T.C.
GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ
MÜHENDİSLİK VE FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BİR ELİPSTE ANALİTİK VE BİREBİR OLAN FONKSİYONLARIN FABER KATSAYILARI İÇİN ÜST SINIRLAR

Tuğba YAVUZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GEBZE
2009

T.C.
GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ
MÜHENDİSLİK VE FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BİR ELİPSTE ANALİTİK VE BİREBİR OLAN FONKSİYONLARIN FABER KATSAYILARI İÇİN ÜST SINIRLAR

Tuğba YAVUZ
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

TEZ DANIŞMANI
Prof. Dr. Engin HALİLOĞLU

GEBZE
2009

YÜKSEK LİSANS TEZİ JÜRİ ONAY SAYFASI

G.Y.T.E. Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 02/07/2009 tarih ve 2009/15 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından 27/08/2009 tarihinde tez savunma sınavı yapılan Tuğba YAVUZ'un tez çalışması Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.

JÜRİ

ÜYE
(TEZ DANIŞMANI) : Prof. Dr. Engin HALİLOĞLU

ÜYE : Prof. Dr. Tahir AZEROĞLU

ÜYE : Prof. Dr. Muammer KALYON

ONAY

G.Y.T.E. Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun ………/………/20… tarih ve ……………/………… sayılı kararı.

İMZA/MÜHÜR

ÖZET

TEZ BAŞLIĞI: BİR ELİPSTE ANALİTİK VE BİREBİR OLAN FONKSİYONLARIN FABER KATSAYILARI İÇİN ÜST SINIRLAR

YAZAR ADI: Tuğba YAVUZ

Bu tezde,

$$E_r = \left\{ (x,y) \in R^2 : \frac{x^2}{\left(1+\frac{1}{r^2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(1-\frac{1}{r^2}\right)^2} < 1, r > 1 \right\}$$

bölgesinde analitik ve birebir olan fonksiyonların Faber katsayılarının uygun lineer kombinasyonları için keskin sınırlar elde edilmiştir. Bu eşitsizlikler, birim dairede analitik ve birebir fonksiyonların oluşturduğu sınıflara ait olan klasik katsayı eşitsizliklerinden faydalanılarak elde edilmiştir. Aynı zamanda, her sınıf için elipsin invaryant dönmelerinin de sayısı olan iki extremal fonksiyon elde edilmiştir.

Tezin ilk kısmında, problemin tarihçesi ve ortaya konuluşundan bahsedilmiştir. İkinci bölümde ise, Faber katsayılarının tanımı ve Faber serisinin özellikleri verilmiştir. Son olarak, üçüncü bölümde ise, birim dairedeki fonksiyon sınıflarına paralel olarak E_r bölgesinde analitik ve birebir olan fonksiyonların oluşturduğu sınıflar tanımlanmıştır. Ayrıca, bu sınıflara ait fonksiyonların Faber katsayılarının uygun lineer kombinasyonlarına ait üst sınırlar ile ilgili teoremler ispatlanmıştır.

SUMMARY

THESIS TITLE: UPPER BOUNS FOR THE FABER COEFFICIENTS OF

THESIS AUTHOR: Tuğba YAVUZ

In this thesis, sharp bouns for certain linear combinations of Faber coefficients of functions analytic and univalent in

$$E_r = \left\{ (x, y) \in R^2 : \frac{x^2}{\left(1+\frac{1}{r^2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(1-\frac{1}{r^2}\right)^2} < 1, r > 1 \right\}$$

are obtained. This result is obtained by using the classical coefficient inequalities in certain class of analitic and univalent functions in unit disc. At the same time, two extremal functions for every class which is the same number invariant rotation of elipse are obtained.

In first part of thesis, the history of this problem and display exist. In the second part, definition of the Faber coefficient and property of Faber series is stated. Finally, in third part, certain classes of analytic and univalent functions in E_r are defined analogously the class of analytic and univalent functions in the unit disc. In addition to, theorems about sharp bounds of the certain lineer combinations of Faber coefficients of functions in these classes are proved.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans öğrenimim boyunca benden bilgi ve tecrübesini esirgemeyen danışman hocam Sayın Prof. Dr. Engin HALİLOĞLU'na teşekkürü bir borç bilirim.

Tez jürimde olmayı kabul eden Sayın Prof. Dr. Tahir AZEROĞLU'na, Sayın Prof. Dr. Muammer KALYON'a va Sayın Doç. Dr. Serkan Aksoy'a ayrıca teşekkür ederim.

Ayrıca katkılarından dolayı TÜBİTAK'a teşekkür ederim.

Maddi ve manevi tüm desteklerini hayat boyu yanımda hissettiğim aileme de sonsuz teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

1 GİRİŞ

Bu tezde

$$E_r = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{(1+\frac{1}{r^2})^2} + \frac{y^2}{(1-\frac{1}{r^2})^2} < 1, r > 1 \right\}$$

bölgesinde analitik ve birebir olan bazı fonksiyon sınıflarına ait $F(z)$ fonksiyonlarının Faber katsayılarının uygun lineer kombinasyonları için üst sınırlar araştırılmıştır. Bu sınırlar ise, $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ birim dairesinde analitik ve birebir olan benzer fonksiyon sınıflarına ait fonksiyonlar cinsinden tasvir fonksiyonu kullanılarak belirlenmiştir.

Bu problem ilk olarak $\mathbb{D}$ için ele alınmıştır. Öncelikle $\mathbb{D}'$de bazı fonksiyon sınıfları tanımlayalım.

S Sınıfı*:* $\mathbb{D}$'de analitik ve birebir olup

$$f(0) = 0,\ \ f'(0) = 1$$

normalizasyon koşullarını sağlayan fonksiyonların oluşturduğu sınıftır. Dolayısıyla, S sınıfına ait $f(z)$ fonksiyonunun $z = 0$ noktası civarındaki Taylor açılımı

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \ ,\ \ f \in S$$

şeklindedir.

C Sınıfı: S sınıfına ait ve görüntüsü konveks bir küme olan fonksiyonların oluşturduğu sınıftır. Yani

$$C = \{\ f \in S : f(\mathbb{D})\ konveks\}$$

T Sınıfı: S sınıfına ait ve $-1 < z < 1$ için reel değerler alan $f(z)$ fonksiyonlarının oluşturduğu sınıftır. Bu fonksiyonlara *tipik reel fonksiyonlar* denir.

S$^{(2)}$ Sınıfı: S sınıfından olan tek fonksiyonların oluşturduğu alt sınıftır. $f \in S$ olmak üzere $f(z)$ fonksiyonunun karekök dönüşümü olarak adlandırılan $h(z) = \sqrt{f(z^2)}$ fonksiyonu $S^{(2)}$ sınıfına aittir. Tersine, $\forall h(z) \in S^{(2)}$ fonksiyonu için $\exists f(z) \in S$ vardır öyle ki $h(z) = \sqrt{f(z^2)}$ dir.

P Sınıfı: $\mathbb{D}$'de analitik ve $f(0) = 1$, $\mathrm{Re}(f(z)) > 0$ koşullarını sağlayan $f(z)$ fonksiyonlarının oluşturduğu sınıftır.

1907'de Carathedory [3] , P sınıfından olan bir

$$p(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n \in P$$

fonksiyonu için

$$|b_n| \leq 2 \ , \ n = 1, 2, \ldots \tag{1.1}$$

eşitsizliğini ispatlamıştır. Ayrıca eşitlik halinin ancak ve ancak

$$p(z) = \frac{1-z}{1+z} \tag{1.2}$$

fonksiyonunun tüm mümkün dönmeleri olan

$$p_\theta(z) = e^{-i\theta} p(e^{i\theta} z) = \frac{1 + e^{i\theta} z}{1 - e^{i\theta} z} \ , \ \theta \in [0, 2\pi)$$

fonksiyonları için geçerli olduğunu göstermiştir.

1917'de Loewner [16] , C sınıfına ait fonksiyonlar için

$$|a_n| \leq 1, \quad n = 2, 3, \ldots \tag{1.3}$$

eşitsizliğini ve eşitlik halinin ancak ve ancak

$$c(z) = \frac{z}{1-z} \tag{1.4}$$

fonksiyonunun tüm mümkün dönmeleri olan

$$c_\theta(z) = e^{-i\theta}c(e^{i\theta}z) = \frac{z}{1-e^{i\theta}z} \quad , \ \theta \in [0, 2\pi)$$

fonksiyonları için mümkün olduğunu göstermiştir.

1931 'de Rogosinski [19] , T sınıfına ait fonksiyonlar için

$$|a_n| \le n, \quad n = 2, 3, \ldots$$

eşitsizliğinin sağlandığını ve eşitlik halinin ancak ve ancak çift n değerleri için

$$k(z) = \frac{z}{(1-z)^2} \tag{1.5}$$

Koebe fonksiyonu ve tek n değerlerinde ise $k(z)$ ve $-k(-z)$ fonksiyonlarının konveks kombinasyonu için mümkün olduğunu göstermiştir.

Koebe fonksiyonunun karekök dönüşümü

$$\sqrt{k(z^2)} = o(z) = \frac{z}{1-z^2} = z + z^3 + z^5 + \ldots \tag{1.6}$$

olduğundan $S^{(2)}$ sınıfına ait bir fonksiyonun Taylor katsayılarının sınırlı olduğu tahmin edilebilir. $S^{(2)}$ sınıfına ait olan $f(z)$ fonksiyonlarının Taylor katsayılarının sınırlı olduğu 1932 yılında Littlewood ve Paley tarafından gösterilmiştir. Littlewood ve Paley, A bir sabit olmak üzere

$$h(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} c_{2n+1} z^{2n+1} \in S^{(2)}$$

fonksiyonlarının Taylor katsayılarının

$$|c_n| \le A, \ n = 3, 5, 7, \ldots$$

koşulunu sağladığını göstermişlerdir. Ayrıca yaptıkları ispat sonucunda

$$|c_n| \le A < 14, n = 3, 5, 7, \ldots$$

eşitsizliğini ispatlamışlardır ve bu eşitsizlikte $A = 1$ olduğu tahmininde bulunmuşlardır. Bu tahminin en azından $n = 2$ için doğru olmadığı Fekete ve Szegö [6] tarafından gösterilmiştir. Ayrıca, V.I.Milin [17] 1980 yılında

$$|c_n| \leq 1.14, n = 3, 5, 7, \ldots$$

eşitsizliğini göstermiştir. En iyi üst sınır henüz bilinmemektedir.

Robertson 1936'da $\forall h(z) \in S^{(2)}$ fonksiyonu için

$$1 + |c_3|^2 + \ldots + |c_{2n-1}|^2 \leq n$$

tahmininde bulunmuştur. Bu eşitsizliğie *Robertson Tahmini* denir.

Tüm S sınıfı için geçerli olan katsayı tahminini Bieberbach yapmıştır. Bieberbach[1] 1916'da $f(z) \in S$ fonksiyonu için

$$|a_2| \leq 2$$

olduğunu ispatlamış ve

$$|a_n| \leq n \ , \quad n = 1, 2, \ldots \tag{1.7}$$

eşitsizliğini tahmin etmiştir.

Bieberbach Tahmini, Robertson Tahmininin bir sonucudur. Karekök dönüşümü uyarınca $h(z) \in S^{(2)}$ ise

$$\{h(z)\}^2 = f(z^2)$$

olacak şekilde bir ve yalnız bir $f \in S$ fonksiyonu vardır. Yukarıdaki ilişkide z^{2n} in katsayıları eşitlenirse

$$a_n = c_1 c_{2n-1} + c_3 c_{2n-3} + \ldots + c_{2n-1} c_1 \quad , \quad c_1 = 1$$

elde edilir. Burada Cauchy Schwarz eşitsizliği kullanılarak

$$|a_n| \leq \sum_{k=1}^{n} |c_{2k-1}|^2$$

bulunur. Son eşitsizlikte Robertson Tahmini kullanılırsa $|a_n| \leq n, \;\; n = 1, 2, \ldots$ Bieberbach Tahmini elde edilir.

$f(z) \in S$ ve $h(z) = \left(\frac{1}{2}\right) \log\left[z^{-1} f(z)\right]$ fonksiyonunun $h(0) = 0$ koşulunu sağlayan dalı olsun. O halde, $h(z)$ fonksiyonunun Taylor serisi

$$h(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_k z^k$$

formunda ise, Milin 1965 yılında

$$\sum_{m=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \left(k \left|\gamma_k\right|^2 - \frac{1}{k} \right) \leq 0 \tag{1.8}$$

eşitsizlğinin gerçeklendiğini ve eşitlik halinin $f(z)$ fonksiyonunun Koebe fonksiyonunun bir dönmesi durumunda mümkün olacağını tahmin etmiştir. Bu tahmin *Milin Tahmini* olarak adlandırılır.

Milin Tahmininden Robertson Tahmini elde edilir. Milin Tahmininden Robertson Tahmini elde edilirken, *İkinci Lebedev-Milin Eşitsizliği* olarak bilinen, $z = 0$ noktasında analitik ve $\phi(0) = 0$ koşulunu sağlayan,

$$\phi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k z^k \tag{1.9}$$

ve

$$\psi(z) = e^{\phi(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k z^k \tag{1.10}$$

fonksiyonları için

$$\sum_{k=0}^{n} \left|\beta_k\right|^2 \leq (n+1) \exp\left\{ \frac{1}{n+1} \sum_{m=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \left(k \left|a_k\right|^2 - \frac{1}{k} \right) \right\} \tag{1.11}$$

eşitsizliğinden faydalanılır.

Lemma 1 *$\phi(z)$ ve $\psi(z)$ fonksiyonları sırasıyla (1.9) ve (1.10) eşitlikleri ile verilmiş olsun. O halde,*

$$\sum_{k=0}^{n} |\beta_k|^2 \leq (n+1)\exp\left\{ \frac{1}{n+1} \sum_{m=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \left(k\,|a_k|^2 - \frac{1}{k} \right) \right\}$$

eşitsizliği sağlanır. Eşitlik hali ancak ve ancak

$$|\gamma| = 1\ ,\ \alpha_k = \frac{\gamma^k}{k} \quad ,\quad 1 \leq k \leq n$$

koşulunu sağlayan γ kompleks sayısının varlığı ile mümkündür.

İspat.

$$\psi'(z) = \phi'(z)\exp(\phi(z)) = \phi'(z)\psi(z)$$

eşitliğinden

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} n\beta_n z^{n-1} &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} n\alpha_n z^{n-1} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n z^n \right) \\ \sum_{n=1}^{\infty} n\beta_n z^{n-1} &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} n\alpha_n z^{n-1} \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \beta_{n-1} z^{n-1} \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Cauchy çarpımı uyarınca,

$$\begin{aligned} n\beta_n &= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\,\alpha_{k+1}\beta_{n-1-k}\ ,\ \ n = 0,1,2,\ldots \\ \beta_n &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k\alpha_k\beta_{n-k} \quad ,\ \ n = 1,2,\ldots \end{aligned} \tag{1.12}$$

elde ederiz. Elde edilen son eşitlikte Cauchy-Schwarz eşitsizliğini uygularsak,

$$\begin{aligned} |\beta_n|^2 &\leq \frac{1}{n^2} \left(\sum_{k=1}^{n} k^2\,|\alpha_k|^2 \right) \left(\sum_{k=1}^{n} |\beta_{n-k}|^2 \right) \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k^2\,|\alpha_k|^2 \sum_{k=0}^{n-1} |\beta_k|^2 \end{aligned}$$

elde ederiz. Son eşitsizlikte $A_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 \left|\alpha_k\right|^2$ ve $B_n = \sum_{k=0}^{n} \left|\beta_k\right|^2$ ile gösterilir ve eşitsizliğin her iki tarafına B_{n-1} eklenirse

$$\begin{aligned} B_n &\leq \frac{1}{n^2} A_n B_{n-1} + B_{n-1} = B_{n-1}\left[\frac{1}{n^2} A_n + 1\right] \\ &= \frac{n+1}{n}\left[1 + \frac{A_n - n}{n\,(n+1)}\right] B_{n-1} \end{aligned}$$

elde edilir. $1 + x \leq e^x$ eşitsizliğinden,

$$B_n \leq \frac{n+1}{n} \exp\left\{\frac{A_n - n}{n\,(n+1)}\right\} B_{n-1} \tag{1.13}$$

elde edilir. Son elde ettiğimiz eşitsizliği B_{n-1} için de yazarsak,

$$B_{n-1} \leq \frac{n}{n-1} \exp\left\{\frac{A_{n-1} - (n-1)}{(n-1)n}\right\} B_{n-2}$$

eşitsizliğinden

$$B_n \leq \frac{n+1}{n-1} \exp\left\{\frac{A_n - n}{n\,(n+1)} + \frac{A_{n-1} - (n-1)}{(n-1)n}\right\} B_{n-2}$$

elde ederiz. $B_0 = \left|\beta_0\right|^2 = 1$ olduğundan, n. adım sonunda

$$\begin{aligned} B_n &\leq (n+1) \exp\left\{\sum_{k=1}^{n} \frac{A_k - k}{k\,(k+1)}\right\} \\ &= (n+1) \exp\left\{\sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{k\,(k+1)} + 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right\} \end{aligned} \tag{1.14}$$

elde edilir.

$$x_k = \frac{1}{k\,(k+1)}\ ,\ y_k = A_k\ ,\ X_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\,(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

ile gösterilirse, kısmi toplama formülüne göre,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{k\,(k+1)} \\
= \;& \sum_{k=1}^{n-1} X_k\,(A_k - A_{k+1}) + X_n A_n \\
= \;& \sum_{k=1}^{n-1} \left[1 - \frac{1}{k+1}\right] \left[\sum_{m=1}^{k} m^2 \left|\alpha_m\right|^2 - \sum_{m=1}^{k+1} m^2 \left|\alpha_m\right|^2\right] + \left[1 - \frac{1}{n+1}\right] \sum_{k=1}^{n} k^2 \left|\alpha_k\right|^2 \\
= \;& \sum_{k=1}^{n-1} \left[1 - \frac{1}{k+1}\right] \left[-\,(k+1)^2 \left|\alpha_{k+1}\right|^2\right] + \left[1 - \frac{1}{n+1}\right] \sum_{k=1}^{n} k^2 \left|\alpha_k\right|^2 \\
= \;& -\sum_{k=1}^{n-1} (k+1)^2 \left|\alpha_{k+1}\right|^2 + \sum_{k=1}^{n-1} (k+1) \left|\alpha_{k+1}\right|^2 + \sum_{k=1}^{n} k^2 \left|\alpha_k\right|^2 - \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} k^2 \left|\alpha_k\right|^2 \\
= \;& -\sum_{k=1}^{n} k^2 \left|\alpha_k\right|^2 + \sum_{k=1}^{n} k \left|\alpha_k\right|^2 + \sum_{k=1}^{n} k^2 \left|\alpha_k\right|^2 - \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} k^2 \left|\alpha_k\right|^2 \\
= \;& \sum_{k=1}^{n} k \left|\alpha_k\right|^2 - \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} k^2 \left|\alpha_k\right|^2
\end{aligned}
$$

bulunur. Buradan,

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{k\,(k+1)} + 1 - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} \;&=\; \sum_{k=1}^{n} k \left|\alpha_k\right|^2 - \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} k^2 \left|\alpha_k\right|^2 + 1 - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} \\
&=\; \frac{1}{n+1} \left\{ \sum_{k=1}^{n} (n+1)\,k \left|\alpha_k\right|^2 - \sum_{k=1}^{n} k^2 \left|\alpha_k\right|^2 + (n+1) - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} \right\} \\
&=\; \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} \left\{ (n+1)\,k \left|\alpha_k\right|^2 - k^2 \left|\alpha_k\right|^2 + 1 - \frac{n+1}{k} \right\} \\
&=\; \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} \left\{ k \left|\alpha_k\right|^2 (n+1-k) - \frac{n+1-k}{k} \right\} \\
&=\; \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} (n+1-k) \left(k \left|\alpha_k\right|^2 - \frac{1}{k} \right) \\
&=\; \frac{1}{n+1} \sum_{m=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \left(k \left|\alpha_k\right|^2 - \frac{1}{k} \right)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Son elde ettiğimiz eşitsizliği (1.14) eşitsizliğinde yerine yazarsak,

$$
\sum_{k=0}^{n} \left|\beta_k\right|^2 \le (n+1) \exp\left\{ \frac{1}{n+1} \sum_{m=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \left(k \left|a_k\right|^2 - \frac{1}{k} \right) \right\}
$$

İkinci Lebedev-Milin Eşitsizliğini (1.11) elde ederiz. (1.11) eşitsizliğinde eşitlik hali gerçekleşsin. O halde, Cauchy-Schwarz ve $1+x \leq e^x$ eşitsizliklerinde eşitlik durumlarını ele alırız. Cauchy-Schwarz eşitsizliğinde eşitlik durumundan,

$$\beta_{m-k} = \lambda_m k \overline{\alpha_k} \quad 1 \leq k \leq m \tag{1.15}$$

elde edilir. $1+x \leq e^x$ eşitsizliğinde eşitlik hali ancak $x = 0$ için sağlanır. Buradan, $A_n = n$ elde edilir.

$$\begin{aligned} m\beta_m &= \sum_{k=1}^{m} k\alpha_k \lambda_m k \overline{\alpha_k} = \lambda_m \sum_{k=1}^{m} k^2 \left|\alpha_k\right|^2 = \lambda_m A_m = m\lambda_m \\ \beta_m &= \lambda_m \quad , 1 \leq m \leq n \end{aligned}$$

elde edilir. $\beta_0 = 1$ olduğundan, (1.15) eşitliğini $k = m$ için tekrar yazarsak,

$$1 = \beta_0 = \lambda_m m \overline{\alpha_m} \quad , \quad 1 \leq m \leq n$$

$$\frac{1}{\lambda_m} = m\overline{\alpha_m}$$

elde ederiz. $m \geq 2$ için

$$\lambda_1 = \beta_1 = \lambda_m (m-1)\overline{\alpha_{m-1}} = \frac{\lambda_m}{\lambda_{m-1}}$$

$$\lambda_m = \lambda_1 \lambda_{m-1}$$

elde edilir. Böylelikle,

$$\beta_m = \lambda_m = \lambda_1 \lambda_{m-1} = \lambda_1^2 \lambda_{m-2} = \ldots = \lambda_1^m = \gamma^m \quad , \quad \gamma = \lambda_1$$

bulunur. (1.15) eşitliğinde $k = m$ için

$$1 = \gamma^m m \overline{\alpha_m} \Rightarrow m\overline{\alpha_m} = \overline{\gamma^m}$$

elde edilir. Fakat, $1 \leq k \leq n$ için

$$k = A_k = \sum_{m=1}^{k} m^2 \left|\alpha_m\right|^2 = \sum_{m=1}^{k} \gamma^{2m}$$

eşitliği özel halde $k = 1$ için de sağlanır. Buradan $|\gamma| = 1$ elde edilir. (1.15) eşitliğinden, $1 \leq k \leq n$ için

$$\gamma^{n-k} = \beta_{n-k} = \lambda_n k \overline{\alpha_k} = \gamma^n k \ \overline{\alpha_k}$$

$$\alpha_k = \frac{\gamma^k}{k} \ , \ 1 \leq k \leq n$$

sonucu elde edilir. ■

Teorem 1 *Milin Tahmininden Robertson Tahmini elde edilir.*

İspat. Milin Tahminin doğruluğunu kabul edelim. $g \in S^{(2)}$ olsun. O halde $\exists f \in S$ vardır ki, $g(z) = \sqrt{f(z^2)}$ dir. $f(z)$ ve $g(z)$ fonksiyonlarının Taylor açılımı

$$f(z) = z + \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \quad \text{ve} \quad g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{2k+1} z^{2k+1}$$

şeklinde olsun. Karekök dönüşümünden

$$\log\left(\frac{g(z)}{z}\right) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{f(z^2)}{z^2}\right)$$

yazılabilir. $\log\left(\frac{f(z)}{z}\right)$ ve $\log\left(\frac{g(z)}{z}\right)$ fonksiyonlarının seri açılımları sırasıyla

$$\log\left(\frac{f(z)}{z}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k z^k \ \text{ve} \ \log\left(\frac{g(z)}{z}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k z^k$$

olsun.

$$\log\left(\frac{g(z)}{z}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k z^k = \frac{1}{2}\log\left(\frac{f(z^2)}{z^2}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k z^{2k}$$

eşitliğinden;

$$\beta_k = \begin{cases} 0, \ k = 2n-1 \\ \frac{1}{2}\alpha_k, \ k = 2n \end{cases}$$

O halde, $\log\left(\frac{g(\sqrt{z})}{\sqrt{z}}\right)$ fonksiyonunun seri açılımı,

$$\log\left(\frac{g(\sqrt{z})}{\sqrt{z}}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k z^k$$

şeklindedir.

$$\begin{aligned}
\frac{g(\sqrt{z})}{\sqrt{z}} &= \frac{b_1 z^{\frac{1}{2}} + b_3 z^{\frac{3}{2}} + b_5 z^{\frac{5}{2}} \dots}{z^{\frac{1}{2}}} = b_1 + b_3 z + b_5 z^2 + \dots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} b_{2n+1} z^n \\
&= \exp\left(\log\left(\frac{g(\sqrt{z})}{\sqrt{z}}\right)\right) \\
&= \exp\left(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k z^k\right)
\end{aligned}$$

olduğundan lemma uyarınca,

$$\sum_{k=0}^{n} |b_{2k+1}|^2 \leq (n+1)\exp\left\{\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{k}\left(l\frac{|\alpha_l|^2}{4} - \frac{1}{l}\right)\right\}$$

elde edilir. Milin Tahmininden ise,

$$\exp\left\{\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{k}\left(l\frac{|\alpha_l|^2}{4} - \frac{1}{l}\right)\right\} \leq 1$$

dir. O halde,

$$\sum_{k=0}^{n} |b_{2k+1}|^2 \leq (n+1)$$

Robertson Tahmini elde edilir. ■

Bieberbach tahmini, 1984 yılında Louis De Branges tarafından ispatlanmıştır [2]. Ayrıca Louis De Branges (1.7) eşitsizliğinde eşitlik halinin ancak ve ancak Koebe fonksiyonunun tüm mümkün dönmeleri olan

$$f(z) = e^{-i\theta}k(e^{i\theta}z) \quad , \quad \theta \in [0, 2\pi)$$

fonksiyonları için mümkün olduğunu göstermiştir. De Branges öncelikle Milin Tahminini ispatlamıştır. Milin Tahmininden Bieberbach Tahmini elde edildiğinden, dolaylı olarak Bieberbach Tahminini de ispatlamıştır. De Branges ispatında yalınkat fonksiyonların parametrik gösterimiyle ilgili olan Loewner Zincir Teorisini kullanmıştır [4].

Bieberbach Tahmininin ispatlanmasından sonra, $\mathbb{D}$'de tanımlı belirli fonksiyon sınıfları için yapılan katsayı tahminlerine duyulan ilgi azalmıştır. $\mathbb{D}$'de analitik ve birebir fonksiyonlar için gösterilen katsayı eşitsizliklerinin keyfi basit bağlantılı bir bölgeye genelleme problemi ortaya çıkmıştır.

Faber 1903 yılında, "*$\mathbb{D}$'deki Taylor açılımının keyfi basit bağlantılı bölgelere genellenmesi* " problemiyle ilgilenmiştir. Sonuç olarak, sınırlı, basit bağlantılı bir Ω bölgesinde analitik olan $F(z)$ fonksiyonlarının Ω bölgesinin *Faber Polinomları* olarak adlandırılan $\{P_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ polinomlarından oluşan (1.16) serisi ile gösterilebildiğini ispatlamıştır [7] .

Faber, $P_n(z)$ $n = 0, 1, \ldots$ polinomlarını elde ederken tasvir fonksiyonlarından faydalanmıştır. Ω basit bağlantılı, sınırlı bir bölge ve $0 \in \Omega$ olsun. Rieman Tasvir Teoremi uyarınca $g(\infty) = \infty$ ve $z = \infty$ daki rezidüsü 1 olan

$$g : \Delta = \{z : |z| > 1\} \to \mathbb{C} \setminus \overline{\Omega}$$

fonksiyonu mevcuttur ve tektir. O halde, $g(z)$ fonksiyonunun $z = \infty$ civarındaki seri açılımı

$$g(z) = z + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{z^n} \quad , \quad |z| > 1$$

şeklindedir. Faber $P_n(z)$ $n = 0, 1, \ldots$ polinomlarını elde etmek için $\frac{w.g'(w)}{g(w)-z}$ üretici fonksiyonu tanımlamıştır. Bu fonksiyon yardımıyla

$$\frac{zg'(z)}{g(z) - w} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(z) w^{-n}, w \in \mathbb{C} \setminus \overline{\Omega}, \ \ |z| > 1 \tag{1.16}$$

$P_n(z)$ $n = 0, 1, \ldots$ polinomlarını elde etmiştir. Elde edilen bu polinomlara *Faber Polinomları* denir. Faber Polinomları cinsinden elde edilen (1.16) serisine de

Faber Serisi denir. Faber ayrıca göstermiştir ki, Faber Serisindeki A_n katsayıları

$$A_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=\rho} F(g(z)) z^{-n-1} dz \quad \rho > 1 \text{ } ve \text{ } 1'e \text{ yakın}$$

formülü ile elde edilebilir. A_n katsayılarına aynı zamanda $F(z)$ fonksiyonunun *Faber Katsayıları* denir.

Faber 1907 yılında (1.16) serisinin Ω bölgesinin kompakt alt kümelerinde $F(z)$ fonksiyonuna düzgün olarak yakınsadığını göstermiştir [8] .

1920'de ise, Ω bölgesinde analitik olan $F(z)$ fonksiyonuna en iyi düzgün yaklaşımın Faber serisi ile yapılabileceğini göstermiştir [9] . Bu nedenle Faber serisinin yaklaşım teorisinde önemi büyüktür.

2 TEMEL TANIM VE TEOREMLER

2.1 Faber Polinomlarının Tanımı

$$\sum_r = \left\{ g(z) \;\middle|\; \begin{array}{c} |z| > r \text{ bölgesini } \mathbb{C} \setminus \overline{\Omega} \text{ bölgesine analitik ve birebir} \\ \text{tasvir eden, } z = \infty \text{ daki rezidüsü 1 olan fonksiyonların sınıfı} \end{array} \right\}$$

Eğer $g(z) \in \sum_r$ ise $g(z)$ fonksiyonunun seri açılımı

$$g(z) = z + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n} \quad , |z| > r$$

şeklindedir. $w \in \mathbb{C}$ olmak üzere, $\frac{g(z)-w}{z}$ fonksiyonu $z = \infty$ noktasının bir civarında analitik ve $z = \infty$ daki değeri 1'dir. O halde, $\frac{g(z)-w}{z}$ fonksiyonu $z = \infty$ noktasının bir civarında 0'dan farklıdır. Dolayısıyla aynı civarda $\frac{g(z)-w}{z}$ fonksiyonu 1 deki değeri 0 olan analitik logaritmaya sahiptir. Sonuç olarak bu fonksiyon $z = \infty$ noktasının uygun bir civarında

$$\log\left(\frac{g(z)-w}{z}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{k}\right) P_k(w) z^{-k} \tag{2.1.1}$$

şeklinde Laurent serisine açılabilir. Burada $\left(-\frac{1}{k}\right)$ çarpanı uygunluk için eklenmiştir. (2.1.1) eşitliğinde her iki tarafı z'e göre türetirsek,

$$\begin{aligned}
\frac{(zg'(z) - g(z) + w)\,z}{z^2\,(g(z)-w)} &= \sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{k}\right) P_k(w)(-k) z^{-k-1} \\
-\frac{1}{z} + \frac{g'(z)}{g(z)-w} &= \sum_{k=1}^{\infty} P_k(w) z^{-k-1} \\
\frac{g'(z)}{g(z)-w} &= \sum_{k=0}^{\infty} P_k(w) z^{-k-1} \ , \ P_0 = 1 \\
\frac{zg'(z)}{g(z)-w} &= \sum_{k=0}^{\infty} P_k(w) z^{-k}
\end{aligned}$$

$$zg'(z) = [g(z) - w] \sum_{k=0}^{\infty} P_k(w) z^{-k} \tag{2.1.2}$$

eşitliğinden $P_k(w)$ polinimlarının şeklini belirleyelim.

$$g(z) = z + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n} \quad , \quad |z| > r$$

ifadesini (2.1.2) eşitliğinde yerine yazarsak

$$z - \sum_{n=1}^{\infty} n b_n z^{-n} = \left[z + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n} - w \right] \left[\sum_{n=0}^{\infty} P_n(w) z^{-n} \right]$$

elde edilir. Son elde edilen eşitlikte z in aynı kuvvetlerinin katsayıları eşitlenerek,

$$P_0(w) = 1$$

$$P_1(w) + (b_0 - w)P_0(w) = 0 \;\Rightarrow P_1(w) = w - b_0$$

$$\begin{aligned}
-b_1 &= P_2(w) + b_1 - wP_1(w) + b_0 P_1(w) \Rightarrow P_2(w) = w^2 - 2b_0 w + b_0^2 - 2b_1 \\
&\vdots \\
-nb_n &= P_{n+1}(w) + (b_0 - w).P_n(w) + \sum_{k=0}^{n} b_k P_{n-k}(w) \\
P_{n+1}(w) &= (w - b_0)P_n(w) - \sum_{k=1}^{n-1} b_k P_{n-k}(w) - (n+1)b_n \ , \ n = 1, 2, \ldots
\end{aligned}$$

bulunur.

Tanım 1 $\{P_n(w)\}_{n=0}^{\infty}$ *polinomlarına* $g(z)$ *fonksiyonunun (veya* Ω *bölgesinin) Faber polinomları denir.*

Yukarıdaki indirgeme formülünden $P_n(w)$'nın w'ya göre n. dereceden monik polinom olduğu görülür.

Teorem 2 *Bir* $r > 0$ *sayısı için* $g \in \sum_r$ *fonksiyonunun Faber polinomları* $\{P_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ *ise,* $P_n(z)$ *polinomu* $(g^{-1}(z))^n$ *fonksiyonunun* $z = \infty$*'daki esas kısmıdır. Yani,* $z \to \infty$ *iken*

$$\left(g^{-1}(z)\right)^n = P_n(z) + O\left(\frac{1}{z}\right)$$

İspat. $r' > r$ sayısı için $\gamma_{r'} = \{g(z) \mid |z| = r'\}$ ve $\gamma_{r'}$ eğrisinin iç bölgesi $\Omega_{r'}$ olsun. ρ sayısını $r' < \rho < \infty$ olacak şekilde seçelim. Cauchy İntegral Formülü uyarınca, üretici fonksiyon bağıntısından $z \in \overline{\Omega}_{r'}$ için

$$P_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\tau|=\rho} \frac{\tau^n g'(\tau)}{g(\tau) - z} d\tau = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_\rho} \frac{\left(g^{-1}(w)\right)^n}{w - z} dw \qquad (2.1.3)$$

$g(\infty) = \infty$ ve $g'(\infty) = 1$ olduğundan yeteri kadar büyük z'ler için

$$g^{-1}(z) = z + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n}{z^n}$$

şeklinde yazılabilir. Böylece $\frac{\left(g^{-1}(w)\right)^n}{w-z}$ fonksiyonu $w = \infty$ noktasında n. dereceden kutba sahiptir. (2.1.3) eşitliği yeteri kadar büyük R değerleri için

$$P_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|w|=R} \frac{\left(g^{-1}(w)\right)^n}{w - z} dw \qquad (2.1.4)$$

şeklinde yazılabilir.

$$\left(g^{-1}(w)\right)^n = w^n + D_1^{(n)} w^{n-1} + \ldots + D_n^{(n)} + \frac{D_{-1}^{(n)}}{w} + \frac{D_{-2}^{(n)}}{w^2} + \ldots \qquad (2.1.5)$$

$$\frac{1}{w - z} = \frac{1}{w} \frac{1}{1 - \frac{z}{w}} = \frac{1}{w} + \frac{z}{w^2} + \ldots + \frac{z^n}{w^{n+1}} + \ldots$$

yazılır ve çarpma işlemi yapılırsa, rezidü teoremi uyarınca (2.1.4) eşitliğinden

$$P_n(z) = z^n + D_1^{(n)} z^{n-1} + \ldots + D_n^{(n)}$$

elde edilir. Son elde ettiğimiz eşitliği, (2.1.5) eşitliğinde yerine yazarsak

$$\left(g^{-1}(w)\right)^n = P_n(w) + O\left(\frac{1}{w}\right)$$

elde edilir. ■

Örnek 1 *$g(z)=z\in\sum_1$ fonksiyonu $|z|>1$ bölgesini, $|z|>1$ bölgesine tasvir eder. $g(z)$ fonksiyonunun Faber polinomlarını bulalım.*

$$\frac{zg'(z)}{g(z)-w}=\frac{z}{z-w}=\frac{1}{1-\frac{w}{z}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{w^n}{z^n}$$

olduğundan $|z|<1$ birim dairesinin Faber polinomları

$$P_n(w)=w^n \quad , \quad n=0,1,2,\ldots$$

şeklindedir.

Örnek 2

$$E_r=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\frac{x^2}{(1+\frac{1}{r^2})^2}+\frac{y^2}{(1-\frac{1}{r^2})^2}<1, r>1\right\}$$

elipsinin Faber polinomları $P_n(z)=2^n r^{-n}T_n(\frac{1}{2}rz)$ $n=0,1,\ldots$dir. Öyle ki, burada

$$\begin{aligned} T_n(z) &= 2^{-n}\left\{\left[z+\sqrt{z^2-1}\right]^n+\left[z-\sqrt{z^2-1}\right]^n\right\} \ , \ n=0,1,2,\ldots \\ T_0(z) &= 1 \end{aligned}$$

n. dereceden monik Chebyshev polinomlarıdır.

$g(z)=z+\frac{1}{r^2z}$ fonksiyonu $\mathbb{D}$ nin dışını,

$$E_r=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\frac{x^2}{(1+\frac{1}{r^2})^2}+\frac{y^2}{(1-\frac{1}{r^2})^2}<1, r>1\right\}$$

elipsinin dış bölgesine tasvir eder.

$$g:\Delta\to\mathbb{C}\diagdown\overline{E_r}$$

$$\frac{zg'(z)}{g(z)-w}=\sum_{k=0}^{\infty}P_k(w)z^{-k}$$

eşitliğinden

$$\begin{aligned}\frac{zg'(z)}{g(z)-w} &= \frac{z\left[1-\frac{1}{r^2z^2}\right]}{z+\frac{1}{r^2z}-w}\\ &= \frac{r^2z^2-1}{r^2z^2-r^2wz+1}\\ &= 1+\frac{r^2wz-2}{r^2z^2-r^2wz+1}\end{aligned}$$

O halde,

$$\frac{zg'(z)}{g(z)-w} = 1+\frac{1}{r^2}\left[\frac{r^2wz-2}{(z-z_1)(z-z_2)}\right] \tag{2.1.6}$$

burada

$$\begin{aligned}z_{1,2} &= \frac{w\pm\sqrt{w^2-\frac{4}{r^2}}}{2}\\ &= \frac{rw\pm\sqrt{r^2w^2-4}}{2r}\end{aligned}$$

dir.

$$\frac{r^2wz-2}{z^2-wz+\frac{1}{r^2}} = \frac{A}{z-z_1}+\frac{B}{z-z_2}$$

Buradan

$$A+B=r^2w$$

$$A\frac{(rw-\sqrt{r^2w^2-4})}{2r}+B\frac{(rw+\sqrt{r^2w^2-4})}{2r}=2$$

sistemi çözülerek,

$$A=\frac{r}{2}\sqrt{r^2w^2-4}+\frac{r^2w}{2} \quad \textit{ve} \quad B=-\frac{r}{2}\sqrt{r^2w^2-4}+\frac{r^2w}{2}$$

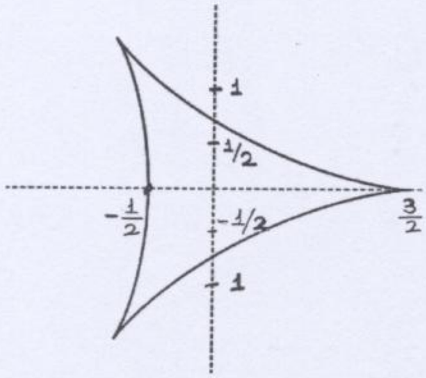
bulunur. Böylece (2.1.6) *eşitliğinden,*

$$
\begin{aligned}
\frac{zg'(z)}{g(z)-w} &= 1+\frac{1}{r^2}\left[\frac{\frac{r}{2}\sqrt{r^2w^2-4}+\frac{r^2w}{2}}{z-z_1}+\frac{-\frac{r}{2}\sqrt{r^2w^2-4}+\frac{r^2w}{2}}{z-z_1}\right] \\
&= 1+\frac{1}{2r}\left[\frac{rw+\sqrt{r^2w^2-4}}{z-\frac{rw+\sqrt{r^2w^2-4}}{2r}}+\frac{rw-\sqrt{r^2w^2-4}}{z-\frac{rw-\sqrt{r^2w^2-4}}{2r}}\right] \\
&= 1+\frac{1}{rz}\left[\frac{\frac{rw}{2}+\sqrt{\left(\frac{rw}{2}\right)^2-1}}{1-\frac{\frac{rw}{2}+\frac{\sqrt{(\frac{rw}{2})^2-1}}{r}}{z}}+\frac{\frac{rw}{2}-\sqrt{\left(\frac{rw}{2}\right)^2-1}}{1-\frac{\frac{rw}{2}-\frac{\sqrt{(\frac{rw}{2})^2-1}}{r}}{z}}\right] \\
&= 1+\sum_{n=1}^{\infty}r^{-n}\left\{\left[\frac{rw}{2}+\sqrt{\left(\frac{rw}{2}\right)^2-1}\right]^n z^{-n}+\left[\frac{rw}{2}-\sqrt{\left(\frac{rw}{2}\right)^2-1}\right]^n z^{-n}\right\} \\
&= 1+\sum_{n=1}^{\infty}r^{-n}\left\{\left[\frac{rw}{2}+\sqrt{\left(\frac{rw}{2}\right)^2-1}\right]^n+\left[\frac{rw}{2}-\sqrt{\left(\frac{rw}{2}\right)^2-1}\right]^n\right\}z^{-n}
\end{aligned}
$$

$$P_n(w)=2^n r^{-n}T_n\left(\frac{rw}{2}\right) \quad , \; P_0(w)=1$$

elde edilir.

Örnek 3 $g(z)=z+\frac{1}{2z^2}\in\sum_1 : |z|>1\to\mathbb{C}\setminus\overline{E}$, *Burada* E *bölgesi aşağıdaki şekilde gösterilen 3 köşeli hiposikloiddir.* E *bölgesinin Faber polinomlarını belirleyelim.*



$$b_0=0, b_2=\frac{1}{2}, b_n=0 \; n\geq 2$$

olduğundan $g(z)$ *fonksiyonunun Faber polinomları*

$$
\begin{aligned}
P_0(w) &= 1 \; , \; P_1(w)=w \; , \; P_2(w)=w^2 \\
P_3(w) &= wP_2(w)+3b_2-b_1P_1(w)=w^3+\frac{3}{2}
\end{aligned}
$$

$$P_{n+1}(w) = (w - b_0)\, P_n(w) - (n+1)\, b_n - \sum_{k=1}^{n-1} b_k P_{n-k}\,(w)$$

olarak elde edilir.

2.2 Faber Serisinin Özellikleri

$f\,(z)$ fonksiyonu $D\,(z_0, r) = \{z \mid \; |z - z_0| < r\}$ dairesinde analitik ise $f(z)$ fonksiyonunun

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\,(z - z_0)^n \quad , \quad z \in D\,(z_0, r) \tag{2.2.1}$$

şeklinde Taylor serisi ile temsil edilebileceğini biliyoruz. Bu serinin bildiğimiz bazı özelliklerini hatırlayalım.

(i) (2.2.1) ile verilen Taylor serisi $D\,(z_0, r)$ dairesinin kompakt alt kümelerinde $f(z)$ fonksiyonuna düzgün olarak yakınsar.

(ii) (2.2.1) serisinin yakınsaklık yarıçapı ρ ise,

$$\frac{1}{\rho} = \lim_{n \to \infty} \sup \left| \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \right|^{\frac{1}{n}} \quad , \quad \rho \geq r$$

(iii) $\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ katsayıları tek türlü belirlenir. Yani,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(z - z_0)^n \quad , \quad z \in D\,(z_0, r)$$

ise

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \quad , \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

şeklindedir.

$g(z)$ fonksiyonu $|z| = r$ çemberinin dış bölgesini γ kapalı eğrisinin dış bölgesine birebir ve örten olarak tasvir etsin. $Int(\gamma)$ bölgesinde analitik olan bir $f(w)$ fonksiyonu $g(z)$ fonksiyonunun Faber Polinomları tarafından oluşturulmuş

Faber serisi ile temsil edilebilir. Faber serisinin özellikleri yukarıda verilen Taylor serisinin özelliklerine benzerdir. Bu özellikler Schober [20]'de verilmiştir.

Teorem 3 *$g(z) \in \sum_r$ ve $g(z)$ fonksiyonunun Faber Polinomları $\{P_n(w)\}_{n=1}^{\infty}$ olsun. $R > r$ sayısı için $f(w)$ fonksiyonu*

$$\gamma_R = \{w = g(z) \mid \ |z| = R\}$$

eğrisinin iç bölgesinde analitik olsun. O halde aşağıdaki önermeler doğrudur:

(i) *$w \in Int(\gamma_R)$ ise*

$$f(w) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(w)$$

$r < \rho < R$ olmak üzere c_n katsayıları

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\tau|=\rho} \frac{f(g(\tau))}{\tau^{n+1}} d\tau \quad , \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

formülü ile elde edilir.

(ii) $\lim_{n\to\infty} \sup |c_n|^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{R}$ *dir.*

(iii) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n P_n(w)$ *serisi $Int(\gamma_R)$ bölgesinin kompakt alt kümelerinde $f(w)$ fonksiyonuna düzgün yakınsaktır.*

İspat. **(i)** $w \in Int(\gamma_R)$ olsun. ρ sayısını $r < \rho < R$ ve $w \in Int(\gamma_\rho)$ olacak şekilde seçelim. Burada,

$$\gamma_\rho = \{w = g(z) \mid \ |z| = \rho\}$$

şeklinde tanımlanan eğridir. Cauchy İntegral formülünden,

$$\begin{aligned} f(w) &= \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma_\rho} \frac{f(z)}{z-w}dz \\ &= \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\tau|=\rho} \frac{f(g(\tau))g'(\tau)}{g(\tau)-w}d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\tau|=\rho} f(g(\tau))\sum_{n=0}^{\infty}\frac{P_n(w)}{\tau^{n+1}}d\tau \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{P_n(w)}{\tau^{n+1}}$ serisi $|\tau| = \rho$ çemberinin içinde düzgün yakınsak olduğundan integral ile toplam işareti yer değiştirebilir.

$$f(w) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\tau|=\rho}\frac{f(g(\tau))}{\tau^{n+1}}d\tau\right)P_n(w)$$

Buradan,

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\tau|=\rho}\frac{f(g(\tau))}{\tau^{n+1}}d\tau$$

elde edilir.

(ii) $f(g(\tau))$ fonksiyonu $|\tau| = \rho$ kompakt kümesinde anlitik olduğundan aynı zamanda sınırlıdır. O halde,

$$M_\rho = \max_{|\tau|=\rho}|f(g(\tau))| < +\infty$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan,

$$|c_n| = \left|\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\tau|=\rho}\frac{f(g(\tau))}{\tau^{n+1}}d\tau\right| \le \frac{1}{2\pi}\frac{M_\rho}{\rho^{n+1}}2\pi\rho = \frac{M_\rho}{\rho^n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sup|c_n|^{\frac{1}{n}} \le \lim_{n\to\infty}\frac{(M_\rho)^{\frac{1}{n}}}{\rho} \le \frac{1}{\rho}$$

elde edilir. Son elde edilen eşitsizlikte $\rho \to R$ koşulunda limite geçilirse,

$$\lim_{n\to\infty}\sup|c_n|^{\frac{1}{n}} \le \frac{1}{R}$$

elde ederiz.

(iii)$K \subset Int(\gamma_R)$ kümesi kompakt olsun. ρ sayısını $K \subset Int(\gamma_\rho)$ olacak şekilde seçelim. $w \in K$ noktası alalım.

$$\frac{g'(z)}{g(z)-w} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P_k(w)}{z^{k+1}} \quad , \quad |z| \geq R$$

eşitliğinin her iki tarafını z^n ile çarpıp $|z| = \rho$ çemberi üzerinden integre edersek,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z|=\rho} \frac{z^n.g'(z)}{g(z)-w} dz &= \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z|=\rho} \left(\sum_{k=0}^{\infty} P_k(w) z^{n-k-1} \right) dz \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P_k(w) \left(\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z|=\rho} \frac{dz}{z^{k+1-n}} \right) \end{aligned}$$

elde ederiz. Ayrıca

$$\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z|=\rho} \frac{dz}{z^{k+1-n}} = \begin{cases} 1 \ , \ k = n \\ 0 \ , \ k \neq n \end{cases}$$

olduğundan,

$$P_n(w) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z|=\rho} \frac{z^n g'(z)}{g(z)-w} dz$$

elde edilir.

$$Q_\rho = \max_{|z|=\rho,\ w\in K} \left| \frac{g'(z)}{g(z)-w} \right| < +\infty$$

olduğundan $w \in K$ için

$$P_n(w) \leq Q_\rho \rho^{n+1}$$

eşitsizliği doğrudur. ρ' sayısını $\rho < \rho' < R$ olacak şekilde seçelim. **(ii)** nin ispatında olduğu gibi

$$|c_n| \leq \frac{c}{(\rho')^n}$$

olacak şekilde bir $c > 0$ sayısı vardır. $w \in K$ iken

$$|c_n P_n(w)| \leq \frac{c}{(\rho')^n} Q_\rho \rho^{n+1} = c\rho Q_\rho \left(\frac{\rho}{\rho'} \right)^n$$

eşitsizliğini elde ederiz. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\rho}{\rho'}\right)^n$ geometrik serisi yakınsak olduğundan Weierstrass M-Testine göre $\sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(w)$ serisi kompakt K kümesinde düzgün yakınsaktır. ■

3 BİR ELİPSTE ANALİTİK VE BİREBİR OLAN FONKSİYONLARIN FABER KATSAYILARI İÇİN ÜST SINIRLAR

Ω basit bağlantılı, sınırlı bir bölge, $0 \in \Omega$ ve $\partial\Omega$ analitik olsun. $F(z)$ fonksiyonu Ω bölgesinde analitik ise $F(z)$ fonksiyonunun

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(z) \qquad z \in \Omega \tag{3.1}$$

şeklinde bir seri açılımına sahip olduğunu biliyoruz. Faber katsayıları da

$$A_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=\rho} F(g(z)) z^{-n-1} dz \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{3.2}$$

formülü ile elde edilir.

S sınıfına paralel olarak Ω bölgesinde analitik, birebir ve

$$F(0) = 0 \quad F'(0) = 1$$

koşullarını sağlayan fonksiyonların sınıfını $S(\Omega)$ olarak tanımlayalım.

$\varphi(z)$, Ω bölgesini $\mathbb{D}$ bölgesine tasvir eden analitik, birebir ve

$$\varphi(0) = 0 \ , \ \varphi'(0) > 0$$

koşullarını sağlayan fonksiyon olsun. O halde, $\forall F(z) \in S(\Omega)$ için $\exists f \in S$ vardır ki

$$F(z) = \frac{f(\varphi(z))}{\varphi'(0)} \tag{3.3}$$

şeklinde yazılabilir. Böylelikle, (3.1) ile verilen Faber Serisi

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(f) P_n(z) \quad , \quad f \in S$$

şeklinde de ifade edilebilir. Buradan $A_n = A_n(f)$, $n = 1, 2, ...$ Faber katsayılarının $f \in S$ fonksiyonuna bağlı olduğu görülür.

Aynı anda hem iç tasvir, hem de dış tasvir fonksiyonunu elde etmek kolay değildir. Bunun için iç ve dış tasvir fonksiyonlarının kolaylıkla hesaplanabileceği bir bölge ele alalım.

$$\Omega = E_r = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{(1+\frac{1}{r^2})^2} + \frac{y^2}{(1-\frac{1}{r^2})^2} < 1, r > 1 \right\}$$

bölgesini göz önüne alalım.

$$g(z) = z + \frac{1}{r^2 z}$$

fonksiyonu $\mathbb{D}$ birim dairesinin dış bölgesini, $\mathbb{C} \setminus \overline{E_r}$ bölgesine tasvir eder.

$sn(z; q)$ nomu q ve modülü k_0 olan Jacobi eliptik sinüs fonksiyonu ve [15]

$$K = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k_0^2 t^2}}$$

olmak üzere,

$$\varphi(z) = \sqrt{k_0} sn \left(\frac{2K}{\pi} \sin^{-1} \frac{rz}{2}; \frac{1}{r^4} \right)$$

[18] fonksiyonu $E_r (r > 1)$ elipsini $\mathbb{D}$'ye tasvir eder. Burada $\varphi(z)$ fonksiyonunun

$$\varphi(0) = 0 \quad , \quad \varphi'(0) = \frac{rK\sqrt{k_0}}{\pi} > 0$$

koşullarını sağladığı görülür.

$\mathbb{D}$'de tanımladığımız fonksiyon sınıflarına paralel olarak E_r eliptik bölgesi için de benzer sınıflar tanımlayalım:

$\mathbf{S(E_r)}$**:** E_r $(r > 1)$ elipsinde analitik, birebir ve

$$F(0) = 0 \quad , \quad F'(0) = 1$$

koşullarını sağlayan fonksiyon sınıfı,

$\mathbf{C(E_r)}$:$\{F(z) \in S(E_r)\ :\ \ F(E_r)$ konveks$\}$,

$\mathbf{S^{(2)}(E_r)}$:$\{F(z) \in S(E_r)\ :\ F(z)$ tek fonksiyondur$\}$,

$\mathbf{P(E_r)}$: E_r $(r > 1)$ elipsinde analitik, ayrıca

$$F(0) = \frac{1}{\varphi'(0)} = \frac{\pi}{rK\sqrt{k_0}} \quad \text{ve} \quad \operatorname{Re}\{F(z)\} > 0$$

koşullarını sağlayan fonksiyonların oluşturduğu sınıf olsun.

Eğer $F(z)$ fonksiyonu $S(E_r), C(E_r), S^{(2)}(E_r)$ veya $P(E_r)$ sınıflarından herhangi birine aitse, $F(z)$ fonksiyonu (3.3) eşitliği ile belirlenebilir. Burada f fonksiyonu sırasıyla $S, C, S^{(2)}$ veya P sınıflarından birine aittir.

Lemma 2 *$F(z)$ fonksiyonu E_r $(r > 1)$ elipsinde analitik ve birebir fonksiyon olsun. O halde, $F(z)$ fonksiyonunun $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ Faber katsayıları*

$$A_n = \frac{r^n}{\pi} \int\limits_0^{\pi} F\left(\frac{2\cos\theta}{r}\right) \cos n\theta d\theta\ ,\ n = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.4}$$

formülü ile elde edilir.

İspat. $F(z) \in E_r$ olmak üzere, Örnek 2'de elde ettiğimiz gibi E_r $(r > 1)$ elipsinin Faber Polinomları

$$P_n(z) = 2^n r^{-n} T_n\left(\frac{1}{2}rz\right) \quad , \ n = 0, 1, \ldots$$

şeklindedir. Burada $T_n(z)$ $n = 0, 1, \ldots$ n. dereceden monik Chebyshev polinomlarıdır.

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n 2^n r^{-n} T_n\left(\frac{1}{2}rz\right)$$

$z = \frac{2\cos\theta}{r}$ yazılırsa,

$$F\left(\frac{2\cos\theta}{r}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n 2^n r^{-n} T_n(\cos\theta)$$

$T_n(\cos\theta) = 2^{1-n}\cos n\theta$ eşitliğinden,

$$F\left(\frac{2\cos\theta}{r}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n 2r^{-n}\cos n\theta$$

elde ederiz. Son elde ettiğimiz eşitliğin her iki tarafını $\cos m\theta$ ile çarpıp 0 dan π' ye integre edersek,

$$\int_0^{\pi} F\left(\frac{2\cos\theta}{r}\right)\cos m\theta d\theta = \int_0^{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} A_n 2r^{-n}\cos n\theta\cos m\theta d\theta$$

elde edilir. $\cos n\theta$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ fonksiyonlarının ortagonalliği kullanılırsa,

$$A_n = \frac{r^n}{\pi}\int_0^{\pi} F\left(\frac{2\cos\theta}{r}\right)\cos n\theta d\theta$$

elde edilir. ■

Sonuç 1 *Eğer $F(z)$ fonksiyonu $S(E_r), C(E_r), S^{(2)}(E_r)$ veya $P(E_r)$ sınıflarından herhangi birine aitse $F(z)$ fonksiyonunun Faber katsayıları*

$$A_n(f) = \frac{r^{n-1}}{K\sqrt{k_0}}\int_0^{\pi} f\left(\varphi\left(\frac{2\cos\theta}{r}\right)\right)\cos n\theta d\theta\ ,\quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.5}$$

formülü ile verilir. Burada, (3.3) *formülü ile belirlenen $f(z)$ fonksiyonu sırasıyla $S, C, S^{(2)}$ veya P sınıflarından birine aittir.*

İspat.

$$F\left(\frac{2\cos\theta}{r}\right) = \frac{f\left(\varphi\left(\frac{2\cos\theta}{r}\right)\right)}{\varphi'(0)} = 2\sum_{n=0}^{\infty} A_n(f) r^{-n}\cos n\theta$$

$$\frac{f\left(\varphi\left(\frac{2\cos\theta}{r}\right)\right)}{\frac{rK\sqrt{k_0}}{\pi}} = 2\sum_{n=0}^{\infty} A_n(f) r^{-n}\cos n\theta$$

$$\frac{\pi}{rK\sqrt{k_0}} f\left(\varphi\left(\frac{2\cos\theta}{r}\right)\right) = 2\sum_{n=0}^{\infty} A_n(f) r^{-n}\cos n\theta$$

Son elde ettiğimiz eşitliğin her iki tarafını $\cos m\theta$ ile çarpıp, 0 dan π' ye integre edersek,

$$\frac{\pi}{rK\sqrt{k_0}}\int_0^{\pi} f\left(\varphi\left(\frac{2\cos\theta}{r}\right)\right)\cos m\theta d\theta = 2\int_0^{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} A_n(f)r^{-n}\cos n\theta\cos m\theta d\theta$$

$\cos n\theta$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ fonksiyonlarının ortagonalliği kullanılırsa,

$$\frac{\pi}{rK\sqrt{k_0}}\int_0^{\pi} f\left(\varphi\left(\frac{2\cos\theta}{r}\right)\right)\cos n\theta d\theta = r^{-n}\pi A_n(f)$$

veya

$$A_n(f) = \frac{r^{n-1}}{K\sqrt{k_0}}\int_0^{\pi} f\left(\varphi\left(\frac{2\cos\theta}{r}\right)\right)\cos n\theta d\theta \ , \ \ n = 0, 1, 2, \ldots$$

elde edilir. ■

Sonuç 2 *Eğer* $F(z) \in S^{(2)}(E_r)$ *ise, o halde* $A_{2n}(f) = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ *dır.*

İspat. Sonuç 1'den

$$A_{2n}(f) = \frac{r^{2n-1}}{K\sqrt{k_0}}\int_0^{\pi} f\left(\varphi\left(\frac{2\cos\theta}{r}\right)\right)\cos 2n\theta d\theta$$

elde edilir.

$$A_{2n}(f) = \frac{r^{2n-1}}{K\sqrt{k_0}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\varphi\left(\frac{2\cos\theta}{r}\right)\right)\cos 2n\theta d\theta + \frac{r^{2n-1}}{K\sqrt{k_0}}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f\left(\varphi\left(\frac{2\cos\theta}{r}\right)\right)\cos 2n\theta d\theta$$

İkinci integralde $t = \pi - \theta$ değişken dönüşümü yapılırsa,

$$\begin{aligned} A_{2n}(f) &= \frac{r^{2n-1}}{K\sqrt{k_0}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\varphi\left(\frac{2\cos\theta}{r}\right)\right)\cos 2n\theta d\theta \\ &\quad + \frac{r^{2n-1}}{K\sqrt{k_0}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\varphi\left(\frac{2\cos(\pi-\theta)}{r}\right)\right)\cos(2n(\pi-\theta))d\theta \\ &= \frac{r^{2n-1}}{K\sqrt{k_0}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f\left(\varphi\left(\frac{2\cos\theta}{r}\right)\right) + f\left(\varphi\left(-\frac{2\cos\theta}{r}\right)\right)\right]\cos 2n\theta d\theta \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\varphi(z)$ iç tasvir fonksiyonu tek fonksiyon olduğundan,

$$A_{2n}(f)=\frac{r^{2n-1}}{K\sqrt{k_0}}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f\left(\varphi\left(\frac{2\cos\theta}{r}\right)\right)+f\left(-\varphi\left(\frac{2\cos\theta}{r}\right)\right)\right]\cos 2n\theta d\theta$$

eşitliği sağlanır. Ayrıca, $F(z)\in S^{(2)}(E_r)$ olduğunda, $f(z)\in S^{(2)}$ dir. Dolyısıyla,

$$A_{2n}(f)=\frac{r^{2n-1}}{K\sqrt{k_0}}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f\left(\varphi\left(\frac{2\cos\theta}{r}\right)\right)-f\left(\varphi\left(\frac{2\cos\theta}{r}\right)\right)\right]\cos 2n\theta d\theta=0\quad,\quad n=0,1,2,\ldots$$

elde edilir. ■

Sonuç 3 *Eğer $F(z)$ fonksiyonu $S(E_r),C(E_r),S^{(2)}(E_r)$ veya $P(E_r)$ sınıflarından herhangi birine aitse, $\{A_n(f)\}_{n=0}^{\infty}$ Faber katsayıları için*

$$A_n(f)=\frac{2^n n! r^{n-1}}{K\sqrt{k_0}(2n)!}\int\limits_0^{\pi}\left.(f(\varphi(x)))^{(n)}\right|_{x=\frac{2\cos\theta}{r}}\sin^{2n}\theta d\theta\quad n=0,1,2,\ldots \tag{3.6}$$

formülü geçerlidir. Yine burada f fonksiyonu birim dairede karşı gelen sınıfa aittir.

İspat. (3.5) formülünde

$$\cos n\theta=2^{n-1}T_n(\cos\theta)$$

eşitliği kullanılırsa,

$$A_n(f)=\frac{r^{n-1}2^{n-1}}{K\sqrt{k_0}}\int\limits_0^{\pi}f\left(\varphi\left(\frac{2\cos\theta}{r}\right)\right)T_n(\cos\theta)d\theta$$

bulunur. $x=\cos\theta$ değişken dönüşümü uygulanırsa,

$$A_n(f)=\frac{r^{n-1}2^{n-1}}{K\sqrt{k_0}}\int\limits_{-1}^{1}f\left(\varphi\left(\frac{2x}{r}\right)\right)\frac{T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

elde edilir. Ayrıca,

$$\frac{T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{(-1)^n\,2^{1-n}}{1.3\ldots(2n-1)}\frac{d^n\left[(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}\right]}{dx^n}$$

eşitliğinden,

$$A_n(f) = \frac{(-1)^n\, 2^{1-n}}{1.3\ldots(2n-1)} \frac{r^{n-1}2^{n-1}}{K\sqrt{k_0}} \int_{-1}^{1} f\left(\varphi\left(\frac{2x}{r}\right)\right) \frac{d^n\left[(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}\right]}{dx^n} dx$$

elde ederiz.

$$I = \int_{-1}^{1} f\left(\varphi\left(\frac{2x}{r}\right)\right) \frac{d^n\left[(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}\right]}{dx^n} dx$$

integralinde n kez kısmi integrasyon uygularsak,

$$A_n(f) = \frac{(-1)^n\, r^{n-1}}{1.3\ldots(2n-1)} \frac{(-1)^n 2^n n!}{K\sqrt{k_0}2^n n!} \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{n-\frac{1}{2}} \left[f\left(\varphi\left(\frac{2x}{r}\right)\right)\right]^{(n)} dx$$

$$A_n(f) = \frac{r^{n-1}2^n n!}{K\sqrt{k_0}(2n)!} \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{n-\frac{1}{2}} \left[f\left(\varphi\left(\frac{2x}{r}\right)\right)\right]^{(n)} dx$$

elde ederiz. $x = \cos\theta$ eski değişkenine geri dönersek,

$$A_n(f) = \frac{r^{n-1}2^n n!}{K\sqrt{k_0}(2n)!} \int_{0}^{\pi} f\left(\varphi\left(x\right)\right)^{(n)}\Big|_{x=\frac{2\cos\theta}{r}} \sin^{2n}\theta d\theta, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

elde edilir. ■

Teorem 4 *$k(z), c(z), p(z)$ ve $o(z)$ sırasıyla $(1.5), (1.4), (1.2)$ ve (1.6) ile belirlenmiş fonksiyonlar olmak üzere*

$$\left|3A_1(f) + r^{-2}A_3(f)\right| \le 3A_1(k) + r^{-2}A_3(k)\ ,\ f \in S \tag{3.7}$$

$$\left|3A_1(f) + r^{-2}A_3(f)\right| \le 3A_1(c) + r^{-2}A_3(c)\ ,\ f \in C \tag{3.8}$$

$$\left|3A_1(f) + r^{-2}A_3(f)\right| \le 3A_1(p) + r^{-2}A_3(p)\ ,\ \ f \in P \tag{3.9}$$

$$\left|3A_1(f) + r^{-2}A_3(f)\right| \le 3A_1(o) + r^{-2}A_3(o)\ ,\ \ f \in S^{(2)} \tag{3.10}$$

eşitsizlikleri sağlanır. $(3.7)-(3.10)$ *eşitsizliklerinde eşitlik durumu sırasıyla* $f(z) = k(z)$ *veya* $f(z) = -k(-z)$, $f(z) = c(z)$ *veya* $f(z) = -c(-z), f(z) = p(z)$ *veya* $f(z) = p(-z)$, $f(z) = o(z)$ *fonksiyonları için mümkündür.*

İspat. *$f \in S$ olsun. (3.7) eşitsizliğini elde etmek için*

$$L_n(f) = \int_0^{\pi} f\left(\varphi\left(\frac{2\cos\theta}{r}\right)\right)\cos^3\theta d\theta \tag{3.11}$$

integralini ele alalım.

$$L_n(f) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\varphi\left(\frac{2\cos\theta}{r}\right)\right)\cos^3\theta d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f\left(\varphi\left(\frac{2\cos\theta}{r}\right)\right)\cos^3\theta d\theta$$

İkinci integralde $t = \pi - \theta$ değişken dönüşümü uygulayalım. $\varphi(z)$ iç tasvir fonksiyonunun tek fonksiyon olmasından dolayı

$$L_n(f) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ f\left(\varphi\left(\frac{2\cos\theta}{r}\right)\right) - f\left(-\varphi\left(\frac{2\cos\theta}{r}\right)\right)\right\}\cos^3\theta d\theta \tag{3.12}$$

integralini elde ederiz. $f(z)$ fonksiyonunun $z = 0$ civarındaki

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

Taylor açılımını göz önüne alırsak,

$$\begin{aligned}
f\left(\varphi\left(\frac{2\cos\theta}{r}\right)\right) &= \varphi\left(\frac{2\cos\theta}{r}\right) + \sum_{n=2}^{\infty} a_n \varphi^n\left(\frac{2\cos\theta}{r}\right) \\
f\left(-\varphi\left(\frac{2\cos\theta}{r}\right)\right) &= -\varphi\left(\frac{2\cos\theta}{r}\right) + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n a_n \varphi^n\left(\frac{2\cos\theta}{r}\right)
\end{aligned}$$

$$f\left(\varphi\left(\frac{2\cos\theta}{r}\right)\right) - f\left(-\varphi\left(\frac{2\cos\theta}{r}\right)\right) = 2\left\{\varphi\left(\frac{2\cos\theta}{r}\right) + \sum_{m=1}^{\infty} a_{2m+1}\varphi^{2m+1}\left(\frac{2\cos\theta}{r}\right)\right\}$$

$$L_n(f) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{\varphi\left(\frac{2\cos\theta}{r}\right) + \sum_{m=1}^{\infty} a_{2m+1}\varphi^{2m+1}\left(\frac{2\cos\theta}{r}\right)\right\}\cos^3\theta d\theta \tag{3.13}$$

integralini elde ederiz. $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ iken $\cos^3\theta \geq 0$ ve $x \in \left[0, \frac{2}{r}\right]$ için $\varphi(x) \geq 0$ dır. Dolayısıyla,

$$|L_n(f)| \leq 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{\varphi\left(\frac{2\cos\theta}{r}\right) + \sum_{m=1}^{\infty} |a_{2m+1}|\,\varphi^{2m+1}\left(\frac{2\cos\theta}{r}\right)\right\}\cos^3\theta d\theta$$

Bieberbach tahminiden,

$$\begin{aligned} |L_n(f)| &\leq 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \varphi\left(\frac{2\cos\theta}{r}\right) + \sum_{m=1}^{\infty} (2m+1)\varphi^{2m+1}\left(\frac{2\cos\theta}{r}\right) \right\} \cos^3\theta d\theta \\ &= L_n(k(z)) = L_n(-k(-z)) \end{aligned}$$

elde ederiz. $L_n(f)$ *integraline karşı gelen katsayı kombinasyonu*

$$\begin{aligned} L_n(f) &= \int_0^{\pi} f\left(\varphi\left(\frac{2\cos\theta}{r}\right)\right)\cos^3\theta d\theta \\ &= \int_0^{\pi} f\left(\varphi\left(\frac{2\cos\theta}{r}\right)\right)\left\{\frac{3}{4}\cos\theta + \frac{1}{4}\cos 3\theta\right\} d\theta \\ &= \frac{K\sqrt{k_0}}{4}\left(3A_1(f) + r^{-2}A_3(f)\right) \end{aligned}$$

şeklindedir. O halde yukarıda elde ettiğimiz eşitsizlik takımı

$$\begin{aligned} \frac{K\sqrt{k_0}}{4}\left|3A_1(f) + r^{-2}A_3(f)\right| &\leq \frac{K\sqrt{k_0}}{4}\left|3A_1(k(z)) + r^{-2}A_3(k(z))\right| \\ &= \frac{K\sqrt{k_0}}{4}\left|3A_1(-k(-z)) + r^{-2}A_3(-k(-z))\right| \end{aligned}$$

şeklindedir. Buradan $f \in S$ *için,*

$$\begin{aligned} \left|3A_1(f) + r^{-2}A_3(f)\right| &\leq \left|3A_1(k(z)) + r^{-2}A_3(k(z))\right| \\ &= \left|3A_1(-k(-z)) + r^{-2}A_3(-k(-z))\right| \end{aligned}$$

olduğundan (3.7) *eşitsizliği elde edilir.*

$f \in C$ *olsun.* (3.8) *eşitsizliğini elde etmek için,* (3.13) *integralini ele alalım.* $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ *için* $\cos^3\theta \geq 0$ *ve* $x \in \left[0, \frac{2}{r}\right]$ *için* $\varphi(x) \geq 0$ *olduğundan,*

$$|L_n(f)| \leq 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \varphi\left(\frac{2\cos\theta}{r}\right) + \sum_{m=1}^{\infty} |a_{2m+1}|\, \varphi^{2m+1}\left(\frac{2\cos\theta}{r}\right) \right\} \cos^3\theta d\theta$$

elde ederiz. (1.3) *eşitsizliğinden,*

$$\begin{aligned} |L_n(f)| &\leq 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \varphi\left(\frac{2\cos\theta}{r}\right) + \sum_{m=1}^{\infty} \varphi^{2m+1}\left(\frac{2\cos\theta}{r}\right) \right\} \cos^3\theta d\theta \\ &= L_n(c(z)) = L_n(-c(-z)) \end{aligned}$$

elde edilir. O halde, $f \in C$ *fonksiyonu için* (3.8) *eşitsizliği ispatlanmış olur.*

$f \in P$ *olsun.* (3.9) *eşitsizliğini elde etmek için* (3.12) *integralini ele alalım.* $f \in P$ *fonksiyonunun* $z = 0$ *civarındaki*

$$f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$$

Taylor açılımını (3.12) *integralinde yerine yazarsak,*

$$\begin{aligned} L_n(f) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ 1 + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \varphi^m \left(\frac{2\cos\theta}{r} \right) - 1 - \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m b_m \varphi^m \left(\frac{2\cos\theta}{r} \right) \right\} \cos^3\theta d\theta \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} b_{2m-1} \varphi^{2m-1} \left(\frac{2\cos\theta}{r} \right) \right\} \cos^3\theta d\theta \end{aligned}$$

elde edilir. $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ *için* $\cos^3\theta \geq 0$ *ve* $\varphi\left(\frac{2\cos\theta}{r}\right) \geq 0$ *olduğundan,*

$$|L_n(f)| \leq 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} |b_{2m-1}| \varphi^{2m-1} \left(\frac{2\cos\theta}{r} \right) \right\} \cos^3\theta d\theta$$

eşitsizliğini elde ederiz. (1.1) *eşitsizliğinden,*

$$\begin{aligned} |L_n(f)| &\leq 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} 2\varphi^{2m-1} \left(\frac{2\cos\theta}{r} \right) \right\} \cos^3\theta d\theta \\ &= L_n(p(z)) \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca,

$$p\left(-\varphi\left(\frac{2\cos\theta}{r}\right)\right) - p\left(\varphi\left(\frac{2\cos\theta}{r}\right)\right) = -\left[p\left(\varphi\left(\frac{2\cos\theta}{r}\right)\right) - p\left(-\varphi\left(\frac{2\cos\theta}{r}\right)\right)\right]$$

olduğundan

$$|L_n(f)| \leq L_n(p(z)) = -L_n(p(-z))$$

eşitsizliği elde edilir. O halde, $f \in P$ *fonksiyonu için* (3.9) *eşitsizliği gerçeklenir.*

$f \in S^{(2)}$ *olsun.* $f(z)$ *fonksiyonu için* (3.12) *integrali*

$$L_n(f) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\varphi\left(\frac{2\cos\theta}{r}\right)\right) \cos^3\theta d\theta$$

şeklindedir. $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ *için* $\cos^3\theta \geq 0$ *olduğundan,*

$$|L_n(f)| \leq 2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left| f\left(\varphi\left(\frac{2\cos\theta}{r}\right)\right)\right| \cos^3\theta d\theta$$

eşitsizliğini elde ederiz. Distortion Teoremine göre [5],

$$|f(z)| \leq \frac{|z|}{1-|z|^2} \quad , \quad f \in S^{(2)}$$

eşitsizliği doğrudur. $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ *için* $\varphi\left(\frac{2\cos\theta}{r}\right) \geq 0$ *olduğundan,*

$$\begin{aligned} |L_n(f)| &\leq 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\varphi\left(\frac{2\cos\theta}{r}\right)}{1-\varphi^2\left(\frac{2\cos\theta}{r}\right)} \cos^3\theta d\theta \\ &= L_n(o) \end{aligned}$$

elde edilir. Dolasısıyla, $f \in S^{(2)}$ *fonksiyonu için* (3.10) *eşitsizliği elde edilmiş olur.* ■

Teorem 5 $k(z), c(z), p(z)$ *ve* $o(z)$ *sırasıyla* $(1.5), (1.4), (1.2)$ *ve* (1.6) *ile belirlenmiş fonksiyonlar olmak üzere*

$$\left|10A_1(f)+5r^{-2}A_3(f)+r^{-4}A_5(f)\right| \leq 10A_1(k)+5r^{-2}A_3(k)+r^{-4}A_5(k) \ , \ f \in S \tag{3.14}$$

$$\left|10A_1(f)+5r^{-2}A_3(f)+r^{-4}A_5(f)\right| \leq 10A_1(c)+5r^{-2}A_3(c)+r^{-4}A_5(c) \ , \ f \in C \tag{3.15}$$

$$\left|10A_1(f)+5r^{-2}A_3(f)+r^{-4}A_5(f)\right| \leq 10A_1(p)+5r^{-2}A_3(p)+r^{-4}A_5(p) \ , \ f \in P \tag{3.16}$$

$$\left|10A_1(f)+5r^{-2}A_3(f)+r^{-4}A_5(f)\right| \leq 10A_1(o)+5r^{-2}A_3(o)+r^{-4}A_5(o) \ , \ f \in S^{(2)} \tag{3.17}$$

eşitsizlikleri sağlanır. (3.14) − (3.17) *eşitsizliklerinde eşitlik durumu sırasıyla* $f(z) = k(z)$ *veya* $f(z) = -k(-z)$, $f(z) = c(z)$ *veya* $f(z) = -c(-z)$, $f(z) = p(z)$ *veya* $f(z) = p(-z)$, $f(z) = o(z)$ *fonksiyonları için mümkündür.*

İspat. $f \in S$ *olsun.* (3.14) *eşitsizliğini elde etmek için*

$$I_n(f) = \int_0^{\pi} f\left(\varphi\left(\frac{2\cos\theta}{r}\right)\right)\cos^5\theta d\theta \tag{3.18}$$

integralini ele alalım.

$$I_n(f) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\varphi\left(\frac{2\cos\theta}{r}\right)\right)\cos^5\theta d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f\left(\varphi\left(\frac{2\cos\theta}{r}\right)\right)\cos^5\theta d\theta$$

İkinci integralde $t = \pi - \theta$ *değişken dönüşümü uygulanırsa,* $\varphi(z)$ *iç tasvir fonksiyonunun tek olmasından dolayı*

$$I_n(f) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{f\left(\varphi\left(\frac{2\cos\theta}{r}\right)\right) - f\left(-\varphi\left(\frac{2\cos\theta}{r}\right)\right)\right\}\cos^5\theta d\theta \tag{3.19}$$

integrali elde edilir. $f \in S$ *fonksiyonunun,* $z = 0$ *civarında*

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

şeklinde Taylor açılımına sahip olduğunu biliyoruz. $f(z)$*'in Taylor açılımını* (3.19) *da yerine koyarsak,*

$$I_n(f) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{\varphi\left(\frac{2\cos\theta}{r}\right) + \sum_{m=1}^{\infty} a_{2m+1}\varphi^{2m+1}\left(\frac{2\cos\theta}{r}\right)\right\}\cos^5\theta d\theta \tag{3.20}$$

elde edilir. $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ *için* $\cos^5\theta \geq 0$ *ve* $\varphi\left(\frac{2\cos\theta}{r}\right) \geq 0$ *olduğundan,*

$$|I_n(f)| \leq 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{\varphi\left(\frac{2\cos\theta}{r}\right) + \sum_{m=1}^{\infty} |a_{2m+1}|\varphi^{2m+1}\left(\frac{2\cos\theta}{r}\right)\right\}\cos^5\theta d\theta$$

elde ederiz. Ayrıca Bieberbach tahmininden,

$$\begin{aligned} |I_n(f)| &\leq 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{\varphi\left(\frac{2\cos\theta}{r}\right) + \sum_{m=1}^{\infty} (2m+1)\varphi^{2m+1}\left(\frac{2\cos\theta}{r}\right)\right\}\cos^5\theta d\theta \\ &= I_n(k(z)) = I_n(-k(-z)) \end{aligned}$$

elde edilir. $I_n(f)$ *integraline karşı gelen katsayı kombinsyonu,*

$$\begin{aligned} I_n(f) &= \int_0^{\pi} f\left(\varphi\left(\frac{2\cos\theta}{r}\right)\right)\cos^5\theta d\theta \\ &= \int_0^{\pi} f\left(\varphi\left(\frac{2\cos\theta}{r}\right)\right)\left\{\frac{5}{8}\cos\theta+\frac{5}{16}\cos 3\theta+\frac{1}{16}\cos 5\theta\right\}d\theta \\ &= \frac{K\sqrt{k_0}}{16}\left(10A_1(f)+5r^{-2}A_3(f)+r^{-4}A_5(f)\right) \end{aligned}$$

şeklindedir. O halde, yukarıda elde ettiğimiz eşitsizlik takımı

$$\begin{aligned} &\frac{K\sqrt{k_0}}{16}\left|10A_1(f)+5r^{-2}A_3(f)+r^{-4}A_5(f)\right| \\ \leq\ &\frac{K\sqrt{k_0}}{16}\left|10A_1(k(z))+5r^{-2}A_3(k(z))+r^{-4}A_5(k(z))\right| \\ =\ &\frac{K\sqrt{k_0}}{16}\left|10A_1(-k(-z))+5r^{-2}A_3(-k(-z))+r^{-4}A_5(-k(-z))\right| \end{aligned}$$

şeklindedir. Buradan $f\in S$ *için*

$$\begin{aligned} \left|10A_1(f)+5r^{-2}A_3(f)+r^{-4}A_5(f)\right| &\leq \left|10A_1(k(z))+5r^{-2}A_3(k(z))+r^{-4}A_5(k(z))\right| \\ &= \left|10A_1(-k(-z))+5r^{-2}A_3(-k(-z))+r^{-4}A_5(-k(-z))\right| \end{aligned}$$

olduğundan (3.14) *eşitsizliği elde edilir.*

$f\in C$ *olsun.* (3.15) *eşitsizliğini elde etmek için* (3.20) *integralini ele alalım.* $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ *için* $\cos^5\theta\geq 0$ *ve* $\varphi\left(\frac{2\cos\theta}{r}\right)\geq 0$ *olduğundan,*

$$|I_n(f)|\leq 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{\varphi\left(\frac{2\cos\theta}{r}\right)+\sum_{m=1}^{\infty}|a_{2m+1}|\,\varphi^{2m+1}\left(\frac{2\cos\theta}{r}\right)\right\}\cos^5\theta d\theta$$

eşitsizliği elde edilir. $f\in C$ *fonksiyonu için* (1.3) *eşitsizliğinden,*

$$\begin{aligned} |I_n(f)| &\leq 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{\varphi\left(\frac{2\cos\theta}{r}\right)+\sum_{m=1}^{\infty}\varphi^{2m+1}\left(\frac{2\cos\theta}{r}\right)\right\}\cos^5\theta d\theta \\ &= I_n(c(z)) = I_n(-c(-z)) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylelikle, (3.15) *eşitsizliği ispatlanmış olur.*

$f \in P$ *olsun.* (3.16) *eşitsizliğini elde etmek için* (3.19) *integralini ele alalım.* $f \in P$ *fonksiyonunun* $z = 0$ *civarında*

$$f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$$

Taylor açılımını (3.19) *integralinde yerine yazarsak,*

$$\begin{aligned} I_n(f) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ 1 + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \varphi^m \left(\frac{2\cos\theta}{r} \right) - 1 - \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m b_m \varphi^m \left(\frac{2\cos\theta}{r} \right) \right\} \cos^5\theta d\theta \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} b_{2m-1} \varphi^{2m-1} \left(\frac{2\cos\theta}{r} \right) \right\} \cos^5\theta d\theta \end{aligned}$$

elde edilir. $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ *için* $\cos^5\theta \geq 0$ *ve* $\varphi\left(\frac{2\cos\theta}{r}\right) \geq 0$ *olduğundan,*

$$|I_n(f)| \leq 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} |b_{2m-1}| \, \varphi^{2m-1} \left(\frac{2\cos\theta}{r} \right) \right\} \cos^5\theta d\theta$$

elde edilir. (1.1) *eşitsizliğinden,*

$$\begin{aligned} |I_n(f)| &\leq 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \varphi^{2m-1} \left(\frac{2\cos\theta}{r} \right) \right\} \cos^5\theta d\theta \\ &= I_n(p(z)) \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca,

$$p\left(-\varphi\left(\frac{2\cos\theta}{r}\right)\right) - p\left(\varphi\left(\frac{2\cos\theta}{r}\right)\right) = -\left[p\left(\varphi\left(\frac{2\cos\theta}{r}\right)\right) - p\left(-\varphi\left(\frac{2\cos\theta}{r}\right)\right)\right]$$

olduğundan,

$$|I_n(f)| \leq I_n(p(z)) = -I_n(p(-z))$$

elde ederiz. Dolayısıyla, $f \in P$ *fonksiyonu için* (3.16) *eşitsizliği elde gerçeklenir.*

$f \in S^{(2)}$ *olsun.* $f(z)$ *fonksiyonu için* (3.19) *integrali*

$$I_n(f) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\varphi\left(\frac{2\cos\theta}{r}\right)\right) \cos^5\theta d\theta$$

şeklindedir. $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ *için* $\cos^5\theta \geq 0$ *olduğundan,*

$$|I_n(f)| \leq 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left|f\left(\varphi\left(\frac{2\cos\theta}{r}\right)\right)\right| \cos^5\theta d\theta$$

elde edilir. Distortion Teoreminden [4],

$$\left|f\left(\varphi\left(\frac{2\cos\theta}{r}\right)\right)\right| \leq \frac{\varphi\left(\frac{2\cos\theta}{r}\right)}{1-\varphi^2\left(\frac{2\cos\theta}{r}\right)}$$

eşitsizliği elde edilir. O halde,

$$\begin{aligned} |I_n(f)| &\leq 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\varphi\left(\frac{2\cos\theta}{r}\right)}{1-\varphi^2\left(\frac{2\cos\theta}{r}\right)} \cos^5\theta d\theta \\ &= I_n(o) \end{aligned}$$

sonucu elde edilir. Dolayısıyla, $f \in S^{(2)}$ *fonksiyonları için* (3.17) *eşitsizliği gerçeklenir.* ■

4 SONUÇ

Bu tezde öncelikle $\mathbb{D}$'ye paralel olarak elipsin iç bölgesinde analitik ve birebir fonksiyonlardan oluşmuş sınıflar tanımlanmıştır. Sonrasında ise eliptik bölgede analitik ve birebir fonksiyonların Faber katsayılarının uygun lineer kombiansyonları için $\mathbb{D}$'deki klasik katsayı eşitsizlikleri kullanılarak, her bir sınıf için keskin üst sınırlar elde edilmiştir. $S^{(2)}$ sınıfı hariç diğer tüm sınıflarda ekstremal fonksiyon sayısının iki olduğu ve bunun da elipsin invaryant dönme sayısına eşit olduğu saptanmıştır.

KAYNAKLAR

1. L. Bieberbach ‘Über die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlicte Abbildung des Eintheitskreises vermitteln. S.-B. Preuss. Akad Wiss (1916), 940-955

2. L. De Branges ‘A prof of the Bieberbach conjecture.’ Acta Math. 154 (1985), 137-152

3. C. Carathedory. ‘ Über den Variabilitatsberich der Koeffizienten von Pontenzreihen, die gegegbene Werte nicht annehmen.’ Math. Ann. 64 (1907), 95-115.

4. John B. Conway, Functions of One Complex, Variable II. Springer- Verlag, 1995

5. P. L. Duren. Univalent Functions. Springer –Verlag, 1983

6. M. Fekete, G. Szegö ‘Eine Bemerkung über ungrade schlichte Functionen.’ J. London Math. Soc. (1933), 85-89

7. G. Faber. ‘Über polynomishe Entwicklungen’ Math. Ann. 57 (1903), 389-408

8. G. Faber. ‘Über polynomishe Entwicklungen’ Math. Ann. 64 (1907), 116-135

9. G. Faber. ‘Über polynomishe Entwicklungen’ J. Reine Angew. Math. 150(1920), 79-106.

10. M. Golusin. ‘On Complete systems of functions in the complex domain.’ Leningrad Gos. Univ. Uchen. Zop. Ser. Mat. Nauk. (1939), 48-51

11. E. Haliloğlu. ‘Bounds for Certain Linear Combinations of the Faber Xoefficients of Functions Analytic in ana Elipse.’ Edinburg Mathematical Society (2007), 163-171

12. E. Haliloğlu. ‘Generalizations of Coefficient Estimates for Certain Classes of Analytic Functions.’ Proc. Japan Acad. (1997), 116-121

13. P. Hauser. ‘Über Entwicklungen analytisher Functionen nach gebietsabhangigen Polynomen.’ Math. Ann. 110 (1934), 1-11

14. Peter Henrici.Applied and Computational Complex Analysis.Wily Classics Library. 1993

15. D. F. Lawden. Elliptic Functions and applications. Springer –Verlag, 1989

16. K. Lowner. Untersuchungen über die Verzerrung bei konformen Abbildungen des Einheitskreises $|z| < 1$, die durch Functionen mit nicht vershwidender. Ableitung geliefert werden. S. – B. Sochs. Akad. Wiss. (1917), 89-106.

17. V. I. Milin ‘Estimation of Coefficients of odd univalent functions, in Metric Questions in the theory of Functions.(1980), 78-86

18. Z. Nehari, Conformal mapping. McGraw – Hill, 1952

19. W.W. Rogosinski ‘Über positive harmonishe Entwicklungen and typisch-reelle Potenzreihen’. Math. Z, (1932), 93-121.

20. G. Schober. Univalent functions selected topics. Lecture Notes in Math, Springer- Verlag, 1975

21. K. Suetin, ‘Fundamental Properties of Faber Polynomials.’ Russ. Math. Surv.(1964)

ÖZGEÇMİŞ

Tuğba YAVUZ, 1984 yılında İstanbul'da doğdu. İlk ve orta öğrenimini İstanbul'da tamamladı. 2007 yılında Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü Matematik Bölümünden mezun oldu. 2007-2008 Eğitim- Öğretim yılı güz döneminde Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü Matematik Bölümünde yüksek lisans eğitimine başlamıştır. Halen, bu bölümde araştırma görevlisi olarak çalışmalarına devam etmektedir.