{2}$  olur ve bu kullanılan Cartan-Weyl etiketlenmesine karşılık gelir.  $L_+\xi_1 = 0$  ve  $L_-\xi_2 = 0$  olması nedeniyle Kasimir değişiminin özdeğeri

$$C = \frac{3g_{33}}{4} \quad (3.16)$$

olarak bulunur.

**Bozon Operatörleri Cinsinden İşlemcilerin Yazılması:** İşlemcilerin yazılışını,  $\xi_1$  ve  $\xi_2$  spinörlerinden meydana gelen  $f(\xi_1, \xi_2)$  fonksiyonlarına etkiyen diferansiyel işlemciler cinsinden de yazabiliriz.  $f(\xi_1, \xi_2)$ 'i

$$|a, b\rangle = N(a, b)\xi_1^a\xi_2^b \quad (3.17)$$

olarak alalım. Burada,  $N(a, b)$  uygun bir normalizasyon sabitidir. Eğer

$$L_{12} = \frac{1}{2}\left(\xi_1\frac{\partial}{\partial\xi_1} - \xi_2\frac{\partial}{\partial\xi_2}\right), \quad L_+ = \sqrt{\frac{g_{33}}{2}}\xi_1\frac{\partial}{\partial\xi_2} \quad \text{ve} \quad L_- = \sqrt{\frac{g_{33}}{2}}\xi_2\frac{\partial}{\partial\xi_1} \quad (3.18)$$

yazarsak hemen (3.14) ve (3.15) eşitlikleri tekrar elde edilir. Böylece, (3.18) ile verilen diferansiyel işlemciler üç elemanlı Lie cebirlerini sağlar.

İşlemciler bozon yaratma ve yok etme metodu ile farklı bir biçimde de yazılabilir. Yaratma ve yok etme işlemcilerini, spinörlere bağlayarak

$$a_i^\dagger = \xi_i \quad \text{ve} \quad a_i = \frac{\partial}{\partial\xi_i} \quad (3.19)$$

biçiminde alalım.  $(a_i)$  ve  $(a_i^\dagger)$  arasında

$$[a_i, a_i^\dagger] = \delta_{ij} \quad (3.20)$$

basit komütasyon ilişkisinin olduğu gösterilebilir. Burada,  $(a_i)$  bozon yok etme işlemcisini ve  $(a_i^\dagger)$  bozon yaratma işlemcisini göstermektedir.

Lie cebirinin işlemcilerini

$$L_{12} = \frac{1}{2}(a_1^\dagger a_1 - a_2^\dagger a_2), \quad L_+ = \sqrt{\frac{g_{33}}{2}} a_1^\dagger a_2 \quad \text{ve} \quad L_- = \sqrt{\frac{g_{33}}{2}} a_2^\dagger a_1 \quad (3.21)$$

biçiminde yazarız.

### 3.1.4 Ortogonal Uzayda İşlemcilerin Özdeğer Spektrumu

Lie cebirinin temel temsilini elde ettikten sonra, diğer temsillerin elde edilmesine bakalım. Bu temsiller, temel temsillerin Kronecker güçlerinden oluşturulabilir ve böylece (3.17) de verilen  $\xi_1$  ve  $\xi_2$  terimlerinin bulunduğu baz durumlarını da içerir. Maksimum genellik için  $a$  ve  $b$  üslerinin tamsayı olmadığı, hatta kompleks olduğu durumu alabiliriz. Verilen, işlemcilerin baz değişkenlerine bağlı olarak verilen denklem (3.18)'yi kullanırsak

$$\begin{aligned} L_{12}|a, b\rangle &= \frac{1}{2}(a - b)|a, b\rangle \\ L_+|a, b\rangle &= \sqrt{\frac{g_{33}}{2}} \frac{N(a, b)}{N(a+1, b-1)} b|a+1, b-1\rangle \\ L_-|a, b\rangle &= \sqrt{\frac{g_{33}}{2}} \frac{N(a, b)}{N(a-1, b+1)} a|a-1, b+1\rangle \end{aligned} \quad (3.22)$$

buluruz. Burada,  $L_+$  işlemcisi,  $L_{12}$  işlemcisinin özdeğerini +1 birim kadar yükselttiği ve  $L_-$  işlemcisinin ise -1 birim kadar alçalttığı görülmektedir. (3.7), (3.9) ve (3.22) denklemlerinden Kasimir değişiminin özdeğerleri

$$\begin{aligned}
C|a, b \rangle &= g_{33}\phi(\phi + 1)|a, b \rangle \\
&= Q|a, b \rangle
\end{aligned} \tag{3.23}$$

olur. Burada  $\phi$ ,

$$\phi = \frac{1}{2}(a + b) \tag{3.24}$$

olarak tanımlanır.  $\phi$  ve  $(-\phi - 1)$  değerlerinin  $C$ 'nin aynı özdeğerlerine karşılık geldiği açıktır. İndirgenemez bir temsil içerisinde  $C$ 'nin verilen bir  $Q$  özdeğeri sabittir.

İndirgenemez temsilleri sınıflandırırken,  $L_{12}$ 'nin özdeğerlerini tamsayı ya da yarım tamsayı olarak kısıtlamayacağız.

Her indirgenmez temsil  $C$ 'nin bir  $Q$  özdeğeri ile karakterize edilir.  $L_{12}$ 'nin özdeğerleri sadece birimin katları ile değişebildiğinden,

$$\frac{1}{2}(a - b) = E_0 + x \tag{3.25}$$

yazabiliriz. Burada,  $x$  bir tamsayı ve  $E_0$  ise  $\frac{1}{2}(a - b)$ 'nin kesirli kısmıdır. Çok katlı temsillerin olabileceği düşünülerek  $E_0$  hesaba katılmıştır. Verilen bir indirgenemez temsil içerisinde  $E_0$  sabit bir değer olur ve böylece her indirgenemez  $\mathcal{D}(\phi, E_0)$  temsili  $\phi$  ve  $E_0$  olarak verilen iki değişmez değeri ile belirlenebilir. Verilen bir temsil için baz vektörleri,  $|\phi, E_0 + x\rangle$  notasyonu kullanılarak bir tek şekilde etiketlenir.

Temsillerin mümkün olan sınıfları,  $\phi$  ve  $E_0$  sabit değerleriyle ilişkili olan  $a$  ve  $b$ 'nin değerlerinin izin verilen aralıkları göz önüne alınarak belirlenebilir. Temsillerin dört farklı sınıfı vardır.

#### A. Üstten ve Altan Sınırsız Temsiller:

Bu temsilde hem  $a$  ve  $b$  tamsayı değildir. Keyfi bir  $|ab\rangle$  özvektörü ile başladığı zaman,  $L_{\pm}$  alçaltma ve yükseltme operatörlerinin ardarda uygulanması ile bir başka  $|a'b'\rangle$  özvektörünü elde ederiz ve bu durumda  $(a - a')$  ve  $(b - b')$  tamsayıdır. Böylece,  $E_0$  ve  $\phi$ 'nin sabit değerleri için  $L_{12}$ 'nin özdeğer spektrumu aşağıdan ve yukarıdan sınırsızdır. Bu durumda  $\mathcal{D}(\phi, E_0)$  temsilleri de indirgenemez ve sonsuz boyutlu olacaktır. Temsillerin

denk olmayanlarıyla ilgilendiğimizden dolayı,

$$-\frac{1}{2} \leq \Re E_0 < \frac{1}{2} \quad (3.26)$$

sınırlamasını yazmak, genellikle bir şey kaybettirmez.

$\mathcal{D}(\phi, E_0)$  ve  $\mathcal{D}(-\phi, -1, E_0)$  temsilleri birbirine denktir. Böylece, denk olmayan temsiller  $\mathcal{D}(Q, E_0)$  biçiminde etiketlenebilir.  $\mathcal{D}(Q, E_0)$  temsillerinde  $L_{12}$ 'nin özdeğer spektrumu,

$$\begin{array}{ccccccccc} & \circ & & \circ & & \circ & & \circ & & \circ & \\ \text{-----} & & & & & & & & & & \text{-----} \\ & \frac{a-b-2}{2} & & \frac{a-b-1}{2} & & \frac{a-b}{2} & & \frac{a-b+1}{2} & & \frac{a-b+2}{2} & \end{array}$$

biçiminde ifade edilebilir. Burada,

$$a = E_0 + x + \phi, \quad b = \phi - E_0 - x \quad (\mathcal{D}(\phi, E_0) \text{ için}) \quad (3.27)$$

ve

$$a = E_0 + x - \phi - 1, \quad b = -\phi - 1 - E_0 - x \quad (\mathcal{D}(-\phi, E_0) \text{ için}) \quad (3.28)$$

olmaktadır.

### B. Altan Sınırlı Temsiller:

$a$  tamsayı ve  $b$  değildir.  $L_-|a', b'\rangle = 0$  olan bir  $|a', b'\rangle$  özvektörü vardır. Bu durumda, (17.22)'den  $a' = 0$  elde edilir ve  $L_{12}$ 'nin en küçük özdeğeri  $-b'/2$  olmak zorundadır. Böylece,  $L_+$  işlemcisi,  $L_{12}$ 'nin özdeğerleri ile ilişkili olan özvektörleri üretmede kullanılabılır.  $L_{12}$  işlemcisinin özdeğerlerini birer birer sonsuza kadar artarak,

$$\begin{array}{ccccccc} \circ & & \circ & & \circ & & \circ & & \circ & & \circ \\ \text{-----} & & & & & & & & & & \text{-----} \\ & \frac{-b}{2} & & \frac{-b+1}{2} & & \frac{-b+2}{2} & & & & & \end{array}$$

biçiminde betimlenir. Burada,

$$\frac{1}{2}(a - b) = E_0 + x \quad (x = 0, 1, 2, \dots) \quad (3.29)$$

$$\phi = \frac{b'}{2} \quad (3.30)$$

dir ve  $E_0$  ise  $b'/2$ 'nin kesirli kısmıdır. Böylece, temsil sonsuz boyutludur ve alttan sınırlıdır.  $a \geq 0$  için temsil indirgenemezdir ve  $\mathcal{D}^+(\phi)$  ile gösterilir.

Burada,  $a \geq 0$  ve  $a < 0$  olmak üzere iki ihtimal vardır. Eğer  $a \geq 0$  alınırsa,  $L_-|0, b'\rangle = 0$  olacağı için,  $a \geq 0$  olan altuzaydan  $a < 0$  olan altuzaya dönüştürecek bir işlemci yoktur. Buna karşılık,  $a < 0$  olması durumunda bir  $|a, b\rangle$  özvektörünü  $L_+$  işlemcisini kullanarak  $a \geq 0$  olması durumundaki alt uzaya dönüştürebiliriz. Böylece, ilgimizi  $a \geq 0$  olması durumuyla kısıtlarsak, indirgenemez temsilleri elde ederiz. Eğer  $a$  üzerinde bu kısıtlamayı yapmazsak, indirgenebilir fakat tamamen indirgenebilir olmayan bir temsili elde ederiz, yani temsil ayrıştırılamazdır.

### C. Üstten Sınırlı Temsiller:

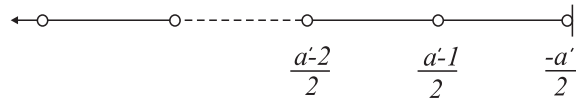
$a$  tamsayı değil ve  $b$  bir tamsayıdır. Bu durumda  $b \geq 0$  için  $D^-(\phi)$  ile gösterilen indirgenemez bir temsil elde edilir. Burada,

$$\frac{1}{2}(a - b) = E_0 + x \quad (x = 0, 1, 2, \dots) \quad (3.31)$$

ve

$$\phi = \frac{a'}{2} \quad (3.32)$$

dir ve  $E_0$  ise  $a'/2$ 'nin kesirli kısmıdır. Bu temsilde  $L_{12}$ 'nin özdeğer spektrumu



biçimindedir.

Yine,  $b$  tamsayısı için  $b \geq 0$  ve  $b < 0$  olmak üzere iki ihtimal vardır. Eğer  $b < 0$  olduğunu kabul edersek, indirgenebilir ancak tamamen indirgenebilir olmayan sonsuz boyutlu bir temsil vardır.  $D^-(\phi)$  temsili, sonsuz boyutlu, indirgenebilir ve üstten sınırlıdır.

#### D. Sonlu boyutlu Temsiller:

Hem  $a$  hem de  $b$  tamsayıdır. Sonlu boyutlu olan bir temsilin bulunma ihtimali vardır. Bu durumda çok çeşitli olasılıklar vardır.

$a \geq 0$  olması durumundaki altuzaydan  $b < 0$  olması durumundaki altuzayın elde edildiği  $D^+(\phi)$  temsili ve  $b \geq 0$  olması durumundaki altuzaydan  $a < 0$  olması durumundaki altuzayın elde edildiği  $D^-(\phi)$  temsili elde edilir.  $b' = 0$  ve  $a'' = 0$  olmak üzere  $L_-|a'', b''\rangle = 0$  ve  $L_+|a', b'\rangle = 0$  olacak bir  $|a', b'\rangle$  ve  $|a'', b''\rangle$  özvektörleri vardır. Böylece  $L_{12}$ 'nin özdeğer spektrumu  $b''/2$  değeriyle alttan ve  $a'/2$  değeriyle üstten sınırlı olacaktır. (3.15)'den

$$2\phi = a' = b'' \quad (3.33)$$

olduğundan,  $2\phi + 1$  boyutlu

$$\frac{a-b}{2} = -\phi, -\phi+1, \dots, +\phi \quad (3.34)$$

özdeğerlerine sahip sonlu boyutlu  $D(\phi)$  gösterimini elde ederiz.  $L_{12}$ 'nin özdeğer spektrumu

$$\begin{array}{ccccccc} | & \text{---} & \circ & \text{-----} & \circ & \text{---} & | \\ -\phi & & -\phi+1 & & -\phi-1 & & \phi \end{array}$$

biçiminde gösterilebilir.

$a$  ve  $b$  negatif olmayan tamsayılar olması durumunda,  $\phi$ 'nin negatif olmayan tamsayı ya da yarım tamsayı olduğu görülür.  $\phi = 0$  için özdeşlik (birim) temsilleri elde edilir.

Yukarıda,  $\mathcal{D}^\pm(\phi)$  sonsuz boyutlu temsiller için sonlu boyutlu temsilleri veren negatif olmayan tamsayıları bulduranlar dışında,  $2\phi$ 'nin bütün değerleri izinlidir.

### 3.1.5 Üniter Uzayda İşlecilerin Özdeğer Spektrumu ve Matris Temsilleri

Şimdiye kadar temsillerin üniter olması gerekmiyordu. Ama,  $L_{12}$ 'nin özdeğerlerinin reel olması ve  $L_+L_-$  ve  $L_-L_+$  bileşik işlemcilerinin özdeğerlerinin de reel ve pozitif tanımlı olması koşullarını istememiz durumunda üniter temsillerelde edilebilir. Bunun sonucunda Kasimir işlemcisinin özdeğerlerinin de reel olması zorunluluğu ortaya çıkar.

$L_{12}$ 'nin özdeğerlerinin reel olması koşulundan  $E_0$  reel ve  $\text{Im } a = \text{Im } b = \rho$  elde edilir. Burada,  $\text{Im}$  yazılması  $a$  ve  $b$ 'nin imajiner olduğunu göstermek içindir. Kasimir operatörlerinin özdeğerleri  $g_{33}\phi(\phi + 1)$  şeklindedir. Eğer  $\phi = \phi_1 + i\phi_2$  kompleks sayısını  $\phi(\phi + 1)$  ifadesinde yerine yazarsak ve bu ifadenin reel olması koşulunu istersek, bu durumda sadece

$$\phi_2 = 0 \quad \text{veya} \quad \phi_1 = -\frac{1}{2} \quad (\phi_2 \in \mathbb{R} \text{ ve keyfi}) \quad (3.37)$$

sonucunu elde ederiz. Bunlara ilave olarak (3.25) ve (3.32) denklemlerinden

$$\phi_2 = \text{Im} \frac{a+b}{2} = \rho \quad (3.38)$$

olduğu görülür. Böylece, üniter temsiller için

$$\text{ya } \phi \in \mathbb{R} \quad \text{ya da} \quad \phi = -\frac{1}{2} + i\rho \quad (\rho \in \mathbb{R}) \quad (3.39)$$

elde edilir.

(3.22) denklemlerinden, eğer  $L_+L_-$  ve  $L_-L_+$ 'nin özdeğerleri reel ve pozitif tanımlı ise

$$g_{33}a(b+1) \geq 0 \quad \text{ve} \quad g_{33}b(a+1) \geq 0 \quad (3.40)$$

ile verilen koşullar elde edilir. (3.40) koşullarında (3.24) ve (3.5) denklemleri kullanılırsa,

$$g_{33}(\phi + E_0 + x)(\phi - E_0 - x + 1) \geq 0 \quad (3.41)$$

ve

$$g_{33}(\phi - E_0 - x)(\phi + E_0 + x + 1) \geq 0 \quad (3.42)$$

olmasını gerektiren yeni koşullar elde edilebilir. Bu iki denklem aynı anda sağlanmalıdır.

Üç parametrelili kompakt gruplar için  $g_{33} = +1$ 'dir ve açıkca sadece sonlu boyutlu üniter temsiller olasıdır; eğer  $2\phi + 1$  tek ise ( $\phi \in \mathbb{R}$ ),  $E_0 = 0$  olur ve eğer  $2\phi + 1$  çift ise  $E_0 = \frac{1}{2}$  olması durumları vardır.

Kompakt olmayan üç parametrelili gruplar için,  $g_{33} = -1$ 'dir ve sadece sonsuz boyutlu üniter temsiller mümkündür. Bu temsiller dört farklı sınıfa ayrılır.

**A. Sürekli Temel Seriler:**  $\mathcal{D}_p(Q, E_0)$  sürekli seri temsilleri de denilen bu temsiller Kasimir değişmezlerinin sürekli özdeğerleriyle karakterize edilirler. Asal seriler,

$$\phi = \frac{1}{2} + i\rho \quad (0 < \rho < \infty) \quad \text{ve} \quad Q > \frac{1}{4} \quad (3.43)$$

olmak üzere  $\mathcal{D}_p(Q, E_0)$  ile temsil edilirler.  $L_{12}$ 'nin özdeğerleri,

$$x = E_0, E_0 \pm 1, E_0 \pm 2, \dots \quad (E_0 \in \mathbb{R}) \quad (3.44)$$

ile aşağıdan ve yukarıdan sınırsızdır.

**B. Sürekli İlave Seriler:**  $\mathcal{D}_s(Q, E_0)$  ilave seriler,

$$|\phi + \frac{1}{2}| < \frac{1}{2} - |E_0| \quad (\phi, E_0 \in \mathbb{R}) \quad \text{ve} \quad Q < \frac{1}{4} \quad (3.45)$$

olmak üzere  $\mathcal{D}_s(Q, E_0)$  ile temsil edilirler. Yine,  $L_{12}$ 'nin özdeğerleri,

$$x = E_0, E_0 \pm 1, E_0 \pm 2, \dots \quad (3.46)$$

olur ve hem alttan hem de üstten sınırsızdır.

**C.  $\mathcal{D}^+(\phi)$  Kesikli Serisi:** Burada,

$$\phi < 0 \quad \text{ve} \quad E_0 = -\phi \quad (\phi \in \mathbb{R}) \quad (3.47)$$

olur ve  $L_{12}$ 'nin özdeğerleri,

$$x = -\phi, -\phi + 1, -\phi + 2, \dots \quad (3.48)$$

olup alttan sınırlıdır.

**D.  $\mathcal{D}^-(\phi)$  Kesikli serisi;** Burada,

$$\phi < 0 \quad \text{ve} \quad E_0 = \phi \quad (\phi \in \mathbb{R}) \quad (3.49)$$

dir ve  $L_{12}$ 'nin özdeğerleri,

$$x = \phi, \phi - 1, \phi - 2, \dots \quad (3.50)$$

olup üstten sınırlıdır.

$f(\xi_1, \xi_2)$  fonksiyonu

$$|a, b\rangle = N(a, b) \xi_1^a \xi_2^b = N_x (\xi_1 \xi_2)^\phi \left(\frac{\xi_1}{\xi_2}\right)^{E_0+x} = |\phi, E_0 + x\rangle \quad (3.51)$$

gibi yazılırsa,  $L_{12}$  ve  $L_\pm$ 'nin özvektörleri sırasıyla,

$$L_{12}|\phi, E_0 + x\rangle = (E_0 + x)|\phi, E_0 + x\rangle \quad (3.52)$$

$$L_\pm |\phi, E_0 + x\rangle = \sqrt{\frac{g_{33}}{2}} [\phi \mp (E_0 + x)] \frac{N_x}{N_{x\pm 1}} |\phi, E_0 + x \pm 1\rangle \quad (3.53)$$

olur.  $N(a, b)$  normalizasyon faktörü elde edilebilirse,  $L_{12}$  ve  $L_\pm$  matris elemanları üniter temsilde tamamen belirlenebilir. Baz vektörlerinin iç çarpımı,

$$\langle \phi, E_0 + x | \phi, E_0 + x' \rangle = \delta_{xx'} \quad (3.54)$$

gibi tanımlanabilir. İşlemcinin üniter olmasından dolayı  $L_+^\dagger = L_-$  koşulunu kullanırsak,

$$\sqrt{\frac{g_{33}}{2}}(\phi - (E_0 + x))\frac{N_x}{N_{x+1}} = \left(\sqrt{\frac{g_{33}}{2}}\right)^* (\phi + E_0 + x + 1)^* \frac{N_{x+1}^*}{N_x^*} \quad (3.55)$$

olur.  $g_{33}$ 'ü dikkate alırsak

$$\left|\frac{N_x}{N_{x+1}}\right|^2 = g_{33} \frac{(\phi + E_0 + x + 1)^*}{\phi - E_0 - x} \quad (3.56)$$

elde ederiz.

**Kompakt Lie Cebriinde:**  $g_{33} = +1$  olur ve denklem (3.56) tekrarlama ilişkisi,

$$N_x = \frac{1}{\sqrt{(\phi + E_0 + x)!(\phi - E_0 - x)!}} \quad (3.57)$$

biçiminde yazılır. Burada,  $(\phi + E_0 + x)! = \Gamma(\phi + E_0 + x + 1)$  anlamındadır ve bu nedenle  $(\phi + E_0 + x)$  bir tamsayı olması da gerekli değildir.

Bir kez normalizasyon katsayısı belirlendikten sonra, (3.53) ve (3.54) denklemlerinden sonsuz küçük işlemcilerin matris elemanları,

$$\langle \phi, E_0 + x | L_{12} | \phi, E_0 + x' \rangle = (E_0 + x) \delta_{xx'} \quad (3.58)$$

$$\langle \phi, E_0 + x | L_{12} | \phi, E_0 + x' \rangle = \sqrt{\frac{g_{33}}{2} (\phi \mp E_0 \pm x)(\phi \mp E_0 \mp x + 1)} \quad (3.59)$$

biçiminde verilir. Burada,  $E_0$ ,  $\phi$  ve  $x$ 'nin aralığı yukarıda tartışılan üniter temsile uygun olmak zorundadır.  $so(3)$  özel durumunda,

$$\langle jm | L_{12} | jm' \rangle = m \delta_{mm'} \quad (3.60a)$$

$$\langle jm | L_{\pm} | jm \mp 1 \rangle = \sqrt{\frac{1}{2} (j \pm m)(j \mp m + 1)} \quad (3.60b)$$

elde edilir. Burada,  $j = \phi$  tamsayı ya da yarım tamsayı olabilir.

$$m = E_0 + x = -j, -j + 1, \dots, j - 1, j \quad (3.60c)$$

**Kompakt Olmayan Lie Cebrinde:**  $g_{33} = -1$  olur ve normalizasyon sabiti iki biçimde yazılır. Sürekli temel seriler  $\mathcal{D}_p(Q, E_0)$  durumunda,  $N_x = 1$  alınmasıyla (3.56) denklemi sağlandığı görülmektedir. Sürekli ilave serisi  $D_s(Q, E_0)$ , kesikli serisi  $\mathcal{D}^+(\phi)$  ve kesikli serisi  $\mathcal{D}^-(\phi)$  durumunda normalizasyon katsayısı,

$$N_x = \sqrt{\frac{(E_0 + x - \phi - 1)!}{(E_0 + x + \phi)!}} \quad (3.61)$$

ile verilir.  $E_0$ ,  $\phi$  ve  $x$ 'in aralığı üniter temsiller konusunda tartışılan özelliklere uygun olmaktadır.

### 3.1.6 Sonlu Dönüşümlerin Grup Temsilleri

Lie gruplarının temsillerini elde etmek için ilk olarak spinör temsilleri elde edilir, sonrada sonlu grup dönüşümüne uygun bir matris elde edilir.

Üç parametrelili Lie gruplarının temel üniter temsilini

$$\sigma = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -g_{33}\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix} \quad (3.62)$$

genel biçiminde yazabiliriz. Burada,  $\alpha$  ve  $\beta$  kompleks sayılar olup, matrisin üniter olmasından dolayı, bu matrisin determinantının

$$|\sigma| = \alpha\alpha^* + g_{33}\beta^*\beta = 1 \quad (3.63)$$

olması koşulu vardır.

$SO(3)$  ve  $SO(2,1)$  grupları için,  $\sigma$  dönüşümü bir spinör temsile karşılık gelir.  $\alpha$  ve  $\beta$  kompleks sayıları, üç reel parametreler cinsinden çeşitli kombinasyonları alabilir. Örneğin,  $SO(3)$  durumunda Cayley-Klein parametrelerini alırız.  $SU(1,1)$  durumunda

$$k(\theta) = \begin{pmatrix} e^{-i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\theta/2} \end{pmatrix} \quad a(\epsilon) = \begin{pmatrix} \cosh(\epsilon/2) & -i \sin(\epsilon/2) \\ i \sin(\epsilon/2) & \cosh(\epsilon/2) \end{pmatrix}$$

$$a(\tau) = \begin{pmatrix} \cosh(\tau/2) & -\sin(\tau/2) \\ -\sin(\tau/2) & \cosh(\tau/2) \end{pmatrix} \quad \eta(\nu) = \begin{pmatrix} 1 - i\nu/2 & -i\nu/2 \\ i\nu/2 & 1 + i\nu/2 \end{pmatrix}$$

matrislerinin kombinasyonu seçilebilir. Burada  $k(\Theta)$  matrisi eliptik sınıf,  $a(\epsilon)$  ve  $a(2)$  hiperbolik sınıf ve  $\eta(\nu)$  ise parabolik sınıftan olan dönüşüm matrisleridir. O halde  $SU(1, 1)$  grubu için

$$\sigma(\theta, \epsilon, \tau) = k(\theta)a(\epsilon)a(\tau) \quad \text{veya}$$

$$\sigma(\theta, \gamma, \nu) = k(\theta)a(\tau)\eta(\nu) \quad \text{veya}$$

$$\sigma(\theta, \tau, \varphi) = k(\theta)a(\tau)k(\varphi)$$

gibi kombinasyonlar alınabilir. Kompakt gruplar için tek parametrelili matrislerin tümü eliptik türde olmalıdır. Kompakt olmayan grup için tek parametrelili matrislerin bir tanesi eliptik kalan iki tanesi ise parabolik veya hiperbolik türde olabilir. Burada, sadece eliptik altgrupların sınıfını alacağız.

Sonlu bir dönüşüm için matrisin elemanlarını bulmaya çalışalım.  $\sigma$  spinör (dönüşümü) temsili için  $\xi_1$  ve  $\xi_2$  spinör baz durumları olsun.  $\sigma$  dönüşümü  $\xi_1$  ve  $\xi_2$  spinör bazlarına uygulanırsa,

$$\begin{pmatrix} \xi'_1 \\ \xi'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -g_{33}\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$

yani,

$$\xi'_1 = \alpha\xi_1 + \beta\xi_2 \quad \xi'_2 = -g_{33}\beta^*\xi_1 + \alpha^*\xi_2 \quad (3.64)$$

dönüşümünü elde ederiz. Bunun ters dönüşümünü de,

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^* & -\beta \\ g_{33}\beta^* & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi'_1 \\ \xi'_2 \end{pmatrix} = \sigma^{-1} \begin{pmatrix} \xi'_1 \\ \xi'_2 \end{pmatrix}$$

yani

$$\xi_1 = \alpha^*\xi'_1 - \beta\xi'_2 \quad \xi_2 = g_{33}\beta^*\xi'_1 + \alpha\xi'_2 \quad (3.65)$$

olur. Burada  $\sigma^{-1}$ ,  $\sigma$  matrisinin tersini göstermektedir. Keyfi bir temsil için baz fonksiyonunu,

$$|\phi, E_0 + x\rangle = N_x \xi_1^a \xi_2^b = N_x \xi_1^{\phi+E_0+x} \xi_2^{\phi-E_0-x} \quad (3.66)$$

gibi tipik  $\xi_1$  ve  $\xi_2$  spinör baz durumlarının tek terimlileri biçiminden kurulabilir.

Eğer,  $\mathcal{D}(\sigma)$  ile spinör grubun bir elemanını gösterilirse,

$$\mathcal{D}(\sigma)f(\xi_1\xi_2) = f(\sigma^{-1}(\xi_1, \xi_2)) \quad (3.67)$$

olur.  $\xi'_1$  ve  $\xi'_2$  dönüşmüş spinör bazları yerine, (3.64)'de verilen karşılıkları yazılırsa

$$\mathcal{D}(\sigma)|\phi, E_0 + x\rangle = N_x(\alpha^*\xi_1 - \beta\xi_2)^{\phi+E_0+x}(g_{33}\beta^*\xi_1 + \alpha\xi_2)^{\phi-E_0-x} \quad (3.68)$$

elde edilir.  $\xi_1$  ve  $\xi_2$  terimlerini ortak bir terimde toplamak için yuvarlak parantezle verilen  $(\alpha^*\xi_1 - \beta\xi_2)^{\phi+E_0+x}$  ve  $(g_{33}\beta^*\xi_1 + \alpha\xi_2)^{\phi-E_0-x}$  terimlerine Binom açılımını uygulanırsa,

$$(\alpha^*\xi_1 - \beta\xi_2)^{\phi+E_0+x} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\phi + E_0 + x)!}{(\phi + E_0 + x - k)!k!} (-1)^k (\alpha^*\xi_1)^{(\phi+E_0+x-k)} (\beta\xi_2)^k$$

$$(g_{33}\beta^*\xi_1 + \alpha\xi_2)^{\phi-E_0-x} = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{(\phi - E_0 - x)!}{(\phi - E_0 - x - \ell)!\ell!} (g_{33}\beta^*\xi_1)^{(\phi-E_0-x-\ell)} (\alpha\xi_2)^\ell$$

olur. Açılımın kompleks sayılardan meydana geldiği hatırlanırsa, bütün faktöriyeler gama fonksiyonları gibi ( $k! = \Gamma(k+1)$ ) alınacaktır. Bunlar (3.68)'de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\sigma)|\phi, E_0 + x\rangle &= N_x \sum (-1)^k \frac{(\phi + E_0 + x)! (\phi - E_0 - x)!}{(\phi - E_0 + x - k)! (\phi - E_0 - x - \ell)! k! \ell!} \quad (3.69) \\ &\times \alpha^{*(\phi+E_0+x-k)} (g_{33}\beta^*)^{(\phi-E_0-x-\ell)} (\alpha^\ell) \beta^k \xi_1^{2\phi-k-\ell} \xi_2^{k+\ell} \end{aligned}$$

verecektir. (3.69) denkleminin sağ tarafını  $\xi_1$  ve  $\xi_2$ 'nin tek terimlerinin bir lineer kombinasyonu olarak

$$\mathcal{D}(\sigma)|\phi, E_0 + x\rangle = \sum \mathcal{D}_{x'x}^\phi(\sigma)|\phi, E_0 + x'\rangle \quad (3.70)$$

biçiminde ifade edebiliriz. Burada

$$|\phi, E_0 + x'\rangle = N'_{x'} \xi_1^{\phi+E_0+x'} \xi_2^{\phi-E_0-x'} \quad (3.71)$$

olduğunu gözönüne alıp

$$k + \ell = \phi - E_0 - x' \quad (3.72)$$

biçiminde yazabilirsek mümkün olur. Fakat  $k$ ,  $\ell$  ve  $x'$  tamsayı olmasını gerektirir ve böylece bir grup temsili daha önce bulunan cebir temsilleriyle karşılaştırılırsa, sadece

$$(\phi - E_0) \in \mathbb{I} \quad (3.73)$$

olması durumunda mümkündür. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{x',x}^\phi(\sigma) &= \frac{N_x}{N_{x'}} \frac{(\phi + E_0 + x)! (\phi - E_0 - x)!}{(x' - x)!} \alpha^{*(\phi+E_0+x)} \alpha^{(\phi-E_0-x)} (g_{33}\beta^*)^{x'-x} \\ &\times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-g_{33} \frac{\beta\beta^*}{\alpha\alpha^*})^k (x' - x)!}{k! (\phi + E_0 + x - k)! (\phi - E_0 - x' - k)! (x' - x + k)!} \end{aligned} \quad (3.74)$$

yazabiliriz.

$SU(2)$  olması durumunda,

$$j = \phi, \quad m = E_0 + x \quad \text{ve} \quad g_{33} = +1 \quad (3.75)$$

ile verilir. Burada,  $j$  ve  $m$  ikisi birden ya tamsayıdır ya da yarım tamsayıdır. Ayrıca,  $m$ 'nin tanım aralığı

$$m = -j, -j + 1, -j + 2, \dots, j - 1, j \quad (3.76)$$

olmak üzere  $2j + 1$  tane değeri vardır. (3.57)'de elde edilen normalizasyon katsayısı (3.74) denkleminde kullanılırsa,  $SU(2)$  için iyi bilinen,

$$\begin{aligned} U_{m'm}^j(\mathbf{u}) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \sqrt{(j+m)! (j-m)! (j+m')! (j-m')!}}{k! (j+m-k)! (j-m'-k)! (m'-m+k)!} \\ &\times \alpha^{j-m'-k} (\alpha^*)^{(j+m-k)} \beta^k (\beta^*)^{(m'-m+k)} \end{aligned} \quad (3.77)$$

sonucu elde edilir. Burada,  $\mathbf{u}$ , (3.58) biçiminde tanımlanmış iki-boyutlu ünimodüler matrisler grubunun bir elemanıdır.

$SU(2)$  grubu  $SO(3)$  grubunu kapsayan bir gruptur ve böylece  $SU(2)$ 'nin her  $u^j$  temsili aynı zamanda  $SO(3)$ 'ün  $\mathcal{D}^j$  temsili olacaktır.  $SO(3)$  grubu çift bağlantılıdır ve böylece elde edilecek temsillerin bazılarının çift değerli olacağını önceden görülür. Genel olarak  $(\varphi, \theta, \psi)$  Euler açıları Cayley-Klein parametreleri cinsinden

$$\alpha = e^{i\varphi/2} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{-i\psi/2}, \quad \beta = -e^{-i\varphi/2} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{-i\psi/2} \quad (3.78)$$

alınmaktadır. Bu durumda,  $SO(3)$  için

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{m'm}^j(\varphi, \theta, \psi) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \sqrt{(j+m)!(j-m)!(j+m')!(j-m')!}}{k!(j+m-k)!(j-m'-k)!(m'-m+k)!} \\ &\times e^{im'\varphi} \cos^{(2j+m-m'-2k)}\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin^{(2k+m'-m)}\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{im\psi} \end{aligned} \quad (3.79)$$

yazılır.

$SO(3)$ 'ün spin temsilleri de denilen ve  $j$ 'nin yarım tamsayı değerlerini ortaya çıkaran temsillerini  $\mathcal{D}^j$ 'nin davranışından hemen görebileceği gibi, hem de aynı zamanda belirli bir eksen etrafında  $0-2\pi$  arasında bir döndürme işlemi yapılarak, çift değerli olduğu kolayca görülebilir.  $j$ 'nin tamsayı değerleri ile karakterize edilen gösterimler  $SO(3)$ 'ün "gerçek" temsilleri olarak adlandırılır ve bu temsiller tek değerlidir.

$SU(1, 1)$  grubu için  $g_{33} = -1$  elde ederiz ve (3.61)'da bulunan normalizasyon katsayısı (3.74) yerine yazıldığında gerçek ya da tek değerli üniter temsilleri elde edilir. Temsillerin tek değerli olması ve (3.73) koşulu,

$$\phi = j \quad \text{ve} \quad m = E_0 + x \quad (3.80)$$

sağlanmasını gerektirir. Burada,  $j$  ve  $m$  her ikisinde ya tamsayıdır ya da yarım tamsayıdır.

$SU(1, 1)$  grubu,  $SO(2, 1)$  grubunu iki defa kapsar. Böylece  $j$  ve  $m$ 'nin her ikisinde tamsayı değerine sahip olan  $SO(2, 1)$ 'in üniter temsilleri gerçek temsilleri ve  $j$  ve  $m$ 'nin yarım tamsayıya sahip olan  $SO(2, 1)$ 'in üniter temsilleri de spinör temsillerini oluşturur. Spinör temsiller uygun parametrik bir biçimde verildiğinde, bu temsiller (3.74)'den doğrudan elde edilebilir.

### 3.1.7 Kuplaj Katsayıları

Bir  $\mathcal{G}$  grubunun iki indirgenemez  $\mathcal{D}_1$  ve  $\mathcal{D}_2$  temsillerinin  $\mathcal{D}_1 \otimes \mathcal{D}_2$  biçimindeki Kronecker çarpımının yine  $\mathcal{G}$  grubunun indirgenemez temsillerinin toplamı biçiminde yazılabilmesi, fizikte hem kompakt hem de kompakt olmayan gruplarının uygulamalarında önemlidir.

Yukarıda söylenen işlemlerin yapılması durumunda üç temel problem ortaya çıkmaktadır. Bunlar;

- Kronecker çarpım için bir bazın oluşturulması,
- Kronecker çarpımlarının indirgenmesinde ortaya çıkan temsillerin belirlenmesi ( $\text{SO}(3)$ 'ün özel durumunda bunlara Clebsch-Gordon serileri yada katsayıları denir),
- Wigner katsayıları olarak bilinen, indirgenebilir  $\mathcal{D}_1 \otimes \mathcal{D}_2$  temsillerinin, indirgenemez temsilleri içerisine dönüştüren dönüşüm matrisinin elemanlarının bulunmasıdır.

İlk problemin çözümü, döndürme grubunu gözden geçirilen Bargmann (1962) tarafından taslağı çizilen, daha sonra Weyl (1950, 1946), Van der Waerden (1933) ve Eckart (1930) tarafından geliştirilen ve temel temsili karakterize eden spinörlerdeki monomiallerden oluşturulan bir bazın kullanılması ile yapılabilir. Kompakt gruplar için Clebsch-Gordan serisi ya ağırlıklar cinsinden ya da Schur fonksiyonları (Wybourne, 1970; Patera ve Sankoff, 1972) kullanılarak geliştirilebilir. Dynkin yöntemleri kullanılarak kompakt yarı basit Lie gruplarının kuplaj sabitlerinin hesaplanması için evrensel bir yöntem, kompakt olmayan gruplar genişletmek mümkün değildir. Bu yöntem Patera (1970) tarafından geliştirilmiştir. Burada üç temsilin değişmez kuplajını oluşturacağız, sonra kuplaj katsayılarını belirleyeceğiz. Daha sonra Barut ve Fronsdal (1965) tarafından kompakt olmayan gruplarada uygulanmıştır.

Genelde Clebsch-Gordan serilerinin elde edilmesi,

$$\mathcal{D}_1 \otimes \mathcal{D}_2 = \sum_3 g_{123} \mathcal{D}_3 \quad (3.81)$$

denkleminin çözümüne indirgenir. Burada,  $g_{123}$  bir sayıdır ve  $\mathcal{D}_1 \otimes \mathcal{D}_2$  Kronecker çarpımının indirgenmesi sırasında bulunan  $\mathcal{D}_3$  temsilinin kaç defa tekrarlandığıdır. Bu sayılar,

$$\mathcal{D}_1 \otimes \mathcal{D}_2 \otimes \mathcal{D}_3^* \quad (3.82)$$

üçlü Kronecker çarpımının indirgenmesinde  $\mathcal{D}_0$  özdeşlik temsilinin görünme sayısına denktir. Burada,  $\mathcal{D}_3^*$  temsili,  $\mathcal{D}_3$  temsilinin kontragradientini göstermektedir. Kontra gradient temsillerin tanımından,  $\mathcal{D}_3 \otimes \mathcal{D}_3^*$  çarpımı grup işlemleri altında değişmez kalır, böylece (3.82) denkleminde verilen üçlü çarpım,

$$(\mathcal{D}_1 \otimes \mathcal{D}_2 \otimes \mathcal{D}_3^*)I = I \quad (3.83)$$

gibi bir  $I$  değişmezi ile ilişkili olmak zorundadır.

$\mathcal{D}_1$ ,  $\mathcal{D}_2$  ve  $\mathcal{D}_3^*$  temsillerinin gösterimleri, (3.17) ve (3.24) denklemlerinde kullanılan basit spinörlerde monomialler cinsinden

$$\mathcal{D}_1 : \quad |\phi_1 m_1\rangle = N_{m_1} \xi_1^{\phi_1+m_1} \eta_1^{\phi_1-m_1} \quad (3.84a)$$

$$\mathcal{D}_2 : \quad |\phi_2 m_2\rangle = N_{m_2} \xi_2^{\phi_2+m_2} \eta_2^{\phi_2-m_2} \quad (3.84b)$$

$$\mathcal{D}_3^* : \quad \langle \phi_3 m_3 | = (-1)^{\phi_3-m_3} N_{m_3} \xi_3^{\phi_3-m_3} \eta_3^{\phi_3+m_3} \quad (3.84c)$$

biçiminde yazılabilir. Burada  $m = E_0 + x$ 'dir.

Bir  $I$  değişmezi, değişmezin bir kuplajı cinsinden

$$I = \sum_{m_1 m_2 m_3} F(\phi_1 \phi_2 \phi_3) C_{m_1 m_2 m_3}^{\phi_1 \phi_2 \phi_3} N_{m_1} N_{m_2} N_{m_3} (-1)^{\phi_3-m_3} \xi_1^{\phi_1+m_1} \eta_1^{\phi_1-m_1} \\ \times \xi_2^{\phi_2+m_2} \eta_2^{\phi_2-m_2} \xi_3^{\phi_3-m_3} \eta_3^{\phi_3+m_3} \quad (3.85)$$

biçiminde yazılır. Burada,  $I$  değişmezi  $\Pi_i \xi_i^{a_i} \eta_i^{b_i}$  polinom uzayındaki bir değişmez,  $F(\phi_1 \phi_2 \phi_3)$  sadece  $\phi_i$ 'lerin bir fonksiyonu ve  $C_{m_1 m_2 m_3}^{\phi_1 \phi_2 \phi_3}$  ise  $\mathcal{D}_1 \otimes \mathcal{D}_2$  Kronecker çarpımlarının indirgendiği Clebsch-Gordan kuplaj katsayılarıdır.

Grup matrisleri unimodüler olduğundan, (3.64) denkleminde, değişmezlerin

$$\zeta_1 = \xi_2 \eta_3 - \xi_3 \eta_2, \quad \zeta_2 = \xi_3 \eta_1 - \xi_1 \eta_3, \quad \zeta_3 = \xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1 \quad (3.86)$$

biçimindeki spinör fonksiyonların üç kümesinden elde edilebileceği görülmektedir. Burada, her monomial  $\zeta_\alpha$  içinde bulunur. Böylece  $\zeta_i$ 'nin binom açılımı yapılırsa,

$$\begin{aligned} I &= \zeta_1^{k_1} \zeta_2^{k_2} \zeta_3^{k_3} \\ &= \sum_{pqr} (-1)^{p+q+r} \binom{k_1}{p} \binom{k_2}{q} \binom{k_3}{r} \\ &\quad \times \xi_1^{k_3-r+q} \xi_2^{k_1-p+r} \xi_3^{k_2-q+p} \eta_1^{k_2-q+r} \eta_2^{k_3-r+p} \eta_3^{k_1-p+q} \end{aligned} \quad (3.87)$$

elde edilir. Burada,  $a$  ve  $b$  negatif olmayan tamsayı olmak üzere, binom katsayıları

$$\binom{a}{b} = \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(b+1)\Gamma(a-1)!} \quad (3.88)$$

gibi gama fonksiyonları cinsinden ifade edildi. Böylece,

$$\binom{a}{b} = \frac{a!}{b!(a-b)!}, \quad \binom{-a}{b} = \frac{(-1)^b (a+b-1)!}{b!(a-1)!} \quad (3.89a)$$

$$\binom{-a}{-b} = \frac{(-1)^{b-a} (b-1)!}{(a-1)!(b-a)!}, \quad \binom{a}{-b} = 0 \quad (3.89b)$$

elde edilir.

(3.85) ve (3.87) denklemleri karşılaştırılırsa,

$$k_1 = \phi_2 + \phi_3 - \phi_1, \quad k_2 = \phi_3 + \phi_1 - \phi_2, \quad k_3 = \phi_1 + \phi_2 - \phi_3 \quad (3.90)$$

eşitliklerinin olması gerekliliği ortaya çıkar. Daha sonra, spinör fonksiyonların denk güçleri için

$$r - p = \phi_1 - \phi_3 + m_2, \quad p - q = \phi_2 - \phi_1 - m_3, \quad q - r = \phi_3 - \phi_2 + m_1 \quad (3.91)$$

eşitliklerinin sağlanması, benzer ağırlıkların toplanması kuralı olan

$$m_1 + m_2 = m_3 \quad (3.92)$$

bağıntısından bulunur. (3.87)'de görülen  $p$  ve  $q$ 'yu yok etmek için (3.91) ve (3.90) kullanılırsa

$$\begin{aligned} C_{m_1 m_2 m_3}^{\phi_1 \phi_2 \phi_3} &= \frac{1}{[F(\phi_1 \phi_2 \phi_3) N_{m_1} N_{m_2} N_{m_3}]} \sum_r (-1)^{\phi_1 - \phi_2 + \phi_3 - r} \begin{pmatrix} \phi_2 + \phi_3 - \phi_1 \\ \phi_3 - \phi_1 - m_2 + r b \end{pmatrix} \\ &\quad \times \begin{pmatrix} \phi_1 + \phi_3 - \phi_2 \\ \phi_3 - \phi_2 + m_2 + r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 + \phi_2 - \phi_3 \\ r \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.93)$$

elde edilir.

Şimdi  $\phi_i$  değişkeni yerine  $j_i$  değişkenini kullanarak,  $SO(3)$  için Clebsch-Gordan kuplaj katsayılarını belirlemeye çalışalım. Burada,  $j_i$  negatif olmayan tamsayı ya da yarım tamsayıdır ve  $m_i$  ise  $j_i$  sayısının izdüşümüyle ilişkili bir başka sayıdır. (3.56)'da verilen  $N_{m_i}$  normalizasyon sabitleri (3.93)'te kullanılırsa,

$$\begin{aligned} C_{m_1 m_2 m_3}^{j_1 j_2 j_3} &= \frac{\sqrt{(j_1 + m_1)! (j_1 - m_1)! (j_2 + m_2)! (j_2 - m_2)! (j_3 + m_3)! (j_3 - m_3)!}}{F(j_1 j_2 j_3)} \\ &\quad \times (j_1 + j_2 - j_3)! (j_1 - j_2 + j_3)! (-j_1 + j_2 + j_3)! \\ &\quad \times \sum_r \frac{(-1)^{j_1 - j_2 + j_3 - r}}{r! (j_1 - m_1 - r)! (j_2 + m_2 - r)! (j_3 - j_1 - m_2 + r)!} \\ &\quad \times (j_3 - j_2 + m_1 + r)! (j_1 + j_2 - j_3 - r)! \end{aligned} \quad (3.94)$$

elde edilir. Kuplaj katsayılarının üniter olması özelliğinden,

$$\sum_{j_1 m_1} C_{m_1 m_2 m_3}^{j_1 j_2 j_3} C_{m'_1 m'_2 m'_3}^{j_1 j_2 j_3} = \delta_{m_1 m'_1} \delta_{m_2 m'_2} \quad (3.95)$$

$$\sum_{m_1 m_2} C_{m_1 m_2 m_3}^{j_1 j_2 j_3} C_{m_1 m_2 m'_3}^{j_1 j_2 j'_3} = \delta_{j_3 j'_3} \delta_{m_3 m'_3} \quad (3.96)$$

ve (3.82) görünümünde olan

$$\sum_{m_1} C_{m_1 m_2 m_3}^{j_1 j_2 j_3} C_{m_1 m_2 m_3'}^{j_1 j_2 j_3} = 1 \quad (3.97)$$

elde edilir.

Eğer  $j_3 = m_3$  seçersek,  $m_1 + m_2 = j_3$  olur ve (3.94) denkleminin sadece  $r = j_1 - m_1$  koşulunun sağlanması durumunda geçerli olduğu bulunur. Böylece, (3.97) bağıntısı,

$$F(j_1 j_2 j_3) = (-1)^{j_1 + j_2 - j_3} \times \sqrt{\frac{(j_1 + j_2 - j_3)! (j_1 - j_2 + j_3)! (-j_1 + j_2 + j_3)! (j_1 + j_2 + j_3 + 1)!}{2j_3 + 1}} \quad (3.98)$$

biçiminde olan belirli bir  $F(j_1 j_2 j_3)$  verir. Bu sonucu, (3.94)'de yerine yazılırsa  $SO(3)$  için iyi bilinen

$$C_{m_1 m_2 m_3}^{j_1 j_2 j_3} = \delta_{m_1 + m_2, m_3} \sqrt{\frac{(2j_3 + 1)(j_1 + j_2 - j_3)! (j_1 - j_2 + j_3)! (-j_1 + j_2 + j_3)!}{(j_1 + j_2 + j_3 + 1)!}} \times \sqrt{(j_1 + m_1)! (j_1 - m_1)! (j_2 + m_2)! (j_2 - m_2)! (j_3 + m_3)! (j_3 - m_3)!} \quad (3.99)$$

$$\times \sum \frac{(-1)^r}{(j_1 - m_1 - r)! (j_2 + m_2 - r)! (j_3 - j_2 + m_1 + r)! (j_3 - j_1 - m_2 + r)! (j_1 + j_2 - j_3 - r)! r!}$$

elde edilir. Yukardaki formül pratik kullanımlar için çok kullanışsız olmasına rağmen, özel durumlar için hesaplanarak tablolar biçiminde verilmiştir (Edmonds, 1957; Jucys ve Bandzaitis, 1965; Rotenberg ve ark., 1959).

Ayrıca bu formül bazı matematiksel işlemlerle farklı biçimde düzenlenebilmektedir. Örneğin,

$$\sum_{\rho} \frac{1}{\rho! (n - \rho)! (r - \rho)! (m - r + \rho)!} = \frac{(n + m)!}{m! n! r! (n + m - r)!}, \quad (n, m \geq 0) \quad (3.100)$$

ve

$$\sum_r \frac{(-1)^r (n - r)!}{r! (m - r)! (\ell - r)!} = \frac{(n - m)! (n - \ell)!}{n! m! \ell! (n - m - \ell)!}, \quad (n > m > 0 \text{ ve } n > \ell > 0) \quad (3.101)$$

özdeşlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
C_{m_1 m_2 m_3}^{j_1 j_2 j_3} &= \delta_{m_1+m_2, m_3} \sqrt{\frac{(2j_3+1)(j_1+j_2-j_3)!}{(j_1+j_2+j_3+1)!(j_1-j_2+j_3)!(-j_1+j_2+j_3)!}} \\
&\quad \times \sqrt{\frac{(j_1-m_1)!(j_2-m_2)!(j_3+m_3)!(j_3-m_3)!}{(j_1+m_1)!(j_2+m_2)!}} \\
&\quad \times \sum_r \frac{(-1)^{(r+j_1-m_1)}(j_1+m_1+r)!(j_2+j_3-m_1-r)!}{r!(j_1-m_1-r)!(j_3-m_3+r)!(j_2-j_3+m_1+r)!} \quad (3.102)
\end{aligned}$$

biçiminde bulunur.

$SO(2,1)$ 'in hem üniter hem de üniter olmayan kesikli ve sürekli temsiller için kuplaj katsayılarının belirlenmesi çok karmaşıktır. Çeşitli güçlükler literatürde verilmiştir (Holman ve Biedenharn, 1966; Young, 1970). Burada, uygulamalarda yer alan sonsuz boyutlu üniter  $\mathcal{D}^+(\phi_2)$  temsiline, sonlu boyutlu üniter olmayan  $\mathcal{D}(\phi_1)$ 'in kuplaj katsayıları ile ilgileneceğiz. Buna karşılık, ilk  $\mathcal{D}^+(\phi_1) \times \mathcal{D}^+(\phi_2)$  Kronecker çarpımının indirgenmesinde ortaya çıkan kuplaj katsayılarına bakacağız.

$\mathcal{D}^+(j_1) \times \mathcal{D}^+(j_2)$  için Clebsch-Gordan serileri kolayca,

$$\mathcal{D}^+(j_1) \otimes \mathcal{D}^+(j_2) = \sum_{j_3=j_1+j_2}^{-\infty} \mathcal{D}^+(j_3) \quad (3.103)$$

olarak görünür. Kuplaj katsayıları üçlü

$$\mathcal{D}^+(j_1) \times \mathcal{D}^+(j_2) \times \mathcal{D}^{+*}(j_3)$$

Kronecker çarpımının değişmez kuplajından bulunursa,

$$\begin{aligned}
C_{m_1 m_2 m_3}^{j_1 j_2 j_3} &= \frac{1}{F(j_1 j_2 j_3)} \sqrt{\frac{(m_1+j_1)!(m_2+j_2)!(m_3+j_3)!}{(m_1-j_1-1)!(m_2-j_2-1)!(m_3-j_3-1)!}} \\
&\quad \times \sum_r (-1)^{j_1-j_2+j_3-k} \begin{pmatrix} j_2+j_3-j_1 \\ j_3-j_1-m_2+r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1+j_3-j_2 \\ j_3-j_2+m_1+r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1+j_2-j_3 \\ r \end{pmatrix} \quad (3.104)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada,  $-j_3 \geq -j_1 - j_2$ ,  $m_i \geq -j_i$  ve  $j_i < 0$  dir ve  $j_i = \phi_i$  ve  $m_i = E_0 + x_i$  olmak üzere (3.61) ile verilen normalizasyon sabitini kullandık. İlk iki binom katsayısında negatif argümanlar bulunur ve son argüman pozitifdir. Böylece,

$$C_{m_1 m_2 m_3}^{j_1 j_2 j_3} = \frac{1}{F(j_1 j_2 j_3)} \sqrt{\frac{(m_1 + j_1)! (m_2 + j_2)! (m_3 + j_3)!}{(m_1 - j_1 - 1)! (m_2 - j_2 - 1)! (m_3 - j_3 - 1)!}} \\ \times \left[ \frac{(j_1 + j_2 - j_3)!}{(-j_1 + j_2 - j_3 - 1)! (j_1 - j_2 - j_3 - 1)!} \right] \\ \times \sum_r \frac{(-1)^{-j_1 + j_2 - m_3 + r} (j_1 - j_3 - m_2 - r - 1)! (m_1 - j_1 + r - 1)!}{r! (j_2 + m_2 - r)! (j_3 - j_2 + m_1 + r)! (j_1 + j_2 - j_3 - r)!} \quad (3.105)$$

olur. (3.97) denkleminin üniterlik koşulunu sağlayan kuplaj katsayısını aradığımızda ve  $m_3 = -j_3$  seçerek  $F(j_1 j_2 j_3)$  çarpanı belirlenebilir.

(3.100) özdeşliğin kullanımından sonra,  $DD^+(j_1) \times \mathcal{D}^+(j_2)$  sonucu

$$C_{m_1 m_2 m_3}^{j_1 j_2 j_3} = \sqrt{\frac{(-2j_3 - 1)(j_1 + j_2 - j_3)! (-j_1 - j_2 - j_3 - 2)! (m_1 + j_1)! (m_2 + j_2)!}{(j_1 - j_2 - j_3 - 1)! (-j_1 + j_2 - j_3 - 1)! (m_1 - j_1 - 1)! (m_2 - j_2 - 1)!}} \\ \times \sqrt{\frac{(m_3 + j_3)!}{(m_3 - j_3 - 1)!}} \sum_r \frac{(-1)^{-j_1 + j_2 - m_3 + r} (m_2 + j_1 - j_3 - r - 1)! (m_1 - j_1 + r - 1)!}{r! (m_2 + j_2 - r)! (j_3 - j_2 + m_1 + r)! (j_1 + j_2 - j_3 - r)!} \quad (3.106)$$

ile verilir.

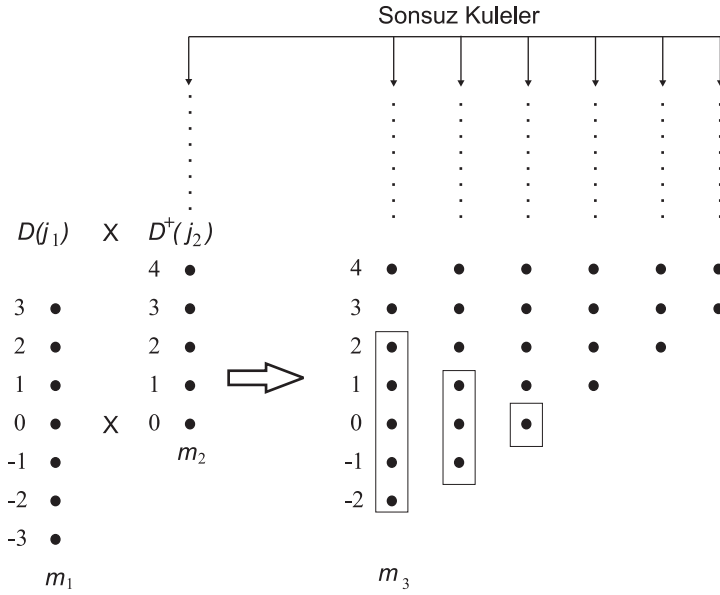
Burada,  $\mathcal{D}^-(j_1) \times \mathcal{D}(j_2) \times \mathcal{D}^{*-}(j_3)$  için  $j_i < 0$  ve  $m_i \leq j_i$  olduğunu hatırlayarak, yukarıda yapılan işlem iki negatif kesikli temsil için de yapılırsa; Clebsch-Gordan katsayıları

$$C_{m_1 m_2 m_3}^{j_1 j_2 j_3} = \sqrt{\frac{(-2j_3 - 1)(j_1 + j_2 - j_3)! (-j_1 - j_2 - j_3 - 2)! (-m_1 + j_1)! (-m_2 + j_2)!}{(j_1 - j_2 - j_3 - 1)! (-j_1 + j_2 - j_3 - 1)! (-m_1 - j_1 - 1)! (-m_2 - j_2 - 1)!}} \\ \times \sqrt{\frac{(-m_3 + j_3)!}{(-m_3 - j_3 - 1)!}} \sum_r \frac{(-1)^{j_1 - j_2 + m_3 - r} (-m_2 - j_2 + r - 1)! (j_2 - j_3 - m_1 - r - 1)!}{r! (j_1 - m_1 - r)! (j_3 - j_1 - m_2 + r)! (j_1 + j_2 - j_3 - r)!} \quad (3.107)$$

biçiminde bulunur.

### 3.1.8 Kuplaj Katsayıları ve Analitik Süreklilik

(3.106)'da verilen  $SO(3)$ 'ün  $\mathcal{D}^+(j_1) \times \mathcal{D}^+(j_2)$  çarpımından elde edilen kuplaj katsayıları formülü ile (3.99)'da verilen  $SO(2, 1)$ 'in  $\mathcal{D}(j_1) \times \mathcal{D}(j_2)$  çarpımından elde edilen kuplaj katsayıları formülüyle karşılaştırıldığında, çarpıcı bir benzerlik görülür. Gerçekten, (3.106)'yi gamma fonksiyonları cinsinden ifade edersek ve (3.99) özdeşliği kullanılarak  $j_i \rightarrow -j_i$  altında analitik sürekliliği yapılırsa, önemsiz bir faz dışında (3.106) sonucunu buluruz. Biedenharn ve Holman (Holman ve Biedenharn, 1966; Holman ve Biedenharn, 1968),  $SO(3)$  ve  $SO(2, 1)$ 'in kapsam gruplarının kuplaj katsayılarının bir tek nicelikten türetilbileceğini göstermek için analitik süreklilik kavramını kullandılar. Şimdi, pozitif bir kesikli üniter  $\mathcal{D}^+(j_2)$  temsiline sonlu bir üniter olmayan  $\mathcal{D}(j_1)$  temsilinin kuplajı durumundaki katsayıların bazılarını hesaplayalım.  $\mathcal{D}(j_1) \times \mathcal{D}^+(j_2)$  için Clebsch-Gordan



Şekil. 3.1:  $\mathcal{D}(3) \times \mathcal{D}^+(-1)$  Kronecker çarpımının çözümlemesini veren ağırlık diyagramları.

serileri, özel durum için Şekil 3.1'den kolaylıkla görüleceği gibi, iki temsilin ağırlıklarından oluşan ağırlık diyagramı gözönüne alınarak belirlenebilir.  $\mathcal{D}^+(j_3)$  kesikli temsilleri, sonsuz pozitif ağırlık kuleleriyle gösterilir ve sonlu ağırlık kuleleride sonlu temsillerdir. Sonlu ağırlık kuleleriyle gösterilenler kutu içine alınmıştır.  $\mathcal{D}(j_1) \times \mathcal{D}^+(j_2)$  için Clebsch-Gordan serileri iki duruma ayrılır: a)  $j_1 < -j_2$  ve b)  $j_1 \geq -j_2$ . Bu iki durum için,  $j_1$  ve

$j_2$ 'nin her ikisinin de tamsayı ya da yarım tamsayı olmak üzere

$$\mathcal{D}(j_1) \times \mathcal{D}^+(j_2) = \begin{cases} \sum_{j_3=-j_1+j_2}^{j_1+j_2} \mathcal{D}^+(j_3), & (j_1 < -j_2); \\ \sum_{j_3=0}^{j_1+j_2} \mathcal{D}(j_3) + 2 \sum_{j_3=-j_1-j_2-1}^{-1} \mathcal{D}^+(j_3) \\ \quad + \sum_{j_3=-j_1+j_2}^{-j_1-j_2-2} \mathcal{D}^+(j_3), & (j_1 \geq -j_2) \end{cases} \quad (3.108)$$

elde edilir.

Eğer,  $j_1$  tamsayı ve  $j_2$  yarım tamsayı olursa veya tam tersi olursa,

$$\mathcal{D}(j_1) \times \mathcal{D}^+(j_2) = \sum_{j_3=1/2}^{j_1+j_2} \mathcal{D}(j_3) + 2 \sum_{j_3=-j_1-j_2-1}^{-3/2} \mathcal{D}^+(j_3) + \sum_{j_3=-j_1+j_2}^{-j_1-j_2-2} \mathcal{D}^+(j_3) + \mathcal{D}^+(-\frac{1}{2}) \quad (3.109)$$

elde edilir.

$j_1 \geq -j_2$  için Kronecker çarpımlarının basit indirgenebilir olmadığı yukardan görülmektedir. Buna rağmen, eğer  $j_3 \geq -k_1 + j_2$  tanım aralığıyla kendimizi sınırlarsak, çift katlı (çakışık) temsillerle ilişkili güçlüklerden kaçınmış olunur ve

$$j_1 \rightarrow \dot{j}_1, \quad j_2 \rightarrow -\dot{j}_2, \quad j_3 \rightarrow -\dot{j}_3 \quad (3.110)$$

dönüşümleri altında  $SO(3)$  için bulunan katsayıların analitik sürekliliği yapılarak, tüm fazlar için,

$$\begin{aligned} C_{m_1 m_2 m_3}^{j_1 j_2 j_3} &= \sqrt{\frac{(-1)^{j_2-j_3-m_1} (-2j_3-1)(j_1+j_2-j_3)! (j_1-j_2+j_3)! (-j_1-j_2-j_3-2)!}{(j_1-j_2-j_3-1)!}} \\ &\quad \times \sqrt{\frac{(j_1+m_1)! (j_1-m_1)! (j_2+m_2)! (j_3+m_3)!}{(m_2-j_2-1)! (m_3-j_3-1)!}} \\ &\quad \times \sum_r \frac{(j_1-j_3+m_2-r-1)!}{r! (j_1-m_1-r)! (j_2+m_2-r)! (j_1+j_2-j_3-r)! (j_3-j_2+m_1+r)!} \end{aligned} \quad (3.111)$$

kuplaj katsayılarını elde edilir. Burada, birinci terimdeki karekökün içinde bir fazın olduğuna dikkat edilmelidir. Daha önceki kuplaj katsayılarından farklı olarak (3.111) hem reel hem de imajiner değerler verir.

Bu kuplaj sabitleri üniter olma koşulunu sağlamaz, ancak

$$\sum_{m_1, m_2} C_{m_1 m_2 m_3}^{j_1 j_2 j_3} * C_{m_1 m_2 m'_3}^{j_1 j_2 j'_3} (-1)^{j_2 - j_3 - m_1} = \delta_{m_3 m'_3} \delta_{j_3 j'_3} \quad (3.112)$$

bağıntısını verir.

$SO(3)$ 'e karşılık gelen sonucun analitik süreklilikle  $SO(2, 1)$ 'in  $\mathcal{D}(j_1) \times \mathcal{D}^+(j_2) \times \mathcal{D}^+(j_3)$  için bulunan (3.111) ifadesi,  $j_i$  ve  $m_i$  kuantum sayılarının tanım aralığında oldukça farklı değerleri alınmasına rağmen,  $SO(3)$  için (3.99) denkleminde bulunan sonuçla doğal olarak yakından ilişkilidir. Gerçekte, (3.111)'den bulunan cebirsel biçimde verilen sonuçları, (3.99)'ten bulunacak olan cebirsel görünümüne karşılık gelen  $((-1)^{j_1 - j_2 + j_3})$  terimiyle çarpıldığında eşit olur. Böylece,  $SO(3)$  için kuplaj katsayılarının cebirsel görünümünü veren geniş tabloları için  $\mathcal{D}(j_1) \times \mathcal{D}^+(j_2) \times \mathcal{D}^+(j_3)$ 'ün cebirsel biçimler kullanılabilir.

### 3.2 Spektrum Üretme Cebri (SGA)

Hamilton işlemcisi kinetik ve potansiyel enerji fonksiyonuna bağlıdır. Herhangi bir fiziksel sistem için potansiyel enerji, sadece koordinatların fonksiyonu olabileceği gibi, hıza bağımlı ya da başka etkileşme terimlerini de bulundurabilir. Hamilton işlemcisinin özdeğeri, toplam enerjiyi verdiğini Schrödinger denkleminde biliyoruz. Buna göre,  $so(2, 1)$ 'in  $\Gamma_i$  üreteçlerini Hamilton işlemcisine

$$G(r)(H - E) = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \Gamma_i - E \sum_{i=1}^3 \beta_i \Gamma_i - (\gamma + \xi E) \quad (3.113)$$

biçiminde bağlayabiliriz. Burada,  $\alpha_i$  ve  $\beta_i$  sabitlerdir,  $\gamma$  ve  $\xi$  ise enerjiden bağımsız sabitlerdir.  $G(r)$  ise  $(H - E)$  fonksiyonunun doğrusallığını bozmayacak olan  $r$ 'nin herhangi bir fonksiyonudur.

$\Gamma_i$  üreteçleri,  $\mathbf{p}$  ve  $\mathbf{r}$ 'nin uygun birer kombinasyonu olmak zorundadır. Kinetik enerji teriminden  $p^2$ 'yi, potansiyel enerjiden  $r$ 'nin herhangi bir fonksiyonu ve  $\mathbf{r}$  ile  $\mathbf{p}$

kombinasyonu olan  $(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p})$  ile  $(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p})^2$  'yi içinde bulundurur. Üç boyutlu hal için

$$(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p})^2 = r^2 p^2 + i \mathbf{r} \cdot \mathbf{p} - L^2 \quad (3.114)$$

olduğundan,  $(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p})^2$ 'ye gereksinim yoktur.

$\alpha_i$  ve  $\beta_i$ 'lerin  $n$ .ci katsayısı sıfır alarak, fonksiyonu iki üretece bağlayabiliriz. Diğer üreteci, fonksiyonda olmayan üreteç eksenini etrafında  $\theta$  döndürme açısı ile

$$\Gamma_i = e^{-i a_n \Gamma_n} \Gamma_i e^{i a_n \Gamma_n} \quad (3.115)$$

benzerlik dönüşümü yaparsak, köşegenleştirebiliriz. Cebirden gruba geçiş  $e^{i a_n \Gamma_n}$  şeklinde verildiği için  $e^{i a_n \Gamma_n}$  terimi seçilen Lie grubunun bir elemanıdır.

Bu işlemden sonra, potansiyelin türüne ve enerjinin pozitif veya negatif olmasına bağlı olarak sürekli spektrumu veya kesikli spektrumu elde ederiz. Kompakt olmayan  $\Gamma_1$  üreteci sürekli özdeğerleri verdiği için  $\Gamma_1$ 'i ya da kompakt  $\Gamma_3$  üreteci kesikli spektrumu verdiği için  $\Gamma_3$ 'i seçebiliriz. Bütün problemlerde kesikli spektrumu bula- çağımız için  $\Gamma_3$ 'ün özdeğer denklemini çözdük ve temsil teorisinden  $\Gamma_3$ 'ün özdeğeri (2.35)'de  $(-\phi + x)$  olarak verilmişti. Bu iki özdeğeri karşılaştırarak enerji özdeğerlerini elde ederiz. Spektrum alttan sınırlı olduğundan  $D^+(\phi)$  temsilini kullanacağız.

Yukarıdaki iki özdeğeri karşılaştırırken  $\phi$  terimini, yine temsil teorisinden bilindiği gibi Kasimir operatöründen bulacağız.  $so(2, 1)$ 'in Kasimir operatörü,

$$\Gamma^2 = \Gamma_3^2 - \Gamma_1^2 - \Gamma_2^2 \quad (3.116)$$

ile verilir. Bulduğumuz üreteçleri kullanarak bunu hesaplarız ve  $\Gamma^2$ 'nin özdeğeri olan (2.34)'den dolayı  $\phi(\phi + 1)$ ' eşitleyerek  $\phi$ 'yi buluruz. Bulunacak olan  $\phi$  negatif olmasına dikkat edilecektir. Çünkü ancak negatif değer, bize enerjinin negatif olduğu yani bağlı bir sistemin spektrumunu vermektedir.

(3.113) denkleminde  $\alpha_2$  ve  $\beta_2$  sabitlerini sıfır olarak alırsak,  $so(2,1)$  cebirinin üreteçleri cinsinden enerji özdeğer denklemi,

$$(a\Gamma_1 + b\Gamma_3 + c)\Psi = 0 \quad (3.117)$$

şeklinde yazılır. Burada  $a$ ,  $b$  ve  $c$  enerjiye bağımlı olabilen sabitlerdir. Üreteçlerimizi köşegenleştirmek için  $\Gamma_2$  üreteci etrafında  $\theta$  döndürme açısı ile  $\Gamma_1$  ve  $\Gamma_3$  üreteçlerini döndürelim. Özdeğer denklemi bu işlemten sonra,

$$\tilde{\Psi} = e^{-i\theta\Gamma_2}\Psi e^{-i\theta\Gamma_2} \quad (3.118)$$

olarak dönüşmüş yeni dalga fonksiyonunu tanımlarsak,

$$(ae^{-i\theta\Gamma_2}\Gamma_1e^{-i\theta\Gamma_2} + be^{-i\theta\Gamma_2}\Gamma_3e^{-i\theta\Gamma_2} + c)\tilde{\Psi} = 0 \quad (3.119)$$

olur. Göreceli kuantum mekaniğinden bilinen

$$e^{-i\theta\Gamma_2}\Gamma_1e^{-i\theta\Gamma_2} = \Gamma_1 \cosh \theta + \Gamma_3 \sinh \theta \quad (3.120)$$

$$e^{-i\theta\Gamma_2}\Gamma_3e^{-i\theta\Gamma_2} = \Gamma_3 \cosh \theta + \Gamma_1 \sinh \theta \quad (3.121)$$

eşitliklerini (3.119) denkleminde yerine yazarsak

$$(a \cosh \theta + b \sinh \theta)\Gamma_1 + (b \cosh \theta + a \sinh \theta)\Gamma_3 + c\tilde{\Psi} = 0 \quad (3.122)$$

buluruz. Kesikli spektrumu elde etmek için,  $\Gamma_1$  ifadesinde parantez içini sıfıra eşitlersek,

$$\tanh \theta = -\frac{a}{b}, \quad \cosh \theta = \frac{b}{\sqrt{b^2 - a^2}} \quad (3.123)$$

buluruz. Kesikli spektrum için

$$-1 \leq -\frac{a}{b} \leq +1$$

olmalı, eğer sağlanmıyorsa spektrum süreklidir. (3.123) ifadesini (3.122) denkleminde yerine yazılırsa,

$$(a \tanh \theta + b)\Gamma_3 + \frac{c}{\cosh \theta}\tilde{\Psi} = 0 \quad \Gamma_3\tilde{\Psi} = -\frac{c}{\sqrt{b^2 - a^2}}\tilde{\Psi} \quad (3.124)$$

elde edilir. Daha sonra temsil teorisinde (2.35) özdeğer denklemi ile karşılaştırırsak, kesikli enerji özdeğer spektrumunu elde ederiz. (3.116) denkleminde Kasimir operatörü

hesaplanıp, özdeğerini  $\nu$  olarak bulduğumuzu düşünelim. Bu değeri (2.34) denklemiyle karşılaştırsak

$$\phi = -\frac{1}{2}(1 + \sqrt{4\nu + 1}) \quad (3.125)$$

buluruz. Bu sonucu (2.35) denkleminde yerine yazıp, (3.124) denklemiyle karşılaştırsak,

$$\frac{c}{\sqrt{b^2 - a^2}} = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{4\nu + 1}) \quad x = 0, 1, 2, \dots \quad (3.126)$$

sonucunu elde ederiz.  $a$ ,  $b$  veya  $c$  enerjinin bir fonksiyonu olacağından (3.126) ifadesinden  $E$ 'yi çekerek spektrumu elde ederiz.

## 4. BULGULAR

### 4.1 Temsillerle İlgili Problemler

**Problem 1:**  $Sp(2)$  grubuna ait üniter matrislerin temsillerini elde edelim.

$Sp(2n)$  grupları,

$$\begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 \\ Z_3 & -Z_1^t \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

biçiminde gösterilen gruplardır. Burada,  $Z_1$  ve  $Z_2$   $n \times n$  mertebesinde matrislerdir ve  $Z_3$  ise  $Z_1$  matrisinin transpozunu göstermektedir.  $Sp(2)$  grubu için,  $n = 1$  olmasından matrisimiz  $2 \times 2$ 'lik

$$\sigma = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha^* \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

biçiminde bir matrisle gösterilir. Burada  $\alpha, \beta$  ve  $\gamma$  kompleks sayılar olup Cayley-Klein parametreleri cinsinden yazılır.

Üniter olan simplektik grup matrislerinin determinanı 1'dir:

$$-\alpha\alpha^* - \beta\gamma = 1 \quad (4.3)$$

Böyle bir matrisin ters matrisine bakarsak

$$\sigma\sigma^{-1} = \mathbf{I} \quad \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} -\alpha^* & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

olduğunu buluruz. Simplektik grup matrislerinin ters Hermityen olma  $A + A^\dagger = 0$  özelliğini kullanırsak,

$$\gamma = -\beta^* \quad (4.5)$$

olduğu bulunur. Bu durumda

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} -\alpha^* & -\beta \\ \beta^* & \alpha \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

olur.

$Sp(2)$  için  $\xi_1, \xi_2$  bir spinör baz oluştursun.

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & -\alpha^* \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi'_1 \\ \xi'_2 \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

Burada baz fonksiyonu (3.66) ile verilmektedir. Burada,  $D(\sigma)$  ile spinör grubunun bir elemanını gösterirsek

$$D(\sigma)|\phi, E_0 + x \rangle = N_x (-\alpha^* \xi_1 - \beta \xi_2)^{\phi + E_0 + x} (\beta^* \xi_1 + \alpha \xi_2)^{\phi - E_0 - x} \quad (4.8)$$

buluruz. Buradaki parantezler için binom açılımı yapılarak yerine yazılırsa

$$D(\sigma)|\phi, E_0 + x \rangle = N_x \sum_{k, \ell=0}^{\infty} (-1)^{\phi + E_0 + x} \frac{(\phi + E_0 + x)! (\phi - E_0 - x)!}{k! \ell! (\phi + E_0 + x - k)! (\phi - E_0 - x - \ell)!} \alpha^{*(\phi + E_0 + x - k)} \beta^k \beta^{*(\phi - E_0 - x - \ell)} \alpha^\ell \xi_1^{2\phi - k - \ell} \xi_2^{k + \ell} \quad (4.9)$$

olur. Şimdi geçiş yapmak için gerekli ifadeyi

$$|\phi, E_0 + x' \rangle = N_{x'} \xi_1^{\phi + E_0 + x'} \xi_2^{\phi - E_0 - x'} \quad (4.10)$$

biçiminde alırsak, yukarıdaki açılımın  $\xi_1, \xi_2$  ifadelerin üstlerinin aynı olması için

$$k + \ell = \Phi - E_0 - x' \quad (4.11)$$

olmak zorundadır. Bu durumda

$D(\sigma)|\phi, E_0 + x \rangle =$

$$N_x \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{\phi + E_0 + x} \frac{(\phi + E_0 + x)! (\phi - E_0 - x)!}{k! (\phi - E_0 - x - k)! (\phi + E_0 + x - k)! (x' - x + k)!} \alpha^{*(\phi + E_0 + x - k)} \beta^k \beta^{*(x' - x + k)} \alpha^{\phi - E_0 - x - k} \xi_1^{\phi + E_0 + x'} \xi_2^{\phi - E_0 - x'} \quad (4.12)$$

olur. Şimdi  $|\phi, E_0 + x' \rangle$  ifadesini çıkarırsak ve  $k$  parametresine bağlı ifadeler toplam içerisine atılırsa

$$D_{x'x}^\phi(\sigma) = \frac{N_x (\phi + E_0 + x)! (\phi - E_0 - x)!}{N_{x'} (x' - x)!} \alpha^{*(\phi+E_0+x)} \alpha^{\phi-E_0-x'} \beta^{*(x'-x)}$$

$$(-1)^{\phi+E_0+x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\beta\beta^*/\alpha\alpha^*)(x' - x)!}{k!(\phi - E_0 - x' - k)! (\phi + E_0 + x - k)! (x' - x + k)!} \quad (4.13)$$

elde edilir. Burada  $N_x = [(j + m)!(j - m)!]^{-1/2}$  olduğu göz önüne alınıp  $\Phi = j$   $E_0 + x = m$  yazılırsa,  $\alpha$  ve  $\beta$  sabitleri Cayley-Klein parametreleri cinsinden

$$\alpha = e^{i\varphi/2} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{-i\varphi/2} \quad \beta = -e^{-i\varphi/2} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{-i\varphi/2} \quad (4.14)$$

alınırsa,

$$U_{m'm}^j(u) = (-1)^{j+m} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[(j + m)!(j - m)!(j + m')!(j - m')!]^{1/2}}{k!(j - m' - k)! (j + m - k)! (m' - m + k)!}$$

$$e^{im'\varphi} \cos^{j+mm'-2k}\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin^{2k+m'-m}\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{im\varphi} \quad (4.15)$$

olarak bulunur.

**Problem 2:** Wigner'in 3-j sembolünü sütunlarının çift permütasyonuna göre ve çift permütasyon durumunda tüm  $m_i$  sayılarının işaretlerinin tersine göre değişmez kaldığını gösterelim.

Wigner 3-j sembolünün açık yazılışı

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} =$$

$$\delta_{m_1+m_2, m_3} (-1)^{j_1-j_2-m_3} \sqrt{\frac{(j_3 + j_1 - j_2)!(j_3 - j_1 + j_2)!(j_1 + j_2 - j_3)!}{(j_1 + j_2 + j_3 + 1)!}}$$

$$\sqrt{(j_1 - m_1)!(j_1 + m_1)!(j_2 - m_2)!(j_2 + m_2)!(j_3 - m_3)!(j_3 + m_3)!}$$

$$\sum_r \frac{(-1)^{r+j_2+m_2} (j_2 + j_3 + m_1 - r)!(j_1 - m_1 + r)!}{r!(j_3 - j_1 + j_2 - r)!(j_3 - m_3 - r)!(j_1 - j_2 + m_3 + r)!} \quad (4.16)$$

olmaktadır.

$$C_{m_1 m_2 m_3}^{j_1 j_2 j_3} = (-1)^{j_1 - j_2 + m_3} \sqrt{2j_3 + 1} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

olduğu göz önüne alınırsa

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = (-1)^{j_1 - j_2 - m_3} \sqrt{\frac{1}{2j_3 + 1}} C_{m_1 m_2 m_3}^{j_1 j_2 j_3} \quad (4.18)$$

olarak bulunur. Şimdi  $C_{m_1 m_2 m_3}^{j_1 j_2 j_3} = C_{m_1 m_2 - m_3}^{j_1 j_2 j_3}$  olduğuna dikkat edelim. Çünkü  $m_3$  ifadesi formülde 4 tane var ve bunların 2 tanesi  $(-)$  diğer 2 tanesi de  $(+)$  olduğundan burada bir değişme olmayacaktır.

Burada sorulan soruların birincisinin cevabı permütasyonlarda meydana gelen her yer değiştirme için bir  $(-)$  işareti konur ve çift yerde değiştirmede  $(+)$  olacağından herhangi bir değişme olmayacaktır.

İkincisinin cevabı, denklem içerisindeki  $m_i$  sayısı hem  $m$  için çift sayıda ve eşit sayıda  $(-)$  ve  $(+)$  olduğundan bunların herhangi birindeki ters işaret, etki etmeyecektir.

**Problem 3:** (3.111) ile verilen Clebsch-Gordan katsayısı için (3.101) özdeşliğini kullanarak  $j_3 = -m_3$  olması durumunu sınavalım.

İlk olarak,  $j_3 = -m_3$  ifadesi kullanılarak Clebsch-Gordan katsayıları aşağıdaki gibi yazılır.

$$C_{m_1 m_2 m_3}^{j_1 j_2 - m_3} = \sqrt{\frac{(-1)^{j_2 + m_2} (2m_3 - 1) (j_1 + j_2 + m_3)! (j_1 - j_2 - m_3)! (-j_1 - j_2 + m_3 - 2)!}{(j_1 - j_2 + m_3 - 1)!}} \\ \sqrt{\frac{(j_1 + m_1)! (j_1 - m_1)! (j_2 + m_2)! 0!}{(m_2 - j_2 - 1)! (2m_3 - 1)!}} \\ \sum_r \frac{(j_1 + m_3 + m_2 - r - 1)!}{r! (j_1 - m_1 - r)! (j_2 + m_2 - r)! (j_1 + j_2 + m_3 - r)! (-j_2 - m_2 + r)!} \quad (4.19)$$

Burada  $m_1 + m_2 = m_3$  olmasına dikkat edildi. Bu durumda, toplam içerisindeki ifadeyi şu şekilde ayırabiliriz:

$$C_{m_1 m_2 m_3}^{j_1 j_2 - m_3} = \sqrt{\frac{(-1)^{j_2 + m_2} (2m_3 - 1) (j_1 + j_2 + m_3)! (j_1 - j_2 - m_3)! (-j_1 - j_2 + m_3 - 2)!}{(j_1 - j_2 + m_3 - 1)!}}$$

$$\sqrt{\frac{(j_1 + m_1)! (j_1 - m_1)! (j_2 + m_2)! 0!}{(m_2 - j_2 - 1)! (2m_3 - 1)!}}$$

$$\sum_r \left[ \frac{(j_1 + m_3 + m_2 - r - 1)! (-1)^r}{r! (j_1 - m_1 - r)! (j_2 + m_2 - r)!} \cdot \frac{(-1)^r}{(j_1 + j_2 + m_3 - r)! (-j_2 - m_2 + r)!} \right] \quad (4.20)$$

Burada,  $(-1)^r$ 'nin karesi geldiğinden birşey değişmez. Fakat, diğer kısımları ayırırken özdeşliğin terimler arasındaki ilişkiler gözönüne alınarak yapılmıştır.

$$n = j_1 + m_3 + m_2 - 1 \quad m = j_1 - m_1 \quad \ell = j_2 + m_2 \quad (4.21)$$

özdeşliğini kullanılırsa

$$\sum_r \frac{(j_1 + m_3 + m_2 - r - 1)! (-1)^r}{r! (j_1 - m_1 - r)! (j_2 + m_2 - r)!}$$

$$= \frac{(2m_3 - 1)! (j_1 + m_3 - j_2 - 1)!}{(j_1 + m_3 + m_2 - 1)! (j_1 - m_1)! (j_2 + m_2)! (m_3 + m_1 - j_2 - 1)!} \quad (4.22)$$

elde edilir. (4.22), (4.20)'de yerine yazılırsa,

$$C_{m_1 m_2 m_3}^{j_1 j_2 - m_3} = \sqrt{\frac{(-1)^{j_2 + m_2} (2m_3 - 1) (j_1 + j_2 + m_3)! (j_1 - j_2 - m_3)! (-j_1 - j_2 + m_3 - 2)!}{(j_1 - j_2 + m_3 - 1)!}}$$

$$\sqrt{\frac{(j_1 + m_1)! (j_1 - m_1)! (j_2 + m_2)!}{(m_2 - j_2 - 1)! (2m_3 - 1)!}}$$

$$\frac{(2m_3 - 1)! (j_1 + m_3 - j_2 - 1)!}{(j_1 + m_3 + m_2 - 1)! (j_1 - m_1)! (j_2 + m_2)! (m_3 + m_1 - j_2 - 1)!}$$

$$\sum_r \frac{(-1)^r}{(j_1 + j_2 + m_3 - r)! (-j_2 - m_2 + r)!} \quad (4.23)$$

olur ve gerekli sadeleşmeler yapılırsa,

$$\begin{aligned}
C_{m_1 m_2 m_3}^{j_1 j_2 - m_3} &= \sqrt{\frac{(-1)^{j_2 + m_2} (2m_3 - 1) (j_1 + j_2 + m_3)! (j_1 - j_2 - m_3)! (-j_1 - j_2 + m_3 - 2)!}{[(j_1 + m_3 + m_2 - 1)! (m_3 + m_1 - j_2 - 1)!]^2}} \\
&\sqrt{\frac{(j_1 + m_1)! (2m_3 - 1)! (j_1 + m_3 - j_2 - 1)!}{(m_2 - j_2 - 1)! (j_1 - m_1)! (j_2 + m_2)!}} \\
&\sum_r \frac{(-1)^r}{(j_1 + j_2 + m_3 - r)! (-j_2 - m_2 + r)!} \tag{4.24}
\end{aligned}$$

olduğu bulunur.

**Problem 4:**  $\mathcal{D}(j_1) \times \mathcal{D}^+(j_2)$  çarpımı için (3.111) bağıntısını kullanarak a)  $C_{-1m_2+1m_2}^{1j_2j_2+1}$  b)  $C_{0m_2m_2}^{1j_2j_2+1}$  c)  $C_{-1m_2+1m_2}^{1j_2j_2}$  d)  $C_{0m_2m_2}^{1j_2j_2}$  ifadelerini türetelim.

a) (3.111) denkleminde  $j_1 = 1, j_2 = j_2, j_3 = j_2 + 1, m_1 = -1, m_2 = m_2 + 1$  ve  $m_3 = m_2$  yazalım.

$$\begin{aligned}
C_{-1m_2+1m_2}^{1j_2j_2+1} &= \sqrt{\frac{(-1)^0 (-2j_2 - 3) 0! 2! (-2j_2 - 4)!}{(-2j_2 - 1)!}} \sqrt{\frac{0! 2! (j_2 + m_2 + 1)! (j_2 + m_2 + 1)!}{(m_2 - j_2)! (m_2 - j_2 - 2)!}} \\
&\sum_r \frac{(m_2 - j_2 - r)!}{r! (2 - r)! (j_2 + m_2 + 1 - r)! (-r)! (+r)!} \tag{4.25}
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Toplam ifadesinin içinde  $(-r)!$  ifadesi bulunmakta ve bu terimin yok edilmesi için  $r = 0$  olmak zorundadır. Buna göre, sadeleştirmeleri yapılırsa,

$$C_{-1m_2+1m_2}^{1j_2j_2+1} = \sqrt{\frac{(j_2 - m_2)(j_2 - m_2 + 1)}{2(j_2 + 1)(2j_2 + 1)}} \tag{4.26}$$

sonucu bulunur.

b) (3.111) denkleminde  $j_1 = 1, j_2 = j_2, j_3 = j_2 + 1, m_1 = 0, m_2 = m_2$  ve  $m_3 = m_2$  yazalım.

$$C_{0m_2m_2}^{1j_2j_2+1} = \sqrt{\frac{(-1)^{-1} (-2j_2 - 3) 0! 2! (-2j_2 - 4)!}{(-2j_2 - 1)!}} \sqrt{\frac{1! 1! (j_2 + m_2)! (j_2 + m_2 + 1)!}{(m_2 - j_2 - 1)! (m_2 - j_2 - 2)!}}$$

$$\sum_r \frac{(m_2 - j_2 - 1 - r)!}{r!(1-r)!(j_2 + m_2 - r)!(-r)!(1+r)!} \quad (4.27)$$

olarak bulunur.  $r = 0$  olmak zorundadır. Buna göre, sadeleştirmeler yapılırsa

$$C_{0m_2m_2}^{1j_2j_2+1} = \sqrt{\frac{(j_2 + m_2 + 1)(j_2 - m_2 - 1)}{(2j_2 + 1)(j_2 + 1)}} \quad (4.28)$$

sonucu bulunur.

c) (3.111) denkleminde  $j_1 = 1$ ,  $j_2 = j_2$ ,  $j_3 = j_2$ ,  $m_1 = -1$ ,  $m_2 = m_2 + 1$  ve  $m_3 = m_2$  yazalım.

$$C_{-1m_2+1m_2}^{1j_2j_2} = \sqrt{\frac{(-1)^1(-2j_2 - 1)1!1!(-2j_2 - 3)!}{(-2j_2)!}} \sqrt{\frac{0!2!(j_2 + m_2 + 1)!(j_2 + m_2)!}{(m_2 - j_2)!(m_2 - j_2 - 1)!}}$$

$$\sum_r \frac{(m_2 - j_2 + 1 - r)!}{r!(2-r)!(j_2 + m_2 + 1 - r)!(1-r)!(-1+r)!} \quad (4.29)$$

olarak bulunur. Burada bulunan  $(-1+r)!$  ifadesinden dolayı  $r = 1$  olmak zorundadır. Buna göre, sadeleştirmeler yapılırsa,

$$C_{-1m_2+1m_2}^{1j_2j_2} = \sqrt{\frac{(j_2 + m_2 + 1)(j_2 - m_2)}{2j_2(j_2 + 1)}} \quad (4.30)$$

sonucu bulunur.

d) (3.111) denkleminde  $j_1 = 1$ ,  $j_2 = j_2$ ,  $j_3 = j_2$ ,  $m_1 = 0$ ,  $m_2 = m_2$  ve  $m_3 = m_2$  yazalım.

$$C_{0m_2m_2}^{1j_2j_2} = \sqrt{\frac{(-1)^0(-2j_2 - 1)1!1!(-2j_2 - 3)!}{(-2j_2)!}} \sqrt{\frac{1!1!(j_2 + m_2)!(j_2 + m_2)!}{(m_2 - j_2 - 1)!(m_2 - j_2 - 1)!}}$$

$$\sum_r \frac{(m_2 - j_2 - r)!}{r!(1-r)!(j_2 + m_2 - r)!(1-r)!(+r)!} \quad (4.31)$$

olarak bulunur. Burada,  $r = 0, 1$  değerlerini alabilmektedir. Bu nedenle toplamda iki terim olacak. İşlem buna göre yapılırsa,

$$C_{0m_2m_2}^{1j_2j_2} = \sqrt{\frac{1}{4j_2(j_2+1)} \frac{(j_2+m_2)}{(m_2-j_2-1)!} \left( \frac{2m_2(m_2-j_2-1)!}{(j_2+m_2)!} \right)} \quad (4.32)$$

bulunur ve buradan

$$C_{0m_2m_2}^{1j_2j_2} = \frac{m_2}{\sqrt{j_2(j_2+1)}} \quad (4.33)$$

sonucu elde edilir.

**Problem 5:** Problem 4'te verilen cebirsel sonuçların  $(-1)^{j_1-j_2+j_3}$  ile çarpımının,  $SO(3)$ 'ün (3.99) ile cebirsel olarak verilen sonuçları ile eşit olduğunu gösterelim.

a) (3.99) denkleminde  $j_1 = 1, j_2 = j_2, j_3 = j_2 + 1, m_1 = -1, m_2 = m_2 + 1$  ve  $m_3 = m_2$  yazılırsa;

$$C_{-1m_2+1m_2}^{1j_2j_2+1} = \sqrt{\frac{(2j_2+3)0!2!(2j_2)!}{(2j_2+3)!}} \\ \sqrt{0!2!(j_2+m_2+1)!(j_2-m_2-1)!(j_2+m_2+1)!(j_2-m_2+1)!} \\ \sum_r \frac{(-1)^r}{r!(2-r)!(j_2+m_2+1-r)!(+r)!(j_2-m_2-1-r)!(-r)!} \quad (4.34)$$

olarak bulunur. Çünkü, toplam ifadesinin içinde  $(-r)!$  ifadesi bulunmakta ve bu terimin yok edilmesi gerekmektedir. Bu nedenle,  $r = 0$  olmak zorundadır. Buna göre işleme devam ederek sadeleştirmeler yapılırsa,

$$C_{-1m_2+1m_2}^{1j_2j_2+1} = \sqrt{\frac{(j_2-m_2)(j_2-m_2+1)}{2(j_2+1)(2j_2+1)}} \quad (4.35)$$

sonucu bulunur.

b) (3.99) denkleminde  $j_1 = 1, j_2 = j_2, j_3 = j_2 + 1, m_1 = 0, m_2 = m_2$  ve  $m_3 = m_2$  yazalım.

$$C_{0m_2m_2}^{1j_2j_2+1} = \sqrt{\frac{(2j_2+3)0!2!(2j_2)!}{(2j_2+3)!}} \\ \sqrt{1!1!(j_2+m_2)!(j_2-m_2)!(j_2+m_2+1)!(j_2-m_2+1)!}$$

$$\sum_r \frac{(-1)^r}{r!(1-r)(j_2+m_2-r)!(1+r)!(j_2-m_2-1+r)!(-r)!} \quad (4.36)$$

olarak bulunur.  $r = 0$  olmak zorundadır. Buna göre işleme devam edilirse,

$$C_{0m_2m_2}^{1j_2j_2+1} = \sqrt{\frac{(j_2+m_2+1)(j_2-m_2+1)}{(2j_2+1)(j_2+1)}} \quad (4.37)$$

sonucu bulunur.

c) (3.99) denkleminde  $j_1 = 1$ ,  $j_2 = j_2$ ,  $j_3 = j_2$ ,  $m_1 = -1$ ,  $m_2 = m_2 + 1$  ve  $m_3 = m_2$  yazalım.

$$C_{-1m_2+1m_2}^{1j_2j_2} = \sqrt{\frac{(2j_2+1)1!1!(2j_2-1)!}{(2j_2+2)!}}$$

$$\sqrt{0!2!(j_2+m_2+1)!(j_2-m_2-1)!(j_2+m_2)!(j_2-m_2)!}$$

$$\sum_r \frac{(-1)^r}{r!(2-r)!(m_2-j_2+1-r)!(-1+r)!(j_2-m_2-2+r)!(1-r)!} \quad (4.38)$$

olarak bulunur. Burada bulunan  $(-1+r)!$  ifadesinden dolayı  $r = 1$  olmak zorundadır. Buna göre işleme devam edilirse

$$C_{-1m_2+1m_2}^{1j_2j_2} = -\sqrt{\frac{(j_2+m_2+1)(j_2-m_2)}{2j_2(j_2+1)}} \quad (4.39)$$

sonucu bulunur.

d) (3.99) denkleminde  $j_1 = 1$ ,  $j_2 = j_2$ ,  $j_3 = j_2$ ,  $m_1 = 0$ ,  $m_2 = m_2$  ve  $m_3 = m_2$  yazalım.

$$C_{0m_2m_2}^{1j_2j_2} = \sqrt{\frac{(2j_2+1)1!1!(2j_2-1)!}{(2j_2+2)!}}$$

$$\sqrt{1!1!(j_2+m_2)!(j_2-m_2)!(j_2-m_2)!(j_2+m_2)!}$$

$$\sum_r \frac{(-1)^r}{r!(1-r)!(j_2+m_2-r)!r!(j_2-m_2-1+r)!(1-r)!(+r)!} \quad (4.40)$$

olarak bulunur. Burada,  $r = 0, 1$  değerlerini alabilmektedir. Bu nedenle, toplamda iki terim olur. İşlemi buna göre yapılırsa,

$$C_{0m_2m_2}^{1j_2j_2} = \sqrt{\frac{1}{4j_2(j_2+1)}} (j_2+m_2)!(m_2-j_2)! \frac{-2m_2}{(j_2+m_2)!(j_2-m_2)!} \quad (4.41)$$

olur. Buradan,

$$C_{0m_2m_2}^{1j_2j_2} = \frac{-m_2}{\sqrt{j_2(j_2+1)}} \quad (4.42)$$

sonucu bulunur.

Şimdi bulduğumuz sonuçlara bakarak  $a$  ve  $b$  şikkında  $(-1)^{j_1-j_2+j_3}$  ifadesi doğrultusunda  $(+1)$  geldiğinden sonuçlar aynı;  $c$  ve  $d$  şikkında ise  $(-1)$  çarpanı kadar bir farklılık olduğunu görebiliriz. İki formül arasında  $(-1)^{j_1-j_2+j_3}$  olarak görülen bir faz farkının olduğunu göstermektedir.

## 4.2 Çözümü Bilinen Hamilton Operatörlerinin SGA ile Yeniden Çözülmesi

### 4.2.1 Göreceli Olmayan Kepler Problemi

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} - \frac{\alpha}{r} \quad (4.43)$$

ile verilen Hamilton işlemcisi için  $so(2,1)$  cebirini kullanarak özdeğer denklemini,  $N$  boyut için çözümlenerek kesikli özdeğerlere sahip spektrumunu elde edelim.

$N$  boyut için momentum ve yer vektörü

$$\mathbf{p} = p_0\hat{\mathbf{e}}_0 + p_1\hat{\mathbf{e}}_1 + p_2\hat{\mathbf{e}}_2 + \cdots + p_N\hat{\mathbf{e}}_N \quad (4.44a)$$

$$\mathbf{r} = x_0\hat{\mathbf{e}}_0 + x_1\hat{\mathbf{e}}_1 + x_2\hat{\mathbf{e}}_2 + \cdots + x_N\hat{\mathbf{e}}_N \quad (4.44b)$$

olur. Burada  $\hat{\mathbf{e}}_i$ 'ler birim vektörleri göstermektedir. Bu Hamilton operatörü için SGA cebirini oluşturan operatörlerimizi,

$$\Gamma_1 = \frac{1}{2}(rp^2 - r) \quad \Gamma_2 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{p} - i\frac{(N-1)}{2} \quad \Gamma_3 = \frac{1}{2}(rp^2 + r) \quad (4.45)$$

olarak alalım.

İlk olarak ileride kullanacağımız komütasyonları hesaplırsak;

$$[p_m, x_n] = -i\delta_{mn} \quad (4.46)$$

$$[p_n, r] = -i\frac{x_n}{r} \quad (4.47)$$

$$[p_m, \frac{1}{r}] = i\frac{x_m}{r^3} \quad (4.48)$$

$$[p_m, \frac{1}{r^2}] = 2i\frac{x_m}{r^4} \quad (4.49)$$

$$[p_n, \frac{x_m}{r}] = -i\frac{(\delta_{nm} - 1)}{r} \quad (4.50)$$

olarak elde edilir. Şimdi (4.45) da verilen operatör setinin  $so(2, 1)$  cebirini sağladığını gösterelim:

$$\begin{aligned} [\Gamma_1, \Gamma_2] &= \left[ \frac{1}{2}(rp^2 - r), (\mathbf{r} \cdot \mathbf{p} - i\frac{(N-1)}{2}) \right] \\ &= \frac{1}{2}[rp^2, \mathbf{r} \cdot \mathbf{p}] - \frac{1}{2}[r, \mathbf{r} \cdot \mathbf{p}] \\ &= \frac{1}{2} \left( rp_n[p_n, x_m]p_m + r[p_n, x_m]p_m p_n + x_m[r, p_m]p_n p_n - x_m[r, p_m] \right) \\ &= \frac{1}{2}(-irp_n p_n - irp_m p_m + irp_n p_n - ir) \\ &= -i\frac{1}{2}(rp^2 + r) = -i\Gamma_3 \end{aligned}$$

Burada, (4.46) ve (4.47) ifadeleri kullanıldı. Şimdi bir diğer komütasyona bakalım.

$$\begin{aligned} [\Gamma_1, \Gamma_3] &= \left[ \frac{1}{2}(rp^2 - r), \frac{1}{2}(rp^2 + r) \right] \\ &= \frac{1}{2}rp_n[p_n, r] + \frac{1}{2}r[p_n, r]p_n \\ &= \frac{1}{2}rp_n\left(-i\frac{x_n}{r}\right) + \frac{1}{2}r\left(-i\frac{x_n}{r}\right)p_n \\ &= -\frac{i}{2}\left\{x_n p_n + rp_n \frac{x_n}{r}\right\} \end{aligned}$$

olur. Burada (4.47) ifadesini kullanırsak ve (4.50) ifadesinden değeri yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
[\Gamma_1, \Gamma_3] &= -\frac{i}{2} \left( x_n p_n + r \left( x_n p_n - i \frac{(N-1)}{r} \right) \right) \\
&= -\frac{i}{2} \left( 2x_n p_n - i(N-1) \right) \\
&= -i \left( \mathbf{r} \cdot \mathbf{p} - i \frac{(N-1)}{2} \right) = -i\Gamma_2
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Son olarak üçüncü komütasyonu hesaplayalım.

$$\begin{aligned}
[\Gamma_2, \Gamma_3] &= \left[ \left( \mathbf{r} \cdot \mathbf{p} - i \frac{(N-1)}{2} \right), \frac{1}{2}(rp^2 + r) \right] \\
&= \frac{1}{2} \left( [\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}, rp^2] + [\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}, r] \right) \\
&= -\frac{1}{2} \left( rp_n [p_n, x_m] p_m + r [p_n, x_m] p_m p_n + x_m [r, p_m] p_n p_n + x_m [r, p_m] \right) \\
&= i \frac{1}{2} (rp^2 - r) = i\Gamma_1
\end{aligned}$$

olarak buluruz. Görüldüğü gibi  $\Gamma_1, \Gamma_2$  ve  $\Gamma_3$  operatörleri  $so(2, 1)$  cebirini sağlar. Schrödinger denkleminde Hamilton işlemcisi yerine yazılırsa,

$$\left( \frac{p^2}{2m} - \frac{\alpha}{r} \right) \Psi = E\Psi \quad (4.51)$$

olur. Bu denklemi  $r$  ile çarpmak denklemin doğrusallığını bozmaz. Böylece,

$$\left( \frac{rp^2}{2m} - Er - \alpha \right) \Psi = 0 \quad (4.52)$$

olarak yazabiliriz. Şimdi operatörlerin toplamı cinsinden yazmaya çalışalım.

$$\Gamma_1 + \Gamma_3 = rp^2, \quad \Gamma_1 - \Gamma_3 = -r \quad (4.53)$$

olması nedeniyle (4.52) denklemi

$$\left[ \left( \frac{1}{2m} + E \right) \Gamma_1 + \left( \frac{1}{2m} - E \right) \Gamma_3 - \alpha \right] \Psi = 0 \quad (4.54)$$

olur. İfadeyi solundan  $e^{-i\theta\Gamma_2}$  ile çarpıp ve parantez arasına  $I = e^{i\theta\Gamma_2} e^{-i\theta\Gamma_2}$  yerleştirip (3.118) ifadesi gözönüne alınırsa,

$$\left( \left( \frac{1}{2m} + E \right) e^{-i\theta\Gamma_2} \Gamma_1 e^{i\theta\Gamma_2} + \left( \frac{1}{2m} - E \right) e^{-i\theta\Gamma_2} \Gamma_3 e^{i\theta\Gamma_2} - \alpha \right) \tilde{\Psi} = 0 \quad (4.55)$$

haline gelir. Temsil teoreminin (3.120) ve (3.121) özelliğini de kullanılırsa,

$$\left( \left[ \left( \frac{1}{2m} + E \right) \cosh \theta + \left( \frac{1}{2m} - E \right) \sinh \theta \right] \Gamma_1 + \left[ \left( \frac{1}{2m} - E \right) \cosh \theta + \left( \frac{1}{2m} + E \right) \sinh \theta \right] \Gamma_3 - \alpha \right) \tilde{\Psi} = 0 \quad (4.56)$$

elde edilir. Kesikli spektrumu elde etmek için,  $\Gamma_1$  ifadesinde parantez içi sıfıra eşitlenirse

$$\tanh \theta = - \frac{\left( \frac{1}{2m} + E \right)}{\left( \frac{1}{2m} - E \right)} \quad \cosh \theta = \frac{\left( \frac{1}{2m} - E \right)}{\sqrt{-\frac{2E}{m}}} \quad (4.57)$$

bulunur. Böylece özdeğer denkleminde  $\tanh \theta$  ve  $\cosh \theta$  yerine yazılırsa,

$$\left( -\frac{2E}{m} \Gamma_3 - \alpha \sqrt{-\frac{2E}{m}} \right) \tilde{\Psi} = 0 \quad \text{veya} \quad \Gamma_3 \tilde{\Psi} = \alpha \sqrt{-\frac{2E}{m}} \tilde{\Psi} \quad (4.58)$$

elde edilir.

Temsil teorisinden bilinen (2.35) denklemi ile karşılaştırsak;

$$(-\phi + x) = \alpha \sqrt{-\frac{2E}{m}} \quad (4.59)$$

$$E = -\frac{\alpha^2 m}{2(-\phi + x)^2} \quad (x = 0, 1, 2, \dots) \quad (4.60)$$

özdeğer spektrumu bulunur. Burada  $\phi$ 'yi bilmiyoruz, onu da (2.33) denkleminde Kasimir operatöründen  $\phi$ 'yi elde edeceğiz.

$$\begin{aligned} \Gamma^2 &= \frac{1}{4}(rp^2 + r)(rp^2 + r) - \frac{1}{4}(rp^2 - r)(rp^2 - r) - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{p} - i\frac{N-1}{2})(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p} - i\frac{N-1}{2}) \\ &= \frac{1}{4}(2rp^2r + 2r^2p^2) - \mathbf{r} \cdot \mathbf{p} \cdot \mathbf{r} \cdot \mathbf{p} + i(N-1)\mathbf{r} \cdot \mathbf{p} + \frac{1}{4}(N-1)^2 \\ &= -\mathbf{r} \cdot \mathbf{p} \cdot \mathbf{r} \cdot \mathbf{p} + r^2p^2 + i(N-2)\mathbf{r} \cdot \mathbf{p} + \frac{1}{2}rp^2r - \frac{1}{2}r^2p^2 + i\mathbf{r} \cdot \mathbf{p} + \frac{1}{4}(N-1)^2 \end{aligned}$$

Genelleştirilmiş açıl momentum için (3.114) denklemi kullanılırsa, Kasimir operatörü

$$\Gamma^2 = L^2 + \frac{1}{4}(N-1)^2 + i\mathbf{r} \cdot \mathbf{p} + \frac{1}{2}[rp^2, r] \quad (4.61)$$

olarak bulunur ve denklem içerisindeki komütasyon

$$\begin{aligned}
[rp^2, r] &= [rp_n p_n, r] \\
&= rp_n [p_n, r] + r [p_n, r] p_n + [r, r] p_n p_n \\
&= -2ix_n p_n - (N - 1)
\end{aligned}$$

olur. Bu sonucu da yerine yazılırsa,

$$\Gamma^2 \Psi = L^2 + \frac{1}{4}(N - 1)^2 - \frac{1}{2}(N - 1)\Psi \quad (4.62)$$

bulunur.  $L^2$ 'nin  $N$  boyutta özdeğeri  $\ell(\ell + N - 2)$  olmasından dolayı (2.34) ifadesi ile karşılaştırılırsa,

$$\phi^2 + \phi = \ell(\ell + N - 2) + \frac{1}{4}(N - 1)^2 - \frac{1}{2}(N - 1)$$

olur ve bu ifade  $\phi$ 'ye göre ikinci dereceden bir fonksiyondur. Bu fonksiyonu sadece negatif kök için çözümlerse,

$$\phi_1 = -\frac{1}{2}(1 + 2\ell + N - 2) \quad (4.63)$$

elde edilir ve bu sonuç (4.60)'da yerine yazılırsa,

$$E = -\frac{\alpha^2 m}{2(\ell + x + 1 + \frac{N-3}{2})^2} \quad (4.64)$$

elde edilir ve burada  $\ell + x + 1 = n = 0, 1, 2, \dots$  olarak alınırsa,

$$E = -\frac{\alpha^2 m}{2(n + \frac{N-3}{2})^2} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (4.65)$$

sonucu elde edilir.

#### 4.2.2 $\frac{1}{r^2}$ Pertürbatif Potansiyelinin Göreceli Olmayan Kepler Problemine Etkisi

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2} \quad (4.66)$$

ile verilen Hamilton işlemcisinin kesikli özdeğer spektrumunu elde edelim.

$N$  boyut için momentum ve yer vektörü (4.44a) ve (4.44b) denklemleri ile verilir. Bu Hamilton işlemcisi için Lie cebri işlemci setini

$$\Gamma_1 = \frac{1}{2}(rp^2 - r + \frac{2m\beta}{r}) \quad \Gamma_2 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{p} - i\frac{(N-1)}{2} \quad \Gamma_3 = \frac{1}{2}(rp^2 + r + \frac{2m\beta}{r}) \quad (4.67)$$

olarak alalım. Şimdi (4.67) ile verilen operatör setinin  $so(2,1)$  cebriini sağladığını gösterelim.

$$\begin{aligned} [\Gamma_1, \Gamma_3] &= \left[ \frac{1}{2}(rp^2 - r + \frac{2m\beta}{r}), \frac{1}{2}(rp^2 + r + \frac{2m\beta}{r}) \right] \\ &= \frac{1}{2} \{ rp_n [p_n, r] + r [p_n, r] p_n \} \\ &= \frac{1}{2} \{ rp_n (-i\frac{x_n}{r}) + r (-i\frac{x_n}{r}) p_n \} \\ &= -\frac{i}{2} \{ x_n p_n + r (\frac{x_n}{r} p_n - i\frac{(N-1)}{r}) \} \\ &= -i(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p} - i\frac{(N-1)}{2}) = -i\Gamma_2 \end{aligned}$$

Burada, (4.47) ve (4.50) ifadeleri kullanıldı. Şimdi ikinci komütasyona bakalım:

$$\begin{aligned} [\Gamma_2, \Gamma_3] &= \left[ \mathbf{r} \cdot \mathbf{p} - i\frac{(N-1)}{2}, \frac{1}{2}(rp^2 + r + \frac{2m\beta}{r}) \right] \\ &= \frac{1}{2} \{ [\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}, rp^2] + [\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}, r] + 2m\beta [\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}, \frac{1}{r}] \} \\ &= \frac{1}{2} \{ irp^2 - ir + 2m\beta i\frac{1}{r} \} \\ &= i\frac{1}{2}(rp^2 - r + \frac{2m\beta}{r}) = i\Gamma_1 \end{aligned}$$

Burada, (4.46), (4.47) ve (4.48) ifadeleri kullanıldı. Şimdi son komütasyonuna bakalım:

$$\begin{aligned}
[\Gamma_1, \Gamma_2] &= \left[ \frac{1}{2} \left( rp^2 - r + \frac{2m\beta}{r} \right), (\mathbf{r} \cdot \mathbf{p} - i \frac{(d-1)}{2}) \right] \\
&= \frac{1}{2} \{ [rp^2, \mathbf{r} \cdot \mathbf{p}] - [r, \mathbf{r} \cdot \mathbf{p}] + 2m\beta [\frac{1}{r}, \mathbf{r} \cdot \mathbf{p}] \}
\end{aligned}$$

Bu ifade içerisindeki komütasyonları açılır ve (4.46), (4.47) ve (4.48) ifadeleri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
[\Gamma_1, \Gamma_2] &= \frac{1}{2} \{ -irp^2 - ir - i \frac{2m\beta}{r} \} \\
&= -i \frac{1}{2} \left( rp^2 + r + \frac{2m\beta}{r} \right) = -i\Gamma_3
\end{aligned}$$

elde edilir. Özdeğer denklemini çözelim.

$$\left( \frac{p^2}{2m} + \frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2} \right) \Psi = E\Psi \quad (4.68)$$

ile verilen (4.68) denklemini tek tarafta toplayarak  $r$  ile çarpmak doğrusallığı bozmaz.

$$\left( \frac{rp^2}{2m} + \alpha + \frac{\beta}{r} - rE \right) \Psi = 0 \quad (4.69)$$

Bu durumda parantez içini operatörler cinsinden yazılırsa,

$$\frac{rp^2}{2m} + \frac{\beta}{r} = \frac{\Gamma_3 + \Gamma_1}{2m}, \quad r = \Gamma_3 - \Gamma_1 \quad (4.70)$$

olur ve

$$\left( \left( \frac{1}{2m} + E \right) \Gamma_1 + \left( \frac{1}{2m} - E \right) \Gamma_3 + \alpha \right) \Psi = 0 \quad (4.71)$$

elde ederiz. Burada son ifadeyi daha önce yapılan işlem tekrarlanırsa,

$$\left\{ \left( \frac{1}{2m} + E \right) e^{-i\theta\Gamma_2} \Gamma_1 e^{i\theta\Gamma_2} + \left( \frac{1}{2m} - E \right) e^{-i\theta\Gamma_2} \Gamma_3 e^{i\theta\Gamma_2} + \alpha \right\} \tilde{\Psi} = 0 \quad (4.72)$$

olur. Temsil teorisinin (3.120) ve (3.121) özelliğini kullanırsak;

$$\left\{ \left[ \left( \frac{1}{2m} + E \right) \cosh \theta + \left( \frac{1}{2m} - E \right) \sinh \theta \right] \Gamma_1 + \left[ \left( \frac{1}{2m} + E \right) \sinh \theta + \left( \frac{1}{2m} - E \right) \cosh \theta \right] \Gamma_3 + \alpha \right\} \tilde{\Psi} = 0 \quad (4.73)$$

elde edilir. Kesikli spektrumu elde etmek için  $\Gamma_1$ 'in katsayısını sıfır alınır ve böylece

$$\tanh \theta = -\frac{(\frac{1}{2m} + E)}{(\frac{1}{2m} - E)} = \frac{(E + \frac{1}{2m})}{E - \frac{1}{2m}}, \quad \cosh \theta = \frac{(E - \frac{1}{2m})}{\sqrt{-2\frac{E}{m}}} \quad (4.74)$$

bulunur. Özdeğer denkleminde (4.74) ifadelerini yerine yazılırsa,

$$\left[ -\frac{2E}{m}\Gamma_3 + \alpha\sqrt{-\frac{2E}{m}} \right] \tilde{\Psi} = 0 \quad \text{veya} \quad \Gamma_3 \tilde{\Psi} = \alpha\sqrt{-\frac{m}{2E}} \tilde{\Psi} \quad (4.75)$$

bulunur. Temsil teorisinden bilinen (2.35) denklemleri karşılaştırılırsa

$$\alpha\sqrt{-\frac{m}{2E}} = (-\phi + x) \quad (4.76)$$

olur. Bu eşitlikten enerji çekilerek,

$$E = -\frac{m\alpha^2}{2(-\phi + x)^2} \quad (x = 0, 1, 2, \dots) \quad (4.77)$$

elde edilir. Burada  $\phi$ 'yi bulmak için (2.33) ile verilen Kasimir operatörünü elde etmeliyiz.

Böylece

$$\begin{aligned} \Gamma^2 &= \frac{1}{4}(rp^2 + r + \frac{2m\beta}{r})(rp^2 + r + \frac{2m\beta}{r}) - \frac{1}{4}(rp^2 - r + \frac{2m\beta}{r})(rp^2 - r + \frac{2m\beta}{r}) \\ &\quad - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{p} - i\frac{N-1}{2})(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p} - i\frac{N-1}{2}) \\ &= \frac{1}{4}(2rp^2r + 2r^2p^2 + 8m\beta) - \mathbf{r} \cdot \mathbf{p} \cdot \mathbf{r} \cdot \mathbf{p} + i(N-1)\mathbf{r} \cdot \mathbf{p} + \frac{1}{4}(N-1)^2 \\ &= -(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p})^2 + r^2p^2 + i(N-2)\mathbf{r} \cdot \mathbf{p} \frac{1}{2}rp^2r - \frac{1}{2}r^2p^2 + i\mathbf{r} \cdot \mathbf{p} + 2m\beta + \frac{1}{4}(N-1)^2 \end{aligned}$$

olur. (4.61) denklemini kullanılarak yukarıdaki ifade düzenlenirse

$$\Gamma^2 = L^2 + \frac{1}{4}(N-1)^2 + i\mathbf{r} \cdot \mathbf{p} + \frac{1}{2}[rp^2, r] + 2m\beta$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} [rp^2, r] &= rp_n[p_n, r] + r[p_n, r]p_n + [r, r]p_np_n \\ &= -ix_np_n - ir\left(\frac{x_n}{r}p_n - i\frac{(N-1)}{2}\right) \\ &= -2ix_np_n - (N-1) \end{aligned}$$

ifadesi yerine yazılırsa,

$$\Gamma^2 = L^2 + \frac{1}{4}(N-1)^2 - \frac{1}{2}(N-1) + 2m\beta$$

olarak bulunur.  $L^2$ 'nin  $N$  boyutta özdeğeri  $\ell(\ell + N - 2)$  olmasından dolayı (2.34) ifadesinden

$$\phi^2 + \phi - \ell(\ell + N - 2) - \frac{1}{4}(N-1)^2 + \frac{1}{2}(N-1) + 2m\beta = 0 \quad (4.78)$$

denklemini çözülerek bilinmeyen  $\phi$  ifadesini elde edilebilir. Bu durumda çözüm,

$$\phi = -\left(\frac{1}{2} + \sqrt{\left(\ell + \frac{d-2}{2}\right)^2 + 2m\beta}\right) \quad (4.79)$$

olarak bulunur. Bu değeri, (4.79)'da yerine yazılırsa,

$$E = -\frac{m\alpha^2}{2\left(x + \frac{1}{2} + \sqrt{\left(\ell + \frac{N-2}{2}\right)^2 + 2m\beta}\right)} \quad (x = 0, 1, 2, \dots) \quad (4.80)$$

sonucu elde edilir.

### 4.2.3 Spinsiz Parçacıklar için Göreceli Kepler Problemi

$$\mathcal{H} = \sqrt{p^2 + m^2} - \frac{\alpha}{r} \quad (4.81)$$

ile verilen Klein-Gordan denklemi için özdeğer spektrumunu elde edelim.

$(N+1)$  boyutlu uzayımızın  $N$  tanesi konumu ve bir tanesi ise zamanı tanımlar.  $(N+1)$  boyutta momentum ve yer vektörleri sırasıyla (4.44a) ve (4.44b) ile verilir. Klein-Gordan Hamilton işlemcisi için operatör setini,

$$\Gamma_1 = \frac{1}{2}(rp^2 - r - \frac{\alpha^2}{r}) \quad \Gamma_2 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{p} - i\frac{(d-1)}{2} \quad \Gamma_3 = \frac{1}{2}(rp^2 + r - \frac{\alpha^2}{r}) \quad (4.82)$$

olarak seçelim. Bu seçilen operatör setinin  $so(2, 1)$  cebirini sağladığını gösterelim:

$$\begin{aligned}
[\Gamma_1, \Gamma_3] &= \left[ \frac{1}{2} \left( rp^2 - r - \frac{\alpha^2}{r} \right), \frac{1}{2} \left( rp^2 + r - \frac{\alpha^2}{r} \right) \right] \\
&= \frac{1}{2} rp_n [p_n, r] + \frac{1}{2} r [p_n, r] p_n \\
&= \frac{1}{2} \left( rp_n \left( -i \frac{x_n}{r} \right) + r \left( -i \frac{x_n}{r} \right) p_n \right) \\
&= -\frac{i}{2} \left( x_n p_n + r p_n \frac{x_n}{r} \right) \\
&= -i \frac{1}{2} \left( x_n p_n + r \left( \frac{x_n}{r} p_n - i \frac{N-1}{r} \right) \right) \\
&= -i \left( x_n p_n - i \frac{(N-1)}{2} \right) = -i \Gamma_2
\end{aligned}$$

buluruz. Burada (4.47) ve (4.50) ifadeleri kullanıldı.  $so(2, 1)$ 'in ikinci komütasyon ilişkisini hesaplayalım.

$$\begin{aligned}
[\Gamma_1, \Gamma_2] &= \left[ \frac{1}{2} \left( rp^2 - r - \frac{\alpha^2}{r} \right), \left( \mathbf{r} \cdot \mathbf{p} - i \frac{(N-1)}{2} \right) \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[ \left( rp^2 - r - \frac{\alpha^2}{r} \right), \mathbf{r} \cdot \mathbf{p} \right] \\
&= \frac{1}{2} \left\{ rp_n [p_n, x_n] p_m + r [p_n, x_m] p_m p_n + x_m [r, p_m] p_n p_n \right. \\
&\quad \left. - x_m [r, p_m] - \alpha^2 x_n \left[ \frac{1}{r}, p_n \right] \right\}
\end{aligned}$$

Burada (4.46), (4.47), (4.48) ifadeleri kullanılarak sadeleştirmeler yapıldı.

$$\begin{aligned}
[\Gamma_1, \Gamma_2] &= \frac{1}{2} \left\{ rp_n (-i \delta_{nm}) p_m + r (-i \delta_{nm}) p_m p_n + x_m \left( +i \frac{x_m}{r} \right) p_n p_n \right. \\
&\quad \left. - x_m \left( +i \frac{x_m}{r} \right) - \alpha^2 x_n \left( -i \frac{x_n}{r^3} \right) \right\} \\
&= \frac{i}{2} \left\{ -rp_n p_n - rp_n p_n + rp_n p_n - r + \alpha^2 \frac{1}{r} \right\} \\
&= -i \frac{1}{2} \left( rp^2 + r - \frac{\alpha^2}{r} \right) = -i \Gamma_3
\end{aligned}$$

elde edilir. Son olarak,

$$\begin{aligned}
[\Gamma_2, \Gamma_3] &= [(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p} - i\frac{(N-1)}{2}), \frac{1}{2}(rp^2 + r - \frac{\alpha^2}{r})] \\
&= \frac{1}{2} \left\{ rp_m[x_n, p_m]p_n + r[x_n, p_m]p_m p_n + x_n[p_n, r]p_m p_m \right. \\
&\quad \left. + x_n[p_n, r] - \alpha^2 x_n[p_n, \frac{1}{r}] \right\} \\
&= \frac{i}{2} \left\{ rp_m p_m - r - \frac{\alpha^2}{r} \right\} = i\Gamma_1
\end{aligned}$$

buluruz. Görüldüğü gibi  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  ve  $\Gamma_3$  operatör seti  $so(2, 1)$  cebirini sağlamaktadır.

Schrödinger denkleminde Hamilton işlemcisine  $\alpha/r$  ekleyip karesini almak, özdeğer denklemini değiştirmez. Böylece,

$$\left(\mathcal{H} + \frac{\alpha}{r}\right)^2 \Psi = \left(E + \frac{\alpha}{r}\right)^2 \Psi \quad (4.83)$$

ya da

$$\left[\left(\sqrt{p^2 + m^2} - \frac{\alpha}{r} + \frac{\alpha}{r}\right)^2 - \left(E + \frac{\alpha}{r}\right)^2\right] \Psi = 0$$

olur. Sadeleştirmeler yapılırsa,

$$\left(rp^2 - \frac{\alpha^2}{r} + (m^2 - E^2)r - 2E\alpha\right) \Psi = 0 \quad (4.84)$$

elde edilir. Bu denklemi,  $\Gamma_1$  ve  $\Gamma_3$  operatörleri cinsinden,

$$\Gamma_3 + \Gamma_1 = rp^2 - \frac{\alpha^2}{r}, \quad \Gamma_3 - \Gamma_1 = r \quad (4.85)$$

olması kullanılırsa,

$$\left[(\Gamma_3 + \Gamma_1) + (m^2 - E^2)(\Gamma_3 - \Gamma_1) - 2E\alpha\right] \Psi = 0$$

bulunur.  $\Gamma_1$  ve  $\Gamma_3$ 'ün katsayıları tek parantez altında toplanırsa

$$\left((1 - m^2 + E^2)\Gamma_1 + (1 + m^2 - E^2)\Gamma_3 - 2E\alpha\right) \Psi = 0 \quad (4.86)$$

elde edilir. Yine benzer işlemler yapılırsa

$$\left[ (1 - m^2 + E^2)e^{-i\theta\Gamma_2}\Gamma_1 e^{i\theta\Gamma_2} + (1 + m^2 - E^2)e^{-i\theta\Gamma_2}\Gamma_3 e^{i\theta\Gamma_2} - 2E\alpha \right] \tilde{\psi} = 0 \quad (4.87)$$

olur. Burada (3.120) ve (3.121) ifadeleri kullanılırsa (4.87) denklemi

$$\left\{ (1 - m^2 + E^2)(\Gamma_1 \cosh \theta + \Gamma_3 \sinh \theta) + (1 + m^2 - E^2)(\Gamma_1 \sinh \theta + \Gamma_3 \cosh \theta) - 2E\alpha \right\} \tilde{\Psi} = 0$$

olarak elde edilir. Tekrar,  $\Gamma_1$  ve  $\Gamma_3$ 'ün katsayıları tek parantez altında toplanırsa,

$$\begin{aligned} & \left[ \left( (1 - m^2 + E^2) \cosh \theta + (1 + m^2 - E^2) \sinh \theta \right) \Gamma_1 \right. \\ & \left. + \left( (1 - m^2 + E^2) \sinh \theta + (1 + m^2 - E^2) \cosh \theta \right) \Gamma_3 - 2E\alpha \right] \tilde{\psi} = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu denklemin kesikli değerlere sahip spektrumunu elde edileceğinden  $\Gamma_1$ 'in katsayısı sıfıra eşitlenir. Böylece

$$\tanh \theta = -\frac{(1 - m^2 + E^2)}{(1 + m^2 - E^2)}, \quad \cosh \theta = \frac{1 + m^2 - E^2}{\sqrt{4(m^2 - E^2)}} \quad (4.88)$$

ifadeleri elde edilir. Ayrıca denklem de,

$$\left[ \left( (1 - m^2 + E^2) \tanh \theta + (1 + m^2 - E^2) \right) \Gamma_3 - \frac{2E\alpha}{\cosh \theta} \right] \tilde{\psi} = 0 \quad (4.89)$$

olur. (4.89) denkleminde (4.88) yerine yazılırsa ve sadeleştirmeler yapılırsa

$$\{ \sqrt{4(m^2 - E^2)} \Gamma_3 - 2E\alpha \} \tilde{\psi} = 0$$

olur. Bu eşitliği  $\Gamma_3$ 'ün özdeğer denklemi biçiminde yazılacak olursa

$$\Gamma_3 \tilde{\psi} = \frac{E\alpha}{\sqrt{m^2 - E^2}} \tilde{\psi} \quad (4.90)$$

elde edilir. Temsil teorisinde  $\Gamma_3$ 'ün özdeğer denklemi (2.35) ile (4.90) karşılaştırılırsa,

$$(-\phi + x) = \frac{E\alpha}{\sqrt{m^2 - E^2}}, \quad x = 0, 1, 2, \dots \quad (4.91)$$

elde edilir. Bu eşitlikten  $E$

$$E = \frac{m}{\sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{(-\phi + x)^2}}}, \quad (x = 0, 1, 2, \dots) \quad (4.92)$$

olarak bulunur. Burada,  $\phi$ , Kasimir operatörünün özdeğer denkleminde elde edilen ve burada bilinmeyen bir niceliktir. Kasimir operatörünün özdeğer denklemini kullanarak  $\phi$ 'yi hesaplayalım.

$$\begin{aligned} \Gamma^2 &= \frac{1}{4}(rp^2 + r - \frac{\alpha^2}{r})^2 - \frac{1}{4}(rp^2 - r - \frac{\alpha^2}{r})^2 - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{p} - i\frac{(N-1)}{2})^2 \\ &= \frac{1}{4}(2rp^2r + 2r^2p^2 - 4\alpha^2) - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{p})(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}) + i(N-1)\mathbf{r} \cdot \mathbf{p} + \frac{(N-1)^2}{4} \\ &= -(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p})(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}) + r^2p^2 + i(N-2)\mathbf{r} \cdot \mathbf{p} + i\mathbf{r} \cdot \mathbf{p} + \frac{1}{2}rp^2r - \frac{1}{2}r^2p^2 - \alpha^2 + \frac{(N-1)^2}{4} \\ &= -(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p})(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}) + r^2p^2 + i(N-2)\mathbf{r} \cdot \mathbf{p} + i\mathbf{r} \cdot \mathbf{p} + \frac{1}{2}[rp^2, r] - \alpha^2 + \frac{(N-1)^2}{4} \end{aligned}$$

olur.  $N$  boyutlu açısal momentumu daha önce (4.61) ile verildiğini biliyoruz. Ayrıca  $[rp^2, r]$  komütasyonu

$$[rp^2, r] = 2i\mathbf{r} \cdot \mathbf{p} - (N-1)$$

olarak elde edilir. Bunlar,  $\Gamma^2$ 'de yerine yazılırsa

$$\Gamma^2 = \mathbf{L}^2 - \alpha^2 + \frac{(N-1)^2}{4} - \frac{(N-1)}{2} \quad (4.93)$$

elde edilir.  $N$  boyutta  $\mathbf{L}^2$ 'nin özdeğeri  $\ell(\ell + N - 2)$  (4.93)'te yerine yazılırsa,

$$\Gamma^2 \tilde{\Psi} = \left( \ell(\ell + N - 2) - \alpha^2 + \frac{(N-1)^2}{4} - \frac{(N-1)}{2} \right) \tilde{\Psi} \quad (4.94)$$

bulunur. Ayrıca, (2.34) ile (4.94) iki özdeğer denklemini karşılaştırılırsa,

$$(\phi + 1)\phi = \ell(\ell + N - 2) - \alpha^2 + \frac{(N-1)^2}{4} - \frac{(N-1)}{2}$$

elde edilir. Bu,  $\phi$ 'ye göre ikinci dereceden bir denklemdir. Bu denklemden sadece negatif kök için  $\phi$

$$\phi = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{(2\ell + N - 2)^2 - 4\alpha^2}) \quad (4.95)$$

olarak bulunur. (4.95), (4.92)'de yerine yazılırsa,

$$E_{x,\ell} = \frac{m}{\sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{\left(\frac{1}{2} + x + \sqrt{\left(\ell + \frac{N-1}{2}\right)^2 - \alpha^2}\right)^2}}} \quad (4.96)$$

elde edilir. Burada,  $x$  ve  $\ell$  değerleri  $x = 0, 1, 2, \dots$  ve  $\ell = 0, 1, 2, \dots$  olmaktadır. Görüldüğü gibi  $E$ 'nin  $\ell$ 'ye karşı dejenereliği kalkmıştır.  $E_{x,\ell}$ 'ye bağlıdır. Fakat, biz  $x$ 'in fiziksel olarak neyi temsil ettiğini bilmiyoruz, bundan dolayı  $x$ 'i  $n$  ve  $\ell$  cinsinden yazıp  $E$ 'de yerine koyarak  $E_{n,\ell}$ 'yi bulmalıyız. Göreceli olmayan hidrojen atomunun Hamilton fonksiyonunu çözdüğümüzde  $E$ 'de dejenerelik olduğunu ve  $n = \ell + x + 1$  olarak bulmuştuk, buradan,  $x = n - \ell - 1$  olur. Bu (4.96) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$E_{n,\ell} = \frac{m}{\sqrt{\left[1 + \alpha^2 \left(n - \ell - \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\left(\ell + \frac{N-2}{2}\right)^2 - \alpha^2}}\right)^2\right]}} \quad (4.97)$$

sonucu bulunur.

#### 4.2.4 Spini $\frac{1}{2}$ olan Parçacıklar için Göreceli Kepler Problemi

$(N + 1)$ -boyutda verilen

$$\mathcal{H} = \sqrt{p^2 + m^2 - i\alpha \frac{(\boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{r}})}{r^2}} - \frac{\alpha}{r} \quad (4.98)$$

Dirac denklemi için kesikli özdeğer spektrumunu elde edelim.

Daha önceki gibi  $(N + 1)$  boyutlu uzayımızın  $N$  boyutu konum eksenini, diğeri ise zaman eksenini tanımlar. Bu Hamilton işlemcisi için operatör setini

$$\Gamma = \frac{1}{2} \left( rP^2 - r - \frac{\alpha^2}{2} - \frac{i\alpha \boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \right) \quad (4.99a)$$

$$\Gamma_2 = \left( \mathbf{r} \cdot \mathbf{p} - i \frac{(N-1)}{2} \right) \quad (4.99b)$$

$$\Gamma_3 = \frac{1}{2} \left( rp^2 + r - \frac{\alpha^2}{r} - \frac{i\alpha\alpha \cdot \hat{r}}{r^2} \right) \quad (4.99c)$$

olarak seçelim. Bu üreteçlerin  $so(2, 1)$  cebirini sağladığını gösterelim:

$$\begin{aligned} [\Gamma_1, \Gamma_3] &= \left[ \frac{1}{2} \left( rp^2 - r - \frac{\alpha^2}{r} - \frac{i\alpha\alpha \cdot \hat{r}}{r^2} \right), \frac{1}{2} \left( rp^2 + r - \frac{\alpha^2}{r} - \frac{i\alpha\alpha \cdot \hat{r}}{r^2} \right) \right] \\ &= \frac{1}{4} \left\{ [rp^2, r] - \alpha^2 [rp^2, \frac{1}{r}] - i\alpha\alpha \cdot [rp^2, \frac{\hat{r}}{r^2}] - [r, rp^2] - \alpha^2 [\frac{1}{r}, rp^2] - i\alpha\alpha \cdot [\frac{\hat{r}}{r^2}, rp^2] \right\} \\ &= \frac{1}{2} [rp^2, r] \\ &= \frac{1}{2} \left\{ rp_n [p_n, r] + r [p_n, r] p_n \right\} \\ &= \frac{1}{2} rp_n \left( -i \frac{x_n}{r} \right) + \frac{1}{2} r \left( -i \frac{x_n}{r} \right) p_n \\ &= -i \frac{1}{2} \left( x_n p_n + r \left( \frac{x_n}{r} p_n - \frac{i(N-1)}{r} \right) \right) \\ &= -i \left( \mathbf{r} \cdot \mathbf{p} - i \frac{(N-1)}{2} \right) = i\Gamma_2 \end{aligned}$$

Burada (4.46), (4.48) ve  $[A, B] = -[B, A]$  eşitlikleri kullanıldı. Şimdi,  $[\Gamma_1, \Gamma_2]$  komütasyonu hesaplanırsa:

$$\begin{aligned} [\Gamma_1, \Gamma_2] &= \left[ \frac{1}{2} \left( rp^2 - r - \frac{\alpha^2}{r} - i\alpha \frac{\alpha \cdot \mathbf{r}}{r^2} \right), \left( \mathbf{r} \cdot \mathbf{p} - i \frac{(N-1)}{2} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left\{ [rp^2, \mathbf{r} \cdot \mathbf{p}] - [r, \mathbf{r} \cdot \mathbf{p}] - \alpha^2 [\frac{1}{r}, \mathbf{r} \cdot \mathbf{p}] - i\alpha\alpha \cdot [\frac{\mathbf{r}}{r^2}, \mathbf{r} \cdot \mathbf{p}] \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ [rp_n p_n, x_m p_m] - [r, x_m p_m] - \alpha^2 [\frac{1}{r}, x_m p_m] - i\alpha\alpha_n [\frac{x_n}{r^2}, x_m p_m] \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ r [p_n p_n, x_m p_m] + [r, x_m p_m] p_n p_n - x_m [r, p_m] - \alpha^2 x_m [\frac{1}{r}, p_m] \right. \\ &\quad \left. - i\alpha\alpha_n x_m [\frac{x_n}{r^2}, p_m] \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ r [p_n p_n, x_m] p_m + x_m [r, p_m] p_n p_n - x_m [r, p_m] - \alpha^2 x_m [\frac{1}{r}, p_m] \right. \\ &\quad \left. - i\alpha\alpha_n x_m x_n [\frac{1}{r^2}, p_m] - i\alpha\alpha_n x_m \frac{1}{r^2} [x_n, p_m] \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ rp_n [p_n, x_m] p_m + r [p_n, x_m] p_n p_m + x_m [r, p_m] p_n p_n - x_m [r, p_m] \right. \\ &\quad \left. - \alpha^2 x_m [\frac{1}{r^2}, p_m] - i\alpha\alpha_n x_m x_n [\frac{1}{r^2}, p_m] - i\alpha\alpha_n x_m \frac{1}{r^2} [x_n, p_m] \right\} \end{aligned}$$

bulunur. Bu ifadede (4.46), (4.47), (4.48), (4.49) ve (4.50) komütasyonları yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
[\Gamma_1, \Gamma_2] &= \frac{1}{2} \left\{ r p_n (-i \delta_{nm}) p_m + r (-i \delta_{nm}) p_n p_m + x_m \left( i \frac{x_m}{r} \right) p_n p_n - x_m \left( i \frac{x_m}{r} \right) \right. \\
&\quad \left. - \alpha^2 X_m \left( i \frac{x_m}{r} \right) - i \alpha \alpha_n x_m x_n \left( - \frac{2i \delta_{mn}}{x_n^3} \right) - i \alpha \alpha_n x_m (i \delta_{nm}) \frac{1}{r^2} \right\} \\
&= -\frac{1}{2} \left\{ r p_n p_n + r - \alpha^2 \frac{1}{r} - 2i \alpha \frac{\alpha_n x_n x_n}{x_n^3} + i \alpha \frac{\alpha_n \alpha_n}{r^2} \right\} = -i \Gamma_3
\end{aligned}$$

bulunur. Son olarak  $[\Gamma_2, \Gamma_3]$  komütasyonu

$$\begin{aligned}
[\Gamma_2, \Gamma_3] &= \left[ (\mathbf{r} \cdot \mathbf{p} - i \frac{(N-1)}{2}), \frac{1}{2} (r p^2 + r - \frac{\alpha^2}{r} - \frac{i \alpha \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{r}}{r^2}) \right] \\
&= \frac{1}{2} \left\{ [\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}, r p^2] + [\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}, r] - \alpha^2 [\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}, \frac{1}{r}] - i \alpha [\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}, \frac{\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{r}}{r^2}] \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ [x_n p_n, r p_m p_m] + [x_m p_n, r] - \alpha^2 [x_n p_n, \frac{1}{r}] - i \alpha \alpha_m [x_n p_n, \frac{x_m}{r^2}] \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ [x_n p_n, r] p_m p_m + r [x_n p_n, p_m p_m] + x_n [p_n, r] - \alpha^2 x_n [p_n, \frac{1}{r}] - i \alpha \alpha_m x_n [p_n, \frac{x_m}{r^2}] \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ x_n [p_n, r] p_m p_m + r [x_n, p_m p_m] p_n + x_n [p_n, r] - \alpha^2 x_n [p_n, \frac{1}{r}] - i \alpha x_m \alpha_n [p_n, \frac{x_m}{r^2}] \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ x_n [p_n, r] p_m p_m + r p_m [x_n, p_m] p_n + r [x_n, p_m] p_m p_n + x_n [p_n, r] - \alpha^2 x_n [p_n, \frac{1}{r}] \right. \\
&\quad \left. - i \alpha \alpha_m x_n x_m [p_n, \frac{1}{r^2}] - i \alpha \alpha_m x_n [p_n, p_m] \frac{1}{r^2} \right\}
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Yine (4.46), (4.47), (4.48), (4.49) ve (4.50) komütasyonları yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
[\Gamma_2, \Gamma_3] &= \frac{1}{2} \left\{ x_n \left( -i \frac{x_n}{r} \right) p_m p_m + r p_m (i \delta_{nm}) p_n + r (i \delta_{nm}) p_m p_n + x_n \left( -i \frac{x_n}{r} \right) \right. \\
&\quad \left. - \alpha^2 x_n \left( i \frac{x_n}{r^3} \right) - i \alpha \alpha_m x_n x_m \left( 2i \delta_{nm} \frac{1}{x_n^3} \right) - i \alpha \alpha_m x_n \left( -i \delta_{nm} \frac{1}{r^2} \right) \right\} \\
&= i \frac{1}{2} \left( r p_m p_m - r - \frac{\alpha^2}{r} - \frac{i \alpha \alpha_m x_m x_m}{x_m^3} \right) = i \Gamma_1
\end{aligned}$$

elde edilir.

Bu üreteçleri kullanarak özdeğer denklemini çözelim. Denkleme  $\alpha/r$  ekleyip, karesini aldıktan sonra  $r$  ile çarparsak denklemimiz yine aynı kalır.

$$\left( \mathcal{H} + \frac{\alpha}{r} \right)^2 \Psi = \left( E + \frac{\alpha}{r} \right)^2 \Psi \quad (4.100)$$

Hamilton operatörü yerine yazılırsa,

$$\left[ \left( (p^2 + m^2 - i\alpha \frac{\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{r}}{r^2})^{1/2} - \frac{\alpha}{r} + \frac{\alpha}{r} \right)^2 - \left( E + \frac{\alpha}{r} \right)^2 \right] \Psi = 0$$

veya

$$\left[ p^2 + m^2 - i\alpha \frac{\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{r}}{r^2} - E^2 - \frac{2E\alpha}{r} - \frac{\alpha^2}{r^2} \right] \Psi = 0$$

elde edilir. Her tarafı  $r$  ile çarpılıp düzenlenirse,

$$\left[ rp^2 - \frac{\alpha^2}{r} - i\alpha \frac{\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{r}}{r^2} + (m^2 - E^2)r - 2E\alpha \right] \Psi = 0 \quad (4.101)$$

olur. Operatörler

$$\Gamma_3 + \Gamma_1 = rp^2 - \frac{\alpha^2}{r} - i\alpha \frac{\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{r}}{r^2}, \quad \Gamma_3 - \Gamma_1 = r \quad (4.102)$$

biçiminde yazılabildiğinden, (4.101) denklemini bu operatörler cinsinden yazılırsa

$$\left[ (1 - m^2 + E^2)\Gamma_1 + (1 + m^2 - E^2)\Gamma_3 - 2\alpha E \right] \Psi = 0 \quad (4.103)$$

biçimde yazılır. Bu haliyle denklem, Klein-Gordan denklemi için bulunan eşitliğin aynısıdır. Yine benzer işlemler yapılırsa

$$\Gamma_3 \tilde{\Psi} = \frac{E\alpha}{\sqrt{m^2 - E^2}} \tilde{\Psi}$$

ve

$$E = \frac{m}{\sqrt{1 + \left( \frac{\alpha}{-\phi + s} \right)^2}} \quad (4.104)$$

elde edilir.

Bu denklemin, Klein-Gordan denkleminden farklılığı, Kasimir değişmezinin farklı oluşundan dır. Dolayısıyla  $\phi$  farklı olacaktır. Kasimir değişmezini (2.33) denkleminden hesaplayalım.

$$\Gamma^2 = \frac{1}{4} \left( rP^2 + r - \frac{\alpha^2}{r} - \frac{i\alpha \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{r}}{r^2} \right)^2 - \frac{1}{4} \left( rP^2 - r - \frac{\alpha^2}{r} - \frac{i\alpha \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{r}}{r^2} \right)^2 - \left( \mathbf{r} \cdot \mathbf{p} - i \frac{(N-1)}{2} \right)^2$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4} \left( 2rp^2r + 2r^2p^2 - 4\alpha^2 - 4\frac{i\alpha\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{r}}{r} \right) - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{p})^2 + i(N-1)\mathbf{r} \cdot \mathbf{p} + \frac{(N-1)^2}{4} \\
&= -(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p})^2 + i(N-2)\mathbf{r} \cdot \mathbf{p} + r^2p^2 + \frac{1}{2}rp^2r - \frac{1}{2}r^2P^2 + i\mathbf{r} \cdot \mathbf{p} + \frac{(N-1)^2}{4} - \alpha^2 - i\alpha\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{r}
\end{aligned}$$

elde edilir.  $N$ -boyutta açısıl momentum ifadesini ve komutasyon ilişkisi kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\Gamma^2 &= \mathbf{L}^2 + \frac{1}{2}[rp^2 + r] + i\mathbf{r} \cdot \mathbf{p} + \frac{(N-1)}{4} - \alpha^2 - i\alpha\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{r} \\
&= \mathbf{L}^2 + \frac{1}{2} \left( -2i\mathbf{r} \cdot \mathbf{p} - (N-1) \right) + i\mathbf{r} \cdot \mathbf{p} + \frac{(N-1)}{4} - \alpha^2 - i\alpha\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{r} \\
&= \mathbf{L}^2 - \alpha^2 - i\alpha\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{r} + \frac{(N-1)^2}{4} - \frac{(N-1)}{2}
\end{aligned}$$

ya da

$$\Gamma^2 = \mathbf{L}^2 - \alpha^2 - i\alpha\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{r} + \frac{(N-2)^2}{4} - \frac{1}{4} \quad (4.105)$$

elde edilir. Kasimir operatörünün özdeğerini reel bulmak için orbital açısıl momentumu ile spin açısıl momentumunun toplanması gerekir. Bunun için

$$\mathbf{Q} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L} + i\alpha\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{r} + \frac{(N-2)}{2} + \frac{1}{2} \quad (4.106)$$

biçiminde verilen bir operatör alalım. Bu  $\mathbf{Q}$  operatörünün kendisi ile skaler çarpımı

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}^2 &= (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L})^2 + i\alpha \left[ (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L})(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{r}) + (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{r})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L}) \right] \\
&+ (N-1)\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L} + (N-1)i\alpha\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{r} - \alpha^2(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{r})^2 + \frac{(N-2)^2}{4} + \frac{(N-2)}{2} + \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

olur. Şimdi ikinci ifadeyi irdeleyelim;

$$\begin{aligned}
i\alpha \left[ (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L})(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{r}) + (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{r})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L}) \right] &= i\alpha \left( \sigma_m L_m \alpha_n \frac{x_n}{r} + \alpha_n \frac{x_n}{r} \sigma_m L_m \right) \\
&= i\alpha \left( \sigma_m \alpha_n L_m \frac{x_n}{r} + \alpha_n \sigma_m \frac{x_n}{r} L_m \right) \\
&= i\alpha \left\{ \sigma_m \alpha_n \left( i\varepsilon_{mns} \frac{x_s}{r} + \frac{x_n}{r} L_m \right) + \alpha_n \sigma_m \frac{x_n}{r} L_m \right\} \\
&= i\alpha \left\{ (\sigma_m \alpha_n + \alpha_n \sigma_m) \frac{x_n}{r} L_m + i\varepsilon_{mns} \sigma_m \alpha_n \frac{x_s}{r} \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada (4.47) komütasyon ilişkisi kullanılmıştır.

$\frac{x_n}{r} L_m$  çarpanında,  $n$  ve  $m$  üzerinden toplam alındığında sıfır olacağı için ilk terim sıfır olur.

$$i\alpha \left[ (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L})(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{r}) + (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{r})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L}) \right] = -\alpha \varepsilon_{mns} \sigma_m \alpha_n \frac{x_s}{r}$$

Eğer,

$$\sigma_m = \frac{1}{2i} \varepsilon_{mjk} \alpha_j \alpha_k \quad (4.107)$$

tanımını kullanılırsa,

$$\begin{aligned} i\alpha \left[ (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L})(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{r}) + (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{r})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L}) \right] &= -\alpha \varepsilon_{mns} \frac{1}{2i} \varepsilon_{mjk} \alpha_j \alpha_k \alpha_n \frac{x_s}{r} \\ &= \frac{i\alpha}{2} \varepsilon_{mns} \varepsilon_{mjk} \alpha_j \alpha_k \alpha_n \frac{x_s}{r} \\ &= \frac{i\alpha}{2} (\delta_{nj} \delta_{sk} - \delta_{nk} \delta_{sj}) \alpha_j \alpha_k \alpha_n \frac{x_s}{r} \\ &= \frac{i\alpha}{2} \left( \alpha_j \alpha_k \alpha_j \frac{x_k}{r} - \alpha_j \alpha_k \alpha_k \frac{x_j}{r} \right) \end{aligned}$$

olur. Ayrıca,  $\alpha_j \alpha_k + \alpha_k \alpha_j = 2\delta_{jk}$  bağıntısı kullanılırsa

$$\begin{aligned} &= \frac{i\alpha}{2} \left\{ \alpha_j (2\delta_{kj} - \alpha_j \alpha_k) \frac{x_k}{r} - \alpha_j N \frac{x_j}{r} \right\} \\ &= \frac{i\alpha}{2} \left\{ 2\delta_{kj} \alpha_j \frac{x_k}{r} - \alpha_j \alpha_j \alpha_k \frac{x_k}{r} - N \alpha_j \frac{x_j}{r} \right\} \\ &= \frac{i\alpha}{2} \left( 2\alpha_k \frac{x_k}{r} - N \alpha_k \frac{x_k}{r} - N \alpha_j \frac{x_j}{r} \right) \\ &= \frac{i\alpha}{2} \left( 2\alpha_k \frac{x_k}{r} - 2N \alpha_k \frac{x_k}{r} \right) \\ &= -i\alpha (N-1) \alpha_k \frac{x_k}{r} \\ &= -i\alpha (N-1) (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{r}) \end{aligned}$$

olur.  $Q^2$ 'de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} Q^2 &= (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L})^2 + (N-1)(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L}) - i\alpha (N-1) (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{r}) \\ &\quad + (N-1)i\alpha (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{r}) - \alpha^2 (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{r})^2 + \frac{(N-2)^2}{4} + \frac{(N-2)}{2} + \frac{1}{4} \\ &= (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L})^2 + (N-1)\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L} - \alpha^2 (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{r})^2 + \frac{(N-2)^2}{4} + \frac{(N-2)}{2} + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlikte bulunan birinci ifade üzerinde biraz işlem yaparsak,

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L})^2 &= (\sigma_m L_m)(\sigma_n L_n) = \sigma_m \sigma_n L_m L_n = \frac{1}{2} \{ \sigma_m \sigma_n L_m L_n + \sigma_n \sigma_m L_n L_m \} \\
&= \frac{1}{2} \{ \sigma_m \sigma_n L_m L_n + (2\delta_{nm} - \sigma_m \sigma_n) L_n L_m \} \\
&= \frac{1}{2} \{ 2L_n L_m \delta_{nm} + \sigma_m \sigma_n L_m L_n - \sigma_n \sigma_m L_n L_m \} \\
&= \frac{1}{2} \{ 2L_n^2 + \sigma_m \sigma_n (L_m L_n - L_n L_m) \} = \frac{1}{2} \{ 2L_n^2 + \sigma_m \sigma_n [L_m L_n] \} \\
&= \frac{1}{2} \{ 2L_n^2 + \sigma_m \sigma_n (N-2) i \varepsilon_{smn} L_s \} = \frac{1}{2} \{ 2L_n^2 + (N-2) i L_s \varepsilon_{smn} \sigma_m \sigma_n \} \\
&= \frac{1}{2} \{ 2L_n^2 + (N-2) i L_s 2i \sigma_s \} = L_n^2 - (N-2) \sigma_s L_s
\end{aligned}$$

$$Q^2 = \mathbf{L}^2 - (N-2) \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L} \quad (4.108)$$

elde ederiz. Benzer olarak üçüncü terim üzerinde de biraz uğraşırsak,

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{r})^2 &= \left( \alpha_m \frac{x_m}{r} \right) \left( \alpha_n \frac{x_n}{r} \right) \\
&= \alpha_m \alpha_n \frac{x_m x_n}{r^2} \\
&= \frac{1}{2} \left( \alpha_m \alpha_n \frac{x_m x_n}{r^2} + \alpha_n \alpha_m \frac{x_n x_m}{r^2} \right) \\
&= \frac{1}{2} (\alpha_m \alpha_n + \alpha_n \alpha_m) \frac{x_m x_n}{r^2} \\
&= \frac{1}{2} 2\delta_{mn} \frac{x_m x_n}{r^2} = 1
\end{aligned}$$

olur. Yukardaki denklemler yerine yazılırsa  $Q^2$ 'yi

$$\begin{aligned}
Q^2 &= \mathbf{L}^2 - (N-2) \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L} + (N-1) \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L} - \alpha^2 + \frac{(N-2)^2}{4} + \frac{(N-2)}{2} + \frac{1}{4} \\
&= \mathbf{L}^2 + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L} - \alpha^2 \frac{(N-2)^2}{4} + \frac{(N-2)}{2} + \frac{1}{4}
\end{aligned} \quad (4.109)$$

olarak bulunur.  $Q^2 - Q$  farkı alınırrsa,

$$Q^2 - Q = \mathbf{L}^2 - \alpha^2 - i \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{r} + \frac{(N-2)^2}{4} - \frac{1}{4} \quad (4.110)$$

olur ki bu  $\Gamma^2$  Kasimir operatörüne özdeştir. Böylece

$$\Gamma^2 = Q^2 - Q \quad (4.111)$$

olarak elde edilir. Temsil teorisine göre, Kasimir operatörünün özdeğer denklemi, (2.34) ile verilmektedir.  $Q$ 'nun özdeğerine  $\gamma$  olarak tanımlanırsa

$$\begin{aligned}\Gamma^2\tilde{\Psi} &= (Q^2 - Q)\tilde{\Psi} = (\gamma^2 - \gamma)\tilde{\Psi} \\ &= \phi(\phi + 1)\tilde{\Psi}\end{aligned}$$

denkleminde

$$\phi(\phi + 1) = \gamma^2 - \gamma \quad (4.112)$$

eşitliği elde edilir. Bu ikinci derece denklemi  $\phi$ 'ye göre çözümlerse,

$$\begin{aligned}\phi^2 + \phi - \gamma^2 + \gamma &= 0 \\ \phi &= -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4\gamma(\gamma - 1)}\end{aligned} \quad (4.113)$$

olduğundan,

$$\gamma = \gamma - 1 \quad \text{ve} \quad \phi = -\gamma \quad (4.114)$$

bulunur. Böylece  $\phi$  hem  $\gamma$  cinsinden hem de özdeğeri reel olarak ifade edilebilir.  $Q$ 'nun özdeğerini bulmak için yeniden düzenlenirse:

$$Q^2 = \mathbf{L}^2 + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L} - \alpha^2 + \frac{(N-2)^2}{4} + \frac{(N-2)}{2} + \frac{1}{4} \quad (4.115)$$

ve (4.115)'te  $\sigma_n\sigma_m + \sigma_m\sigma_n = 2\delta_{nm}$  özelliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}&= \mathbf{L}^2 + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L} + \frac{\boldsymbol{\sigma}^2}{4} - \frac{N}{4} - \alpha^2 + \frac{(N-2)^2}{4} + \frac{(N-2)}{2} + \frac{1}{4} \\ &= \left(\mathbf{L} + \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\right)^2 - \alpha^2 + \frac{(N-2)^2}{4} + \frac{(N-2)}{2} - \frac{N}{4} + \frac{1}{4} \\ &= \mathbf{J}^2 - \alpha^2 + \frac{(N-2)^2}{4} + \frac{(N-2)}{2} - \frac{N}{4} + \frac{1}{4}\end{aligned}$$

elde edilir. Burada  $\mathbf{J}$  toplam açısal momentumu göstermektedir. Toplam açısal momentumun  $N$ -boyutta özdeğeri  $\ell(\ell + N - 2)$  olduğunu hatırlanırsa

$$Q^2\tilde{\Psi} = \gamma^2\tilde{\Psi} = \left[\ell(\ell + N - 2) - \alpha^2 + \frac{(N-2)^2}{4} + \frac{(N-2)}{2} - \frac{N}{4} + \frac{1}{4}\right]\tilde{\Psi} \quad (4.116)$$

eşitliğinden

$$\begin{aligned}\gamma^2 &= j(j + N - 2) - \alpha^2 + \frac{(N - 2)^2}{4} + \frac{(N - 2)}{2} - \frac{N}{4} + \frac{1}{4} \\ &= \sqrt{j^2 + (N - 2)j + \frac{(N - 2)^2}{4} - \alpha^2 + \frac{(N - 2)}{2} - \frac{N}{4} + \frac{1}{4}}\end{aligned}$$

veya

$$\gamma = \sqrt{\left(j + \frac{(N - 2)}{2}\right)^2 - \alpha^2 + \frac{(N - 2)}{2} - \frac{N}{4} + \frac{1}{4}} \quad (4.117)$$

olarak bulunur. Kesikli değerlere sahip enerji özdeğer spektrumunu,

$$E = \frac{m}{\sqrt{1 + \left(\frac{\alpha}{-\phi + s}\right)}} \quad (4.159)$$

olarak bulunmuştur.  $\phi = -\gamma$  bağıntısını burada yerine yazılırsa,

$$E = \frac{m}{\sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{\left[S + \sqrt{\left(j + \frac{N - 2}{2}\right)^2 - \alpha^2 + \frac{N - 2}{2} - \frac{N}{4} + \frac{1}{4}}\right]^2}}} \quad (4.118)$$

denklemini elde edilir.

#### 4.2.5 Harmonik Osilatör

$$\mathcal{H} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{k}{2}\mathbf{r}^2 \quad (4.119)$$

ile verilen Hamilton işlemcisi için kesikli özdeğer spektrumunu elde edelim.

Bu Hamilton işlemcisi için  $so(2, 1)$  cebirini sağlayan iki farklı operatör seti elde edilmiştir.

Şimdi, bu farklı operatör setleri için sırayla özdeğer spektrumunu bulalım.

**Çözüm 1:**  $N$  boyut için momentum ve yer vektörü sırasıyla (4.44a) ve (4.44b) ile verilir.

Operatörler setini

$$\Gamma_1 = -\mathbf{p}^2 + \frac{\mathbf{r}^2}{16} \quad \Gamma_2 = \frac{1}{2}(\mathbf{r}\mathbf{p} - \frac{iN}{2}) \quad \Gamma_3 = -(\mathbf{p}^2 + \frac{\mathbf{r}^2}{16}) \quad (4.120)$$

olarak alalım. Seçilen bu setin  $so(2, 1)$  cebirini sağladığını gösterelim.

$$\begin{aligned} [\Gamma_1, \Gamma_2] &= [(-\mathbf{p}^2 + \frac{\mathbf{r}^2}{16}), \frac{1}{2}(\mathbf{r}\mathbf{p} - \frac{iN}{2})] \\ &= \frac{1}{2}\{-p_n[p_n, x_s]p_s - [p_n, x_s]p_n p_s + \frac{1}{16}x_s x_m [x_m, p_s] + \frac{1}{16}x_s [x_m, p_s]x_m\} \\ &= \frac{i}{2}\{2p_n p_n + \frac{2}{16}x_s x_s\} \\ &= -i\{-p_n p_n - \frac{1}{16}x_s x_s\} \\ &= -i(-\mathbf{p}^2 - \frac{1}{16}\mathbf{r}^2) = -\Gamma_3 \end{aligned}$$

elde ederiz. Burada (4.46) ifadesi kullanıldı. Şimdi ikinci komütasyonu hesaplarırsa:

$$\begin{aligned} [\Gamma_2, \Gamma_3] &= [\frac{1}{2}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p} - \frac{iN}{2}), (-\mathbf{p}^2 + \frac{\mathbf{r}^2}{16})] \\ &= -\frac{1}{2}[\mathbf{r}\mathbf{p}, (-\mathbf{p}^2 + \frac{\mathbf{r}^2}{16})] \end{aligned}$$

bulunur. Vektörleri, bileşenler cinsinden yazılırsa ve (4.46) ifadesi kullanılırsa

$$\begin{aligned} [\Gamma_2, \Gamma_3] &= -\frac{1}{2}\{p_m[x_n, p_m]p_n + [x_n, p_m]p_m p_n + \frac{1}{16}x_n x_s [p_n, x_s] + \frac{1}{16}x_n [p_n, x_s]x_s\} \\ &= -\frac{i}{2}\{2p_n p_n - \frac{2}{16}x_n x_n\} \\ &= i(-\mathbf{p}^2 + \frac{1}{16}\mathbf{r}^2) = i\Gamma_1 \end{aligned}$$

elde edilir. Son olarak üçüncü komütasyonu ise,

$$\begin{aligned} [\Gamma_3, \Gamma_1] &= [-(\mathbf{p}^2 + \frac{\mathbf{r}^2}{16}), (-\mathbf{p}^2 + \frac{\mathbf{r}^2}{16})] \\ &= 2[\frac{\mathbf{r}^2}{16} + \mathbf{p}^2] \\ &= \frac{1}{8}\{x_n p_m [x_n, p_m] + x_n [x_n, p_m]p_m + p_m [x_n, p_m]x_n + [x_n, p_m]p_m x_n\} \\ &= \frac{i}{8}\{2x_n p_n + 2p_n x_n\} \end{aligned}$$

olarak bulunur ve  $p_n x_n = x_n p_n - i\delta_{nn}$  ifadesi yukarıda kullanılırsa,

$$\begin{aligned} [\Gamma_3, \Gamma_1] &= \frac{i}{4}(x_n p_n + (x_n p_n - i\delta_{nn})) \\ &= \frac{i}{4}(2x_n p_n - i\delta_{nn}) \\ &= \frac{i}{2}(\mathbf{r}\mathbf{p} - \frac{iN}{2}) = i\Gamma_2 \end{aligned}$$

sonucu elde edilir. Schrödinger denkleminde, Hamilton işlemcisi yerine yazılırsa

$$\left(\frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{k}{2}\mathbf{r}^2\right)\psi = E\Psi$$

olur. Operatörlerin

$$\Gamma_1 + \Gamma_3 = -2\mathbf{p}^2, \quad \Gamma_1 - \Gamma_3 = \frac{\mathbf{r}^2}{8} \quad (4.121)$$

olması nedeniyle, Schrödinger denklemi

$$\left[\left(4k - \frac{1}{4m}\right)\Gamma_1 - \left(4k + \frac{1}{4m}\right)\Gamma_3 - E\right]\Psi = 0$$

olarak bulunur. Daha önceki gibi benzer işlemler yapılırsa

$$\left\{ \left[ \left(4k - \frac{1}{4m}\right) \cosh \theta - \left(4k + \frac{1}{4m}\right) \sinh \theta \right] \Gamma_1 + \left[ \left(4k - \frac{1}{4m}\right) \sinh \theta - \left(4k + \frac{1}{4m}\right) \cosh \theta \right] \Gamma_3 - E \right\} \tilde{\Psi} = 0$$

olur. Kesikli spektrumu elde etmek için  $\Gamma_1$ 'in katsayısı sıfır alınır,  $\theta$  döndürme açısı

$$\tanh \theta = -\frac{\left(4k - \frac{1}{4m}\right)}{\left(-4k - \frac{1}{4m}\right)}, \quad \cosh \theta = \frac{\left(-4k - \frac{1}{4m}\right)}{\sqrt{4\frac{k}{m}}} \quad (4.122)$$

olur. Yukardaki denklemde  $\tanh \theta$  yerine değeri yazılırsa

$$\left[4\frac{k}{m}\Gamma_3 - E\sqrt{4\frac{k}{m}}\right]\tilde{\Psi} = 0 \quad \text{veya} \quad \Gamma_3\tilde{\Psi} = E\sqrt{\frac{m}{4k}}\tilde{\Psi} \quad (4.123)$$

bulunur.  $\Gamma_3$ 'ün özdeğeri  $(-\phi + x)$  olması nedeniyle

$$E\sqrt{\frac{m}{4k}} = -\phi + x \quad (4.124)$$

elde edilir. Buradan  $E$  çekilirse

$$E = \sqrt{\frac{4k}{m}}(-\phi + x) \quad (4.125)$$

elde edilir. Burada  $k = m\omega^2$  olduğu için enerji spektrumu

$$E = 2\omega(-\phi + x) \quad (4.126)$$

olarak bulunur. Kasimir operatöründen

$$\begin{aligned} \Gamma^2 &= \left(\mathbf{p}^2 + \frac{\mathbf{r}^2}{16}\right)\left(\mathbf{p}^2 + \frac{\mathbf{r}^2}{16}\right) - \left(-\mathbf{p}^2 + \frac{\mathbf{r}^2}{16}\right)\left(-\mathbf{p}^2 + \frac{\mathbf{r}^2}{16}\right) - \frac{1}{4}\left(\mathbf{r}\mathbf{p} - \frac{iN}{2}\right)\left(\mathbf{r}\mathbf{p} - \frac{iN}{2}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(-\mathbf{r}\mathbf{p}\mathbf{r}\mathbf{p} + i(N-2)\mathbf{r}\mathbf{p} + \mathbf{r}^2\mathbf{p}^2\right) + \frac{1}{8}\mathbf{p}^2\mathbf{r}^2 - \frac{1}{8}\mathbf{p}^2\mathbf{r}^2 + \frac{2i}{4}\mathbf{r}\mathbf{p} + \frac{N^2}{16} \\ &= \frac{\mathbf{L}^2}{4} + \frac{1}{8}[\mathbf{p}^2, \mathbf{r}^2] + \frac{i}{2}\mathbf{r}\mathbf{p} + \frac{N^2}{16} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma^2 &= \frac{\mathbf{L}^2}{4} + \frac{1}{8}(p_n x_m [p_n, x_m] + p_n [p_n, x_m] x_m + x_m [p_n, x_m] p_n + [p_n, x_m] x_m p_n) \\ &\quad + \frac{i}{2} x_n p_n + \frac{N^2}{16} \\ &= \frac{\mathbf{L}^2}{4} + \frac{1}{8}(-2i p_n x_n - 2i x_n p_n) + \frac{i}{2} x_n p_n + \frac{N^2}{16} \\ &= \frac{\mathbf{L}^2}{4} - \frac{i}{4}(p_n x_n + x_n p_n) + \frac{i}{2} x_n p_n + \frac{N^2}{16} \end{aligned}$$

olur. Burada,  $p_n x_n = x_n p_n - i\delta_{nn} = x_n p_n - iN$  komütasyon ilişkisinden yararlanılır ve genelleştirilmiş açısal momentumun özdeğerlerinin  $\ell(\ell + 1)$  olduğu gözönüne alınırsa,

$$\begin{aligned} \Gamma^2 &= \frac{\mathbf{L}^2}{4} - \frac{i}{2} x_n p_n + \frac{i}{2} x_n p_n - \frac{N}{4} + \frac{N^2}{16} \\ &= \frac{\mathbf{L}^2}{4} - \frac{N}{4} + \frac{N^2}{16} \end{aligned}$$

elde edilir ve buradan

$$\Gamma^2 = \frac{\ell(\ell+1)}{4} - \frac{N}{4} + \frac{N^2}{16} \quad (4.127)$$

sonucu bulunur. Bu değer ile Kasimir operatörünün özdeğeri birbirine eşitlenirse

$$\phi(\phi+1) = \frac{\ell(\ell+1)}{4} - \frac{N}{4} + \frac{N^2}{16}$$

elde edilir. Bu ikinci dereceden denklemin kökleri,

$$\phi = -\left(\frac{\ell}{2} + \frac{N}{4}\right) \quad (4.128)$$

olarak bulunur.  $\phi$  kökü enerji spektrumunda yerine yazılırsa

$$E = \omega\left(n + \frac{N}{2}\right) \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (4.129)$$

sonucu bulunur. Burada  $n = \ell + 2x$ 'dir.

**Çözüm 2:**  $N$  boyut için momentum ve yer vektörü sırasıyla (4.44a) ve (4.44b) ile verilir. Operatör setini aşağıdaki gibi alalım.

$$\Gamma_1 = -\frac{1}{4}(p^2 - r^2) \quad \Gamma_2 = -\frac{1}{4}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} + \mathbf{r} \cdot \mathbf{p}) \quad \Gamma_3 = \frac{1}{4}(p^2 + r^2) \quad (4.130)$$

$$\begin{aligned} [\Gamma_1, \Gamma_2] &= \left[-\frac{1}{4}(p^2 + r^2), -\frac{1}{4}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} + \mathbf{r} \cdot \mathbf{p})\right] \\ &= \frac{1}{16} \left\{ [p^2, \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}] + [P^2, \mathbf{r} \cdot \mathbf{p}] - [r^2, \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}] - [r^2, \mathbf{r} \cdot \mathbf{p}] \right\} \\ &= -\frac{i}{16} \left\{ p_n p_n + p_n p_n + p_m p_m + p_m p_m + x_\nu x_\nu + x_\nu x_\nu + x_l x_l + x_l x_l \right\} \\ &= -i \frac{1}{4}(p^2 + r^2) = -i\Gamma_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\Gamma_2, \Gamma_3] &= \left[ -\frac{1}{4}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} + \mathbf{r} \cdot \mathbf{p}), \frac{1}{4}(p^2 + r^2) \right] \\
&= -\frac{1}{16} \left\{ [\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} + p^2] + [\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} + r^2] + [\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}, p^2] + [\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}, r^2] \right\} \\
&= -\frac{1}{16} \left\{ [p_n x_n, p_m p_m] + [p_r x_r, x_s x_s] + [x_\nu p_\nu, p_\mu p_\mu] + [x_k p_k, x_l x_l] \right\} \\
&= -i \frac{1}{4} (p^2 - r^2) = i\Gamma_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\Gamma_3, \Gamma_1] &= \left[ \frac{1}{4}(p^2 + r^2), -\frac{1}{4}(p^2 - r^2) \right] \\
&= -\frac{1}{16} \left\{ -[p^2, r^2] + [r^2, p^2] \right\} \\
&= -\frac{1}{8} \left\{ x_n p_m (i\delta_{nm}) + x_n (i\delta_{nm}) p_m + p_m (i\delta_{nm}) x_n + (i\delta_{nm}) p_m x_n \right\} \\
&= -\frac{i}{8} \left\{ 2x_n p_n + 2p_m x_m \right\} \\
&= -i \frac{1}{4} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{p} + \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) = i\Gamma_2
\end{aligned}$$

sonucu elde edilir. Görüldüğü gibi seçilen operatör seti  $so(2, 1)$  cebirini sağlamaktadırlar. Şimdi, özdeğer denklemini çözelim.

$$\left( \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{k}{2} \mathbf{r}^2 \right) \psi = E \Psi \quad \text{veya} \quad \left( \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{k}{2} \mathbf{r}^2 - E \right) \Psi = 0 \quad (4.131)$$

bulunur. Operatörlerin

$$\frac{1}{2} r^2 = \Gamma_1 + \Gamma_3 \quad \frac{1}{2} p^2 = \Gamma_3 - \Gamma_1 \quad (4.132)$$

olması nedeniyle Shrödinger denklemide Hamilton işlemcisi yerine yazılırsa ve (4.132)'de yerine yazılırsa

$$\left[ \Gamma_3 \left( \frac{1}{m} + k \right) + \Gamma_1 \left( k - \frac{1}{m} \right) - E \right] \Psi = 0$$

olur. Burada (3.120) ve (3.121) ifadeleri kullanılırsa

$$\left\{ \left[ \left( k + \frac{1}{m} \right) \sinh \theta + \left( k - \frac{1}{m} \right) \cosh \theta \right] \Gamma_1 + \left[ \left( k + \frac{1}{m} \right) \cosh \theta + \left( k - \frac{1}{m} \right) \sinh \theta \right] \Gamma_3 - E \right\} \tilde{\psi} = 0$$

elde edilir. Benzer işlemler yapılırsa, kesikli özdeğerlere sahip özdeğer spektrumunu veren  $\Gamma_2$  eksenini etrafındaki döndürme açıları için

$$\tan \theta = \frac{\left(k - \frac{1}{m}\right)}{\left(k + \frac{1}{m}\right)}, \quad \cosh \theta = \frac{k + \frac{1}{m}}{2\sqrt{\frac{k}{m}}} \quad (4.133)$$

bulunur. Bu değerler özdeğer denkleminde yerine yazılırsa

$$\left\{4\frac{k}{m}\Gamma_3 - 2\sqrt{\frac{k}{m}}E\right\}\tilde{\Psi} = 0 \quad \text{veya} \quad \Gamma_3\tilde{\Psi} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}E\tilde{\Psi} \quad (4.134)$$

ifadesi elde edilir. Temsil teorisinden (2.35) ile özdeğer denklemi karşılaştırılırsa ve

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}E = (-\phi + x) \quad (4.135)$$

buradan enerji çekilirse,

$$E = 2\omega(-\phi + x) \quad (x = 0, 1, 2, \dots) \quad (4.136)$$

olarak özdeğer spektrumu bulunur. Kasimir operatöründen  $\phi$ 'yi elde etmemiz gerekir.

$$\begin{aligned} \Gamma^2 &= \frac{1}{16}(p^2 + r^2)(p^2 + r^2) - \frac{1}{16}(p^2 - r^2)(p^2 - r^2) - \frac{1}{16}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} + \mathbf{r} \cdot \mathbf{p})(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} + \mathbf{r} \cdot \mathbf{p}) \\ &= \frac{1}{16}\left(2p^2r^2 + 2r^2p^2 - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}) - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{p})(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{p})(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p})\right) \end{aligned}$$

olur. Burada,  $\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{p} - Ni$  özelliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \Gamma^2 &= \frac{1}{16}\left(2p^2r^2 + 2r^2p^2 - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{p} - Ni)(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p} - Ni) - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{p} - Ni)\mathbf{r} \cdot \mathbf{p} \right. \\ &\quad \left. - \mathbf{r} \cdot \mathbf{p}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p} - Ni) - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{p})(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p})\right) \\ &= \frac{1}{16}\left(2p^2r^2 + 2r^2p^2 - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{p})(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}) + Nir \cdot \mathbf{p} + Nir \cdot \mathbf{p} + N^2 \right. \\ &\quad \left. - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{p})(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}) + Nir \cdot \mathbf{p} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{p})(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}) + Nir \cdot \mathbf{p} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{p})(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p})\right) \end{aligned}$$

bulunur. Sadeleştirmeler yapılırsa,

$$\begin{aligned} \Gamma^2 &= \frac{1}{16}\left(2p^2r^2 + 2r^2p^2 - 4(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p})(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}) + 4Ni(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}) + N^2\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(r^2p^2 + (N - 2)ir \cdot \mathbf{p} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{p})(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p})\right) + \frac{1}{16}\left(2p^2r^2 - 2r^2p^2 + 8ir \cdot \mathbf{p} + N^2\right) \end{aligned}$$

elde edilir.  $N$  boyutta açısıl momentum operatörünün (4.61) ifadesini burada kullanılırsa,

$$\Gamma^2 = \frac{\mathbf{L}^2}{4} + \frac{1}{8}[p^2, r^2] + \frac{1}{2}i\mathbf{r} \cdot \mathbf{p} + \frac{N^2}{16} \quad (4.137)$$

bulunur. Şimdi  $[p^2, r^2]$  komütasyonunu hesaplayalım:

$$\begin{aligned} [p^2, r^2] &= p_n x_m [p_n, x_m] + p_n [p_n, x_m] x_m + x_m [p_n, x_m] p_n + [p_n, x_m] x_m p_n \\ &= -i(2p_n x_n + 2x_n p_n) \\ &= -2i(x_m p_n - Ni + x_n p_n) \\ &= -4ix_n p_n - 2N \end{aligned}$$

elde edilir. Bu sonuç  $\Gamma^2$ 'de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \Gamma^2 &= \frac{\mathbf{L}^2}{4} + \frac{1}{8}(-4i(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}) - 2N) + \frac{1}{2}i\mathbf{r} \cdot \mathbf{p} + \frac{N^2}{16} \\ &= \frac{\mathbf{L}^2}{4} + \frac{N^2}{16} - \frac{N}{4} + \frac{1}{2}i(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p} - \mathbf{r} \cdot \mathbf{p}) \\ &= \frac{\mathbf{L}^2}{4} + \frac{N^2}{16} - \frac{N}{4} \end{aligned}$$

bulunur. Yine temsil teorisinden

$$\phi^2 + \phi - \frac{l(l + N - 2)}{4} - \frac{N^2}{16} + \frac{N}{4} = 0$$

denklemini bulunur. Buradan  $\phi$ ,

$$\phi = -\left(\frac{l}{2} + \frac{N}{4}\right) \quad (4.138)$$

olarak bulunur. Yerine yazılırsa,

$$E = \omega\left(n + \frac{N}{2}\right) \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (4.139)$$

elde edilir. Burada  $\ell = 0, 1, 2, \dots$  ve  $x = 0, 1, 2, \dots$  olur ve tamsayıları tek değişken olarak  $n = \ell + 2x = 0, 1, 2, \dots$  olarak alındı.

#### 4.2.6 $\frac{1}{r^2}$ Pertürbatif Potansiyelinin Harmonik Osilatör Spektrumuna Etkisi

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 + \frac{\beta}{r^2} \quad (4.140)$$

ile verilen Hamilton operatörü için özdeğer spektrumunu elde edelim. Bu Hamilton işlemcisi için operatör setini

$$\Gamma_1 = -\frac{1}{4}\left(P^2 - r^2 + \frac{2m\beta}{r^2}\right) \quad \Gamma_2 = -\frac{1}{2}\left(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p} - \frac{id}{2}\right) \quad \Gamma_3 = \frac{1}{4}\left(P^2 + r^2 + \frac{2m\beta}{r^2}\right) \quad (4.141)$$

olarak seçelim. Önce, bu operatörlerin  $so(2, 1)$  cebirini sağladığını gösterelim:

$$\begin{aligned} [\Gamma_1, \Gamma_3] &= \left[ -\frac{1}{4}\left(p^2 - r^2 + \frac{2m\beta}{r^2}\right), \frac{1}{4}\left(p^2 + r^2 + \frac{2m\beta}{r^2}\right) \right] \\ &= \frac{1}{8}\left(x_n p_m [x_n, p_m] + x_n [x_n, p_m] p_m + p_m [x_n, p_m] x_n + [x_n, p_m] p_m x_m\right) \\ &= \frac{1}{8}\left(2x_n p_n + 2x_n p_n - 2iN\right) \\ &= -i\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p} - \frac{iN}{2})\right] = -i\Gamma_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\Gamma_1, \Gamma_2] &= \left[ -\frac{1}{4}\left(p^2 - r^2 + \frac{2m\beta}{r^2}\right), -\frac{1}{2}\left(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p} - \frac{id}{2}\right) \right] \\ &= \frac{1}{8}\left\{ [p^2, \mathbf{r} \cdot \mathbf{p}] - [r^2, \mathbf{r} \cdot \mathbf{p}] + 2m\beta\left[\frac{1}{r^2}, \mathbf{r} \cdot \mathbf{p}\right] \right\} \\ &= \frac{1}{8}\left\{ -2ip_n p_n - 2ix_m x_m - i4m\beta\frac{x_n x_n}{r^4} \right\} \\ &= -i\frac{1}{4}\left(p^2 + r^2 + \frac{2m\beta}{r^2}\right) = -i\Gamma_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\Gamma_2, \Gamma_3] &= \left[ -\frac{1}{2}\left(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p} - \frac{id}{2}\right), \frac{1}{4}\left(p^2 - r^2 + \frac{2m\beta}{r^2}\right) \right] \\ &= -\frac{1}{8}\left\{ [\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}, p^2] + [\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}, r^2] + 2m\beta[\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}, \frac{1}{r^2}] \right\} \\ &= -\frac{1}{8}\left\{ +2ip_n p_n - 2ix_m x_m + 4m\beta i\frac{x_n x_n}{r^4} \right\} \\ &= -\frac{i}{4}\left(p^2 - r^2 + \frac{2m\beta}{r^2}\right) = i\Gamma_1 \end{aligned}$$

Görüldüğü gibi verilen operatör seti  $so(2, 1)$  cebirini sağlamaktadır. Şimdi, özdeğer denklemini çözelim.

$$\left( \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 + \frac{\beta}{r^2} - E \right) \Psi = 0 \quad (4.142)$$

Operatörlerin

$$\Gamma_1 + \Gamma_3 = \frac{r^2}{2}, \quad \Gamma_3 - \Gamma_1 = \frac{p^2}{2} + \frac{m\beta}{r^2} \quad (4.143)$$

olarak yazılabilmesi nedeniyle  $k = m\omega^2$  alınırsa,

$$\left[ \left( k - \frac{1}{m} \right) \Gamma_1 + \left( k + \frac{1}{m} \right) \Gamma_3 - E \right] \Psi = 0 \quad (4.144)$$

olarak elde edilir. Dönüşüm uygulanırsa ve benzer işlemler yapılırsa, sadeleştirmelerden sonra

$$\Gamma_3 \tilde{\psi} = \frac{E}{2\sqrt{\frac{k}{m}}} \tilde{\psi} \quad (4.145)$$

olur. Bu özdeğer  $(-\phi + x)$  özdeğerine eşit olacağı için

$$E = 2\omega(-\phi + x) \quad (4.146)$$

elde edilir. Burada  $\phi$  niceliği (2.33) Kasimir operatörünün özdeğerinden bulunur. Şimdi  $\phi$  niceliğini bulalım:

$$\begin{aligned} \Gamma^2 &= \frac{1}{16} \left( p^2 + r^2 + \frac{2m\beta}{r^2} \right) \left( p^2 + r^2 + \frac{2m\beta}{r^2} \right) - \frac{1}{16} \left( p^2 - r^2 + \frac{2m\beta}{r^2} \right) \left( p^2 - r^2 + \frac{2m\beta}{r^2} \right) \\ &= -\frac{1}{4} \left( \mathbf{r} \cdot \mathbf{p} - \frac{iN}{2} \right) \left( \mathbf{r} \cdot \mathbf{p} - \frac{iN}{2} \right) \\ &= \frac{1}{8} p^2 r^2 + \frac{1}{8} r^2 p^2 + \frac{m\beta}{2} - \frac{1}{4} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{p})^2 + \frac{iN}{4} \mathbf{r} \cdot \mathbf{p} + \frac{N^2}{16} \\ &= \frac{1}{4} \left( -(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p})^2 + i(N-2) \mathbf{r} \cdot \mathbf{p} + r^2 p^2 \right) + \frac{1}{8} (p^2 r^2 - r^2 p^2) + \frac{1}{2} i \mathbf{r} \cdot \mathbf{p} + \frac{m\beta}{2} + \frac{N^2}{16} \\ &= \frac{\mathbf{L}^2}{4} + \frac{1}{8} [p^2, r^2] + \frac{1}{2} i \mathbf{r} \cdot \mathbf{p} + \frac{m\beta}{2} + \frac{N^2}{16} \end{aligned}$$

olarak bulunur. Burada

$$[p^2, r^2] = -2i(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}) - 2i(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}) = -2i(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p} + \mathbf{r} \cdot \mathbf{p} + iN)$$

ifadesi yerine yazılırsa ve  $\mathbf{L}^2$ 'nin özdeğerinin  $\ell(\ell + N - 2)$  olduğu dikkate alınırsa

$$\Gamma^2 = \frac{\ell(\ell + N - 2)}{4} + \frac{N^2}{16} + \frac{N}{4} + \frac{m\beta}{2} \quad (4.147)$$

bulunur. Böylece,  $\phi$

$$\phi^2 + \phi - \frac{\ell(\ell + N - 2)}{4} - \frac{N^2}{16} - \frac{N}{4} - \frac{m\beta}{2} = 0$$

denkleminde hesaplanabilir.  $E$ 'nin kesikli pozitif özdeğerleri için  $\phi$ 'nin negatif olan kökü,

$$\phi = -\frac{1}{2} \left( 1 + \sqrt{\left( \ell + \frac{N}{2} - 1 \right)^2 + 2m\beta} \right) \quad (4.148)$$

olarak bulunur. Bu kök değerini (4.193)'da yerine yazılırsa,

$$E = \omega \left( 1 + 2x + \sqrt{\left( \ell + \frac{N-2}{2} \right)^2 + 2m\beta} \right) \quad (4.149)$$

sonucu bulunur. Burada,  $x = 0, 1, 2, \dots$  dur. (4.149)'da  $\beta = 0$  ve  $n = \ell + 2x$  olarak alınırsa harmonik osilatör için elde edilen çözüme indirgenir.

## 5. SONUÇ VE TARTIŞMA

Bu çalışmada ilk olarak üç parametrelî Lie gruplarının temsillerinin oluşturulması konu üzerinde duruldu. Ayrıca sonlu, sonsuz; pozitif veya negatif bölgelerdeki durumlar için Clebsch-Gordan katsayıları araştırılırken matematiksel işlemler sonucu farklı yapıda yazılabildikleri görüldü. Elde edilen sonuçlardan daha kullanışlı yapılara ulaşabileceği söucuna varılmıştır. Bu çalışmalarda, kullanılan kısaltmalar işlemlerde zamandan kazanç sağlayacağı için çok önemlidir.

Çalışmanın ikinci kısmında, Schrödinger denkleminin cebrik bir yöntem olan Spektrum Üretme Cebri (SGA) ile çözülebileceği gösterilmeye çalışılmıştır. Bu yöntemde Hamilton işlemcisinin,  $so(2, 1)$  cebriini sağlayacak operatör lerin toplamı biçiminde yazılabilmesine dikkat edilmiş tir. Altı çeşit Hamilton operatörü için elde edilen enerji spektrumlarının, literatürde bulunan sonuçlar ile uyum içinde olduğu görülmüştür.

Hamilton işlemcisini, cebri sağlayan operatörler cinsinden yazmak zorunda olmamız, her Hamilton işlemcisi için enerji spektrumunu bulamama ihtimalini ortaya koymaktadır. Çünkü karmaşık bir Hamilton işlemcisi için Schrödinger denklemini  $so(2, 1)$  cebriini sağlayan operatörlerin toplamı cinsinden yazmak zorlaşacaktır. Bu nedenle, cebir yöntemi ile her Hamilton işlemcisi çözmek mümkün olmayabilir.

## KAYNAKLAR

- ALDROVANDI, R., AND FERREIRA, P. L., 1969.** Non-Invariance Groups for Quantum Mechanical Systems. *Lett. Nuovo Cimento*, 1, 6, 317-320.
- BIEDENHARN, L. C., AND VAN DAM, H., 1965.** Quantum Theory of Angular Momentum. Academic Press, 332p, New York, USA.
- BARGMANN, V., 1962.** On the Representations of the Rotation Group. *Rev. Mod. Phys.*, 34, 829.
- BARUT, A.O., AND FRONSDAL, C., 1965.** On Non-Compact Groups II. Representations of the 2+1 Lorentz Group. *Proc. Roy. Soc.*, A287, 532-548.
- BARUT, A.O., AND BORNZIN, G. L., 1971.**  $so(4,2)$  Formulation of the Symmetry Breaking in Relativistic Kepler Problems with or without Magnetic Charges. *J. Math. Phys.*, 12, 5, 841-846.
- CORDERO, P., 1970.** On the Algebraic Treatment of the H Atom and Harmonic Oscillator with an Extra Cubic Force. *Lett. Nuovo Cimento*, IV, 4, 164-166.
- CORDERO, P., AND HOJMAN, S., 1970.** Algebraic Solution of a Short-Range Potential Problem. *Lett. Nuovo Cimento*, IV, 24, 1123-1124.
- CORDERO, P., AND GHIRARDI, G. C., 1971.** Search for Quantum Systems with a Given Spectrum-Generating Algebra; Detailed Study of the Case of  $so(2,1)$ . *Nuovo Cimento*, 2A, 1, 217-236.
- CORDERO, P., AND HOJMAN, S., FURLAN, P., AND GHIRARDI, G. C., 1971.** Algebraic Treatment of Non-Relativistic and Relativistic Quantum Equations and its Relation to the Theory of Differential Equations. *Nuovo Cimento*, 3A, 4, 807-820.
- ECKART, C., 1930.** The Application of Group Theory to the Quantum Dynamics of Monoatomic Systems. *Rev. Mod. Phys.*, 2, 305.

- EDMONDS A. R., 1957.** Angular Momentum in Quantum Mechanics, Princeton University Press, 146p, Princeton, USA.
- HOLMAN, W. J., AND BIEDENHARN, L. C., 1966.** Complex Angular Momenta and the Groups  $SU(1,1)$  and  $SU(2)$ . *Ann. Phys.*, 39, 1.
- HOLMAN, W. J., AND BIEDENHARN, L. C., 1968.** A General Study of the Wigner Coefficients of  $SU(1,1)$ . *Ann. Phys.*, 47, 205.
- INFELD, L., AND HULL, T. E., 1951.** The Factorization Method. *Rev. Mod. Phys.*, 23, 1, 21-68.
- JUCYS, A. P., AND BANDZAITIS, A. A., 1965.** The Theory of Angular Momentum in Quantum Mechanics. Mintis, 463p, Vilnius, Russia.
- LANIK, J., 1968.** Broken Symmetry and Non-Invariance Groups. *Nucl. Phys.*, B5, 523-528.
- MERZBACHER, E., 1970.** Quantum Mechanics, 2nd ed., Wiley, 635p, New York, USA.
- PATERA, J., 1970.** Universal Method for Computing Clebsch-Gordan Coefficients of Semisimple Lie Groups. Centre de Recherches Mathematiques, Universite de Montreal, Report CRM-58.
- PATERA, J., AND SANKOFF, D., 1972.** Branching Rules for Representations of Simple Lie Algebras. Centre de Recherches Mathematiques, Universite de Montreal, Report CRM-167.
- ROTENBERG, M., BIVINS, R., METROPOLIS, N., AND WOOTEN, J. K., 1959.** 3-j and 6-j Symbols. Technology Press, 498p, Cambridge, Mass., England.
- SCHRODINGER, B. G., 1940.** *Proc. Roy. Irish. Acad.*, A46, 9.
- STEPHANI, H., 1989.** Differential Equations, Cambridge Univ. Press., 260p, Cambridge, England.
- SÜNEL, N., 1989.** Lie Cebirleriyle d Boyutta Özdeğer Problemlerinin Çözümü. *Fen Bil. Ens.*, Hacettepe Üniv., Ankara.

- WAENDEN, VAN DER L., 1933.** Die Gruppentheoretische Methode in der Quantenmechanik. Math. Z., 37, 446.
- WEYL H., 1931.** Gruppentheorie und Quantenmechanik. Hirzel, Leipzig; transl. by Robertson, H. P., The Theory of Groups and Quantum Mechanics. 1950 reprinted by Dover Pub., New York, USA .
- WEYL H., 1946.** The Classical Groups. Princeton University Press, Princeton, USA.
- WYBOURNE, B.G., 1970.** Symmetry Principle in Atomic Spectroscopy. Wiley, New York, USA.
- WYBOURNE, B.G., 1974.** Classical Group for Physicists. Wiley-Interscience Pub., New York, USA.
- YOUNG, K. C., 1970.** Unified Approach to the Representations of  $SU(2)$  and  $SU(1,1)$ . Can. J. Phys., 48, 1272.

**ÖZGEÇMİŞ****Kişisel Bilgiler**

**Adı Soyadı** : İbrahim ÇİNAR  
**Doğum Tarihi ve Yer** : 22.02.1982 Tokat  
**Medeni Hali** : Bekar  
**Yabancı Dili** : İngilizce  
**Telefon** : 0505 260 63 23  
**E-posta** : ibrahimcinar82@gmail.com

**Eğitim:**

<b>Derece</b>	<b>Eğitim Birimi</b>	<b>Mezuniyet Tarihi</b>
Yüksek Lisans	Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi	2009
Lisans	Marmara Üniversitesi (Atatürk Eğitim Fakültesi)	2005
Lise	Tokat Mehmet Akif Ersoy (Yabancı Dil Ağırlıklı) Lisesi	2000

**Hobiler**

Gezi, Sinema, Kitap okumak, Fizikle ilgili gelişmeleri takip etmek, Spor yapmak, Yüzmek,