

24021

T.C.  
EGE ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
ASTRONOMİ VE UZAY BİLİMLERİ ANABİLİM DALI  
10.0600.0000.005

BAZI GENEL RELATİVİSTİK  
KOZMOLOJİK MODELLER

DOKTORA TEZİ

HAZIRLAYAN: CAN (BATTAL) KILINÇ

DANIŞMAN : Prof.Dr. İLHAMİ YAVUZ

Bu tez "Prof.Dr. İlhami YAVUZ , Prof.Dr. Şükrü BOZKURT ve Prof.Dr. Hilmi HACISALİHOĞLU " dan oluşan jüri tarafından oybirliği ile kabul edilmiştir.

Bornova-İZMİR

1992

## ÖNSÖZ

Genel Relativite Teorisi, gravitasyonel etkileşmelerin izahını hedefleyen ve 1916 yılında Einstein tarafından önerilen bir teoridir. Teori önerildiği günden beri güncelliğini ve büyük ölçekteki gravitasyonel etkileşmeleri ve evrenin global yapısını en iyi açıklayan tek teori olma konumunu koruyabilmiştir.

Bir kozmolojik model için, teorinin temel denklemleri elde edilir ve bu denklemlerin çözümleri modele uygun kabuller altında araştırılır. Bu denklemlerin her bir çözümü yeni bir kozmolojik model verir. Evreni en iyi yansıtan model ise fiziksel ve gözlemsel veriler dikkate alınarak seçilir.

Bu tezde inhomojen bir metriğe ait ısı akıllı vizkoz akışkanlı ve elektromagnetik alanlı kozmolojik modeller incelenmiştir.

## İÇİNDEKİLER

Sayfa No

Abstrakt ve Abstract

I. GİRİŞ.....	1
I.1 Literatür Özeti ve Tezin Amacı.....	1
I.2 Notasyonlar ve Konvensiyon.....	3
II. MATERYAL VE METOD.....	4
II.1 Çalışmadaki Materyal.....	4
II.2 Çalışmada Kullanılan Yöntemler.....	5
III. BULGULAR VE TARTIŞMA.....	6
III.1 Viskoz Akışkanlı, Elektromagnetik Alanlı, Isı Akıllı İnhomojen Bir Metriğin Kozmolojik Çözümleri.....	6
III.2 Çözümlerin Bazı Özellikleri.....	15
III.3 Çözümlerin Asimptotik Davranışları.....	17
IV. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	21
Özet.....	22
Summary.....	22
Literatür Listesi.....	23

### Abstrakt

Bugün, evren büyük ölçekte homojen ve izotrop kabul edilerek kozmolojik modeller oluşturulmaktadır. Ayrıca birçok çalışmada da madde ideal akışkan olarak alınmaktadır. Fakat bu kabuller altında bazı problemler açıklanamamaktadır. Örneğin bu modeller, evrenin ilk dönemini açıklamada yetersiz kalmaktadır (genellikle, evren ilk dönemde inhomojen, madde ise viskoz akışkan kabul edilir ). Bu çalışmada silindirik simetrik inhomojen bir metriğe ait Einstein alan denklemleri, denklemlerin çözümleri ve bu çözümlerin asimptotik davranışları incelenmiştir. Çözümlerde ısı akılı, viskoz akışkanlı ve elektromagnetik alanlı bir enerji momentum tensörü kullanılmıştır.

### Abstact

Today, cosmological models are constructed by accepting universe as homogeneous and isotropic in large scale. Moreover, matter is supposed as a perfect fluid in most study. But some problems can not be explained with these assumptions. For example these models are not sufficient to explain the earlier universe (universe is accepted as inhomogeneous and matter is accepted as viscous fluid in that time). In this study, Einstein's field equations of cylindrical symmetric inhomegenous metric, solution of equations and asymtotic behaviours are investigated. In the solutions a energy-momentum tensor whit heat flux, viscous fluid and electromagnetic field are used.

## I. GİRİŞ

### I.1 Literatür Özeti ve Tezin Amacı

Genel Relativistik kozmolojik modeller oluşturulurken evren genellikle uzaysal-homojen ve izotrop kabul edilir. Büyük ölçekte bu durumu destekleyici bazı gözlemsel veriler vardır.

Matematik bakımdan uzaysal homojen evren modelleri (Bianchi ve Kantowski-Sachs modelleri) büyük çözüm kolaylıklarına sahiptir. Bu durumda Einstein alan denklemleri daha kolaylaşarak parçalı diferansiyel denklemlerden adi diferansiyel denklemlere indirgenirler.

Bu matematiksel basitliklerin yanında uzaysal- homojen kozmolojik modellerin bazı tatmin edici olmayan yanları da vardır. Örneğin, bu modeller singülarite çalışmalarında olduğu gibi bazı problemleri açıklamada yetersiz kalmaktadır. Ayrıca, uzaysal homojen modeller, küçük inhomojen perturbasyonlardan (Ryan and Shepley, 1975) galaksilerin oluşumu için uygun bir temel (background) sağlamazlar. Bu gibi sorunları açıklayabilmek için inhomojen kozmolojik modelleri incelemek gereklidir.

Bir kozmolojik model ile

$$R_{ik} - \frac{1}{2}Rg_{ik} + \Lambda g_{ik} = T_{ik}$$

Einstein alan denklemlerinin bir çözümünü anlıyoruz. Bilinen inhomojen kozmolojik modeller, küresel simetrik Bondi-Tolman modelleri, düzlemsel simetrik Taub modelleri ve Szekeres tipi modellerdir.

Ayrıca incelenen modellerin çoğunda eğrilik kaynağı olarak ideal akışkan alınmıştır. Bazı durumlarda bu yaklaşım yetersiz kalmaktadır. Örneğin evrenin ilk zamanlarında madde bir viskoz akışkan gibi davranmaktadır. Bu yüzden enerji-momentum tensörüne viskozitenin, ısı akısının ve elektromagnetik alan gibi diğer kaynakların da eklenmesi gerekmektedir.

Bu tip modeller üzerinde de yoğun çalışmalar vardır. Singh ve arkadaşları (1965), elektromagnetik alanlı silindirik simetrik inhomojen kozmolojik modeller üzerinde çalışmalar yapmışlardır. Singh ve Roy (1972), elektromagnetik alanlı çözümlerin şematik bir sınıflamasını yapmışlardır. Szekeres (1975), basıncısız ideal akışkanlı inhomojen çözümler elde etmiştir. Szafron (1977), basıncı sıfır olmayan ideal akışkan için, çözümleri genelleştirmiştir. Roy ve Singh (1977), ve Roy ve Narayan (1979, 1981), ideal akışkan için düzlemsel simetrik inhomojen çözümler elde etmişlerdir. Collins ve Szafron (1979), inhomojen çözümlerin önemini vurgulayarak bünyesel (intristic) simetriler üzerinde durmuşlardır. Bali ( 1984, 1985 ), elektromagnetik alanlı ve alansız viskoz akışkan için, Bali ve Jain (1987, 1988), vizkoz akışkanlı çözümler ve Singh ve Srivastava (1989), silindirik simetrik homojen ve anizotrop metrikler için çeşitli çözümler elde etmişlerdir. Roy ve Bali (1984), elektromagnetik alanlı inhomojen çözümleri, Narain (1988),

ideal akışkan için silindirik simetrik çözümleri ve Bali ve Tyagi (1989), elektromagnetik alanlı silindirik simetrik kozmolojik modellerin çözümlerini araştırmışlardır. Bali ve Jain (1991), ve Bali ve Tyagi (1991), katı (stiff) akışkanlı silindirik simetrik kozmolojik çözümler bulmuşlardır.

Bu tezde, ısı akıllı, viskoz akışkanlı ve elektromagnetik alanlı inhomojen bir metriğin (Marder 1958) muhtelif çözümleri elde edilmiştir.

## I.2 Notasyonlar ve Konvensiyon

### Notasyonlar

- i)  $i, k, l, m, \dots$  latin indisleri 1,2,3,4;  $\alpha, \beta, \delta, \dots$  Greek indisleri 1,2,3 değerleri alırlar.
- ii)  $\partial_i$ , kısmi türevi gösterir.
- iii)  $\nabla_i$ ; kovaryant türevi gösterir.
- IV) Koordinatlar  $x^1=x, x^2=y, x^3=z, x^4=t$  dir.
- V)  $u^i$  akışkanın 4-lü hızıdır.  $A = g_{11} = g_{44}$  olmak üzere comoving koordinatlarda  $u^i = \delta^i_4 = (0,0,0,1/A)$  dir.
- VI) Einstein Alan Denklemleri

$$G_{ik} \equiv R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik} + \Lambda g_{ik} = \chi T_{ik},$$

$$\left( \chi = \frac{8\pi G}{c^4}, \Lambda \text{ kozmolojik sabit} \right) \text{ dirler}$$

### Konvensiyon

Tezimizde metrik signatürü +2 (+ + + -) dir.

## II MATERYAL VE METOD

### II.1 Çalışmadaki Materyal

Gravitasyonel etkileşmeleri ve evrenin yapısını açıklayan Genel Relativite Teorisinin temel denklemleri,  $G_{ik} = R_{ik} - \frac{1}{2}Rg_{ik} + \Lambda g_{ik} = \lambda T_{ik}$  ,  $\lambda = \frac{8\pi G}{c^4}$  şeklindedir. Burada  $g_{ik}$  metrik tensör,  $R_{ik}$  Ricci tensörü,  $\Lambda$  kozmolojik sabit ve  $T_{ik}$  enerji- momentum tensörüdür.

Einstein alan denklemleri  $G_{ik} = G_{ki}$  den dolayı, 10 tane ikinci mertebeden lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerli bir sistem oluştururlar.

Bu alan denklemlerinin bir yanı uzayın geometrisiyle diğer yanı ise madde ve madde dağılımıyla ( enerji-momentum tensörü) ilgilidir. Bu denklemler, ikinci mertebeden lineer olmayan karmaşık bir kısmi diferansiyel denklemler sistemi oluşturduklarından çözümleri oldukça zordur. Bu yüzden çoğu halde bir yana homojenlik - izotropluk, homojenlik-anizotropluk, inhomojenlik-izotropluk, inhomojenlik-anizotropluk, küresel simetriklik, silindirik simetriklik ve düzlemsel simetriklik gibi fiziksel ve matematiksel simetriler yüklenerek ; diğer yana da ideal akışkan, viskoz akışkan, ısı akısı, elektromagnetik alan gibi fiziksel niceliklerden bir veya bir kaç eklenerek bu denklemlerin çözümleri elde edilmeye çalışılır.

## II.2 Çalışmada Kullanılan Yöntemler

Bu çalışmada inhomojen bir metrik için Einstein alan denklemleri ve bu denklemlerin çözümleri ısı akılı, elektromagnetik alanlı bir viskoz akışkan özel halinde incelenmiştir.



### III. BULGULAR VE TARTIŞMA

#### III.1 Viskoz Akışkanlı, Isı Akıllı, Elektromagnetik Alanlı İnhomojen Metriğin Kozmolojik Çözümleri:

Ele alınan silindirik simetrik metrik

$$ds^2=A^2(dx^2-dt^2)+B^2dy^2+C^2dz^2 \quad \dots(1)$$

dir (Marder 1958). Burada

$$A=A(x,t) , B=B(x,t) \text{ ve } C=C(x,t) \quad \dots(2)$$

alan denklemlerinden bulunacak fonksiyonlardır. Enerji-momentum tensörü

$$T_{ik}=(p+\zeta-\theta)U_iU_k+(p-\theta)g_{ik}-2\eta\sigma_{ik}+q_iU_k+q_kU_i+E_{ik} \quad \dots(3)$$

şeklinde seçilmiştir. Burada  $E_{ik}$ , elektromagnetik alana ait kısım olup

$$E_{ik}=F_{ij}F^j_k-\frac{1}{4}g_{ik}F_{mn}F^{mn} \quad \dots(4)$$

ifadesini haizdir.  $F_{ik}$  ise, bileşenleri

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -H_x & H_y & -E_x \\ H_x & 0 & -H_z & -E_y \\ -H_y & H_z & 0 & -E_z \\ E_x & E_y & E_z & 0 \end{pmatrix} \quad \dots(5)$$

olan elektromagnetik alan tensörüdür.

$\sigma_{ik}$ , shear tensörü olup bileşenleri

$$\sigma_{ik}=\frac{1}{2}(U_{i;l}H^l_k+U_{k;l}H^l_i)-\frac{1}{3}\theta H_{ik} \quad \dots(6)$$

dir.  $H_{ik}$  izdüşüm tensörüdür ve

$$H_{ik}=g_{ik}+U_iU_k \quad \dots(7)$$

ifadesini haizdir.  $p$  izotropik basınç,  $\rho$  akışkanın yoğunluğu,  $\eta$  ve  $\zeta$ , shear ve bulk viskozite katsayıları ve  $\theta$  da

genişleme faktörüdür.  $U^i$ , akışkanın 4-lü hız vektörü olup bileşenleri

$$U^i=(0,0,0,1/A), \quad U_i=(0,0,0,-A), \quad U_i U^i=-1 \quad \dots(8)$$

dır.  $q^i$  ısı akısı vektörü olup bileşenleri için

$$q_i U^i=0 \quad \dots(9)$$

koşulu ve Einstein tensörünün sıfıra eşit bileşenlerinden ve  $Q^2=q_i q^i$  tanımından

$$q^i=Q(1/A, 0,0,0) \quad \dots(10)$$

ifadesi elde edilir.

Matematiksel kolaylık olması açısından bulk viskozite katsayısının ve elektrik alanının sıfır olduğunu ve magnetik alanın da sadece x- yönünde bir bileşene sahip olduğunu varsayalım. Bu durumda (5) denkleminde görüleceği üzere elektromagnetik alan tensörünün sadece  $F_{23}$  bileşeni sıfırdan farklıdır.

$$F [ik;l]=0, \quad \dots(11)$$

birinci grup Maxwell denklemlerinden

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial F_{23}}{\partial x^1} = 0 \\ \frac{\partial F_{23}}{\partial x^4} = 0 \end{array} \right\} \quad \dots(12)$$

bulunur.

$$(J^k - \epsilon U^k)(1 + \zeta^2 B^2) = \lambda E^k + \lambda \zeta^2 E_i B^i B^k + \lambda \zeta S^k$$

Ohm kanununda yukarıdaki fiziksel kabullerin kullanılmasıyla  $J^1 = J^2 = J^3 = 0$  elde edilir. Burada  $\epsilon$  akı yoğunluğudur.

$$F^{ik}_{;k} = J^i, \quad \dots(13)$$

ikinci grup Maxwell denklemlerinden de  $J^4=0$  dolayısıyla da

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F^{23}}{\partial x^3} &= 0 \\ \frac{\partial F^{32}}{\partial x^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots(14)$$

elde edilir. (12) ve (14) denklemlerinin birlikte gözönüne alınmalarından da  $F_{23} = \text{sabit}$  elde edilir.

Einstein alan denklemlerinden

$$\begin{aligned} G_{11} &\equiv \frac{C_1}{C} \left( \frac{B_1}{B} + \frac{A_1}{A} \right) - \frac{C_4}{C} \left( \frac{B_4}{B} - \frac{A_4}{A} \right) - \frac{C_{44}}{C} - \frac{B_{44}}{B} + \frac{B_1 A_1}{BA} - \frac{B_4 A_4}{BA} \\ &= \frac{2}{3} \left( \frac{C_4}{C} - \frac{B_4}{B} - \frac{2A_4}{A} \right) A \eta + A^2 p - \frac{F_{23}^2 A^2}{2C^2 B^2} \end{aligned} \dots(15)$$

$$G_{14} \equiv \frac{C_{14}}{C} - \frac{A_4}{A} \left( \frac{B_1}{B} + \frac{C_1}{C} \right) + \frac{B_{14}}{B} - \frac{A_1}{A} \left( \frac{C_4}{C} + \frac{B_4}{B} \right) = Q A^2 \dots(16)$$

$$\begin{aligned} G_{22} &\equiv \frac{B^2}{A^2} \left[ \frac{C_{11}}{C} - \frac{C_{44}}{C} + \frac{A_{11}}{A} - \left( \frac{A_1}{A} \right)^2 - \frac{A_{44}}{A} - \left( \frac{A_4}{A} \right)^2 \right] \\ &= \frac{2}{3} \frac{B^2}{A} \left( \frac{C_4}{C} - \frac{2B_4}{B} + \frac{A_4}{A} \right) \eta + B^2 p - \frac{F_{23}^2}{2C^2} \end{aligned} \dots(17)$$

$$\begin{aligned} G_{33} &\equiv \frac{C^2}{A^2} \left[ \frac{B_{11}}{B} - \frac{B_{44}}{B} + \frac{A_{11}}{A} - \left( \frac{A_1}{A} \right)^2 - \frac{A_{44}}{A} - \left( \frac{A_4}{A} \right)^2 \right] \\ &= \frac{2}{3} \frac{C^2}{A} \left( \frac{2C_4}{C} - \frac{B_4}{B} - \frac{A_4}{A} \right) \eta + C^2 p + \frac{F_{23}^2}{2B^2} \end{aligned} \dots(18)$$

$$\begin{aligned} G_{44} &\equiv - \left[ \frac{C_1}{C} \left( \frac{B_1}{B} - \frac{A_1}{A} \right) - \frac{C_4}{C} \left( \frac{B_4}{B} + \frac{A_4}{A} \right) + \frac{C_{11}}{C} - \frac{B_{11}}{B} - \frac{B_1 A_1}{BA} - \frac{B_4 A_4}{BA} \right] \\ &\quad - \beta A^2 + \frac{F_{23}^2 A^2}{2B^2 C^2} \end{aligned} \dots(19)$$

ifadeleri elde edilir. Burada sağ taraftaki 1 ve 4 alt indisleri sırasıyla x ve t ye göre parçalı (kısmi) türevleri gösterir.  $\eta, Q, \beta$  ve p ler A, B, C metrik katsayıları cinsinden şu şekilde ifade edilebilir:

(17) ve (18) denklemlerinden  $\eta$  için

$$\eta = \frac{\left(\frac{C_{11}}{C} - \frac{B_{11}}{B}\right) - \left(\frac{C_{44}}{C} - \frac{B_{44}}{B}\right)}{2A\left(\frac{C_4}{C} - \frac{B_4}{B}\right)}, \quad \dots(20)$$

(16) denkleminde  $Q$  için

$$Q = \frac{1}{A^2} \left[ \frac{C_{14}}{C} + \frac{B_{14}}{B} - \frac{A_4}{A} \left( \frac{B_1}{B} + \frac{C_1}{C} \right) - \frac{A_1}{A} \left( \frac{B_4}{B} - \frac{C_4}{C} \right) \right], \quad \dots(21)$$

(19) denkleminde  $\rho$  için

$$\rho = -\frac{1}{A^2} \left[ \frac{C_1}{C} \left( \frac{B_1}{B} - \frac{A_1}{A} \right) - \frac{C_4}{C} \left( \frac{B_4}{B} + \frac{A_4}{A} \right) + \frac{C_{11}}{C} + \frac{B_{11}}{B} - \frac{B_1 A_1}{BA} - \frac{B_4 A_4}{BA} + \frac{F_{23}^2 A^2}{2C^2 B^2} \right], \quad \dots(22)$$

(20) denkleminin (17) denkleminde yerine konulmasıyla  $p$  için

$$p = \frac{1}{A^2} \left[ \frac{C_{11}}{C} - \frac{C_{44}}{C} + \frac{A_{11}}{A} - \left( \frac{A_1}{A} \right)^2 - \frac{A_{44}}{A} + \left( \frac{A_4}{A} \right)^2 \right] - \frac{1}{3A^2} \left( \frac{C_4}{C} - \frac{2B_4}{B} + \frac{A_4}{A} \right) \frac{\left( \frac{C_{11}}{C} - \frac{B_{11}}{B} \right) + \left( \frac{B_{44}}{B} - \frac{C_{44}}{C} \right)}{\left( \frac{C_4}{C} - \frac{B_4}{B} \right)} - \frac{F_{23}^2}{2C^2 B^2}, \quad \dots(23)$$

ifadeleri elde edilirler. (23) ve (20) denklemleri (15) denkleminde yerlerine konulursa

$$\left( \frac{B_1}{B} + \frac{A_1}{A} \right) \left( \frac{C_1}{C} + \frac{A_1}{A} \right) + \left( \frac{A_4}{A} - \frac{C_4}{C} \right) \left( \frac{B_4}{B} - \frac{A_4}{A} \right) - \left( \frac{A_{11}}{A} + \frac{C_{11}}{C} \right) + \left( \frac{A_{44}}{A} - \frac{B_{44}}{B} \right) - \left( \frac{B_4}{B} - \frac{A_4}{A} \right) \frac{\left( \frac{C_{11}}{C} - \frac{B_{11}}{B} \right) + \left( \frac{B_{44}}{B} - \frac{C_{44}}{C} \right)}{\left( \frac{C_4}{C} - \frac{B_4}{B} \right)} + \frac{F_{23}^2 A^2}{C^2 B^2} = 0 \quad \dots(24)$$

eşitliği elde edilir. Bu durumda  $p, \rho, \eta, Q, A, B$  ve  $C$  bilinmeyenlerine karşılık 5 denklem elde edilmiş olur. Bu nedenle alan denklemlerinin çözülebilmesi için bazı uygun fiziksel ve matematiksel kabullerin yapılması gerekmektedir. İlk olarak

$$A=BC \quad \dots(25)$$

olduğunu kabul edelim (Homojen uzaylar için  $\frac{\sigma}{\theta} = Sbt'$  tir.

Modelin limit hallerde homojenliğe yaklaşması arzu edildiğinden seçilen metrik özel halinde  $\sigma_{11} \sim \theta \Rightarrow \sigma_{11}=0$

yazılabilir. Buradan da  $A=BC$  bulunur. Ayrıca bu kabulü kullandığımız metriğin daha basit bir metriğe konform kalması sağlanır). Böylece (25) denkleminin (20) - (24) denklemlerinde yerlerine konulmasıyla  $\eta, \rho, \varphi$  ve  $p$  için

$$\eta = \frac{\left(\frac{C_{11}}{C} - \frac{B_{11}}{B}\right) - \left(\frac{C_{44}}{C} - \frac{B_{44}}{B}\right)}{2BC\left(\frac{C_4}{C} - \frac{B_4}{B}\right)}, \quad \dots(26)$$

$$\rho = \frac{1}{B^2 C^2} \left[ \frac{B_{14}}{B} + \frac{C_4}{C} - 2\left(\frac{B_1}{B} + \frac{C_1}{C}\right)\left(\frac{B_4}{B} + \frac{C_4}{C}\right) \right], \quad \dots(27)$$

$$\varphi = \frac{1}{B^2 C^2} \left[ -\left(\frac{C_{11}}{C} + \frac{B_{11}}{B}\right) + \left(\frac{B_1}{B}\right)^2 - \left(\frac{C_1}{C}\right)^2 + \frac{B_1 C_1}{BC} + \left(\frac{B_4}{B}\right)^2 + \left(\frac{C_4}{C}\right)^2 + 3\frac{C_4 B_4}{CB} - \frac{F_{23}^2}{2} \right], \quad \dots(28)$$

$$p = \frac{1}{B^2 C^2} \left[ 2\frac{C_{11}}{C} - 2\frac{C_{44}}{C} + \frac{B_{11}}{B} - \frac{B_{44}}{B} - \left(\frac{C_1}{C}\right)^2 + \left(\frac{C_4}{C}\right)^2 - \left(\frac{B_1}{B}\right)^2 + \left(\frac{B_4}{B}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(2\frac{C_4}{C} - \frac{B_4}{B}\right) \frac{\left(\frac{C_1}{C} - \frac{B_{11}}{B}\right) + \left(\frac{B_{44}}{B} - \frac{C_{44}}{C}\right)}{\left(\frac{C_4}{C} - \frac{B_4}{B}\right)} - \frac{F_{23}^2}{2} \right] \dots(29)$$

$$\frac{3C_1 B_1}{CB} + 2\left(\frac{C_1}{C}\right)^2 + 2\left(\frac{B_1}{B}\right)^2 + \frac{B_4 C_4}{BC} + \frac{C_{44}}{C} - \frac{2C_{11}}{C} - \frac{B_{11}}{B} + \frac{C_4}{C} \frac{\left(\frac{C_{11}}{C} - \frac{B_{11}}{B}\right) + \left(\frac{B_{44}}{B} - \frac{C_{44}}{C}\right)}{\left(\frac{C_4}{C} - \frac{B_4}{B}\right)} + F_{23}^2 = 0 \quad \dots(30)$$

ifadeleri elde edilir.

ikinci olarak

$$\left. \begin{aligned} B &= f(x)g(t) \\ C &= f(x)h(t) \end{aligned} \right\} \dots(31a)$$

ve

$$\frac{g_4}{g} = k \dots(31b)$$

olduğunu kabul edelim (Bu kabulde de  $g=g(t)$  fonksiyonunun Hubble kanununa uyması hedeflenmektedir). Bu durumda (31 b) denkleminde

$$g(t) = e^{kt} \dots(32)$$

bulunur. (31a), (31b) ve (32) denklemlerinin (26)-(30) denklemlerinde yerlerine konulmasıyla da  $\eta, Q, \rho$  ve  $p$  için bu defa

$$\eta = \frac{k^2 - \frac{h_{44}}{h}}{2f^2(x)h(t)e^{2kt} \left( \frac{h_4}{h} - k \right)}, \dots(33)$$

$$Q = \frac{-3}{f^4(x)h^2(t)e^{2kt}} \left( \frac{f_1}{f} \right) \left( k + \frac{h_4}{h} \right), \dots(34)$$

$$\rho = \frac{1}{f^4(x)h^2(t)e^{2kt}} \left[ -2 \frac{f_{11}}{f} + 3 \left( \frac{f_1}{f} \right)^2 + \left( \frac{h_4}{h} \right)^2 + 3k \frac{h_4}{h} - \frac{F_{23}^2}{2} \right], \dots(35)$$

$$p = \frac{1}{f^4(x)h^2(t)e^{2kt}} \left[ 3 \frac{f_{11}}{f} - 2 \frac{h_{44}}{h} - 2 \left( \frac{f_1}{f} \right)^2 + \left( \frac{h_4}{h} \right)^2 + \frac{1}{3} \frac{(2 \frac{h_4}{h} - k)}{(k - \frac{h_4}{h})} \left( k^2 - \frac{h_{44}}{h} \right) - \frac{F_{23}^2}{2} \right], \dots(36)$$

$$7 \left( \frac{f_1}{f} \right)^2 - 3 \frac{f_{11}}{f} = -k \frac{h_4}{h} - \frac{h_{44}}{h} - \frac{h_4}{h} \frac{(k^2 - \frac{h_{44}}{h})}{(\frac{h_4}{h} - k)} - F_{23}^2 \dots(37)$$

denklemleri elde edilir.

(37) denkleminde görüldüğü gibi sol taraf sadece  $x$ 'in

fonksiyonu sağ taraf ise t'nin fonksiyonudur. Bu denklemin sağlanması için her iki yanın da aynı bir sabite, örneğin

M' e (separation sabiti) eşit olması gerekir. Yani

$$7\left(\frac{f_1}{f}\right)^2 - 3\frac{f_{11}}{f} = -k\frac{h_4}{h} - \frac{h_{44}}{h} - \frac{h_4}{h} \frac{(k^2 - \frac{h_{44}}{h})}{(\frac{h_4}{h} - k)} - F_{23}^2 = M$$

olmalıdır. Bu durumda

$$7\left(\frac{f_1}{f}\right)^2 - 3\frac{f_{11}}{f} = M, \quad \dots(38)$$

buradan da

$$ff_{11} - \frac{7}{3}f_1^2 + \frac{M}{3}f^2 = 0 \quad \dots(39)$$

elde edilir. Bu diferansiyel denklemi çözebilmek için

$$f = v^{-3/4}, \quad v = v(x) \quad \dots(40)$$

şeklinde değişken değiştirmesi yapalım. Böylece

$$v_{11} - \frac{4M}{9}v = 0 \quad \dots(41)$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Bu diferansiyel

denklemin çözümü ise

$$v = \begin{cases} ae^{\frac{2}{3}\sqrt{M}x} + be^{-\frac{2}{3}\sqrt{M}x}, & M > 0 \\ a + bx, & M = 0 \\ a\cos\left(\frac{2}{3}\sqrt{M}x\right) + b\sin\left(\frac{2}{3}\sqrt{M}x\right), & M < 0 \end{cases} \quad \dots(42)$$

şeklinde. Burada a ve b integrasyon sabitleridir. Bu-

radan f(x) için

$$f(x) = \begin{cases} \left(ae^{\frac{2}{3}\sqrt{M}x} + be^{-\frac{2}{3}\sqrt{M}x}\right)^{-3/4} & M > 0 \\ (a + bx)^{-3/4} & M = 0 \\ \left(a\cos\left(\frac{2}{3}\sqrt{M}x\right) + b\sin\left(\frac{2}{3}\sqrt{M}x\right)\right)^{-3/4} & M < 0 \end{cases} \quad \dots(43)$$

ifadeleri elde edilir.

(37) denkleminin sağ tarafı

$$-\frac{k \frac{h_{44}}{h}}{h} - \frac{h_{44}}{h} - \left(\frac{h_{44}}{h}\right) \frac{\left(k^2 - \frac{h_{44}}{h}\right)}{\left(\frac{h_{44}}{h} - k\right)} - F_{23}^2 = M \quad \dots(44)$$

veyahutta

$$hh_{44} - h_{44}^2 - \frac{N}{k} hh_{44} + Nh^2 = 0 \quad \dots(45)$$

şeklinde yazılabilir. Burada  $N = M + F_{23}^2$  dir. Bu diferansiyel denklemi çözebilmek için de

$$h = e^z, \quad z = z(t) \quad \dots(46)$$

değişken değiştirmesi yapılırsa, (45) denklemi

$$z_{44} - \frac{N}{k} z = -N \quad \dots(47)$$

denklemine indirgenir. Bu diferansiyel denklemin çözümü ise

$$z = c + d e^{\frac{Nt}{k}} + kt \quad \dots(48)$$

şeklinindedir. Burada  $c$  ve  $d$  integrasyon sabitleridir. (46)

dan da  $h$  için

$$h = r e^{d e^{\frac{Nt}{k}} + kt} \quad \dots(49)$$

çözümü elde edilir. Burada  $r = e^c$  olup sabittir.

(43), (49) ve (32) çözümleriyle (31a) denkleminde  $B$  ve  $C$  metrik katsayıları için

$$B = \begin{cases} e^{kt} \left( a e^{\frac{2}{3}\sqrt{M}x} + b e^{-\frac{2}{3}\sqrt{M}x} \right)^{-3/4} & M > 0 \\ e^{kt} (a + bx)^{-3/4} & M = 0 \\ e^{kt} \left( a \cos\left(\frac{2}{3}\sqrt{M}x\right) + b \sin\left(\frac{2}{3}\sqrt{M}x\right) \right)^{-3/4} & M < 0 \end{cases} \quad \dots(50)$$

$$C = \begin{cases} r e^{d e^{\frac{Nt}{k}} + kt} \cdot \left( a e^{\frac{2}{3}\sqrt{M}x} + b e^{-\frac{2}{3}\sqrt{M}x} \right)^{-3/4} & M > 0 \\ r e^{d e^{\frac{Nt}{k}} + kt} (a + bx)^{-3/4} & M = 0 \\ r e^{d e^{\frac{Nt}{k}} + kt} \left( a \cos\left(\frac{2}{3}\sqrt{M}x\right) + b \sin\left(\frac{2}{3}\sqrt{M}x\right) \right)^{-3/4} & M < 0 \end{cases} \quad \dots(51)$$

ifadeleri elde edilirler. Bu ifadeler (33)-(36) denklemlerinde yerine konularak  $\eta, \varrho, \wp$  ve  $p$  için

$$\eta = \frac{-N(1 + de^{\frac{N}{k}t}) - 2k^2}{2f^2(x)e^{2kt} \cdot kr e^{de^{\frac{Nt}{k}}}}, \quad \dots(52)$$

$$\varrho = \frac{-3}{f^4(x)r^2e^{4kt}e^{2de^{\frac{Nt}{k}}}} \left( \frac{f_1}{f} \right) \left( 2k + \frac{N}{k} de^{\frac{Nt}{k}} \right), \quad \dots(53)$$

$$\wp = \frac{1}{f^4(x)r^2e^{4kt}e^{2de^{\frac{Nt}{k}}}} \left[ -2 \frac{f_1}{f} + 3 \left( \frac{f_1}{f} \right)^2 + 5k^2 + \frac{N^2}{k^2} d^2 e^{2Nt/k} + 5dNe^{\frac{Nt}{k}} - \frac{1}{2} F_{23}^2 \right], \quad \dots(54)$$

$$p = \frac{1}{f^4(x)r^2e^{4kt}e^{2de^{\frac{Nt}{k}}}} \left\{ 3 \frac{f_1}{f} - 2 \left( \frac{f_1}{f} \right)^2 - dNe^{\frac{Nt}{k}} \left( 2 \frac{N}{k^2} + \frac{N}{k^2} de^{\frac{Nt}{k}} + 2 \right) - k^2 + \frac{1}{3} \frac{\left( 2 \frac{N}{k} de^{\frac{Nt}{k}} + k \right)}{\left( \frac{N}{k} de^{\frac{Nt}{k}} \right)} \left[ dNe^{\frac{Nt}{k}} \left( \frac{N}{k^2} + \frac{N}{k^2} de^{\frac{Nt}{k}} + 2 \right) \right] - \frac{F_{23}^2}{2} \right\} \quad \dots(55)$$

ifadeleri elde edilir.

### III.2 Çözümlerin Bazı Özellikleri

Akışkana ait karakteristik bazı büyüklüklerin değerlerinden çözümlerin bazı özelliklerini elde etmek mümkündür. Bunlar genişleme faktörü  $\Theta$ , Shear tensörü  $\sigma_{ik}$ , ivme vektörü  $a_i$  ve rotasyon tensörü  $W_{ik}$  dir.

Çözümlerimiz için bu büyüklüklerin değerleri ve bunların yorumları şunlardır:

Genişleme faktörü  $\Theta = U^i_{,i}$ ,

$$\Theta = \frac{1}{A} \left( \frac{A_4}{A} + \frac{B_4}{B} + \frac{C_4}{C} \right), \quad \dots(56)$$

Shear tensörünün sıfır olmayan bileşenleri,

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{11} &= -\frac{A}{3} \left( \frac{B_4}{B} + \frac{C_4}{C} - 2 \frac{A_4}{A} \right), \\ \sigma_{22} &= -\frac{B^2}{3A} \left( \frac{A_4}{A} + \frac{C_4}{C} - \frac{2B_4}{B} \right), \\ \sigma_{33} &= -\frac{C^2}{3A} \left( \frac{A_4}{A} + \frac{B_4}{B} - 2 \frac{C_4}{C} \right), \\ \sigma^2 &= \frac{1}{3A^2} \left\{ \left( \frac{A_4}{A} \right)^2 + \left( \frac{B_4}{B} \right)^2 + \left( \frac{C_4}{C} \right)^2 - \frac{A_4 B_4}{AB} - \frac{A_4 C_4}{AC} - \frac{B_4 C_4}{BC} \right\} \end{aligned} \right\} \dots(57)$$

şeklindedir. (25), (31a) ve (31b) kabulleri altında (56), (57) büyüklükleri ve bunların oranları için

$$\Theta = \frac{2}{f^2 h e^{kt}} \left( k + \frac{h_4}{h} \right), \quad \dots(58)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{1}{3} f^2 h e^{kt} \left( k + \frac{h_4}{h} \right), \\ \sigma_{22} &= \frac{e^{kt}}{3h} \left( k - 2 \frac{h_4}{h} \right), \\ \sigma_{33} &= \frac{h}{3e^{kt}} \left( \frac{h_4}{h} - 2k \right), \\ \sigma^2 &= \frac{1}{3f^4 h^2 e^{2kt}} \left( k^2 + \left( \frac{h_4}{h} \right)^2 - k \frac{h_4}{h} \right), \end{aligned} \right\} \dots(59)$$

$$\frac{\sigma}{\theta} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \frac{(k^2 + (\frac{h_4}{h})^2 - k \frac{h_4}{h})^{1/2}}{k + \frac{h_4}{h}} \quad \dots(60)$$

değerleri elde edilirler. (43) ve (49) çözümleri (60) da yerlerine konulursa

$$\frac{\sigma}{\theta} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \frac{(k^2 + \frac{N^2}{k^2} d^2 e^{2Nt/k} + N d e^{Nt/k})^{1/2}}{2k + \frac{N}{k} d e^{Nt/k}} \quad \dots(61)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sigma}{\theta} \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{3}} \frac{(k^2 + \frac{N^2}{k^2} d^2 + N d)^{1/2}}{\frac{N}{k} d + 2k} \quad \dots(62)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sigma}{\theta} \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{3}} \quad \dots(63)$$

olduğu görülür.  $\frac{\sigma}{\theta}$  oranının  $\lim_{t \rightarrow 0}$  ve  $\lim_{t \rightarrow \infty}$  daki değerlerinden genişlemenin izotropik olmadığı sonucuna varılır.

İvme vektörü  $a_i = \dot{U}_i = U_{i;n} U^n$  için

$$\dot{U}_1 = \frac{A_1}{A} = \frac{B_1}{B} + \frac{C_1}{C} = 2 \frac{f_1}{f}, \quad \dot{U}_2 = \dot{U}_3 = \dot{U}_4 = 0 \quad \dots(64)$$

Rotasyon tensörü  $W_{ik} = U_{[i;k]} + \dot{U}_{[i} U_{k]}$  için de

$$W_{ik} = 0 \quad \dots(65)$$

bulunur.

### III.3 Çözümlerin Asimptotik Davranışları

Çözümlerin karmaşıklığı nedeniyle  $x$  ve  $t$  nin ara değerleri için çözümler hakkında fiziksel açıdan tatmin edici tahminler yapmak mümkün görülmemektedir. Ancak çözümlerin fiziksel anlamlı ( $t \rightarrow 0$ ,  $x \rightarrow 0$ ) ve ( $t \rightarrow \infty$ ,  $x \rightarrow \infty$ ) limit durumlarındaki asimptotik davranışları incelendiğinde aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

$\eta$  viskozite katsayısı,

$$i) f(x) = (a e^{\frac{2}{3}\sqrt{\eta}x} + b e^{-\frac{2}{3}\sqrt{\eta}x - \frac{3}{4}}) \text{ durumunda}$$

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ x \rightarrow 0}} \eta = - \frac{N(1+d) + 2k^2}{2rke^d} (a+b)^{3/2}$$

sabit değerini alır ve

$$\lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ x \rightarrow \infty}} \eta \longrightarrow 0$$

yaklaşır.

ii)  $f(x) = (a+bx)^{-3/4}$  durumunda

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ x \rightarrow 0}} \eta = - \frac{N(1+d) + 2k^2}{2rke^d} a^{3/2}$$

sabit değerini alır ve

$$\lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ x \rightarrow \infty}} \eta \longrightarrow 0$$

yaklaşır.

iii)  $f(x) = (a \cos \frac{2}{3} \sqrt{N}x + b \sin \frac{2}{3} \sqrt{N}x)^{-3/4}$  durumunda

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ x \rightarrow 0}} \eta = - \frac{N(1+d) + 2k^2}{2rke^d} a^{3/2}$$

sabit değerini alır ve

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ x \rightarrow 0}} \eta \longrightarrow 0$$

yaklaşır.

Q ( $Q = q_1 q^i$ ) ısı akı vektörünün karesi ,

i)  $f(x) = (ae^{\frac{2}{3} \sqrt{N}x} + be^{-\frac{2}{3} \sqrt{N}x})^{-3/4}$  durumunda

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ x \rightarrow 0}} Q = \frac{3 \sqrt{N}}{2} \frac{(2k + \frac{N}{k}d)}{r^2 e^{2d}} (a-b)(a+b)^2$$

sabit değerini alır ve

$$\lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ x \rightarrow \infty}} Q \longrightarrow 0$$

yaklaşır.

ii)  $f(x)=(a+bx)^{-3/4}$  durumunda

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ x \rightarrow 0}} Q = \frac{9}{4} \frac{(2k + \frac{N}{k}d)}{r^2 e^{2d}} a^2 b$$

sabit değerini alır ve

$$\lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ x \rightarrow \infty}} Q \longrightarrow 0$$

yaklaşır.

iii)  $f(x)=(a \cos \frac{2}{3} \sqrt{M}x + b \sin \frac{2}{3} \sqrt{M}x)^{-3/4}$  durumunda

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ x \rightarrow 0}} Q = \frac{3}{2} \frac{(2k + \frac{N}{k}d)}{r^2 e^{2d}} a^2 b$$

sabit değerini alır ve

$$\lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ x \rightarrow \infty}} Q \longrightarrow 0$$

yaklaşır.

$\rho$  akışkan yoğunluğu,

i)  $f(x)=(ae^{\frac{2}{3}\sqrt{M}x} + be^{-\frac{2}{3}\sqrt{M}x})^{-3/4}$  durumunda

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ x \rightarrow 0}} \rho = \frac{(a+b)^3}{r^2 e^{2d}} \left[ -\frac{5}{12} M \frac{(a-b)^2}{(a+b)} + \frac{2}{3} M + 5k^2 + \frac{N^2 d^2}{k^2} + 5Nd - \frac{F_{23}^2}{2} \right]$$

sabit değerini alır ve

$$\lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ x \rightarrow \infty}} \rho \longrightarrow 0$$

yaklaşır.

ii)  $f(x)=(a+bx)^{-3/4}$  durumunda

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ x \rightarrow 0}} \rho = \frac{a^2}{r^2 e^{2d}} \left[ -\frac{15}{16} \frac{b^2}{a^2} + 5k^2 + \frac{N^2 d^2}{k^2} + 5Nd - \frac{F_{23}^2}{2} \right]$$

sabit değerini alır ve

$$\lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ x \rightarrow \infty}} \rho \longrightarrow 0$$

yaklaşır.

iii)  $f(x) = (\cos \frac{2}{3} \sqrt{M} x + b \sin \frac{2}{3} \sqrt{M} x)^{-3/4}$  durumunda

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ x \rightarrow 0}} \rho = \frac{a^3}{r^2 e^{2d}} \left[ -\frac{15}{16} \left(\frac{b}{a}\right)^2 - \frac{2}{3} \sqrt{M} + 5k^2 + \frac{N^2 d^2}{k^2} + 5Nd - \frac{r^2}{2} \right],$$

sabit değerini alır ve

$$\lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ x \rightarrow \infty}} \rho \longrightarrow 0$$

yaklaşır.

p akışkan basıncı,

i)  $f(x) = (ae^{\frac{2}{3} \sqrt{M} x} + be^{-\frac{2}{3} \sqrt{M} x})^{-3/4}$  durumunda

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ x \rightarrow 0}} p = \frac{(a+b)^3}{r^2 e^{2d}} \left[ \frac{5}{4} M \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2 + A \right]$$

sabit değerini alır ve

$$\lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ x \rightarrow \infty}} p \longrightarrow 0$$

yaklaşır.

ii)  $f(x) = (a+bx)^{-3/4}$  durumunda

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ x \rightarrow 0}} p = \frac{a^3}{r^2 e^{2d}} \left[ \frac{45}{16} \frac{b^2}{a^2} + A \right],$$

sabit değerini alır ve

$$\lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ x \rightarrow \infty}} p \longrightarrow 0$$

yaklaşır.

iii)  $f(x) = (\cos \frac{2}{3} \sqrt{M} x + b \sin \frac{2}{3} \sqrt{M} x)^{-3/4}$  durumunda

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ x \rightarrow 0}} p = \frac{a^3}{r^2 e^{2d}} \left[ \frac{5}{4} M \frac{b^2}{a^2} + A \right]$$

sabit değerini alır ve

$$\lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ x \rightarrow \infty}} p \rightarrow 0$$

yaklaşır. Burada A,

$$A = -dN \left( \frac{2N}{k^2} + \frac{N}{k^2} d + 2 \right) - k^2 + \frac{1}{3} \frac{(2 \frac{N}{k} d + k)}{(\frac{N}{k} d)} \left[ dN \left( \frac{N}{k^2} + \frac{N}{k^2} d + 2 \right) \right] - \frac{F_{23}^2}{2}$$

sabit değerini haizdir.

$\eta, p, \rho, Q$  büyüklükleri, ifadelerindeki sabitlerin (integral ve seperasyon sabitleri) uygun şekilde seçilmeleriyle  $\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ x \rightarrow 0}}$  durumunda büyük patlamanın (big-bang) başlangıcında pozitif kılınabilir.

Bu büyüklüklerin,  $x \rightarrow \infty, t \rightarrow \infty$  limitinde sifıra yaklaştıkları (limit halde düzgün olmayan izotropi- zira  $\frac{\sigma}{\theta}$  sabittir) görülür.

$x \rightarrow \infty, t \rightarrow \infty$  limit durumunda  $\rho$  nun sifıra yaklaşılabilmesi için (54) denkleminde  $k > \sqrt{\frac{N}{2}}$  olması gerektiği görülmüştür.

#### IV. SONUÇ VE ÖNERİLER

Modellerimiz literatürdeki bazı modelleri (çözümleri) özel hal olarak içeren ve onları genelleştiren daha genel modellerdir; şöyleki:

- i)  $\eta = 0$  ,  $Q = 0$  ve  $F_{23} = 0$  özel halinde Narain (1988),
- ii) Isı akısı  $q_i$  nin olmadığı ve A,B,C metrik potansiyellerinin sadece t nin fonksiyonu olduğu özel durumlarında Bali (1984),

modellerine indirgenirler.

Çözümlerin asimptotik davranışları incelendiğinde  $\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ x \rightarrow 0}}$  durumunda  $\eta$  ,  $p$  ,  $\rho$  ve  $Q$  büyüklükleri sabit değerler almakta ve  $\lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ x \rightarrow \infty}}$  durumunda ise bu değerler,  $\frac{\sigma}{\theta}$  'nin limit değerlerinden görüleceği üzere düzgün olmayarak sifıra yaklaşmaktadır.

---

Doktora çalışmamın her aşamasında bana değerli önerileriyle yardımcı olan ve kıymetli vaktini ayıran sayın tez hocam Prof.Dr. İlhami YAVUZ'a içtenlikle teşekkür ederim.

## ÖZET

Bu tezde, ısı akıllı, vizkoz akışkanlı ve elektromagnetik alanlı inhomojen bir metriğin (Marder 1958) muhtelif çözümleri elde edilmiş çözümlerin fiziksel özellikleri ve asimptotik davranışları tartışılmıştır .

Bulduğumuz modeller literatürdeki bu tip bazı modelleri genelleştiren ve onları özel hal olarak içeren modellerdir.

## SUMMARY

In this thesis, several solutions of an inhomogeneous metric (Marder 1958) which have heat flux, viscous fluid and electromagnetic field are obtained and their some physical and geometrical features and asymptotic behaviours are argued.

The obtained models generalize such kind models and containe them as special situations.

## LİTERATÜR LİSTESİ

- Bali, R. :(1984), *Astrophys. Space Sci.*, 107, 155.
- Bali, R. :(1985), *Astrophys. Space Sci.*, 116, 81.
- Bali, R., ve Jain, D.R. :(1987), *Astrophys. Space Sci.*,  
139, 175.
- Bali, R., ve Jain, D.R. :(1988), *Astrophys. Space Sci.*,  
141, 207.
- Bali, R., ve Jain, D.R. :(1991), *Astrophys. Space Sci.*,  
185, 211.
- Bali, R., Singh, G., ve Tyagi, A. :(1987), *Astrophys. Space Sci.*,  
139, 365.
- Bali, R., ve Tyagi, A. :(1987), *Astrophys. Space Sci.*,  
138, 173.
- Bali, R., ve Tyagi, A. :(1989), *Gen. Rel. Grav.*, 21, 797.
- Bali, R., ve Tyagi, A. :(1991), *Astrophys. Space Sci.*,  
185, 299.
- Collins, C.B., ve Szafron, D.A. :(1979), *J. Math. Phys.*,  
20, 2347.
- Marder, L. :(1958), *Proc. R. Soc. A.* 246, 133.
- Narain, S. :(1988), *Gen. Rel. Grav.* 20, 15.
- Roy, S.R., ve Singh, K.P. :(1977), *J. Phys. A: Math. Gen.*,  
10, 49.
- Roy, S.R., ve Narayan, S. :(1979), *Ind. J. Pure Appl. Math.*, 10, 763.

- Roy, S.R., ve Narayan, S. :(1981), Int. J. Theor. Phys.,  
20, 709.
- Roy, S.R., ve Bali, R.:(1984), J. Math. Phys. , 25, 1456.
- Ryan, M.P. ve Shepley, L.C. : (1975), Homogeneous  
Relativistic Cosmologies (Princeton U.P.,  
Princeton N.J.)
- Singh, K.P., Radhakrishnan, L.,ve Sharan, R.:(1965), Ann.  
Phys. (USA), 32, 46.
- Singh, K.P. ve Roy, S.R.:(1972), Ind. J.Pure Appl. Math.,  
3, 532.
- Singh, K.P. ,ve Abdussattar :(1973), J. Phys.A : Math.,  
Nucl. Gen., 6, 1090.
- Singh, T., ve Srivastava, R.S.:(1989), Astrophys. Space  
Sci. , 159, 21.
- Szafron, D.A.: (1977), J. Math Phys. , 18, 1973.
- Szekeres, P.:(1975), Comm. Math. Phys. , 41, 55.