

**YÜKSEK MERTEBEDEN DİFERANSİYEL  
OPERATÖRLER VE EVRENSEL MODÜLLERİ**

**HIGH ORDER DIFFERENTIAL OPERATORS  
AND THEIR UNIVERSAL MODULES**

**H.Melis TEKİN**

HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ

Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin

Matematik Anabilim Dalı İçin Öngördüğü

YÜKSEK LİSANS TEZİ

olarak hazırlanmıştır.

2009

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğüne;

Bu çalışma jürimiz tarafından **MATEMATİK ANABİLİM DALI'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Başkan :.....  
Prof. Dr. Mahmut KUZUCUOĞLU

Üye (Danışman) :.....  
Doç. Dr. Ali ERDOĞAN

Üye :.....  
Prof. Dr. Yücel TIRAŞ

Üye :.....  
Prof. Dr. Derya KESKİN TÜTÜNCÜ

Üye :.....  
Doç. Dr. Nuri ÇİMEN

ONAY

Bu tez ... /... / .... tarihinde Enstitü Yönetim Kurulunca kabul edilmiştir.

.../.../2009

Prof. Dr. Erdem YAZGAN  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRÜ

# YÜKSEK MERTEBEDEN DİFERANSİYEL OPERATÖRLER VE EVRENSEL MODÜLLERİ

H. MELİS TEKİN

ÖZ

Bu çalışmada halka teoride karşılaşılan problemlerin çözümünü kolaylaştıran diferansiyel operatörler incelenmiştir. Bu tezin amacı diferansiyel operatörlerin halka teorideki yerini açıklamak ve yüksek mertebeden diferansiyel operatörler ve bunların evrensel modüllerinin temel özelliklerini anlatarak ileride yapılacak olan çalışmalar için bir temel oluşturmaktır. Bu tez üç bölümden oluşmaktadır.

Tezin giriş bölümünde, okuyucunun sonraki bölümlerde yapılan çalışmalarını inceleyebilmesi için gerekli olan önbilgiler verildi.

Tezin ikinci bölümünde, 1.mertebeden diferansiyel operatörlerin ve bunların evrensel modüllerinin tanımı verilerek her  $R/R_0$  cebiri için 1. mertebeden evrensel diferansiyel operatörün varlığı gösterildi. Sonra 1. mertebeden diferansiyel operatörlerin cisim genişlemeleri üzerindeki uygulamaları verildi ve lokal halkaların diferansiyel operatör modülleri incelenerek bunların üreteç kümeleri belirlendi. Buna ek olarak, afin cebirlerin ve lokalizasyonlarının diferansiyel operatör modülleri incelendi ve Jakobien Kriterine yer verildi. Böylelikle yüksek mertebeden diferansiyel operatörleri incelemek için gerekli olan temel bilgiler verilmiş oldu.

Tezin üçüncü bölümünde,  $n$ .mertebeden diferansiyel operatörün tanımına ve bunlarla ilgili örneklere yer verilerek  $n$ .mertebeden evrensel diferansiyel operatör modülü tanımlandı. Ayrıca bölüm halkalarının ve lokal halkaların diferansiyel operatör modülleri verildi. Buna ek olarak cisim genişlemelerinin evrensel modülleri karakterize edildi ve evrensel modüllerle vektör uzaylar arasındaki ilişki gösterildi. Son olarak regüler cebirlerin evrensel modülleri incelendi ve  $R/R_0$  cebiri için  $n$ .mertebeden türev modülü tanımlanarak  $n$ .mertebeden türev modülleri ile  $n$ .mertebeden diferansiyel operatör modülleri arasındaki ilişki verildi.

**Anahtar Kelimeler :** Evrensel Modül, Projektif Modül, Jakobien kriteri

**Danışman :** Doç.Dr. Ali ERDOĞAN, Hacettepe Üniversitesi, Fen Fakültesi,  
Matematik Bölümü

# HIGH ORDER DIFFERENTIAL OPERATORS AND THEIR UNIVERSAL MODULES

H. MELİS TEKİN

## ABSTRACT

In this work we investigate the differential operators which facilitate to overcome some problems in ring theory. The main purpose of this thesis is to explain the role of the differential operators in ring theory and to give some properties of high order differential operators and their universal modules and thus to constitute a basis for our next works. This thesis consists of three chapters.

The first chapter gives a necessary background for the readers to review the work in the next chapters.

In the second chapter the definition of the first order differential operator and their universal modules are given and it is shown the existence of universal modules for all  $R/R_0$  algebras. Then we obtain the first applications of the theory of differential modules on field extensions and the structure of differential operator modules of local rings are investigated. Moreover differential operator modules of affine algebras and their localizations are in consideration and Jacobien criterion is given. Thus the necessary informations are given to investigate high order differential operators and their universal modules.

In the third chapter, high order differential operators and their universal modules are defined. Then the universal modules of factor rings and local rings are given. Besides we characterise the universal module of the field of fractions of an affine domain and it is shown the connection of the universal modules with vector spaces. In addition to this universal modules of regular algebras are investigated. Finally we define the universal module of derivations of order  $n$  of a given  $R/R_0$ -algebra and we give the relation between differential operator modules of order  $n$  and derivations of order  $n$ .

**Keywords:** Universal Module, Projective Module, Jacobien Criterion

**Advisor :** Doç. Dr. Ali ERDOĞAN, Hacettepe University, Faculty of Science, Department of Mathematics

## TEŞEKKÜR

Bu çalışma boyunca bana sabırla yol gösteren, kendisinden çok şey öğrendiğim değerli hocam ve aynı zamanda tez danışmanım Doç. Dr. Ali ERDOĞAN'a anlayışı ve yardımseverliği için,

Attığım her adımda yanımda olan, her zaman bana güvenen ve benden desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen canım anneme, babama ve kardeşime,

Bu süre zarfında bütün sevgilerimi ve üzüntülerimi paylaşan, bütün zor anlarımda bana her zaman destek olan Mahmut AKÇİN'e,

Tez yazımı sırasında ve her ihtiyacım olduğunda yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyen Arş.Gör. Berke KURU'ya, Arş.Gör. Kerime KALLI'ya, Arş.Gör. Eylem ÖZTÜRK'e, Arş.Gör. Gamze DÜZGÜN'e, Arş.Gör. Zümra KAVAFOĞLU'na, Arş.Gör. Nedim UÇAR'a ve Arş.Gör. Uğur SERT'e ,

Ayrıca bu çalışmanın gerçekleştirilmesi için gerekli ortamı hazırlayan Hacettepe Üniversitesi Matematik Bölümü'ne

sonsuz teşekkürler...

# İçindekiler

ÖZ	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	1
<b>1 GİRİŞ</b>	<b>2</b>
1.1 Halka ve Modül Teori ile İlgili Temel Kavramlar . . . . .	2
1.2 Modüllerin Tam Dizileri . . . . .	7
<b>2 1.Mertebeden Diferansiyel Operatör Modülleri</b>	<b>11</b>
2.1 1.Mertebeden Diferansiyel Operatörlerin Özellikleri . . . . .	11
2.2 1. Mertebeden Diferansiyel Operatör Modülleri . . . . .	23
2.3 Cisim Genişlemelerinin Diferansiyel Operatör Modülleri . . . . .	43
2.4 Lokal Halkaların Diferansiyel Operatör Modülleri . . . . .	55
2.5 Afin Cebirlerin Diferansiyel Operatör Modülleri . . . . .	60
<b>3 n.Mertebeden Diferansiyel Operatörler ve Evrensel Modülleri</b>	<b>65</b>
3.1 n. Mertebeden Diferansiyel Operatörlerin Temel Özellikleri . . . . .	65
3.2 n. Mertebeden Diferansiyel Operatörler ve Evrensel Modülleri . . . . .	73
3.3 Bölüm Halkalarının ve Lokal Halkaların Evrensel Diferansiyel Operatörleri . . . . .	78
3.4 Cisim Genişlemelerinin Evrensel Modülleri . . . . .	83
3.5 Evrensel Modüller ve Vektör Uzaylar Arasındaki İlişki . . . . .	85
3.6 Regüler Cebirlerin Evrensel Modülleri . . . . .	87
3.7 Evrensel Türev Modülleri . . . . .	94
<b>KAYNAKLAR</b>	<b>97</b>
<b>ÖZGEÇMİŞ</b>	<b>99</b>

# 1 GİRİŞ

Bu bölümde okuyucunun sonraki bölümlerde yapılan çalışmalarını inceleyebilmesi için gerekli olan bilgiler verilecektir. Bu çalışmada herhangi bir  $R$  halkası ile birimli ve değişmeli bir halka kastedilmektedir.

## 1.1 Halka ve Modül Teori ile İlgili Temel Kavramlar

**Tanım 1.1.1**  $R$  herhangi bir halka olmak üzere  $R$ 'nin tüm asal ideallerinin kümesine  $R$ 'nin spektrumu denir ve  $\text{Spec}(R)$  ile gösterilir.

$R$  sıfır halkasından farklı herhangi bir halka olmak üzere  $R$ 'nin en az bir maksimal ideali olduğundan  $\text{Spec}(R) \neq \emptyset$  dir.

**Teorem 1.1.2**  $R, S$  halkaları için

$$f : R \longrightarrow S$$

homomorfizması verilsin. Bu dönüşüm yardımıyla

$$\varphi : \text{Spec}(S) \longrightarrow \text{Spec}(R), \quad (P \longrightarrow f^{-1}(P))$$

ile tanımlı dönüşüm indirgenir.

**Tanım 1.1.3**  $R$  bir halka ve  $P_1, P_2, \dots, P_n$  idealleri  $R$ 'nin asal idealleri olmak üzere

$$P_0 \subset P_1 \subset \dots \subset P_n$$

dizisine  $R$ 'nin asal idealler dizisi denir. Buradaki  $n$  sayısına da dizinin uzunluğu denir.

Herhangi bir  $P$  asal ideali için

$$P$$

$R$ 'nin bir asal ideal zinciri olur ve bu zincirin uzunluğu 0 dir. Dolayısıyla sıfırdan farklı herhangi bir  $R$  halkası için uzunluğu 0 olan en azından bir tane asal idealler zinciri vardır.

**Tanım 1.1.4**  $S$ ,  $R$ 'nin boştan farklı herhangi bir alt kümesi olmak üzere  $1 \in S$  ve her  $a, b \in S$  için  $ab \in S$  oluyor ise  $S$ 'ye  $R$ 'nin çarpımsal kapalı alt kümesi denir.

**Örnek 1.1.5**  $R$  bir halka ve  $P$ ,  $R$ 'nin bir asal ideali olmak üzere  $S = R - P$  kümesi çarpımsal kapalıdır.

**Teorem 1.1.6**  $S$ ,  $R$ 'nin çarpımsal kapalı bir alt kümesi olmak üzere  $R \times S$  üzerinde

$$”(r, s) \sim (r', s') \iff s_1(rs' - r's) = 0 \text{ olacak şekilde } s_1 \in S \text{ elemanı vardır.}”$$

ile tanımlanan “ $\sim$ ” bağıntısı bir denklik bağıntısıdır. Eğer  $R$  bir tamlık bölgesi ve  $0 \notin S$  ise

$$(r, s) \sim (r', s') \iff (rs' - r's) = 0$$

elde edilir.

“ $\sim$ ” ile tanımlanan denklik bağıntısı için  $(r, s) \in R \times S$  elemanlarının denklik sınıfları  $r/s$  ile gösterilir.  $R \times S$ 'nin “ $\sim$ ” bağıntısına göre tüm denklik sınıflarının kümesi ise  $S^{-1}R$  ile gösterilir.

**Teorem 1.1.7**  $S$ ,  $R$ 'nin çarpımsal kapalı bir alt kümesi ve  $S^{-1}R$ ,  $R \times S$ 'nin “ $\sim$ ” bağıntısına göre tüm denklik sınıflarının kümesi olmak üzere

$$r/s + r'/s' = rs' + r's/ss'$$

ve

$$(r/s)(r'/s') = rr'/ss'$$

işlemleri ile  $S^{-1}R$ , birimli ve değişmeli bir halka olur.

**Tanım 1.1.8**  $R$  bir halka ve  $P$ ,  $R$ 'nin bir asal ideali olmak üzere  $S = R - P$  olsun. Bu durumda  $S^{-1}R$ 'ye  $R$ 'nin  $S$ 'deki lokalizasyonu denir ve  $R_P$  ile gösterilir.

**Örnek 1.1.9**  $R = \mathbb{Z}$  ve  $P = (p)$  asal ideali için

$$\mathbb{Z}_{(p)} = \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} : p \nmid b \right\}$$

olur.

**Teorem 1.1.10**  $P, R$ 'nin bir asal ideali olmak üzere  $PR_P$  ideali  $R_P$ 'nin tek maksimal idealidir.

**Tanım 1.1.11**  $R$  herhangi bir Noether halka olmak üzere eğer  $R$ 'nin tek bir maksimal ideali varsa  $R$ 'ye lokal halka denir ve  $(R, m)$  ile gösterilir.

**Tanım 1.1.12**  $(R, m)$  bir lokal halka olmak üzere  $R/m$  cismine  $R$ 'nin kalan cismi denir.

**Tanım 1.1.13**  $R$  herhangi bir halka olmak üzere  $R$ 'nin boyutu

$$\sup \{n \in \mathbb{N} : R \text{ 'nin } n \text{ uzunluklu bir asal idealler zinciri vardır}\}$$

ile tanımlanır ve  $\dim R$  ile gösterilir. Eğer bu supremum yok ise  $\dim R = \infty$  olarak alınır.

**Örnek 1.1.14**  $R$  bir halka olmak üzere  $R_1 = R[x_1, x_2, \dots, x_n, \dots]$  polinomlar cebiri için  $\dim R_1 = \infty$  olur.

**Tanım 1.1.15**  $P \in \text{Spec}(R)$  olmak üzere

$$P_0 \subset P_1 \subset \dots \subset P_n, P_n = P$$

asal idealler dizisinin supremumuna  $P$ 'nin yüksekliği denir ve  $htP$  ile gösterilir. Eğer bu supremum yok ise  $htP = \infty$  olarak alınır.

$R$  bir halka olmak üzere

$$\dim R = \sup \{htP : P \in \text{Spec}(R)\} = \sup \{htm : m, R \text{ 'nin bir maksimal idealidir}\}$$

olur.

**Örnek 1.1.16**  $(R, m)$  bir lokal halka olmak üzere  $\dim R = htm$  elde edilir.

**Örnek 1.1.17** Herhangi bir  $F$  cismi için  $\dim F = 0$  dır.

**Örnek 1.1.18**  $R$ , sıfırdan farklı herhangi bir Artin halka olsun.  $R$ 'nin her asal ideali aynı zamanda maksimal idealdir:  $P$ ,  $R$ 'nin herhangi bir asal ideali olmak üzere  $R$  Artin olduğundan  $R' = R/P$  Artin tamlık bölgesidir.  $b \in R'$  ve  $b \neq 0$  olmak üzere  $R'$ 'nin

$$R'b \supseteq R'b^2 \supseteq \dots \supseteq R'b^i \supseteq R'b^{i+1} \supseteq \dots$$

azalan dizisi için öyle bir  $n \in \mathbb{N}$  vardır ki  $R'b^n = R'b^{n+1}$  sağlanır. Bu durumda  $b^n = cb^{n+1}$  olacak şekilde bir  $c \in R'$  vardır.  $R'$  bir tamlık bölgesi olduğundan  $1 = cb$  olur yani  $b \in R'$  tersinirdir. O halde  $R' = R/P$  bir cisim ve  $P$ ,  $R$ 'nin bir maksimal ideali olur. Böylece  $R$  halkası için  $\dim R = 0$  bulunur.

**Tanım 1.1.19**  $R$  bir halka ve  $Q$ ,  $R$ 'nin bir ideali olmak üzere aşağıdaki koşulları sağlasın:

(i)  $Q$ ,  $R$ 'nin öz ideali olsun.

(ii)  $a, b \in R$  için  $ab \in Q$  ve  $a \notin Q$  olmak üzere bir  $n$  tam sayısı için  $b^n \in Q$  sağlansın.

Bu durumda  $Q$ 'ya  $R$ 'nin primary ideali denir.

**Örnek 1.1.20**  $R$ 'deki her asal ideal aynı zamanda primary idealdir.

**Önteorem 1.1.21**  $Q$ ,  $R$  halkasının bir primary ideali olsun. Bu durumda  $P := \sqrt{Q}$ ,  $R$ 'nin bir asal ideali olur. Buradaki  $Q$  idealine  $P$ -primary ideal denir.

**İspat.** [Sharp, 2000] ■

**Teorem 1.1.22**  $(R, m)$  bir lokal halka olmak üzere

$$\dim R = \min \left\{ i \in \mathbb{N} : \sum_{j=1}^i Ra_j \text{ } m\text{-primary olacak şekilde } a_1, \dots, a_i \in R \text{ elemanları vardır.} \right\}$$

**İspat.** [Sharp, 2000] ■

**Önerme 1.1.23** (Nakayama Lemma)  $I$ ,  $R$  halkasının bütün maksimal ideallerinin arakesiti içerisinde bulunan bir ideali ve  $M$ , herhangi bir  $R$ -modül olsun. Eğer  $M/N$  sonlu üretilmiş olacak şekildeki bir  $N \subset M$  alt modülü için  $M = M + IN$  sağlanıyorsa  $M = N$  elde edilir.

**İspat.** [Kunz, 1985] ■

**Sonuç 1.1.24**  $(R, m)$  lokal halkası için  $k := R/m$ ,  $R$ 'nin kalan cismi ve  $M$ , sonlu üretilmiş bir  $R$ -modül olsun. Bu durumda  $m_1, \dots, m_t \in M$  için aşağıdakiler denktir:

(i)  $M = \langle m_1, \dots, m_t \rangle$

(ii)  $m_i (i = 1, \dots, t) \in M$  elemanlarının kalan sınıfları  $\bar{m}_1, \dots, \bar{m}_t \in M/mM$ ,  $M/mM$   $k$ -vektör uzayı için bir üreteç kümesidir.

**İspat.** [Kunz, 1985] ■

**Sonuç 1.1.25**  $(R, m)$  lokal halkası için  $k := R/m$ ,  $R$ 'nin kalan cismi ve  $M$ , sonlu üretilmiş bir  $R$ -modül olsun.  $\mu(M)$ ,  $M$ 'nin minimal üreteç kümesindeki eleman sayısını göstermek üzere  $m_1, \dots, m_t \in M$  için aşağıdakiler sağlanır:

(i)  $\mu(M) = \dim_k(M/mM)$

(ii)  $m_1, \dots, m_t \in M$  elemanlarının  $M$  için minimal üreteç kümesi olması için gerek ve yeter koşul  $\bar{m}_1, \dots, \bar{m}_t$  kalan sınıflarının  $M/mM$  için bir taban oluşturmasıdır.

**İspat.** [Kunz, 1985] ■

**Sonuç 1.1.26**  $(R, m)$  Noether ve lokal bir halka olmak üzere

$$\dim R \leq v \dim_{R/m} m/m^2$$

sağlanır.

**İspat.** [Sharp, 2000] ■

**Tanım 1.1.27**  $(R, m)$  Noether ve lokal bir halka olmak üzere eğer

$$\dim R = v \dim_{R/m} m/m^2$$

sağlanıyorsa  $R$ 'ye regüler halka denir.

**Tanım 1.1.28**  $R$  herhangi bir Noether halka olmak üzere eğer  $R$ 'nin bütün lokalizasyonları regüler ise  $R$  halkasına regüler halka denir.

**Örnek 1.1.29**  $R$  bir Noether halka ve  $P \in \text{Spec}(R)$  olmak üzere  $htP = n$  olsun. Ayrıca  $P$  ideali  $a_1, \dots, a_n \in R$  elemanları ile üretilsin. Bu durumda  $R_P$  lokalizasyonu boyutu  $n$  olan bir regüler lokal halkadır:

$$\dim R_P = ht_{R_P} P R_P = ht_R P = n$$

olur ve  $R_P$ 'nin maksimal ideali

$$P R_P = \left( \sum_{i=1}^n R a_i \right) R_P = \sum_{i=1}^n R_P \frac{a_i}{1}$$

olduğundan  $n$  tane elemanla üretilir.

**Örnek 1.1.30**  $p$  asal sayısı için  $ht p\mathbb{Z} = 1$  dir ve  $p\mathbb{Z}, \mathbb{Z}$ 'nin 1 eleman tarafından üretilen bir asal ideali olduğundan  $\mathbb{Z}_{p\mathbb{Z}}$  regüler lokal halkadır.

**Tanım 1.1.31**  $(R, m)$  Noether, lokal bir halka olmak üzere  $\mu(m)$  sayısına  $R$ 'nin gömülme boyutu (embedding dimension) denir ve  $edim R$  ile gösterilir.

## 1.2 Modüllerin Tam Dizileri

**Tanım 1.2.1**  $K$  sonlu üretilmiş  $R$ -modül olmak üzere

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow R^n \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

$R$ -modüllerinin dizisi tam olacak şekilde bir  $n \in \mathbb{N}$  sayısı var ise  $M$  modülüne sonlu sunulmuş (finitely presentable) denir.

$M$  ve  $N$   $R$ -modüller olmak üzere  $S, R$ 'nin çarpımsal kapalı bir alt kümesi olsun. Bu durumda

$$\text{Hom}_R(M, N) \longrightarrow \text{Hom}_{R_S}(M_S, N_S), (\alpha \longrightarrow \alpha_S)$$

ile tanımlanan dönüşüm bir  $R$ -homomorfizmadır ve bu homomorfizma yardımıyla

$$h : \text{Hom}_R(M, N)_S \longrightarrow \text{Hom}_{R_S}(M_S, N_S), \left( \frac{\alpha}{s} \longrightarrow \frac{\alpha_S}{s} \right)$$

$R_S$ -lineer dönüşümü indirgenir.

**Önerme 1.2.2**

$$h : \text{Hom}_R(M, N)_S \longrightarrow \text{Hom}_{R_S}(M_S, N_S), \left( \frac{\alpha}{s} \longrightarrow \frac{\alpha_s}{s} \right)$$

$R_S$  – lineer dönüşümü için :

(i)  $M$  sonlu üretilmiş bir  $R$ –modül ise  $h$  birebirdir.

(ii)  $M$  sonlu sunulmuş bir  $R$ –modül ise  $h$  izomorfizmadır.

**İspat.** [Kunz, 1985] ■

Noether modüller sonlu sunulmuş olduğu için 1.2.2’yi sağlarlar. Özel olarak, her  $R$  Noether halkası için

$$\text{Hom}(R, R)_S \cong \text{Hom}(R_S, R_S)$$

olur.

**Önteorem 1.2.3** (Snake Lemma) *Satır ve sütunları tam olan  $R$ –modüllerin aşağıdaki değişmeli diagramı verilsin.*

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & K_1 & & K_2 & & K_3 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & M_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & M_2 & \xrightarrow{\alpha_2} & M_3 \longrightarrow 0 \\
 & & \gamma_1 \downarrow & & \gamma_2 \downarrow & & \gamma_3 \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & N_1 & \xrightarrow{\beta_1} & N_2 & \xrightarrow{\beta_2} & N_3 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & C_1 & & C_2 & & C_3 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

Bu durumda  $\alpha_i$  ve  $\beta_i$  homomorfizmalarından indirgenen

$$\alpha'_i : K_i \longrightarrow K_{i+1} \quad \text{ve} \quad \beta'_i : C_i \longrightarrow C_{i+1} \quad (i = 1, 2)$$

homomorfizmaları için öyle bir

$$\delta : K_3 \longrightarrow C_1$$

lineer dönüşümü vardır ki

$$0 \longrightarrow K_1 \xrightarrow{\alpha'_1} K_2 \xrightarrow{\alpha'_2} K_3 \xrightarrow{\delta} C_1 \xrightarrow{\beta'_1} C_2 \xrightarrow{\beta'_2} C_3 \longrightarrow 0$$

dizisi tam olur.

**İspat.** [Kunz, 1985] ■

**Önerme 1.2.4**  $R$  bir halka olmak üzere  $R$ -modüllerin

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{\theta} M_2 \xrightarrow{\zeta} M_3$$

dizisinin tam olması için gerek ve yeter koşul her  $M$   $R$ -modülü için

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_R(M, M_1) \xrightarrow{\bar{\theta}} \text{Hom}_R(M, M_2) \xrightarrow{\bar{\zeta}} \text{Hom}_R(M, M_3)$$

dizinin tam olmasıdır.

**İspat.** [Hungerford, 1974] ■

**Önerme 1.2.5**  $R$  bir halka olmak üzere  $R$ -modüllerin

$$M_1 \xrightarrow{\theta} M_2 \xrightarrow{\zeta} M_3 \longrightarrow 0$$

dizisinin tam olması için gerek ve yeter koşul her  $M$   $R$ -modülü için

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_R(M_3, M) \xrightarrow{\bar{\theta}} \text{Hom}_R(M_2, M) \xrightarrow{\bar{\zeta}} \text{Hom}_R(M_1, M)$$

dizisinin tam olmasıdır.

**İspat.** [Hungerford, 1974] ■

**Önerme 1.2.6**  $P$  bir  $R$ -modül olmak üzere aşağıdakiler denktir:

(1)  $L, M$  ve  $N$ ,  $R$ -modülleri için

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{\Psi} M \xrightarrow{\varphi} N \longrightarrow 0$$

dizisi kısa tam dizi ise

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_R(P, L) \xrightarrow{\Psi'} \text{Hom}_R(P, M) \xrightarrow{\varphi'} \text{Hom}_R(P, N) \longrightarrow 0$$

dizisi kısa tam dizi olur.

(2)  $M$  ve  $N$  herhangi iki  $R$ -modül olmak üzere

$$M \xrightarrow{\varphi} N \longrightarrow 0$$

dizisi tam olsun. Bu durumda  $P$ 'den  $N$ 'ye tanımlı her  $R$ -modül homomorfizması  $M$   $R$ -modülüne yükseltilebilir.

(3)

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow P \longrightarrow 0$$

olacak şekilde her kısa tam dizi split tam dizidir.

(4)  $P$ , bir serbest  $R$ -modülün dik toplananıdır.

Bu denk koşullardan birini sağlayan  $P$ ,  $R$ -modülüne projektif modül denir.

**İspat.** [*D.Dummit, R.M.Foote, 1999*] ■

**Sonuç 1.2.7**  $(R, m)$  bir lokal halka olmak üzere  $M$  sonlu üretilmiş bir  $R$ -modül olsun. Bu durumda  $M$ 'nin projektif olması için gerek ve yeter koşul serbest olmasıdır.

**İspat.** [*Kunz, 1985*] ■

## 2 1.Mertebeden Diferansiyel Operatör Modülleri

### 2.1 1.Mertebeden Diferansiyel Operatörlerin Özellikleri

Bu bölümde 1.mertebeden diferansiyel operatörün tanımı örneklerle birlikte verilecek ve 1. mertebeden diferansiyel operatörlerle ilgili temel özellikler ispatlanacaktır.

**Tanım 2.1.1**  $R_0$  bir halka,  $R$  bir  $R_0$ -cebir ve  $M$  bir  $R$ -modül olsun.  $R/R_0$ 'dan  $M$ 'ye aşağıdaki koşulları sağlayan  $d : R \rightarrow M$  dönüşümüne 1.mertebeden bir  $R_0$ -diferansiyel operatör denir.

(i)  $d$   $R_0$ -lineerdir.

(ii) (çarpım kuralı) Her  $a, b \in R$  için  $d(ab) = adb + bda$

**Örnek 2.1.2** a)  $R = R_0[X_1, X_2, \dots, X_n]$ ,  $R_0$  halkası üzerinde değişkenleri  $X_1, X_2, \dots, X_n$  olan polinomlar cebiri olsun.

$$F = \sum p_{t_1 t_2 \dots t_n} X_1^{t_1} X_2^{t_2} \dots X_n^{t_n} \quad (p_{t_1 t_2 \dots t_n} \in R_0)$$

polinomu için  $\frac{\partial F}{\partial X_i}$ ,

$$\frac{\partial F}{\partial X_i} := \sum p_{t_1 t_2 \dots t_n} t_i X_1^{t_1} X_2^{t_2} \dots X_i^{t_i-1} \dots X_n^{t_n}$$

ile tanımlansın. O zaman

$$\frac{\partial}{\partial X_i} : R \rightarrow R \quad (F \rightarrow \frac{\partial F}{\partial X_i})$$

dönüşümü 1.mertebeden  $R_0$ -diferansiyel operatör olur.

b)  $R=R_0[X_1, X_2, \dots, X_n]$  olmak üzere tabanı  $\{dX_1, dX_2, \dots, dX_n\}$  olan

$$M := RdX_1 \oplus RdX_2 \oplus \dots \oplus RdX_n$$

serbest  $R$ -modülü tanımlansın. Bu durumda

$$d : R \rightarrow M, \quad dF = \frac{\partial F}{\partial X_1} dX_1 + \frac{\partial F}{\partial X_2} dX_2 + \dots + \frac{\partial F}{\partial X_n} dX_n$$

ile tanımlanan dönüşüm 1.mertebeden  $R_0$ -diferansiyel operatördür.

**Önerme 2.1.3**  $\mu : R \otimes_{R_0} R \rightarrow R$  ( $\sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i \rightarrow \sum_{i=1}^n a_i b_i$ ) dönüşümünün çekirdeği,  $I$  olmak üzere her  $r \in R$  için  $1 \otimes r - r \otimes 1$  elemanları tarafından üretilir.

**İspat.** Her  $r \in R$  için  $\mu(1 \otimes r - r \otimes 1) = 0$  olduğundan  $\langle 1 \otimes r - r \otimes 1 \rangle \subseteq I$  dir.

Tersine  $x \in I$  alınsın. Buradan  $x = \sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i$  olmak üzere

$$\mu(x) = \mu\left(\sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i b_i = 0$$

olur.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i &= \sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i + \sum_{i=1}^n a_i b_i \otimes 1 - \sum_{i=1}^n a_i b_i \otimes 1 \\ &= \sum_{i=1}^n (a_i \otimes 1)(1 \otimes b_i - b_i \otimes 1) + \sum_{i=1}^n a_i b_i \end{aligned}$$

ve  $\sum_{i=1}^n a_i b_i = 0$  olduğundan

$$x = \sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i = \sum_{i=1}^n (a_i \otimes 1)(1 \otimes b_i - b_i \otimes 1) \in \langle 1 \otimes r - r \otimes 1 \rangle$$

elde edilir. Yani  $I \subseteq \langle 1 \otimes r - r \otimes 1 \rangle$  olur. ■

$0 \rightarrow I \xrightarrow{i} R \otimes_{R_0} R \xrightarrow{\mu} R \rightarrow 0$  tam dizisi için

$$j_1 : R \rightarrow R \otimes_{R_0} R \quad (r \rightarrow r \otimes 1)$$

ve

$$j_2 : R \rightarrow R \otimes_{R_0} R \quad (r \rightarrow 1 \otimes r)$$

dönüşümleri göz önüne alınsın. Bu homomorfizmalar yardımıyla  $R \otimes_{R_0} R$  üzerinde iki  $R$ -modül yapısı tanımlanabilir. Bu homomorfizmalar aynı zamanda  $I$  üzerinde iki  $R$ -modül yapısı indirger.  $r, s \in R$  olmak üzere

$$1 \otimes r - r \otimes 1 + I^2 \in I/I^2$$

alınsın.

$$(1 \otimes s - s \otimes 1)(1 \otimes r - r \otimes 1) \in I^2$$

olduğundan

$$(1 \otimes s)(1 \otimes r - r \otimes 1 + I^2) = (s \otimes 1)(1 \otimes r - r \otimes 1 + I^2)$$

elde edilir. Yani  $I/I^2$  üzerinde bu iki  $R$ -modül yapısı çakışır.

**Örnek 2.1.4**

$$d : R \rightarrow I/I^2 \quad (r \rightarrow 1 \otimes r - r \otimes 1 + I^2)$$

ile tanımlansın. Bu durumda  $d$ ,  $R_0$ -lineerdir. Ayrıca her  $r, s \in R$  için

$$\begin{aligned} d(rs) &= 1 \otimes rs - rs \otimes 1 + I^2 = (1 \otimes r)(1 \otimes s - s \otimes 1 + I^2) + (s \otimes 1)(1 \otimes r - r \otimes 1 + I^2) \\ &= (1 \otimes r)(1 \otimes s - s \otimes 1 + I^2) + (1 \otimes s)(1 \otimes r - r \otimes 1 + I^2) = rds + sdr \end{aligned}$$

sağlanır. Buradan  $d$ , 1.mertebeden  $R_0$ -diferansiyel operatör olur.

**Önerme 2.1.5**  $d : R \rightarrow M$ , 1. mertebeden  $R_0$ -diferansiyel operatör olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır:

(i)  $d(1) = 0$  ve her  $n$  tamsayısı için  $d(n) = 0$  dir.

(ii) Her  $x_1, x_2, \dots, x_n \in R$  için

$$d(x_1 x_2 \dots x_n) = \sum_{i=1}^n x_1 x_2 \dots \hat{x}_i \dots x_n dx_i \quad (\hat{x}_i = 1)$$

dir. Özel olarak her  $x \in R$  için  $dx^n = nx^{n-1}dx$  olur.

(iii)  $P := \ker d := \{\rho \in R : d\rho = 0\}$  ile tanımlanan küme  $R$ 'nin bir alt halkasıdır ve  $d$ ,  $R/P$  üzerinde 1.mertebeden  $R_0$  diferansiyel operatördür. Ayrıca  $R_0$ 'ın  $R$  içindeki görüntüsü  $P$  tarafından kapsanır.

(iv)  $R$ 'nin her  $I$  ideali ve her  $n > 0$  tam sayısı için

$$d(I^n) \subset I^{n-1}M$$

dir.

(v) (Bölüm kuralı)  $s \in R$  tersinir olmak üzere her  $r \in R$  için

$$d(rs^{-1}) = (s^{-1})^2(sdr - rds)$$

sağlanır. Özel olarak

$$d(s^{-1}) = -(s^{-1})^2 ds$$

olur.

(vi)  $f \in \mathbf{R}_0[X_1, X_2, \dots, X_n]$  ve  $x_1, x_2, \dots, x_n \in R$  olmak üzere

$$d(f(x_1, x_2, \dots, x_n)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial X_i}(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_i$$

dir.

**İspat.**

(i)  $d(1) = d(1.1) = 1d(1) + 1d(1)$  olur. Buradan da  $d(1) = 0$  elde edilir. Her  $n$  tamsayısı için  $d(n.1) = d(\underbrace{1+1+\dots+1}_n) = \underbrace{d(1) + \dots + d(1)}_n = n.d(1) = 0$  sağlanır.

(ii) İspat  $n$  üzerinde tümevarımla yapılacaktır.  $n = 2$  için çarpım kuralından

$$d(x_1x_2) = x_1dx_2 + x_2dx_1$$

olduğu görülür. İfade  $n - 1$  için doğru olsun.

$$\begin{aligned} d(x_1x_2\dots x_n) &= d((x_1x_2\dots x_{n-1})x_n) \\ &= x_1x_2\dots x_{n-1}dx_n + x_nd(x_1x_2\dots x_{n-1}) \\ &= x_1x_2\dots x_{n-1}dx_n + x_n \sum_{i=1}^{n-1} x_1x_2\dots \hat{x}_i \dots x_{n-1}dx_i \\ &= x_1x_2\dots x_{n-1}dx_n + \sum_{i=1}^{n-1} x_1x_2\dots \hat{x}_i \dots x_{n-1}x_ndx_i \\ &= \sum_{i=1}^n x_1x_2\dots \hat{x}_i \dots x_ndx_i \end{aligned}$$

olur. Yani ifade  $n$  için doğrudur. İfadenin ikinci kısmı için  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$  alınırsa istenen elde edilir.

(iii)  $P := \ker d := \{\rho \in R : d\rho = 0\}$  olmak üzere  $p_1, p_2 \in P$  alınsın.

$$d(p_1 - p_2) = d(p_1) - d(p_2) = 0$$

olduğundan  $p_1 - p_2 \in P$  dir. Ayrıca  $d$  çarpım kuralını sağladığından

$$d(p_1p_2) = p_1d(p_2) + p_2d(p_1) = 0$$

olur. Buradan  $p_1p_2 \in P$  elde edilir. O halde  $P$ ,  $R$ 'nin bir alt halkasıdır. Ayrıca her  $p \in P$  ve her  $r \in R$  için

$$d(pr) = pdr + rdp = pdr$$

olduğundan  $d$   $P$ -lineer dir. Son olarak  $d, R/R_0$ 'ın diferansiyel operatörü olduğundan keyfi bir  $r_0 \in R_0$  için

$$d(r_0 \cdot 1) = r_0 \cdot d(1) = 0$$

olur. Yani  $r_0 \in P$  dir.

(iv)  $I^n$  'deki keyfi bir eleman

$$\sum_{\text{sonlu}} x_1 x_2 \dots x_n \quad (x_i \in I, i = 1, \dots, n)$$

biçimindedir. (ii) 'den

$$d\left(\sum_{\text{sonlu}} x_1 x_2 \dots x_n\right) = \sum_{\text{sonlu}} x_1 x_2 \dots \hat{x}_i \dots x_n dx_i \in I^{n-1}M \quad (\hat{x}_i = 1)$$

elde edilir.

(v) Öncelikle  $d(s^{-1}) = -(s^{-1})^2 ds$  olduğunu gösterelim.  $s \in R$  tersinir olduğundan

$$d(1) = 0 = d(ss^{-1}) = sds^{-1} + s^{-1}ds$$

eşitliği vardır. Buradan

$$d(s^{-1}) = -(s^{-1})^2 ds$$

elde edilir ve çarpım kuralından

$$d(rs^{-1}) = rds^{-1} + s^{-1}dr = -r(s^{-1})^2 ds + s^{-1}dr = (s^{-1})^2 (sdr - rds)$$

olur.

(vi)  $f \in \mathbf{R}_0[X_1, X_2, \dots, X_n]$  alınsın .

$$f = \sum p_{t_1 t_2 \dots t_n} X_1^{t_1} X_2^{t_2} \dots X_n^{t_n} \quad (p_{t_1 t_2 \dots t_n} \in R_0)$$

biçimindedir.  $d, R_0$  - lineer olduğundan

$$d(f(x_1, x_2, \dots, x_n)) = \sum p_{t_1 t_2 \dots t_n} d(x_1^{t_1} x_2^{t_2} \dots x_n^{t_n})$$

ve (ii)'den

$$d(x_1^{t_1} x_2^{t_2} \dots x_n^{t_n}) = \sum t_i x_1^{t_1} x_2^{t_2} \dots x_i^{t_i-1} \dots x_n^{t_n} dx_i$$

olur. Ayrıca 2.1.2 göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
d(f(x_1, x_2, \dots, x_n)) &= \sum p_{t_1 t_2 \dots t_n} \left( \sum_{i=1}^n t_i x_1^{t_1} x_2^{t_2} \dots x_i^{t_i-1} \dots x_n^{t_n} dx_i \right) \\
&= \sum_{i=1}^n \left( \sum p_{t_1 t_2 \dots t_n} t_i x_1^{t_1} x_2^{t_2} \dots x_i^{t_i-1} \dots x_n^{t_n} dx_i \right) \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} (x_1, x_2, \dots, x_n) dx_i
\end{aligned}$$

elde edilir.

■

**Tanım 2.1.6**  $F$  bir cisim olmak üzere  $f(x) \in F[x]$  polinomunun  $F$  cismi üzerinde hiç katlı kökü yoksa  $f(x)$  polinomuna ayrılabilir denir. Ayrıca,  $K$  bir cisim olmak üzere  $K$ 'nin her elemanı  $F$  üzerinde ayrılabilir bir polinomun kökü ise  $K$ 'ya  $F$  üzerinde ayrılabilir cebirsel denir.

**Örnek 2.1.7**  $f(x) = x^2 - 2$  polinomu  $\mathbb{Q}$  üzerinde ayrılabilir bir polinomdur.

**Önerme 2.1.8**  $K/K_0$  cebirsel bir genişleme ve  $K', K/K_0$ 'in bütün ayrılabilir elemanlarından oluşan bir alt cismi olsun. Bu durumda  $M$  bir  $K$ -vektör uzayı olmak üzere 1. mertebeden her  $K_0$ -diferansiyel operatörü

$$d : K \rightarrow M$$

için  $K' \subset \ker d$  olur. Özel olarak  $K/K_0$  ayrılabilir bir genişleme ise 1. mertebeden her  $K_0$ -diferansiyel operatörü için  $d = 0$  elde edilir.

**İspat.**  $x \in K'$  alınsın ve  $f \in K_0[X]$ ,  $x$ 'in minimal polinomu olsun. Bu durumda  $f$  ayrılabilir olduğundan

$$f = (X - x).g, \quad g(x) \neq 0$$

olacak şekilde  $g \in K'[X]$  polinomu vardır. Çarpım kuralı uygulanırsa

$$f'(X) = 1.g(X) + (X - x)g'(X)$$

olur yani  $f'(x) \neq 0$  elde edilir. 2.1.5(vi)'den

$$0 = d(0) = d(f(x)) = f'(x)dx$$

olur ve  $f'(x) \neq 0$  olduğundan  $dx = 0$  dir. Buradan da  $x \in \ker d$  elde edilir. ■

**Tanım 2.1.9**  $K$  karakteristiği  $p$  olan bir cisim olsun. Eğer  $K = K^p$  sağlanıyorsa  $K$ 'ya mükemmel cisim denir.

**Önerme 2.1.10**  $p$  asal olmak üzere,  $R$  karakteristiği  $p$  olan bir halka olsun. Bu durumda 1.mertebeden her  $R_0$  diferansiyel operatör

$$d : R \rightarrow M$$

için  $R^p \subset \ker d$  sağlanır. Özel olarak,  $K$  karakteristiği  $p$  olan mükemmel bir cisim ise herhangi bir

$$d : K \longrightarrow M$$

için  $d = 0$  dır.

**İspat.** Keyfi  $r_i \in R$  ( $i = 1, \dots, n$ ) için,  $\sum_{i=1}^n r_i^p \in R^p$  alınsın. Bu durumda

$$d\left(\sum_{i=1}^n r_i^p\right) = p \sum_{i=1}^n r_i^{p-1} dr_i = 0$$

olur ve  $R^p \subset \ker d$  elde edilir. Önermenin ikinci kısmı için  $K$  mükemmel bir cisim olduğundan  $K^p = K$  dır. Buradan da  $d = 0$  bulunur. ■

$R/R_0$  bir cebir olsun.  $M$  bir  $R$ -modül olmak üzere  $R$ 'den  $M$ 'ye 1.mertebeden tüm  $R_0$ -diferansiyel opertörlerin kümesi  $Der_{R_0}^1(R, M)$  ile gösterilecektir.

**Önerme 2.1.11**  $Der_{R_0}^1(R, M)$ , bir  $R$ -modüldür.

**İspat.**  $d, d' \in Der_{R_0}^1(R, M)$ ,  $r_0 \in R_0$  ve  $a, b, r \in R$  olmak üzere

$$(d + d')(r_0 r) = d(r_0 r) + d'(r_0 r) = r_0(d + d')(r)$$

ve

$$(d + d')(ab) = d(ab) + d'(ab) = a(d + d')(b) + b(d + d')(a)$$

olduğundan  $d + d' \in Der_{R_0}^1(R, M)$  dir.

$(rd)(a) = rd(a)$  ile tanımlansın. Bu durumda

$$(rd)(r_0 a) = rd(r_0 a) = r r_0 d(a) = r_0(rd)(a)$$

ve

$$(rd)(ab) = rd(ab) = r(adb + bda) = a(rd)(b) + b(rd)(a)$$

elde edilir. O halde  $rd \in Der_{R_0}^1(R, M)$  dir. Yani  $Der_{R_0}^1(R, M)$  bir  $R$ -modül olur.

■

$R$  bir  $R_0$ -cebir olmak üzere  $M$  ve  $N$   $R$ -modülleri verilsin. Bu durumda her  $d \in Der_{R_0}^1(R, M)$  ve her  $l \in Hom_R(M, N)$  için  $l \circ d \in Der_{R_0}^1(R, N)$  olur. Böylece

$$Der_{R_0}^1(R, l) := Der_{R_0}^1(R, M) \rightarrow Der_{R_0}^1(R, N) \quad (d \rightarrow l \circ d)$$

$R$ -lineer dönüşümü elde edilir.

**Önerme 2.1.12** Eğer  $0 \rightarrow M \xrightarrow{\alpha} N \xrightarrow{\beta} P$   $R$ -modüllerin tam dizisi ise

$$0 \rightarrow Der_{R_0}^1(R, M) \xrightarrow{Der_{R_0}^1(R, \alpha)} Der_{R_0}^1(R, N) \xrightarrow{Der_{R_0}^1(R, \beta)} Der_{R_0}^1(R, P)$$

dizisi tamdır.

**İspat.**  $\alpha^* = Der_{R_0}^1(R, \alpha)$  ve  $\beta^* = Der_{R_0}^1(R, \beta)$  olsun.  $\alpha^*$ 'ın birebir olduğu açıktır.  $\alpha' \in im\alpha^*$  alınsın.  $\alpha' = \alpha \circ d$  olacak şekilde  $d \in Der_{R_0}^1(R, M)$  vardır.  $im\alpha = \ker\beta$  olduğundan her  $r \in R$  için,

$$\beta^*(\alpha')(r) = \beta \circ \alpha'(r) = (\beta \circ \alpha)(dr) = 0$$

Yani  $\alpha' \in \ker\beta^*$  elde edilir. Tersine  $d \in Der_{R_0}^1(R, N)$  olmak üzere  $\beta^*(d) = 0 = \beta \circ d$  olsun. Buradan

$$d(r) \subset \ker\beta = im\alpha$$

olur. O halde  $d \in im\alpha^*$  elde edilir. ■

$R/R_0$  ve  $S/R_0$  cebirleri göz önüne alınsın ve  $\Phi : S \rightarrow R$   $R_0$ -cebir homomorfizması olsun.  $M$   $R$ -modülü,  $\Phi$  homomorfizması yardımıyla bir  $S$ -modüldür. O halde 1.mertebeden her  $R_0$ -diferansiyel operatör  $d : R \rightarrow M$  için

$$d \circ \Phi : S \rightarrow M$$

1.mertebeden  $R_0$ -diferansiyel operatör olur.  $d \circ \Phi$ 'nin  $R_0$ -lineer olduğu açıktır.

$s, s' \in S$  olmak üzere

$$\begin{aligned} (d\Phi)(ss') &= d\Phi(ss') = d(\Phi(s)\Phi(s')) \\ &= \Phi(s)d\Phi(s') + \Phi(s')d\Phi(s) \\ &= sd\Phi(s') + s'd\Phi(s) \end{aligned}$$

olduğundan  $d \circ \Phi$  çarpım kuralını sağlar. Buradan

$$Der_{R_0}^1(\Phi, M) : Der_{R_0}^1(R, M) \rightarrow Der_{R_0}^1(S, M) \quad (d \rightarrow d \circ \Phi)$$

$S$  – lineer dönüşümü elde edilir.

**Önerme 2.1.13**  $0 \rightarrow Der_S^1(R, M) \xrightarrow{j} Der_{R_0}^1(R, M) \xrightarrow{Der_{R_0}^1(\Phi, M)} Der_{R_0}^1(S, M)$  dizisi tamdır. (Her  $d \in Der_S^1(R, M)$  aynı zamanda  $R$ 'den  $M$ 'ye 1.mertebeden  $R_0$ -diferansiyel operatördür ve  $j$  içerim dönüşümüdür.)

**İspat.**  $\Phi^* = Der_{R_0}^1(\Phi, M)$  olsun ve  $d \in Der_S^1(R, M)$  alınsın.

$$\Phi^*(d)(s) = (d \circ \Phi)(s) = d(\Phi(s)1) = d(s.1) = s.d1 = 0$$

olduğundan  $d \in \ker \Phi^*$  olur ve  $imj \subseteq \ker \Phi^*$  elde edilir. Tersine,  $d \in Der_{R_0}^1(R, M)$  için  $\Phi^*(d) = d \circ \Phi = 0$  olsun. Bu durumda

$$d(sr) = d(\Phi(s)r) = rd\Phi(s) + \Phi(s)dr = \Phi(s)dr = sdr$$

olduğundan  $d \in Der_S^1(R, M)$  dir. Buradan  $d \in imj$  olur. Yani  $\ker \Phi^* \subseteq imj$  elde edilir. ■

$R$  bir  $R_0$ -cebir ve  $I$ ,  $R$ 'nin bir ideali olsun.  $\Psi : R \rightarrow R / I$  doğal dönüşümü göz önüne alınsın ve  $M$  bir  $R / I$ -modül olsun.  $d \in Der_{R_0}^1(R, M)$  için

$$d|_I : I \rightarrow M$$

$d|_I(I^2) = 0$  sağlayan bir  $R$ -lineer dönüşümdür. Bu dönüşüm

$$I/I^2 \longrightarrow M$$

$R / I$  – lineer dönüşümünü indirger. Buradan

$$\delta : Der_{R_0}^1(R, M) \longrightarrow Hom_{R/I}(I/I^2, M) \quad (d \rightarrow d|_I)$$

$R$  – lineer dönüşümü elde edilir.

**Önerme 2.1.14**  $0 \rightarrow \text{Der}_{R_0}^1(R/I, M) \xrightarrow{\text{Der}_{R_0}^1(\Psi, M)} \text{Der}_{R_0}^1(R, M) \xrightarrow{\delta} \text{Hom}_{R/I}(I/I^2, M)$   
 $R$ -modüllerinin dizisi tamdır.

**İspat.**  $\Psi^* = \text{Der}_{R_0}^1(\Psi, M)$  ile gösterilsin. 2.1.13'ten

$$\text{Der}_R^1(R/I, M) \rightarrow \text{Der}_{R_0}^1(R/I, M) \xrightarrow{\Psi^*} \text{Der}_{R_0}^1(R, M)$$

tam dizisi vardır.  $d \in \text{Der}_R^1(R/I, M)$  alınsın.

$$d(r + I) = d(r(1 + I)) = rd(1 + I) = 0$$

olur. Buradan  $\Psi^*$  birebirdir.  $d \in \text{im}\Psi^*$  olmak üzere

$$\delta((d \circ \Psi)(r)) = \delta(d(\Psi(r))) = d|_I(\Psi(r)) = d|_I(r + I) = (r + I)d|_I(1) = 0$$

olduğundan  $d \in \ker \delta$  elde edilir. Yani  $\text{im}\Psi^* \subseteq \ker \delta$  olur. Tersine  $d \in \ker \delta$  alınsın.

$d \in \text{Der}_{R_0}^1(R, M)$  için

$$\delta(d) = d|_I = 0$$

sağlandığından

$$d \in \text{im}\Psi^* = \text{Der}_{R_0}^1(R/I, M)$$

olur. Böylece  $\ker \delta \subseteq \text{im}\Psi^*$  elde edilir. ■

**Önerme 2.1.15**  $d : R \rightarrow M$  1.mertebeden  $R_0$  - diferansiyel operatör ve  $N \subseteq R$  çarpımsal kapalı bir küme olmak üzere

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{d} & M \\ \downarrow & & \downarrow \\ R_N & \xrightarrow{d_N} & M_N \end{array}$$

diagramı değişmeli olacak şekildeki  $d_N : R_N \rightarrow M_N$  1.mertebeden  $R_0$  -diferansiyel operatörü tek olarak belirlidir. Burada  $d_N$ ,

$$d_N\left(\frac{r}{v}\right) = \frac{vdr - r dv}{v^2}$$

ile tanımlanır. Ayrıca

$$\text{Der}_{R_0}^1(R, M) \rightarrow \text{Der}_{R_0}^1(R_N, M_N) \quad (d \rightarrow d_N)$$

dönüşümü  $R$  – lineerdir. Bu dönüşüm yardımıyla

$$\beta : Der_{R_0}^1(R, M)_N \rightarrow Der_{R_0}^1(R_N, M_N)$$

$R_N$  – lineer dönüşümü indirgenir.

**İspat.**  $\frac{r_1}{v_1} = \frac{r_2}{v_2}$  olsun. O halde  $r_1v_2 = r_2v_1$  olur.  $d$  iyi tanımlı olduğundan

$$r_1dv_2 + v_2dr_1 = r_2dv_1 + v_1dr_2$$

ve

$$v_2dr_1 - r_2dv_1 = v_1dr_2 - r_1dv_2$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{v_2dr_1 - r_2dv_1}{v_1v_2} = \frac{v_1dr_2 - r_1dv_2}{v_1v_2}$$

Yani

$$v_1^{-2}(v_1dr_1 - r_1dv_1) = v_2^{-2}(v_2dr_2 - r_2dv_2)$$

sağlanır. O halde  $d_N$  iyi tanımlıdır.

$$d_N\left(r_0\frac{r}{v}\right) = d_N\left(\frac{r_0r}{v}\right) = \frac{vd(r_0r) - r_0rdv}{v^2} = r_0\left(\frac{vdr - r dv}{v^2}\right) = r_0d_N\left(\frac{r}{v}\right)$$

olduğundan  $d_N$   $R_0$  – lineerdir.

$$\begin{aligned} d_N\left(\frac{r_1}{v_1}, \frac{r_2}{v_2}\right) &= d_N\left(\frac{r_1r_2}{v_1v_2}\right) = \frac{v_1v_2d(r_1r_2) - r_1r_2d(v_1v_2)}{(v_1v_2)^2} \\ &= \frac{v_1v_2r_1dr_2 + v_1v_2r_2dr_1 - r_1r_2v_1dv_2 - r_1r_2v_2dv_1}{(v_1v_2)^2} \\ &= \frac{r_1v_1(v_2dr_2 - r_2dv_2)}{(v_1v_2)^2} + \frac{r_2v_2(v_1dr_1 - r_1dv_1)}{(v_1v_2)^2} \\ &= \frac{r_1}{v_1}d_N\left(\frac{r_2}{v_2}\right) + \frac{r_2}{v_2}d_N\left(\frac{r_1}{v_1}\right) \end{aligned}$$

olur. Yani  $d_N$  çarpım kuralını sağlar. O halde  $d_N$  1. mertebeden  $R_0$  – lineer operatör

olur. Şimdi  $d_N$ 'nin tek olduğunu gösterelim.

$$d_{N'} : R_N \rightarrow M_N$$

bölüm kuralını sağlayan diğer bir dönüşüm olsun. Her  $r \in R$  ve her  $v \in N$  için

$$d_{N'}\left(\frac{r}{v}\right) = v^{-2}(vdr - r dv) = d_N\left(\frac{r}{v}\right)$$

olduğundan  $d_{N'} = d_N$  elde edilir. ■

**Örnek 2.1.16**  $R = R_0[X_1, X_2, \dots, X_n]$ ,  $R$  üzerinde değişkenleri  $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  olan bir polinomlar cebiri olmak üzere

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial X_1}, \frac{\partial}{\partial X_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial X_n} \right\}$$

kümesi,  $Der_{R_0}^1 R$  yi  $R$ -modül olarak üretir. Diğer taraftan,  $f_i \in R$  olmak üzere

$$\sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial}{\partial X_i} = 0$$

olsun. Buradan

$$\sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial X_k}{\partial X_i} = 0 \quad (k = 1, \dots, n)$$

olur ve  $f_k = 0$  ( $k = 1, \dots, n$ ) elde edilir. O halde bu küme  $Der_{R_0}^1 R$  için bir tabandır.

Böylece

$$Der_{R_0}^1 R = \bigoplus_{i=1}^n R \frac{\partial}{\partial X_i}$$

elde edilir.

## 2.2 1. Mertebeden Diferansiyel Operatör Modülleri

Bu bölümde 1. mertebeden diferansiyel operatör modülünün,  $\Omega_{R/R_0}^1$  tanımı verilecek, bunlarla ilgili teoremler ispatlanacak ve her  $R/R_0$  cebiri için 1.mertebeden evrensel diferansiyel operatörün varlığı gösterilecektir.

$R/R_0$  değişmeli bir cebir ve  $M$  bir  $R$ -modül olmak üzere  $R \times M$  cebiri üzerindeki çarpma işlemi

$$(r_1, m_1)(r_2, m_2) = (r_1 r_2, r_1 m_2 + r_2 m_1) \quad (r_i \in R, m_i \in M)$$

olarak tanımlansın. Ayrıca

$$i : R \rightarrow R \times M \quad (r \rightarrow (r, 0))$$

birebir  $R_0$ -homomorfizma ve

$$p : R \times M \rightarrow R \quad ((r, m) \rightarrow r)$$

örten  $R_0$ -homomorfizma olmak üzere  $p \circ i = id_R$  sağlanır.

**Önerme 2.2.1** (a) 1.mertebeden herhangi bir  $R_0$ -diferansiyel operatör

$$d : R \rightarrow M$$

için

$$\tilde{d} : R \rightarrow R \times M \quad (r \rightarrow \tilde{d}(r) = (r, dr))$$

dönüşümü  $R_0$  - cebir homomorfizmasıdır ve  $p \circ \tilde{d} = id_R$  sağlanır.

(b)  $p \circ h = id_R$  koşulunu sağlayan herhangi bir

$$h : R \rightarrow R \times M$$

$R_0$  - cebir homomorfizması için  $h = \tilde{d}$  olacak şekilde tek bir

$$d : R \rightarrow M$$

1. mertebeden  $R_0$ -diferansiyel operatörü vardır.

## İspat.

(a)  $p \circ \tilde{d} = id_R$  olduğu açıktır.  $d, R_0 - lineer$  olduğundan  $\tilde{d}, R_0 - lineer$  olur.

Ayrıca her  $r, s \in R$  için

$$\tilde{d}(ab) = (ab, d(ab)) = (ab, adb + bda) = (a, da)(b, db) = \tilde{d}a.\tilde{d}b$$

sağlanır. Buradan  $\tilde{d} R_0 - cebir$  homomorfizmasıdır.

(b)  $h : R \rightarrow R \times M$ ,  $p \circ h = id_R$  olacak şekilde  $R_0 - cebir$  homomorfizması verilsin. Herhangi bir  $a \in R$  için

$$h(a) = (a, a') \quad (a' \in M)$$

ile gösterilsin ve

$$d : R \rightarrow M, \quad d(a) = a'$$

ile tanımlansın.  $h, R_0 - cebir$  homomorfizması olduğundan

$$h(r_0a) = r_0(a, a')$$

ve

$$d(r_0a) = r_0a' = r_0da$$

sağlanır. Buradan  $d, R_0 - lineerdir$ . Diğer taraftan

$$h(ab) = h(a).h(b) = (a, a')(b, b') = (ab, a'b + ab')$$

oldüğundan

$$d(ab) = a'b + ab' = adb + bda$$

dır. O halde  $d, 1.mertebeden R_0$ -diferansiyel operatör olur ve her  $r \in R$  için

$$h(r) = (r, r') = (r, dr) = \tilde{d}(r)$$

oldüğundan  $h = \tilde{d}$  elde edilir.

■

**Tanım 2.2.2**  $M, N$   $R$ -modüller olmak üzere

$$d : R \rightarrow M$$

1. mertebeden  $R_0$ -diferansiyel operatörü verilsin. Eğer  $R$ ' den  $N$ 'ye tanımlı her  $R_0$ -diferansiyel operatör

$$\delta : R \rightarrow N$$

için  $\delta = \ell \circ d$  koşulunu sağlayan tek bir

$$\ell : M \rightarrow N$$

$R$ -lineer dönüşümü varsa  $d$ 'ye evrensel diferansiyel operatör denir.

$d_1 : R \rightarrow M_1, d_2 : R \rightarrow M_2$  dönüşümleri  $R/R_0$ 'ın evrensel diferansiyel operatörleri olsunlar. Bu durumda  $d_2 = \ell \circ d_1$  olacak şekilde tek bir

$$\ell : M_1 \rightarrow M_2$$

$R$ -lineer dönüşümü vardır. Benzer şekilde  $d_1 = \ell' \circ d_2$  olacak şekilde tek bir

$$\ell' : M_2 \rightarrow M_1$$

$R$ -lineer dönüşümü vardır. Buradan

$$\ell' \circ \ell = 1_{M_1} \text{ ve } \ell \circ \ell' = 1_{M_2}$$

elde edilir. Yani herhangi bir  $R/R_0$  cebiri için evrensel diferansiyel operatör izomorfizma farkıyla tektir.

**Teorem 2.2.3**

$$d : R \rightarrow I/I^2 \quad (r \rightarrow 1 \otimes r - r \otimes 1 + I^2)$$

ile tanımlanan 1.mertebeden diferansiyel operatör evrenseldir.

**İspat.**

$$d : R \rightarrow I/I^2 \quad (r \rightarrow 1 \otimes r - r \otimes 1 + I^2)$$

ve  $\delta : R \rightarrow N$  herhangi bir diferansiyel operatör olsun. 2.2.1'den

$$\tilde{\delta} : R \rightarrow R \times N, \tilde{\delta}(a) = (a, \delta(a))$$

$R_0$ - homomorfizması göz önüne alınarak

$$h : R \otimes_{R_0} R \rightarrow R \times N$$

dönüşümü her  $a, b \in R$  için

$$h(a \otimes b) = \tilde{\delta}(a)i(-b) = (a, \delta a)(-b, 0) = (-ab, -b\delta a)$$

ile tanımlansın. Bu durumda  $r \in R$  olmak üzere  $x = 1 \otimes r - r \otimes 1 \in I$  için

$$h(x) = (-r, 0) - (-r, -\delta r) = (0, \delta r) \text{ ve } h(I^2) = 0$$

elde edilir. Buradan  $h$ ,

$$\ell : I/I^2 \rightarrow N$$

$$\ell(1 \otimes r - r \otimes 1 + I^2) = \ell(dr) = \delta r$$

ile tanımlı  $R$ -lineer dönüşümünü indirger. Diğer taraftan  $I/I^2$ ,  $R$ -modül olarak  $\{dr\}_{r \in R}$  ile üretildiği için  $\delta = \ell \circ d$  olur ve bu  $\ell$  tektir. Buradan  $d$ 'nin evrenselliği elde edilir. ■

**Tanım 2.2.4**  $d : R \rightarrow M$  dönüşümü  $R/R_0$ 'in evrensel diferansiyel operatörü olsun. O zaman  $M$   $R$ -modülüne  $R/R_0$ 'in (kähler) diferansiyel operatör modülü denir ve  $\Omega_{R/R_0}^1$  ile gösterilir.  $R/R_0$ 'in evrensel diferansiyel operatörü ise  $d_{R/R_0}^1$  ile gösterilir.

**Örnek 2.2.5**  $\delta : R \rightarrow N$  bir diferansiyel operatör ve  $R\delta R$ ,  $N$ 'nin  $\{\delta r\}_{r \in R}$  tarafından üretilen bir alt modülü olsun. Bu durumda  $R\delta R$ ,  $\sum_{i=1}^n r_i \delta r_{i'}$  toplamlarından oluşur. ( $r_i, r_{i'} \in R, n \in \mathbb{N}$ ). Böylece,

$$d : R \rightarrow \Omega_{R/R_0}^1$$

evrensel diferansiyel operatör olmak üzere  $I, \{1 \otimes r - r \otimes 1\}_{r \in R}$  tarafından üretildiğinden  $\Omega_{R/R_0}^1 = RdR$  elde edilir.

**Örnek 2.2.6**  $R', R_0$  'ın  $R$  içindeki görüntüsü olsun. Bu durumda

$$\Omega_{R/R_0}^1 = \Omega_{R/R'_0}^1$$

sağlanır :

$r \in R$  olmak üzere  $dr \in \Omega_{R/R_0}^1$  alınır.

$$T : R_0 \rightarrow R'_0 \subset R$$

yapısal homomorfizması örtendir.  $a \in R_0, a' \in R'_0$  ve  $r \in R$  için

$$d(a'r) = a'dr + rda' = a'dr + rdT(a)$$

olur. Diğer taraftan,

$$d \circ T : R_0 \rightarrow M$$

dönüşümü 1.mertebeden  $R_0$ -diferansiyel operatördür. Buradan

$$d(a'r) = a'dr$$

elde edilir. Yani  $dr \in \Omega_{R/R'_0}^1$  olur. Tersine  $dr \in \Omega_{R/R'_0}^1$  alınır.

$$d(a.r) = d(T(a)r) = T(a)dr = a.dr$$

olur. Böylece  $dr \in \Omega_{R/R_0}^1$  elde edilir.

Ayrıca  $N, R_0$ 'ın çarpımsal kapalı bir alt kümesi olmak üzere  $R_0 \rightarrow R$  yapısal homomorfizması yardımıyla

$$(R_0)_N \rightarrow R$$

halka homomorfizması indirgenir. Buradan her  $\frac{r_0}{n} \in (R_0)_N$  elemanı için bölüm kuralı yardımıyla  $d(\frac{r_0}{n}) = 0$  olduğundan

$$\Omega_{R/R_0}^1 = \Omega_{R/(R_0)_N}^1$$

elde edilir.

**Örnek 2.2.7**  $K/K_0$  cebirsel genişlemesi ayrılabilir olsun. 2.1.8'den  $K/K_0$ 'ın 1.mertebeden her diferansiyel operatörü  $d$  için  $d = 0$  dır. Buradan  $\Omega_{K/K_0}^1 = 0$  elde edilir.

**Örnek 2.2.8**  $K$  karakteristiği  $p$  olan mükemmel cisim olsun. 2.1.10'dan  $\Omega_{K/\mathbb{Z}}^1 = 0$  olur.

**Örnek 2.2.9**  $R_0$  bir halka ve  $R := R_0 [\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}]$ ,  $R_0$  üzerinde değişkenleri  $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  olan polinomlar cebiri olsun. Tabanı  $\{dX_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  ailesi olan

$$M := \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} R dX_\lambda$$

serbest  $R$ -modülü oluşturulsun ve her  $F \in R$  için  $d$ ,

$$dF := \sum_{\lambda \in \Lambda} \frac{\partial F}{\partial X_\lambda} dX_\lambda \quad (1)$$

ile tanımlansın.  $d$ 'nin 1. mertebeden  $R_0$ -diferansiyel operatör olduğu açıktır. Şimdi bu diferansiyel operatörün evrensel olduğu gösterilecektir.  $N$  bir  $R$ -modül olmak üzere  $\delta$ ,  $R$ 'den  $N$ 'ye,

$$\delta F = \sum_{\lambda \in \Lambda} \frac{\partial F}{\partial X_\lambda} \delta X_\lambda$$

ile tanımlı 1. mertebeden herhangi bir  $R_0$ -diferansiyel operatör olsun.  $M$ 'den  $N$ 'ye  $\ell(dX_\lambda) = \delta X_\lambda$  ile tanımlanan dönüşüm  $\ell \circ d = \delta$  eşitliğini sağlar ve  $\{dX_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  ailesi  $M$ 'nin bir tabanı olduğundan bu  $\ell$  dönüşümü tektir. O halde (1) ile tanımlı dönüşüm 1.mertebeden evrensel diferansiyel operatör olur. Buradan

$$\Omega_{R_0[\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}]}^1 / R_0 = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} R_0 [\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}] dX_\lambda$$

elde edilir.

**Önerme 2.2.10**  $M$  bir  $R$ -modül olmak üzere

$$\Psi : \text{Hom}_R(\Omega_{R/R_0}^1, M) \rightarrow \text{Der}_{R_0}^1(R, M) \quad , \Psi(\ell) = \ell \circ d_{R/R_0}^1$$

ile tanımlı  $R$ -lineer dönüşüm bir izomorfizmadır. Özel olarak ,

$$\text{Der}_{R_0}^1 R \simeq \text{Hom}_R(\Omega_{R/R_0}^1, R)$$

sağlanır.

**İspat.**  $\Psi$ 'nin iyi tanımlı olduğu açıktır.  $\ell_1, \ell_2 \in \text{Hom}_R(\Omega_{R/R_0}^1, M)$  olmak üzere,

$$\Psi(\ell_1 + \ell_2) = (\ell_1 + \ell_2) \circ d_{R/R_0}^1 = \ell_1 \circ d_{R/R_0}^1 + \ell_2 \circ d_{R/R_0}^1 = \Psi(\ell_1) + \Psi(\ell_2)$$

ve

$$\Psi(r\ell_1) = (r\ell_1) \circ d_{R/R_0}^1 = r(\ell_1 d_{R/R_0}^1) = r\Psi(\ell_1)$$

olduğundan  $\Psi$ ,  $R$ -lineerdir. Keyfi bir  $d \in \text{Der}_{R_0}^1(R, M)$  alınsın.  $d_{R/R_0}^1$  diferansiyel operatörünün evrensellik özelliğinden

$$\Psi(\delta) = d$$

olacak şekilde

$$\delta : \Omega_{R/R_0}^1 \rightarrow M$$

$R$ -homomorfizması vardır. Buradan  $\Psi$  örtendir.

$$\Psi(\ell_1) = \Psi(\ell_2)$$

olsun.  $d_{R/R_0}^1$ 'in evrensellik özelliğinden  $\ell_1 = \ell_2$  elde edilir. Böylece  $\Psi$  bir izomorfizma olur. ■

1.mertebeden diferansiyel operatör modülünün duali  $\text{Hom}_R(\text{Der}_{R_0}^1 R, R) = (\text{Der}_{R_0}^1 R)^*$  yani  $\Omega_{R/R_0}^1$ 'in biduali,  $(\Omega_{R/R_0}^1)^{**}$ 'a *Zariski diferansiyel operatör* modülü denir. Bu durumda aşağıdakiler denktir :

- (a)  $\Omega_{R/R_0}^1$  bir yansımali  $R$ -modüldür.
- (b) Zariski ve *Kähler* diferansiyel operatör modülleri izomorftur.

**Önerme 2.2.11**  $d : R \rightarrow M$ , 1.mertebeden  $R_0$ -diferansiyel operatör ve  $N \subset R$  çarpımsal kapalı bir küme olsun.

$$d : R \rightarrow M$$

diferansiyel operatörü evrensel ise

$$d_N : R_N \rightarrow M_N$$

diferansiyel operatörü evrenseldir. Buradan,

$$\Omega_{R_N/R_0}^1 \simeq (\Omega_{R/R_0}^1)_N$$

elde edilir. Her  $M$   $R$ -modülü için eğer  $\Omega_{R/R_0}^1$  sonlu üretilmiş ise

$$\text{Der}_{R_0}^1(R, M)_N \rightarrow \text{Der}_{R_0}^1(R_N, M_N)$$

dönüşümü birebirdir. Eğer  $\Omega_{R/R_0}^1$  sonlu sunulmuş ise bu dönüşüm bir izomorfizmadır.

**İspat.**  $L, R_N$ -modül olmak üzere

$$\delta : R_N \rightarrow L$$

1. mertebeden herhangi bir  $R_0$ -diferansiyel operatör olsun.  $d$ 'nin evrensellik özelliğinden

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{d} & M \\ \Phi \downarrow & & \downarrow \\ R_N & \xrightarrow{\delta} & L \end{array}$$

diagramı değişmeli olacak şekilde tek bir  $h : M \rightarrow L$   $R$ -lineer dönüşümü vardır.

Buradan

$$H : M_N \rightarrow L$$

$R_N$  - lineer dönüşümü indirgenir.

$$M_N = (RdR)_N = R_N d_N R_N$$

olduğundan bu  $H$  dönüşümü tektir. Teoremin ikinci kısmı için 1.2.2 kullanılırsa

$$\begin{aligned} \text{Der}_{R_0}^1(R_N, M_N) &\simeq \text{Hom}_{R_N}(\Omega_{R_N/R_0}^1, M_N) \\ &\simeq \text{Hom}_{R_N}((\Omega_{R/R_0}^1)_N, M_N) \\ &\simeq \text{Hom}_R(\Omega_{R/R_0}^1, M)_N \\ &\simeq \text{Der}_{R_0}^1(R, M)_N \end{aligned}$$

elde edilir. ■

**Örnek 2.2.12**  $K$  bir cisim ve  $L = K(\{X_\lambda\})$ ,  $K$ 'nin transendental genişlemesi olsun.  $L, K[\{X_\lambda\}]$ 'nin kesirler cismi olduğundan 2.2.11'den ve 2.2.9'dan

$$\Omega_{L/K}^1 = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} LdX_\lambda$$

elde edilir.

**Tanım 2.2.13** Eğer  $\{dx_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  elemanları  $\Omega_{R/R_0}^1$  için bir taban oluyor ise  $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ 'ya  $R/R_0$ 'ın diferansiyel tabanı denir.

$R/R_0$  ve  $R'/R_0'$  cebirleri için  $\rho : R_0 \rightarrow R$  ve  $\rho' : R_0' \rightarrow R'$  yapısal homomorfizmaları göz önüne alınsın. Ayrıca aşağıdaki diagram değişmeli olacak şekilde halka homomorfizmaları verilsin.

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{h} & R' \\ \rho \uparrow & & \uparrow \rho' \\ R_0 & \xrightarrow{\eta} & R_0' \end{array} \quad (2)$$

**Önerme 2.2.14**

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{h} & R' \\ d_{R/R_0}^1 \downarrow & & \downarrow d_{R'/R'_0}^1 \\ \Omega_{R/R_0}^1 & \xrightarrow{\ell} & \Omega_{R'/R'_0}^1 \end{array}$$

diagramı değişmeli olacak şekilde tek bir

$$\ell : \Omega_{R/R_0}^1 \longrightarrow \Omega_{R'/R'_0}^1$$

$R$  – lineer dönüşümü vardır. Bu  $\ell$  dönüşümü yardımıyla

$$R' \otimes_R \Omega_{R/R_0}^1 \longrightarrow \Omega_{R'/R'_0}^1$$

$R'$  – lineer dönüşümü indirgenir.

**İspat.**  $d_{R'/R'_0}^1 \circ h$  dönüşümü  $R$ 'nin bir  $R_0$ –diferansiyel operatörüdür ve  $d_{R/R_0}^1$ 'in evrensellik özelliğinden

$$\ell \circ d_{R/R_0}^1 = d_{R'/R'_0}^1 \circ h$$

sađlanacak şekilde tek bir

$$\ell : \Omega_{R/R_0}^1 \longrightarrow \Omega_{R'/R'_0}^1$$

$R$  – lineer dönüşümü vardır. Bu  $\ell$  dönüşümü yardımıyla

$$\varphi : R' \otimes_R \Omega_{R/R_0}^1 \longrightarrow \Omega_{R'/R'_0}^1, \quad \varphi(r' \otimes d_{R/R_0}^1 r) = r' \ell(d_{R/R_0}^1 r)$$

ie tanımlanan dönüşüm indirgensin. Burada tanımlanan  $\varphi$  dönüşümü her  $r'_1 \in R'$  ve her  $r' \otimes d_{R/R_0}^1 r \in R' \otimes_R \Omega_{R/R_0}^1$  için

$$\varphi(r'_1(r' \otimes d_{R/R_0}^1 r)) = \varphi(r'_1 r' \otimes d_{R/R_0}^1 r) = r'_1 r' \ell(d_{R/R_0}^1 r) = r'_1 \varphi(r' \otimes d_{R/R_0}^1 r)$$

sağladığından  $R'$  – lineerdir. ■

**Tanım 2.2.15**  $A, B$  ve  $C$   $R_0$ –cebir olmak üzere

$$f : B \longrightarrow A$$

dönüşümü ve

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{f} & A \\ h \uparrow & & \downarrow id \\ C & \xrightarrow{g} & A \end{array}$$

değişmeli diagramı verilsin. Bu durumda  $h$  dönüşümüne  $g$ 'nin  $B$ 'ye yükseltildiği denir.

**Tanım 2.2.16**  $R, R_0$  – cebiri verilsin.  $S$  herhangi bir  $R_0$  – cebir ve  $N, S$  ’nin  $N^2 = 0$  koşulunu sağlayan ideali olmak üzere her

$$u : R \longrightarrow S/N$$

$R_0$  – cebir homomorfizması için

$$v : R \longrightarrow S$$

$u$  ’nun  $S$  ’ye yükseltilmiş,  $R_0$  – cebir homomorfizması olarak, var olsun. Bu durumda  $R$  ’ye  $R_0$  üzerinde 0 – düzgün denir.

**Tanım 2.2.17** Eğer  $R$  ’den  $S$  ’ye en fazla bir tane  $v$  dönüşümü var ise  $R$  ’ye  $R_0$  üzerinde 0 – dallanmamış (0 – unramified) denir.

**Tanım 2.2.18**  $R$  hem 0 – düzgün hem de 0 – dallanmamış ise bir başka deyişle

$$v : R \longrightarrow S$$

dönüşümü tek ise  $R$  ’ye 0 – etale denir.

**Teorem 2.2.19** (1. Temel Tam Dizi )

$$R_0 \xrightarrow{f} R \xrightarrow{g} S$$

halka homomorfizmaları verilsin. Bu durumda  $S$ -modüllerinin

$$\Omega_{R/R_0}^1 \otimes_R S \xrightarrow{\alpha} \Omega_{S/R_0}^1 \xrightarrow{\beta} \Omega_{S/R}^1 \longrightarrow 0$$

dizisi tamdır. Burada  $\alpha$  ve  $\beta$  dönüşümleri

$$\alpha(d_{R/R_0}^1 a \otimes b) = b d_{S/R_0}^1 g(a) \text{ ve } \beta(d_{S/R_0}^1 b) = d_{S/R}^1 b \quad (a \in R, b \in S)$$

ile tanımlıdır. Eğer  $S, R$  üzerinde  $0$  - düzgün ise

$$0 \longrightarrow \Omega_{R/R_0}^1 \otimes_R S \xrightarrow{\alpha} \Omega_{S/R_0}^1 \xrightarrow{\beta} \Omega_{S/R}^1 \longrightarrow 0$$

dizisi split tamdır.

**İspat.**  $Hom_S(S \otimes_R \Omega_{R/R_0}^1, M) \cong Hom_R(\Omega_{R/R_0}^1, Hom_S(S, M)) \cong Hom_R(\Omega_{R/R_0}^1, M)$  olduğundan

$$0 \longrightarrow Hom_S(\Omega_{S/R}^1, M) \longrightarrow Hom_S(\Omega_{S/R_0}^1, M) \longrightarrow Hom_S(S \otimes_R \Omega_{R/R_0}^1, M) \quad (3)$$

$$\parallel \wr \qquad \qquad \qquad \parallel \wr \qquad \qquad \qquad \parallel \wr$$

$$0 \longrightarrow Der_R^1(S, M) \longrightarrow Der_{R_0}^1(S, M) \longrightarrow Der_{R_0}^1(R, M) \quad (4)$$

elde edilir. (4) önerme 2.1.13'ten tamdır ve dolayısıyla 1.2.5'ten teoremin ilk kısmı

elde edilir.  $S, R$  üzerinde  $0$  - düzgün olsun. Eğer  $\alpha' \alpha = 1$  olacak şekilde

$$\alpha' : \Omega_{S/R_0}^1 \longrightarrow \Omega_{R/R_0}^1 \otimes_R S$$

dönüşümü tanımlanırsa istenen elde edilir.  $D \in Der_{R_0}^1(R, M)$  ve

$$\varphi : R \longrightarrow S \times M, \varphi(r) = (g(r), Dr)$$

olmak üzere

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{id} & S \\ g \uparrow & & \uparrow \\ R & \xrightarrow{\varphi} & S \times M \end{array}$$

değişmeli diagramı göz önüne alınsın. Varsayımdan  $S, R$  üzerinde  $0$ -düzgün olduğundan

$$h : S \longrightarrow S \times M \quad h(s) = (s, D' s) \quad (s \in S)$$

dönüşümü vardır.  $hg = \varphi$  olduğundan her  $r \in R$  için

$$(g(r), D' g(r)) = (g(r), D(r))$$

olur. Yani  $D = D' \circ g$  elde edilir. Ayrıca

$$h(s_1 s_2) = (s_1 s_2, D' s_1 s_2) = h(s_1)h(s_2) = (s_1, D' s_1)(s_2, D' s_2) = (s_1 s_2, s_1 D' s_2 + s_2 D' s_1)$$

olduğundan

$$D' s_1 s_2 = s_1 D' s_2 + s_2 D' s_1$$

elde edilir. O halde

$$D' : S \longrightarrow M$$

1. mertebeden bir  $R_0$ -diferansiyel operatör olur.  $D'$  diferansiyel operatörü yardımıyla

$$\alpha' : \Omega_{S/R_0}^1 \longrightarrow M$$

dönüşümü tanımlansın.  $M = \Omega_{R/R_0}^1 \otimes_R S$  ve  $Dr = d_{R/R_0}^1 r \otimes 1$  olarak alınırsa,

$$(\alpha' \alpha)(d_{R/R_0}^1 r \otimes 1) = \alpha'(1 \cdot d_{S/R_0}^1 g(r)) = D' g(r) = Dr = d_{R/R_0}^1 r \otimes 1$$

sağlanır. Yani  $\alpha' \alpha = 1_M$  olur. ■

**Teorem 2.2.20** (2. Temel Tam Dizi)

$$I/I^2 \xrightarrow{\delta} \Omega_{R/R_0}^1 \otimes_R R/I \xrightarrow{\alpha} \Omega_{R/I/R_0}^1 \longrightarrow 0 \quad (5)$$

dizisi tamdır. Burada  $\delta, \delta(x \bmod I^2) = d_{R/R_0}^1 x \otimes 1$  ile tanımlı  $R/I$ -lineer dönüşümdür.

Ayrıca eğer  $R/I, R_0$  üzerinde  $0$ -düzgün ise

$$0 \longrightarrow I/I^2 \xrightarrow{\delta} \Omega_{R/R_0}^1 \otimes_R R/I \xrightarrow{\alpha} \Omega_{R/I/R_0}^1 \longrightarrow 0 \quad (6)$$

dizisi split tam dizidir.

**İspat.**  $M$  herhangi bir  $R/I$ -modül olmak üzere

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_{R/I}(\Omega_{R/I/R_0}^1, M) & \longrightarrow & \text{Hom}_{R/I}(\Omega_{R/R_0}^1 \otimes_R R/I, M) & \longrightarrow & \text{Hom}_{R/I}(I/I^2, M) \\ & & \parallel \wr & & \parallel \wr & & \parallel \wr \\ 0 & \longrightarrow & \text{Der}_{R_0}^1(R/I, M) & \longrightarrow & \text{Der}_{R_0}^1(R, M) & \longrightarrow & \text{Hom}_{R/I}(I/I^2, M) \end{array}$$

elde edilir. Burada

$$\text{Hom}_{R/I}(\Omega_{R/R_0}^1 \otimes_R R/I, M) \cong \text{Hom}_R(\Omega_{R/R_0}^1, M) \cong \text{Der}_{R_0}^1(R, M)$$

olduğu kullanıldı. 2.1.14'ten alt satırdaki dizi tamdır ve böylece (5) dizisinin tamlığı elde edilir.  $R/I, R_0$  üzerinde  $0$ -düzgün olsun.  $M$  herhangi bir  $R/I$ -modül olmak üzere

$$0 \longrightarrow \text{Der}_{R_0}^1(R/I, M) \xrightarrow{\alpha^*} \text{Der}_{R_0}^1(R, M) \xrightarrow{\delta^*} \text{Hom}_{R/I}(I/I^2, M)$$

tam dizisi göz önüne alınsın. Burada  $\alpha^* = \text{Hom}_{R/I}(\alpha, M)$  ve  $\delta^* = \text{Hom}_{R/I}(\delta, M)$  dir. Öncelikle  $\delta^*$  dönüşümünün örten olduğu gösterilecektir.  $R/I, R_0$  üzerinde  $0$ -düzgün olduğundan

$$0 \longrightarrow I/I^2 \longrightarrow R/I^2 \xrightarrow{g} R/I \longrightarrow 0$$

dizisi split tam dizidir. Yani

$$s : R/I \longrightarrow R/I^2$$

$R_0$ -cebir homomorfizması vardır ve  $gs = 1_{R/I}$  sağlanır. Buradan

$$sg : R/I^2 \longrightarrow R/I^2$$

homomorfizması için  $(sg)(I/I^2) = 0$  ve  $g(1-sg) = 0$  elde edilir. O zaman  $D = 1-sg$  olmak üzere

$$D : R/I^2 \longrightarrow I/I^2$$

dönüşümü 1. mertebeden bir diferansiyel operatördür ve  $1-sg \subset \ker g = I/I^2$  olur.

$\Psi \in \text{Hom}_{R/I}(I/I^2, M)$  alınsın.

$$R \longrightarrow R/I^2 \xrightarrow{D} I/I^2 \xrightarrow{\Psi} M$$

olmak üzere  $\Psi \circ D = D' \in \text{Der}_{R_0}^1(R, M)$  olur ve  $\delta^*(D') = \Psi$  dir.  $x \in I$  için

$$D'(x) = (\Psi \circ D)(\bar{x}) = \Psi(\bar{x} - sg(\bar{x})) = \Psi(\bar{x}) - \Psi(sg(\bar{x})) = \Psi(\bar{x})$$

sağlanır. Yani  $\delta^*$  örtendir. O halde

$$0 \longrightarrow \text{Der}_{R_0}^1(R/I, M) \xrightarrow{\alpha^*} \text{Der}_{R_0}^1(R, M) \xrightarrow{\delta^*} \text{Hom}_{R/I}(I/I^2, M) \longrightarrow 0$$

tam dizisi vardır.  $M = I/I^2$  alınsın. Bu durumda

$$\begin{aligned} \text{Der}_{R_0}^1(R, I/I^2) &\cong \text{Hom}_R(\Omega_{R/R_0}^1, I/I^2) \\ &\cong \text{Hom}_R(\Omega_{R/R_0}^1, \text{Hom}_{R/I}(R/I, I/I^2)) \\ &\cong \text{Hom}_{R/I}(\Omega_{R/R_0}^1 \otimes_R R/I, I/I^2) \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\text{Der}_{R_0}^1(R/I, I/I^2) \cong \text{Hom}_{R/I}(\Omega_{R/I/R_0}^1, I/I^2)$$

olur. Buradan da

$$0 \longrightarrow I/I^2 \longrightarrow \Omega_{R/R_0}^1 \otimes_R R/I \longrightarrow \Omega_{R/I/R_0}^1 \longrightarrow 0$$

dizisi split tamdır. ■

**Sonuç 2.2.21**  $R/I$ ,  $R_0$ - üzerinde  $0$  - düzgün olmak üzere  $R/I$ -modüllerinin

$$0 \longrightarrow I/I^2 \xrightarrow{\delta} \Omega_{R/R_0}^1/I \xrightarrow{\alpha} \Omega_{R/I/R_0}^1 \longrightarrow 0$$

dizisi split tam dizidir.

**İspat.** Burada  $\delta$  dönüşümünün görüntüsü

$$\text{Rd}_{R/R_0}^1 I + I \Omega_{R/R_0}^1/I \subset \Omega_{R/R_0}^1/I \Omega_{R/R_0}^1$$

$R/I$  -alt modülüdür. Her  $a \in I$  ve  $r \in R$  için

$$a d_{R/R_0}^1 r = d_{R/R_0}^1(ar) - r d_{R/R_0}^1 a \in \text{Rd}_{R/R_0}^1 I$$

sağlandığından  $I \Omega_{R/R_0}^1 \subset \text{Rd}_{R/R_0}^1 I$  olur. O halde

$$\Omega_{R/I/R_0}^1 \cong \frac{\Omega_{R/R_0}^1/I \Omega_{R/R_0}^1}{\text{Rd}_{R/R_0}^1 I + I \Omega_{R/R_0}^1/I \Omega_{R/R_0}^1} \cong \Omega_{R/R_0}^1/\text{Rd}_{R/R_0}^1 I \quad (7)$$

elde edilir. Sonuç 2.2.20'den açıktır. ■

$R/R_0$  cebiri verilsin.  $R_0[\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}]$  bir polinomlar cebiri,  $N \subset R_0[\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}]$  çarpımsal kapalı bir küme ve  $I, R_0[\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}]_N$ 'nin bir ideali olmak üzere

$$R := R_0[\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}]_N / I$$

olsun.  $x_\lambda, X_\lambda$ 'nın  $R$  içindeki görüntüsü ve  $f \in R_0[\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}]_N$  için  $\frac{\partial f}{\partial x_\lambda}, \frac{\partial f}{\partial X_\lambda}$ 'nin  $R$  içindeki görüntüsü olsun.

**Sonuç 2.2.22** (*Diferansiyel operatör modüllerinin üreteçlerle ifade edilmesi*)  $\{f_\sigma\}_{\sigma \in \Sigma}$ ,

$I$ 'nin bir üreteç kümesi olsun. Bu durumda  $U \subset \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} RdX_\lambda$ ,

$$df_\sigma := \sum_{\lambda \in \Lambda} \frac{\partial f_\sigma}{\partial x_\lambda} dX_\lambda \quad (\sigma \in \Sigma)$$

elemanlarıyla üretilen alt modül olmak üzere

$$\Omega_{R/R_0}^1 \cong \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} RdX_\lambda / U$$

sağlanır.

**İspat.**  $P := R_0 [\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}]_N$  olmak üzere 2.2.9'dan ve 2.2.11'den

$$\Omega_{P/R_0}^1 = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} PdX_\lambda$$

olur. Diğer taraftan,

$$\begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & P/I \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Omega_{P/R_0}^1 & \longrightarrow & \Omega_{P/I/R_0}^1 \end{array}$$

diagramı değişmeli olacak şekilde  $\Omega_{P/R_0}^1 \longrightarrow \Omega_{P/I/R_0}^1$  dönüşümü vardır. Bu dönüşüm yardımıyla

$$\alpha : R \otimes_P \Omega_{P/R_0}^1 \longrightarrow \Omega_{P/I/R_0}^1, \quad \alpha(r \otimes d_{P/R_0}^1(x)) = rd_{P/I}(\bar{x})$$

dönüşümü tanımlansın ve

$$0 \longrightarrow \ker \alpha \longrightarrow R \otimes_P \Omega_{P/R_0}^1 \xrightarrow{\alpha} \Omega_{P/I/R_0}^1 = \Omega_{R/R_0}^1 \longrightarrow 0$$

tam dizisi göz önüne alınsın. Burada 2.2.21 kullanılırsa

$$\ker \alpha = Pd_{P/R_0}^1 I + I \Omega_{P/R_0}^1 / I \Omega_{P/R_0}^1 = Pd_{P/R_0}^1 I / I \Omega_{P/R_0}^1 = \overline{PdI}$$

bulunur. Ayrıca

$$R \otimes_P \Omega_{P/R_0}^1 = R \otimes_P \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} PdX_\lambda = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} (R \otimes_P P) dX_\lambda \cong \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} RdX_\lambda$$

olur. Yani

$$\Omega_{R/R_0}^1 \cong \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} RdX_\lambda / \overline{PdI}$$

elde edilir. Burada  $\overline{PdI}$ ,  $PdI$ 'nin  $P/I \otimes_P \Omega_{P/R_0}^1$ 'deki görüntüsüdür ve  $I, \{f_\sigma\}_{\sigma \in \Sigma}$  elemanlarıyla üretildiğinden  $\overline{PdI}$ ,  $R$ -modül olarak  $df_\sigma (\sigma \in \Sigma)$  elemanlarıyla üretilir.

Buradan  $\overline{PdI} = U$  elde edilir. ■

**Örnek 2.2.23** (*Hiperyüzey Cebirleri*)  $R$  bir  $R_0$  – cebir olsun. Bu durumda

$$R = R_0[X_1, X_2, \dots, X_n] / (f) = R_0[x_1, \dots, x_n]$$

olmak üzere

$$\Omega_{R/R_0}^1 = \bigoplus_{i=1}^n R dX_i / \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1} dX_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dX_n \right\rangle$$

olur.

$R/R_0$  ve  $S/R_0$  cebirleri verilsin. Buradan  $S \otimes_{R_0} \Omega_{R/R_0}^1 \oplus R \otimes_{R_0} \Omega_{S/R_0}^1$ , bir  $R \otimes_{R_0} S$ –modüldür. Ayrıca

$$d : R \otimes_{R_0} S \longrightarrow S \otimes_{R_0} \Omega_{R/R_0}^1 \oplus R \otimes_{R_0} \Omega_{S/R_0}^1 \quad d(r \otimes s) = s \otimes d_{R/R_0}^1 r + r \otimes d_{S/R_0}^1 s \quad (r \in R, s \in S)$$

ile tanımlanan dönüşüm 1. mertebeden bir  $R_0$ –diferansiyel operatör olur.

**Teorem 2.2.24**  $\Omega_{R \otimes_{R_0} S/R_0}^1 \cong S \otimes_{R_0} \Omega_{R/R_0}^1 \oplus R \otimes_{R_0} \Omega_{S/R_0}^1$  dir. Buradan

$$d : R \otimes_{R_0} S \longrightarrow S \otimes_{R_0} \Omega_{R/R_0}^1 \oplus R \otimes_{R_0} \Omega_{S/R_0}^1 \quad d(r \otimes s) = s \otimes d_{R/R_0}^1 r + r \otimes d_{S/R_0}^1 s \quad (r \in R, s \in S)$$

ile tanımlanan  $d$ , 1. mertebeden  $R_0$ –diferansiyel operatörü evrenselidir.

**İspat.**  $R \otimes_{R_0} S = C$  ile ve  $A = S \otimes_{R_0} \Omega_{R/R_0}^1 \oplus R \otimes_{R_0} \Omega_{S/R_0}^1$  ile gösterilsin.  $d_{C/R_0}^1$ ’in evrensellik özelliğinden tek bir

$$\varphi : \Omega_{C/R_0}^1 \longrightarrow A$$

$C$ –homomorfizması vardır ve  $\varphi \circ d_{C/R_0}^1 = d$  sağlanır.

$$\rho : R \longrightarrow R \otimes_{R_0} S$$

kanonik homomorfizma olmak üzere

$$d_{C/R_0}^1 \circ \rho : R \longrightarrow \Omega_{C/R_0}^1$$

$R_0$ –diferansiyel operatördür.  $d_{R/R_0}^1$ ’in evrensellik özelliğinden

$$\Psi_1 : \Omega_{R/R_0}^1 \longrightarrow \Omega_{C/R_0}^1$$

$R$ –homomorfizması vardır. Bu  $\Psi_1$  homomorfizması yardımıyla

$$\Psi_1' : S \otimes_{R_0} \Omega_{R/R_0}^1 \longrightarrow \Omega_{C/R_0}^1, \quad \Psi_1'(s \otimes d_{R/R_0}^1 r) = (1 \otimes s)(d_{C/R_0}^1(r \otimes 1)) = (1 \otimes s)\Psi_1(d_{R/R_0}^1 r)$$

dönüşümü indirgensin. Bu dönüşüm

$$\begin{aligned}
\Psi'_1((r_1 \otimes s_1)(d_{R/R_0}^1 r \otimes s)) &= \Psi'_1(r_1 d_{R/R_0}^1 r \otimes s_1 s) = (1 \otimes s_1 s) \Psi_1(r_1 d_{R/R_0}^1 r) \\
&= (1 \otimes s_1 s) r_1 \Psi_1(d_{R/R_0}^1 r) \\
&= (r_1 \otimes s_1)(1 \otimes s) d_{C/R_0}^1 (r \otimes 1) \\
&= (r_1 \otimes s_1) \Psi'_1(d_{C/R_0}^1 (r \otimes s))
\end{aligned}$$

eşitliğini sağladığından bir  $C$ -homomorfizmadır. Benzer şekilde

$$\Psi'_2 : R \otimes_{R_0} \Omega_{S/R_0}^1 \longrightarrow \Omega_{C/R_0}^1$$

$C$ -homomorfizması vardır.  $\Psi' = \Psi'_1 + \Psi'_2$  ile tanımlansın. Bu durumda  $a \in R, b \in S$  için

$$\begin{aligned}
(\Psi' \circ d)(a \otimes b) &= (\Psi'_1 + \Psi'_2)(b \otimes d_{R/R_0}^1 a + a \otimes d_{S/R_0}^1 b) \\
&= \Psi'_1(b \otimes d_{R/R_0}^1 a) + \Psi'_2(a \otimes d_{S/R_0}^1 b) \\
&= (1 \otimes b) d_{C/R_0}^1 (a \otimes 1) + (a \otimes 1) d_{C/R_0}^1 (1 \otimes b) \\
&= d_{C/R_0}^1 ((a \otimes 1)(1 \otimes b)) \\
&= d_{C/R_0}^1 (a \otimes b)
\end{aligned}$$

elde edilir. Yani  $\Psi' \circ d = d_{C/R_0}^1$  sağlanır. Diğer taraftan  $\varphi \circ d_{C/R_0}^1 = d$  olduğundan  $\Psi' \circ \varphi = \varphi \circ \Psi' = 1$  olur. Böylece istenen izomorfizma elde edilir. ■

**Sonuç 2.2.25** (*Taban Değişim Formülü*)[11]

$$\Omega_{R \otimes_{R_0} S/R}^1 \cong R \otimes_{R_0} \Omega_{S/R_0}^1$$

izomorfizması vardır. O zaman  $d_{R \otimes_{R_0} S/R}^1$  evrensel diferansiyel operatörü her  $r \in R$  ve her  $s \in S$  için

$$d_{R \otimes_{R_0} S/R}^1 (r \otimes s) = r \otimes d_{S/R_0}^1 s$$

eşitliğini sağlar.

**İspat.**  $d_{S/R_0}^1$  dönüşümü  $S/R_0$ 'ın 1. mertebeden evrensel diferansiyel operatörü olmak üzere

$$R \otimes_{R_0} S \longrightarrow R \otimes_{R_0} \Omega_{S/R_0}^1, \quad D(r \otimes s) = r \otimes d_{S/R_0}^1 (s)$$

ile tanımlanan  $D$  dönüşümü  $R \otimes_{R_0} S/R$  üzerinde 1. mertebeden bir diferansiyel

operatör olur. Böylece  $\Omega_{R \otimes_{R_0} S/R}^1$ 'nin evrensellik özelliğinden

$$h : \Omega_{R \otimes_{R_0} S/R}^1 \longrightarrow R \otimes_{R_0} \Omega_{S/R_0}^1$$

$R$ -homomorfizması vardır ve  $D = hd_{R \otimes_{R_0} S/R}^1$  sağlanır. Diğer taraftan,

$$\delta : S \longrightarrow \Omega_{R \otimes_{R_0} S/R}^1$$

ile tanımlanan  $\delta(s) = d_{R \otimes_{R_0} S/R}^1(1 \otimes s)$  dönüşümü 1. mertebeden bir diferansiyel operatördür ve  $\Omega_{S/R_0}^1$ 'in evrensellik özelliğinden

$$g : \Omega_{S/R_0}^1 \longrightarrow \Omega_{R \otimes_{R_0} S/R}^1$$

$S$ -homomorfizması vardır ve  $\delta = gd_{S/R_0}^1$  sağlanır. Bu  $g$  dönüşümü

$$\tilde{g} : R \otimes_{R_0} \Omega_{S/R_0}^1 \longrightarrow \Omega_{R \otimes_{R_0} S/R}^1, \quad \tilde{g}(r \otimes d_{S/R_0}^1(s)) = rgd_{S/R_0}^1(s)$$

$R$ -homomorfizmasına genişletilebilir. Buradan,  $h\tilde{g} = 1_{R \otimes_{R_0} \Omega_{S/R_0}^1}$  ve  $\tilde{g}h = 1_{\Omega_{R \otimes_{R_0} S/R}^1}$  bulunur. Yani  $h$  bir izomorfizmadır. ■

**Örnek 2.2.26**  $R/R_0$  bir cebir ve  $P := R[\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}]$ ,  $R$  üzerinde değişkenleri  $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  olan bir polinomlar cebiri olsun ve  $S := R_0[\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}]$  olmak üzere  $P = R \otimes_{R_0} S$  alınsın. Bu durumda

$$\Omega_{P/R_0}^1 \cong S \otimes_{R_0} \Omega_{R/R_0}^1 \oplus R \otimes_{R_0} \Omega_{S/R_0}^1 \cong P \otimes_R \Omega_{R/R_0}^1 \oplus \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} PdX_\lambda$$

elde edilir. Buradaki herhangi bir  $f = \sum \alpha_{v_1 \dots v_s} X_{\lambda_1}^{v_1} \dots X_{\lambda_s}^{v_s}$  ( $\alpha_{v_1 \dots v_s} \in R$ ) polinomu için

$$df = \sum X_{\lambda_1}^{v_1} \dots X_{\lambda_s}^{v_s} \otimes d_{R/R_0} \alpha_{v_1 \dots v_s} + \sum_{\lambda \in \Lambda} \frac{\partial f}{\partial X_\lambda} dX_\lambda$$

ile belirlidir. Burada  $\delta f = \sum X_{\lambda_1}^{v_1} \dots X_{\lambda_s}^{v_s} \otimes d_{R/R_0} \alpha_{v_1 \dots v_s}$  ile gösterilecektir.

$S/R$  bir cebir olmak üzere

$$S = R[\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}]_N / I \quad (8)$$

gösterimine sahip olsun. Burada  $N$ ,  $P := R[\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}]$ 'nin çarpımsal kapalı bir alt kümesi ve  $I$ ,  $P_N$ 'nin bir idealidir.  $x_\lambda$ ,  $X_\lambda$ 'nın  $S$  içindeki görüntüsü ve  $\{f_\sigma\}_{\sigma \in \Sigma}$ ,  $I$  idealinin bir üreteç kümesi olsun. Diğer taraftan  $\frac{\partial f_\sigma}{\partial x_\lambda}$ ,  $\frac{\partial f_\sigma}{\partial X_\lambda}$ 'nın  $S$  içindeki ve  $\delta f_\sigma(\{x_\lambda\})$ ,  $\delta f_\sigma$ 'nin  $S \otimes_R \Omega_{R/R_0}^1$  içindeki görüntüsü olsun. Ayrıca  $U \subset S \otimes_R \Omega_{R/R_0}^1 \oplus \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} SdX_\lambda$ ,

$$\delta f_\sigma(\{x_\lambda\}) + \sum_{\lambda \in \Lambda} \frac{\partial f_\sigma}{\partial x_\lambda} dX_\lambda$$

elemanlarıyla üretilen  $S$ -alt modül olsun.

**Teorem 2.2.27**

$$\Omega_{S/R_0}^1 \cong (S \otimes_R \Omega_{R/R_0}^1 \oplus \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} SdX_\lambda) / U$$

izomorfizması vardır.

**İspat.** Yukarda verilenlerden  $N$ ,  $R[\{X_\lambda\}]$ 'nin çarpımsal kapalı bir alt kümesi ve  $I$ ,  $R[\{X_\lambda\}]_N$ 'nin bir ideali olmak üzere

$$S := R[\{X_\lambda\}]_N / I = \frac{(R \otimes_{R_0} R_0[\{X_\lambda\}])_N}{I}$$

biçimindedir. Ayrıca

$$R/I \otimes_R \Omega_{R/R_0}^1 \longrightarrow \Omega_{R/I/R_0}^1$$

dönüşümünü göz önüne alalım. Buradan

$$\frac{\Omega_{R/R_0}^1 / I \Omega_{R/R_0}^1}{R/I \delta(I)} \cong \Omega_{R/I/R_0}^1$$

olur. Böylece  $R = R[\{X_\lambda\}]_N$  olmak üzere

$$\frac{S \otimes_{R[\{X_\lambda\}]_N} \Omega_{R \otimes_{R_0} R_0[\{X_\lambda\}]_N / R_0}^1}{S \delta(I)} \cong \Omega_{S/R_0}^1 \quad (*)$$

olur. 2.2.24'ten

$$\Omega_{R \otimes_{R_0} R_0[\{X_\lambda\}]}^1 = R_0[\{X_\lambda\}] \otimes_{R_0} \Omega_{R/R_0}^1 \oplus R \otimes_{R_0} \Omega_{R_0[\{X_\lambda\}]/R_0}^1$$

eşitliği vardır. Ayrıca  $\Omega_{R \otimes_{R_0} R_0[\{X_\lambda\}]_N / R_0}^1 \cong (\Omega_{R \otimes_{R_0} R_0[\{X_\lambda\}]/R_0}^1)_N$  ve  $M$  bir  $R_S$ -modül olmak üzere  $R_S \otimes_{R_S} M \cong R_S \otimes_R M$  izomorfizmaları göz önüne alınırsa ,

$$R_0[\{X_\lambda\}] \otimes_{R_0} \Omega_{R/R_0}^1 = (R_0[\{X_\lambda\}] \otimes_{R_0} R) \otimes_R \Omega_{R/R_0}^1$$

olur ve buradan

$$(S \otimes_{R[\{X_\lambda\}]} R[\{X_\lambda\}]) \otimes_R \Omega_{R/R_0}^1 = S \otimes_R \Omega_{R/R_0}^1$$

sağlanır. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} S \otimes_{R[\{X_\lambda\}]} (R \otimes_{R_0} \Omega_{R_0[\{X_\lambda\}]/R_0}^1) &= S \otimes_{R[\{X_\lambda\}]} \left( \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} (R \otimes_{R_0} R_0[\{X_\lambda\}]) dX_\lambda \right) \\ &= S \otimes_{R[\{X_\lambda\}]} \left( \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} R[\{X_\lambda\}] dX_\lambda \right) \\ &= \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} (S \otimes_{R[\{X_\lambda\}]} R[\{X_\lambda\}]) dX_\lambda \\ &= \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} SdX_\lambda \end{aligned}$$

olur. Bu bulunanlar “\*” da göz önüne alınırsa

$$\Omega_{S/R_0}^1 \cong (S \otimes_R \Omega_{R/R_0}^1 \oplus \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} SdX_\lambda) / U$$

elde edilir. ■

## 2.3 Cisim Genişlemelerinin Diferansiyel Operatör Modülleri

Bu bölümde diferansiyel operatör modüllerinin cisim genişlemeleri üzerindeki uygulamaları verilecektir. Ayrıca cisim genişlemelerinin diferansiyel operatör modülleri vektör uzay olduğundan bunların boyutları ve tabanları incelenecektir.

**Tanım 2.3.1**  $L/K$  bir cisim genişlemesi olsun. Eğer  $L = K(x_1, x_2, \dots, x_n)$  olacak şekilde  $x_1, x_2, \dots, x_n \in L$  elemanları var ise  $L/K$ 'ya sonlu üretilmiş bir cisim genişlemesi denir.

**Tanım 2.3.2**  $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  ailesi,  $L/K$  cisim genişlemesinin bir transendental tabanı olsun. Eğer  $L/K(\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda})$  cisim genişlemesi ayrılabilir cebirsel ise  $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ 'ya ayrılabilir transendental taban denir. Eğer  $L/K$  sonlu üretilmiş cisim genişlemesinin ayrılabilir bir transendental tabanı var ise  $L/K$ 'ya ayrılabilir denir.

1. temel tam dizi göz önüne alınsın.

$$S \otimes_R \Omega_{R/R_0}^1 \xrightarrow{\alpha} \Omega_{S/R_0}^1 \xrightarrow{\beta} \Omega_{S/R}^1 \longrightarrow 0 \quad (9)$$

Burada  $\alpha$  dönüşümünün çekirdeği,  $T_{R_0}(S/R)$  ile gösterilsin.  $S'/R$  bir cebir ve  $\sigma : S \rightarrow S'$  dönüşümü bir  $R$ -homomorfizma olmak üzere

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & T_{R_0}(S/R) & \longrightarrow & S \otimes_R \Omega_{R/R_0}^1 & \xrightarrow{\alpha} & \Omega_{S/R_0}^1 & \xrightarrow{\beta} & \Omega_{S/R}^1 & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \sigma \otimes id \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & T_{R_0}(S'/R) & \longrightarrow & S' \otimes_R \Omega_{R/R_0}^1 & \xrightarrow{\alpha'} & \Omega_{S'/R_0}^1 & \xrightarrow{\beta'} & \Omega_{S'/R}^1 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

değişmeli diagramının satırları tamdır. Buradan  $\sigma \otimes id$  dönüşümü yardımıyla

$$T_{R_0}(\sigma) : T_{R_0}(S/R) \longrightarrow T_{R_0}(S'/R)$$

$S$  - lineer dönüşümü indirgenir.

**Önerme 2.3.3**  $L/K$  ve  $K/K_0$  cisim genişlemeleri verilsin.  $Z, Z/K$  sonlu üretilmiş olacak şekilde  $L$  ve  $K$  cisimleri arasında herhangi bir cisim olmak üzere

$$T_{K_0}(L/K) = \bigcup_Z T_{K_0}(Z/K)$$

sağlanır.

**İspat.**  $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  ailesi  $L/K$  cisim genişlemesinin bir üreteç kümesi ve  $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  değişkenlerin bir ailesi olmak üzere  $L = K[X_\lambda]_{\lambda \in \Lambda}/I$  gösterimine sahip olsun. Burada

$$K[X_\lambda]_{\lambda \in \Lambda} \longrightarrow L, \quad X_\lambda \longrightarrow x_\lambda$$

ve  $I = \langle \{F_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda} \rangle$  ile tanımlansın. O halde (8) ve 2.2.27'den

$$0 \longrightarrow U \longrightarrow L \otimes_K \Omega_{K/K_0}^1 \oplus \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} L dX_\lambda \longrightarrow \Omega_{L/K_0}^1 \longrightarrow 0$$

dizisi tamdır. Burada  $U, F_\sigma \in K[\{X_\lambda\}]$  olmak üzere

$$\delta F_\sigma(\{x_\lambda\}) + \sum_{\lambda} \frac{\partial F_\sigma}{\partial x_\lambda} dX_\lambda$$

elemanları ile üretilen  $L$  – vektör uzayıdır. Diğer taraftan ,

$$T_{K_0}(L/K) = (L \otimes_K \Omega_{K/K_0}^1) \cap U$$

olduğu açıktır. Böylece her  $z \in T_{K_0}(L/K)$

$$z = \sum_{i=1}^n \alpha_i \otimes m_i \quad (\alpha_i \in L, m_i \in \Omega_{K/K_0}^1) \quad (10)$$

ve

$$z = \sum_{\sigma} \beta_{\sigma} (\delta F_{\sigma}(\{x_{\lambda}\}) + \sum_{\lambda} \frac{\partial F_{\sigma}}{\partial x_{\lambda}} dX_{\lambda}) \quad (11)$$

biçiminde yazılabilir. Burada sadece sonlu sayıda  $\beta_{\sigma}$  sıfırdan farklıdır. Bunlar  $\beta_{\sigma_1}, \beta_{\sigma_2}, \dots, \beta_{\sigma_r}$  ile gösterilsin ve  $j = 1, \dots, r$  için  $X_{\lambda_1}, X_{\lambda_2}, \dots, X_{\lambda_s}$  ;  $F_{\sigma_j}$  'deki değişkenler olmak üzere

$$Z := K(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta_{\sigma_1}, \beta_{\sigma_2}, \dots, \beta_{\sigma_r}, x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}, \dots, x_{\lambda_s})$$

olsun. O halde (10) ve (11) eşitlikleri

$$Z \otimes_K \Omega_{K/K_0}^1 \oplus \bigoplus_{i=1}^s Z dX_{\lambda_i}$$

için de sağlanır. Böylece  $z \in T_{K_0}(Z/K)$  elde edilir. ■

**Sonuç 2.3.4**  $L/K$  cebirsel genişlemesi ayrılabilir olsun. O zaman  $T_{K_0}(L/K) = 0$  dir. Ayrıca

$$L \otimes_K \Omega_{K/K_0}^1 \cong \Omega_{L/K_0}^1$$

izomorfizması vardır.

**İspat.** 2.3.3'ten  $L/K$ 'nin sonlu üretilmiş olduğu kabul edilebilir. İlkel elemen teoreminden  $f \in K[X]$  ayrılabilir bir polinom olmak üzere

$$L = K[X]/(f)$$

gösterimi vardır.  $x, X$ 'in  $L$  içindeki görüntüsü olmak üzere  $f$  ayrılabilir olduğundan  $f'(x) \neq 0$  dir.

$$0 \longrightarrow U \longrightarrow L \otimes_K \Omega_{K/K_0}^1 \oplus LdX \longrightarrow \Omega_{L/K_0}^1 \longrightarrow 0$$

tam dizisi göz önüne alınsın. Burada  $U$ ,

$$\delta f(x) + f'(x)dX$$

ile üretilen vektör uzayıdır. Böylece,

$$T_{K_0}(L/K) = L \otimes_K \Omega_{K/K_0}^1 \cap U = 0$$

elde edilir. ■

**Sonuç 2.3.5**  $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  ailesi  $L/K$  cisim genişlemesinin ayrılabilir bir transendental tabanı olsun. O zaman aşağıdakiler sağlanır:

(a)  $\Omega_{L/K}^1 = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} Ldx_\lambda$ ; diğer bir deyişle  $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ ,  $L/K$ 'nin bir diferansiyel tabanıdır.

(b)  $\dim_L \Omega_{L/K}^1$ 'nin sonlu olması için gerek ve yeter koşul  $\text{Tr deg}(L/K)$ 'nin sonlu olmasıdır.

(c)  $\Omega_{L/K}^1 = 0$  olması için gerek ve yeter koşul  $L/K$ 'nin cebirsel olmasıdır.

**İspat.** (a)  $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  ayrılabilir bir transendental taban olsun.  $Z = K(\{x_\lambda\})$ ,  $K[\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}]$ 'nin kesir cismi olmak üzere 2.2.12'den

$$\Omega_{Z/K}^1 = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} Zdx_\lambda$$

elde edilir. Ayrıca  $L/Z$  ayrılabilir bir cebirsel genişleme olduğundan 2.3.4'ten

$$L \otimes_Z \Omega_{Z/K}^1 \simeq \Omega_{L/K}^1$$

olur. Buradan

$$\Omega_{L/K}^1 \simeq L \otimes_Z \Omega_{Z/K}^1 \simeq L \otimes_Z \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} Z dx_\lambda \simeq \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} (L \otimes_Z Z) dx_\lambda \simeq \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} L dx_\lambda$$

elde edilir. (b) ve (c) şıkları (a) şikkından elde edilir. ■

**Sonuç 2.3.6**  $K$  karakteristiği 0 olan bir cisim olsun.  $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  ailesinin  $L/K$  'nın bir *transendental tabanı* olması için gerek ve yeter koşul  $L/K$  'nın *diferansiyel tabanı* olmasıdır.

**İspat.**  $\{dx_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ ,  $\Omega_{L/K}^1$  'nın bir tabanı olsun ve  $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  'nın  $K$  üzerinde cebirsel bağımlı olduğu kabul edilsin. O zaman  $K$  üzerinde cebirsel bağımlı olan sonlu bir  $\{x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}, \dots, x_{\lambda_m}\}$  ailesi vardır.

$$Z = K(x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}, \dots, x_{\lambda_m})$$

olarak alınsın. Bu durumda  $Tr \deg(Z/K) < m$  olduğundan  $\dim_Z \Omega_{Z/K}^1 < m$  elde edilir. Yani  $dx_{\lambda_i} \in \Omega_{Z/K}^1$ ,  $Z$  üzerinde lineer bağımlı olur. Buradan  $\{dx_{\lambda_i}\}_{i=1}^m$  'nin  $\Omega_{L/K}^1$  içindeki görüntüleri de lineer bağımlı olur. Bu  $\{dx_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  'nın taban olmasıyla çelişir. O halde  $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  ailesi  $K$  üzerinde cebirsel bağımsızdır. Böylece  $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ ,  $L/K$  cisim genişlemesinin bir *transendental tabanı* olur. Ayrıca, 2.3.5 göz önüne alınırsa istenen elde edilir. ■

$K$  karakteristiği  $p > 0$  olan herhangi bir cisim olsun ve karakteristiği  $p$  asal sayısı olan  $S$  halkası için  $S/R$  cebiri göz önüne alınsın.

**Tanım 2.3.7**  $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  ailesi,  $S/R[S^p]$  cebirinin bir *üreteç kümesi* ise bu aileye  $S/R$  'nin  $p$ -*üreteç kümesi* denir. Yani

$$x_{\lambda_1}^{v_1} x_{\lambda_2}^{v_2} \dots x_{\lambda_n}^{v_n} \quad (n \in \mathbb{N}, 0 \leq v_i \leq p-1) \quad (12)$$

elemanları  $S$  'nin  $R[S^p]$  -modül olarak *üreteçleridir*.

**Tanım 2.3.8** (12) 'deki elemanlar  $R[S^p]$  üzerinde *lineer bağımsız* ise  $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \in S$  elemanları  $R$  üzerinde  $p$  - *bağımsızdır* denir.

**Tanım 2.3.9** (12) 'deki elemanlar  $S/R[S^p]$  için bir *taban* oluyor ise  $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  elemanları  $S/R$  için bir  $p$  - *tabandır* denir.

$\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ 'nin bir  $p$ -taban olması ile

$$\Phi : R[S^p] [\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}] \rightarrow S \quad (X_\lambda \rightarrow x_\lambda)$$

$R[S^p]$ -homomorfizmasının çekirdeğinin  $X_\lambda^p - x_\lambda^p$  ( $\lambda \in \Lambda$ ) elemanlarıyla üretilmesi denktir.

**Önerme 2.3.10**  $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  ailesi  $S/R$ 'nin bir  $p$ -üreteç kümesi olsun. O zaman  $\{dx_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  ailesi  $\Omega_{S/R}^1$ 'nin bir üreteç kümesi olur. Ayrıca,  $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  ailesinin  $S/R$ 'nin bir  $p$ -tabanı olması için gerek ve yeter koşul  $S/R$ 'nin diferansiyel tabanı olmasıdır.

**İspat.**  $d$ ,  $S/R$ 'nin herhangi bir diferansiyel operatörü olmak üzere  $d(R[S^p]) = 0$  dır. Buradan  $\Omega_{S/R}^1 = \Omega_{S/R[S^p]}^1$  elde edilir.  $d \in \Omega_{S/R}^1$  alınsın. Bu durumda  $rx^p \in R[S^p]$ ,  $r' \in S$  için

$$d(rx^p \cdot r') = r'rdx^p + rx^pdr' = rx^pdr'$$

sağlandığından  $d \in \Omega_{S/R[S^p]}^1$  elde edilir. Tersine,  $d \in \Omega_{S/R[S^p]}^1$  alınsın.

$$d(rr') = d(r1^p r') = rd(r')$$

olduğundan  $d \in \Omega_{S/R}^1$  bulunur.  $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  ailesi  $S/R$ 'nin bir  $p$ -üreteç kümesi olduğu için  $\{dx_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  ailesi  $\Omega_{S/R[S^p]}^1$ 'nin bir üreteç kümesi olur. Buradan  $\{dx_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ ,  $\Omega_{S/R}^1$ 'nin bir üreteç kümesi olur.  $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  ailesi,  $S/R$ 'nin bir  $p$ -tabanı olsun.

$$S \cong R[S^p] [\{X_\lambda\}] / (\{X_\lambda^p - x_\lambda^p\})$$

olur ve 2.2.22'den

$$\Omega_{S/R}^1 \cong \bigoplus SdX_\lambda / U$$

sağlanır. Burada  $U$ ,  $f_\lambda := X_\lambda^p - x_\lambda^p$  olmak üzere

$$df_\lambda := \sum_{\mu \in \Lambda} \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_\mu} dX_\mu$$

elemanlarıyla üretilir. Her  $\lambda, \mu \in \Lambda$  için  $\frac{\partial f_\lambda}{\partial x_\mu} = 0$  olduğundan

$$\Omega_{S/R}^1 = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} SdX_\lambda = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} Sdx_\lambda$$

elde edilir. O halde  $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  ailesi  $\Omega_{S/R}^1$  'nin bir diferansiyel tabanı olur. Tersine  $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  ailesi  $\Omega_{S/R}^1$  'nin bir diferansiyel tabanı olmak üzere

$$\varphi : R[S^p] [\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}] \longrightarrow S \quad (X_\lambda \longrightarrow x_\lambda)$$

dönüşümü göz önüne alınsın ve  $\ker \varphi = I$  olsun.  $f \in I$  olmak üzere  $X_\lambda^p - x_\lambda^p \in I$  olduğundan, her  $\lambda \in \Lambda$  için

$$\text{Der}_{X_\lambda} f \leq p - 1$$

kabul edilebilir.  $f(\{x_\lambda\}) = 0$  olduğundan

$$\sum_\lambda \frac{\partial f}{\partial x_\lambda} dx_\lambda = 0$$

sağlanır. Ayrıca  $\{dx_\lambda\}$ ,  $S$  üzerinde lineer bağımsız olduğundan her  $\lambda \in \Lambda$  için

$$\sum_\lambda \frac{\partial f}{\partial x_\lambda} = 0$$

olur ve tümevarımla  $f$ 'nin bütün kısmi türevleri çekirdekte kalır. Diğer taraftan  $f \in S [\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}]$  polinomu

$$f = \sum_{0 \leq v_i \leq p-1} \alpha_{v_1 v_2 \dots v_n} (X_{\lambda_1} - x_{\lambda_1})^{v_1} \dots (X_{\lambda_n} - x_{\lambda_n})^{v_n} \quad (\alpha_{v_1 v_2 \dots v_n} \in S ; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \Lambda)$$

biçiminde yazılabilir. Buradan

$$v_1! v_2! \dots v_n! \alpha_{v_1 v_2 \dots v_n} = \frac{\partial^{v_1+v_2+\dots+v_n} f}{(\partial x_{\lambda_1})^{v_1} \dots (\partial x_{\lambda_n})^{v_n}} = 0$$

olur. Her bir  $i = 1, \dots, n$  için,  $v_i \leq p - 1$  olduğundan  $\alpha_{v_1 v_2 \dots v_n} = 0$  yani  $f = 0$  olur. Böylece  $I = \langle \{X_\lambda^p - x_\lambda^p\}_{\lambda \in \Lambda} \rangle$  elde edilir. O halde  $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  ailesi  $S/R$ 'nin bir  $p - tabanı$  olur. ■

**Tanım 2.3.11**  $S/R$ 'nin  $p$ -tabanındaki eleman sayısına  $S/R$ 'nin  $p$ -derecesi denir ve  $\deg_p(S/R)$  ile gösterilir.

*Zorn lemma'dan* her  $L/K$  cisim genişlemesinin bir  $p - tabanı$  ve dolayısıyla da  $p - derecesi$  vardır. Ayrıca  $L/K$ 'nın her  $p - bağımsız$  ailesi bir  $p - tabana$  genişletilebilir.

**Önerme 2.3.12**  $L/K$  bir cisim genişlemesi ve  $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ ,  $L$ 'nin elemanlarından oluşan bir aile olsun.

(a)  $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ 'nin  $L/K$ 'nin bir  $p$ -tabanı olması için gerek ve yeter koşul  $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  ailesinin  $L/K$  için bir diferansiyel taban olmasıdır.

(b)  $\dim_L \Omega_{L/K}^1 = \deg_p(L/K)$

(c)  $\Omega_{L/K}^1 = 0$  olması için gerek ve yeter koşul  $L = K[L^p]$  olmasıdır.  
 $L/K$ 'nin her  $p$ -üreteç kümesi bir  $p$ -taban içerir.

**İspat.**

(c)  $\Omega_{L/K}^1 = 0$  olsun.  $L \neq K[L^p]$  olduğu kabul edilsin. Her  $x_\lambda \in L \setminus K[L^p]$  elemanı için  $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  ailesi  $L/K$ 'nin bir  $p$ -üreteç kümesi olur. Buradan  $\{dx_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  ailesi  $\Omega_{L/K}^1$ 'nin bir üreteç kümesi olur fakat bu  $\Omega_{L/K}^1 = 0$  olmasıyla çelişir. Dolayısıyla  $L = K[L^p]$  elde edilir. Tersine  $L = K[L^p]$  olsun.  $\{1\}$  kümesi  $L/K[L^p]$ 'nin bir üreteç kümesi olur ve  $\Omega_{L/K}^1, \{d1\} = 0$  ile üretildiğinden  $\Omega_{L/K}^1 = 0$  bulunur.

(a)  $\{dx_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}, \Omega_{L/K}^1$ 'nin bir tabanı olsun. Eğer  $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  ailesinin  $L/K$ 'nin  $p$ -üreteç kümesi olduğunu gösterilirse 2.3.10'dan istenen sonuç elde edilir.  
 $L' = K[L^p][\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}]$  olsun. Buradan

$$\Omega_{L/L'}^1 = \Omega_{L/K}^1 / \langle \{dx_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \rangle = 0$$

elde edilir ve (c) şikkından  $L = L'[L^p]$  sağlanır. Diğer taraftan  $L^p \subset L'$  olduğundan  $L = L'$  olur. Buradan  $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}, L/K$ 'nin bir  $p$ -üreteç kümesidir. Dolayısıyla bir  $p$ -tabanı olur.  $\Omega_{L/K}^1$  vektör uzayının her üreteç kümesinden bir taban seçilebildiği için önermenin son kısmı açıktır.

(b) (a)'dan elde edilir.

■

**Sonuç 2.3.13**  $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  ailesi  $L/K$  'nın ayrılabilir bir transendental tabanı olsun. O zaman  $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ ,  $L/K$  'nın bir  $p$ -tabanıdır ve  $\deg_p(L/K) = \text{Tr deg}(L/K)$  sağlanır.

**İspat.** 2.3.5'ten  $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  ailesi  $L/K$ 'nın bir diferansiyel tabanı olur ve 2.3.12(a)'dan  $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  ailesi  $L/K$ 'nın bir  $p$ -tabanı olur. Buradan sonuç elde edilir. ■

**Önerme 2.3.14**  $L/K$  sonlu üretilmiş bir cisim genişlemesi olmak üzere aşağıdakiler denktir:

(a)  $\Omega_{L/K}^1 = 0$

(b)  $L/K$  ayrılabilir cebirseldir.

**İspat.**  $\Omega_{L/K}^1 = 0$  olsun. 2.3.12(c)'den her  $e > 0$  için

$$L = K[L^p] = K[L^{p^2}] = \dots = K[L^{p^e}]$$

sağlanır.  $\{x_1, x_2, \dots, x_t\}$  kümesi  $L/K$ 'nın bir transendental tabanı olsun ve  $L'$  kümesi  $L$ 'nin  $K(x_1, x_2, \dots, x_t)$  üzerindeki tüm ayrılabilir elemanlardan oluşsun. Bu durumda  $L/L'$  genişlemesi sonlu olur. O zaman  $L = L'[y_1, y_2, \dots, y_n]$  olacak şekilde öyle  $y_1, y_2, \dots, y_n \in L$  elemanları vardır ki bazı  $e$  doğal sayıları için  $y_i^{p^e} \in L'$  sağlanır. Buradan

$$L^{p^e} = L'^{p^e} [y_1^{p^e}, \dots, y_n^{p^e}] \subset L'$$

ve

$$L = K[L^{p^e}] = L'$$

elde edilir. Böylece  $L/K(x_1, \dots, x_t)$  ayrılabilir cebirseldir ve

$$t = \text{Tr deg}(L/K) = \dim_L \Omega_{L/K}^1 = 0$$

sağlanır. O halde  $L/K$  ayrılabilir cebirseldir. Tersine, 2.2.7 göz önüne alınırsa istenen denklik elde edilir. ■

**Teorem 2.3.15**  $L/K$  sonlu üretilmiş bir cisim genişlemesi olmak üzere aşağıdakiler sağlanır:

(a)  $\deg_p(L/K) \geq Tr \deg(L/K)$

(b)  $L/K$  'nın her  $p$  – tabanından bir transendental taban seçilebilir.

(c)  $\deg_p(L/K) = Tr \deg(L/K)$  olması için gerek ve yeter koşul  $L/K$  'nın ayrılabilir olmasıdır.

(d)  $L/K$  ayrılabilir olmak üzere  $x_1, \dots, x_t \in L$  elemanlarını alalım. Bu durumda aşağıdakiler denktir:

( $\alpha$ )  $\{x_1, \dots, x_t\}$   $L/K$  'nın bir  $p$  – tabanıdır.

( $\beta$ )  $\{x_1, \dots, x_t\}$   $L/K$  'nın ayrılabilir bir transendental tabanıdır.

( $\gamma$ )  $\{dx_1, \dots, dx_t\}$ ,  $\Omega_{L/K}^1$  'nin bir tabanıdır.

**İspat.**  $\{x_1, \dots, x_t\}$   $L/K$ 'nın bir  $p$  – tabanı olsun ve  $L' = K(x_1, \dots, x_t)$  ile gösterilsin.

$$\Omega_{L/L'}^1 = \Omega_{L/K}^1 / \langle dx_1, \dots, dx_t \rangle = 0$$

olur. 2.3.14'ten  $L/L'$  ayrılabilir cebirseldir ve  $Tr \deg(L/K) = Tr \deg(L'/K)$  elde edilir.  $x_1, \dots, x_t$  elemanları  $L'/K$ 'yı ürettiği için bu elemanlardan bir transendental taban seçilebilir ki bu elde ettiğimiz taban aynı zamanda  $L/K$ 'nın bir transendental tabanıdır. Böylece (a) ve (b) şıkları gösterilmiş olur.

(c)  $\deg_p(L/K) = Tr \deg(L/K)$  olsun. Bu durumda  $\{x_1, \dots, x_t\}$ ,  $L/K$ 'nın bir transendental tabanı olur. Yani  $L/K$  ayrılabilir. Tersine  $L/K$  ayrılabilir olsun. 2.3.14'ten  $\Omega_{L/K}^1 = 0$  olur ve  $\dim \Omega_{L/K}^1 = \deg_p(L/K) = 0$  elde edilir. Buradan  $Tr \deg(L/K) = 0$  olur ve  $\deg_p(L/K) = Tr \deg(L/K)$  sağlanır.

(d)  $L/K$  ayrılabilir olsun. ( $\alpha$ )  $\Rightarrow$  ( $\beta$ ) olduğu 2.3.15'ten ( $\beta$ )  $\Rightarrow$  ( $\gamma$ ) olduğu 2.3.5'ten ve ( $\gamma$ )  $\Rightarrow$  ( $\alpha$ ) olduğu 2.3.12(a)'dan elde edilir. ■

$L/K$  ve  $K/K_0$  herhangi iki cisim genişlemesi olmak üzere  $Z, K \subset Z \subset L$  koşunu sağlayan bir cisim olsun. Buradan  $T$ 'nin tanımından satırları ve sütunları tam olan

$$\begin{array}{ccccccc}
& & & & 0 & & 0 \\
& & & & \downarrow & & \downarrow \\
& & & & T_{K_0}(L/Z) & & T_K(L/Z) \\
& & & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \rightarrow & L \otimes_Z T_{K_0}(Z/K) & \rightarrow & L \otimes_Z (Z \otimes_K \Omega_{K/K_0}^1) & \rightarrow & L \otimes_Z \Omega_{Z/K_0}^1 & \rightarrow & L \otimes_Z \Omega_{Z/K}^1 & \rightarrow & 0 \\
& & & & \downarrow \wr & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \rightarrow & T_{K_0}(L/K) & \rightarrow & L \otimes_K \Omega_{K/K_0}^1 & \rightarrow & \Omega_{L/K_0}^1 & \rightarrow & \Omega_{L/K}^1 & \rightarrow & 0 \\
& & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
& & & & \Omega_{L/Z}^1 & \longrightarrow & \Omega_{L/Z}^1 & & & & \\
& & & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
& & & & 0 & & 0 & & & & 
\end{array}$$

değişmeli diagramı elde edilir. Yukarıdaki diagram yardımıyla satır ve sütunları tam olan

$$\begin{array}{ccccccc}
& & 0 & & 0 & & 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
& & T_{K_0}(L/K)/L \otimes_Z T_{K_0}(Z/K) & \longrightarrow & T_{K_0}(L/Z) & \longrightarrow & T_K(L/Z) \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & L \otimes_Z (Z \otimes_K \Omega_{K/K_0}^1)/L \otimes_Z T_{K_0}(Z/K) & \longrightarrow & L \otimes_Z \Omega_{Z/K_0}^1 & \longrightarrow & L \otimes_Z \Omega_{Z/K}^1 & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & L \otimes_K \Omega_{K/K_0}^1/T_{K_0}(L/K) & \longrightarrow & \Omega_{L/K_0}^1 & \longrightarrow & \Omega_{L/K}^1 & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
& & 0 & & \Omega_{L/Z}^1 & & \Omega_{L/Z}^1 \\
& & & & \downarrow & & \downarrow \\
& & & & 0 & & 0
\end{array}$$

değişmeli diagramı indirgenir. Böylece Snake lemma'dan

$$0 \longrightarrow L \otimes_Z T_{K_0}(Z/K) \longrightarrow T_{K_0}(L/K) \longrightarrow T_{K_0}(L/Z) \longrightarrow T_K(L/Z) \longrightarrow 0$$

olur. Son diagramın sağ sütunu göz önüne alınırsa

$$0 \longrightarrow L \otimes_Z T_{K_0}(Z/K) \longrightarrow T_{K_0}(L/K) \longrightarrow T_{K_0}(L/Z) \longrightarrow L \otimes_Z \Omega_{Z/K}^1 \longrightarrow \Omega_{L/K}^1 \longrightarrow \Omega_{L/Z}^1 \longrightarrow 0 \quad (13)$$

tam dizisi elde edilir.

**Tanım 2.3.16**  $L/K$  sonlu üretilmiş cebirsel bir genişleme olmak üzere,

$$\deg_p(L/K) - \text{Tr deg}(L/K)$$

sayısına  $L/K$ 'nin ayrılabilirlikten uzaklaşma ölçüsü denir ve  $\text{insep}(L/K)$  ile gösterilir.

**Teorem 2.3.17**  $L/K$  bir cisim genişlemesi olsun. Eğer  $L/K$ 'nin ayrılabilir bir transendental tabanı var ise  $T_{K_0}(L/K) = 0$  olur ve

$$0 \longrightarrow L \otimes_K \Omega_{K/K_0}^1 \longrightarrow \Omega_{L/K_0}^1 \longrightarrow \Omega_{L/K}^1 \longrightarrow 0$$

dizisi tamdır.

**İspat.**  $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ ,  $L/K$ 'nin ayrılabilir transendental tabanı olsun ve  $Z := K(\{x_\lambda\})$  ile gösterilsin.  $L/Z$  ayrılabilir cebirsel olduğundan 2.3.4'ten  $T_{K_0}(L/Z) = 0$  elde edilir. Ayrıca 2.2.27'den

$$\Omega_{Z/K_0}^1 = Z \otimes_K \Omega_{K/K_0}^1 \oplus \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} Z dx_\lambda$$

olur ve böylece  $T_{K_0}(Z/K) = 0$  elde edilir. (13) tam dizisi göz önüne alınırsa

$T_{K_0}(L/K) = 0$  bulunur. ■

**Teorem 2.3.18** [Cartier esitsizliği]  $L/K$  sonlu üretilmiş bir cebirsel genişleme olmak üzere  $K$ 'nin karakteristiği  $p > 0$  olsun. Bu durumda

$$\dim_L T_{K_0}(L/K) \leq \text{insep}(L/K)$$

sağlanır. Eğer  $K_0, K^p$ 'nin bir alt cismi ise

$$\dim_L T_{K_0}(L/K) = \text{insep}(L/K)$$

sağlanır.

**İspat.** [E.Kunz, 2002] ■

**Tanım 2.3.19**  $L/K$  herhangi bir cisim genişlemesi olsun.  $Z, K$  üzerinde sonlu üretilmiş herhangi bir cisim olmak üzere  $K \subset Z \subset L$  koşulunu sağlasın. Bu durumda  $Z/K$  ayrılabilir bir genişleme ise  $L/K$  genişlemesi de ayrılabiliridir.

**Sonuç 2.3.20**  $L/K$  bir cisim genişlemesi olmak üzere aşağıdakiler denktir:

(a)  $L/K$  ayrılabiliridir.

(b)  $K$ 'nin her  $K_0$  alt cismi için  $T_{K_0}(L/K) = 0$  dır.

(c)  $K$ 'nin her  $K_0$  asal cismi için  $T_{K_0}(L/K) = 0$  dır.

**İspat.** 2.3.3'ten teoremi karakteristiği pozitif olan sonlu üretilmiş cisim genişlemeleri için göstermek yeterlidir. 2.3.17'den  $L/K$  ayrılabilir ise  $T_{K_0}(L/K) = 0$  olur ve  $K$ 'nin her  $K_0$  alt cismi için sağlanıyorsa özel olarak her asal alt cismi için de sağlanır. Şimdi  $K_0, K$ 'nin asal cismi olmak üzere  $T_{K_0}(L/K) = 0$  olduğu kabul edilsin.  $K_0, K$ 'nin asal cismi olduğundan  $K_0 \subseteq K^p$  dir. Dolayısıyla *Cartier* eşitsizliğinden

$$\deg_p(L/K) = \text{Tr deg}(L/K)$$

olur ve 2.3.15(c)'den  $L/K$  ayrılabiliridir. ■

**Sonuç 2.3.21**  $Z/K$  ve  $L/Z$  ayrılabilir cisim genişlemeleri olsunlar. Bu durumda  $L/K$  cisim genişlemesi de ayrılabiliridir.

**İspat.**  $K_0 \subset K$  alt cismini alalım. (13) 'ten

$$0 \longrightarrow L \otimes_Z T_{K_0}(Z/K) \longrightarrow T_{K_0}(L/K) \longrightarrow T_{K_0}(L/Z)$$

tam dizisi vardır. 2.3.20'den

$$T_{K_0}(Z/K) = T_{K_0}(L/Z) = 0$$

olur. Buradan da  $T_{K_0}(L/K) = 0$  dır. Yani  $L/K$  ayrılabiliridir. ■

## 2.4 Lokal Halkaların Diferansiyel Operatör Modülleri

Bu bölümde lokal halkaların diferansiyel operatör modülleri incelenecek ve diferansiyel operatör modülünün minimal üreteç kümesi belirlenecektir.

$(R, m)$  bir lokal halka olmak üzere  $R$ 'nin kalan cismi  $R/m = K$  ile gösterilsin.  $d$ ,  $R/\mathbb{Z}$ 'nin evrensel diferansiyel operatörü ve  $p := \text{Char} K$  verilsin. 2.2.20'den  $K$ -vektör uzaylarının

$$m/m^2 \xrightarrow{\alpha} \Omega_{R/\mathbb{Z}}^1/m\Omega_{R/\mathbb{Z}}^1 \xrightarrow{\beta} \Omega_{K/\mathbb{Z}}^1 \longrightarrow 0 \quad (14)$$

dizisi tamdır. Burada her  $x \in m$  için

$$\alpha(x + m^2) = dx + m\Omega_{R/\mathbb{Z}}^1$$

ile tanımlıdır. Diğer taraftan,  $pR \subset m$  dir ve her  $r \in R$  için

$$d(pr) = pdr \in m\Omega_{R/\mathbb{Z}}^1$$

olur. Böylece  $\alpha$  dönüşümü yardımıyla  $K$  - *lineer*

$$\alpha' : m/m^2 + pR \longrightarrow \Omega_{R/\mathbb{Z}}^1/m\Omega_{R/\mathbb{Z}}^1 \quad \alpha'(x + m^2 + pR) = dx + m\Omega_{R/\mathbb{Z}}^1$$

dönüşümü indirgenir.

### Teorem 2.4.1

$$0 \longrightarrow m/m^2 + pR \xrightarrow{\alpha'} \Omega_{R/\mathbb{Z}}^1/m\Omega_{R/\mathbb{Z}}^1 \xrightarrow{\beta} \Omega_{K/\mathbb{Z}}^1 \longrightarrow 0 \quad (15)$$

dizisi tamdır.

**İspat.** [E.Kunz, 2002] ■

**Sonuç 2.4.2**  $m$  ve  $\Omega_{R/\mathbb{Z}}^1$  sonlu üretilmiş olsunlar. Bu durumda

$$\mu(\Omega_{R/\mathbb{Z}}^1) = e \dim R/pR + \dim_K \Omega_{K/\mathbb{Z}}^1$$

olur.

**İspat.** *Nakayama lemma*'dan

$$\mu(\Omega_{R/\mathbb{Z}}^1) = \dim_K (\Omega_{R/\mathbb{Z}}^1/m\Omega_{R/\mathbb{Z}}^1) = \dim_K (m/m^2 + pR) + \dim_K \Omega_{K/\mathbb{Z}}^1$$

elde edilir.  $\tilde{R} := R/pR$  halkası maksimal ideali  $\tilde{m} := m/pR$  olan bir lokal halkadır ve  $\tilde{R}$ 'nin kalan cismi  $K$  ile gösterilsin.

$$m/m^2 + pR = m/pR / m^2 + pR/pR = \tilde{m}/\tilde{m}^2$$

olduğundan

$$\dim_K (m/m^2 + pR) = \dim_K \tilde{m}/\tilde{m}^2 = \mu(\tilde{m}) = e \dim \tilde{R} = e \dim R/pR$$

bulunur. Böylece istenen elde edilir. ■

**Sonuç 2.4.3**  $m$  ve  $\Omega_{R/\mathbb{Z}}^1$  sonlu üretilmiş olmak üzere  $x_1, x_2, \dots, x_m \in m$  elemanları  $R/pR$ 'nin  $m/pR$  ideali için minimal üreteç kümesi olsun. Ayrıca  $y_1, \dots, y_t \in R$  elemanları için bu elemanların  $K$  içindeki kalan sınıfları  $\bar{y}_i$ ,  $p = 0$  olması durumunda  $K/\mathbb{Q}$  için bir transendental taban,  $p > 0$  olması durumunda ise  $K/K^p$  için bir  $p$ -taban olsun. Bu durumda  $\{dx_1, \dots, dx_m, dy_1, \dots, dy_t\}$  kümesi  $\Omega_{R/\mathbb{Z}}^1$  için minimal üreteç kümesi olur .

**İspat.** 2.4.2'den

$$\mu(\Omega_{R/\mathbb{Z}}^1) = e \dim R/pR + \dim_K \Omega_{K/\mathbb{Z}}^1$$

dir. Varsayımdan,  $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m\}$  elemanları  $R/pR$ 'nin minimal üreteç kümesi olduğundan  $e \dim R/pR = m$  olur. Ayrıca  $K$ 'nin  $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_m$  elemanları için 2.3.6 ve 2.3.10 göz önüne alınırsa  $\dim_K \Omega_{K/\mathbb{Z}}^1 = t$  olur. Yani  $\mu(\Omega_{R/\mathbb{Z}}^1) = m + t$  elde edilir. Buradan,  $\{dx_1, \dots, dx_m, dy_1, \dots, dy_t\}$  kümesi  $\Omega_{R/\mathbb{Z}}^1$ 'nin minimal üreteç kümesi olur. ■

$(S, n)$ , kalan cismi  $L$  olan bir lokal halka olsun.  $R$  herhangi bir halka olmak üzere  $\rho : R \longrightarrow S$  halka homomorfizması verilsin.  $p := \rho^{-1}(n)$ ,  $R$ 'nin bir asal idealidir ve  $\rho$  yardımıyla

$$\rho'(pR_p) \subset n$$

olacak şekilde

$$p' : R_p \longrightarrow S$$

bir halka homomorfizması indirgenir. 2.2.6'dan  $\Omega_{S/R}^1 = \Omega_{S/R_p}^1$  elde edilir. Buradan  $R$ 'nin maksimal ideali  $m$  olan ve  $\rho(m) \subset n$  koşulunu sağlayan bir lokal halka olduğu kabul edilebilir. Bir başka deyişle,  $S/R$  bir lokal cebirdir ve  $K := R/m$ ,  $L$ 'nin bir alt cismi olarak görülebilir.

**Teorem 2.4.4**  $(S, n)$ , kesir cismi  $L$  olan bir lokal halka;  $(R, m)$ , kesir cismi  $K$  olan bir lokal halka olmak üzere  $L$  – vektör uzaylarının

$$T' \longrightarrow T_{\mathbb{Z}}(L/K) \longrightarrow n/n^2 + mS \longrightarrow \Omega_{S/R}^1/n\Omega_{S/R}^1 \longrightarrow \Omega_{L/K}^1 \longrightarrow 0 \quad (16)$$

dizisi tamdır. Burada  $T'$

$$L \otimes_K (\Omega_{R/\mathbb{Z}}^1/m\Omega_{R/\mathbb{Z}}^1) \longrightarrow \Omega_{S/\mathbb{Z}}^1/n\Omega_{S/\mathbb{Z}}^1$$

homomorfizmasının çekirdeğidir.

**İspat.**  $K$ 'nin karakteristiği  $p$  olsun.

$$\begin{array}{ccccccc}
& & & & 0 & & 0 \\
& & & & \downarrow & & \downarrow \\
& & & & T' & & T_{\mathbb{Z}}(L/K) \\
& & & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & L \otimes_K m/m^2 + pR & \longrightarrow & L \otimes_K \Omega_{R/\mathbb{Z}}^1/m\Omega_{R/\mathbb{Z}}^1 & \longrightarrow & L \otimes_K \Omega_{K/\mathbb{Z}}^1 \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & n/n^2 + pS & \longrightarrow & \Omega_{S/\mathbb{Z}}^1/n\Omega_{S/\mathbb{Z}}^1 & \longrightarrow & \Omega_{L/\mathbb{Z}}^1 \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
& & n/n^2 + mS & \longrightarrow & \Omega_{S/R}^1/n\Omega_{S/R}^1 & \longrightarrow & \Omega_{L/K}^1 \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
& & 0 & & 0 & & 0
\end{array}$$

değişmeli diagramının ilk iki satırı 2.4.1'den tamdır. Sol sütunun tamlığı açıktır. Diğer iki sütunun tamlığı  $T'$ 'nin ve  $T_{\mathbb{Z}}(L/K)$ 'nin tanımından bulunur ve Snake lemmadan istenen dizinin tamlığı elde edilir. ■

$L/K$  ayrılabilir ise 2.3.20'den  $T_{\mathbb{Z}}(L/K) = 0$  dir. Buradan aşağıdaki sonuç elde edilir.

**Sonuç 2.4.5**  $L/K$  ayrılabilir ise

$$0 \longrightarrow n/n^2 + mS \longrightarrow \Omega_{S/R}^1/n\Omega_{S/R}^1 \longrightarrow \Omega_{L/K}^1 \longrightarrow 0$$

dizisi tamdır.

**Önteorem 2.4.6**  $(R, m)$  bir lokal halka ve  $p > 0$  herhangi bir tamsayı olsun. Bu durumda  $R^p \subset R'$  koşulunu sağlayan her  $R' \subset R$  alt halkası lokaldir ve maksimal ideali

$$m' := m \cap R'$$

olur.

**İspat.**  $R' \setminus m'$ 'nin elemanlarının  $R'$  içinde tersinir oldukları gösterilecektir.  $R' \setminus m'$ 'deki herhangi bir  $x$  elemanı  $R'$ 'de tersinirdir. Yani öyle bir  $y \in R$  vardır ki  $xy = 1$  sağlanır.

Buradan

$$x^p y^p = x x^{p-1} y^p = 1$$

olur ve burada  $x^{p-1} y^p \in R'$ 'dir. O halde  $x, R'$ 'de tersinirdir. ■

**Teorem 2.4.7**  $(S, n)$ , kalan cismi  $L$  olan bir lokal halka ve  $(R, m)$ , kalan cismi  $K$  olan bir lokal halka olmak üzere  $S/R$  bir lokal cebir olsun. Böylece  $K := R/m$ ,  $L$ 'nin bir alt cismi olarak görülebilir. Ayrıca  $K$  karakteristiği  $p$  olan bir cisim ve  $m' := m \cap R[S^p]$  olsun. Bu durumda

$$0 \longrightarrow n/n^2 + m'S \longrightarrow \Omega_{S/R}^1/n\Omega_{S/R}^1 \longrightarrow \Omega_{L/K}^1 \longrightarrow 0$$

dizisi tamdır.

**İspat.** 2.4.6'dan  $R' := R[S^p]$ , maksimal ideali  $m'$  olan bir lokal halkadır ve  $K' := K[L^p]$ ,  $R'$ 'nin kalan cismi olur.  $d, S/R$ 'nin evrensel diferansiyel operatörü olmak üzere

$$d(R[S^p]) \subset p\Omega_{S/R}^1 \subset n\Omega_{S/R}^1$$

olur. Özel olarak,  $dm' \subset n\Omega_{S/R}^1$  sağlanır. Böylece

$$n/n^2 \longrightarrow \Omega_{S/R}^1/n\Omega_{S/R}^1$$

dönüşümü yardımıyla görüntüleri aynı olan

$$n/n^2 + m'S \longrightarrow \Omega_{S/R}^1/n\Omega_{S/R}^1$$

dönüşümü indirgenir. Ayrıca,

$$\Omega_{S/R}^1/n\Omega_{S/R}^1 = \Omega_{S/R'}^1/n\Omega_{S/R'}^1 \quad \text{ve} \quad \Omega_{L/K}^1 = \Omega_{L/K[L^p]}^1 = \Omega_{L/K'}^1$$

sağlanır. 2.4.4'ten

$$T' \longrightarrow T_{\mathbb{Z}}(L/K') \longrightarrow n/n^2 + m'S \longrightarrow \Omega_{S/R'}^1/n\Omega_{S/R'}^1 \longrightarrow \Omega_{L/K'}^1 \longrightarrow 0$$

dizisi tamdır. Burada  $T'$ ,

$$L \otimes_{K'} (\Omega_{R'/\mathbb{Z}}^1/m'\Omega_{R'/\mathbb{Z}}^1) \longrightarrow \Omega_{S/\mathbb{Z}}^1/n\Omega_{S/\mathbb{Z}}^1$$

homomorfizmasının çekirdeğidir. Şimdi  $T' \longrightarrow T_{\mathbb{Z}}(L/K')$  dönüşümünün örten olduğu gösterilecektir.  $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$   $L/K'$  'nin bir  $p$ -tabanı,  $\{y_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  ise  $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  ailesinin  $S$  içindeki temsilcileri olsun. Ayrıca  $\delta_{R'}$  ve  $\delta_{K'}$  sırasıyla  $R'/\mathbb{Z}$  ve  $K'/\mathbb{Z}$ 'nin evrensel diferansiyel operatörleri olsunlar. 2.2.27'den

$$\Omega_{L/\mathbb{Z}}^1 = L \otimes_{K'} \Omega_{K'/\mathbb{Z}}^1 / \langle \{\delta_{K'}(x_\lambda^p)\}_{\lambda \in \Lambda} \rangle \oplus \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} L dx_\lambda$$

elde edilir.  $T_{\mathbb{Z}}(L/K')$ ,  $L \otimes_{K'} \Omega_{K'/\mathbb{Z}}^1$  'nin bir alt uzayıdır ve  $\{1 \otimes_{K'} \delta_{K'}(x_\lambda^p)\}_{\lambda \in \Lambda}$  elemanları ile üretilir. Diğer taraftan,  $y_\lambda^p \in R'$  dir ve  $\delta_{R'}(y_\lambda^p)$ ,

$$\Omega_{R'/\mathbb{Z}}^1 \longrightarrow \Omega_{S/\mathbb{Z}}^1/n\Omega_{S/\mathbb{Z}}^1$$

dönüşümünün çekirdeğinde kalır.  $\delta_{R'}(y_\lambda^p)$ 'nin  $\Omega_{R'/\mathbb{Z}}^1/m'\Omega_{R'/\mathbb{Z}}^1$  içindeki görüntüsü  $n_\lambda$  ile gösterilsin. Bu durumda  $1 \otimes n_\lambda \in T'$  olur ve  $1 \otimes \delta_{K'}(x_\lambda^p), 1 \otimes n_\lambda$  'nın  $T(L/K')$  içindeki görüntüsü olur. Buradan

$$T' \longrightarrow T_{\mathbb{Z}}(L/K')$$

dönüşümü örtendir. Böylece (16)'daki dizinin tamlığından istenen elde edilir. ■

## 2.5 Afin Cebirlerin Diferansiyel Operatör Modülleri

Bu bölümde  $A$  karakteristiği 0 olan bir  $K$  cismi üzerinde bir afin cebir olarak alınacak ve  $X := \text{spec}A$  ile gösterilecektir.  $A$  bir tamlık bölgesi ve  $Q(A) = L$  olsun. O zaman

$$\dim A = \text{Tr deg}(L/K) \quad (17)$$

sağlanır. Genel olarak  $p \in X$  için  $A$ 'nın  $p$ 'deki boyutu

$$\dim_p A := \dim A_p + \dim A/p = \dim A_p + \text{Tr deg}(k(p)/K) \quad (18)$$

ile tanımlanır. Ayrıca  $\dim A$ ,  $A$ 'nın asal idealler zincirinin uzunluklarının supremumu ve  $p \in X$  olduğundan

$$\dim_p A \leq \dim A$$

sağlanır.  $A_p$  bir tamlık bölgesi ve  $Q(A_p) := L$  olsun. O zaman

$$\dim_p A := \dim A_p + \text{Tr deg}(k(p)/K) = \text{Tr deg}(L/K) \quad (19)$$

elde edilir.

**Tanım 2.5.1**  $A_p$  regüler ise  $p \in X$  noktasına  $X$ 'in regüler noktası eğer  $A_p$  regüler değil ise  $p$ 'ye  $X$ 'in tekil noktası denir. Ayrıca,

$$\delta(A_p) = e \dim A_p - \dim A_p$$

değerine  $A_p/K$ 'nin regülerlikten uzaklaşma ölçüsü denir.  $k(p)/K$  ayrılabilir olsun.

2.4.5'ten ve (18)'den

$$\mu(\Omega_{A_p/K}^1) = e \dim A_p + \text{Tr deg}(k(p)/K) = e \dim A_p - \dim A_p + \dim_p A = \delta(A_p) + \dim_p A \quad (20)$$

elde edilir.

**Önteorem 2.5.2**  $R$  bir tamlık bölgesi olmak üzere kesir cismi  $L$  olsun ve  $M$  sonlu üretilmiş  $R$ -modülü alınsın. Bu durumda  $M$ 'nin serbest  $R$ -modül olması için gerek ve yeter koşul  $\dim_L L \otimes_R M = \mu(M)$  olmasıdır. Burada  $\mu(M)$ ,  $M$ 'nin minimal üreteç kümesinin eleman sayısıdır.

**İspat.** ( $\dim_L L \otimes_R M$  sayısına  $M$ 'nin rankı denir ve  $rank M$  ile gösterilir.)  $M$  bir serbest  $R$ -modül ise ispat açıktır. Tersine,  $t = \mu(M)$  olsun. Bu durumda

$$0 \longrightarrow \ker \varphi \longrightarrow R^t \xrightarrow{\varphi} M \longrightarrow 0$$

dizisi vardır. Burada  $\varphi$  dönüşümü  $\{e_i\}_{i=1}^t$  ailesi  $R^t$ 'nin bir tabanı ve  $\{m_i\}_{i=1}^t$  ailesi  $M$ 'nin minimal üreteç kümesi olmak üzere

$$\varphi(e_i) = m_i$$

dönüşümüyle tanımlıdır. Bu dizi  $L$  ile tensörlenirse,

$$0 \longrightarrow L \otimes_R \ker \varphi \longrightarrow L \otimes_R R^t \longrightarrow L \otimes_R M \longrightarrow 0$$

elde edilir.  $\dim_L L \otimes_R M = t$  olduğundan  $L \otimes_R \ker \varphi = 0$  olur. Buradan  $\ker \varphi$ ,  $R^t$ 'nin torsion alt modülüdür.  $R^t$  serbest olduğundan,  $\ker \varphi = 0$  olmalıdır. Böylece,  $M$  bir serbest  $R$ -modül olur. ■

**Teorem 2.5.3**  $K$ 'nin karakteristiği 0 olmak üzere her  $p \in X$  için aşağıdaki koşullar denktir:

- (a)  $A_p$  regüler lokal halkadır.
- (b)  $\Omega_{A_p/K}^1$  serbest  $A_p$ -modüldür.
- (c)  $\mu(\Omega_{A_p/K}^1) \leq \dim_p A$  sağlanır.

**İspat.**

(a  $\Rightarrow$  b)  $L := Q(A_p)$  olsun. (19)'dan ve (20)'den

$$\mu(\Omega_{A_p/K}^1) = \text{Tr deg}(L/K) = \dim_L(\Omega_{L/K}^1) = \dim_L(L \otimes_{A_p} \Omega_{A_p/K}^1)$$

olur. 2.5.2'den  $\Omega_{A_p/K}^1$  rankı  $\dim_p A$  olan bir serbest  $A_p$ -modüldür.

(b  $\Rightarrow$  c) Öncelikle  $R := A_p$  olmak üzere her  $q \in \text{Min}(R)$  için  $R_q$ 'nin bir cisim olduğu yani  $qR_q = 0$  olduğu gösterilecektir.  $M := qR_q$  olsun. 2.4.5'ten

$$0 \longrightarrow M/M^2 \longrightarrow \Omega_{R_q/K}^1/M\Omega_{R_q/K}^1 \longrightarrow \Omega_{k(q)/K}^1 \longrightarrow 0$$

tam dizisi vardır. Nakayama lemma'dan, her  $x \in M \setminus M^2$  için  $dx$ ,  $\Omega_{R_q/K}^1$ 'nin minimal üreteç sisteminin bir parçasıdır. Dolayısıyla  $\Omega_{R_q/K}^1 = R_q \otimes_R \Omega_{R/K}^1$ 'nin tabanının bir parçasıdır. Varsayalım ki  $M \neq (0)$  olsun ve  $x \in M \setminus M^2$  alınsın. Bu durumda  $M$ ,  $R_q$ 'nin tek asal idealidir ve  $x$  nilpotenttir. Yani öyle bir  $p > 1$  sayısı vardır ki  $x^p = 0$ ,  $x^{p-1} \neq 0$  sağlanır. Buradan

$$dx^p = px^{p-1}dx = 0$$

dır. Fakat  $K$ 'nin karakteristiği sıfırdan farklı olduğundan  $pdx^{p-1} \neq 0$  dir. Bu ise  $dx$ 'in tabanın bir parçası olmasıyla çelişir. O halde  $M = (0)$  dir.  $q \in \text{Min}(R)$  alınsın. Bu durumda

$$\dim R/q = \dim R = \dim A_p$$

sağlanır ve  $R_q$  bir cisim olduğundan

$$\begin{aligned} \mu(\Omega_{A_p/K}^1) &= \dim_{R_q}(\Omega_{R_q/K}^1) = \text{Tr deg}(R_q/K) \\ &= \dim R/q + \text{Tr deg}(k(p)/K) \\ &= \dim A_p + \text{Tr deg}(k(p)/K) \\ &= \dim_p A \end{aligned}$$

elde edilir

( $c \Rightarrow a$ )  $\dim A_p \leq e \dim A_p$  eşitliği her zaman sağlanır. (20)'den ve varsayımdan

$$\mu(\Omega_{A_p/K}^1) = e \dim A_p - \dim A_p + \dim_p A \leq \dim_p A$$

olur. Buradan da

$$e \dim A_p \leq \dim A_p$$

elde edilir. Yani  $A_p$  regüler lokal halkadır.

■

**Sonuç 2.5.4**  $A$ 'nın regüler olması için gerek ve yeter koşul  $\Omega_{A/K}^1$ 'nin projektif  $A$ -modül olmasıdır

**İspat.**  $A$  regüler olsun. Bu durumda  $p$  asal ideali için  $A_p$  regülerdir ve 2.5.3'ten  $\Omega_{A_p/K}^1$  serbest ve dolayısıyla da projektiftir. Böylece  $pd(\Omega_{A_p/K}^1) = 0$  elde edilir. Buradan  $pd(\Omega_{A/K}^1) = 0$  olur yani  $\Omega_{A/K}^1$  projektif  $A$ -modüldür. Tersine  $\Omega_{A/K}^1$  projektif  $A$ -modül olsun. Bu durumda her  $p$  asal ideali için  $\Omega_{A_p/K}^1$  projektif ve dolayısıyla serbesttir. Böylece 2.5.3'ten her  $p$  asal ideali için  $A_p$  regülerdir. Buradan  $A$  regüler olur. ■

$A/K$  için

$$A = K[X_1, X_2, \dots, X_n]/(F_1, F_2, \dots, F_m) = K[x_1, x_2, \dots, x_n] \quad (21)$$

gösterimi göz önüne alınsın. Burada  $x_i, X_i$ 'nin  $A$ 'daki görüntüsü,  $p \in \text{spec}(A)$  ve  $\xi_i, x_i$ 'nin  $k(p)$ 'deki görüntüsüdür. Ayrıca  $\frac{\partial F_k}{\partial X_i}$ 'nin  $A$ 'daki görüntüsü  $\frac{\partial F_k}{\partial x_i}$  ile,  $k(p)$ 'deki görüntüsü ise  $\frac{\partial F_k}{\partial \xi_i}$  ile gösterilsin. (21)'den

$$\Omega_{A_p/K}^1 = \bigoplus_{i=1}^n A_p dX_i / U \quad (22)$$

olur. Burada  $U$ ,

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial F_k}{\partial x_i} dX_i \quad (k = 1, \dots, m)$$

ile üretilir.

$$J(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \xi_1} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial F_1}{\partial \xi_n} \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \frac{\partial F_m}{\partial \xi_1} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial F_m}{\partial \xi_n} \end{pmatrix}$$

matrisine (21)'deki gösteriminin  $p$  noktasındaki Jakobien matrisi denir.

**Teorem 2.5.5** Her  $p \in X$  için aşağıdakiler sağlanır:

(a)  $rank(J(p)) \leq n - \dim_p A$

(b)  $p \in Reg(A)$  olması için gerek ve yeter koşul

$$rank(J(p)) = n - \dim_p A$$

olmasıdır.

**İspat.**  $\mu(\Omega_{A_p/K}^1) = e \dim A_p + Tr \deg(k(p)/K)$  sağlanır. Diğer taraftan (22)'den

$$\Omega_{A_p/K}^1/p\Omega_{A_p/K}^1 \cong \bigoplus_{i=1}^n k(p)dX_i/\bar{U}$$

olur. Burada  $\bar{U}$ ,

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial F_k}{\partial \xi_i} dX_i \quad (k = 1, \dots, m)$$

ile üretilir. Böylece

$$\mu(\Omega_{A_p/K}^1) = n - rank(J(p))$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} rank(J(p)) &= n - \mu(\Omega_{A_p/K}^1) \\ &= n - (e \dim A_p + Tr \deg(k(p)/K)) \\ &= n - (e \dim A_p - \dim A_p) - (\dim A_p + Tr \deg(k(p)/K)) \\ &= n - \delta(A_p) - \dim_p A \end{aligned}$$

sağlanır. Buradan

$$rank(J(p)) \leq n - \dim_p A$$

olur. Eğer  $A_p$  regüler ise  $\delta(A_p) = 0$  olacağından istenen eşitlik elde edilir. ■

### 3 n.Mertebeden Diferansiyel Operatörler ve Evrensel Modülleri

#### 3.1 n. Mertebeden Diferansiyel Operatörlerin Temel Özellikleri

**Tanım 3.1.1**  $R$  bir  $R_0$ -cebir ve  $M, N$   $R$ -modülleri verilsin. Ayrıca  $n \in \mathbb{N}$  olmak üzere  $I_n := \{0, 1, \dots, n\}$  ile gösterilsin. Aşağıdaki koşulları sağlayan bir

$$D : M \longrightarrow N$$

dönüşümüne  $n$ . meretebeden  $R_0$ -diferansiyel operatör denir.

(a)  $D$   $R_0$  - lineerdir.

(b) (Çarpım kuralı)  $a_0, a_1, \dots, a_n \in R$  ve  $m \in M$  için

$$\sum_{H \subset I_n} (-1)^{|H|} \prod_{i \in H} a_i D\left(\prod_{i \notin H} a_i m\right) = 0$$

sağlanır.

3.1.1(b)'deki çarpım kuralı

$$D\left(\prod_{i=0}^n a_i m\right) = \sum_{H \subset I_n, H \neq \emptyset} (-1)^{|H|-1} \prod_{i \in H} a_i D\left(\prod_{i \notin H} a_i m\right) \quad (23)$$

olarak da yazılabilir.

$M$ 'den  $N$ 'ye  $n$ . mertebeden tüm diferansiyel operatörlerin kümesi  $D_{R/R_0}^n(M, N)$  ile gösterilir. Özel olarak  $M = N = R$  alınırsa  $R/R_0$ 'ın  $n$ .mertebeden tüm diferansiyel operatörlerinin kümesi elde edilir ve  $D_{R_0}^n(R)$  ile gösterilir. Sıfırdan küçük her  $n \in \mathbb{Z}$  için

$$D_{R/R_0}^n(M, N) = 0$$

olarak tanımlansın.

**Örnek 3.1.2** Her  $n \in \mathbb{N}$  için  $\text{Hom}_R(M, N) \subset D_{R/R_0}^n(M, N)$  sağlanır.  $D \in \text{Hom}_R(M, N)$  için 3.1.1'deki çarpım kuralının sağlandığı açıktır.

**Örnek 3.1.3**  $Hom_R(M, N) = D_{R/R_0}^0(M, N)$  sağlanır. Gerçekten de  $a_0 \in R$  olmak üzere  $n = 0$  için çarpım kuralı uygulanırsa

$$(-1)^0 D(a_0 m) + (-1)^1 a_0 D(m) = 0$$

olur. Buradan da

$$D(a_0 m) = a_0 D(m)$$

elde edilir. Yani

$$D_{R/R_0}^0(M, N) \subseteq Hom_R(M, N)$$

olur ve 3.1.2 göz önüne alınırsa istenen eşitlik elde edilir.

**Örnek 3.1.4**  $Der_{R_0}^1(R, N) \subset D_{R/R_0}^1(R, N)$  olur. Gerçekten de  $a_0, a_1, r \in R$  ve  $D \in Der_{R_0}^1(R, N)$  olmak üzere

$$D(a_0 a_1 r) = a_1 r D(a_0) + a_0 r D(a_1) + a_0 a_1 D(r)$$

olur. Ayrıca  $i \in \{0, 1\}$  için

$$r D(a_i) = D(a_i r) - a_i D(r)$$

sağlanır. Böylece  $n = 1$  için çarpım kuralı

$$D(a_0 a_1 r) = a_0 D(a_1 r) + a_1 D(a_0 r) - a_0 a_1 D(r)$$

elde edilir. Yani  $D \in D_{R/R_0}^1(R, N)$  olur.

**Önerme 3.1.5**  $n$  sıfırdan büyük bir tam sayı olmak üzere  $D \in \text{Hom}_{R_0}(M, N)$  alınsın ve  $a \in R$  için

$$[D, a] : M \longrightarrow N$$

dönüşümü

$$[D, a](m) = D(am) - aD(m) \quad (m \in M)$$

ile tanımlansın. Bu durumda

$$D \in D_{R/R_0}^n(M, N)$$

olması için gerek ve yeter koşul her  $a \in R$  için

$$[D, a] \in D_{R/R_0}^{n-1}(M, N)$$

olmasıdır.

**İspat.**  $D \in D_{R/R_0}^n(M, N)$  ve  $a_n \in R$  olmak üzere

$$\begin{aligned} [D, a_n] \left( \left( \prod_{i=0}^{n-1} a_i \right) m \right) &= D \left( a_n \prod_{i=0}^{n-1} a_i m \right) - a_n D \left( \left( \prod_{i=0}^{n-1} a_i \right) m \right) \\ &= \sum_{H \subset I_{n-1}, H \neq \emptyset} (-1)^{|H|-1} \prod_{i \in H} a_i [D, a_n] \left( \prod_{i \notin H} a_i m \right) \end{aligned}$$

sağlanır. Buradan  $[D, a_n] \in D_{R/R_0}^{n-1}(M, N)$  elde edilir. Tersine her  $a \in R$  için

$[D, a] \in D_{R/R_0}^{n-1}(M, N)$  olsun.  $a = a_n$  olarak alınırsın ve  $[D, a_n]$ 'e çarpım kuralı uygulanırsa,

$$\begin{aligned} [D, a_n] \left( \left( \prod_{i=0}^{n-1} a_i \right) m \right) &= \sum_{H \subset I_{n-1}, H \neq \emptyset} (-1)^{|H|-1} \prod_{i \in H} a_i [D, a_n] \left( \prod_{i \notin H} a_i m \right) \\ &= \sum_{H \subset I_{n-1}, H \neq \emptyset} (-1)^{|H|-1} \prod_{i \in H} a_i D \left( a_n \prod_{i \notin H} a_i m \right) \\ &\quad - \sum_{H \subset I_{n-1}, H \neq \emptyset} (-1)^{|H|-1} \prod_{i \in H} a_i \cdot a_n D \left( \prod_{i \notin H} a_i m \right) \end{aligned}$$

olur. Buradan,

$$\begin{aligned} D \left( \prod_{i=0}^n a_i m \right) &= a_n D \left( \prod_{i=0}^{n-1} a_i m \right) + \sum_{H \subset I_{n-1}, H \neq \emptyset} (-1)^{|H|-1} \prod_{i \in H} a_i D \left( a_n \prod_{i \notin H} a_i m \right) \\ &\quad - \sum_{H \subset I_{n-1}, H \neq \emptyset} (-1)^{|H|-1} \prod_{i \in H} a_i \cdot a_n D \left( \prod_{i \notin H} a_i m \right) \end{aligned}$$

ve

$$D \left( \prod_{i=0}^n a_i m \right) = \sum_{H \subset I_n, H \neq \emptyset} (-1)^{|H|-1} \prod_{i \in H} a_i D \left( \prod_{i \notin H} a_i m \right)$$

elde edilir. Yani  $D \in D_{R/R_0}^n(M, N)$  olur. ■

**Sonuç 3.1.6**  $D_{R/R_0}^n(M, N)$ ,  $Hom_{R_0}(M, N)$  'nin bir alt  $R$ -modülüdür.

**İspat.** İspat  $n$  üzerinde tümevarımla yapılacaktır.  $n = 0$  için

$$D_{R/R_0}^n(M, N) = Hom_R(M, N)$$

olup bu bir  $R$ -modüldür. Önermenin  $n - 1$  için doğru olduğu kabul edilsin.

$f, g \in D_{R/R_0}^n(M, N)$  ve  $r, s \in R$  olmak üzere

$$[f + g, r] = (f + g)(r) - r(f + g) = [f, r] + [g, r]$$

sağlanır. Burada  $[f, r], [g, r] \in D_{R/R_0}^{n-1}(M, N)$  dir ve varsayımdan  $[f + g, r] \in D_{R/R_0}^{n-1}(M, N)$  olur. Böylece  $f + g \in D_{R/R_0}^n(M, N)$  elde edilir. Diğer taraftan,

$$[sf, r] = (sf)(r) - rsf = sf(r) - rsf = s[f, r]$$

sağlanır.  $[f, r] \in D_{R/R_0}^{n-1}(M, N)$  olduğundan varsayımdan  $[sf, r] \in D_{R/R_0}^{n-1}(M, N)$  dir.

Buradan  $sf \in D_{R/R_0}^n(M, N)$  elde edilir. ■

**Sonuç 3.1.7** Her  $n$  tam sayısı için

$$D_{R/R_0}^n(M, N) \subseteq D_{R/R_0}^{n+1}(M, N)$$

sağlanır.

**İspat.** İspat  $n$  üzerinde tümevarımla yapılacaktır. Sıfırdan küçük  $n$  tam sayıları için  $D_{R/R_0}^n(M, N) = 0$  olarak tanımlandığından  $n < 0$  için teoremin ispatı açıktır.

$n = 0$  için  $D \in D_{R/R_0}^0(M, N) = Hom_R(M, N)$  olsun.  $a \in R$  için

$$[D, a](m) = D(am) - aD(m) = 0 \in Hom_R(M, N)$$

olur. Buradan  $D \in D_{R/R_0}^1(M, N)$  elde edilir. Önermenin  $n - 1$  için doğru olduğu kabul edilsin.  $D \in D_{R/R_0}^n(M, N)$  olmak üzere her  $a \in R$  için 3.1.5'ten

$$[D, a] \in D_{R/R_0}^{n-1}(M, N)$$

bulunur. Varsayımdan  $[D, a] \in D_{R/R_0}^n(M, N)$ 'dir. Böylece  $D \in D_{R/R_0}^{n+1}(M, N)$  sağlanır.

■

**Sonuç 3.1.8**  $M, N$  ve  $P$   $R$ -modülleri verilsin. Buradan  $D \in D_{R/R_0}^n(M, N)$  ve  $D' \in D_{R/R_0}^m(N, P)$  diferansiyel operatörleri için

$$D' \circ D \in D_{R/R_0}^{n+m}(M, P)$$

olur.

**İspat.** İspat  $m+n$  üzerinde tümevarımla yapılacaktır. Öncelikle,  $m+n = 0$  alınsın. Bu durumda  $D \in Hom_R(M, N)$ ,  $D' \in Hom_R(N, P)$  olur ve  $D' \circ D \in Hom_R(M, P)$  sağlanır.  $m+n-1$  için ifadenin doğru olduğu varsayılınsın.  $D \in D_{R/R_0}^n(M, N)$  ve  $D' \in D_{R/R_0}^m(N, P)$  olmak üzere her  $a \in R$  ve  $m \in M$  için

$$\begin{aligned} [D' \circ D, a](m) &= D'(D(am)) - aD'(Dm) \\ &= D'(D(am) - aDm) + D'(aDm) - aD'(Dm) \\ &= (D' \circ [D, a] + [D', a] \circ D)(m) \end{aligned}$$

olur. Böylece,

$$[D' \circ D, a] = D' \circ [D, a] + [D', a] \circ D$$

elde edilir. Burada  $[D, a] \in D_{R/R_0}^{n-1}(M, N)$ ,  $[D', a] \in D_{R/R_0}^{m-1}(N, P)$  dir ve tümevarım hipotezinden

$$[D' \circ D, a] \in D_{R/R_0}^{m+n-1}(M, P)$$

olur. Yani  $D' \circ D \in D_{R/R_0}^{m+n}(M, P)$  elde edilir. ■

$n$  herhangi bir doğal sayı olmak üzere  $n$ . mertebeden bütün  $R_0$ -diferansiyel operatörlerin kümesi

$$D_{R/R_0}(M, N) := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_{R/R_0}^n(M, N)$$

ile tanımlanır. Benzer şekilde,  $M = N = R$  için

$$D_{R_0}(R) := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_{R_0}^n(R)$$

olur ve  $D_{R_0}^0(R) = Hom_R(R, R) \cong R$  olduğundan bu bir  $R$ -cebirdir.

$R$  bir  $R_0$ -cebir olmak üzere  $M$  ve  $N$   $R$ -modülleri verilsin ve  $Hom_{R_0}(M, N)$  kümesi  $M$ 'den  $N$ 'ye tanımlı bütün  $R_0$ -lineer dönüşümlerin kümesi olsun.

$D \in \text{Hom}_{R_0}(M, N)$ ,  $r \in R$  ve  $m \in M$  olmak üzere

$$rD : m \longrightarrow rD(m)$$

ve

$$Dr : m \longrightarrow D(rm)$$

ile tanımlanan dönüşümlerle  $\text{Hom}_{R_0}(M, N)$  bir  $R - R$  bimodül olur. Herhangi bir  $R$  halkasının kendisi üzerinde tensör çarpımı  $R \otimes_{R_0} R$  göz önüne alınsın.

$r_i, r_j, s_i, s_j \in R$  olmak üzere

$$\left( \sum_i r_i \otimes s_i \right) \cdot \left( \sum_j r_j \otimes s_j \right) = \sum_{i,j} r_i r_j \otimes s_i s_j$$

ile tanımlanan işlemle  $R \otimes_{R_0} R$  bir  $R_0 - \text{cebiri}$  olur. Her  $r, s \in R$ ,  $m \in M$  ve  $D \in \text{Hom}_{R_0}(M, N)$  için

$$(r \otimes s).D : m \longrightarrow rD(sm)$$

biçiminde tanımlanan dönüşümle  $\text{Hom}_{R_0}(M, N)$  bir  $R \otimes_{R_0} R$ -modül olur. Tanımdan

$$[r(Ds)](m) = [(r \otimes s)D](m) = [(rD)s](m)$$

sağlanır. Ayrıca her  $a \in R$  ve her  $m \in M$  için

$$\begin{aligned} [D, a](m) &= D(am) - aD(m) \\ &= Da(m) - aD(m) \\ &= (1 \otimes a)D(m) - (a \otimes 1)D(m) \\ &= (1 \otimes a - a \otimes 1)D(m) \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$[D, a] = (1 \otimes a - a \otimes 1)D$$

elde edilir.

$D$ ,  $n$ . mertebeden herhangi bir diferansiyel operatör olmak üzere 3.1.5'teki önerme göz önüne alınırsa her  $r_0, r_1, \dots, r_n \in R$  için

$$[\dots [[ [D, r_0], r_1 ], r_2 ], \dots, r_n] = 0$$

olur. Buradaki  $[\dots [[ [D, r_0], r_1 ], r_2 ], \dots, r_n]$  ifadesi yerine kolaylık olması açısından  $[D, r_0, r_1, \dots, r_n]$  yazılacaktır.

$I, R \otimes_{R_0} R$ 'nin bir ideali olsun.  $n \geq 1$  olmak üzere  $r_0, r_1, \dots, r_n \in R$  için  $I^{n+1}$  ideali,

$$\prod_{i=0}^n (1 \otimes r_i - r_i \otimes 1)$$

elemanlarıyla üretilir. Ayrıca

$$\prod_{i=0}^n (1 \otimes r_i - r_i \otimes 1) = \sum_{H \subseteq \{0,1,\dots,n\}} (-1)^{|H|} r_H \otimes r_{H'}$$

olur. Burada  $H', H$  'nin tümleyeni ve  $r_H = \prod_{k \in H} r_k$ 'dir.

**Önerme 3.1.9**  $M$  ve  $N$   $R$ -modül olmak üzere  $D, M$ 'den  $N$ 'ye  $R_0$ -lineer dönüşüm olsun. Bu durumda  $D$ 'nin  $n$ . mertebeden bir  $R_0$ -diferansiyel operatör olması için gerek ve yeter koşul  $I^{n+1}D = 0$  olmasıdır.

**İspat.**  $D \in \text{Hom}_{R_0}(M, N)$  olmak üzere,  $m \in M$  ve  $r_0, r_1, \dots, r_n \in R$  için

$$\begin{aligned} D \in D_{R/R_0}^n(M, N) &\iff [D, r_0, r_1, \dots, r_n](m) = 0 \\ &\iff \left[ \prod_{i=0}^n (1 \otimes r_i - r_i \otimes 1) D \right](m) = 0 \\ &\iff I^{n+1}D = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. ■

$M$  bir  $R$ -modül olmak üzere  $R \otimes_{R_0} M$  tensör çarpımı göz önüne alınsın. Her  $r \otimes s \in R \otimes_{R_0} R$  ve  $r' \otimes m \in R \otimes_{R_0} M$  için

$$(r \otimes s)(r' \otimes m) = rr' \otimes sm$$

ile tanımlanan işlemle  $R \otimes_{R_0} M$  üzerinde bir  $R \otimes_{R_0} R$ -modül yapısı kurulabilir. O zaman her  $n \geq 1$  için  $R \otimes_{R_0} M / I^{n+1}(R \otimes_{R_0} M)$  bölüm modülü tanımlıdır.

$$i : M \longrightarrow R \otimes_{R_0} M$$

dönüşümü  $i(m) = 1 \otimes m$  ile

$$p : R \otimes_{R_0} M \longrightarrow R \otimes_{R_0} M / I^{n+1}(R \otimes_{R_0} M)$$

dönüşümü ise  $p(r \otimes m) = r \otimes m + I^{n+1}(R \otimes_{R_0} M)$  ile tanımlansın. O zaman

$$pi : M \longrightarrow R \otimes_{R_0} M / I^{n+1}(R \otimes_{R_0} M)$$

dönüşümü  $R_0$ -lineerdir.

**Örnek 3.1.10**  $p_i$ ,  $n$ . mertebeden bir  $R_0$ -diferansiyel operatördür.

**İspat.**  $I^{n+1}p_i = 0$  olduğundan 3.1.9'dan  $p_i$ ,  $n$ . mertebeden bir  $R_0$ -diferansiyel operatör olur. ■

**Örnek 3.1.11**  $s$  sabit bir doğal sayı olmak üzere

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_s), \beta = (\beta_1, \dots, \beta_s) \in \mathbb{N}^s$$

alınsın. Ayrıca

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_s, \alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_s!$$

ile gösterilsin.  $R = R_0[X_1, X_2, \dots, X_s]$  bir polinomlar cebiri ve  $\delta_{i,j}$  Kroneker Delta fonksiyonu olmak üzere

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial X_i} : R \longrightarrow R, \partial_i(X_j) = \delta_{i,j} \quad i, j = 1, \dots, s$$

ile tanımlansın. Bu durumda  $X^\beta = X_1^{\beta_1} X_2^{\beta_2} \dots X_s^{\beta_s} \in R$  için  $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_s^{\alpha_s}$ ,

$$\partial^\alpha(X^\beta) = \begin{cases} \beta! / (\beta - \alpha)! X^{\beta - \alpha} & , \text{ eğer } \beta \geq \alpha \text{ ise} \\ 0 & , \text{ diğer durumlarda} \end{cases}$$

ile tanımlı dönüşüm  $|\alpha|$ . mertebeden bir diferansiyel operatördür.

### 3.2 n. Mertebeden Diferansiyel Operatörler ve Evrensel Modülleri

**Tanım 3.2.1**  $M$  ve  $N$   $R$ -modülleri verilsin. Her  $K$   $R$ -modülü ve her  $f : M \longrightarrow K$   $n$ . mertebeden diferansiyel operatörü için

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & K \\ \Delta_n \downarrow & & \downarrow id \\ N & \xrightarrow{\alpha} & K \end{array}$$

diagramı değişmeli olacak şekilde tek bir

$$\alpha : N \longrightarrow K$$

$R$ -modül homomorfizması var ise

$$\Delta_n : M \longrightarrow N$$

dönüşümüne  $n$ . mertebeden evrensel diferansiyel operatör denir.

Buradaki  $N$  modülüne  $M$ 'nin  $n$ . mertebeden evrensel diferansiyel operatör modülü denir ve  $J_n(M)$  ile gösterilir.

**Teorem 3.2.2**  $M$  bir  $R$ -modül olmak üzere

$$M \xrightarrow{i} R \otimes_{R_0} M \xrightarrow{p} R \otimes_{R_0} M / I^{n+1}(R \otimes_{R_0} M)$$

$\pi(m) = 1 \otimes m + I^{n+1}(R \otimes_{R_0} M)$  ile tanımlı dönüşüm  $n$ . mertebeden evrensel diferansiyel operatördür.

**İspat.**  $K$  bir  $R$ -modül ve  $f : M \longrightarrow K$   $n$ . mertebeden herhangi bir diferansiyel operatör olsun.

$$F : R \otimes_{R_0} M \longrightarrow K, F(r \otimes m) = rf(m)$$

ile tanımlanan  $R$ -modül homomorfizması  $F \circ i = f$  koşulunu sağlar.  $f$ ,  $n$ . mertebeden bir diferansiyel operatör olduğundan  $I^{n+1}f = 0$  dir ve böylece

$$F(I^{n+1}(R \otimes_{R_0} M)) = 0$$

sağlanır. Buradan,

$$\bar{F} : R \otimes_{R_0} M / I^{n+1}(R \otimes_{R_0} M) \longrightarrow K, \bar{F}(r \otimes m + I^{n+1}(R \otimes_{R_0} M)) = F(r \otimes m) = rf(m)$$

ile tammlı ve  $\bar{F}p = F$  koşulunu sağlayan tek bir  $\bar{F}$  dönüşümü indirgenir. Ayrıca

$$\bar{F}pi = Fi = f$$

sağlanır. Yani  $pi$  diferansiyel operatörü evrenseldir. ■

**Teorem 3.2.3**  $M$  bir  $R$ -modül olmak üzere  $\Delta'_n : M \longrightarrow J'_n(M)$  dönüşümü evrensellik özelliğini sağlasın. Bu durumda

$$\alpha : J_n(M) \longrightarrow J'_n(M)$$

dönüşümü  $\Delta'_n = \alpha \circ \Delta_n$  koşulunu sağlar ve bir  $R$ -modül izomorfizmasıdır.

**İspat.**  $\Delta'_n : M \longrightarrow J'_n(M)$  dönüşümü evrensellik özelliğini sağladığından

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\Delta'_n} & J'_n(M) \\ \Delta_n \downarrow & & \downarrow id \\ J_n(M) & \xrightarrow{\alpha} & J'_n(M) \end{array} \quad \text{ve} \quad \begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\Delta_n} & J_n(M) \\ \Delta'_n \downarrow & & \downarrow id \\ J'_n(M) & \xrightarrow{\beta} & J_n(M) \end{array}$$

değişmeli diagramları vardır ve

$$\alpha \circ \Delta_n = \Delta'_n \quad \text{ve} \quad \beta \circ \Delta'_n = \Delta_n$$

sağlanır. Buradan her  $m \in M$  için

$$\beta\alpha\Delta_n(m) = \Delta_n(m)$$

ve

$$\alpha\beta\Delta'_n(m) = \Delta'_n(m)$$

olur. Diğer taraftan,  $1_{J_n(M)}$  ve  $1_{J'_n(M)}$  birim dönüşümleri her  $m \in M$  için

$$1_{J_n(M)}\Delta_n(m) = \Delta_n(m) \quad \text{ve} \quad 1_{J'_n(M)}\Delta'_n(m) = \Delta'_n(m)$$

eşitliklerini sağlar ve evrensel diferansiyel operatörün özelliğinden  $\alpha\beta = 1_{J'_n(M)}$  ve  $\beta\alpha = 1_{J_n(M)}$  elde edilir. Yani  $\alpha$  bir izomorfizmadır. ■

**Önerme 3.2.4**  $M$  ve  $N$   $R$ -modülleri verilsin. Bu durumda

$$\Phi : \text{Hom}_R(J_n(M), N) \longrightarrow D_{R/R_0}^n(M, N) \quad (\alpha \longrightarrow \alpha\Delta_n)$$

dönüşümü bir  $R$ -modül izomorfizmasıdır.

**İspat.**  $\alpha \in \text{Hom}_R(J_n(M), N)$  olmak üzere 3.1.8'den  $\alpha\Delta_n \in D_{R/R_0}^n(M, N)$  olur.  $J_n(M)$  evrensel olduğundan  $\Phi$  örtendir.  $\Phi(\alpha) = 0$  olsun. O halde her  $m \in M$  için  $\alpha\Delta_n(m) = 0$  olur. Yani  $\alpha(J_n(M)) = 0$  dir ve buradan  $\alpha = 0$  elde edilir. Böylece  $\Phi$ 'nin birebirliği elde edilmiş olur. ■

**Sonuç 3.2.5**  $D_{R/R_0}^n(R, R) = \text{Hom}_R(J_n(R), R)$  sağlanır.

Aşağıdaki teoremdede  $M$  herhangi bir  $R$ -modül olmak üzere  $J_n(R) = R \otimes_{R_0} R / I^{n+1}$  ve  $J_n(M) = R \otimes_{R_0} M / I^{n+1}(R \otimes_{R_0} M)$  arasındaki ilişki gösterilecektir.

**Teorem 3.2.6**  $M$  bir  $R$ -modül olsun. O zaman her  $r, s \in R$  ve her  $m \in M$  için

$$J_n(M) \longrightarrow J_n(R) \otimes_R M \quad , \quad r \otimes sm + I^{n+1}(R \otimes_{R_0} M) \longrightarrow (r \otimes s + I^{n+1}) \otimes_R m$$

ile tanımlı dönüşüm bir izomorfizmadır.

**İspat.**  $p : M \longrightarrow R \otimes_R M$  doğal izomorfizma olsun. Bu dönüşüm

$$J_n(M) \cong J_n(R \otimes_R M)$$

izomorfizmasını indirger. Tanımdan,

$$J_n(R \otimes_R M) = R \otimes_{R_0} (R \otimes_R M) / I^{n+1}(R \otimes_{R_0} (R \otimes_R M))$$

olur. Burada  $I^{n+1}$  ideali  $r_0, r_1, \dots, r_n \in R$  olmak üzere

$$\prod_{i=0}^n (1 \otimes r_i - r_i \otimes 1)$$

elemanları tarafından üretilir. Diğer taraftan,

$$I^{n+1}(R \otimes_{R_0} (R \otimes_R M)) = I^{n+1} \otimes_R M$$

olduğundan

$$J_n(R \otimes_R M) = (R \otimes_{R_0} R) \otimes_R M / I^{n+1} \otimes_R M$$

olur ve buradan

$$J_n(M) \cong J_n(R) \otimes_R M$$

elde edilir. ■

**Sonuç 3.2.7**  $\{M_i\}_{i \in I}$  ve  $N$   $R$ -modülleri verilsin. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır:

$$(i) \quad J_n\left(\bigoplus_i M_i\right) \cong \bigoplus_i J_n(M_i)$$

(ii)  $\{M_i\}$   $R$ -modüllerin sonlu bir ailesi olmak üzere

$$D_{R/R_0}^n\left(\bigoplus_i M_i, N\right) \cong \bigoplus_i D_{R/R_0}^n(M_i, N)$$

sağlanır.

**İspat.**

(i) 3.2.6'dan  $J_n\left(\bigoplus_i M_i\right) \cong J_n(R) \otimes_R \left(\bigoplus_i M_i\right)$  olur. Buradan

$$J_n(R) \otimes_R \left(\bigoplus_i M_i\right) \cong \bigoplus_i (J_n(R) \otimes_R M_i) \cong \bigoplus_i J_n(M_i)$$

elde edilir.

(ii)  $\{M_i\}$   $R$ -modüllerin sonlu bir ailesi olsun. 3.2.4'ten

$$D_{R/R_0}^n\left(\bigoplus_i M_i, N\right) \cong \text{Hom}_R\left(J_n\left(\bigoplus_i M_i\right), N\right)$$

olur. (i)'den

$$\begin{aligned} D_{R/R_0}^n\left(\bigoplus_i M_i, N\right) &\cong \text{Hom}_R\left(\bigoplus_i J_n(M_i), N\right) \\ &\cong \bigoplus_i \text{Hom}_R(J_n(M_i), N) \\ &\cong \bigoplus_i D_{R/R_0}^n(M_i, N) \end{aligned}$$

elde edilir.

■

$R \otimes_{R_0} R \longrightarrow R$  ( $\sum_i a_i \otimes b_i \longrightarrow \sum_i a_i b_i$ ) ile tanımlanan dönüşümden indirgenen

$$f : J_n(R) \longrightarrow R$$

dönüşümü göz önüne alınsın.

$$\Omega_{R/R_0}^n := I/I^{n+1}$$

olmak üzere  $\Omega_{R/R_0}^n = \ker f$  olur. Buradan

$$J_n(R)/\Omega_{R/R_0}^n \cong R$$

dir. O halde

$$J_n(R) \cong R \oplus \Omega_{R/R_0}^n$$

elde edilir.

**Örnek 3.2.8**  $J_0(R) = R \otimes_{R_0} R/I \cong R$  sağlanır ve her  $a \in R$  için  $\Delta_0(a) = a$  olur.

**Örnek 3.2.9**  $J_1(R) = R \oplus I/I^2 = R \oplus \Omega_{R/R_0}^1$  olur. Her  $a \in R$  için

$\Delta_1(a) = a + d_{R/R_0}^1 a$  elde edilir. Burada  $d_{R/R_0}^1 : R \longrightarrow \Omega_{R/R_0}^1$  1.mertebeden diferansiyel operatördür.

**Önerme 3.2.10**  $R/R_0$  bir cebir ve  $n$  bir pozitif doğal sayı olmak üzere  $J_n(R)$ 'nin sonlu üretilmiş olması için gerek ve yeter koşul  $\Omega_{R/R_0}^1$ 'in sonlu üretilmiş olmasıdır.

**İspat.**  $n = 1$  için  $J_1(R) = R \oplus \Omega_{R/R_0}^1$  olduğundan önermenin doğruluğu açıktır.  $n \geq 2$  için  $J_n(R)$  sonlu üretilmiş olsun.

$$\pi : J_n(R) = R \otimes_{R_0} R/I^{n+1} \longrightarrow \frac{R \otimes_{R_0} R/I^{n+1}}{I^2/I^{n+1}}$$

doğal homomorfizması göz önüne alınırsa  $J_1(R) = \Omega_{R/R_0}^1 \oplus R$ ,  $J_n(R)$ 'nin homomorfik görüntüsü olduğundan sonlu üretilmiştir. Buradan  $\Omega_{R/R_0}^1$ , sonlu üretilmiş olur. Tersine  $\Omega_{R/R_0}^1 = I/I^2$  sonlu üretilmiş olsun. Tümevarımla  $I/I^{n+1}$  sonlu üretilmiştir. Buradan  $J_n(R) = R \oplus I/I^{n+1}$   $R$ -modül olarak sonlu üretilmiş olur. ■

### 3.3 Bölüm Halkalarının ve Lokal Halkaların Evrensel Diferansiyel Operatörleri

$R$  ve  $S$  birer  $R_0$ -cebir olmak üzere  $h : R \longrightarrow S$  bir cebir homomorfizması olsun. Ayrıca  $\Delta_n : R \longrightarrow J_n(R)$  ve  $\delta_n : S \longrightarrow J_n(S)$  sırasıyla  $R$  ve  $S$  'nin  $n$ . mertebeden evrensel diferansiyel operatörleri olsunlar. Bu durumda  $J_n(S)$ 'nin  $R$ -modül yapısı göz önüne alınırsa  $\delta_n h \in D_{R/R_0}^n(R, J_n(S))$  elde edilir.  $J_n(R)$ 'nin evrensellik özelliğinden

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{h} & S \\ \Delta_n \downarrow & & \downarrow \delta_n \\ J_n(R) & \xrightarrow{h^*} & J_n(S) \end{array}$$

diagramı değişmeli olacak şekilde

$$h^* : J_n(R) \longrightarrow J_n(S)$$

$R$ -modül homomorfizması vardır. Bu dönüşüm yardımıyla

$$\theta : S \otimes_R J_n(R) \longrightarrow J_n(S), \quad \theta\left(\sum_i s_i \otimes \Delta_n(r_i)\right) = \sum_i s_i \delta_n(h(r_i)) \quad (s_i \in S, r_i \in R)$$

$S$ -homomorfizması tanımlanabilir.  $I, R$ 'nin bir ideali olmak üzere  $S = R/I$  alınsın.

$$R/I \otimes_R J_n(R) \cong J_n(R)/IJ_n(R)$$

izomorfizması göz önüne alınarak  $s_i \in S$  ve  $x_i \in R$  olmak üzere  $\theta$  dönüşümü

$$\theta\left(\overline{\sum_i s_i \Delta_n(x_i)}\right) = \sum_i s_i \delta_n(\overline{x_i})$$

ile tanımlanır.

**Önerme 3.3.1**  $R$  bir  $R_0$ -cebir olmak üzere  $I, R$ 'nin bir ideali ve  $S = R/I$  olsun. Ayrıca  $N, J_n(R)$ 'nin  $x \in I$  için  $\Delta_n(x)$  elemanlarıyla üretilen bir alt modülü olsun. Bu durumda  $R/I$ -modüllerin

$$0 \longrightarrow N + IJ_n(R)/IJ_n(R) \longrightarrow J_n(R)/IJ_n(R) \xrightarrow{\theta} J_n(R/I) \longrightarrow 0$$

dizisi tamdır.

**İspat.** Önermeyi ispatlamak için

$$N + IJ_n(R)/IJ_n(R) = \ker \theta$$

olduğunu göstermek yeterlidir.  $\theta$ 'nın tanımından  $\theta$  örtendir ve  $N + IJ_n(R)/IJ_n(R) \subseteq \ker \theta$  sağlanır. Böylece  $\theta$  yardımıyla tek bir

$$\bar{\theta} : J_n(R)/IJ_n(R) / N + IJ_n(R)/IJ_n(R) \longrightarrow J_n(R/I)$$

$R/I$ -homomorfizması indirgenir ve  $\ker \bar{\theta} = \ker \theta / N + IJ_n(R)/IJ_n(R)$  sağlanır.  $\pi_1$  ve  $\pi_2$  doğal dönüşümler olmak üzere

$$R \xrightarrow{\Delta_n} J_n(R) \xrightarrow{\pi_1} J_n(R)/IJ_n(R) \xrightarrow{\pi_2} J_n(R)/IJ_n(R) / N + IJ_n(R)/IJ_n(R)$$

dizisi göz önüne alınsın. Bu durumda 3.1.8'den  $\pi_2\pi_1\Delta_n$  dönüşümü  $n$ .mertebeden bir diferansiyel operatördür. Diğer taraftan her  $x \in I$  için  $\pi_2\pi_1\Delta_n(x) = 0$  olduğundan

$$D : R/I \longrightarrow J_n(R)/IJ_n(R) / N + IJ_n(R)/IJ_n(R)$$

$n$ . mertebeden diferansiyel operatörü indirgenir.  $J_n(R/I)$ 'nin evrensellik özelliğinden

$$\Psi : J_n(R/I) \longrightarrow J_n(R)/IJ_n(R) / N + IJ_n(R)/IJ_n(R)$$

$R/I$ -homomorfizması vardır.

$$\Psi\bar{\theta} = 1$$

sağlandığından  $\bar{\theta}$  birebir dönüşümdür. Buradan

$$\ker \theta \subseteq N + IJ_n(R)/IJ_n(R)$$

elde edilir. ■

**Önerme 3.3.2**  $R$  bir  $R_0$  - cebir ve  $S$ ,  $R$ 'nin çarpımsal kapalı bir alt kümesi olmak üzere  $\Delta$ ,  $R$ 'den bir  $M$   $R_S$ -modülüne tanımlı  $n$ . mertebeden bir diferansiyel operatör olsun. Bu durumda

$$\Psi : R \longrightarrow R_S$$

halka homomorfizması için  $R_S$ 'den  $M$ 'ye tanımlanan  $n$ . mertebeden diferansiyel operatör tek olarak belirlidir ve  $\delta\Psi = \Delta$  sağlanır.

**İspat.** [M.E.Sweedler, (1974), Thm.13.2] ■

**Önteorem 3.3.3**  $M$  bir  $R_S$ -modül olmak üzere  $\delta$ ,  $R_S$ 'den  $M$ 'ye tanımlı  $n$ . mertebeden bir diferansiyel operatör olsun. Her  $r \in R$  için  $\delta(r/1) = 0$  sağlanıyor ise  $\delta = 0$  olur.

**İspat.** İspat  $n$  üzerinde tümevarımla yapılacaktır.  $n = 0$  için  $\delta$ ,  $R_S$ -modül homomorfizması olur ve dolayısıyla  $r/s \in R/S$  için  $\delta(r/s) = 1/s \delta(r/1) = 0$  dır. Yani  $\delta = 0$  elde edilir.  $n > 0$  olsun ve mertebesi  $n$ 'den küçük diferansiyel operatörler için önerme doğru olsun.  $r/1, s/1 \in R_S$  alınsın. Buradan

$$[\delta, r/1](s/1) = \delta(rs/1) - r/1\delta(s/1) = 0$$

eşitliği vardır. Ayrıca

$$[\delta, r/1] \in D_{R_S}^{n-1}(R_S, M)$$

olduğundan tümevarım hipotezinden her  $r/1 \in R_S$  için  $[\delta, r/1] = 0$  elde edilir.

Ayrıca

$$[\delta, r/s] = [\delta, r/1]1/s - r/s[\delta, s/1]1/s$$

eşitliği göz önüne alınırsa  $[\delta, r/s] = 0$  olur. Buradan da  $\delta = 0$  bulunur. ■

**Teorem 3.3.4**  $R$  bir  $R_0$ -cebir ve  $S$ ,  $R$ 'nin çarpımsal kapalı kümesi bir alt kümesi olsun.  $J_n(R_S)$ ,  $R_S$ 'nin  $n$ . mertebeden evrensel diferansiyel operatör modülü olmak üzere

$$J_n(R_S) \cong R_S \otimes_R J_n(R)$$

sağlanır.

**İspat.**  $J_n(R)_S \cong R_S \otimes_R J_n(R)$  olduğundan teoremi ispatlamak için  $J_n(R_S) \cong J_n(R)_S$  olduğunu göstermek yeterlidir.  $R$ 'nin  $n$ . mertebeden evrensel diferansiyel operatörü

$$\Delta_n : R \longrightarrow J_n(R)$$

olmak üzere

$$\Psi : J_n(R) \longrightarrow J_n(R)_S, \Psi(m) = m/1 \quad (m \in J_n(R))$$

ile tanımlanan kanonik dönüşüm göz önüne alınsın.  $J_n(R)_S$ 'nin  $R_S$ 'nin  $n$ . mertebeden evrensel modülü olduğu gösterilecektir.

$$R \xrightarrow{\Delta_n} J_n(R) \xrightarrow{\Psi} J_n(R)_S$$

dönüşümleri için 3.1.8'den  $\Psi \circ \Delta_n$ ,  $R$ 'nin  $n$ . mertebeden diferansiyel operatörü olur. 3.3.2'den

$$\delta : R_S \longrightarrow J_n(R)_S$$

$n$ . mertebeden diferansiyel operatörü vardır ve her  $r \in R$  için  $\delta(r/1) = \Psi\Delta(r)$  sağlanır.  $N$  bir  $R_S$ -modül ve  $D \in D_{R_S}^n(R_S, N)$  olmak üzere

$$d : R \longrightarrow N, \quad d(r) = D(r/1)$$

ile tanımlansın. Bu durumda  $d$ ,  $n$ . mertebeden bir diferansiyel operatördür.  $J_n(R)$ 'nin evrensellik özelliğinden

$$\alpha : J_n(R) \longrightarrow N$$

tek bir  $R$ -modül homomorfizması vardır ve  $\alpha\Delta = d$  sağlanır. Buradan  $\alpha$  dönüşümü yardımıyla

$$\hat{\alpha} : J_n(R)_S \longrightarrow N, \quad \hat{\alpha}(m/1) = \alpha(m) \quad (m \in J_n(R))$$

tek bir  $R_S$ -modül homomorfizması indirgenir. Her  $r \in R$  için

$$D(r/1) - \hat{\alpha}\delta(r/1) = 0$$

olur. Böylece 3.3.2'den  $D - \hat{\alpha}\delta = 0$  yani  $D = \hat{\alpha}\delta$  elde edilir. ■

**Sonuç 3.3.5**  $M$  bir  $R$ -modül olmak üzere

$$J_n(M_S) \cong J_n(M)_S$$

sağlanır.

**İspat.** 3.2.6 , 3.3.4 ve  $M \otimes_R R \cong M$  izomorfizması göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} J_n(M_S) &\cong M_S \otimes_{R_S} J_n(R_S) \\ &\cong M_S \otimes_{R_S} (R_S \otimes_R J_n(R)) \\ &\cong M_S \otimes_R J_n(R) \\ &\cong R_S \otimes_R (M \otimes_R J_n(R)) \\ &\cong R_S \otimes_R J_n(M) \\ &\cong J_n(M)_S \end{aligned}$$

bulunur. Buradan istenen elde edilir. ■

**Örnek 3.3.6**  $R = R_0[X_1, X_2, \dots, X_s]$  bir polinomlar cebiri olsun ve 3.1.11'deki göste-

rimler göz önüne alınsın. Bu durumda

$$\delta_n : R \longrightarrow J_n(R)$$

$R$ 'nin  $n$ . mertebeden evrensel diferansiyel operatörü olmak üzere  $J_n(R)$  tabanı

$$\{\delta_n(X^\alpha) : X^\alpha = X_1^{\alpha_1} \dots X_s^{\alpha_s}, |\alpha| \leq n\}$$

olan bir serbest  $R$ -modüldür.

**Örnek 3.3.7**  $R_0[X_1, X_2, \dots, X_s]$  polinomlar halkasının kesirler cismi  $K = R_0(X_1, \dots, X_s)$

dir. O halde  $J_n(K)$ , bir tabanı

$$\{\delta_n(X^\beta) : X^\beta = X_1^{\beta_1} \dots X_s^{\beta_s}, |\beta| \leq n\}$$

olan bir  $K$ -vektör uzayıdır. Burada

$$\delta_n : K \longrightarrow J_n(K)$$

$K$ 'nin  $n$ . mertebeden evrensel diferansiyel operatörüdür.

### 3.4 Cisim Genişlemelerinin Evrensel Modülleri

Bu bölümde afin bölgelerinin kesir cisimlerinin evrensel modülleri karakterize edilecektir.  $k$  ile karakteristiği 0 olan bir cisim kastedilecektir.

**Teorem 3.4.1**  $L$  ve  $K$ ,  $k$ 'nın  $K \subseteq L$  koşulunu sağlayan cisim genişlemeleri olsunlar.  $\delta_n : K \rightarrow J_n(K)$ ,  $\Delta_n : L \rightarrow J_n(L)$  sırasıyla  $K$  ve  $L$ 'nin  $n$ . mertebeden evrensel diferansiyel operatörleri olmak üzere eğer  $L, K$ 'nın sonlu boyutlu bir genişlemesi ise

$$\varphi : L \otimes_K J_n(K) \rightarrow J_n(L), \quad \sum_i \ell_i \otimes \delta_n(x_i) \rightarrow \sum_i \ell_i \Delta_n(x_i)$$

dönüşümü bir izomorfizmadır.

**İspat.** [*M.E.Sweedler*, (1974), *Thm* 13.12] ■

**Önerme 3.4.2**  $L$ , bir  $k$  cismi üzerinde transendental tabanı  $X_1, X_2, \dots, X_s$  olan bir afin bölgesinin kesirler cismi olsun. Bu durumda

$$\Delta_n : L \rightarrow J_n(L)$$

$n$ .mertebeden evrensel diferansiyel operatör olmak üzere  $J_n(L)$  tabanı

$$\{\Delta_n(X^\alpha) : X^\alpha = X_1^{\alpha_1} \dots X_s^{\alpha_s}, |\alpha| \leq n\}$$

olan bir vektör uzayıdır.

**İspat.**  $K = k(X_1, X_2, \dots, X_s)$  olsun. Buradan  $L, K$  üzerinde sonlu boyutlu bir cisim genişlemesi olur. Diğer taraftan  $J_n(K)$  tabanı

$$\{\delta_n(X^\alpha) : X^\alpha = X_1^{\alpha_1} \dots X_s^{\alpha_s}, |\alpha| \leq n\}$$

olan bir  $K$  – vektör uzayıdır. O halde  $L \otimes_K J_n(K)$ ,

$$\{1 \otimes \delta_n(X^\alpha) : X^\alpha = X_1^{\alpha_1} \dots X_s^{\alpha_s}, |\alpha| \leq n\}$$

üzerinde bir  $L$ – vektör uzayn olur. Bir önceki teoremden

$$\{\Delta_n(X^\alpha) : X^\alpha = X_1^{\alpha_1} \dots X_s^{\alpha_s}, |\alpha| \leq n\}$$

kümesi  $J_n(L)$ 'nin bir tabanı olur. ■

**Sonuç 3.4.3**  $L$ , bir  $k$  cismi üzerinde *transcendental* tabanı  $X_1, X_2, \dots, X_s$  olan bir *afin bölgesinin kesirler cismi* olsun. O zaman  $K = k(X_1, X_2, \dots, X_s)$  olmak üzere

$$L \otimes_K D^n(K, K) \cong D^n(L, L)$$

*izomorfizması vardır.*

**İspat.**  $J_n(K)$  sonlu boyutlu bir vektör uzayı olduğundan

$$L \otimes_K (\text{Hom}_K(J_n(K), K)) \cong \text{Hom}_L(L \otimes_K J_n(K), L)$$

sağlanır. 3.4.1'den

$$L \otimes_K \text{Hom}_K(J_n(K), K) \cong \text{Hom}_L(J_n(L), L)$$

olur. Ve 3.2.4'ten

$$L \otimes_K D^n(K, K) \cong D^n(L, L)$$

elde edilir. ■

Böylece bu son sonuç yardımıyla  $K$ 'nın  $n$ . mertebeden herhangi bir diferansiyel operatörü  $L$ 'nin bir diferansiyel operatörü olarak görülebilir.

### 3.5 Evrensel Modüller ve Vektör Uzaylar Arasındaki İlişki

Bu bölümde  $k$  bir cisim ve  $R$  bir  $k$ -cebir olmak üzere  $R$ 'nin  $n$ .mertebeden diferansiyel operatörünün evrensel modülü ile  $R/m^{n+1}$   $R/m$ -vektör uzayı arasındaki ilişki incelenecektir. Burada  $R/m$ ,  $R$ 'nin kalan cisimidir.

**Önerme 3.5.1**  $R$  bir  $k$ -cebir ve  $m$ ,  $R$ 'nin maksimal ideali olmak üzere  $R/m \cong k$  olsun. Bu durumda

$$D_R^n(R, k) \cong \text{Hom}_k(R/m^{n+1}, k)$$

sağlanır.

**İspat.**  $D \in D_R^n(R, k)$  olmak üzere  $D(m^{n+1}) = 0$  dır. Böylece

$$\pi : R \longrightarrow R/m^{n+1}$$

doğal homomorfizma olmak üzere  $D$  dönüşümü yardımıyla

$$\bar{D} : R/m^{n+1} \longrightarrow k$$

$k$ -lineer dönüşümü indirgenir ve  $\bar{D}\pi = D$  sağlanır. Buradan

$$\Phi : D_R^n(R, k) \longrightarrow \text{Hom}_k(R/m^{n+1}, k) \quad , \quad \Phi(D) = \bar{D}$$

iyi tanımlı dönüşümü elde edilir. Şimdi  $\Phi$ 'nin istenen izomorfizma olduğu gösterilecektir.  $\Phi(D) = 0$  olsun. Bu durumda her  $r \in R$  için

$$0 = \bar{D}(\bar{r}) = \bar{D}\pi(r) = D(r)$$

olur. Yani  $D = 0$  dır. Diğer bir deyişle  $\Phi$  birebirdir.  $\alpha$ ,  $k$ -lineer dönüşümü  $R/m^{n+1}$ 'den  $k$ 'ya tanımlı bir dönüşüm olmak üzere

$$R \xrightarrow{\pi} R/m^{n+1} \xrightarrow{\alpha} k$$

dönüşümleri için  $\alpha\pi \in \text{Hom}_k(R, k)$  olur.  $r_0, r_1, \dots, r_n \in R$  alınsın. Bu durumda  $x_i \in m$  ve  $\ell_i \in k$  olmak üzere  $r_i = x_i + \ell_i$  olarak yazılabilir. Diğer taraftan

$$[\alpha\pi, r_0, r_1, \dots, r_n] = [\alpha\pi, x_0, x_1, \dots, x_n]$$

olduğundan

$$[\alpha\pi, r_0, r_1, \dots, r_n](1) = 0$$

ve dolayısıyla  $\alpha\pi \in D_R^n(R, k)$  elde edilir. Ayrıca  $\Phi(\alpha\pi) = \alpha$  sağlandığından  $\Phi$  örtendir. ■

**Sonuç 3.5.2**  $R$  bir Noether  $k$ -cebir ve  $m$ ,  $R$ 'nin bir maksimal ideali olmak üzere  $R/m \cong k$  olsun. Bu durumda

$$J_n(R) \otimes_R k \cong R/m^{n+1}$$

sağlanır.

**İspat.** 3.2.4'ten  $D_R^n(R, k) \cong \text{Hom}_R(J_n(R), k)$  dır. Ayrıca

$$\text{Hom}_R(J_n(R), k) \cong \text{Hom}_k(J_n(R) \otimes_R k, k)$$

izomorfizması göz önüne alınsın. Diğer taraftan bir önceki önermeden

$$\text{Hom}_k(R/m^{n+1}, k) \cong \text{Hom}_k(J_n(R) \otimes_R k, k)$$

sağlanır.  $R$ , Noether olduğundan  $R/m^{n+1}$  sonlu boyutlu bir  $k$ -vektör uzayıdır.

Böylece

$$J_n(R) \otimes_R k \cong R/m^{n+1}$$

elde edilir. Burada

$$\Psi : J_n(R) \otimes_R k \longrightarrow R/m^{n+1}$$

izomorfizması  $s_i \in k$  olmak üzere

$$\Psi\left(\sum_i r_i \Delta(x_i) \otimes s_i\right) = \left(\sum_i r_i s_i x_i\right) + m^{n+1}$$

ile tanımlıdır. ■

### 3.6 Regüler Cebirlerin Evrensel Modülleri

$R$ , lokal ve *Noether* bir  $k$ -cebir olmak üzere  $R$ 'nin maksimal ideali  $m$  ve  $R/m \cong k$  olsun.

**Önteorem 3.6.1**  $M$  sonlu üretilmiş bir  $R$ -modül olsun. Bu durumda  $M$ 'nin projektif olması için gerek ve yeter koşul  $M$ 'nin yerel projektif olmasıdır. (*locally projective*)

**İspat.**  $M$ 'nin homolojik boyutu  $hd(M)$  ile gösterilmek üzere  $hd(M) = 0$  ise  $M$  projektiftir. Ayrıca

$$hd(M) = \text{Sup}_m \{hd(M_m) : m, R\text{'nin maksimal idealidir}\}$$

eşitliği göz önüne alınırsa istenen elde edilir. ■

**Önerme 3.6.2**  $R$  halkası boyutu  $s$  olan regüler, lokal bir  $k$ -cebir ve  $m$ ,  $R$ 'nin bir maksimal ideali olmak üzere  $k \cong R/m$  olsun. Bu durumda  $J_n(R)$ , serbest bir  $R$ -modül olur.

**İspat.**  $\{x_1, \dots, x_s\}$ ,  $m$  idealinin bir üreteç kümesi olsun. Bu durumda

$$\{x^\alpha + m^{n+1} : |\alpha| \leq n\}$$

kümesi  $R/m^{n+1}$ 'in bir  $k$ -tabanı olur. 3.5.2'den  $J_n(R) \otimes_R R/m$ ,

$$\{\Delta_n(x^\alpha) \otimes 1 : |\alpha| \leq n\}$$

üzerinde bir  $k$ -vektör uzayıdır. Burada  $\Delta_n : R \rightarrow J_n(R)$  dönüşümü  $n$ .mertebeden evrensel diferansiyel operatördür. Nakayama Lemma'dan

$$\{\Delta_n(x^\alpha) : |\alpha| \leq n\}$$

kümesi  $J_n(R)$  için minimal üreteç kümesidir. Diğer taraftan,  $R$ 'nin kesirler cismi  $L$  olmak üzere

$$\theta : L \otimes_R J_n(R) \rightarrow J_n(L), \theta(1 \otimes \Delta_n(x^\alpha)) = \Delta_n(x^\alpha)$$

izomorfizmasından

$$\text{rank} J_n(R) = \mu(J_n(R))$$

elde edilir. 2.5.2'den,  $J_n(R)$  serbest bir modüldür. ■

**Sonuç 3.6.3**  $R$ , boyutu  $s$  olan regüler, lokal  $k$ -cebir olsun. Eğer  $F$  serbest  $R$ -modül ise  $J_n(F)$  serbesttir.

**İspat.**  $m$ ,  $R$ 'nin bir maksimal ideali olmak üzere  $\{x_1, \dots, x_s\}$ ,  $m$  idealinin üreteç kümesi olsun ve  $\{e_i\}$  ailesi,  $F$  serbest modülünün bir tabanı olsun. Bu durumda

$$\{\Delta_n(x^\alpha) \otimes e_i : |\alpha| \leq n\}$$

kümesi  $J_n(R) \otimes_R F$ 'nin bir tabanı olur. Diğer taraftan, 3.2.6'dan

$$\Phi : J_n(R) \otimes_R F \longrightarrow J_n(F)$$

izomorfizması vardır. Böylece

$$\delta_n : F \longrightarrow J_n(F)$$

$F$ 'nin evrensel diferansiyel operatörü olmak üzere

$$\{\delta_n(x^\alpha e_i) : |\alpha| \leq n\}$$

kümesi  $J_n(F)$ 'nin bir tabanıdır. ■

**Teorem 3.6.4**  $R$  regüler bir afin cebir olsun. Bu durumda  $J_n(R)$ , projektif  $R$ -modüldür.

**İspat.**  $m$ ,  $R$ 'nin maksimal ideali olsun. Buradan  $R_m$ , bir regüler lokal cebir olur. 3.6.2'den  $J_n(R_m)$  serbesttir.

$$J_n(R) \otimes_R R_m \cong J_n(R_m)$$

izomorfizması ve 3.6.1 göz önüne alınırsa  $J_n(R)$  bir projektif modül olur. ■

**Teorem 3.6.5**  $R$  bir regüler afin cebir olmak üzere  $F$  projektif olsun. Bu durumda  $J_n(F)$  projektiftir.

**İspat.** 3.3.5'ten  $m$ ,  $R$ 'nin bir maksimal ideali olmak üzere

$$J_n(F_m) \cong J_n(F) \otimes_R R_m$$

izomorfizması vardır.  $F_m$  bir  $R_m$ -modül olmak üzere 3.6.3'ten  $J_n(F_m)$  serbesttir.

Böylece  $J_n(F)$ , yerel projektiftir ve 3.6.1'den  $J_n(F)$  projektiftir. ■

Yukarıdaki teoremden eğer  $R$  regüler bir afin cebir ise her  $n \geq 0$  için  $J_n(R)$  projektif ya da denk olarak  $hd(J_n(R)) = 0$  olur.

**Önerme 3.6.6**  $R = k[x_1, \dots, x_s]$  bir polinomlar cebiri ve  $I = (f_1, \dots, f_m)$ ,  $R$ 'nin bir ideali olsun.  $L, J_n(R)$ 'nin

$$\{\Delta_n(x^\alpha f_i) : i = 1, \dots, m, |\alpha| < n\}$$

kümesiyle üretilen alt modülü olsun. Bu durumda

$$\Delta_n : R \longrightarrow J_n(R)$$

$R$ 'nin  $n$ .mertebeden diferansiyel operatörü olmak üzere

$$R\Delta_n(I) \subseteq L + IJ_n(R)$$

sağlanır.

**İspat.**  $\Delta_n$ ,  $k$ -lineer bir dönüşüm olduğundan her  $g \in R$  için  $\Delta_n(f_i g) \in L + IJ_n(R)$  olduğunu göstermek yeterlidir.  $g \in R$  alınsın. Bu durumda  $a_\alpha, b_\beta \in k$  ve  $|\alpha| \geq n$ ,  $|\beta| < n$  olmak üzere

$$g = \sum_{\alpha} a_{\alpha} x^{\alpha} + \sum_{\beta} b_{\beta} x^{\beta}$$

olarak yazılır. Böylece

$$\Delta_n(f_i g) = \sum_{\alpha} a_{\alpha} \Delta_n(x^{\alpha} f_i) + \sum_{\beta} b_{\beta} \Delta_n(x^{\beta} f_i)$$

elde edilir. Burada  $\sum_{\beta} b_{\beta} \Delta_n(x^{\beta} f_i) \in L$  dir. Diğer taraftan,  $\Delta_n \in D_R^n(R, J_n(R))$  olduğundan çarpım kuralından  $\varphi_{\varepsilon}, \varphi_{\gamma} \in R$  ve  $|\varepsilon| < n$  ve  $|\gamma| \leq n$  olmak üzere

$$\Delta_n(x^{\alpha} f_i) = \sum_{\varepsilon} \varphi_{\varepsilon} \Delta_n(x^{\varepsilon} f_i) + f_i \sum_{\gamma} \varphi_{\gamma} \Delta_n(x^{\gamma})$$

sağlanır. Bunları bir önceki denklemde yerine yazarsak,

$$\Delta_n(f_i g) = \sum_{\alpha} \sum_{\varepsilon} a_{\alpha} \varphi_{\varepsilon} \Delta_n(x^{\varepsilon} f_i) + \sum_{\beta} b_{\beta} \Delta_n(x^{\beta} f_i) + f_i \sum_{\alpha} \sum_{\gamma} a_{\alpha} \varphi_{\gamma} \Delta_n(x^{\gamma})$$

olur ve  $\Delta_n(f_i g) \in L + IJ_n(R)$  bulunur. Yani  $R\Delta_n(I) \subseteq L + IJ_n(R)$  elde edilir. ■

$R = k[x_1, \dots, x_s]$  bir polinomlar cebiri ve  $I = (f_1, \dots, f_m)$ ,  $R$ 'nin bir ideali olmak üzere  $S = R/I$  olsun. 3.3.1'den  $S$ -modüllerin

$$0 \longrightarrow R\Delta_n(I) + IJ_n(R)/IJ_n(R) \longrightarrow J_n(R)/IJ_n(R) \xrightarrow{\theta} J_n(S) \longrightarrow 0$$

tam dizisi vardır.

**Önerme 3.6.7**  $R\Delta_n(I) + IJ_n(R)/IJ_n(R)$  modülü

$$\{\Delta_n(x^\alpha f_i) + IJ_n(R) : i = 1, \dots, m, |\alpha| < n\}$$

kümesi tarafından  $S$ -modül olarak üretilir.

**İspat.**  $L$  modülü  $J_n(R)$ 'nin

$$\{\Delta_n(x^\alpha f_i) : i = 1, \dots, m, |\alpha| < n\}$$

kümesi ile üretilen alt modülü olmak üzere  $L + IJ_n(R)/IJ_n(R)$ ,

$$\{\overline{\Delta_n(x^\alpha f_i)} : i = 1, \dots, m, |\alpha| < n\}$$

kümesi tarafından üretilir. Son önermeden  $R\Delta_n(I) \subseteq L + IJ_n(R)$  olduğundan

$$L + IJ_n(R)/IJ_n(R) = R\Delta_n(I) + IJ_n(R)/IJ_n(R)$$

elde edilir. ■

**Sonuç 3.6.8**  $\delta_n : R/I \rightarrow J_n(R/I)$ ,  $R/I$ 'nin  $n$ . mertebeden evrensel diferansiyel operatörü olmak üzere  $J_n(R/I)$ ,

$$\{\delta_n(x^\alpha + I) : |\alpha| \leq n\}$$

kümesi tarafından üretilir ve  $\theta(\Delta_n(x^\alpha f_i) + IJ_n(R)) = 0$  eşitliği sağlanır.

**İspat.** 3.3.6'dan  $J_n(R)$ , tabanı

$$\{\Delta_n(x^\alpha) : |\alpha| \leq n\}$$

olan serbest bir modüldür. Buradan  $J_n(R)/IJ_n(R)$ , tabanı

$$\{\overline{\Delta_n(x^\alpha)} : |\alpha| \leq n\}$$

olan serbest  $R/I$ -modüldür. Böylece  $J_n(R/I)$ ,

$$\{\theta(\overline{\Delta_n(x^\alpha)}) : |\alpha| \leq n\} = \{\delta_n(x^\alpha + I) : |\alpha| \leq n\}$$

kümesi tarafından üretilir. İfadenin son kısmı için bir önceki önerme göz önüne alınırsa istenen elde edilir. ■

**Örnek 3.6.9** ([3])  $R = k[x, y]$  polinomlar cebiri ve  $I$ ,  $R$ 'nin  $f = y^2 - x^3$  elemanı tarafından üretilen bir ideali olsun.  $S = R/I$  alınsın. Şimdi sırasıyla  $J_1(S)$ ,  $J_2(S)$  ve  $J_3(S)$ 'yi bulalım.

(i)  $J_1(S)$  :  $F$ , tabanı

$$\{\Delta_1(x), \Delta_2(y), \Delta_1(1)\}$$

kümesi olan serbest bir  $S$ -modül ve  $N$  modülü de  $\Delta_1(f)$  elemanı tarafından üretilen  $F$ 'nin bir alt  $S$ -modülü olmak üzere

$$\Delta_1(f) = \Delta_1(y^2 - x^3) = 2y\Delta_1(y) - 3x^2\Delta_1(x) + x^3\Delta_1(1)$$

olur ve 3.6.8 kullanılarak  $J_1(S) \cong F/N$  elde edilir. Diğer taraftan,  $\text{rank}J_1(S) = 2$  olduğu için

$$\text{rank}N = \text{rank}F - \text{rank}J_1(S) = 3 - 2 = 1$$

olur ve lemma 2.5.2'den  $N$  bir serbest  $S$ -modüldür. O halde  $S$ -modüllerin

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow F \longrightarrow J_1(S) \cong F/N \longrightarrow 0$$

tam dizisi  $J_1(S)$ 'nin serbest çözümlülük (free resolution) dizisi olup  $hdJ_1(S) \leq 1$  olur.

(ii)  $J_2(S)$  :  $F'$ , tabanı

$$\{\Delta_2(x^2), \Delta_2(y^2), \Delta_2(xy), \Delta_2(x), \Delta_2(y), \Delta_2(1)\}$$

kümesi olan serbest bir  $S$ -modül ve  $N'$ ,  $\{\Delta_2(f), \Delta_2(xf), \Delta_2(yf)\}$  elemanların ile üretilen  $F'$ 'nin bir  $S$ -modülü olsun. Öncelikle  $\Delta_2(f)$ 'yi bulalım.

$$\Delta_2(f) = \Delta_2(y^2 - x^3) = \Delta_2(y^2) - \Delta_2(x^3)$$

olur. Diğer taraftan,  $[\Delta_2, x, x, x] = 0$  olduğundan

$$[\Delta_2, x, x, x] = \Delta_2(x^3) - x\Delta_2x^2 - x\Delta_2x^2 + x^2\Delta_2x - x\Delta_2x^2 + x^2\Delta_2x + x^2\Delta_2x + x^2\Delta_2x - x^3\Delta_2(1) = 0$$

olup buradan

$$\Delta_2(x^3) = 3x\Delta_2x^2 - 3x^2\Delta_2 + 2x - x^3\Delta_2(1)$$

elde edilir. Bunu yukarıdaki eşitlikte yerine yazarsak,

$$\Delta_2(f) = \Delta_2(y^2) - 3x\Delta_2(x^2) + 3x^2\Delta_2(x) - x^3\Delta_2(1)$$

bulunur. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}\Delta_2(xf) &= x\Delta_2(y^2) - 6x^2\Delta_2(x^2) + 2y\Delta_2(xy) + 7x^3\Delta_2(x) \\ &\quad - 2xy\Delta_2(y) - 2x^4\Delta_2(1) \\ \Delta_2(yf) &= -3xy\Delta_2(x^2) + 3y\Delta_2(y^2) - 3x^2\Delta_2(xy) + 6x^2y\Delta_2(y) \\ &\quad - y^2\Delta_2(y) - 2x^3y\Delta_2(1)\end{aligned}$$

olur ve 3.6.8'den  $J_2(S) \cong F'/N'$  dir.  $rank J_2(S) = 3$  olduğundan  $rank N' = rank F' - rank J_2(S) = 6 - 3 = 3$  olur. O halde 2.5.2'den  $N'$ , serbest  $S$ -modüldür. Böylece

$$0 \longrightarrow N' \xrightarrow{\varphi} F' \xrightarrow{\pi} F'/N' \longrightarrow 0$$

tam dizisi  $J_2(S)$  için bir serbest çözümlüktür ve  $hdJ_2(S) \leq 1$  bulunur. Burada  $\pi$  dönüşümü doğal homomorfizma ve  $\varphi$  dönüşümü ise

$$\begin{pmatrix} -3x & 1 & 0 & 3x^2 & 0 & -x^3 \\ -6x^2 & x & 2y & 7x^3 & -2xy & -2x^4 \\ -3xy & 3y & -3x^2 & 6x^2y & -y^2 & -2x^3y \end{pmatrix}$$

matrisi ile belirlidir.

(iii)  $J_3(S) : F''$ , tabanı

$$\{\Delta_3(x^i y^j) : i, j = 0, 1, 2, 3 ; 0 \leq i + j \leq 3\}$$

kümesi olan serbest  $S$ -modül ve  $N''$  modülü

$$\begin{aligned}\Delta_3(f) &= \Delta_3(y^2) - \Delta_3(x^3) \\ \Delta_3(xf) &= \Delta_3(xy^2) - 4x\Delta_3(x^3) + 6x^2\Delta_3(x^2) - 4x^3\Delta_3(x) + x^4\Delta_3(1) \\ \Delta_3(x^2f) &= 2x\Delta_3(xy^2) + 2y\Delta_3(x^2y) + 19x^3\Delta_3(x^2) - 10x^2\Delta_3(x^3) \\ &= -x^2\Delta_3(y^2) - 4xy\Delta_3(xy) + 2x^2y\Delta_3(y) - 13x^4\Delta_3(x) + 3x^5\Delta_3(1) \\ \Delta_3(yf) &= \Delta_3(y^3) - 3x\Delta_3(x^2y) - y\Delta_3(x^3) + 3xy\Delta_3(x^2) - 3x^2\Delta_3(xy) - 3x^3\Delta_3(y) \\ &\quad - 3x^2y\Delta_3(x) + yx^3\Delta_3(1) \\ \Delta_3(y^2f) &= 4y\Delta_3(y^3) - 3x^2\Delta_3(xy^2) - 6xy\Delta_3(x^2y) + 6xy^2\Delta_3(x^2) - x^3\Delta_3(x^3) \\ &\quad - 4x^3\Delta_3(y^2) + 12x^2y\Delta_3(xy) - 2yx^3\Delta_3(y) - 9x^5\Delta_3(x) + 3x^6\Delta_3(1) \\ \Delta_3(xyf) &= x\Delta_3(y^3) + 3y\Delta_3(xy^2) - 6x^2\Delta_3(x^2y) + 12x^2y\Delta_3(x^2) - 4xy\Delta_3(x^3) \\ &\quad - 3xy\Delta_3(y^2) + 5x^3\Delta_3(xy) - 11x^3y\Delta_3(x) + 3x^4y\Delta_3(1)\end{aligned}$$

elemanlarıyla üretilen bir alt modüldür.

$$rank N'' = rank F'' - rank F''/N'' = 10 - 4 = 6$$

olmak üzere  $N''$  modülü 6 eleman tarafından üretilir. Buradan,  $N''$  modülü *rankı* 6 olan serbest bir modül olur. Böylece

$$0 \longrightarrow N'' \xrightarrow{\varphi} F'' \xrightarrow{\pi} F''/N'' \longrightarrow 0$$

tam dizisi  $J_3(R)$  için bir çözünürlük olur. Burada  $\varphi$  dönüşümü,

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4x^3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 6x^2 & 0 & -4x^3 & 0 & x^4 \\ -10x^2 & 0 & 2y & 2x & -4xy & 19x^3 & -x^2 & -13x^4 & 2x^2y & 3x^5 \\ -y & 1 & -3x & 0 & 3x^2 & 3xy & 0 & -3x^2y & -x^3 & x^3y \\ -x^3 & 4y & -6xy & -3x^2 & 12x^2y & 6x^4 & -4x^3 & -9x^5 & -2x^3y & 3x^6 \\ -4xy & x & -6x^2 & 3y & 5x^3 & 12x^2y & -3xy & -11x^3y & 0 & 3x^4y \end{pmatrix}$$

matrisi ile belirlidir.

### 3.7 Evrensel Türev Modülleri

Bu bölümde  $R$  bir  $R_0$ -cebiri olmak üzere  $R$ 'nin  $R_0$  üzerinde  $n$ . mertebeden türev modülleri ve evrensel türev modülleri tanımlanacak, ayrıca  $n$ . mertebeden türev modülleri ile  $n$ . mertebeden diferansiyel operatör modülleri arasındaki ilişki verilecektir.

**Tanım 3.7.1**  $M$  bir  $R$ -modül olsun.

$$\{D \in D_{R/R_0}^n(R, M) : D(1) = 0\}$$

ile tanımlanan kümeye  $n$ . mertebeden türev modülü denir ve  $Der_{R_0}^n(R, M)$  ile gösterilir.

**Önteorem 3.7.2**  $J_n(R)$ ,  $n$ . mertebeden diferansiyel operatörün evrensel modülü olsun. Bu durumda  $J_n(R)$ , rankı 1 olan serbest bir modülün dik toplamıdır.

**İspat.**  $1_R : R \rightarrow R$  birim dönüşüm ve  $\Delta_n : R \rightarrow J_n(R)$  evrensel diferansiyel operatör olsun.  $J_n(R)$ 'nin evrensellik özelliğinden,

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{1_R} & R \\ \Delta_n \downarrow & & \uparrow f \\ J_n(R) & \xrightarrow{1_{J_n(R)}} & J_n(R) \end{array}$$

diagramı değişmeli olacak şekilde tek bir

$$f : J_n(R) \rightarrow R$$

$R$ -modül homomorfizması vardır. Bu dönüşüm örtendir ve  $f\Delta_n(1) = 1$  olur. Diğer taraftan  $R$  halkası  $R$  üzerinde serbest ve dolayısıyla da projektif olduğundan öyle bir

$$g : R \rightarrow J_n(R), \quad g(r) = r\Delta_n(1)$$

$R$ -modül homomorfizması vardır ki

$$\begin{array}{ccc} & & R \\ & \swarrow g & \downarrow 1_R \\ J_n(R) & \xrightarrow{f} & R \longrightarrow 0 \end{array}$$

diagramı değişmeli olur.  $x \in J_n(R)$  alınsın. Bu durumda

$$x = (x - gf(x)) + gf(x)$$

eşitliği vardır ve

$$f(x - gf(x)) = 0$$

sağlanır. Buradan

$$J_n(R) = \ker f + R\Delta_n(1)$$

elde edilir.  $x = r\Delta_n(1) \in \ker f \cap R\Delta_n(1)$  olsun.

$$0 = f(x) = rf\Delta_n(1) = r$$

bulunur. Yani  $x = 0$  dır. Böylece

$$J_n(R) = \ker f \oplus R\Delta_n(1)$$

olur. ■

**Önerme 3.7.3**  $M$  bir  $R$ -modül olsun ve

$$p : J_n(R) \longrightarrow \ker f$$

doğal dönüşümü verilsin. Bu durumda

(i)  $p\Delta_n$ ,  $n$ . mertebeden bir diferansiyel operatördür ve  $p\Delta_n(1) = 0$  sağlanır.

(ii)  $D \in \text{Der}_{R_0}^n(R, M)$  olsun. Bu durumda

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{D} & M \\ p\Delta_n \downarrow & & \downarrow 1_M \\ \ker f & \xrightarrow{\alpha} & M \end{array}$$

diagramı değişmeli olacak şekilde tek bir

$$\alpha : \ker f \longrightarrow M$$

$R$ -modül homomorfizması vardır.

**İspat.**

(i)  $\Delta_n \in D_{R/R_0}^n(R, J_n(R))$  ve  $p \in D_{R/R_0}^0(J_n(R), \ker f)$  olduğundan 3.1.8'den  $p\Delta_n \in D_{R/R_0}^n(R, \ker f)$  olur. Burada  $p$  homomorfizmasının çekirdeği  $R\Delta_n(1)$  olur. Böylece  $p\Delta_n(1) = 0$  sağlanır.

(ii)  $D \in Der_{R/R_0}^n(R, M)$  alınsın. Bu durumda  $J_n(R)$ 'nin evrensellik özelliğinden

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{D} & M \\ \Delta_n \downarrow & & \downarrow 1_M \\ J_n(R) & \xrightarrow{\beta} & M \end{array}$$

diagramı değişmeli olacak şekilde tek bir

$$\beta : R \longrightarrow J_n(R)$$

$R$ -modül homomorfizması vardır ve  $\beta(\Delta_n(1)) = D(1) = 0$  sağlanır. Böylece

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{D} & M \\ \Delta_n \downarrow & & \downarrow 1_M \\ J_n(R) & \xrightarrow{\beta} & M \\ p \downarrow & & \downarrow 1_M \\ \ker f & \xrightarrow{\alpha} & M \end{array}$$

diagramı değişmeli olacak şekilde tek bir

$$\alpha : \ker f \longrightarrow M$$

$R$ -modül homomorfizması vardır.

■

**Tanım 3.7.4**  $\ker f := \Omega_{R/R_0}^n$  modülüne  $R$ 'nin  $R_0$ -üzerinde  $n$ . mertebeden evrensel türev modülü denir. Ayrıca,  $p\Delta_n$  dönüşümüne  $n$ . mertebeden evrensel türev operatörü denir ve  $d_{R/R_0}^n$  ile gösterilir.

**Önerme 3.7.5**  $J_n(R)$ 'nin projektif olması için gerek ve yeter koşul  $\Omega_{R/R_0}^n$ 'in projektif olmasıdır.

**İspat.**  $J_n(R)$  projektif olsun. Bu durumda  $P \oplus J_n(R)$  dik toplamı serbest  $R$ -modül olacak şekilde  $P$ ,  $R$ -modülü vardır.  $J_n(R) \cong R \oplus \Omega_{R/R_0}^n$  olduğundan  $\Omega_{R/R_0}^n$  bir serbest  $R$ -modülün dik toplananıdır, dolayısıyla  $\Omega_{R/R_0}^n$  projektiftir. Tersine,  $\Omega_{R/R_0}^n$  projektif olsun. Bu durumda  $F$  serbest  $R$ -modül olmak üzere

$$F = \Omega_{R/R_0}^n \oplus Q$$

olacak şekilde  $Q$   $R$ -modülü vardır. Buradan

$$F \oplus R = \Omega_{R/R_0}^n \oplus Q \oplus R$$

olur ve  $F \oplus R$  serbest olduğundan  $J_n(R)$  projektiftir. ■

**Önerme 3.7.6**  $M$  bir  $R$ -modül olsun. Bu durumda

$$D_{R/R_0}^n(R, M) = Der_{R_0}^n(R, M) \oplus M$$

izomorfizması vardır.

**İspat.** 3.2.4'ten

$$D_{R/R_0}^n(R, M) \cong Hom_R(J_n(R), M) \cong Hom_R(\Omega_{R/R_0}^n \oplus R, M)$$

olur. Buradan

$$Hom_R(J_n(R), M) \cong Hom_R(\Omega_{R/R_0}^n, M) \oplus Hom_R(R, M)$$

sağlanır. 3.7.3'ten ve  $Hom_R(R, M) \cong M$  olduğundan

$$D_{R/R_0}^n(R, M) = Der_{R_0}^n(R, M) \oplus M$$

izomorfizması elde edilir. ■

**Örnek 3.7.7**  $R$  karakteristiği 2 olan bir halka olmak üzere  $R[x, y]$  polinomlar cebiri için

$$R_1 = R[x, y]/(x^2 + y^2)$$

halkası göz önüne alınsın. Bu durumda

$$\Omega_{R_1/R_0}^1 = \frac{Rdx + Rdy}{\langle 2dx + 2dy \rangle} \cong Rdx + Rdy$$

bulunur. Yani  $\Omega_{R_1/R_0}^1$ , serbest  $R$ -modüldür. Ayrıca  $J_1(R_1) = \Omega_{R_1/R_0}^1 \oplus R$  olduğundan  $J_1(R_1)$  serbesttir ve dolayısıyla  $pd J_1(R_1) = 0$  bulunur.

## KAYNAKLAR

- [1] Dummit, D.S.; Foote, M.F., 1999, Abstract Algebra
- [2] Erdoğan, A., 1993, Differential Operators and Their Universal Modules, Phd. Thesis, University of Leeds
- [3] Hungerford T.W., 1974, Algebra
- [4] Kaplansky, I., Commutative Rings, Allyn and Bacon, Boston
- [5] Kayahan, A., 2004, Diferansiyel Operatör Modülleri, Yüksek Lisans Tezi, Hacettepe Üniversitesi
- [6] Kikuchi, T., 1971, Some Remarks on High Order Derivations, J. Math. Kyoto Univ.11, 71-87
- [7] Kunz, E., 2002, Algebraic Differential Calculus
- [8] Kunz, E., 1986, Kähler Differentials
- [9] Kunz, E., 1985, Introduction to Commutative Algebra and Algebraic Geometry
- [10] Matsumara, H., 1986, Commutative Ring Theory, Cambridge University Press, Newyork
- [11] Nakai, Y., 1970, High Order Derivations, Osaka J.Math. 7,1-27
- [12] Nakai, Y., 1961, On the Theory of Differentials in Commutative Rings, J. Math. Soc. Japan 13, 63-84, 1961
- [13] Olgun, N., 2005, Sonlu Üretilmiş Cebirlerin Evrensel Operatör Modülleri, Doktora Tezi, Hacettepe Üniversitesi
- [14] Sharp, R.Y., 2000, Steps in Commutative Algebra
- [15] Suzuki, S., Differentials of Commutative Rings
- [16] Sweedler, M.E. and Heyneman, R.G., 1969, Affine Hopf Algebras, J.Algebra 13, 192-241
- [17] Sweedler, M.E., 1975, Groups of Simple Algebras, Publ. Math. No:44

## ÖZGEÇMİŞ

**Adı Soyadı :** Halise Melis TEKİN

**Doğum Yeri :** Aydın/Çine

**Doğum Yılı :** 1985

**Medeni Hali :** Bekar

### **Eğitim ve Akademik Durumu :**

**Lise :** 1999-2003 Çine Mehmet Tuncer Anadolu Lisesi

**Lisans :** 2003-2007 Hacettepe Üniversitesi Matematik Bölümü

**Yabancı Dil :** İngilizce, İtalyanca(Temel Düzeyde)

### **İş Tecrübesi :**

2008- Hacettepe Üniversitesi, Matematik Bölümü, Araştırma Görevlisi