İKİ DEĞİŞKENLİ *q*-MEYER-KÖNİG VE ZELLER OPERATÖRLERİNİN KOROVKİN TİPİ YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

Esma YILDIZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Mayıs 2009
ANKARA

Esma YILDIZ tarafından hazırlanan İKİ DEĞİŞKENLİ q-MEYER-KÖNİG VE ZELLER OPERATÖRLERİNİN KOROVKİN TİPİ YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ adlı bu tezin Yüksek Lisans olarak uygun olduğunu onaylarım.

Yrd. Doç. Dr. H. Gül İNCE İLARSLAN ……………………………….
Tez Danışmanı, Matematik Anabilim Dalı, G.Ü.

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Ahmet Ali ÖÇAL ……………………………….
Matematik Anabilim Dalı, G.Ü.

Yrd. Doç. Dr. H. Gül İNCE İLARSLAN ……………………………….
Matematik Anabilim Dalı, G.Ü.

Doç. Dr. Gülen TUNCA ……………………………….
Matematik Anabilim Dalı, A.Ü.

Tarih : 22/05/2009

Bu tez ile G.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Prof. Dr. Nail ÜNSAL ……………………………….
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Hata! Düzenleme alan kodlarından nesneler oluşturulamaz.

İKİ DEĞİŞKENLİ *q*-MEYER-KÖNİG VE ZELLER OPERATÖRLERİNİN KOROVKİN TİPİ YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

(Yüksek Lisans Tezi)

Esma YILDIZ

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Mayıs 2009

ÖZET

Bu çalışmada iki değişkenli *q*-Meyer-König ve Zeller operatörlerinin Korovkin tipi yaklaşım özellikleri incelenmiştir. Bu tez altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde, lineer pozitif operatörlerle ilgili genel bilgiler verilmiştir. Üçüncü bölümde, *q*-Meyer-König ve Zeller (*q*-MKZ) operatörlerinin bir genelleştirmesi tanıtılmış ve Heping tipli Korovkin teoremi yardımıyla düzgün yakınsaklığı incelenmiştir. Ayrıca bu operatörlerin yaklaşım hızları süreklilik modülü ve Lipschitz sınıfından fonksiyonlar yardımıyla elde edilmiştir. Dördüncü bölümde, iki değişkenli *q*-Meyer-König ve Zeller operatörleri tanıtılmıştır. Bu operatörlerin düzgün yakınsaklığı hem Heping tipli Korovkin teoremi hem de Volkov teoremi yardımıyla incelenmiştir. Daha sonra, iki değişkenli fonksiyonlar için süreklilik modülü ve Lipschitz sınıfından fonksiyonlar yardımıyla bu operatörlerin yaklaşım hızları elde edilmiştir. Beşinci bölümde, *q*-Meyer-König ve Zeller operatörlerinin, üçüncü bölümde verilen operatörleri de kapsayan, genel bir ailesi olan Ω_n operatörleri tanıtılmış ve bu operatörlerin düzgün yakınsaklığı Heping tipli Korovkin teoremi yardımıyla incelenmiştir. Bu operatörlerin yaklaşım hızları süreklilik modülü ve Lipschitz sınıfından fonksiyonlar yardımıyla elde edilmiştir. Ayrıca Ω_n operatörlerinin *r* yinci basamaktan genelleştirmesi incelenmiştir. Son bölümde, Ω_n operatörlerinin iki değişkenli genelleştirmesi olan Ω_{n_1,n_2} operatörleri oluşturularak, bu operatörlerin düzgün yakınsaklığı hem Heping tipli Korovkin teoremi hem de Volkov teoremi

yardımıyla incelenmiştir. Bu operatörlerin yaklaşım hızları iki değişkenli fonksiyonlar için süreklilik modülü ve Lipschitz sınıfından fonksiyonlar yardımıyla elde edilmiştir. Ayrıca bu operatörlerin r yinci basamaktan genelleştirmesi de verilmiştir.

Bilim kodu **: 204.1.095**

Anahtar Kelimeler **: Lineer Pozitif operatörler, Korovkin Teoremi, Heping Teoremi, Volkov Teoremi**

Sayfa Adedi **: 82**

Tez Yöneticisi **: Yrd. Doç. Dr. H. Gül İNCE İLARSLAN**

KOROVKİN-TYPE APPROXIMATION PROPERTIES OF BIVARIATE q-MEYER-KÖNİG AND ZELLER OPERATORS

(M.Sc.Thesis)

Esma YILDIZ

GAZİ UNIVERSITY

INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

May 2009

ABSTRACT

In this study, Korovkin-type approximation properties of bivariate q-Meyer-König and Zeller operators are investigated. This thesis consists of six chapters. The first chapter is devoted to introduction. In the second chapter, general informations about the linear positive operators are given. In the third chapter, a generalization of the Meyer-König and Zeller (MKZ) operators based on q-integers are introduced and uniform convergence of these operators is investigated with the help of Heping-type Korovkin theorem. In addition, the rates of approximation of these operators are obtained with the help of the modulus of continuity and the elements of Lipschitz class functionals. In the fourth chapter, a bivariate generalization of the Meyer-König and Zeller operators based on q-integers is introduced and uniform convergence of these operators is examined with the help of either Heping-type Korovkin theorem and or Volkov theorem. Moreover the rates of convergence these operators are given by means of the modulus of continuity and the elements of Lipschitz class functionals for bivariate functions. In the fifth chapter, the operators Ω_n which is the general family of Meyer-König and Zeller operators based on q-integers that include the operators given in the third chapter are introduced. At first, uniform convergence of these operators is investigated with the help of Heping-type Korovkin theorem. Later, the rates of convergence of these operator are given by means of modulus of continuity and the elements of Lipschitz class functionals. Also, an r-th order generalization of these

operators are given. In the last chapter, Ω_{n_1,n_2} operators being a bivariate generalization of a general sequence of Ω_n are constructed. Uniform convergence of these operators is investigated with the help of either Heping-type Korovkin theorem or Volkov theorem. In addition, the rate of convergence of these operators are obtained by means of modulus of continuity and the elements of Lipschitz class functionals for bivariate functions. Finally, the r-th order generalization of these operators are given.

Science Code : **204.1.095**

Key Words : **Linear Positive Operators, Korovkin Theorem, Heping Theorem, Volkov Theorem**

Page Number : **82**

Adviser : **Asst. Prof. H. Gül İNCE İLARSLAN**

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca beni yönlendiren danışmanım Yrd. Doç. Dr. H.Gül İNCE İLARSLAN a, beni attığım her adımda destekleyen ve yalnız bırakmayan aileme ve verdiği burs ile beni destekleyen TÜBİTAK a en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklama**
$L_n(f;x)$	$n\in \mathbb{N}$ olmak üzere bir operatörler dizisi
$B_n(f;x)$	Bernstein polinom dizisi
$M_n(f;x)$	Meyer-König ve Zeller operatörler dizisi
$M_n(f;q,x)$	Meyer-König ve Zeller operatörler dizisinin q-analoğu
$M_{n_1,n_2}(f;q_1,q_2,x,y)$	İki değişkenli Meyer-König ve Zeller operatörler dizisinin q-analoğu
$\Omega_n(f;q,x)$	q-Meyer-König ve Zeller operatörler dizisinin genelleştirilmiş bir ailesi
$\Omega_{n_1,n_2}(f;q_1,q_2,x,y)$	İki değişkenli q-Meyer-König ve Zeller operatörler dizisinin genelleştirilmiş bir ailesi
$C[a,b]$	$[a,b]$ kapalı aralığında tanımlı ve sürekli tüm reel değerli fonksiyonların uzayı
$C^2[a,b]$	$g,g',g''\in C[a,b]$ olan fonksiyon uzayı
(f_n)	$n\in \mathbb{N}$ olmak üzere bir fonksiyon dizisi
$f_n(x)\Rightarrow f(x)$	(f_n) fonksiyon dizisinin *f* fonksiyonuna düzgün yakınsaması
$\omega(f;\delta)$	*f* fonksiyonunun süreklilik modülü
$\omega(f;\delta_1,\delta_2)$	İki değişkenli *f* fonksiyonunun süreklilik modülü
$\Vert f\Vert_{C[a,b]}$	$x\in[a,b]$ için $\Vert f\Vert_{C[a,b]}=\max\limits_{a\le x\le b}\vert f(x)\vert$ ile tanımlanan norm
$\Vert g\Vert_{C^2[a,b]}$	$\Vert g\Vert_{C^2[a,b]}=\Vert g\Vert_{C[a,b]}+\Vert g'\Vert_{C[a,b]}+\Vert g''\Vert_{C[a,b]}$ ile tanımlanan norm
$K(f,\delta)$	*f* fonksiyonunun Peetre *K*-fonksiyoneli

$Lip_M(\alpha)$	f fonksiyonunun Lipschitz Sınıfı
$Lip_M(f,\alpha)$	İki değişkenli f fonksiyonunun Lipschitz Sınıfı
$B(\alpha,r)$	Beta fonksiyonu

1. GİRİŞ

1960 yılında Meyer-König ve Zeller tarafından

$$M_n\left(f;x\right)=\begin{cases}\sum\limits_{k=0}^{\infty} f\left(\dfrac{k}{n+k+1}\right)\dbinom{n+k}{k}x^k\left(1-x\right)^{n+1}, & eğer \quad 0\le x<1 \quad ise\\ f\left(1\right), & eğer \quad x=1 \quad ise\end{cases} \tag{1.1}$$

şeklinde tanımlanan $M_n : C\left[0,1\right]\rightarrow C\left[0,1\right]$ operatörleri *Meyer-König ve Zeller (MKZ) operatörleri* olarak bilinir [Meyer-König, 1960].

Eş 1.1 de $\dfrac{k}{n+k+1}$ yerine $\dfrac{k}{n+k}$ alınırsa, operatörler Cheney ve Sharma tarafından

$$M_n\left(f;x\right)=\begin{cases}\sum\limits_{k=0}^{\infty} f\left(\dfrac{k}{n+k}\right)\dbinom{n+k}{k}x^k\left(1-x\right)^{n+1}, & eğer \quad 0\le x<1 \quad ise\\ f\left(1\right), & eğer \quad x=1 \quad ise\end{cases} \tag{1.2}$$

şeklinde tanımlanan *Bernstein kuvvet serisi* ne indirgenir. Bu operatörlerin monotonluk özellikleri Cheney ve Sharma tarafından incelenmiştir [Cheney ve Sharma, 1964]. Diğer taraftan iki ve çok değişkenli lineer pozitif operatörler ilk kez Stancu tarafından tanımlanmıştır [Stancu, 1972].

Klasik Bernstein polinomlarının genelleştirilmiş q-analoğu ise Phillips tarafından tanımlanmıştır [Phillips, 1996]. Phillips, Bernstein operatörlerinin q-analoğu için Voronovskaja tipli bir asimtotik formül ve yakınsaklık hızını elde ederken, Goodman, Oruç ve Phillips Bernstein operatörlerinin q-analoğu için detaylı çalışmalar yapmışlardır [Goodman ve ark, 2006].

Barbosu, iki değişkenli Bernstein operatörlerinin q-analoğunun Stancu tipli bir genelleştirmesini tanımlamış ve bunu *iki değişkenli q-Bernstein operatörleri* olarak adlandırmıştır [Barbosu, 2000].

Meyer-König ve Zeller operatörlerinin q-analoğu ise Trif tarafından tanımlanmıştır. Ancak Trif'in tanımladığı operatörlerde ikinci moment için kapalı formül vermek mümkün olmamıştır [Trif, 2000]. Daha sonra Doğru ve Duman, q- Meyer-König ve Zeller operatörlerinin yeni bir genelleştirmesini tanımlamışlardır ve bu operatörler için yaklaşım özelliklerini çalışmışlardır. Bu operatörlerde ikinci moment için kapalı formül elde edilmiştir [Doğru ve Duman, 2006]. Doğru ve Gupta ise Doğru ve Duman tarafından verilen q-Meyer-König ve Zeller operatörlerinin iki değişkenli bir genelleştirmesini tanımlayarak, bu operatörlerin yaklaşım özelliklerini hem Volkov tarafından verilen iki değişkenli fonksiyonlar için Korovkin teoremi [Volkov, 1957] hem de Heping tipli Korovkin teoremi [Heping, 2005] yardımıyla incelemişlerdir [Doğru ve Gupta, 2006].

Son olarak, Özarslan ve Duman tarafından q-Meyer-König ve Zeller operatörlerinin genel bir ailesi verilmiştir ve bu operatörlerin yaklaşım özellikleri incelenmiştir [Özarslan ve Duman, 2008].

Korovkin tipli yaklaşım teoremi, lineer pozitif operatörler dizisinin bir f fonksiyonuna yaklaşım problemiyle ilgilenen iyi kurulmuş bir çalışma alanıdır. Son zamanlarda bu teorinin sadece klasik yaklaşım teorisinde değil, ayrıca fonksiyonel analiz, harmonik analiz, ölçü teorisi ve olasılık teorisi alanlarındaki faydalı bağlantıları Altomare ve Campiti tarafından verilmiştir [Altomare ve Campiti, 1994].

2. TEMEL KAVRAMLAR

Tanım 2.1:

X ve Y iki fonksiyon uzayı olsun. Eğer X den alınan herhangi bir f fonksiyonuna Y de bir g fonksiyonu karşılık getiren bir L kuralı varsa buna X *uzayında bir operatördür* denir ve $L(f;x)=g(x)$ biçiminde gösterilir.

Burada $L(f;x)=L(f(t);x)$ olmak üzere L operatörü f fonksiyonunun bağlı olduğu t değişkenine göre uygulanmaktadır. Sonuç ise x değişkenine bağlı bir fonksiyondur. Bundan dolayı x değişkeni L işleminde sabit gibidir ve $L(f(x);x)=f(x)L(1;x)$ yazılabilir.

Tanım 2.2:

X ve Y lineer fonksiyon uzayları olmak üzere, $L: X \to Y$ şeklinde tanımlı L operatörünü göz önüne alalım. Eğer her $f,g \in X$ ve $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ için

$$L(\alpha f+\beta g;x)=\alpha L(f;x)+\beta L(g;x)$$

koşulu sağlanıyorsa, bu durumda L operatörüne *lineer operatör* denir.

Eğer bir L operatörü pozitif değerli fonksiyonu yine pozitif değerli bir fonksiyona dönüştürüyor ise; yani f bir fonksiyon ve L bir operatör olmak üzere

$$f \geq 0 \text{ için } L(f;x)\geq 0$$

oluyor ise, L operatörüne *pozitif operatör* denir.

Hem lineerlik hem de pozitiflik şartını sağlayan operatöre *lineer pozitif operatör* denir [Hacısalihoğlu ve Haciyev, 1995].

Lemma 2.1:

Lineer pozitif operatörler monoton artandır. Yani;

$$f \leq g \Rightarrow L(f) \leq L(g)$$

eşitsizliği sağlanır.

Lemma 2.2:

L bir lineer pozitif operatör ise bu durumda

$$\left|L(f)\right| \leq L(|f|)$$

eşitsizliği sağlanır.

Tanım 2.3:

$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $f_n(x)$ e bir *fonksiyon dizisi* denir ve (f_n) ile gösterilir.

Tanım 2.4:

$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $L_n(f;x)$ e bir *operatör dizisi* denir ve (L_n) ile gösterilir.

Tanım 2.5:

$[a,b]$ kapalı aralığı üzerinde sürekli ve reel değerli fonksiyonlardan oluşan kümeye $C[a,b]$ *fonksiyon uzayı* denir. Bu uzay

$$\|f\|_{C[a,b]} = \max_{a\le x\le b} |f(x)|$$

şeklinde tanımlanan $\|.\|_{C[a,b]}$ normu ile normlu bir uzaydır.

Tanım 2.6:

(f_n), $C[a,b]$ içinde bir fonksiyon dizisi olsun. Eğer her $x\in[a,b]$ için

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{C[a,b]} = \lim_{n\to\infty} \max_{a\le x\le b} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

sağlanıyorsa (f_n) fonksiyon dizisi $[a,b]$ kapalı aralığı üzerinde f fonksiyonuna *düzgün yakınsaktır* denir ve $f_n \Rightarrow f$ şeklinde gösterilir.

Çağdaş fonksiyonel analiz ve fonksiyonlar teorisinde yer alan lineer pozitif operatörlerle yaklaşım konusu son elli yıl içinde ortaya çıkan bir araştırma alanıdır.
Alman Matematikçi Weierstrass 1895 yılında sonlu aralıkta sürekli olan her fonksiyona bu aralıkta yakınsayan bir polinomun varlığını ispatlamıştır. 1912 yılında ise Rus Matematikçi S.N. Bernstein bu polinomu $x\in[0,1]$ için

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

şeklinde olduğunu ispatlamıştır [Lorentz, 1953].

1953 yılında P. P. Korovkin bu teoremi lineer pozitif operatörler için daha da geliştirerek, yaklaşım teorisinde kendi adıyla bilinen ve önemli bir yere sahip olan aşağıdaki teoremi vermiştir.

Teorem 2.1 (P. P. Korovkin Teoremi):

$f \in C[a,b]$ olsun. Eğer $L_n(f;x)$ lineer pozitif operatörler dizisi ve her $x \in [a,b]$ için

(i) $L_n(1,x) \Rightarrow 1$

(ii) $L_n(t;x) \Rightarrow x$

(iii) $L_n(t^2;x) \Rightarrow x^2$

koşullarını sağlıyorsa bu durumda $[a,b]$ kapalı aralığında $L_n(f) \Rightarrow f$ dir.

Tanım 2.7:

$f \in C[a,b]$ olsun. Herhangi bir $\delta > 0$ için

$$\omega(f;\delta) = \sup_{\substack{x,t \in [a,b] \\ |t-x| \le \delta}} |f(t) - f(x)| \qquad (2.1)$$

ile tanımlanan $\omega(f;\delta)$ ifadesine *f* fonksiyonunun *süreklilik modülü* denir

Lemma 2.3:

Süreklilik modülü aşağıdaki özellikleri sağlar.

(i) $\omega(f;\delta) \ge 0$,

(ii) $\delta_1 \le \delta_2$ ise $\omega(f;\delta_1) \le \omega(f;\delta_2)$,

(iii) $m \in \mathbb{N}$ için $\omega(f;m\delta) \le m\omega(f;\delta)$,

(iv) $\lambda \in \mathbb{R}^{+}$ için $\omega(f;\lambda\delta) \le (\lambda+1)\omega(f;\delta)$,

(v) $\lim\limits_{\delta \to 0^{+}} \omega(f;\delta) = 0$,

(vi) $\left|f(t)-f(x)\right| \le \omega(f;|t-x|)$,

(vii) $\left|f(t)-f(x)\right| \le \left(1+\dfrac{|t-x|}{\delta}\right)\omega(f;\delta)$.

Tanım 2.8:

$[a,b]$ kapalı aralığı üzerinde tanımlı reel değerli sürekli, birinci ve ikinci mertebeden türevleri de bu aralıkta sürekli fonksiyonların uzayı $C^2[a,b]$ ile gösterilir; yani

$$C^2[a,b] := \left\{ f \in C[a,b] : f', f'' \in C[a,b] \right\} \tag{2.2}$$

dir. $C^2[a,b]$ uzayı her $f \in C^2[a,b]$ için

$$\|f\|_{C^2[a,b]} = \|f\|_{C[a,b]} + \|f'\|_{C[a,b]} + \|f''\|_{C[a,b]} \quad . \tag{2.3}$$

normu ile *lineer normlu uzaydır* [Bleimann ve ark, 1980].

Tanım 2.9:

$0 < \alpha \le 1$ olmak üzere;

$$\left|f(t)-f(x)\right| \le M\,|t-x|^{\alpha} \tag{2.4}$$

koşulunu sağlayan fonksiyonlara *Lipschitz sınıfından fonksiyonlar*, M ye de *Lipschitz sabiti* denir ve $f \in Lip_M(\alpha)$ ile gösterilir.

Tanım 2.10:

(x_n) ve (y_n) herhangi iki dizi, $1<p$, $q<\infty$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olacak şekilde p ve q iki sayı olsun. Eğer $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p$ ve $\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^q$ serileri yakınsaksa,

$$\sum_{n=1}^{\infty}|x_n y_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^q\right)^{1/q} \tag{2.5}$$

eşitsizliğine *Hölder eşitsizliği* denir. Burada $p=q=2$ alınırsa, bu eşitsizlik *Cauchy-Schwarz eşitsizliği* olarak bilinir [Bayraktar, 2006].

Tanım 2.11: Her $x_1, x_2 \in [a,b]$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$f\left[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\right] \leq \lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$$

oluyorsa f *fonksiyonuna* $[a,b]$ kapalı aralığı üzerinde *konvekstir* denir

Teorem 2.2 (Banach-Steinhaus Teoremi):

X ve Y Banach uzayları, $L(X,Y)$ X den Y ye sürekli lineer operatörlerin kümesi ve (L_n) de $L(X,Y)$ uzayında bir dizi olsun. X uzayındaki her x için $(L_n(x))$ dizisi Y uzayında sınırlıysa ve X uzayında yoğun olan bir A kümesindeki her y noktası için $(L_n(y))$ dizisi Y uzayında yakınsaksa, bu durumda $\lim\limits_{n\to\infty} L_n = L$ olacak şekilde bir $L \in L(X,Y)$ dönüşümü vardır [Terzioğlu, 1998].

Tanım 2.12:

q pozitif bir reel sayı olsun. Herhangi bir negatif olmayan r tamsayısı için r sayısının q-analoğu

$$[r]_q = \begin{cases} \dfrac{1-q^r}{1-q}, & \textit{eğer} \quad q \neq 1 \quad \textit{ise} \\ r, & \textit{eğer} \quad q = 1 \quad \textit{ise} \end{cases} \tag{2.6}$$

olarak tanımlanır.

Ayrıca *q-faktöriyel* ve *q-binom katsayısı* sırasıyla $[r]_q!$ ve $\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_q$ ile gösterilir ve de

$$[r]_q! = \begin{cases} [1]_q [2]_q \dots [r]_q, & \textit{eğer} \quad r = 1,2,\dots \quad \textit{ise} \\ 1, & \textit{eğer} \quad r = 0 \quad \textit{ise} \end{cases} \tag{2.7}$$

$$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_q = \frac{[n]_q!}{[r]_q![n-r]_q!} \tag{2.8}$$

dir.

Eş 2.8 de $q = 1$ alındığında ifadenin binom katsayılarına indirgendiği Eş 2.6 dan açıktır. Ayrıca

$$\sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q x^k = \frac{1}{\prod_{s=0}^{n} \left(1-q^s x\right)}, \qquad |x|<1 \tag{2.9}$$

dir [Andrews ve ark, 1999].

3. *q*-MEYER-KÖNİG VE ZELLER OPERATÖRLERİ

3.1. *q*-Meyer-König ve Zeller Operatörlerinin Oluşturulması

Tanım 3.1.2:

$n\in\mathbb{N}$, $A\in(0,1)$, $q\in(0,1]$, $x\in[0,A]$ ve $f\in C[0,A]$ olsun.

$$M_n(f;q,x)=u_{n,q}(x)\sum_{k=0}^{\infty}f\left(\frac{q^n[k]_q}{[n+k]_q}\right)\begin{bmatrix}n+k\\k\end{bmatrix}_q x^k \tag{3.1}$$

şeklinde tanımlanan operatörlere *q-Meyer-König ve Zeller operatörleri (q-MKZ)* denir. Burada $u_{n,q}(x)=\prod_{s=0}^{n}(1-xq^s)$ dır [Doğru ve Duman, 2006].

q-Meyer-König ve Zeller operatörlerinin lineer ve pozitif olduğu gösterilebilir:

Lineerlik: $f,g\in C[0,A]$ ve $b,c\in\mathbb{R}$ olsun.

$$\begin{aligned}
M_n(bf+cg;q,x)&=u_{n,q}(x)\sum_{k=0}^{\infty}(bf+cg)\left(\frac{q^n[k]_q}{[n+k]_q}\right)\begin{bmatrix}n+k\\k\end{bmatrix}_q x^k\\
&=u_{n,q}(x)\sum_{k=0}^{\infty}\left[bf\left(\frac{q^n[k]_q}{[n+k]_q}\right)+cg\left(\frac{q^n[k]_q}{[n+k]_q}\right)\right]\begin{bmatrix}n+k\\k\end{bmatrix}_q x^k\\
&=bu_{n,q}(x)\sum_{k=0}^{\infty}f\left(\frac{q^n[k]_q}{[n+k]_q}\right)\begin{bmatrix}n+k\\k\end{bmatrix}_q x^k+cu_{n,q}(x)\sum_{k=0}^{\infty}g\left(\frac{q^n[k]_q}{[n+k]_q}\right)\\
&\quad\times\begin{bmatrix}n+k\\k\end{bmatrix}_q x^k\\
&=bM_n(f;q,x)+cM_n(g;q,x)
\end{aligned}$$

Pozitiflik: $f \in C[0,A]$ ve $f \geq 0$ olsun. $q \in (0,1]$, $x \in [0,A]$ için $u_{n,q}(x) \geq 0$ olup, *Tanım* 2.12 den $\begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q \geq 0$ olduğundan $M_n(f;q,x) \geq 0$ dır.

$q=1$ için q-Meyer-König ve Zeller operatörleri Eş 1.1 de tanımlı Meyer-König ve Zeller operatörlerine indirgenir. Eş 3.1 de $f\left(\frac{[k]_q}{[n+k]_q}\right)$ alınarak, q-Meyer-König ve Zeller operatörlerinin Trif tarafından elde edilen genelleştirmesi elde edilir [Trif, 2000].

3.2. *q*-Meyer-König ve Zeller Operatörlerinin Yaklaşım Özellikleri

İlk olarak, q-Meyer-König ve Zeller operatörlerinin yaklaşım özellikleri incelenirken kullanılacak olan bir *Lemma* verilecektir.

Lemma 3.2.1:

$n \in \mathbb{N}$, $q \in (0,1]$, $x \in [0,A]$ ve $e_i(t) = t^i$, $i = 0,1,2$ olsun. Eş 3.1 de verilen q-Meyer-König ve Zeller operatörleri için aşağıdaki ifadeler gerçeklenir [Doğru ve Duman, 2006].

i) $M_n(e_0(t);q,x) = 1$

ii) $M_n(e_1(t);q,x) = q^n x$

iii) $q^{2n}x^2 \leq M_n(e_2(t);q,x) \leq q^{2n+1}x^2 + \dfrac{q^{2n}x}{[n]_q}$

İspat:

i) $M_n(e_0(t);q,x) = u_{n,q}(x)\sum_{k=0}^{\infty}\begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q x^k$

olup, Eş 2.9 dan $M_n(e_0(t);q,x) = 1$ bulunur.

ii) $M_n\left(e_1(t);q,x\right)=u_{n,q}(x)\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{q^n[k]_q}{[n+k]_q}\begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q x^k$

$$=u_{n,q}(x)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{q^n[k]_q}{[n+k]_q}\frac{[n+k]_q!}{[k]_q![n]_q!}x^k$$

$$=u_{n,q}(x)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{q^n[n+k-1]_q!}{[k-1]_q![n]_q!}x^{k-1}x$$

$$=q^n x u_{n,q}(x)\sum_{k=1}^{\infty}\begin{bmatrix} n+k-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q x^{k-1}$$

$$=q^n x u_{n,q}(x)\sum_{k=0}^{\infty}\begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q x^k$$

$$=q^n x u_{n,q}(x)\frac{1}{u_{n,q}(x)}$$

olup, $M_n\left(e_1(t);q,x\right)=q^n x$ bulunur.

iii) Burada ispata geçmeden önce negatif olmayan bir $k\in\mathbb{Z}$ tam sayısı, bir $n\in\mathbb{N}$ doğal sayısı ve $q\in(0,1]$ için

$$[k]_q-1=q[k-1]_q \tag{3.2}$$

eşitliği ve

$$[n+k-1]_q\le[n+k]_q \tag{3.3}$$

$$[n]_q\le[n+k]_q \tag{3.4}$$

eşitsizliklerinin doğruluğu gösterilecektir.

$$[k]_q - 1 = \frac{1-q^k}{1-q} - 1 = \frac{1-q^k-1+q}{1-q} = \frac{q\left(1-q^{k-1}\right)}{1-q} = q[k-1]_q$$

dir. $q \in (0,1]$ için

$$q^{n+k} \leq q^{n+k-1} \Rightarrow -q^{n+k-1} \leq -q^{n+k}$$

olup, buradan

$$[n+k-1]_q = \frac{1-q^{n+k-1}}{1-q} \leq \frac{1-q^{n+k}}{1-q} = [n+k]_q$$

bulunur. Diğer yandan $[n]_q \leq [n+k]_q$ olduğu da benzer şekilde elde edilir.

$$\begin{aligned}
M_n\left(e_2(t);q,x\right) &= u_{n,q}(x)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{q^{2n}[k]_q^{\,2}}{[n+k]_q^{\,2}}\begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q x^k \\
&= q^{2n}u_{n,q}(x)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{[k]_q^{\,2}}{[n+k]_q^{\,2}}\frac{[n+k]_q!}{[k]_q![n]_q!}x^k \\
&= q^{2n}u_{n,q}(x)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{[k]_q}{[n+k]_q}\frac{[n+k-1]_q!}{[k-1]_q![n]_q!}x^k \\
&= q^{2n}u_{n,q}(x)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{[k]_q-1+1}{[n+k]_q}\frac{[n+k-1]_q!}{[k-1]_q![n]_q!}x^k \\
&= q^{2n}u_{n,q}(x)\left\{\sum_{k=2}^{\infty}\frac{[k]_q-1}{[k+n]_q}\frac{[k+n-1]_q!}{[k-1]_q![n]_q!}x^k + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{[n+k]_q}\right. \\
&\quad \left.\times\frac{[n+k-1]_q!}{[k-1]_q![n]_q!}x^k\right\} \qquad (3.5)
\end{aligned}$$

Eş 3.2, Eş 3.5 te kullanılırsa

$$M_n\left(e_2(t);q,x\right)=q^{2n}u_{n,q}(x)\left\{q\sum_{k=2}^{\infty}\frac{[k-1]_q}{[n+k]_q}\frac{[n+k-1]_q!}{[k-1]_q![n]_q!}x^k+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{[n+k]_q}\frac{[n+k-1]_q!}{[k-1]_q![n]_q!}x^k\right\}$$

$$=q^{2n}u_{n,q}(x)\left\{q\sum_{k=2}^{\infty}\frac{[n+k-1]_q}{[n+k]_q}\frac{[n+k-2]_q!}{[k-2]_q![n]_q!}x^{k-2}x^2+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{[n+k]_q}\right.$$

$$\left.\times\frac{[n+k-1]_q!}{[k-1]_q![n]!}x^k\right\} \tag{3.6}$$

elde edilir. Eş 3.3 ve Eş 3.4 ten

$$\frac{[n+k-1]_q}{[n+k]_q}\leq 1 \text{ ve } \frac{1}{[n+k]_q}\leq\frac{1}{[n]_q} \tag{3.7}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Eş 3.7, Eş 3.6 da kullanılırsa

$$M_n\left(e_2(t);q,x\right)\leq q^{2n}u_{n,q}(x)\left\{qx^2\sum_{k=2}^{\infty}\begin{bmatrix}n+k-2\\k-2\end{bmatrix}_q x^{k-2}+\frac{x}{[n]_q}\sum_{k=1}^{\infty}\begin{bmatrix}n+k-1\\k-1\end{bmatrix}_q x^{k-1}\right\}$$

$$=q^{2n}u_{n,q}(x)\left\{qx^2\sum_{k=0}^{\infty}\begin{bmatrix}n+k\\k\end{bmatrix}_q x^k+\frac{x}{[n]_q}\sum_{k=0}^{\infty}\begin{bmatrix}n+k\\k\end{bmatrix}_q x^k\right\}$$

bulunur. Eş 2.9 dan

$$M_n\left(e_2(t);q,x\right)\leq q^{2n+1}x^2+\frac{q^{2n}x}{[n]_q} \tag{3.8}$$

elde edilir.

Diğer taraftan Eş 3.6 düzenlenilirse

$$M_n\left(e_2(t);q,x\right)=u_{n,q}(x)\left\{q^{2n+1}x^2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{[n+k+1]_q}{[n+k+2]_q}\begin{bmatrix}n+k\\k\end{bmatrix}_q x^k\right.$$

$$+q^{2n}x\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{[n+k+1]_q}\begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q x^k\Bigg\} \tag{3.9}$$

olup, Eş 3.9 da

$$[n+k+1]_q=\frac{[n+k+2]_q-1}{q}$$

eşitliği kullanılırsa

$$M_n\left(e_2(t);q,x\right)=u_{n,q}(x)\left\{q^{2n+1}x^2\frac{1}{q}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{[n+k+2]_q-1}{[n+k+2]_q}+q^{2n}x\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{[n+k+1]_q}\right\}\begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q x^k \tag{3.10}$$

bulunur. $0\le x\le A<1$ için $x\ge x^2$, $[n+k+1]_q\le[n+k+2]_q$ olduğundan, Eş 3.10 dan

$$\begin{aligned} M_n\left(e_2(t);q,x\right) &\ge q^{2n}x^2u_{n,q}(x)\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{[n+k+2]_q}\right)+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{[n+k+2]_q}\right\}\begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q x^k \\ &= q^{2n}x^2u_{n,q}(x)\sum_{k=0}^{\infty}\begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q x^k \\ &= q^{2n}x^2 \end{aligned} \tag{3.11}$$

elde edilir. Bu durumda Eş 3.8 ve Eş 3.11 den

$$q^{2n}x^2\le M_n\left(e_2(t);q,x\right)\le q^{2n+1}x^2+\frac{q^{2n}x}{[n]_q}$$

olup, istenilen elde edilir.

Uyarı 3.2.1:

Eş 3.1 de $q \in (0,1]$ yerine $0 < q_n \leq 1$ olacak şekilde (q_n) dizisi

$$\lim_{n\to\infty} q_n^n = 1 \text{ ve } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{[n]_{q_n}} = 0 \tag{3.12}$$

şartlarını sağlayacak şekilde seçilsin. Bu durumda Eş 3.12 ve *Lemma* 3.2.1 (i), (ii) ve (iii) kullanılarak

$$\lim_{n\to\infty} \left\| M_n(e_i; q_n, .) - e_i \right\|_{C[0,A]} = 0, \qquad i = 0,1,2 \tag{3.13}$$

sonucu elde edilir. O zaman Eş 3.13 ve iyi bilinen Korovkin teoremi yardımıyla her $f \in C[0,A]$ için $(M_n(f; q_n, .))$ operatörler dizisi $[0,A]$ aralığında *f* ye düzgün yakınsaktır. Örneğin, $(q_n) = \left(e^{1/n} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \right)$ seçilirse Eş 3.12 sağlanır [Doğru ve Duman, 2006].

3.3. Korovkin Yaklaşımında Temel Bir Sonuç

Bu kısımda, Eş 3.1 de verilen operatörlerde *q* yerine $0 < q_n \leq 1$ için

$$\lim_{n\to\infty} q_n^n = b < 1 \text{ ve } \lim_{n\to\infty} q_n = 1 \tag{3.14}$$

şartını sağlayan bir (q_n) dizisi alındığında (M_n) operatörler dizisinin yaklaşım özelliklerinin hala elde edilip edilemeyeceği sorusuna yanıt aramaya çalışılacaktır.

$(q_n) = \left(1 - \frac{1}{n} \right)$ alınması durumunda $\lim_{n\to\infty} q_n^n = e^{-1}$ ve $\lim_{n\to\infty} q_n = 1$ olup, Eş 3.14 gerçeklenir.

Heping, herhangi bir lineer pozitif operatörler dizisi için aşağıdaki teoremi ispatlamıştır.

Teorem 3.3.1:

$C[0,1]$ üzerinde tanımlı bir (L_n) lineer pozitif operatörler dizisi aşağıdaki koşulları gerçeklesin:

(i) $(L_n(e_2))$ dizisi bir $L_\infty(e_2)$ fonksiyonuna $C[0,1]$ içinde yakınsaktır;
(ii) $x \in [0,1]$ ve konveks bir *f* fonksiyonu için $(L_n(f;x))$ artmayandır.

Bu durumda her $f \in C[0,1]$ için $\lim\limits_{n\to\infty} \left\| L_n(f) - L_\infty(f) \right\|_{C[0,1]} = 0$ olacak şekilde $C[0,1]$ üzerinde tanımlı bir L_∞ operatörü vardır [Heping, 2005].

Burada $\forall i = 0,1,2$ için $(L_n(e_i))$ dizisi $C[0,1]$ içinde yakınsak ise (fakat bu yakınsaklık e_i ye olmak zorunda değil), bu durumda *Teorem* 3.3.1 $(L_n(f))$ operatörler dizisinin yakınsaklığını garantiler.

Böylece Heping, (i) ve (ii) zayıf varsayımı altında bir $(L_n(f;x))$ lineer pozitif operatörler dizisinin bir $L_\infty(f;x)$ operatörüne yakınsadığını göstermiştir.

Şimdi, Doğru ve Gupta tarafından verilen aşağıdaki Heping tipli Korovkin teoremi verilebilir:

Teorem 3.3.2:

$C[0,A]$ üzerinde tanımlı bir (L_n) lineer pozitif operatörler dizisi aşağıdaki koşulları sağlasın:

(i) $\forall i = 1,2$ için $(L_n(e_i))$ dizisi bir $L_\infty(e_i)$ fonksiyonuna $C[0,A]$ içinde yakınsaktır;

(ii) $x \in [0, A]$, konveks ve artan bir *f* fonksiyonu için $(L_n(f;x))$ artmayandır.

Bu durumda her $f \in C[0,A]$ için $\lim_{n\to\infty} \|L_n(f) - L_\infty(f)\|_{C[0,A]} = 0$ olacak şekilde $C[0,A]$ üzerinde tanımlı bir L_∞ operatörü vardır [Doğru ve Gupta, 2006].

İspat:

Herhangi bir (L_n) lineer pozitif operatörler dizisi (i) ve (ii) yi gerçeklesin. Bu durumda herhangi bir *l* lineer fonksiyonu için

$$L_n(l) = L_m(l) \tag{3.15}$$

ve (L_n) operatörler dizisinin düzgün normu $\sup_{n\geq 1}\|L_n\|$ için

$$\sup_{n\geq 1}\|L_n\| \leq \sup_{n\geq 1}\|L_n(e_0)\|_{C[0,A]} = \|L_1(e_0)\|_{C[0,A]} < +\infty$$

gerçeklenir. $C^2[0,A]$ uzayı, $C[0,A]$ içinde yoğun olduğundan Banach-Steinhaus teoreminden, herhangi bir $f \in C^2[0,A]$ için $(L_n(f))$ operatörler dizisinin $C[0,A]$ içinde yakınsak olduğunu göstermek yeterlidir.

Herhangi bir $f \in C^2[0,A]$ için

$$g_1(x) = \frac{\|f\|_{C^2[0,A]}}{2}\left(x^2 + 2x\right) - f(x) \tag{3.16}$$

$$g_2(x) = \frac{\|f\|_{C^2[0,A]}}{2}\left(x^2 + 2x\right) + f(x) \tag{3.17}$$

fonksiyonları alınsın. g_1 ve g_2 artan, konveks ve lineerdir. Gerçekten

$$g_1'(x) = \|f\|_{C^2[0,A]}(x+1) - f'(x)$$
$$f'(x) \le \|f'\|_{C[0,A]} \le \|f\|_{C^2[0,A]}$$

olup, buradan

$$\|f\|_{C^2[0,A]}(x+1) - \|f\|_{C^2[0,A]} \le \|f\|_{C^2[0,A]}(x+1) - f'(x) = g_1'(x)$$

$$x\|f\|_{C^2[0,A]} \le g_1'(x)$$

bulunur. $x \in [0,A]$ olduğundan ve normun tanımından $g_1'(x) \ge 0$ dır. O halde g_1 artandır.

$$g_1''(x) = \|f\|_{C^2[0,A]} - f''(x)$$

olup,

$$f''(x) \le \|f''\|_{C[0,A]} \le \|f\|_{C^2[0,A]}$$

$$-\|f\|_{C^2[0,A]} \le -f''(x)$$
$$\|f\|_{C^2[0,A]} - \|f\|_{C^2[0,A]} \le \|f\|_{C^2[0,A]} - f''(x) = g_1''(x)$$
$$g_1''(x) \ge 0$$

bulunur. Buradan g_1 konvekstir.

Benzer şekilde

$$g_2'(x) = \|f\|_{C^2[0,A]}(x+1) + f'(x)$$

olup, f artan olduğundan ve normun tanımından $g_2'(x)\geq 0$ dır. O halde g_2 artandır. Ayrıca

$$g_2''(x)=\|f\|_{C^2[0,A]}+f''(x)$$

olup, f konveks olduğundan ve normun tanımından $g_2''(x)\geq 0$ dır.O halde g_2 konvekstir. Eş 3.16 dan

$$f(x)=\frac{\|f\|_{C^2[0,A]}}{2}\left(x^2+2x\right)-g_1(x)$$

yazılabilir. (ii) den her $n,p>0$ için

$$L_n(g_i;x)-L_{n+p}(g_i;x)\geq 0, \qquad i=1,2$$

olduğu bilinmektedir. Ayrıca

$$L_n(f;x)=\frac{\|f\|_{C^2[0,A]}}{2}\left\{L_n(e_2;x)+2L_n(e_1;x)\right\}-L_n(g_1;x)$$

$$L_{n+p}(f;x)=\frac{\|f\|_{C^2[0,A]}}{2}\left\{L_{n+p}(e_2;x)+2L_{n+p}(e_1;x)\right\}-L_{n+p}(g_1;x)$$

olduğundan

$$\left|L_n(f;x)-L_{n+p}(f;x)\right|=\left|\begin{array}{l}\frac{\|f\|_{C^2[0,A]}}{2}\left\{L_n(e_2;x)-L_{n+p}(e_2;x)+2\left(L_n(e_1;x)\right.\right.\\ \left.\left.-L_{n+p}(e_1;x)\right)\right\}-L_n(g_1;x)+L_{n+p}(g_1;x)\end{array}\right| \tag{3.18}$$

bulunur. Eş 3.18 de üçgen eşitsizliği kullanılır ve $x \in [0, A]$ için her iki tarafın maksimumu alınırsa

$$\begin{aligned}\left\| L_n(f) - L_{n+p}(f) \right\|_{C[0,A]} \leq \frac{\|f\|_{C^2[0,A]}}{2} \Big\{ & \left\| L_n(e_2) - L_{n+p}(e_2) \right\|_{C[0,A]} \\ & + 2 \left\| \left(L_n(e_1) - L_{n+p}(e_1) \right) \right\|_{C[0,A]} \Big\} \\ & + \left\| L_n(g_1) - L_{n+p}(g_1) \right\|_{C[0,A]} \end{aligned} \tag{3.19}$$

Eş 3.19 un sağ tarafındaki ifadeler Eş 3.15 ve (i) den sıfıra yakınsar. Bu durumda sıkıştırma teoreminden $\left(L_n(f) \right)$ operatörler dizisi $C[0, A]$ içinde bir Cauchy dizisidir ve dolayısıyla $C[0, A]$ içinde yakınsaktır. Böylece herhangi bir $f \in C[0, A]$ için $\lim\limits_{n \to \infty} \left\| L_n(f) - L_\infty(f) \right\|_{C[0,A]} = 0$ olacak şekilde $C[0, A]$ üzerinde tanımlı bir L_∞ operatörü vardır.

Benzer şekilde Eş 3.17 den

$$f(x) = -\frac{\|f\|_{C^2[0,A]}}{2} \left(x^2 + 2x \right) + g_2(x)$$

yazılabilir. Bu durumda da yukarıda verilen ispat geçerlidir.

Şimdi daha sonra verilecek teoremin ispatında kullanılacak olan bir *Lemma* aşağıda verilecektir.

Lemma 3.3.1:

$$\alpha := \frac{[n+1]_q}{[n+k+1]_q} \text{ ve } \beta := \frac{q^{n+1}[k]_q}{[n+k+1]_q} \tag{3.20}$$

olsun. Bu durumda

$$\alpha + \beta = 1 \text{ ve } \frac{[k]_q}{[n+k+1]_q} = \alpha \frac{[k]_q}{[n+k]_q} + \beta \frac{[k-1]_q}{[n+k]_q}$$

eşitlikleri sağlanır [Doğru ve Gupta, 2006].

İspat:

Negatif olmayan bir tamsayının q-analoğundan

$$\begin{aligned} [n+1]_q + q^{n+1}[k]_q &= \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1}\frac{1-q^k}{1-q} \\ &= \frac{1-q^{n+1}+q^{n+1}-q^{n+k+1}}{1-q} \\ &= \frac{1-q^{n+k+1}}{1-q} = [n+k+1]_q \end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan

$$[n+1]_q + q^{n+1}[k]_q = [n+k+1]_q \tag{3.21}$$

bulunur. Eş 3.21 de k yerine k-1 yazılırsa

$$[n+1]_q + q^{n+1}[k-1]_q = [n+k]_q \tag{3.22}$$

elde edilir. Eş 3.22 nin her iki tarafı $\dfrac{[k]_q}{[n+k]_q\,[n+k+1]_q}$ ile çarpılırsa

$$\frac{[n+1]_q\,[k]_q}{[n+k]_q\,[n+k+1]_q}+\frac{q^{n+1}\,[k-1]_q\,[k]_q}{[n+k]_q\,[n+k+1]_q}=\frac{[n+k]_q\,[k]_q}{[n+k]_q\,[n+k+1]_q}$$

olup, burada Eş 3.20 kullanılırsa

$$\frac{[k]_q}{[n+k+1]_q}=\alpha\frac{[k]_q}{[n+k]_q}+\beta\frac{[k-1]_q}{[n+k]_q}$$

eşitliği gerçeklenir.

Teorem 3.3.3:

$f:[0,A]\to\mathbb{R}^+$ konveks ve artan bir fonksiyon olsun. Bu durumda $q\in(0,1]$ ve $x\in[0,A]$ için $\left(M_n(f;q,x)\right)$ dizisi n ye göre artmayandır [Doğru ve Gupta, 2006].

İspat:

$$\begin{aligned}M_n(f,q;x)-M_{n+1}(f,q;x)&=\prod_{s=0}^{n}(1-q^s x)\sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{q^n\,[k]_q}{[n+k]_q}\right)\begin{bmatrix} n+k \\ k\end{bmatrix}_q x^k\\&\quad-\prod_{s=0}^{n+1}(1-q^s x)\sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{q^{n+1}\,[k]_q}{[n+k+1]_q}\right)\begin{bmatrix} n+k+1 \\ k\end{bmatrix}_q x^k\end{aligned}\tag{3.23}$$

ve

$$\prod_{s=0}^{n+1}\left(1-q^{s}x\right)=\prod_{s=0}^{n}\left(1-q^{s}x\right)\left(1-q^{n+1}x\right)=\prod_{s=0}^{n}\left(1-q^{s}x\right)-q^{n+1}x\prod_{s=0}^{n}\left(1-q^{s}x\right) \qquad (3.24)$$

yazılabilir. Eş 3.24, Eş 3.23 te yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
M_{n}\left(f,q;x\right)-M_{n+1}\left(f,q;x\right)=&\prod_{s=0}^{n}\left(1-q^{s}x\right)\sum_{k=0}^{\infty}f\left(\frac{q^{n}\left[k\right]_{q}}{\left[n+k\right]_{q}}\right)\begin{bmatrix}n+k\\k\end{bmatrix}_{q}x^{k}\\
&-\prod_{s=0}^{n}\left(1-q^{s}x\right)\sum_{k=0}^{\infty}f\left(\frac{q^{n+1}\left[k\right]_{q}}{\left[n+k+1\right]_{q}}\right)\begin{bmatrix}n+k+1\\k\end{bmatrix}_{q}x^{k}\\
&+q^{n+1}\prod_{s=0}^{n}\left(1-q^{s}x\right)\sum_{k=0}^{\infty}f\left(\frac{q^{n+1}\left[k\right]_{q}}{\left[n+k+1\right]_{q}}\right)\begin{bmatrix}n+k+1\\k\end{bmatrix}_{q}x^{k+1}\\
=&\prod_{s=0}^{n}\left(1-q^{s}x\right)\sum_{k=1}^{\infty}f\left(\frac{q^{n}\left[k\right]_{q}}{\left[n+k\right]_{q}}\right)\begin{bmatrix}n+k\\k\end{bmatrix}_{q}x^{k}+\prod_{s=0}^{n}\left(1-q^{s}x\right)f\left(0\right)\\
&-\prod_{s=0}^{n}\left(1-q^{s}x\right)\sum_{k=1}^{\infty}f\left(\frac{q^{n+1}\left[k\right]_{q}}{\left[n+k+1\right]_{q}}\right)\begin{bmatrix}n+k+1\\k\end{bmatrix}_{q}x^{k}\\
&-\prod_{s=0}^{n}\left(1-q^{s}x\right)f\left(0\right)\\
&+q^{n+1}\prod_{s=0}^{n}\left(1-q^{s}x\right)\sum_{k=1}^{\infty}f\left(\frac{q^{n+1}\left[k-1\right]}{\left[n+k\right]}\right)\begin{bmatrix}n+k\\k-1\end{bmatrix}_{q}x^{k}\\
=&\prod_{s=0}^{n}\left(1-q^{s}x\right)\sum_{k=1}^{\infty}\left\{f\left(\frac{q^{n}\left[k\right]_{q}}{\left[n+k\right]_{q}}\right)\begin{bmatrix}n+k\\k\end{bmatrix}_{q}\right.\\
&-f\left(\frac{q^{n+1}\left[k\right]_{q}}{\left[n+k+1\right]_{q}}\right)\begin{bmatrix}n+k+1\\k\end{bmatrix}_{q}\\
&\left.+q^{n+1}f\left(\frac{q^{n+1}\left[k-1\right]_{q}}{\left[n+k\right]_{q}}\right)\begin{bmatrix}n+k\\k-1\end{bmatrix}_{q}\right\}x^{k} \qquad (3.25)
\end{aligned}$$

elde edilir. q-kombinasyon tanımından

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q &= \begin{bmatrix} n+k+1 \\ k \end{bmatrix}_q \frac{[n+1]_q}{[n+k+1]_q} \\ \begin{bmatrix} n+k \\ k-1 \end{bmatrix}_q &= \begin{bmatrix} n+k+1 \\ k \end{bmatrix}_q \frac{[k]_q}{[n+k+1]_q} \end{aligned} \tag{3.26}$$

sağlanır. Eş 3.26, Eş 3.25 te kullanılırsa

$$\begin{aligned} M_n(f,q;x) - M_{n+1}(f,q;x) = \prod_{s=0}^{n}(1-q^s x)\sum_{k=1}^{\infty}\Bigg\{ & \frac{[n+1]_q}{[n+k+1]_q} f\left(\frac{q^n [k]_q}{[n+k]_q}\right) \\ & + q^{n+1}\frac{[k]_q}{[n+k+1]_q} f\left(\frac{q^{n+1}[k-1]_q}{[n+k]_q}\right) \\ & - f\left(\frac{q^{n+1}[k]_q}{[n+k+1]_q}\right)\Bigg\} \begin{bmatrix} n+k+1 \\ k \end{bmatrix}_q x^k \end{aligned} \tag{3.27}$$

elde edilir. f artan olduğundan herhangi bir $q \in (0,1]$ için

$$f\left(\frac{q^{n+1}[k]_q}{[n+k]_q}\right) \le f\left(\frac{q^n [k]_q}{[n+k]_q}\right) \tag{3.28}$$

sağlanır. Eş 3.28, Eş 3.27 de kullanılırsa

$$\begin{aligned} M_n(f,q;x) - M_{n+1}(f,q;x) \ge \prod_{s=0}^{n}(1-q^s x)\sum_{k=1}^{\infty}\Bigg\{ & \frac{[n+1]_q}{[n+k+1]_q} f\left(\frac{q^{n+1} [k]_q}{[n+k]_q}\right) \\ & + q^{n+1}\frac{[k]_q}{[n+k+1]_q} f\left(\frac{q^{n+1}[k-1]_q}{[n+k]_q}\right) \end{aligned}$$

$$-f\left(\frac{q^{n+1}[k]_q}{[n+k+1]_q}\right)\Bigg\}\begin{bmatrix} n+k+1 \\ k \end{bmatrix}_q x^k \qquad (3.29)$$

yazılabilir. Eş 3.29 da $x_1=\frac{q^{n+1}[k]_q}{[n+k]_q}$, $x_2=\frac{q^{n+1}[k-1]_q}{[n+k]_q}$, $\alpha:=\frac{[n+1]_q}{[n+k+1]_q}$ ve $\beta:=\frac{q^{n+1}[k]_q}{[n+k+1]_q}$ alınırsa *Lemma* 3.3.1 den

$$M_n(f,q;x)-M_{n+1}(f,q;x)\geq\prod_{s=0}^{n}\left(1-q^s x\right)\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\alpha f(x_1)+\beta f(x_2)-f(\alpha x_1+\beta x_2)\right\}$$
$$\times\begin{bmatrix} n+k+1 \\ k \end{bmatrix}_q x^k$$

elde edilir. Seçilen α,β,x_1 ve x_2 için *Lemma* 3.3.1 gerçeklenir ve *f* konveks olduğundan

$$\alpha f(x_1)+\beta f(x_2)-f(\alpha x_1+\beta x_2)\geq 0 \qquad (3.30)$$

sağlanır. Eş 3.30 dan

$M_n(f,q;x)-M_{n+1}(f,q;x)\geq 0$

olup, buradan $\left(M_n(f;q,x)\right)$ dizisi *n* ye göre artmayandır.

Teorem 3.3.4:

$0<q_n\leq 1$ olmak üzere (q_n) dizisi Eş 3.14 ü sağlasın. Bu durumda her $f\in C[0,A]$ için

$$\lim_{n\to\infty}\left\|M_n(f)-M_\infty(f)\right\|_{C[0,A]}=0$$

dır [Doğru ve Gupta, 2006].

İspat:

Lemma 3.2.1 (i), (ii) ve (iii) den $\left(M_n\left(e_1;q_n,x\right)\right)$ dizisinin $M_\infty\left(e_1;1,x\right)=xb$ ye ve $\left(M_n\left(e_2;q_n,x\right)\right)$ dizisinin $M_\infty\left(e_2;1,x\right)=x^2b^2$ ye $C\left[0,A\right]$ içinde yakınsaklığı elde edilir. Buradan *Teorem* 3.3.2 (i) gerçeklenir. Buna ek olarak *Teorem* 3.3.3 ten *Teorem* 3.3.2 (ii) gerçeklenir. Böylece *Teorem* 3.3.2 den ispat tamamlanır.

3.4. *q*-Meyer-König ve Zeller Operatörlerinin Yakınsama Hızı

Bu kısımda Eş 3.1 de verilen q-Meyer-König ve Zeller tipli operatörlerin yaklaşım hızları süreklilik modülü ve Lipschitz sınıfından fonksiyonlar yardımıyla incelenecektir.

Teorem 3.4.1:

Her $n\in\mathbb{N}$ için $0<q_n\leq 1$ olacak şekilde $\left(q_n\right)$ Eş 3.12 yi gerçekleyen bir dizi olsun. Bu durumda her $f\in C\left[0,A\right]$ için

$$\left\|M_n\left(f;q_n\right)-f\right\|_{C[0,A]}\leq 2\omega\left(f,\delta_n\right)$$

gerçeklenir. Burada

$$\delta_n=\left\{\left(1-q_n^n\right)^2A^2+\frac{q_n^{2n}A}{\left[n\right]_{q_n}}\right\}^{1/2} \tag{3.31}$$

dır [Doğru ve Duman, 2006].

İspat:

$f \in C[0,A]$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ ve $x \in [0,A]$ için Lemma 3.2.1 (i) den

$$\begin{aligned}\left|M_n\left(f(t);q_n,x\right)-f(x)\right| &= \left|M_n\left(f(t);q_n,x\right)-f(x)M_n\left(1;q_n,x\right)\right| \\ &= \left|M_n\left(f(t)-f(x);q_n,x\right)\right| \\ &= \left|u_{n,q_n}(x)\sum_{k=0}^{\infty}\left\{f\left(\frac{q_n^n[k]_{q_n}}{[n+k]_{q_n}}\right)-f(x)\right\}\begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_{q_n} x^k\right|\end{aligned}$$

olup, üçgen eşitsizliğinden

$$\left|M_n\left(f(t);q_n,x\right)-f(x)\right| \leq u_{n,q_n}(x)\sum_{k=0}^{\infty}\left|f\left(\frac{q_n^n[k]_{q_n}}{[n+k]_{q_n}}\right)-f(x)\right|\begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_{q_n} x^k \tag{3.32}$$

elde edilir ve Eş 3.32 den

$$\left|M_n\left(f(t);q_n,x\right)-f(x)\right| \leq M_n\left(\left|f(t)-f(x)\right|;q_n,x\right)$$

bulunur. Bu durumda *Lemma* 2.1 (vii) den

$$\left|M_n\left(f(t);q_n,x\right)-f(x)\right| \leq M_n\left(\left(\frac{|t-x|}{\delta}+1\right)\omega(f,\delta);q_n,x\right) \tag{3.33}$$

dir. Eş 3.33 te q-Meyer-König ve Zeller operatörlerinin lineerliği kullanılırsa

$$\left|M_n\left(f(t);q_n,x\right)-f(x)\right| \leq \omega(f,\delta)\left[\frac{1}{\delta}M_n\left(|t-x|;q_n,x\right)+M_n\left(1;q_n,x\right)\right] \tag{3.34}$$

yazılır. Eş 3.34 te Lemma 3.2.1 (i) kullanılırsa

$$\left|M_n\left(f(t);q_n,x\right)-f(x)\right|\le\omega(f,\delta)\left[\frac{1}{\delta}M_n\left(|t-x|;q_n,x\right)+1\right] \tag{3.35}$$

elde edilir. Diğer yandan

$$\begin{aligned}M_n\left(|t-x|;q_n,x\right)&=u_{n,q_n}(x)\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{q_n^n[k]_{q_n}}{[n+k]_{q_n}}-x\right|\begin{bmatrix}n+k\\k\end{bmatrix}_{q_n}x^k\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\left(\frac{q_n^n[k]_{q_n}}{[n+k]_{q_n}}-x\right)^2\begin{bmatrix}n+k\\k\end{bmatrix}_{q_n}x^k u_{n,q_n}(x)\right\}^{1/2}\\&\quad\times\left\{\begin{bmatrix}n+k\\k\end{bmatrix}_{q_n}x^k u_{n,q_n}(x)\right\}^{1/2}\end{aligned} \tag{3.36}$$

dir. Eş 3.36 da Cauchy-Schwarz eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}M_n\left(|t-x|;q_n,x\right)&\le\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{q_n^n[k]_{q_n}}{[n+k]_{q_n}}-x\right)^2\begin{bmatrix}n+k\\k\end{bmatrix}_{q_n}x^k u_{n,q_n}(x)\right\}^{1/2}\\&\quad\times\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\begin{bmatrix}n+k\\k\end{bmatrix}_{q_n}x^k u_{n,q_n}(x)\right\}^{1/2}\end{aligned}$$

elde edilir ve buradan *Lemma* 3.2.1 (i) den

$$\begin{aligned}M_n\left(|t-x|;q_n,x\right)&\le\left\{M_n\left((t-x)^2;q_n,x\right)\right\}^{1/2}\left\{M_n\left(1;q_n,x\right)\right\}^{1/2}\\&=\left\{M_n\left((t-x)^2;q_n,x\right)\right\}^{1/2}\end{aligned} \tag{3.37}$$

bulunur. Eş 3.37, Eş 3.35 te kullanılırsa

$$\left|M_n\left(f(t);q_n,x\right)-f(x)\right|\leq\omega(f,\delta)\left[\frac{1}{\delta}\left\{M_n\left((t-x)^2;q_n,x\right)\right\}^{1/2}+1\right] \tag{3.38}$$

olup, Eş 3.38 de q- Meyer-König ve Zeller operatörünün lineerliği ve *Lemma* 3.2.1 (i), (ii) ve (iii) kullanılırsa

$$\left|M_n\left(f(t);q_n,x\right)-f(x)\right|\leq\omega(f,\delta)\left\{\frac{1}{\delta}\left(\left(q_n^{2n+1}-2q_n{}^n+1\right)x^2+\frac{q_n^{2n}x}{[n]_{q_n}}\right)^{1/2}+1\right\} \tag{3.39}$$

bulunur. Eş 3.39 da $x\in[0,A]$ için maksimum alınırsa

$$\left\|M_n\left(f;q_n,.\right)-f\right\|_{C[0,A]}\leq\omega(f,\delta)\left\{\frac{1}{\delta}\left(\left(q_n^{2n+1}-2q_n{}^n+1\right)A^2+\frac{q_n^{2n}A}{[n]_{q_n}}\right)^{1/2}+1\right\} \tag{3.40}$$

elde edilir. $0<q_n\leq 1$ olduğundan

$$q_n^{2n+1}-2q_n^n+1<\left(q_n^n-1\right)^2$$

sağlanır. Bu eşitsizlik Eş 3.40 da kullanılıp $\delta=\delta_n$ seçilirse

$$\left\|M_n\left(f;q_n,x\right)-f\right\|_{C[0,A]}\leq\omega(f,\delta_n)\left\{\frac{1}{\delta_n}\left(\left(q_n^n-1\right)^2A^2+\frac{q_n^{2n}A}{[n]_{q_n}}\right)^{1/2}+1\right\}$$

elde edilir. Burada Eş 3.31 kullanılırsa

$$\left\|M_n\left(f;q_n,.\right)-f\right\|_{C[0,A]}\leq 2\omega(f,\delta)$$

sonucu elde edilir.

Teorem 3.4.2:

Her $n \in \mathbb{N}$ için $0 \le q_n < 1$ olmak üzere, (q_n) dizisi Eş 3.12 yi gerçeklesin ve $f \in Lip_M(\alpha)$ olsun. Bu durumda

$$\left\| M_n(f, q_n, .) - f \right\|_{C[0,A]} \le M \delta_n^{\alpha}$$

gerçeklenir. Burada δ_n, Eş 3.31 de verildiği gibidir [Doğru ve Duman, 2006].

İspat:

Lemma 3.2.1 (i) den

$$\begin{aligned} \left| M_n(f, q_n, x) - f(x) \right| &= \left| u_{n,q_n}(x) \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ f\left(\frac{q^n [k]_{q_n}}{[n+k]_{q_n}} \right) - f(x) \right\} \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_{q_n} x^k \right| \\ &\le u_{n,q_n}(x) \sum_{k=0}^{\infty} \left| f\left(\frac{q^n [k]_{q_n}}{[n+k]_{q_n}} \right) - f(x) \right| \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_{q_n} x^k \qquad (3.41) \end{aligned}$$

bulunur. Eş 3.41 de $f \in Lip_M(\alpha)$ olduğu kullanılırsa

$$\left| M_n(f, q_n, x) - f(x) \right| \le M u_{n,q_n}(x) \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{q_n{}^n [k]_{q_n}}{[n+k]_{q_n}} - x \right|^{\alpha} \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_{q_n} x^k \qquad (3.42)$$

elde edilir.

$$P_{n,k,q_n}(x) := u_{n,q_n}(x) \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix} x^k$$

olsun.

$$\left|\frac{q_n^{\,n}\left[k\right]_{q_n}}{\left[n+k\right]_{q_n}}-x\right|^{\alpha} P_{n,k,q_n}\left(x\right)=\left\{\left(\frac{q_n^{\,n}\left[k\right]_{q_n}}{\left[n+k\right]_{q_n}}-x\right)^2 P_{n,k,q_n}\left(x\right)\right\}^{\alpha/2}\left\{P_{n,k,q_n}\left(x\right)\right\}^{2-\alpha/2}$$

eşitliği göz önüne alınıp Eş 3.42 de $p=\dfrac{2}{\alpha}$ ve $q=\dfrac{2}{2-\alpha}$ olacak şekilde Hölder eşitsizliği ve *Lemma* 3.2.1 (i), (ii) ve (iii) kullanılırsa,

$$\begin{aligned}\left|M_n\left(f,q_n,x\right)-f\left(x\right)\right| &\leq M\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{q_n^{\,n}\left[k\right]_{q_n}}{\left[n+k\right]_{q_n}}-x\right)^2 P_{n,k,q_n}\left(x\right)\right\}^{\alpha/2}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}P_{n,k,q_n}\left(x\right)\right\}^{2-\alpha/2}\\ &=M\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{q_n^{\,n}\left[k\right]_{q_n}}{\left[n+k\right]_{q_n}}-x\right)^2 P_{n,k,q_n}\left(x\right)\right\}^{\alpha/2}\\ &\leq M\left\{\left(1-q_n^n\right)^2 x^2+\frac{q_n^{2n}x}{\left[n\right]_{q_n}}\right\}^{\alpha/2} \qquad (3.43)\end{aligned}$$

bulunur. Eş 3.43 te Eş 3.31 deki δ_n göz önüne alınıp, $x\in\left[0,A\right]$ için maksimum alınırsa

$$\left\|M_n\left(f,q_n,.\right)-f\right\|_{C[0,A]}\leq M\,\delta_n^{\alpha}$$

bulunur.

4. İKİ DEĞİŞKENLİ *q*-MEYER-KÖNİG VE ZELLER OPERATÖRLERİ

Bu bölümde Eş 3.1 de verilen q-Meyer-König ve Zeller operatörlerinin iki değişkenli bir genelleştirmesi verilerek, bu operatörlerin Korovkin tipli yaklaşım özellikleri incelenecektir.

4.1. İki Değişkenli *q*-Meyer-König ve Zeller Operatörlerinin Oluşturulması

Bu kısımda Eş 3.1 ile verilen operatörlerin iki değişkenli bir genelleştirmesi Barbosu nun tekniğinden yararlanılarak aşağıdaki şekilde inşa edilecektir [Barbosu, 2000].

Tanım 4.1.1:

$I^2=[0,A]\times[0,A]=[0,A]^2$ olsun. $f\in C\left(I^2\right)$ ve $0<q_1,q_2\leq 1$ için Eş 3.1 ile verilen operatörlerin iki değişkenli ifadesi

$$M_{n_1,n_2}\left(f;q_1,q_2,x,y\right)=u_{n_1,q_1}\left(x\right)u_{n_2,q_2}\left(y\right)\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}f\left(\frac{q_1^{n_1}\left[k_1\right]_{q_1}}{\left[n_1+k_1\right]_{q_1}},\frac{q_2^{n_2}\left[k_2\right]_{q_2}}{\left[n_2+k_2\right]_{q_2}}\right)\begin{bmatrix}n_1+k_1\\k_1\end{bmatrix}_{q_1}$$

$$\times\begin{bmatrix} n_2+k_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_{q_2} x^{k_1} y^{k_2} \tag{4.1}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $u_{n_1,q_1}(x)=\prod_{s_1=0}^{n_1}\left(1-q_1^{s_1}x\right)$ ve $u_{n_2,q_2}(y)=\prod_{s_2=0}^{n_2}\left(1-q_2^{s_2}y\right)$ dir [Doğru ve Gupta, 2006].

Eş 4.1 de verilen operatörlerin lineer ve pozitif olduğu açıktır.
$q_1=q_2=1$ alınırsa klasik Meyer-König ve Zeller operatörlerinin Stancu tipli genelleştirmesi [Stancu, 1972] elde edilir.

Şimdi, daha sonra verilecek teoremlerin ispatında kullanılacak olan aşağıdaki *Lemma* verilsin.

Lemma 4.1.1:

(i) $M_{n_1,n_2}\left(f;q_1,q_2,x,y\right)=M_{n_1}{}^{x}\left(M_{n_2}{}^{y}\left(f;q_2,x,y\right)\right),$

(ii) $M_{n_1,n_2}\left(f;q_1,q_2,x,y\right)=M_{n_2}{}^{y}\left(M_{n_1}{}^{x}\left(f;q_1,x,y\right)\right)$

dir. Burada

$$M_{n_1}{}^{x}\left(f;q_1,x,y\right)=u_{n_1,q_1}(x)\sum_{k_1=0}^{\infty} f\left(\frac{q_1^{n_1}\left[k_1\right]_{q_1}}{\left[n_1+k_1\right]_{q_1}},y\right)\begin{bmatrix} n_1+k_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_{q_1} x^{k_1} \tag{4.2}$$

ve

$$M_{n_2}{}^{y}\left(f;q_2,x,y\right)=u_{n_2,q_2}(y)\sum_{k_2=0}^{\infty} f\left(x,\frac{q_2^{n_2}\left[k_2\right]_{q_2}}{\left[n_2+k_2\right]_{q_2}}\right)\begin{bmatrix} n_2+k_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_{q_2} y^{k_2} \tag{4.3}$$

şeklinde tanımlıdır [Doğru ve Gupta, 2006].

İspat:

(i) $M_{n_1}^{\ x}\left(M_{n_2}^{\ y}\left(f;q_2,x,y\right)\right)=M_{n_1}^{\ x}\left(u_{n_2,q_2}\left(y\right)\sum_{k_2=0}^{\infty}f\left(x,\frac{q_2^{n_2}\left[k_2\right]_{q_2}}{\left[n_2+k_2\right]_{q_2}}\right)\begin{bmatrix}n_2+k_2\\k_2\end{bmatrix}_{q_2}y^{k_2}\right)$

olup, burada $M_{n_1}^{\ x}$ in lineerliği kullanılırsa

$$M_{n_1}^{\ x}\left(M_{n_2}^{\ y}\left(f;q_2,x,y\right)\right)=u_{n_2,q_2}\left(y\right)\sum_{k_2=0}^{\infty}M_{n_1}^{\ x}\left(f\left(x,\frac{q_2^{n_2}\left[k_2\right]_{q_2}}{\left[n_2+k_2\right]_{q_2}}\right);q_1,x,y\right)\begin{bmatrix}n_2+k_2\\k_2\end{bmatrix}_{q_2}y^{k_2} \tag{4.4}$$

elde edilir. Eş 4.4 ve Eş 4.2 birlikte düşünülürse

$$\begin{aligned}M_{n_1}^{\ x}\left(M_{n_2}^{\ y}\left(f;q_2,x,y\right)\right)&=u_{n_2,q_2}\left(y\right)\sum_{k_2=0}^{\infty}u_{n_1,q_1}\left(x\right)\sum_{k_1=0}^{\infty}f\left(\frac{q_1^{n_1}\left[k_1\right]_{q_1}}{\left[n_1+k_1\right]_{q_1}},\frac{q_2^{n_2}\left[k_2\right]_{q_2}}{\left[n_2+k_2\right]_{q_2}}\right)\\&\quad\times\begin{bmatrix}n_1+k_1\\k_1\end{bmatrix}_{q_1}x^{k_1}\begin{bmatrix}n_2+k_2\\k_2\end{bmatrix}_{q_2}y^{k_2}\\&=u_{n_1,q_1}\left(x\right)u_{n_2,q_2}\left(y\right)\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}f\left(\frac{q_1^{n_1}\left[k_1\right]_{q_1}}{\left[n_1+k_1\right]_{q_1}},\frac{q_2^{n_2}\left[k_2\right]_{q_2}}{\left[n_2+k_2\right]_{q_2}}\right)\\&\quad\times\begin{bmatrix}n_1+k_1\\k_1\end{bmatrix}_{q_1}\begin{bmatrix}n_2+k_2\\k_2\end{bmatrix}_{q_2}x^{k_1}y^{k_2}\\&=M_{n_1,n_2}\left(f;q_1,q_2,x,y\right)\end{aligned}$$

sonucu elde edilir.

(ii), (i) deki ispata benzer şekilde verilir.

4.2. İki Değişkenli *q*-Meyer-König ve Zeller Operatörlerinin Yaklaşım Özellikleri

Bu kısımda, Eş 4.1 ile verilen iki değişkenli q-Meyer-König ve Zeller operatörlerinin yaklaşımı hem Doğru ve Gupta tarafından verilen Heping tipli bir Korovkin teoremi [Doğru ve Gupta, 2006] hem de Volkov [Volkov, 1957] tarafından verilen iki değişkenli fonksiyonlar için Korovkin teoremi yardımıyla incelenecektir.

Öncelikle, iki değişkenli q-Meyer-König ve Zeller operatörlerinin yaklaşım özellikleri incelenirken, gerekli olan *Tanım* ve *Lemmalar* verilecektir.

Tanım 4.2.1:

$I^2=[0,A]\times[0,A]=[0,A]^2$ olmak üzere $C\left(I^2\right)$, I^2 üzerinde tanımlı reel değerli sürekli fonksiyonlar uzayı olsun. $C\left(I^2\right)$

$$\|f\|_{C\left(I^2\right)}=\max_{(x,y)\in I^2}\left|f(x,y)\right|$$

normu ile bir *Banach uzayı*dır.

Tanım 4.2.2:

$\left(f_{n,m}\right), C\left(I^2\right)$ üzerinde bir fonksiyon dizisi olmak üzere

$$\lim_{n,m\to\infty}\left\|f_{n,m}-f\right\|_{C\left(I^2\right)}=\lim_{n,m\to\infty}\max_{(x,y)\in I^2}\left|f_{n,m}(x,y)-f(x,y)\right|=0$$

koşulu sağlanıyorsa, $\left(f_{n,m}\right)$ fonksiyon dizisi I^2 üzerinde f ye *düzgün yakınsaktır* denir ve bu durum $f_{n,m} \Rightarrow f$ ile gösterilir.

Lemma 4.2.1:

$e_{ij} : I^2 \to I$, $e_{ij}\left(t,s\right) = t^i s^j$ iki boyutlu test fonksiyonları olmak üzere Eş 4.1 de tanımlanan operatör için aşağıdaki sonuçlar gerçeklenir [Doğru ve Gupta, 2006].

(i) $M_{n_1,n_2}\left(e_{00}\left(t,s\right); q_1, q_2, x, y\right) = 1$

(ii) $M_{n_1,n_2}\left(e_{10}\left(t,s\right); q_1, q_2, x, y\right) = q_1^{n_1} x$

(iii) $M_{n_1,n_2}\left(e_{01}\left(t,s\right); q_1, q_2, x, y\right) = q_2^{n_2} y$

(iv) $q_1^{2n_1} x^2 \le M_{n_1,n_2}\left(e_{20}\left(t,s\right); q_1, q_2, x, y\right) \le q_1^{2n_1+1} x^2 + \dfrac{q_1^{2n_1} x}{\left[n_1\right]_{q_1}}$

(v) $q_2^{2n_2} y^2 \le M_{n_1,n_2}\left(e_{02}\left(t,s\right); q_1, q_2, x, y\right) \le q_2^{2n_2+1} y^2 + \dfrac{q_2^{2n_2} y}{\left[n_2\right]_{q_2}}$

İspat:

(i) $e_{00} = t^0 s^0 = 1$ için *Lemma* 4.1.1 (i) den

$$
\begin{aligned}
M_{n_1,n_2}\left(1; q_1, q_2, x, y\right) &= M_{n_1}^{\;x}\left(M_{n_2}^{\;y}\left(1; q_2, x, y\right)\right) \\
&= M_{n_1}^{\;x}\left(u_{n_2,q_2}\left(y\right) \sum_{k_2=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n_2 + k_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_{q_2} y^{k_2}\right)
\end{aligned}
$$

yazılabilir. $M_{n_1}^{\;x}$ in lineerliğinden

$$
M_{n_1,n_2}\left(1; q_1, q_2, x, y\right) = u_{n_2,q_2}\left(y\right) \sum_{k_2=0}^{\infty} M_{n_1}^{\;x}\left(1; q_1, x, y\right) \begin{bmatrix} n_2 + k_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_{q_2} y^{k_2}
$$

$$= M_{n_1}^{\;x}\left(1;q_1,x,y\right)u_{n_2,q_2}\left(y\right)\sum_{k_2=0}^{\infty}\begin{bmatrix} n_2+k_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_{q_2} y^{k_2}$$

$$= u_{n_1,q_1}\left(x\right)\sum_{k_1=0}^{\infty}\begin{bmatrix} n_1+k_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_{q_1} x^{k_1} u_{n_2,q_2}\left(y\right)\sum_{k_2=0}^{\infty}\begin{bmatrix} n_2+k_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_{q_2} y^{k_2}$$

ve *Lemma* 3.2.1 (i) den

$$M_{n_1,n_2}\left(1;q_1,q_2,x,y\right)=1$$

sonucu elde edilir.

(ii) $e_{10}=t^1s^0=t$ için *Lemma* 4.1.1 (ii) den

$$M_{n_1,n_2}\left(e_{10};q_1,q_2,x,y\right)=M_{n_2}^{\;y}\left(M_{n_1}^{\;x}\left(e_{10};q_1,x,y\right)\right)$$

$$= M_{n_2}^{\;y}\left(u_{n_1,q_1}\left(x\right)\sum_{k_1=0}^{\infty}\frac{q_1^{n_1}\left[k_1\right]_{q_1}}{\left[n_1+k_1\right]_{q_1}}\begin{bmatrix} n_1+k_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_{q_1} x^{k_1}\right)$$

yazılabilir. $M_{n_2}^{\;y}$ in lineerliğinden

$$M_{n_1,n_2}\left(e_{10};q_1,q_2,x,y\right)=u_{n_1,q_1}\left(x\right)\sum_{k_1=0}^{\infty}M_{n_2}^{\;y}\left(1;q_2,x,y\right)\frac{q_1^{n_1}\left[k_1\right]_{q_1}}{\left[n_1+k_1\right]_{q_1}}\begin{bmatrix} n_1+k_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_{q_1} x^{k_1}$$

$$= M_{n_2}^{\;y}\left(1;q_2,x,y\right)u_{n_1,q_1}\left(x\right)\sum_{k_1=0}^{\infty}\frac{q_1^{n_1}\left[k_1\right]_{q_1}}{\left[n_1+k_1\right]_{q_1}}\begin{bmatrix} n_1+k_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_{q_1} x^{k_1}$$

$$= u_{n_2,q_2}\left(y\right)\sum_{k_2=0}^{\infty}\begin{bmatrix} n_2+k_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_{q_2} y^{k_2}\sum_{k_1=0}^{\infty}\frac{q_1^{n_1}\left[k_1\right]_{q_1}}{\left[n_1+k_1\right]_{q_1}}\begin{bmatrix} n_1+k_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_{q_1} x^{k_1}$$

ve *Lemma* 3.2.1 (i) ve (ii) den

$$M_{n_1,n_2}\left(e_{10};q_1,q_2,x,y\right)=q_1^{n_1}x$$

sonucu elde edilir.

(iii) $e_{01}=t^0s^1=s$ için Lemma 4.1.1 (i) den

$$M_{n_1,n_2}\left(e_{01};q_1,q_2,x,y\right)=M_{n_1}{}^{x}\left(M_{n_2}{}^{y}\left(e_{01};q_2,x,y\right)\right)$$
$$=M_{n_1}{}^{x}\left(u_{n_2,q_2}\left(y\right)\sum_{k_2=0}^{\infty}\frac{q_2^{n_2}\left[k_2\right]_{q_2}}{\left[n_2+k_2\right]_{q_2}}\begin{bmatrix}n_2+k_2\\k_2\end{bmatrix}_{q_2}y^{k_2}\right)$$

yazılabilir. $M_{n_1}{}^{x}$ in lineerliğinden

$$M_{n_1,n_2}\left(e_{01};q_1,q_2,x,y\right)=u_{n_2,q_2}\left(y\right)\sum_{k_2=0}^{\infty}M_{n_1}{}^{x}\left(1;q_1,x,y\right)\frac{q_2^{n_2}\left[k_2\right]_{q_2}}{\left[n_2+k_2\right]_{q_2}}\begin{bmatrix}n_2+k_2\\k_2\end{bmatrix}_{q_2}y^{k_2}$$
$$=M_{n_1}{}^{x}\left(1;q_1,x,y\right)u_{n_2,q_2}\left(y\right)\sum_{k_2=0}^{\infty}\frac{q_2^{n_2}\left[k_2\right]_{q_2}}{\left[n_2+k_2\right]_{q_2}}\begin{bmatrix}n_2+k_2\\k_2\end{bmatrix}_{q_2}y^{k_2}$$
$$=u_{n_1,q_1}\left(x\right)\sum_{k_1=0}^{\infty}\begin{bmatrix}n_1+k_1\\k_1\end{bmatrix}_{q_1}x^{k_1}u_{n_2,q_2}\left(y\right)\sum_{k_2=0}^{\infty}\frac{q_2^{n_2}\left[k_2\right]_{q_2}}{\left[n_2+k_2\right]_{q_2}}\begin{bmatrix}n_2+k_2\\k_2\end{bmatrix}_{q_2}y^{k_2}$$

ve *Lemma* 3.2.1 (i) ve (ii) den

$$M_{n_1,n_2}\left(e_{01};q_1,q_2,x,y\right)=q_2^{n_2}y$$

sonucu elde edilir.

(iv) $e_{20}=t^2s^0=t^2$ için *Lemma* 4.1.1 (ii) den

$$M_{n_1,n_2}\left(e_{20};q_1,q_2,x,y\right)=M_{n_2}{}^{y}\left(M_{n_1}{}^{x}\left(e_{20};q_1,x,y\right)\right)$$

$$=M_{n_2}^{\ y}\left(u_{n_1,q_1}(x)\sum_{k_1=0}^{\infty}\frac{q_1^{2n_1}\left[k_1\right]_{q_1}^{\ 2}}{\left[n_1+k_1\right]_{q_1}^{\ 2}}\begin{bmatrix} n_1+k_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_{q_1} x^{k_1}\right)$$

yazılabilir. $M_{n_2}^{\ y}$ in lineerliğinden

$$M_{n_1,n_2}\left(e_{20};q_1,q_2,x,y\right)=u_{n_1,q_1}(x)\sum_{k_1=0}^{\infty}M_{n_2}^{\ y}\left(1;q_2,x,y\right)\frac{q_1^{2n_1}\left[k_1\right]_{q_1}^{\ 2}}{\left[n_1+k_1\right]_{q_1}^{\ 2}}\begin{bmatrix} n_1+k_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_{q_1} x^{k_1}$$

$$=M_{n_2}^{\ y}\left(1;q_2,x,y\right)u_{n_1,q_1}(x)\sum_{k_1=0}^{\infty}\frac{q_1^{2n_1}\left[k_1\right]_{q_1}^{\ 2}}{\left[n_1+k_1\right]_{q_1}^{\ 2}}\begin{bmatrix} n_1+k_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_{q_1} x^{k_1}$$

$$=u_{n_2,q_2}(y)\sum_{k_2=0}^{\infty}\begin{bmatrix} n_2+k_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_{q_2} y^{k_2}u_{n_1,q_1}(x)\sum_{k_1=0}^{\infty}\frac{q_1^{2n_1}\left[k_1\right]_{q_1}^{\ 2}}{\left[n_1+k_1\right]_{q_1}^{\ 2}}\begin{bmatrix} n_1+k_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_{q_1} x^{k_1}$$

ve *Lemma* 3.2.1 (i) ve (iii) den

$$q_1^{2n_1}x^2\le M_{n_1,n_2}\left(e_{20};q_1,q_2,x,y\right)\le q_1^{2n_1+1}x^2+\frac{q_1^{2n_1}x}{\left[n_1\right]_{q_1}}$$

sonucu elde edilir.

(v) $e_{02}=t^0s^2=s^2$ için *Lemma* 4.1.1 (i) den

$$M_{n_1,n_2}\left(e_{02};q_1,q_2,x,y\right)=M_{n_1}^{\ x}\left(M_{n_2}^{\ y}\left(e_{02};q_2,x,y\right)\right)$$

$$=M_{n_1}^{\ x}\left(u_{n_2,q_2}(y)\sum_{k_2=0}^{\infty}\frac{q_2^{2n_2}\left[k_2\right]_{q_2}^{\ 2}}{\left[n_2+k_2\right]_{q_2}^{\ 2}}\begin{bmatrix} n_2+k_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_{q_2} y^{k_2}\right)$$

yazılabilir. $M_{n_1}^{\ x}$ in lineerliğinden

$$= u_{n_2,q_2}(y) \sum_{k_2=0}^{\infty} M_{n_1}^{\ x}(1;q_1,x,y) \frac{q_2^{2n_2} \left[k_2\right]_{q_2}^{\ 2}}{\left[kn_2+k_2\right]_{q_2}^{\ 2}} \begin{bmatrix} n_2+k_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_{q_2} y^{k_2}$$

$$= M_{n_1}^{\ x}(1;q_1,x,y) u_{n_2,q_2}(y) \sum_{k_2=0}^{\infty} \frac{q_2^{2n_2} \left[k_2\right]_{q_2}^{\ 2}}{\left[n_2+k_2\right]_{q_2}^{\ 2}} \begin{bmatrix} n_2+k_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_{q_2} y^{k_2}$$

$$= u_{n_1,q_1}(x) \sum_{k_1=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n_1+k_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_{q_1} x^{k_1} u_{n_2,q_2}(y) \sum_{k_2=0}^{\infty} \frac{q_2^{2n_2} \left[k_2\right]_{q_2}^{\ 2}}{\left[n_2+k_2\right]_{q_2}^{\ 2}} \begin{bmatrix} n_2+k_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_{q_2} y^{k_2}$$

ve *Lemma* 3.2.1 (i) ve (iii) den

$$q_2^{2n_2} y^2 \le M_{n_1,n_2}(e_{02};q_1,q_2,x,y) \le q_2^{2n_2+1} y^2 + \frac{q_2^{2n_2} y}{\left[n_2\right]_{q_2}}$$

sonucu elde edilir.

Şimdi Volkov [Volkov, 1957] tarafından verilen iki değişkenli fonksiyonlar için Korovkin teoremi verilecektir.

Teorem 4.2.1(Volkov Teoremi):

D, $\mathbb{R}^2$ de kapalı ve sınırlı bir bölge, $C(D)$, bu D bölgesinde tanımlı sürekli ve reel değerli f fonksiyonların kümesi ve $L_{n,m}(f(t,s);x,y)$, $C(D)$ üzerinde tanımlı bir lineer pozitif operatörler dizisi olsun. $f_0 = e_{00}(t,s) = 1$, $f_1 = e_{10}(t,s) = t$, $f_2 = e_{01}(t,s) = s$ ve $f_3 = e_{20}(t,s) + e_{02}(t,s) = t^2 + s^2$ olmak üzere $(L_{n,m})$ lineer pozitif operatörler dizisi

$$L_{n,m}(f_i) \rightrightarrows f_i, \quad i = 0,1,2,3 \quad (n,m \to \infty)$$

koşullarını sağlıyorsa bu durumda her $f \in C(D)$ için D üzerinde

$$L_{n,m}\left(f\right) \Rightarrow f, \qquad \left(n,m\to\infty\right)$$

gerçeklenir [Volkov, 1957].

Teorem 4.2.1 den yararlanarak aşağıdaki sonuç verilebilir.

Teorem 4.2.2:

$0 < q_{1,n_1}, q_{2,n_2} \leq 1$ olmak üzere $\left(q_{1,n_1}\right)$ ve $\left(q_{2,n_2}\right)$ dizileri,

$$\begin{aligned} &\lim_{n_1\to\infty} q_{1,n_1}^{n_1} = 1 \quad , \quad \lim_{n_1\to\infty} \frac{1}{\left[n_1\right]_{q_{1,n_1}}} = 0 \\ &\lim_{n_2\to\infty} q_{2,n_2}^{n_2} = 1 \quad , \quad \lim_{n_2\to\infty} \frac{1}{\left[n_2\right]_{q_{1,n_2}}} = 0 \end{aligned} \tag{4.5}$$

koşullarını gerçekliyorsa, her $f \in C\left(I^2\right)$ için $\left(M_{n_1,n_2}\left(f;q_{1,n_1},q_{2,n_2},x,y\right)\right)$ operatörler dizisi I^2 üzerinde $f\left(x,y\right)$ ye düzgün yakınsaktır [Doğru ve Gupta, 2006].

İspat:

Eş 4.1 de verilen operatörlerin lineerliği ve *Lemma* 4.2.1 deki (iv) ve (v) den

$$q_{1,n_1}^{2n_1}x^2 + q_{2,n_2}^{2n_2}y^2 \leq M_{n_1,n_2}\left(e_{20};q_{1,n_1},q_{2,n_2},x,y\right) + M_{n_1,n_2}\left(e_{02};q_{1,n_1},q_{2,n_2},x,y\right)$$

$$\leq q_{1,n_1}^{2n_1+1}x^2 + q_{2,n_2}^{2n_2+1}y^2 + \frac{q_{1,n_1}^{2n_1}x}{[n_1]_{q_{1,n_1}}} + \frac{q_{2,n_2}^{2n_2}y}{[n_2]_{q_{2,n_2}}}$$

bulunur. $n_1 \to \infty$ ve $n_2 \to \infty$ için limit alınır ve Eş 4.5 kullanılırsa, sıkıştırma teoreminden

$$M_{n_1,n_2}\left(e_{20}+e_{02};q_{1,n_1},q_{2,n_2},x,y\right) \Rightarrow x^2+y^2$$

elde edilir.

Lemma 4.2.1 (i), (ii) ve (iii) den $n_1 \to \infty$ ve $n_2 \to \infty$ için limit alınır ve Eş 4.5 kullanılırsa

$$M_{n_1,n_2}\left(e_{00};q_1,q_2,x,y\right) \Rightarrow 1$$
$$M_{n_1,n_2}\left(e_{10};q_1,q_2,x,y\right) \Rightarrow x$$
$$M_{n_1,n_2}\left(e_{01};q_1,q_2,x,y\right) \Rightarrow y$$

elde edilir. Böylece *Teorem* 4.2.1 in hipotezleri gerçeklenir. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 3.3.2, *Teorem* 3.3.4 ve *Teorem* 4.2.2 yardımıyla aşağıdaki yaklaşım sonucu verilebilir.

Sonuç 4.2.1:

$0 < q_{1,n_1}, q_{2,n_2} \leq 1$ olmak üzere $\left(q_{1,n_1}\right)$ ve $\left(q_{2,n_2}\right)$ dizileri,

$$\lim_{n_1\to\infty} q_{1,n_1}^{n_1} = c_1 < 1, \qquad \lim_{n_1\to\infty} q_{1,n_1} = 1$$
$$\lim_{n_2\to\infty} q_{2,n_2}^{n_2} = c_2 < 1, \qquad \lim_{n_2\to\infty} q_{2,n_2} = 1$$

koşullarını sağlasın. Bu durumda her $f \in C\left(I^2\right)$ için

$$\lim_{n\to\infty}\left\| M_{n_1,n_2}(f) - M_{\infty,\infty}(f) \right\|_{C(I^2)} = 0, \qquad (n_1, n_2 \to \infty)$$

dır [Doğru ve Gupta, 2006].

4.3. İki Değişkenli *q*-Meyer-König ve Zeller Operatörlerinin Yakınsama Hızı

Bu kısım da Eş 4.1 ile verilen operatörlerin yaklaşım hızları iki değişkenli fonksiyonlar için verilen süreklilik modülü ve Lipschitz sınıfından fonksiyonlar yardımıyla incelenecektir.

Tanım 4.3.1:

$\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ ve $f \in C(I^2)$ olmak üzere, iki değişkenli fonksiyonlar için süreklilik modülü

$$\omega(f;\delta_1,\delta_2) = \sup\left\{ \left| f(t,s) - f(x,y) \right| : (t,s),(x,y) \in I^2, |t-x| \le \delta_1, |s-y| \le \delta_2 \right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Eğer $f \in C(I^2)$ ise, bu durumda

$\delta_1 \to 0$ ve $\delta_2 \to 0$ için $\omega(f,\delta_1,\delta_2) \to 0$

olduğu açıktır. Ayrıca $\omega(f;\delta_1,\delta_2)$ nin monotonluğundan

$$\left| f(t,s) - f(x,y) \right| \le \omega(f;|t-x|,|s-y|)$$

$$\leq \omega\left(f;\delta_1,\delta_2\right)\left(\frac{|t-x|}{\delta_1}+1\right)\left(\frac{|s-y|}{\delta_2}+1\right) \tag{4.6}$$

yazılabilir [Stancu, 1972], [Barbosu, 2000].

Teorem 4.3.1:

$0<q_{1,n_1},q_{2,n_2}\leq 1$ olmak üzere $\left(q_{1,n_1}\right)$ ve $\left(q_{2,n_2}\right)$ dizileri Eş 4.5 i gerçeklesin. Bu durumda

$$\left\|M_{n_1,n_2}\left(f;q_{1,n_1},q_{2,n_2},.\right)-f\right\|_{C\left(I^2\right)}\leq 4\omega\left(f;\delta_{1,n_1},\delta_{2,n_2}\right)$$

gerçeklenir. Burada

$$\delta_{1,n_1}=\left\{\left(1-q_{1,n_1}^{n_1}\right)^2A^2+\frac{Aq_{1,n_1}^{2n_1}}{\left[n_1\right]_{q_{1,n_1}}}\right\}^{1/2} \text{ ve } \delta_{2,n_2}=\left\{\left(1-q_{2,n_2}^{n_2}\right)^2A^2+\frac{Aq_{2,n_2}^{2n_2}}{\left[n_2\right]_{q_{2,n_2}}}\right\}^{1/2} \tag{4.7}$$

dir [Doğru ve Gupta, 2006].

İspat:

$(x,y)\in I^2$ için M_{n_1,n_2} nin lineerliğinden

$$\left|M_{n_1,n_2}\left(f;q_{1,n_1},q_{2,n_2},x,y\right)-f\left(x,y\right)\right|=\left|M_{n_1,n_2}\left(f\left(t,s\right)-f\left(x,y\right);q_{1,n_1},q_{2,n_2},x,y\right)\right| \tag{4.8}$$

yazılabilir. Eş 4.8 de *Lemma* 4.1.1 (i) kullanılırsa

$$\left|M_{n_1,n_2}\left(f\left(t,s\right)-f\left(x,y\right);q_{1,n_1},q_{2,n_2},x,y\right)\right|=\left|M_{n_1}{}^{x}\left(M_{n_2}{}^{y}\left(f\left(t,s\right)-f\left(x,y\right);q_{2,n_2},x,y\right)\right)\right|$$

$$=\left|M_{n_1}{}^{x}\left(u_{n_2,q_{2,n_2}}(y)\sum_{k_2=0}^{\infty}\left\{f\left(x,\frac{q_{2,n_2}^{n_2}[k_2]_{q_{2,n_2}}}{[n_2+k_2]_{q_{2,n_2}}}\right)-f(x,y)\right\}\begin{bmatrix}n_2+k_2\\k_2\end{bmatrix}_{q_{2,n_2}}y^{k_2}\right)\right| \tag{4.9}$$

elde edilir. Eş 4.9 da $M_{n_1}{}^{x}$ in lineerliği, *Lemma* 4.1.1 (ii) ve üçgen eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&\left|M_{n_1,n_2}\left(f(t,s)-f(x,y);q_{1,n_1},q_{2,n_2},x,y\right)\right|\\
&\quad=\left|u_{n_2,q_{2,n_2}}(y)\sum_{k_2=0}^{\infty}M_{n_1}{}^{x}\left(f\left(x,\frac{q_{2,n_2}^{n_2}[k_2]_{q_{2,n_2}}}{[n_2+k_2]_{q_{2,n_2}}}\right)-f(x,y);q_{1,n_1},x,y\right)\begin{bmatrix}n_2+k_2\\k_2\end{bmatrix}_{q_{2,n_2}}y^{k_2}\right|\\
&\quad=\left|u_{n_2,q_{2,n_2}}(y)\sum_{k_2=0}^{\infty}u_{n_1,q_{1,n_1}}(x)\sum_{k_1=0}^{\infty}\left\{f\left(\frac{q_{1,n_1}^{n_1}[k_1]_{q_{1,n_1}}}{[n_1+k_1]_{q_{1,n_1}}},\frac{q_{2,n_2}^{n_2}[k_2]_{q_{2,n_2}}}{[n_2+k_2]_{q_{2,n_2}}}\right)-f(x,y)\right\}\begin{bmatrix}n_1+k_1\\k_1\end{bmatrix}_{q_{1,n_1}}x^{k_1}\right.\\
&\qquad\left.\times\begin{bmatrix}n_2+k_2\\k_2\end{bmatrix}_{q_{2,n_2}}y^{k_2}\right|\\
&\quad\le u_{n_1,q_{1,n_1}}(x)u_{n_2,q_{2,n_2}}(y)\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\left|f\left(\frac{q_{1,n_1}^{n_1}[k_1]_{q_{1,n_1}}}{[n_1+k_1]_{q_{1,n_1}}},\frac{q_{2,n_2}^{n_2}[k_2]_{q_{2,n_2}}}{[n_2+k_2]_{q_{2,n_2}}}\right)-f(x,y)\right|\begin{bmatrix}n_1+k_1\\k_1\end{bmatrix}_{q_{1,n_1}}\\
&\qquad\times\begin{bmatrix}n_2+k_2\\k_2\end{bmatrix}_{q_{2,n_2}}x^{k_1}y^{k_2}\\
&\quad=M_{n_1,n_2}\left(\left|f(t,s)-f(x,y)\right|;q_{1,n_1},q_{2,n_2},x,y\right)
\end{aligned}\tag{4.10}$$

elde edilir. Eş 4.10 da Eş 4.6, M_{n_1,n_2} nin monotonluğu ve lineerliği, *Lemma* 4.1.1 (i), (ii), Eş 4.2 ve Eş 4.3.kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&M_{n_1,n_2}\left(\left|f(t,s)-f(x,y)\right|;q_{1,n_1},q_{2,n_2},x,y\right)\\
&\quad\le\omega(f;\delta_1,\delta_2)\left[\frac{1}{\delta_1\delta_2}M_{n_1,n_2}\left(|t-x||s-y|;q_{1,n_1},q_{2,n_2},x,y\right)\right.
\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{\delta_1}M_{n_1,n_2}\left(\left|t-x\right|;q_{1,n_1},q_{2,n_2},x,y\right)+\frac{1}{\delta_2}M_{n_1,n_2}\left(\left|s-y\right|;q_{1,n_1}q_{2,n_2},x,y\right)+1\Bigg]$$

$$=\omega(f;\delta_1,\delta_2)\left[\frac{1}{\delta_1\delta_2}M_{n_1}{}^{x}\left(M_{n_2}{}^{y}\left(\left|t-x\right|\left|s-y\right|;q_{2,n_2},x,y\right)\right)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\delta_1}M_{n_2}{}^{y}\left(M_{n_1}{}^{x}\left(\left|t-x\right|;q_{1,n_1},x,y\right)\right)+\frac{1}{\delta_2}M_{n_1}{}^{x}\left(M_{n_2}{}^{y}\left(\left|s-y\right|;q_{2,n_2},x,y\right)\right)+1\right]$$

$$=\omega(f;\delta_1,\delta_2)\left[\frac{1}{\delta_1\delta_2}M_{n_1}{}^{x}\left(u_{n_2,q_{2,n_2}}(y)\sum_{k_2=0}^{\infty}\left|t-x\right|\left|\frac{q_{2,n_2}^{n_2}[k_2]_{q_{2,n_2}}}{[n_2+k_2]_{q_{2,n_2}}}-y\right|\begin{bmatrix}n_2+k_2\\k_2\end{bmatrix}_{q_{2,n_2}}y^{k_2}\right)\right.$$

$$+\frac{1}{\delta_1}M_{n_2}{}^{y}\left(u_{n_1,q_{1,n_1}}(x)\sum_{k_1=0}^{\infty}\left|\frac{q_{1,n_1}^{n_1}[k_1]_{q_{1,n_1}}}{[n_1+k_1]_{q_{1,n_1}}}-x\right|\begin{bmatrix}n_1+k_1\\k_1\end{bmatrix}_{q_{1,n_1}}x^{k_1}\right)$$

$$\left.+\frac{1}{\delta_2}M_{n_1}{}^{x}\left(u_{n_2,q_{2,n_2}}(y)\sum_{k_2=0}^{\infty}\left|\frac{q_{2,n_2}^{n_2}[k_2]_{q_{2,n_2}}}{[n_2+k_2]_{q_{2,n_2}}}-y\right|\begin{bmatrix}n_2+k_2\\k_2\end{bmatrix}_{q_{2,n_2}}y^{k_2}\right)+1\right]$$

bulunur. Burada $M_{n_1}{}^{x}$ ve $M_{n_2}{}^{y}$ nin lineerliği ve Eş 4.2 den

$$M_{n_1,n_2}\left(\left|f(t,s)-f(x,y)\right|;q_{1,n_1},q_{2,n_2},x,y\right)$$

$$\leq\omega(f;\delta_1,\delta_2)\left[\frac{1}{\delta_1\delta_2}u_{n_1,q_{1,n_1}}(x)\sum_{k_1=0}^{\infty}\left|\frac{q_{1,n_1}^{n_1}[k_1]_{q_{1,n_1}}}{[n_1+k_1]_{q_{1,n_1}}}-x\right|\begin{bmatrix}n_1+k_1\\k_1\end{bmatrix}_{q_{1,n_1}}x^{k_1}\right.$$

$$\times u_{n_2,q_{2,n_2}}(y)\sum_{k_2=0}^{\infty}\left|\frac{q_{2,n_2}^{n_2}[k_2]_{q_{2,n_2}}}{[n_2+k_2]_{q_{2,n_2}}}-y\right|\begin{bmatrix}n_2+k_2\\k_2\end{bmatrix}_{q_{2,n_2}}y^{k_2}$$

$$+\frac{1}{\delta_1}u_{n_1,q_{1,n_1}}(x)\sum_{k_1=0}^{\infty}\left|\frac{q_{1,n_1}^{n_1}[k_1]_{q_{1,n_1}}}{[n_1+k_1]_{q_{1,n_1}}}-x\right|\begin{bmatrix}n_1+k_1\\k_1\end{bmatrix}_{q_{1,n_1}}x^{k_1}M_{n_2}{}^{y}\left(1;q_{2,n_2},x,y\right)$$

$$+\frac{1}{\delta_2}u_{n_2,q_{2,n_2}}(y)\sum_{k_2=0}^{\infty}\left|\frac{q_{2,n_2}^{n_2}[k_2]_{q_{2,n_2}}}{[n_2+k_2]_{q_{2,n_2}}}-y\right|\begin{bmatrix}n_2+k_2\\k_2\end{bmatrix}_{q_{2,n_2}}y^{k_2}$$

$$\times M_{n_1}^{\ x}\left(1;q_{1,n_1},x,y\right)+1\Big] \tag{4.11}$$

elde edilir.

Eş 4.11 de

$$\begin{aligned} P_{n_1,k_1,q_{1,n_1}}(x) &:= u_{n_1,q_{1,n_1}}(x)\begin{bmatrix} n_1+k_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_{q_{1,n_1}} x^{k_1} \\ P_{n_2,k_2,q_{2,n_2}}(y) &:= u_{n_2,q_{2,n_2}}(y)\begin{bmatrix} n_2+k_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_{q_{2,n_2}} y^{k_2} \end{aligned} \tag{4.12}$$

alınıp, $M_{n_1}^{\ x}\left(1;q_{1,n_1},x,y\right)=1$, $M_{n_2}^{\ y}\left(1;q_{2,n_2},x,y\right)=1$, Eş 4.2, Eş 4.3 ve *Lemma* 3.2.1 (i) kullanılırsa

$$\begin{aligned} &M_{n_1,n_2}\left(\left|f(t,s)-f(x,y)\right|;q_{1,n_1},q_{2,n_2},x,y\right) \\ &\leq \omega(f;\delta_1,\delta_2)\left[\frac{1}{\delta_1\delta_2}\sum_{k_1=0}^{\infty}\left|\frac{q_{1,n_1}^{n_1}[k_1]_{q_{1,n_1}}}{[n_1+k_1]_{q_{1,n_1}}}-x\right|P_{n_1,k_1,q_{1,n_1}}(x)\right. \\ &\times\sum_{k_2=0}^{\infty}\left|\frac{q_{2,n_2}^{n_2}[k_2]_{q_{2,n_2}}}{[n_2+k_2]_{q_{2,n_2}}}-y\right|P_{n_2,k_2,q_{2,n_2}}(y) \\ &+\frac{1}{\delta_1}\sum_{k_1=0}^{\infty}\left|\frac{q_{1,n_1}^{n_1}[k_1]_{q_{1,n_1}}}{[n_1+k_1]_{q_{1,n_1}}}-x\right|P_{n_1,k_1,q_{1,n_1}}(x) \\ &\left.+\frac{1}{\delta_2}\sum_{k_2=0}^{\infty}\left|\frac{q_{2,n_2}^{n_2}[k_2]_{q_{2,n_2}}}{[n_2+k_2]_{q_{2,n_2}}}-y\right|P_{n_2,k_2,q_{2,n_2}}(y)+1\right] \end{aligned} \tag{4.13}$$

bulunur.

$$\left|\frac{q_{1,n_1}^{n_1}\left[k_1\right]_{q_{1,n_1}}}{\left[n_1+k_1\right]_{q_{1,n_1}}}-x\right| P_{n_1,k_1,q_{1,n_1}}(x)=\left\{\left(\frac{q_{1,n_1}^{n_1}\left[k_1\right]_{q_{1,n_1}}}{\left[n_1+k_1\right]_{q_{1,n_1}}}-x\right)^2 P_{n_1,k_1,q_{1,n_1}}(x)\right\}^{1/2}\left\{P_{n_1,k_1,q_{1,n_1}}(x)\right\}^{1/2}$$

$$\left|\frac{q_{2,n_2}^{n_2}\left[k_2\right]_{q_{2,n_2}}}{\left[n_2+k_2\right]_{q_{2,n_2}}}-y\right| P_{n_2,k_2,q_{2,n_2}}(y)=\left\{\left(\frac{q_{2,n_2}^{n_2}\left[k_2\right]_{q_{2,n_2}}}{\left[n_2+k_2\right]_{q_{2,n_2}}}-y\right)^2 P_{n_2,k_2,q_{2,n_2}}(y)\right\}^{1/2}\left\{P_{n_2,k_2,q_{2,n_2}}(y)\right\}^{1/2}$$

olduğu göz önüne alınıp Eş 4.13 te Cauchy-Schwarz eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&M_{n_1,n_2}\left(\left|f(t,s)-f(x,y)\right|;q_{1,n_1},q_{2,n_2},x,y\right)\\
&\leq \omega(f;\delta_1,\delta_2)\left[\frac{1}{\delta_1\delta_2}\left\{\sum_{k_1=0}^{\infty}\left(\frac{q_{1,n_1}^{n_1}\left[k_1\right]_{q_{1,n_1}}}{\left[n_1+k_1\right]_{q_{1,n_1}}}-x\right)^2 P_{n_1,k_1,q_{1,n_1}}(x)\right\}^{1/2}\right.\\
&\times\left\{\sum_{k_1=0}^{\infty}P_{n_1,k_1,q_{1,n_1}}(x)\right\}^{1/2}\left\{\sum_{k_2=0}^{\infty}\left(\frac{q_{2,n_2}^{n_2}\left[k_2\right]_{q_{2,n_2}}}{\left[n_2+k_2\right]_{q_{2,n_2}}}-y\right)^2 P_{n_2,k_2,q_{2,n_2}}(y)\right\}^{1/2}\\
&\times\left\{\sum_{k_2=0}^{\infty}P_{n_2,k_2,q_{2,n_2}}(y)\right\}^{1/2}\\
&+\frac{1}{\delta_1}\left\{\sum_{k_1=0}^{\infty}\left(\frac{q_{1,n_1}^{n_1}\left[k_1\right]_{q_{1,n_1}}}{\left[n_1+k_1\right]_{q_{1,n_1}}}-x\right)^2 P_{n_1,k_1,q_{1,n_1}}(x)\right\}^{1/2}\left\{\sum_{k_1=0}^{\infty}P_{n_1,k_1,q_{1,n_1}}(x)\right\}^{1/2}\\
&\left.+\frac{1}{\delta_2}\left\{\sum_{k_2=0}^{\infty}\left(\frac{q_{2,n_2}^{n_2}\left[k_2\right]_{q_{2,n_2}}}{\left[n_2+k_2\right]_{q_{2,n_2}}}-y\right)^2 P_{n_2,k_2,q_{2,n_2}}(y)\right\}^{1/2}\left\{\sum_{k_2=0}^{\infty}P_{n_2,k_2,q_{2,n_2}}(y)\right\}^{1/2}+1\right]
\end{aligned} \tag{4.14}$$

elde edilir. Eş 4.14 te *Lemma* 3.2.1 (i) ve

$$\varphi_{n_1,2}(x) = M_{n_1}\left((t-x)^2; q_{1,n_1}, x\right) \le \left(1-q_{1,n_1}\right)^2 x^2 + \frac{x q_{1,n_1}^{2n_1}}{[n_1]_{q_{1,n_1}}}$$

$$\varphi_{n_2,2}(y) = M_{n_2}\left((s-y)^2; q_{2,n_2}, y\right) \le \left(1-q_{2,n_2}\right)^2 y^2 + \frac{y q_{2,n_2}^{2n_2}}{[n_2]_{q_{2,n_2}}} \tag{4.15}$$

kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&M_{n_1,n_2}\left(\left|f(t,s)-f(x,y)\right|; q_{1,n_1}, q_{2,n_2}, x, y\right) \\
&\le \omega(f;\delta_1,\delta_2)\left[\frac{1}{\delta_1\delta_2}\left\{M_{n_1}\left((t-x)^2; q_{1,n_1}, x\right)\right\}^{1/2}\left\{M_{n_2}\left((s-y)^2; q_{2,n_2}, y\right)\right\}^{1/2}\right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\delta_1}\left\{M_{n_1}\left((t-x)^2; q_{1,n_1}, x\right)\right\}^{1/2} + \frac{1}{\delta_2}\left\{M_{n_2}\left((s-y)^2; q_{2,n_2}, y\right)\right\}^{1/2} + 1\right] \\
&= \omega(f;\delta_1,\delta_2)\left[\frac{1}{\delta_1\delta_2}\left\{\varphi_{n_1,2}(x)\right\}^{1/2}\left\{\varphi_{n_2,2}(y)\right\}^{1/2} + \frac{1}{\delta_1}\left\{\varphi_{n_1,2}(x)\right\}^{1/2} + \frac{1}{\delta_2}\left\{\varphi_{n_2,2}(y)\right\}^{1/2} + 1\right] \\
&\le \omega(f;\delta_1,\delta_2)\left[\frac{1}{\delta_1\delta_2}\left\{\left(1-q_{1,n_1}\right)^2 x^2 + \frac{x q_{1,n_1}^{2n_1}}{[n_1]_{q_{1,n_1}}}\right\}^{1/2}\left\{\left(1-q_{2,n_2}\right)^2 y^2 + \frac{y q_{2,n_2}^{2n_2}}{[n_2]_{q_{2,n_2}}}\right\}^{1/2}\right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\delta_1}\left\{\left(1-q_{1,n_1}\right)^2 x^2 + \frac{x q_{1,n_1}^{2n_1}}{[n_1]_{q_{1,n_1}}}\right\}^{1/2} + \frac{1}{\delta_2}\left\{\left(1-q_{2,n_2}\right)^2 y^2 + \frac{y q_{2,n_2}^{2n_2}}{[n_2]_{q_{2,n_2}}}\right\}^{1/2} + 1\right]
\end{aligned} \tag{4.16}$$

bulunur. Eş 4.8, Eş 4.16 ifadeleri birlikte düşünülüp, $(x,y)\in I^2$ için maksimum alınır ve $\delta_1 = \delta_{1,n_1}$ ve $\delta_2 = \delta_{2,n_2}$ olacak şekilde Eş 4.7 deki gibi seçilirse

$$\left\| M_{n_1,n_2}\left(f(t,s); q_{1,n_1}, q_{2,n_2}\right) - f\right\|_{C(I^2)} \le 4\omega(f;\delta_1,\delta_2)$$

sonucu elde edilir ki, bu da ispatı tamamlar.

Tanım 4.3.2:

$0<\alpha\leq 1$ olmak üzere iki değişkenli fonksiyonlar için *Lipschitz sınıfı*

$$Lip_M\left(f;\alpha\right)=\left\{f:\left|f\left(t,s\right)-f\left(x,y\right)\right|\leq M\left[\left(t-x\right)^2+\left(s-y\right)^2\right]^{\alpha/2},\left(t,s\right),\left(x,y\right)\in I^2\right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 4.3.2:

$0<q_{1,n_1},q_{2,n_2}\leq 1$ olmak üzere $\left(q_{1,n_1}\right)$ ve $\left(q_{2,n_2}\right)$ dizileri, Eş 4.5 i gerçeklesin. Eğer $f\in Lip_M\left(f;\alpha\right)$ ise, bu durumda

dır. Burada δ_{1,n_1} ve δ_{2,n_2}, Eş 4.7 de tanımlandığı gibidir.

İspat:

Eş 4.10 ve Eş 4.2 den

$$\left|M_{n_1,n_2}\left(f;q_{1,n_1},q_{2,n_2},x,y\right)-f\left(x,y\right)\right|\leq\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\left|f\left(\frac{q_{1,n_1}^{n_1}\left[k_1\right]_{q_{1,n_1}}}{\left[n_1+k_1\right]_{q_{1,n_1}}},\frac{q_{2,n_2}^{n_2}\left[k_2\right]_{q_{2,n_2}}}{\left[n_2+k_2\right]_{q_{2,n_2}}}\right)-f\left(x,y\right)\right|$$
$$\times P_{n_1,k_1,q_{1,n_1}}\left(x\right)P_{n_2,k_2,q_{2,n_2}}\left(y\right)\qquad(4.17)$$

yazılabilir. Eş 4.17 deki eşitsizliğin sağ tarafındaki mutlak değerli ifadenin içine $f\left(\frac{q_{1,n_1}^{n_1}\left[k_1\right]_{q_{1,n_1}}}{\left[n_1+k_1\right]_{q_{1,n_1}}},y\right)$ terimi eklenip çıkartılıp, elde edilen mutlak değerli ifadede üçgen eşitsizliği kullanılırsa

$$\left|M_{n_1,n_2}\left(f;q_{1,n_1},q_{2,n_2},x,y\right)-f\left(x,y\right)\right|\leq$$

$$\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\left|f\left(\frac{q_{1,n_1}^{n_1}\left[k_1\right]_{q_{1,n_1}}}{\left[n_1+k_1\right]_{q_{1,n_1}}},\frac{q_{2,n_2}^{n_2}\left[k_2\right]_{q_{2,n_2}}}{\left[n_2+k_2\right]_{q_{2,n_2}}}\right)-f\left(\frac{q_{1,n_1}^{n_1}\left[k_1\right]_{q_{1,n_1}}}{\left[n_1+k_1\right]_{q_{1,n_1}}},y\right)\right|$$

$$\times P_{n_1,k_1,q_{1,n_1}}\left(x\right)P_{n_2,k_2,q_{2,n_2}}\left(y\right)$$

$$+\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\left|f\left(\frac{q_{1,n_1}^{n_1}\left[k_1\right]_{q_{1,n_1}}}{\left[n_1+k_1\right]_{q_{1,n_1}}},y\right)-f\left(x,y\right)\right|P_{n_1,k_1,q_{1,n_1}}\left(x\right)P_{n_2,k_2,q_{2,n_2}}\left(y\right) \tag{4.18}$$

elde edilir. $f\in Lip_M\left(f,\alpha\right)$ olduğundan Eş 4.18 den

$$\left|M_{n_1,n_2}\left(f\left(t,s\right);q_{1,n_1},q_{2,n_2},x,y\right)-f\left(x,y\right)\right|\leq M\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\left\{\left(\frac{q_{2,n_2}^{n_2}\left[k_2\right]_{q_{2,n_2}}}{\left[n_2+k_2\right]_{q_{2,n_2}}}-y\right)^2\right\}^{\alpha/2}$$

$$\times P_{n_1,k_1,q_{1,n_1}}\left(x\right)P_{n_2,k_2,q_{2,n_2}}\left(y\right)$$

$$+M\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\left\{\left(\frac{q_{1,n_1}^{n_1}\left[k_1\right]_{q_{1,n_1}}}{\left[n_1+k_1\right]_{q_{1,n_1}}}-x\right)^2\right\}^{\alpha/2}$$

$$\times P_{n_1,k_1,q_{1,n_1}}\left(x\right)P_{n_2,k_2,q_{2,n_2}}\left(y\right) \tag{4.19}$$

bulunur.

Eş 4.19 düzenlenirse

$$\left|M_{n_1,n_2}\left(f\left(t,s\right);q_{1,n_1},q_{2,n_2},x,y\right)-f\left(x,y\right)\right|$$

$$\leq M\sum_{k_1=0}^{\infty} P_{n_1,k_1,q_{1,n_1}}(x)\sum_{k_2=0}^{\infty}\left\{\left(\frac{q_{2,n_2}^{n_2}\left[k_2\right]_{q_{2,n_2}}}{\left[n_2+k_2\right]_{q_{2,n_2}}}-y\right)^2\right\}^{\alpha/2} P_{n_2,k_2,q_{2,n_2}}(y)$$

$$+M\sum_{k_2=0}^{\infty} P_{n_2,k_2,q_{2,n_2}}(y)\sum_{k_1=0}^{\infty}\left\{\left(\frac{q_{1,n_1}^{n_1}\left[k_1\right]_{q_{1,n_1}}}{\left[n_1+k_1\right]_{q_{1,n_1}}}-x\right)^2\right\}^{\alpha/2} P_{n_1,k_1,q_{1,n_1}}(x)$$

(4.20)

bulunur. Eş 4.20 de *Lemma* 3.2.1 (i) kullanılıp $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olacak şekilde $p=\frac{2}{\alpha}$ ve $q=\frac{2}{2-\alpha}$ seçilirse Hölder eşitsizliğinden

$$\left|M_{n_1,n_2}\left(f\left(t,s\right);q_{1,n_1},q_{2,n_2},x,y\right)-f\left(x,y\right)\right|\leq$$

$$\leq M\left\{\sum_{k_1=0}^{\infty} P_{n_1,k_1,q_{1,n_1}}(x)\right\}^{2-\alpha/2}\left\{\sum_{k_1=0}^{\infty}\left(\frac{q_{1,n_1}^{n_1}\left[k_1\right]_{q_{1,n_1}}}{\left[n_1+k_1\right]_{q_{1,n_1}}}-x\right)^2 P_{n_1,k_1,q_{1,n_1}}(x)\right\}^{\alpha/2}$$

$$+M\left\{\sum_{k_2=0}^{\infty} P_{n_2,k_2,q_{2,n_2}}(y)\right\}^{2-\alpha/2}\left\{\sum_{k_2=0}^{\infty}\left(\frac{q_{2,n_2}^{n_2}\left[k_2\right]_{q_{2,n_2}}}{\left[n_2+k_2\right]_{q_{2,n_2}}}-y\right)^2 P_{n_2,k_2,q_{2,n_2}}(y)\right\}^{\alpha/2}$$

(4.21)

elde edilir.

Eş 4.21 de Eş 4.12, Eş 4.15 ve *Lemma* 3.2.1 (i) göz önüne alınırsa

$$\left|M_{n_1,n_2}\left(f\left(t,s\right);q_{1,n_1},q_{2,n_2},x,y\right)-f\left(x,y\right)\right|$$

$$\leq M\left(M_{n_1}\left(\left(t-x\right)^2;q_{1,n_1},x\right)\right)^{\alpha/2}\left(\sum_{k_1=0}^{\infty} P_{n_1,k_1,q_{1,n_1}}(x)\right)^{2-\alpha/2}$$

$$+\left(M_{n_2}\left(\left(s-y\right)^2;q_{2,n_2},y\right)\right)^{\alpha/2}\left(\sum_{k_2=0}^{\infty} P_{n_2,k_2,q_{2,n_2}}(y)\right)^{2-\alpha/2}$$

$$\leq M\left(\left(1-q_{1,n_1}\right)^2 x^2+\frac{xq_{1,n_1}^{2n_1}}{\left[n_1\right]_{q_{1,n_1}}}\right)^{\alpha/2}+M\left(\left(1-q_{2,n_2}\right)^2 y^2+\frac{yq_{2,n_2}^{2n_2}}{\left[n_2\right]_{q_{2,n_2}}}\right)^{\alpha/2}$$

elde edilir. Bu son eşitsizlikte $(x,y)\in I^2$ için eşitsizliğin her iki tarafının maksimumu alınır ve δ_{1,n_1} ve δ_{2,n_2} Eş 4.7 de verildiği gibi alınırsa

$$\left\|M_{n_1,n_2}\left(f;q_{1,n_1},q_{2,n_2},.\right)-f\right\|_{C\left(I^2\right)}\leq M\left(\delta_{1,n_1}{}^{\alpha}+\delta_{2,n_2}{}^{\alpha}\right)$$

bulunur. Bu da ispatı tamamlar.

Uyarı 4.3.1:

$0<q_{1,n_1},q_{2,n_2}\leq 1$ olmak üzere $\left(q_{1,n_1}\right)$ ve $\left(q_{2,n_2}\right)$ dizileri, Eş 4.5 i gerçeklediğinden $\lim\limits_{n_1\to\infty}\delta_{1,n_1}=0$ ve $\lim\limits_{n_2\to\infty}\delta_{2,n_2}=0$ dır. Böylece *Teorem* 4.3.1 ve *Teorem* 4.3.2 den $f\in C\left(I^2\right)$ için

$$\lim_{n_1,n_2\to\infty}\left\|M_{n_1,n_2}\left(f;q_{1,n_1},q_{2,n_2},.\right)-f\right\|_{C\left(I^2\right)}=0$$

dır.

5. *q*-MEYER-KÖNİG VE ZELLER OPERATÖRLERİNİN GENEL BİR AİLESİ

Bu bölümde Eş 3.1 de verilen operatörlerin genel bir ailesi verilerek, bu operatörlerin yaklaşım özellikleri incelenecektir.

5.1. Ω_n Operatörlerinin Oluşturulması

Tanım 5.1.1:

$n\in \mathbb{N}, t\in[0,1]$ ve $0<a_n(t)\leq 1$ olmak üzere bir $(a_n(t))$ fonksiyon dizisi verilsin. Her $n\in \mathbb{N}, q\in(0,1]$ ve $f\in C[0,1]$ için

$$\Omega_n(f;q,x)=\begin{cases}\prod\limits_{s=0}^{n}(1-q^s x)\sum\limits_{k=0}^{\infty} f\left(\dfrac{a_n(q)[k]_q}{[n+k]_q}\right)\begin{bmatrix} n+k \\ k\end{bmatrix}_q x^k, & x\in[0,1) \quad ise \\ f(1), & x=1 \quad ise\end{cases} \tag{5.1}$$

şeklinde tanımlanan Ω_n operatörleri Eş 3.1 de verilen *q*-Meyer-König ve Zeller operatörlerinin bir genelleştirmesidir [Özarslan ve Duman, 2008]. Burada $a_n(q)=1$ alınırsa Trif in tanımladığı *q*-Meyer-König ve Zeller operatörü elde edilir [Trif, 2000]. $a_n(q)=q^n$ alınması durumunda ise, *q*-Meyer-König ve Zeller operatörlerinin farklı bir çeşidi olan Doğru ve Duman tarafından tanımlanan Eş 3.1 de verilen operatörler elde edilir [Doğru ve Duman, 2006]. $q=1$ alındığında ise, bu operatörler Eş 1.2 de verilen Bernstein operatörlerine indirgenir [Cheney-Sharma,1964].

5.2. Ω_n Operatörlerinin Yaklaşım Özellikleri

İlk olarak, Ω_n operatörlerinin yaklaşım özellikleri incelenirken kullanılacak olan aşağıdaki *Lemma* verilecektir.

Lemma 5.2.1:

$i=0,1,2$ için $e_i\left(x\right)=x^i$ test fonksiyonu olmak üzere her $x\in\left[0,1\right)$ ve $n\in\mathbb{N}$ için

(i) $\Omega_n\left(e_0\left(t\right);q,x\right)=1$

(ii) $\Omega_n\left(e_1\left(t\right);q,x\right)=a_n\left(q\right)x$

(iii) $a_n^2\left(q\right)x^2\leq\Omega_n\left(e_2\left(t\right);q,x\right)\leq qa_n^2\left(q\right)x^2+\dfrac{a_n^2\left(q\right)x}{\left[n\right]_q}$

dir [Özarslan ve Duman, 2008].

İspat:

$$\text{(i)}\,\Omega_n\left(e_0\left(t\right);q,x\right)=\prod_{s=0}^{n}\left(1-q^s x\right)\sum_{k=0}^{\infty}\begin{bmatrix}n+k\\k\end{bmatrix}_q x^k$$

olup Eş 2.9 dan ispat açıktır.

$$\text{ii)}\,\Omega_n\left(e_1\left(t\right);q,x\right)=\prod_{s=0}^{n}\left(1-q^s x\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_n\left(q\right)\left[k\right]_q}{\left[n+k\right]_q}\begin{bmatrix}n+k\\k\end{bmatrix}_q x^k$$

$$
\begin{aligned}
&=\prod_{s=0}^{n}\left(1-q^{s}x\right)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_n\left(q\right)\left[k\right]_q}{\left[n+k\right]_q}\frac{\left[n+k\right]_q!}{\left[k\right]_q!\left[n\right]_q!}x^{k} \\
&=\prod_{s=0}^{n}\left(1-q^{s}x\right)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_n\left(q\right)\left[n+k-1\right]_q!}{\left[k-1\right]_q!\left[n\right]_q!}x^{k-1}x \\
&=a_n\left(q\right)x\prod_{s=0}^{n}\left(1-q^{s}x\right)\sum_{k=1}^{\infty}\begin{bmatrix}n+k-1\\k-1\end{bmatrix}_q x^{k-1} \\
&=a_n\left(q\right)x\prod_{s=0}^{n}\left(1-q^{s}x\right)\sum_{k=0}^{\infty}\begin{bmatrix}n+k\\k\end{bmatrix}_q x^{k} \\
&=a_n\left(q\right)x\prod_{s=0}^{n}\left(1-q^{s}x\right)\frac{1}{\prod_{s=0}^{n}\left(1-xq^{s}\right)} \\
&=a_n\left(q\right)x
\end{aligned}
$$

iii) Eş 3.2 ve Eş 3.3 ten *Lemma* 3.2.1 (iii) dekine benzer işlemlerle ispat elde edilir.

Şimdi Ω_n operatörünün tanımında $q\in\left(0,1\right]$ yerine $0<q_n\leq 1$ olmak üzere

$$
\lim_{n\to\infty}a_n\left(q_n\right)=\lim_{n\to\infty}q_n=1 \text{ ve } \lim_{n\to\infty}\left[n\right]_{q_n}=\infty \qquad (5.2)
$$

olacak şekilde bir $\left(q_n\right)$ dizisi seçilebilir. Gerçekten her $t\in\left[0,1\right]$ ve $n\in\mathbb{N}$ için $a_n\left(t\right)=t$ ve $q_n:=1-\dfrac{1}{2n}$ alınırsa, $q_n\in\left(0,1\right]$ için $a_n\left(q_n\right)=q_n$ olur. $\left(q_n\right)$ dizisi Eş 5.2 yi gerçekler. Böylece q yerine $\left(q_n\right)$ dizisi alınarak ve *Lemma* 5.2.1 den

$$
\lim_{n\to\infty}\left\|\Omega_n\left(e_i;q_n,.\right)-e_i\right\|_{C[0,1]}=0, \qquad i=0,1,2 \qquad (5.3)
$$

sonucu elde edilir. Bu durumda Eş 5.3 ve Korovkin teoreminden Ω_n operatörleri için aşağıdaki yaklaşım teoremi verilebilir [Özarslan ve Duman, 2008].

Teorem 5.2.1:

Her $n \in \mathbb{N}$ için $0 < q_n \leq 1$ olmak üzere (q_n) dizisi Eş 5.2 yi gerçeklesin. Bu durumda her $f \in C[0,1]$ için $(\Omega_n(f;q_n,.))$ dizisi $[0,1]$ aralığında *f* ye düzgün yakınsaktır [Özarslan ve Duman, 2008] .

5.3. Ω_n Operatörleri İçin Korovkin Yaklaşımında Temel Bir Sonuç

$x \in [0, A]$ için Ω_n operatöründe *q* yerine $0 < q_n \leq 1$ ve

$$\lim_{n\to\infty} a_n(q_n) = d < 1, \qquad \lim_{n\to\infty} q_n = 1$$

olacak şekilde bir (q_n) dizisi seçilsin.

Bu durumda $x \in [0, A]$ için Ω_n operatörler dizisinin düzgün yakınsaklığı *Teorem* 3.3.2 de Doğru ve Gupta tarafından verilen Heping tipli bir teorem yardımıyla bu kısımda incelenecektir.

Teorem 5.3.1:

$q \in (0,1]$ olmak üzere $(a_n(q))$, $(0,1]$ aralığında azalan bir dizi olsun. Eğer $f : [0, A] \to \mathbb{R}^+$ konveks ve artan bir fonksiyon ise, bu durumda $x \in [0, A]$ için $(\Omega_n(f;q,x))$ dizisi *n* ye göre artmayandır.

İspat:

Teorem 3.3.3 ün ispatında q^n yerine $a_n(q)$ alınırsa benzer işlemlerle ispat elde edilir.

Şimdi Ω_n operatörünün yaklaşımı Doğru ve Gupta [Doğru ve Gupta, 2006] tarafından verilen Heping tipli bir teorem yardımıyla verilebilir.

Teorem 5.3.2:

Her $n \in \mathbb{N}$ için $q_n, a_n(q_n) \in (0,1]$ olmak üzere (q_n) ve $(a_n(q_n))$ dizileri için

(i) $(a_n(q_n))$ azalan bir dizi,

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n(q_n) = d < 1$ ve $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = 1$

gerçeklensin. Bu durumda her $f \in C[0,A]$ için

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \Omega_n(f) - \Omega_\infty(f) \right\|_{C[0,A]} = 0$$

dır.

İspat:

Lemma 5.2.1 (i), (ii) ve (iii) den $(\Omega_n(e_1;q_n,x))$ dizisinin $\Omega_\infty(e_1;1,x) = dx$ e ve $(\Omega_n(e_2;q_n,x))$ dizisinin $\Omega_\infty(e_2;1,x) = d^2x^2$ ye $C[0,A]$ içinde yakınsaklığı elde edilir. Buradan *Teorem* 3.3.2 (i) sağlanır. Buna ek olarak *Teorem* 5.3.1 den *Teorem* 3.3.2 (ii) sağlanır. Böylece *Teorem* 3.3.2 den ispat tamamlanır.

5.4. Ω_n Operatörlerinin Yakınsama Hızı

Bu kısımda süreklilik modülü ve Lipschitz sınıfından fonksiyonlar yardımıyla Ω_n operatörlerinin yakınsama hızını veren teoremler verilecektir. Bu teoremlerin ispatları, Bölüm 3.4 deki teoremlerin ispatlarına benzer olduğundan verilmeyecektir.

Teorem 5.4.1:

$x \in [0,1]$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ ve $f \in C[0,1]$ için,

$$\left|\Omega_n(f;q,x) - f(x)\right| \le 2\omega\big(f;\delta_n(x,q)\big)$$

sağlanır. Burada

$$\delta_n(x,q) = \left\{\left[3 - 2a_n(q) - qa_n^2(q)\right]x^2 + \frac{a_n^2(q)\,x}{[n]_q}\right\}^{1/2} \tag{5.4}$$

dır [Özarslan ve Duman, 2008].

Teorem 5.4.2:

$x \in [0,1]$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ ve $f \in Lip_M(\alpha)$ için

$$\left|\Omega_n(f;q,x) - f(x)\right| \le M\delta_n^{\alpha}(x,q)$$

gerçeklenir. Burada $\delta_n(x,q)$ Eş 5.4 te tanımlandığı gibidir [Özarslan ve Duman, 2008].

Uyarı 5.4.1:

Eş 5.2 yi sağlayan bir (q_n) dizisi verilsin. Eğer *Teorem* 5.4.1 ve *Teorem* 5.4.2 de $q = q_n$ alınırsa, bu durumda $\lim\limits_{n\to\infty}\delta_n(x,q_n) = 0$ olur. Bu da $\lim\limits_{n\to\infty}\Omega_n(f;q_n,x) = f(x)$ olmasını garanti eder. Böylece *Teorem* 5.4.1 ve *Teorem* 5.4.2, $\left(\Omega_n\left(f;q_n,x\right)\right)$ operatörler dizisinin $f\left(x\right)$ e yakınsama hızını verir [Özarslan ve Duman, 2008].

5.5. Ω_n Operatörlerinin r-yinci Basamaktan Genelleştirilmesi

Bu bölümde, $r\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ ve $f^{(0)}\left(x\right)=f\left(x\right)$ olmak üzere $C^{(r)}\left[0,1\right]$ ile r-yinci mertebeden türevleri, $f^{(r)}$, $\left[0,1\right]$ aralığında sürekli olan reel değerli tüm fonksiyonların uzayı gösterilecektir.

Tanım 5.5.1:

Kirov ve Popava [Kirov ve Popava, 1993] ya benzer metot ile $\Omega_n\left(f;q,x\right)$ lineer pozitif operatörlerinin *r*-yinci basamaktan genelleştirmesi

$$\Omega_{n,r}\left(f;q,x\right)=\prod_{s=0}^{n}\left(1-q^s x\right)\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{r}f^{(i)}\left(\xi_{n,k}\left(q\right)\right)\begin{bmatrix}n+k\\k\end{bmatrix}_q\frac{\left(x-\xi_{n,k}\left(q\right)\right)^i}{i!}x^k \tag{5.5}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\xi_{n,k}\left(q\right):=\dfrac{a_n\left(q\right)\left[k\right]_q}{\left[n+k\right]_q}$, $f\in C^{(r)}\left[0,1\right]$ ve $x\in\left[0,1\right)$ dır.

Eğer $x=1$ ise,

$$\Omega_{n,r}\left(f;q,1\right):=f\left(1\right)$$

olarak tanımlanır. $q\in\left(0,1\right]$ ve $n\in\mathbb{N}$ olmak üzere her $f\in C\left[0,1\right]$ ve $x\in\left[0,1\right]$ için Eş 5.5 te $r=0$ alınırsa,

$$\Omega_{n,0}\left(f;q,x\right)=\Omega_n\left(f;q,x\right)$$

elde edilir.

Şimdi de $\Omega_{n,r}\left(f;q,x\right)$ operatörleri için aşağıdaki yaklaşım teoremi verilebilir.

Teorem 5.5.1:

$n\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ ve $x\in[0,1]$ olsun. Bu durumda $f^{(r)}\in Lip_M\left(\alpha\right)$ olacak şekildeki her $f\in C^{(r)}[0,1]$ için

$$\left|\Omega_{n,r}\left(f;q,x\right)-f\left(x\right)\right|\leq\frac{M\alpha B\left(\alpha,r\right)}{\left(r-1\right)!\left(\alpha+r\right)}\left|\Omega_{n}\left(H;q,x\right)\right|$$

dır. Burada her $x,t\in[0,1]$ için $H\left(t\right)=\left|x-t\right|^{\alpha+r}$ ve $B\left(\alpha,r\right)$, Beta fonksiyonudur [Özarslan ve Duman, 2008].

İspat:

$x=1$ için açıktır. $x\in[0,1)$ olduğu kabul edilsin. Eş 5.5 ten

$$f\left(x\right)-\Omega_{n,r}\left(f;q,x\right)=\prod_{s=0}^{n}\left(1-q^{s}x\right)\sum_{k=0}^{\infty}\left\{f\left(x\right)-\sum_{i=0}^{r}f^{(i)}\left(\xi_{n,k}\left(q\right)\right)\frac{\left(x-\xi_{n,k}\left(q\right)\right)^{i}}{i!}\right\}$$
$$\times\begin{bmatrix}n+k\\k\end{bmatrix}_{q}x^{k}\tag{5.6}$$

yazılabilir. Taylor integral formülünden

$$f\left(x\right)=\sum_{k=0}^{r}\frac{f^{(k)}\left(\beta\right)}{k!}\left(x-\beta\right)^{k}+\frac{\left(x-\beta\right)^{r}}{\left(r-1\right)!}\int_{0}^{1}\left(1-t\right)^{r-1}\left[f^{(r)}\left(\beta\right)+t\left(x-\beta\right)-f^{(r)}\left(\beta\right)\right]dt$$

dir. Burada $\beta := \xi_{n,k}(q)$ dir.

$$f(x) - \sum_{i=0}^{r} f^{(i)}(\xi_{n,k}(q)) \frac{(x-\xi_{n,k}(q))^i}{i!} = \frac{(x-\xi_{n,k}(q))^r}{(r-1)!} \int_0^1 (1-t)^{r-1} \times$$

$$\left[f^{(r)}\left(\xi_{n,k}(q) + t\left(x-\xi_{n,k}(q)\right)\right) - f^{(r)}\left(\xi_{n,k}(q)\right)\right] dt \tag{5.7}$$

bulunur. $f^{(r)} \in Lip_M(\alpha)$ olduğundan

$$\left| f^{(r)}\left(\xi_{n,k}(q) + t\left(x-\xi_{n,k}(q)\right)\right) - f^{(r)}\left(\xi_{n,k}(q)\right)\right| \leq \mathrm{M}\left|\xi_{n,k}(q) + t\left(x-\xi_{n,k}(q)\right) - \xi_{n,k}(q)\right|^{\alpha}$$

$$= Mt^{\alpha}\left|x-\xi_{n,k}(q)\right|^{\alpha} \tag{5.8}$$

yazılabilir. Eş 5.8, Eş 5.7 de kullanılıp, Beta fonksiyonun

$$\int_0^1 (1-t)^{r-1} t^{\alpha} dt = B(1+\alpha, r) = \frac{\alpha}{\alpha+r} B(\alpha, r)$$

tanımı kullanılırsa

$$\left| f(x) - \sum_{i=0}^{r} f^{(i)}(\xi_{n,k}(q)) \frac{(x-\xi_{n,k}(q))^i}{i!} \right| \leq \frac{M\alpha B(\alpha,r)}{(r-1)!(\alpha+r)} \left|x-\xi_{n,k}(q)\right|^{r+\alpha} \tag{5.9}$$

elde edilir. Eş 5.6 ve Eş 5.9 birlikte düşünüldüğünde

$$\left| f(x) - \Omega_{n,r}(f;q,x)\right| \leq \prod_{s=0}^{n}(1-q^s x) \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{M\alpha B(\alpha,r)}{(r-1)!(\alpha+r)} \left|x-\xi_{n,k}(q)\right|^{r+\alpha}\right\} \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q x^k$$

$$= \frac{M\alpha B(\alpha,r)}{(r-1)!(\alpha+r)} \Omega_n(H;q,x)$$

elde edilir ki, bu da istenilendir.

Teorem 5.5.2 deki H fonksiyonu $C[0,1]$ e aittir. $H(x)=0$ dır. Diğer taraftan her $x,t\in[0,1]$ $r\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ ve $\alpha\in(0,1]$ için

$$\left|H(t)-H(x)\right|=\left|t-x\right|^{r}\left|t-x\right|^{\alpha}\leq\left|t-x\right|^{\alpha}$$

olduğundan $H\in Lip_{1}(\alpha)$ dır. Böylece *Teorem* 5.4.1, *Teorem* 5.4.2 ve *Teorem* 5.5.1 den aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 5.5.1:

$x\in[0,1]$, $r\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ olsun. Bu durumda $f^{(r)}\in Lip_{M}(\alpha)$ olacak şekildeki her $f\in C^{(r)}[0,1]$ için

$$\left|\Omega_{n,r}(f;q,x)-f(x)\right|\leq\frac{2M\alpha B(\alpha,r)}{(r-1)!(\alpha+r)}\omega\big(H,\delta_{n}(x,q)\big)$$

dır. Burada $\delta_{n}(x,q)$, Eş 5.4 ile verilir [Özarslan ve Duman, 2008].

Sonuç 5.5.2:

$x\in[0,1]$ ve $r\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ olsun. Bu durumda $f^{(r)}\in Lip_{M}(\alpha)$ olacak şekilde her $f\in C^{(r)}[0,1]$ için

$$\left|\Omega_{n,r}(f;q,x)-f(x)\right|\leq\frac{M\alpha B(\alpha,r)}{(r-1)!(\alpha+r)}\delta_{n}^{\alpha}(x,q)$$

dır [Özarslan ve Duman, 2008].

Sonuç olarak, $n \in \mathbb{N}$ ve $0 < q_n \leq 1$ için (q_n) dizisi Eş 5.2 yi sağlasın. Burada Eş 5.5 de verilen $\Omega_{n,r}(f;q,x)$ operatörlerinin tanımında $q \in (0,1]$ yerine (q_n) dizisi alınarak *Sonuç* 5.5.1 den (ya da *Sonuç* 5.5.2 den) $(\Omega_{n,r}(f;q_n,x))$ operatörler dizisinin $[0,1]$ kapalı aralığında f’ ye düzgün yakınsaklığı elde edilir..

6. İKİ DEĞİŞKENLİ *q*-MEYER-KÖNİG VE ZELLER OPERATÖRLERİNİN GENEL BİR AİLESİ

Bu bölümde Eş 5.1 de verilen q-Meyer-König ve Zeller operatörlerinin genel bir ailesinin iki değişkenli bir genelleştirmesi olan Ω_{n_1,n_2} operatörleri tanımlanarak, bu operatörlerin yaklaşım özellikleri incelenecektir.

6.1. Ω_{n_1,n_2} Operatörlerinin Oluşturulması

Bu kısımda Eş 5.1 de verilen operatörlerin iki değişkenli bir genelleştirmesi Barbosu nun tekniğinden yararlanılarak inşa edilecektir [Barbosu, 2000].

Tanım 6.1.1:

$0<A<1$ için $I^2=[0,A]\times[0,A]=[0,A]^2$ olsun. $f\in C\left(I^2\right)$ ve $0<q_1,q_2\leq 1$ için Eş 5.1 de verilen operatörlerin iki değişkenli ifadesi

$$\Omega_{n_1,n_2}(f;q_1,q_2,x,y)=\prod_{s_1=0}^{n_1}\left(1-q_1^{s_1}x\right)\prod_{s_2=0}^{n_2}\left(1-q_2^{s_2}y\right)\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}f\left(\frac{a_{n_1}(q_1)[k_1]_{q_1}}{[n_1+k_1]_{q_1}},\frac{a_{n_2}(q_2)[k_2]_{q_2}}{[n_2+k_2]_{q_2}}\right)$$

$$\times\begin{bmatrix}n_1+k_1\\k_1\end{bmatrix}_{q_1}\begin{bmatrix}n_2+k_2\\k_2\end{bmatrix}_{q_2}x^{k_1}y^{k_2} \qquad (6.1)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $t\in[0,1]$ ve $n\in\mathbb{N}$ için $0<a_n(t)\leq 1$ dir.

Eş 6.1 de verilen operatörlerin lineer ve pozitif olduğu açıktır. $q_1=q_2=1$ ve $a_{n_1}(q_1)=a_{n_2}(q_2)=1$ alınırsa klasik Meyer-König ve Zeller operatörlerinin Stancu tipli genellemesi elde edilir [Stancu, 1972]. $a_{n_1}(q_1)=q_1^{n_1}$ ve $a_{n_2}(q_2)=q_2^{n_2}$ alınması durumunda ise Doğru ve Gupta tarafından tanımlanan ve Eş 4.1 de verilen iki değişkenli q-Meyer-König ve Zeller operatörleri elde edilir [Doğru ve Gupta, 2006].

Şimdi Eş 6.1 de verilen operatörlerin yaklaşım özellikleri incelenirken kullanılacak olan bir *Lemma* verilebilir.

Lemma 6.1.1:

(i) $\Omega_{n_1,n_2}\left(f;q_1,q_2,x,y\right)=\Omega_{n_1}{}^{x}\left(\Omega_{n_2}{}^{y}\left(f;q_2,x,y\right)\right)$

(ii) $\Omega_{n_1,n_2}\left(f;q_1,q_2,x,y\right)=\Omega_{n_2}{}^{y}\left(\Omega_{n_1}{}^{x}\left(f;q_1,x,y\right)\right)$

eşitlikleri sağlanır. Burada

$$\Omega_{n_1}{}^{x}\left(f;q_1,x,y\right)=\prod_{s_1=0}^{n_1}\left(1-q_1{}^{s_1}x\right)\sum_{k_1=0}^{\infty}f\left(\frac{a_{n_1}\left(q_1\right)\left[k_1\right]_{q_1}}{\left[n_1+k_1\right]_{q_1}},y\right)\begin{bmatrix}n_1+k_1\\k_1\end{bmatrix}_{q_1}x^{k_1}$$

ve

$$\Omega_{n_2}{}^{y}\left(f;q_2,x,y\right)=\prod_{s_2=0}^{n_2}\left(1-q_2{}^{s_2}y\right)\sum_{k_2=0}^{\infty}f\left(x,\frac{a_{n_2}\left(q_2\right)\left[k_2\right]_{q_2}}{\left[n_2+k_2\right]_{q_2}}\right)\begin{bmatrix}n_2+k_2\\k_2\end{bmatrix}_{q_2}y^{k_2}$$

şeklinde tanımlanır.

İspat:

Lemma 4.1.1 in ispatına benzer şekilde kolayca yapılabilir.

6.2. Ω_{n_1,n_2} Operatörlerinin Yaklaşım Özellikleri

Lemma 6.2.1:

$e_{ij}: I^2 \to I$, $e_{ij}(t,s) = t^i s^j$ iki boyutlu test fonksiyonu olmak üzere, Eş 6.1 de verilen operatörler için aşağıdaki sonuçlar sağlanır.

(i) $\Omega_{n_1,n_2}\left(e_{00}(t,s); q_1, q_2, x, y\right) = 1$

(ii) $\Omega_{n_1,n_2}\left(e_{10}(t,s); q_1, q_2, x, y\right) = a_{n_1}(q_1)\, x$

(iii) $\Omega_{n_1,n_2}\left(e_{01}(t,s); q_1, q_2, x, y\right) = a_{n_2}(q_2)\, y$

(iv) $a_{n_1}{}^2(q_1)\, x^2 \le \Omega_{n_1,n_2}\left(e_{20}(t,s); q_1, q_2, x, y\right) \le q_1 a_{n_1}{}^2(q_1)\, x^2 + \dfrac{a_{n_1}{}^2(q_1)\, x}{[n_1]_{q_1}}$

(v) $a_{n_2}{}^2(q_2)\, y^2 \le \Omega_{n_1,n_2}\left(e_{02}(t,s); q_1, q_2, x, y\right) \le q_2 a_{n_2}{}^2(q_2)\, y^2 + \dfrac{a_{n_2}{}^2(q_2)\, y}{[n_2]_{q_2}}$

İspat:

Lemma 4.2.1 in ispatındaki yöntemle kolayca elde edilir.

Teorem 6.2.1:

$0 < q_{1,n_1}, q_{2,n_2} \le 1$ ve $0 < a_{n_1}\left(q_{1,n_1}\right), a_{n_2}\left(q_{2,n_2}\right) \le 1$ olacak şekildeki $\left(q_{1,n_1}\right)$, $\left(q_{2,n_2}\right)$, $\left(a_{n_1}\left(q_{1,n_1}\right)\right)$ ve $\left(a_{n_2}\left(q_{2,n_2}\right)\right)$ dizileri için

$$\begin{aligned} &\lim_{n_1\to\infty} q_{1,n_1} = \lim_{n_1\to\infty} a_{n_1}\left(q_{1,n_1}\right) = 1, \qquad \lim_{n_1\to\infty} [n_1]_{q_{1,n_1}} = \infty \\ &\lim_{n_2\to\infty} q_{2,n_2} = \lim_{n_2\to\infty} a_{n_2}\left(q_{2,n_2}\right) = 1, \qquad \lim_{n_2\to\infty} [n_2]_{q_{2,n_2}} = \infty \end{aligned} \tag{6.2}$$

koşulları gerçeklenirse, bu durumda $f \in C\left(I^2\right)$ için $\left(\Omega_{n_1,n_2}\left(f;q_{1,n_1},q_{2,n_2},x,y\right)\right)$ operatörler dizisi I^2 üzerinde $f\left(x,y\right)$ ye düzgün yakınsaktır.

İspat:

Lemma 6.2.1 (iv) ve (v) den

$$a_{n_1}^{\ 2}\left(q_1\right)x^2+a_{n_2}^{\ 2}\left(q_2\right)y^2 \le \Omega_{n_1,n_2}\left(e_{20};q_1,q_2,x,y\right)+\Omega_{n_1,n_2}\left(e_{02};q_1,q_2,x,y\right)$$

$$\le q_1 a_{n_1}^{\ 2}\left(q_1\right)x^2+\frac{a_{n_1}^{\ 2}\left(q_1\right)x}{\left[n_1\right]_{q_1}}+q_2 a_{n_2}^{\ 2}\left(q_2\right)y^2+\frac{a_{n_2}^{\ 2}\left(q_2\right)y}{\left[n_2\right]_{q_2}}$$

elde edilir. $n_1 \to \infty$ ve $n_2 \to \infty$ için limit alınır ve Eş 6.2 kullanılırsa, sıkıştırma teoreminden

$$\Omega_{n_1,n_2}\left(e_{20}+e_{02};q_{1,n_1},q_{2,n_2},x,y\right) \rightrightarrows x^2+y^2$$

bulunur.

Lemma 6.2.1 de (i), (ii) ve (iii) ifadelerinde $n_1 \to \infty$ ve $n_2 \to \infty$ için limit alınır ve Eş 6.2 kullanılırsa

$$\Omega_{n_1,n_2}\left(e_{00};q_{1,n_1},q_{2,n_2},x,y\right) \rightrightarrows 1$$
$$\Omega_{n_1,n_2}\left(e_{10};q_{1,n_1},q_{2,n_2},x,y\right) \rightrightarrows x$$
$$\Omega_{n_1,n_2}\left(e_{01};q_{1,n_1},q_{2,n_2},x,y\right) \rightrightarrows y$$

elde edilir. Böylece *Teorem* 4.2.1 den ispat tamamlanır.

Teorem 5.3.2 ve *Teorem* 6.2.1 yardımıyla aşağıdaki Heping tipli yaklaşım sonucu verilebilir.

Sonuç 6.2.1:

$0 < q_{1,n_1}, q_{2,n_2} \leq 1$ ve $0 < a_{n_1}\left(q_{1,n_1}\right),\ a_{n_2}\left(q_{2,n_2}\right) \leq 1$ olacak şekildeki $\left(q_{1,n_1}\right)$, $\left(q_{2,n_2}\right)$,$\left(a_{n_1}\left(q_{1,n_1}\right)\right)$ ve $\left(a_{n_2}\left(q_{2,n_2}\right)\right)$ dizileri için

$$\lim_{n_1\to\infty} a_{n_1}\left(q_{1,n_1}\right) = e_1 < 1, \qquad \lim_{n_1\to\infty} q_{1,n_1} = 1$$
$$\lim_{n_2\to\infty} a_{n_2}\left(q_{2,n_2}\right) = e_2 < 1, \qquad \lim_{n_2\to\infty} q_{2,n_2} = 1$$

koşulları sağlansın. Bu durumda her $f \in C\left(I^2\right)$ için

$$\lim_{n_1,n_2\to\infty} \left\| \Omega_{n_1,n_2}(f) - \Omega_{\infty,\infty}(f) \right\|_{C\left(I^2\right)} = 0$$

dır.

6.3. Ω_{n_1,n_2} Operatörlerinin Yakınsama Hızı

Bu kısımda Eş 6.1 de verilen operatörün yaklaşım hızları, iki değişkenli fonksiyonlar için tanımlanan süreklilik modülü ve Lipschitz sınıfından fonksiyonlar yardımıyla verilecektir. Bu kısımdaki teoremlerin ispatları Bölüm 4 de verilen ispatlara benzer olduğundan, teoremler ispatsız olarak verilecektir.

Teorem 6.3.1:

$0<q_{1,n_1},q_{2,n_2}\le 1$ ve $0<a_{n_1}\left(q_{1,n_1}\right),\ a_{n_2}\left(q_{2,n_2}\right)\le 1$ olacak şekildeki $\left(q_{1,n_1}\right)$, $\left(q_{2,n_2}\right)$, $\left(a_{n_1}\left(q_{1,n_1}\right)\right)$ ve $\left(a_{n_2}\left(q_{2,n_2}\right)\right)$ dizileri için Eş 6.2 gerçeklensin. Bu durumda her $f\in C\left(I^2\right)$ için

$$\left\|\Omega_{n_1,n_2}\left(f;q_{1,n_1},q_{2,n_2},.\right)-f\right\|_{C\left(I^2\right)}\le 4\omega\left(f,\delta_{1,n_1}\left(q_{1,n_1}\right),\delta_{2,n_2}\left(q_{2,n_2}\right)\right)$$

dir. Burada

$$\begin{aligned}\delta_{1,n_1}\left(q_{1,n_1}\right)&=\left\{\left[3-2a_{n_1}\left(q_{1,n_1}\right)-q_{1,n_1}a_{n_1}{}^2\left(q_{1,n_1}\right)\right]A^2+\frac{a_{n_1}{}^2\left(q_{1,n_1}\right)A}{\left[n_1\right]_{q_{1,n_1}}}\right\}^{1/2}\\ \delta_{2,n_2}\left(q_{2,n_2}\right)&=\left\{\left[3-2a_{n_2}\left(q_{2,n_2}\right)-q_{2,n_2}a_{n_2}{}^2\left(q_{2,n_2}\right)\right]A^2+\frac{a_{n_2}{}^2\left(q_{2,n_2}\right)A}{\left[n_2\right]_{q_{2,n_2}}}\right\}^{1/2}\end{aligned}\qquad(6.3)$$

dir.

Teorem 6.3.2:

$0<q_{1,n_1},q_{2,n_2}\le 1$ ve $0<a_{n_1}\left(q_{1,n_1}\right),a_{n_2}\left(q_{2,n_2}\right)\le 1$ olacak şekildeki $\left(q_{1,n_1}\right)$, $\left(q_{2,n_2}\right)$, $\left(a_{n_1}\left(q_{1,n_1}\right)\right)$ ve $\left(a_{n_2}\left(q_{2,n_2}\right)\right)$ dizileri için Eş 6.2 gerçeklensin. Eğer $f\in Lip_M\left(f;\alpha\right)$ ise, bu durumda

$$\left\|\Omega_{n_1,n_2}\left(f;q_{1,n_1},q_{2,n_2},.\right)-f\right\|_{C\left(I^2\right)}\le M\left(\delta_{1,n_1}{}^{\alpha}+\delta_{2,n_2}{}^{\alpha}\right)$$

gerçeklenir. Burada δ_{1,n_1} ve δ_{2,n_2} Eş 6.3 te verildiği gibidir.

Uyarı 6.3.1:

Teorem 6.3.1 ve *Teorem* 6.3.2 deki δ_{1,n_1} ve δ_{2,n_2} için

$$\lim_{n_1\to\infty}\delta_{1,n_1}\left(q_{1,n_1}\right)=0 \text{ ve } \lim_{n_2\to\infty}\delta_{2,n_2}\left(q_{2,n_2}\right)=0$$

olduğundan

$$\lim_{n_1,n_2\to\infty}\left\|\Omega_{n_1,n_2}\left(f;q_{1,n_1},q_{2,n_2},.\right)-f\right\|_{C\left(I^2\right)}=0$$

dır.

6.4. Ω_{n_1,n_2} Operatörlerinin r-yinci Basamaktan Bir Genelleştirilmesi

Bu bölümde $r\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ olmak üzere, $C^{(r)}\left(I^2\right)$ ile I^2 de *r*-yinci mertebeden sürekli kısmi türevlenebilir f fonksiyonlarının uzayı gösterilecektir.

Tanım 6.4.1:

$f\in C^{(r)}\left(I^2\right)$ olmak üzere Ω_{n_1,n_2} operatörlerinin r-inci basamaktan genelleştirmesi aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\begin{aligned}\Omega_{n_1,n_2,r}\left(f;q_1,q_2,x,y\right)=&\prod_{s_1=0}^{n_1}\left(1-q_1^{s_1}x\right)\prod_{s_2=0}^{n_2}\left(1-q_2^{s_2}y\right)\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\begin{bmatrix}n_1+k_1\\k_1\end{bmatrix}_{q_1}\begin{bmatrix}n_2+k_2\\k_2\end{bmatrix}_{q_2}x^{k_1}y^{k_2}\\&\times K_{r,\left(\xi_{n_1,k_1}(q_1),\xi_{n_2,k_2}(q_2)\right)}\left(x-\xi_{n_1,k_1}\left(q_1\right),y-\xi_{n_2,k_2}\left(q_2\right)\right)\end{aligned}\tag{6.4}$$

Burada $\xi_{n_1,k_1}\left(q_1\right)=\dfrac{a_{n_1}\left(q_1\right)\left[k_1\right]_{q_1}}{\left[n_1+k_1\right]_{q_1}}$, $\xi_{n_2,k_2}\left(q_2\right)=\dfrac{a_{n_2}\left(q_2\right)\left[k_2\right]_{q_2}}{\left[n_2+k_2\right]_{q_2}}$,

$$\begin{aligned}K_{r,\left(\xi_{n_1,k_1}(q_1),\xi_{n_2,k_2}(q_2)\right)}\left(x-\xi_{n_1,k_1}\left(q_1\right),y-\xi_{n_2,k_2}\left(q_2\right)\right)=&\sum_{h=0}^{r}\sum_{i+j=h}\frac{1}{h!}\binom{h}{j}f_{x^iy^j}\left(\xi_{n_1,k_1}\left(q_1\right),\xi_{n_2,k_2}\left(q_2\right)\right)\\&\times\left[x-\xi_{n_1,k_1}\left(q_1\right)\right]^i\left[y-\xi_{n_2,k_2}\left(q_2\right)\right]^j\end{aligned}\tag{6.5}$$

ve $f_{x^i y^j}$ ile f nin kısmi türevleri gösterilir, yani $f_{x^i y^j} := \dfrac{\partial^r}{\partial x^i \partial y^j} f\left(x, y\right)$ dir. $r = 0$ için $\Omega_{n_1, n_2, 0}\left(f; q_1, q_2, x, y\right) = \Omega_{n_1, n_2}\left(f; q_1, q_2, x, y\right)$ dir.

Şimdi de $\left(u_1, u_2\right)$ bir birim vektör ve $v > 0$ olmak üzere

$$\left(x - \xi_{n_1, k_1}\left(q_1\right), y - \xi_{n_2, k_2}\left(q_2\right)\right) = v\left(u_1, u_2\right) \tag{6.6}$$

ve

$$\begin{aligned} F\left(v\right) &= f\left(\xi_{n_1, k_1}\left(q_1\right) + vu_1, \xi_{n_2, k_2}\left(q_2\right) + vu_2\right) \\ &= f\left(\xi_{n_1, k_1}\left(q_1\right) + \left(x - \xi_{n_1, k_1}\left(q_1\right)\right), \xi_{n_2, k_2}\left(q_2\right) + \left(y - \xi_{n_2, k_2}\left(q_2\right)\right)\right) \\ &= f\left(x, y\right) \end{aligned} \tag{6.7}$$

olsun.

Eş 6.6 dan $F\left(v\right)$ fonksiyonunun $v = 0$ daki Taylor formülü $f\left(x, y\right)$ fonksiyonunun $\left(x, y\right) = \left(\xi_{n_1, k_1}\left(q_1\right), \xi_{n_2, k_2}\left(q_2\right)\right)$ noktasındaki Taylor formülüne karşılık gelir. Buna ek olarak $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $F\left(v\right)$ nin *r*-yinci mertebeden türevi

$$F^{(r)}\left(v\right) = \sum_{i+j=r} \binom{r}{j} f_{x^i y^j}\left(\xi_{n_1, k_1}\left(q_1\right) + vu_1, \xi_{n_2, k_2}\left(q_2\right) + vu_2\right) u_1^i u_2^j \tag{6.8}$$

şeklinde yazılabilir [Halilov ve ark, 2006].

Eş 6.5, Eş 6.6 ve Eş 6.7 den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 6.4.1:

$r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $0 < \alpha \leq 1$, $M > 0$, $f \in C^{(r)}\left(I^2\right)$ ve $F^{(r)}(v) \in Lip_M(\alpha)$ olsun. Bu durumda

$$\left\|\Omega_{n_1,n_2,r}\left(f;q_1,q_2,.\right)-f\right\|_{C\left(I^2\right)} \leq \frac{M\alpha B(\alpha,r)}{(\alpha+r)(r-1)!}\left\|\Omega_{n_1,n_2}\left(K(t,s);q_1,q_2,.\right)-f\right\|_{C\left(I^2\right)} \tag{6.9}$$

gerçeklenir. Burada $F^{(r)}(v)$, Eş 6.8 de verilmiştir ve $B(\alpha,r)$ Beta fonksiyonudur. Ayrıca $(t,s) \in I^2$ için

$$K(t,s) = \left|(t-x,s-y)\right|^{\alpha+r} \tag{6.10}$$

olup, $K \in C\left(I^2\right)$ dir.

İspat:

Eş 6.4 ve Eş 6.5 ten

$$f(x,y)-\Omega_{n_1,n_2,r}\left(f;q_1,q_2,x,y\right)=\prod_{s_1=0}^{n_1}\left(1-q_1^{s_1}x\right)\prod_{s_2=0}^{n_2}\left(1-q_2^{s_2}y\right)\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\begin{bmatrix}n_1+k_1\\k_1\end{bmatrix}_{q_1}\begin{bmatrix}n_2+k_2\\k_2\end{bmatrix}_{q_2}$$

$$\times x^{k_1}y^{k_2}$$

$$\times\left\{f(x,y)-\sum_{h=0}^{r}\frac{1}{h!}\sum_{i+j=h}\binom{h}{j}f_{x^iy^j}\left(\xi_{n_1,k_1}(q_1),\xi_{n_2,k_2}(q_2)\right)\right\}$$

$$\times\left[x-\xi_{n_1,k_1}(q_1)\right]^i\left[y-\xi_{n_2,k_2}(q_2)\right]^j \tag{6.11}$$

yazılabilir.

Şimdi, iki değişkenli fonksiyonlar için Taylor kalan formülü göz önüne alınırsa

$$f(x,y)-K_{r,\left(\xi_{n_1,k_1}(q_1),\xi_{n_2,k_2}(q_2)\right)}\left(x-\xi_{n_1,k_1}(q_1),\,y-\xi_{n_2,k_2}(q_2)\right)$$
$$=\frac{1}{(r-1)!}\int_0^1\sum_{i+j=h}\binom{h}{j}\left[x-\xi_{n_1,k_1}(q_1)\right]^i\left[y-\xi_{n_2,k_2}(q_2)\right]^j$$
$$\times f_{x^i y^j}\left(\xi_{n_1,k_1}(q_1)+t\left(x-\xi_{n_1,k_1}(q_1)\right),\xi_{n_2,k_2}(q_2)+t\left(y-\xi_{n_2,k_2}(q_2)\right)\right)(1-t)^{r-1}\,dt \tag{6.12}$$

elde edilir.

Eş 6.5, Eş 6.6 ve Eş 6.7 hesaba katılarak Eş 6.12 aşağıdaki gibi yeniden düzenlenebilir:

$$F(v)-\sum_{h=0}^{r}\frac{1}{h!}F^{(h)}(0)v^h=\frac{v^r}{(r-1)!}\int_0^1\left[F^{(r)}(tv)-F^{(r)}(0)\right](1-t)^{r-1}\,dt \tag{6.13}$$

Eş 6.5, Eş 6.12 ve Eş 6.13 ten ve $F^{(r)}(v)\in Lip_M(\alpha)$ olmasından

$$f(x,y)-K_{r,\left(\xi_{n_1,k_1}(q_1),\xi_{n_2,k_2}(q_2)\right)}\left(x-\xi_{n_1,k_1}(q_1),\,y-\xi_{n_2,k_2}(q_2)\right)=\left|F(v)-\sum_{h=0}^{r}\frac{1}{h!}F^{(h)}(0)v^h\right|$$
$$\le\frac{|v|^r}{(r-1)!}\int_0^1\left|F^{(r)}(tv)-F^{(r)}(0)\right|(1-t)^{r-1}\,dt$$
$$\le M\,\frac{|v|^{\alpha+r}}{(r-1)!}B(\alpha+1,r)$$
$$=\frac{M\alpha}{(r-1)!(\alpha+r)}B(\alpha,r)|v|^{\alpha+r}$$
$$=\frac{M\alpha}{(r-1)!(\alpha+r)}B(\alpha,r)\left|\left(x-\xi_{n_1,k_1}(q_1),\,y-\xi_{n_2,k_2}(q_2)\right)\right|^{\alpha+r} \tag{6.14}$$

elde edilir.

Eş 6.14 ve Eş 6.11 birlikte düşünülürse

$$\begin{aligned}
f(x,y)-\Omega_{n_1,n_2,r}(f;q_1,q_2,x,y) \\
&\le \prod_{s_1=0}^{n_1}\left(1-q_1^{s_1}x\right)\prod_{s_2=0}^{n_2}\left(1-q_2^{s_2}y\right)\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\begin{bmatrix} n_1+k_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_{q_1}\begin{bmatrix} n_2+k_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_{q_2} x^{k_1}y^{k_2} \\
&\quad\times\frac{M\alpha B(\alpha,r)}{(r-1)!(\alpha+r)}\left|\left(x-\xi_{n_1,k_1}(q_1),\, y-\xi_{n_2,k_2}(q_2)\right)\right|^{\alpha+r} \\
&=\frac{M\alpha B(\alpha,r)}{(r-1)!(\alpha+r)}\Omega_{n_1,n_2}\left(K(t,s);q_1,q_2,.\right) \qquad (6.15)
\end{aligned}$$

yazılabilir. Eş 6.15 te her iki tarafın mutlak değerini alıp, $(x,y)\in I^2$ için maksimum alınırsa Eş 6.9 elde edilir ve ispat tamamlanır.

Uyarı 6.4.1:

Eş 6.10 daki $K\in C\left(I^2\right)$ fonksiyonu için $K(x,y)=0$ dır. Volkov teoreminden

$$\lim_{n_1,n_2\to\infty}\left\|\Omega_{n_1,n_2}\left(K(t,s);q_1,q_2,.\right)\right\|_{C\left(I^2\right)}=0$$

olduğundan

$$\lim_{n_1,n_2\to\infty}\left\|\Omega_{n_1,n_2,r}\left(f;q_1,q_2,.\right)-f\right\|_{C\left(I^2\right)}=0$$

elde edilir.

Sonuç 6.4.1:

$f\in C\left(I^2\right)$ ve $F^{(r)}(v)\in Lip_M(\alpha)$ olsun. Bu durumda

$$\left\|\Omega_{n_1,n_2,r}\left(f;q_{1,n_1},q_{2,n_2},.\right)-f\right\|_{C\left(I^2\right)} \le \frac{4M\alpha B(\alpha,r)}{(\alpha+r)(r-1)!}\omega\left(K;\delta_{1,n_1},\delta_{2,n_2}\right)$$

eşitsizliği gerçeklenir. Burada $F^{(r)}(v)$, Eş 6.7 de; $K(t,s)$, Eş 6.9 da; δ_{1,n_1} ve δ_{2,n_2}, Eş 6.3 te verilmiştir.

Sonuç 6.4.2:

$f \in C\left(I^2\right)$ ve $F^{(r)}(v) \in Lip_M(\alpha)$ olsun. Eş 6.4.6 da verilen $K(t,s)$ fonksiyonu için $K(t,s) \in Lip_{\left\{2A^2\right\}^{r/2}}(f;\alpha)$ olması durumunda

$$\left\|\Omega_{n_1,n_2,r}\left(f;q_{1,n_1},q_{2,n_2},.\right)-f\right\|_{C\left(I^2\right)} \le \frac{\left\{2A^2\right\}^{r/2} M\alpha B(\alpha,r)}{(\alpha+r)(r-1)!}\left\{\delta_{1,n_1}^{\alpha}+\delta_{2,n_2}^{\alpha}\right\}$$

eşitsizliği gerçeklenir. Burada δ_{1,n_1} ve δ_{2,n_2}, Eş 6.3 te verilmiştir.

KAYNAKLAR

Altomare, F., Campiti, M., “Korovkin-type approximation theory and its applications”, ***Walter de Gruyter***, Berlin, 448,487-491(1994).

Andrews, G.E., Askey, R., Roy, R., “Special functions”, ***Cambridge Univ Press***, Cambridge, 245(1999).

Barbosu, D.,” Some generalized bivariate Bernstein operators”, ***Math. Notes (Miskolc)***, 1:3-10, (2000).

Bayraktar, M.,” Fonksiyonel Analiz”, ***Gazi Kitabevi***, Ankara, 85-86 (2006).

Bleimann, G., Butzer, P.L., Hahn, L.,” A Bernstein-type operator approximatin continuous functions on the semi-axis”, ***Nederl. Akad. Wetensch. Indag. Math***, 19:255-262(1980).

Cheney, E.W., Sharma, ”A. Bernstein power series”, ***Canad. J. Math***., 16:241-252(1964).

Doğru, O., Duman, O., “Statistical approximation of Meyer-König and Zeller operators based on the q-integers”, ***Publ.Math. Debrecen***, 68:199-214(2006).

Doğru, O., Gupta, V., “Korovkin Type approximation properties of bivariate q-Meyer-König and Zeller operators”, ***Calcolo***, 43:51-63(2006).

Goodman, T.N.T., Oruç, H.,Phillips, G.M., “Convexcity and generalized Bernstein polynomials”, ***Proc. Edinburgh Math. Soc***., 42(2):179-190(2006).

Halilov, H., Hasanoğlu, A., Can, M., “Yüksek Matematik 2. Basım”, ***Literatür Yayıncılık***, İstanbul, 760-763(2006).

Heping, W., “Korovkin-type theorem and application”, ***J.Approx.Theory***, 132:258-264(2005).

Hacısalihoğlu, H., Haciyev, A.,”Lineer Pozitif Operatör Dizisinin Yakınsaklığı”, ***A.Ü.F.F. Döner Sermaye İşletmesi Yayınları No:31***, Ankara, 10-11, 18-19(1995).

Kirov, G., Popova, L., “A generalization of the linear positive operators”, ***Math Balkanica***, 7:62-149(1993).

Lorentz, G.G., “Bernstein Polynomials”, ***Univ. of Toronto Press***, Toronto, 5-6(1953).

Meyer König, W.K., “Bernsteinsche Potenzreihen”, ***Studia. Math***, 19:89-94(1960).
Özarslan, M.A., Duman, O., “Approximation theorems by Meyer-König and Zeller type operators”, ***Chaos Solition and Fractals(article in press,accepted 11February 2008),*** 1-6(2008).

Phillips, G.M., “On generalized Bernstein polynomials”, ***Numerical analysis. River Edge,NJ: World Sci. Publ***., 263-269(1996).

Stancu, D.D., “A new class of uniform approximatin polynomial operators in two and several variables”, ***Proceedings of the conferece on constructive theory of functions., Budapest:Akademiai Kiado***, 443-445(1972).

Terzioğlu, T., “Fonksiyonel Analizin Yöntemleri”, ***Matematik Vakfı Yayın No:9***, Ankara, 97-99(1998).

Trif, T., “Meyer-König and Zeller operators based on the q-integers”, ***Numer. Theor. Approx.***, 29:221-229(2000).

Volkov, V.I., “On the convergence of sequence of linear positive operators in the space of continuous functions of two variables”, ***(Russian) Dokl. Akad. Nauk. SSSR (N.S.)***, 115:17-19(1957).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı	: YILDIZ, Esma
Uyruğu	: T.C.
Doğum Tarihi ve Yeri	: 1981 Niğde
e-mail	: esmayildiz@gazi.edu.tr

Eğitim

Derece	**Eğitim Birimi**	**Mezuniyet Tarihi**
Lisans	Ankara Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları- Matematik Eğitimi (Tezsiz Yüksek Lisans)	2005
Lise	Niğde Anadolu Öğretmen Lisesi (Yabancı Dil Ağırlıklı)	1999

İş

Araştırma Görevlisi
Gazi Üniversitesi
Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü

Yabancı Dil

Almanca, İngilizce

Burs

TÜBİTAK Yurt İçi Yüksek Lisans Bursu