

**T.C.  
ERCIYES ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**ÖRTÜ MORFİZMLERİ VE GENELLEŞTİRİLMİŞ  
MONODROMY GRUPOİDİ**

**Tezi Hazırlayan  
Berrin KILIÇARSLAN**

**Tezi Yöneten  
Prof. Dr. Osman MUCUK**

**Matematik Anabilim Dalı  
Doktora Tezi**

**Temmuz 2009  
KAYSERİ**

Prof. Dr. Osman MUCUK danışmanlığında **Berrin KILIÇARSLAN** tarafından hazırlanan “**Örtü Morfizmleri ve Genelleştirilmiş Monodromy Grupoidi**” adlı bu çalışma, jürimiz tarafından Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Doktora** tezi olarak kabul edilmiştir.

14.07.2009

**JÜRİ:**

Başkan : Prof. Dr. İlhan İÇEN *I. İÇEN*

Üye : Prof. Dr. Mehmet BARAN *M. Baran*

Üye : Prof. Dr. Osman MUCUK *O. Mucuk*

Üye : Prof. Dr. Himmet CAN *Himmet Can*

Üye : Yrd.Doç. Dr. Muammer KULA *Muammer Kula*

**ONAY:**

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulunun *04/08/2009* tarih ve *2009/25\_04* sayılı kararı ile onaylanmıştır.

*04.08/2009*



*N. Ayyıldız*  
Prof. Dr. Nusret AYYILDIZ  
Enstitü Müdürü

## TEŞEKKÜR

Doktora tezi olarak sunduğum bu çalışmada danışman hocam olmayı kabul edip değerli zamanını feda ederek benden yardımlarını hiç esirgemeyen hocam Sayın Prof. Dr. Osman MUCUK' a, tez izleme komitesi üyeliğini kabul ederek beni yalnız bırakmayan Sayın Prof. Dr. Himmet CAN, Sayın Prof. Dr. Mehmet BARAN ve Sayın Yrd. Doç. Dr. Muammer KULA hocalarıma öncelikle sonsuz teőekkürlerimi bir borç bilirim.

Bu tez çalışmasını yapabilecek bilgi birikimine sahip olmamda emeği geçen bütün hocalarıma ve manevi desteklerinden dolayı eşim Özgür KILIÇARSLAN' a ve aileme en içten teőekkürlerimi sunarım.

## ÖRTÜ MORFİZMLERİ VE GENELLEŞTİRİLMİŞ MONODROMY GRUPOİDİ

**Berrin KILIÇARSLAN**

**Erciyes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü  
Doktora Tezi, Temmuz 2009  
Tez Danışmanı: Prof. Dr. Osman MUCUK**

### ÖZET

$X$ , basit irtibatlı bir örtüye sahip olan irtibatlı bir topolojik uzay,  $x_0 \in X$  ve  $H$  da  $X$  in  $x_0$  noktasındaki  $\pi_1(X, x_0)$  temel grubunun bir alt grubu ise  $H$  ya karşılık gelen topolojik uzayların bir  $p: \tilde{X}_H \rightarrow X$  örtü fonksiyonu vardır. Burada eğer  $X$  bir topolojik grup ise  $\tilde{X}_H$  da bir topolojik gruptur. Bu yolla  $X$  in grup yapısının herhangi bir örtüye yükseleceği sonucu elde edilir.

Diğer yandan bir  $G$  topolojik grupoidinin  $MG$  monodromy groupoidi,  $G_x$  starlarının  $\tilde{G}_x$  evrensel örtülerinin birleşimi olarak tanımlanır. Bu tezde birinci olarak  $MG$  monodromy groupoidinin bir grup-grupoid olması için  $G$  üzerindeki gerekli olan şartlar belirlenmiştir. İkinci olarak  $G_x$  starlarının evrensel örtülerinden ziyade daha genel olan örtüler alınarak bir genelleştirilmiş monodromy grupoidi elde edilmiştir. Bunlara ilaveten genelleştirilmiş monodromy grupoidi üzerinde star topolojik grupoid ve topolojik grupoid yapılarının varlığı araştırılmıştır.

Bu tezde son olarak  $H$ - uzayı ve  $H$ - grubu yapılarının örtüleri ele alınmış, bunlarla ilgili bazı sonuçlar verilmiştir. Bu düşünce bize  $H$ -grupların temel grubunu tanımlama olanağı vermiştir. Eğer  $X$  bir topolojik grup ise  $X$  in topolojik grup örtülerinin kategorisi  $TGCov/X$  ile  $\pi_1 X$  in grup-grupoid örtülerinin kategorisi  $GdCov/\pi_1 X$  nin denk olduğu önceden bilinmektedir. Topolojik gruptan daha genel olan  $H$ - grubu kavramı için de benzer bir kategori denkliği verilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Örtü Uzayları, Genelleştirilmiş Monodromy Grupoidi,  $H$ -uzayı ,  $H$ -grubu

**COVERINGS MORPHISMS AND GENERALIZED  
MONODROMY GROUPOID**

**Berrin KILIÇARSLAN**  
**Erciyes University, Graduate School of Natural and Applied Sciences**  
**Ph.D. Thesis, July 2009**  
**Thesis Supervisors: Prof. Dr. Osman MUCUK**

**ABSTRACT**

If  $X$  is a connected topological group which has a simply connected cover,  $x_0 \in X$  and  $H$  a subgroup of fundamental group  $\pi_1(X, x_0)$ , then there is a covering map  $p: \tilde{X}_H \rightarrow X$  of topological groups corresponding to  $H$ . Here if  $X$  is a topological group, then  $\tilde{X}_H$  is a topological group. By this way, the result that the group structure lifts to covering space is obtained.

On the other hand monodromy groupoid  $MG$  of a topological groupoid  $G$  is defined as a union of universal coverings  $\tilde{G}_x$ 's of  $G_x$  stars. In this thesis, primarily for the monodromy groupoid  $MG$  to become a group-groupoid, the necessary conditions over  $G$  are stated. Secondly it is obtained a general monodromy groupoid  $(MG)_H$  using more general coverings instead of universal coverings of  $G_x$  stars. In addition to these, it is investigated if there exists star topological groupoid and topological groupoid structures over  $(MG)_H$ .

In this thesis finally, the coverings of the structures of  $H$ -space and  $H$ -group are considered and some results regarding these are given. This progress gives us the chance to define fundamental groups of  $H$ -groups. If  $X$  is a topological group, then equivalence of the category of topological group coverings of  $X$ ,  $TGCov/X$  and the category of group-groupoid coverings of  $\pi_1 X$ ,  $GdCov/\pi_1 X$  is previously known. Further, it is given a similar equivalence of the category for  $H$ -group structure which is more general than topological group.

**Keywords:** Covering Spaces, Generalized Monodromy Groupoid,  $H$ -Space,  $H$ -group

## İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY.....	i
TEŞEKKÜR.....	ii
ÖZET.....	iii
ABSTRACT.....	iv
1. BÖLÜM	
GİRİŞ.....	1
2. BÖLÜM	
TEMEL TANIM VE TEOREMLER.....	6
2.1. Temel Kavramlar.....	6
2.2. Kategori.....	7
2.3. Temel Grup.....	11
2.4. Örtü Uzayları.....	13
3. BÖLÜM	
TEMEL GRUPOİD ve MONODROMY GRUPOİDİ.....	16
3.1. Grupoid .....	16
3.2. Grup-Grupoid.....	21
3.3. Monodromy Grupoid.....	23
4. BÖLÜM	
GENELLEŞTİRİLMİŞ MONODROMY GRUPOİD.....	33
4.1. Topolojik Grublarda Örtü Grubunun Varlığı.....	33
4.2. Genelleştirilmiş Monodromy Grupoid.....	36
5. BÖLÜM	
$H$ -UZAYI ve $H$ -GRUBU.....	47
5.1. $H$ - Uzayı.....	47
5.2. $H$ -Grubu.....	52
KAYNAKLAR.....	65
ÖZGEÇMİŞ.....	67

## 1. BÖLÜM

### GİRİŞ

Her morfizmi bir izomorfizm olan kategoriye bir *grupoid* denir. Bir grupoid, çok objeli bir grup gibi düşünüleceğinden gruptan daha genel bir kavramdır. Grupoid yapısı ilk olarak 1926 da Branth [1] tarafından tanıtılmıştır.

Bir  $X$  topolojik uzayı üzerinde tanımlanan tüm eğrilerin (uç noktalara göre) homotopi sınıflarının  $\pi_1 X$  cümlesi eğrilerin birleşimine göre  $X$  üzerinde bir grupoiddir [2]. Temel grupoid olarak bilinen bu grupoid yapısı topolojik uzayların kategorisinden grupoidlerin kategorisine bir fanktor belirler. Bu fanktor bazı topolojik problemlerin cebirsel problemlere dönüşmesini sağlar. İrtibatlı olan bir  $X$  uzayı basit irtibatlı bir örtüye sahip ise  $\pi_1 X$  temel grupoidinin bir topolojik grupoid olduğu gösterilmiştir [3].

Monodromy grupoid yapısı 1981-1985 yıllarında J.Paradines tarafından R.Brown a görüşmelerinde açıklanmış ve bu yapının tanımı R.Brown [2] tarafından aşağıdaki şekilde taslak haline getirilmiştir.

$G$  bir topolojik grupoid ve  $W$  da tüm birimleri kapsayan  $G$  nin açık bir alt cümlesi olsun. Grupoid yapısının  $W$  cümlesi üzerine kısıtlaması *pregrupoid* olarak adlandırılan bir yapı oluşturur. Yani  $W$ ,  $s, t : W \rightarrow O_G$  başlangıç ve bitiş fonksiyonlarına sahip ve  $t(a) = s(b)$  olacak şekilde  $a, b \in W$  için  $ba \in W$  işlemi tanımlıdır ( Pregrupoidler ile ilgili daha fazla bilgi için Crowell-Smythe [4] e bakılabilir).  $F(W)$ ,  $W$  üzerindeki free grupoid olsun.  $N$ ,  $ba$ ,  $a, b \in W$  olmak üzere  $[ba]^{-1}[ba]$  formundaki elemanlar tarafından üretilen  $F(W)$  nın normal alt grupoidi olsun.  $F(W)/N$  bölüm grupoidi

$M(G;W)$  ile gösterilir ve  $G$  nin *monodromy grupoidi* olarak adlandırılır [5]. Bu yolla elde edilen  $M(G,W)$  grupoidi için herhangi bir  $f : W \rightarrow H$  lokal morfizmi bir  $f : M(G,W) \rightarrow H$  grupoid morfizmine genişler. Dolayısıyla monodromy grupoidi bir lokaldan globala problemi olarak göz önüne alınabilir.

Monodromy groupoidinin diğer bir yapısı starların evrensel örtü kavramı kullanılarak [6] tarafından aşağıdaki şekilde verilmiştir. Basit irtibatlı bir örtüye sahip olan irtibatlı bir  $X$  topolojik uzayı ile bir  $x \in X$  noktası verilsin.  $X$  uzayında  $x$  noktasından başlayan eğrilerin (uç noktalara göre) homotopi sınıflarının cümlesi  $\tilde{X}_x$  olmak üzere  $\tilde{X}_x$  deki her bir homotopi sınıfını eğrinin uç noktasına eşleyen  $p : \tilde{X}_x \rightarrow X$  fonksiyonu verilsin.  $X$  uzayının  $x$  noktasındaki evrensel örtüsünün  $(\tilde{X}_x, p)$  çifti olduğu biliniyor.

Şimdi  $G$  bir topolojik grupoid ve her bir  $G_x$  starı (başlangıcı  $x$  olan morfizmlerin sınıfı) basit irtibatlı bir örtüye sahip olsun.  $G_x$  uzayının  $1_x$  (birim) deki evrensel örtüsü  $(\tilde{G}_x)_{1_x}$  olsun. O halde yukarıdaki açıklamaya göre  $(\tilde{G}_x)_{1_x} = (\pi_1(G_x))_{1_x}$  dır. Burada  $(\tilde{G}_x)_{1_x}$  in elemanları başlangıcı  $1_x$  olan  $G_x$  deki eğrilerin homotopi sınıflarından oluşur. Yani  $a(0)=1_x$ ,  $a(1)=g$  ve  $\forall t \in [0,1]$  için  $s(a(t))=x$  olacak şekildeki bir  $a : [0,1] \rightarrow G_x$  eğrisi için  $[a]$  homotopi sınıfı  $(\tilde{G}_x)_{1_x}$  nin bir elemanıdır.  $MG$  ile gösterilen  $G$  nin monodromy grupoidi  $MG = \bigcup_{x \in O_G} (\tilde{G}_x)_{1_x}$  ile tanımlanır. Burada

$Ob(MG) = Ob(G)$  ve her  $x, y \in Ob(G)$  için  $MG(x, y)$  başlangıcı  $1_x$  ve bitimi ise  $t(g) = y$  olacak şekilde  $g \in G_x$  olan  $G_x$  deki eğrilerinin homotopi sınıfıdır.  $MG$ ,  $O_G$  üzerinde;

$$MG(x, y) \times MG(y, z) \rightarrow MG(x, z), ([a], [b]) \mapsto [b * a]$$

şeklinde tanımlı işlemi ile bir grupoid olup bu grupoid  $G$  nin *monodromy grupoidi* olarak adlandırılır [5,6] .

Her iki yolla tanımlanan  $M(G, W)$  ve  $MG$  grupoidlerinin  $G$  ve  $W$  üzerinde verilen bazı özel şartlar altında denk olduğu örtü fonksiyonu özellikleri kullanılarak [5] referansında gösterilmiştir.

Özel olarak eğer  $G$  bir topolojik grup ise  $G$  nin monodromy grupoidi  $G$  nin evrensel örtüsü olur. Eğer  $X$  bir topolojik uzay ise  $G=X \times X$  bir topolojik grupoid ve  $G$  nin monodromy grupoidi  $\pi_1 X$  temel grupoidi olur. Burada  $G$  nin objeri  $X$  in elemanları olup bir  $(x, y)$  çifti  $G$  de  $x$  den  $y$  ye bir morfizm olarak alınır. Morfizlerin birleşimi ise  $(y, z) \circ (x, y) = (x, z)$  olarak tanımlanır. O halde monodromy grupoid yapısı hem evrensel örtü yapısını, hem de temel grupoid kavramını genelleştiren bir yapıdır.

Grupoidlerin kategorisinde bir grup objesi bir *grup-grupoid* olarak adlandırılır [7]. O halde  $G$  bir grup-grupoid ise hem objelerin sınıfı hem de morfizmlerin sınıfı birer grup ve grup işlemini oluşturan fonksiyonlar birer fanktordur. Bu kavram bazı kaynaklarda grupların kategorisinde internal grupoid olarakta adlandırılır [8, 9]. Bunlara ilaveten bu grup yapıları da topolojik grup ise buna *topolojik grup-groupoid* denir. Eğer  $X$  bir topolojik grup ise  $\pi_1 X$  temel grupodi bir grup-grupoiddir [7].

Bu tezde yapılan çalışmalardan birincisi  $G$  bir topolojik grup-grupoid iken  $MG$  monodromy grupodinin bir grup-grupoid olduğunu göstermektedir.

İkinci olarak  $G$  bir topolojik grupoid olmak üzere  $G_x$  starlarının evrensel örtülerinden ziyade daha genel örtüleri alınarak bir  $(MG)_H$  monodromy grupoidi elde edilmiştir. Bunun için bir  $G$  topolojik grupoidi ve  $\forall g \in G(x, y)$  için  $\pi_1(R_g) : \pi_1(G_y) \rightarrow \pi_1(G_x)$ ,  $[a] \mapsto [a.g]$  grupoid izomorfizmi altında invaryant olan bir  $H \leq \pi_1 G$  normal alt grupoidi seçilerek  $O_G$  üzerinde bir

$$(MG)_H = \bigcup_{x \in O_G} (\tilde{G}_x)_{H(1_x)}$$

grupoidi tanımlanır. Bu şekilde elde edilen  $(MG)_H$ , *genelleştirilmiş monodromy groupoidi* olarak adlandırılmıştır. Bölüm 4 de  $(MG)_H$  üzerinde bir star topolojik grupoid ve topolojik grupoid yapısının olduğu gösterilmiştir.

Ayrıntılı tanımını Bölüm 2 de verilen topolojik örtü uzayı kavramı topolojinin yanı sıra cebir ve geometri gibi matematik dallarında önemli uygulamalara sahiptir. Bu kavram bazı uzayların temel gruplarının hesaplanmasında kolaylık sağlar. Örneğin bir  $X$  topolojik uzayının bir  $x$  noktasındaki temel grubu  $X$  in bu noktadaki evrensel örtüsünün fonksiyonunun çekirdeğidir.

$X$  irtibatlı bir topolojik grup,  $e \in X$  birim eleman ve  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  topolojik uzayların bir örtü fonksiyonu olsun. Burada  $\tilde{X}$  sadece bir topolojik uzaydır. Bunlara ilaveten eğer  $\tilde{X}$  basit irtibatlı ve  $\tilde{e}$  de  $p(\tilde{e}) = e$  olacak şekilde  $\tilde{X}$  nın bir elemanı ise birim eleman  $\tilde{e}$  olacak şekilde  $\tilde{X}$  üzerinde bir grup yapısı vardır. Bu grup yapısına göre  $\tilde{X}$  bir topolojik grup ve  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  de sürekli bir grup homomorfizmidir. Örtü uzaylarında fonksiyonların yükselmelerini kullanarak bunu ispatlamak kolaydır [10]. Fakat uzayların irtibatsız olması durumunda bu problem oldukça karmaşıktır. Bununla ilgili ilk olarak Taylor [11] tarafından bir kriter verilmiştir. Son zamanlarda Mucuk [5], Brown ve Mucuk [10] tarafından grupoid ve crossed module kavramları kullanılarak bu problemin çözümü ile ilgili daha genel bir kriter verilmiştir.

Bununla ilgili olarak bir  $X$  topolojik uzayı için bir örtü uzayının varlığı örneği Rotman [12] tarafından verilmiştir. Burada  $X$  basit irtibatlı bir örtüye sahip olan irtibatlı bir topolojik uzay,  $x_0 \in X$  ve  $H$  da  $X$  in  $x_0$  noktasındaki  $\pi_1(X, x_0)$  temel grubunun bir alt grubu olmak üzere  $H$  ye karşılık gelen bir  $p: \tilde{X}_H \rightarrow X$  örtü fonksiyonu elde edilmiştir. Burada eğer  $H$  sadece birim elemandan oluşan bir alt grup ise  $p: \tilde{X}_H \rightarrow X$  evrensel bir örtüdür. Bunlara ilaveten eğer  $X$  bir topolojik grup ise  $p: \tilde{X}_H \rightarrow X$  bir grup homomorfizmi olacak şekilde  $\tilde{X}_H$  üzerinde bir grup yapısı vardır. Bu grup ile birlikte  $\tilde{X}_H$  bir topolojik gruptur. Buradan hareketle bir  $X$  topolojik grubunda grup işleminin herhangi bir  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  örtü fonksiyonu ile  $\tilde{X}$  örtüsüne yükseldiği sonucu elde edilir. Bu sonuç bir  $X$  topolojik grubunun örtülerinin kategorisi ile  $X$  in temel grupoidinin grupoid örtülerinin denkliği kullanılarak gösterilmiştir [2].

Bölüm 5 de verilen diğer bir çalışma ise bu düşüncenin topolojik gruplardan ziyade  $H$ -uzaylarına uygulanarak bununla ilgili bazı sonuçların elde edilmesi olmuştur.

Bu tezde son olarak bir  $(X, x_0)$   $H$ -grubunun  $\pi_1 X$  temel grupoidi araştırılarak bu amaca uygun olarak bir  $H$ - grup grupoid tanımı verilmiştir. Bu tanım literatürde kategorik grup olarak bilinen kavrama oldukça benzer olup biraz farklıdır. Buna ilaveten  $(X, x_0)$   $H$ - grubunun örtü morfizmlerinin kategorisi  $HGCov/(X, x_0)$  ile  $\pi_1 X$   $H$ -grup grupoidinin örtü morfizmlerinin kategorisi  $HGGdCov/\pi_1 X$  nin birbirine denk olduğu gösterilmiştir.

## 2. BÖLÜM

### TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde, ileri bölümlerde kullanılacak olan bazı temel kavramlar ile kategori, kategoriler arasındaki fonktörler ve kategorilerin denkliği gibi kavramlar tanıtılacaktır. Bu kavramlardan bazıları bu sahada iyi bilinen kavramlar olduğundan çok fazla referans belirtilmemiştir.

#### 2.1. Temel Kavramlar

Bu kesimde eğrisel irtibatlı topolojik uzay ve topolojik grup gibi kavramlar tanıtılmıştır.

**Tanım 1:**  $X$  bir topolojik uzay ve  $r \geq 0$  olmak üzere  $\alpha(0) = x$  ve  $\alpha(r) = y$  olacak şekildeki sürekli bir  $\alpha: [0, r] \rightarrow X$  fonksiyonuna  $x$  den  $y$  ye  $r$  uzunluğunda bir *eğri* denir. Özel olarak  $\alpha(0) = x$  ve  $\alpha(1) = y$  olan  $\alpha: [0, 1] \rightarrow X$  sürekli fonksiyonuna ise  $x$  den  $y$  ye bir *birim eğri* denir. Eğer  $\alpha(0) = \alpha(1)$  ise  $\alpha: [0, 1] \rightarrow X$  ya *kapalı bir eğri* denir.

**Tanım 2.1.2:** Bir  $X$  topolojik uzayında her bir  $x, y \in X$  nokta çifti için  $X$  de  $x$  den  $y$  ye bir eğri varsa bu  $X$  uzayına *eğrisel irtibatlı uzay* denir.

**Tanım 2.1.3:** Bir  $X$  topolojik uzayında her  $x, y \in X$  nokta çiftini birleştiren doğru parçası bu uzay içinde kalıyorsa, yani her  $t \in [0, 1]$  için  $(1-t)x + yt \in X$  ise bu uzaya *konveks uzay* denir.

O halde açık olarak konveks bir uzay eğrisel irtibatlıdır.

**Tanım 2.1.4:**  $X$  herhangi bir topolojik uzay olsun. Her bir  $x \in X$  ve  $x$  in her  $U$  komşuluğu için  $x \in V \subseteq U$  olacak şekilde eğrisel irtibatlı olan bir  $V$  açık komşuluğu varsa  $X$  uzayına *yerel eğrisel irtibatlı* denir.

**Tanım 2.1.5:**  $G$  bir grup,  $\tau$  da  $G$  üzerinde bir topoloji olsun. Eğer grup yapısını oluşturan

$$i) m : G \times G \rightarrow G, (a, b) \rightarrow ab$$

$$ii) u : G \rightarrow G, a \rightarrow a^{-1}$$

fonksiyonları sürekli ise  $G$  ye bu topoloji ile birlikte bir *topolojik grup* denir [13].

**Not 2.1.6 :** Burada  $m$  ve  $n$  fonksiyonları sürekli ancak ve ancak fark fonksiyonu olarak adlandırılan

$$\delta : G \times G \rightarrow G, (a, b) \rightarrow ab^{-1}$$

fonksiyonu sürekli dir.

**Örnek 2.1.7:**  $U$ , alışılmış topolojisine göre  $(\mathfrak{R}, +, U)$  bir topolojik gruptur.

**Önerme 2.1.8:**  $G$  ve  $H$  birer topolojik grup olsun. Eğer  $f : G \rightarrow H$  dönüşümü sürekli ve  $\forall x, y \in G$  için  $f(x \circ y) = f(x)f(y)$  ise  $f$  ye bir *topolojik grup morfizmi* denir.

## 2.2. Kategori

Kategori teorisi matematiksel yapılar ve bunlar arasındaki ilişkilerle ilgili bir matematik kuramıdır. Bir kategori birbirleriyle ilişkili matematiksel nesnelere ve bunlar arasındaki morfizmlerden oluşur. Nesnelere üzerine yoğunlaşmak yerine, bu nesnelere arasındaki morfizmlere üzerine yoğunlaşılır. Gruplar örneğinde bu morfizmler grup homomorfizmleridir. Bu şekildeki farklı kategorileri fanktorlar aracılığıyla ilişkilendirmek mümkündür. Kategori, fanktor ve doğal dönüşümler Eilenberg ve MacLane tarafından 1945 yılında ortaya atılmıştır. Eilenberg ve MacLane [14,15], kendi ifadelerine göre, bu kavramın geliştirilmesi doğal dönüşümleri anlama çabası ile olmuştur. Bunu yapabilmek için fanktorlar tanımlamak, fanktorları tanımlamak için ise kategorileri tanımlamak gerekiyordu. Kategorinin ayrıntılı tanımı aşağıdaki şekildedir.

**Tanım 2.2.1:** Bir  $C$  kategorisi aşağıdaki yapıdan oluşur:  $Ob(C)$  nesnelere bir sınıfı,  $\forall X, Y \in Ob(C)$  için  $C(X, Y)$ ,  $X$  den  $Y$  ye tüm morfizmlerin bir sınıfı, her  $\forall X, Y, Z \in Ob(C)$  için

$$\begin{aligned} \circ : C(X, Y) \times C(Y, Z) &\rightarrow C(X, Z) \\ (f, g) &\mapsto gf \end{aligned}$$

morfizmlerin parçalı birleşimi olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanmalıdır.

a) Eğer  $f \in C(X, Y)$ ,  $g \in C(Y, Z)$ ,  $h \in C(Z, W)$  ise  $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$  dır.

b) Her bir  $X \in Ob(C)$  için  $f \in C(X, Y)$  ve  $g \in C(Z, X)$  olmak üzere  $f \circ id_X = f$  ve  $id_X \circ g = g$  olacak şekilde bir  $1_X \in C(X, X)$  birim morfizmi vardır .

**Örnek 2.2.2:** Objeleri tüm topolojik uzaylar, morfizmleri ise tüm topolojik uzaylar arasındaki sürekli fonksiyonlar alınarak topolojik uzaylar kategorisi elde edilir. Bu kategori  $Top$  ile gösterilir. Benzer şekilde grupların kategorisi  $Grup$  ve topolojik grupların kategorisi  $TopGrp$  elde edilebilir.

**Örnek 2.2.3:**  $X$  bir topolojik uzay olmak üzere  $\alpha : [0, p] \rightarrow X$  eğrisi  $a$  dan  $b$  ye ve  $\beta : [0, q] \rightarrow X$  eğrisi  $b$  den  $c$  ye ise eğrilerin boyu dikkate alınarak  $\beta\alpha : [0, p+q] \rightarrow X$  bileşke eğrisi

$$\beta\alpha(t) = \begin{cases} \alpha(t), & 0 \leq t \leq p \\ \beta(t-p), & p \leq t \leq p+q \end{cases}$$

ile tanımlanır.  $X$  üzerindeki tüm eğrilerin sınıfı bu şekilde tanımlanan eğrilerin birleşme işlemine göre bir kategori oluşturur. Bu kategoriye  $X$  uzayındaki eğrilerin kategorisi denir ve  $E(X)$  ile gösterilir.

Burada eğriler birim uzunluğundaki eğriler alınır ve birleşim birim uzunluğunda olacak şekilde

$$\beta\alpha(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2t-1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

olarak tanımlanırsa birleşme özelliği sağlanmadığından bir kategori oluşturmaz.

**Tanım 2.2.4:**  $C$  ve  $D$  birer kategori olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyor ise  $D$  kategorisine  $C$  nin bir *alt kategorisi* denir.

i)  $Ob(D)$ ,  $Ob(C)$  nin alt sınıfıdır.

ii) Her bir  $X, Y \in Ob(D)$  için  $D(X, Y) \subseteq C(X, Y)$  dır.

iii)  $D$  kategorisindeki morfizmlerin birleşimi  $C$  kategorisindeki morfizmlerin birleşimi ile aynıdır.

iv) Her bir  $X \in Ob(D)$  için  $D$  deki  $1_X$  birim morfizmi,  $C$  deki birim morfizm ile aynıdır.

$D$  kategorisi  $C$  kategorisinin bir alt kategorisi olsun. Eğer  $X, Y \in Ob(D)$  obje çifti için  $D(X, Y) = C(X, Y)$  ise  $D$  alt kategorisine *dolu (full)* bir alt kategori, eğer  $Ob(D) = Ob(C)$  ise  $D$  ye *geniş* bir alt kategori denir.

**Tanım 2.2.5:** Bir  $C$  kategorisindeki bir  $f : X \rightarrow Y$  morfizmi için eğer  $gf = 1_X$  ve  $fg = 1_Y$  olacak şekilde bir  $g : Y \rightarrow X$  morfizmi varsa  $f$  ye bir *izomorfizm* denir. Bu durumda  $X$  ve  $Y$  objeleri *izomorftur* denir ve  $X \simeq Y$  şeklinde gösterilir. Örneğin  $Top$  da izomorfizmler homeomorfizmlerdir.

**Tanım 2.2.6:**  $C$  ve  $D$  birer kategori olmak üzere  $C$  nin her bir  $X$  objesini  $D$  nin bir  $F(X)$  objesine,  $C$  nin her bir  $f : X \rightarrow Y$  morfizmini ise  $D$  nin bir  $F(f) : F(X) \rightarrow F(Y)$  morfizmine dönüştüren ve aşağıdaki şartları sağlayan bir  $F$  dönüşümüne  $C$  den  $D$  ye bir *fanktor* denir ve  $F : C \rightarrow D$  olarak yazılır.

i)  $C$  kategorisinde  $g \circ f$  bileşkesi tanımlı olacak şekildeki  $f$  ve  $g$  morfizmleri için

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$$

dır.

ii) Her  $X \in Ob(C)$  için  $F(1_X) = 1_{F(X)}$  dır.

**Not 2.2.7:** Eğer  $F : C \rightarrow D$  ve  $G : D \rightarrow E$  fanktorlar ise  $GF : C \rightarrow E$  birleşimi de bir fanktordur. Ayrıca  $1_C : C \rightarrow C$  birim dönüşümü de bir fanktordur. O halde objeleri

kategoriler, morfizmleri ise fanktorlar olan bir kategori oluşturulabilir. Bu kategori  $Cat$  olarak yazılır. Burada  $Cat$  de kendisinin bir objesi olarak düşünülebilir. Bu zorluğu ortadan kaldırmak için  $Cat$  nin objeleri küçük kategoriler, yani objeleri cümleler veya cümleler üzerinde çeşitli yapılar bulunan objeler olan kategoriler almak yeterlidir. Buradan aşağıdaki örneği verebiliriz.

**Örnek 2.2.8:** Her  $X$  topolojik uzayını  $E(X)$  eğrilerinin kategorisine eşleyen  $\varepsilon : Top \rightarrow Cat$  bir fanktor belirler.

**Tanım 2.2.9:**  $C$  ve  $D$  kategoriler olmak üzere  $F, G : C \rightarrow D$  iki fanktor olsun. Her  $X \in Ob(C)$  objesini  $D$  nin bir  $\eta_x : F(X) \rightarrow G(X)$  morfizmine dönüştüren bir  $\eta : Ob(C) \rightarrow Mor(D)$  dönüşümü verilsin. Eğer  $C$  nin her bir  $f : X \rightarrow Y$  morfizmi için

$$\begin{array}{ccc}
 & \xrightarrow{\eta_x} & \\
 F(X) & \longrightarrow & G(X) \\
 \downarrow F(f) & & \downarrow G(f) \\
 F(Y) & \longrightarrow & G(Y) \\
 & \xrightarrow{\eta_y} & 
 \end{array}$$

diyagramı değişmeli ise  $\eta$  ya bir *doğal dönüşüm* denir ve  $\eta : F \rightarrow G$  olarak gösterilir.

**Tanım 2.2.10:**  $F : C \rightarrow D$  ve  $G : C \rightarrow D$  fanktorları verilsin. Bir  $\eta : F \rightarrow G$  doğal dönüşümünde her bir  $X \in Ob(C)$  için  $\eta_x : F(X) \rightarrow G(X)$ ,  $D$  de bir izomorfizm ise  $\eta$  ya bir *doğal izomorfizm*,  $F$  ve  $G$  ye de *doğal olarak denktir* denir ve  $F \simeq G$  şeklinde gösterilir.

**Teorem 2.2.11:**  $G, F : C \rightarrow D$  fanktorları verilsin.  $F \simeq G$  dir ancak ve ancak  $\sigma\mu = 1_F$  ve  $\mu\sigma = 1_G$  olacak şekilde  $\mu : F \rightarrow G$  ve  $\sigma : G \rightarrow F$  doğal dönüşümleri vardır.

**Tanım 2.2.12:**  $F : C \rightarrow D$  fanktoru verilsin. Eğer  $G \circ F \simeq 1_C$  ve  $F \circ G \simeq 1_D$  olacak şekilde  $G : D \rightarrow C$  fanktoru varsa bu *kategorilere doğal olarak denktir* denir ve  $C \simeq D$  olarak yazılır.

### 2.3. Temel Grup

Örnek 2.2.3 de bahsedildiği üzere birim uzunluğundaki eğrilerin birleşimi birim uzunluğunda bir eğri olacak şekilde birleştirildiğinde birleşme özelliği sağlanmaz, yani  $\beta\alpha$  ve  $\gamma\beta$  birleşimleri tanımlı olacak şekildeki  $\alpha, \beta, \gamma$  eğrileri için genelde  $(\delta\beta)\alpha$  ve  $\delta(\beta\alpha)$  eğrileri eşit değildir. Bu sorunu ortadan kaldırmak için denklik sınıfları homotopi sınıfları olacak şekilde bir homotopi kavramı tanımlanır.

**Tanım 2.3.1:**  $X$  bir topolojik uzay olmak üzere başlangıç noktaları  $x$  ve bitiş noktaları  $y$  olan  $\alpha, \beta$  eğrileri verilsin.  $s, t \in [0,1]$  için

$$F(s,0) = \alpha(s), F(0,t) = x, F(s,1) = \beta(s) \text{ ve } F(1,t) = y$$

olacak şekilde sürekli bir

$$F : [0,1] \times [0,1] \rightarrow X$$

fonksiyonuna  $\alpha$  dan  $\beta$  ya (uç noktalarına göre) bir *homotopi* denir. Eğer böyle bir homotopi varsa  $\alpha$  ve  $\beta$  eğrileri (uç noktalarına göre) *homotopik* denir ve  $\alpha \simeq \beta$   $rel\{0,1\}$  yazılır [16].

Kolayca gösterilebileceği gibi bir  $X$  topolojik uzayında eğrilerin uç noktalara göre homotopik olması bağıntısı bir denklik bağıntısıdır. Bu denklik bağıntısına göre bir  $\alpha$  eğrisinin denklik sınıfı  $[\alpha]$  olarak yazılır ve  $\alpha$  nın *homotopi sınıfı* olarak adlandırılır. Homotopi sınıfları ile ilgili temel özellikler aşağıdaki şekilde sıralanabilir.

**Önerme 2.3.2:** Bir  $X$  uzayında homotopi bağıntısı ile ilgili aşağıdaki ifadeler geçerlidir.

i) Bir  $\alpha : [0,1] \rightarrow X$  eğrisi ve  $p(0) = 0$  ve  $p(1) = 1$  olacak şekilde sürekli bir  $p : [0,1] \rightarrow [0,1]$  fonksiyonu için  $\alpha \circ p \simeq \alpha$  dir.

ii)  $\alpha_0 \simeq \alpha_1$  ve  $\beta_0 \simeq \beta_1$  ise  $\beta_0\alpha_0 \simeq \beta_1\alpha_1$  dir.

iii)  $(\gamma\beta)\alpha \neq \gamma(\beta\alpha)$  fakat  $(\gamma\beta)\alpha \simeq \gamma(\beta\alpha)$  dir.

iv)  $\alpha(0) = x$  ve  $\alpha(1) = y$  olan bir  $\alpha : [0,1] \rightarrow X$  eğrisi için  $\alpha 1_x \simeq \alpha \simeq 1_y \alpha$  dır. Burada  $1_x$  ve  $1_y$  sırasıyla  $x$  ve  $y$  noktalarından birim eğrileri temsil etmektedir.

v)  $\alpha_0 \simeq \alpha_1$  ise  $\alpha_0^{-1} \simeq \alpha_1^{-1}$  dır.

vi)  $\alpha(0) = x$  ve  $\alpha(1) = y$  olan bir  $\alpha : [0,1] \rightarrow X$  eğrisi için  $\alpha \alpha^{-1} \simeq 1_y$  ve  $\alpha^{-1} \alpha \simeq 1_x$  dır

Bu özellikler kullanılarak bir temel grup aşağıdaki şekilde elde edilir.

**Önerme 2.3.3:**  $X$  bir topolojik uzay ve  $x \in X$  olsun.  $x$  noktasındaki tüm kapalı eğrilerin homotopi sınıflarının cümlesi  $\pi_1(X, x)$  üzerinde tanımlanan

$$\begin{aligned} \pi_1(X, x) \times \pi_1(X, x) &\rightarrow \pi_1(X, x) \\ ([\beta], [\alpha]) &\mapsto [\beta\alpha] \end{aligned}$$

işlemine göre bir gruptur.

Bu gruba  $x$  noktasındaki *temel grup* denir.

Burada bir  $X$  uzayının  $x$  noktasındaki  $\pi_1(X, x)$  temel grubunun  $x$  noktasına bağlı olduğuna dikkat edelim. Ancak  $X$  uzayının eğrisel irtibatlı olması halinde  $X$  in tüm temel grupları birbirine izomorftur.

**Tanım 2.3.4:** Objeleri  $(X, x)$  noktalı uzaylar, morfizmleri ise  $f(x) = y$  olacak şekilde  $f : (X, x) \rightarrow (Y, y)$  sürekli fonksiyonlar olan kategoriye *noktalı uzayların kategorisi* denir ve  $Top_*$  ile gösterilir.

**Örnek 2.3.5:** Bir  $X$  topolojik uzayı için  $\pi_1(X, x)$ ,  $x$  noktasındaki temel grup olmak üzere  $\pi_1 : Top_* \rightarrow Grp, (X, x) \mapsto \pi_1(X, x)$  bir fanktordur. Burada  $f : (X, x) \rightarrow (Y, y)$  sürekli bir fonksiyon ise  $f$  den üretilen grup homomorfizmi

$$\begin{aligned} \pi_1 f : \pi_1(X, x) &\rightarrow \pi_1(Y, y) \\ [\alpha] &\mapsto \pi_1 f([\alpha]) = [f\alpha] \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.

**Tanım 2.3.6:**  $X$  bir topolojik uzay olsun. Her  $x \in X$  için  $\pi_1(X, x)$  tek bir elemanlı ise veya buna denk olarak başlangıç ve bitiş noktaları aynı olan tüm eğriler homotopik ise bu uzaya *basit irtibatlı uzay* denir.

**Örnek 2.3.7:**  $\mathfrak{R}^n$  nin konveks bir alt cümlesi basit irtibatlıdır.

**Örnek 2.3.8:** Eğer  $X$  ve  $Y$  uzayları basit irtibatlı ise  $X \times Y$  de basit irtibatlıdır.

**Tanım 2.3.9:** Her bir  $x \in G$  için  $f(x) = e$  olan bir  $f : G \rightarrow H$  grup homomorfizmine *aşıkâr dönüşüm* denir [12].

**Tanım 2.3.10:**  $X$  bir topolojik uzay olsun. Eğer her bir  $x \in X$  için  $i_* : \pi_1(U, x) \rightarrow \pi_1(X, x)$  aşıkâr dönüşüm olacak şekilde bir  $U$  açık komşuluğuna sahip ise  $X$  uzayına bir *yarı yerel 1-irtibatlı uzay* denir (Burada  $i : U \rightarrow X$  bir içine fonksiyon).

## 2.4. Örtü Uzayları

Topolojik örtü uzayı kavramı sadece topoloji için değil, aynı zamanda cebir ve geometri gibi matematik dalları için de önemlidir. Bir topolojik uzayının örtü uzayı daha sade bir yapıya sahip olduğundan bazı işlemlerde kolaylık sağlar. Bir topolojik uzayın temel grubunu hesap etmede evrensel örtüden faydalanılır.

**Tanım 2.4.1:**  $X$  ve  $\tilde{X}$  birer topolojik uzay,  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  sürekli bir fonksiyon ve  $U$  da  $X$  in eğrisel irtibatlı açık bir alt cümlesi olsun. Eğer  $p^{-1}(U)$  ters görüntüsünün her bir eğrisel irtibatlı olan  $S_i$  bileşeni  $\tilde{X}$  nin açık bir alt cümlesi ve her bir  $p_{S_i} : S_i \rightarrow U$  kısıtlanmış fonksiyonu bir homeomorfizm ise  $U \subseteq X$  alt cümlesine  $p$  tarafından *örtülen bir komşuluk* denir [2,12,17].

**Tanım 2.4.2:**  $X$  bir topolojik uzay olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanıyor ise  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  ye bir *örtü dönüşümü* ve  $(\tilde{X}, p)$  ikilisine  $X$  uzayının bir *örtü uzayı* denir.

- i)  $\tilde{X}$  eğrisel irtibatlı bir topolojik uzaydır.
- ii)  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  sürekli bir fonksiyondur.
- iii) Her bir  $x \in X$  noktası,  $p$  tarafından örtülen bir  $U = U_x$  açık komşuluğuna sahiptir [12,17].

**Örnek 2.4.3:** Bir  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  örtü fonksiyonu örten, açık ve her bir  $x \in X$  için  $p^{-1}(x)$  diskredir.

**Tanım 2.4.4:**  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  bir örtü dönüşümü olsun. Eğer  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  bir örtü dönüşümü  $X$  in her bir örtüsüne yükseliyor ise, yani her bir  $q: \tilde{Y} \rightarrow X$  örtü dönüşümü için  $p = q\tilde{p}$  olacak şekilde bir tek  $\tilde{p}: \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}$  örtü dönüşümü varsa  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  ye *evrensel örtü* denir.

**Not 2.4.5 :**  $X$  bir topolojik uzay,  $x_0 \in X$  olsun.  $X$  uzayının evrensel örtüsü,  $X$  in temel grupoidinin starı yani  $(\pi_1 X)_{x_0}$  dır.

**Örnek 2.4.6:** Bir  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  örtü dönüşümünde eğer  $\tilde{X}$  basit irtibatlı ise  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  evrensel bir örtüdür.

**Tanım 2.4.7:**  $X$  bir topolojik uzay,  $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$  ve  $q: (\tilde{Y}, \tilde{y}_0) \rightarrow (X, x_0)$  da  $X$  in birer örtü dönüşümü olsun. Eğer  $qf = p$  olacak şekilde bir  $f: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (\tilde{Y}, \tilde{y}_0)$  homeomorfizmi var ise  $p$  ve  $q$  *örtü dönüşümleri denktir* denir.

Örtü dönüşümlerinin denk olması obje gruplarından faydalanılarak gösterilebilir.

**Tanım 2.4.8:**  $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$  bir örtü dönüşümü olsun. Temel gruplar üzerinde üretilen grup homomorfizmi  $\pi_1(p) = p_*: \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$  olmak üzere  $\pi_1(X, x_0)$  nin  $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$  alt grubuna  $p$  nin *karakteristik grubu* denir.

**Lemma 2.4.9:**  $X$  yerel eğrisel irtibatlı bir topolojik uzay ve  $x_0 \in X$  olsun.  $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$  ve  $q: (\tilde{Y}, \tilde{y}_0) \rightarrow (X, x_0)$  birer örtü dönüşümü olsun. Bu örtü dönüşümleri denktir ancak ve ancak  $p$  ve  $q$  nun karakteristik grupları  $\pi_1(X, x_0)$  nun konjuge alt gruplarıdır.

## 3. BÖLÜM

### GRUP-GRUPOİDLER ve MONODROMY GRUPOİDLERİ

#### 3.1. Grupoid

Her morfizmi bir izomorfizm olan kategoriye bir *grupoid* denir. O halde bir kategori bir monoidin genelleştirilmesi olduğu gibi bir grupoid de bir grubun genelleştirilmesi olarak düşünülebilir. Bu aradaki ilişkiyi vurgulamak bakımından gruptan grupoide adı altında Brown [18] referansı verilebilir. Bir grup bir tek objeli bir grupoid olarak düşünülebilir. Topolojik grupoidleri tanımlamak için grupoid yapısını oluşturan fonksiyonlar gerekli olduğundan grupoid tanımını bu hedefe uygun olarak tanımlamak kolaylık sağlar. Bundan dolayı grupoid tanımını Mackenzie [6] referansında olduğu gibi aşağıda verelim.

**Tanım 3.1.1:**  $O_G$  tüm objelerin sınıfı,  $G$  tüm morfizmlerin sınıfı ve  $x, y \in O_G$  için  $x$  den  $y$  ye morfizmlerin sınıfı  $G(x, y)$  olmak üzere aşağıdaki fonksiyonlar verilsin.

- 1) Her bir  $a \in G(x, y)$  için  $s(a) = x$  ve  $t(a) = y$  ile tanımlanan

$$s, t : G \rightarrow O_G$$

sırasıyla *başlangıç* ve *bitiş* fonksiyonları.

- 2) Her bir  $x \in O_G$  objesi için  $1_x$ ,  $x$  noktasındaki birim morfizm olmak üzere

$$\varepsilon : O_G \rightarrow G, x \mapsto \varepsilon(x) = 1_x \in G(x, x)$$

ile tanımlanan *birim morfizmi* fonksiyonu.

- 3) Her bir  $a \in G(x, y)$  için  $a^{-1} \in G(y, x)$  olacak şekilde tanımlı olan

$$u : G \rightarrow G, a \mapsto u(a) = a^{-1}$$

*ters eleman* fonksiyonu.

- 4)  $G_s \times_t G = \{(b, a) \in G \times G \mid s(b) = t(a)\}$  olmak üzere

$$\mu: G_s \times_t G \rightarrow G, (b, a) \mapsto ba$$

ile tanımlanan grupoid *parçalı işlemi*.

Eğer bu fonksiyonlar aşağıdaki şartları sağlar ise  $G$  ye  $O_G$  üzerinde bir *grupoid* denir ve genelde  $G$  ile gösterilir.  $G$  nin morfizmlerine ise  $G$  nin elemanları denir.

i) Her  $(b, a) \in G_s \times_t G$  için  $s(ba) = s(a)$  ve  $t(ba) = t(b)$  dır.

ii)  $s(c) = t(b)$ ,  $s(b) = t(a)$  olacak şekildeki  $c, b, a \in G$  için  $c(ba) = (cb)a$  dır.

iii) Her bir  $x \in O_G$  için  $1_x$ ,  $x$  noktasında birim morfizm olmak üzere  $s(1_x) = t(1_x) = x$  dir.

iv) Her  $a \in G$  için  $a1_{s(a)} = a$  ve  $1_{t(a)}a = a$  dır.

v) Her bir  $a \in G$  nin  $s(a^{-1}) = t(a)$ ,  $t(a^{-1}) = s(a)$  olmak üzere  $a^{-1}a = 1_{s(a)}$  ve  $aa^{-1} = 1_{t(a)}$  dir.

**Örnek 3.1.2:** Eğer  $X$  bir topolojik uzay ise  $G = X \times X$  bir grupoiddir. Burada  $G$  nin objeri  $X$  in elemanları olup bir  $(x, y)$  çifti  $G$  de  $x$  den  $y$  ye bir morfizm olarak alınır. Morfizlerin birleşimi ise

$$(y, z) \cdot (x, y) = (x, z)$$

olarak tanımlanır.

**Not 3.1.3:** Bir  $G$  grupoidinde her bir  $x \in O_G$  objesi için  $x$  den  $x$  e tüm morfizmlerin sınıfı  $G(x, x)$  bir gruptur. Bu gruba  $x$  noktasındaki *obje grubu* denir.

Aşağıda verilen temel grupoid kavramı topolojik uzaylardan grupoidlere bir köprü sağladığından bazı topolojik problemlerin cebirsel problemlere dönüştürülmesi bakımından önemlidir. Örneğin homeomorf olan topolojik uzayların temel grupoidleri izomorftur veya buna denk olarak temel grupoidleri izomorf olmayan uzaylar homeomorf değildir. Ayrıca bazı uzayların temel gruplarının hesaplanmasında kullanılabilir. Örneğin  $S^1$  birim çemberinin  $\pi_1(S^1, 1)$  temel grubunun  $\mathbb{Z}$  tamsayılar grubuna izomorf olduğu temel grupoid kavramı kullanılarak gösterilebilir. Bazı topolojik problemlere denk olan matematiğin diğer dallarındaki problemleri araştırmak

cebirsel topolojinin ilgi alanına girmektedir. Örneğin  $X$  basit irtibatlı bir örtüye sahip bir topolojik uzay olmak üzere  $X$  in örtü uzaylarının kategorisi ile  $\pi_1 X$  temel grupodinin grupoid örtü morfizmlerinin kategorisi denktir [2]. Bu ise topolojiden ziyade cebirsel problemlerle uğraşma kolaylığı sağlar.

**Örnek 3.1.4:**  $X$  bir topolojik uzay olsun.  $X$  deki  $\alpha : [0,1] \rightarrow X$  birim uzunluğundaki eğrilerinin  $[\alpha]$  ile gösterilen uç noktalara göre homotopi sınıflarının  $\pi_1 X$  cümlesi  $X$  üzerinde bir grupoiddir. Bu grupoid *temel grupoid* olarak adlandırılır.

Burada  $s$  başlangıç ve  $t$  bitiş noktaları fonksiyonları bir  $[\alpha] \in \pi_1 X$  için  $s([\alpha]) = \alpha(0)$  ve  $t([\alpha]) = \alpha(1)$  şeklinde tanımlanır. Bir  $x \in X$  için  $1_x : [0,1] \rightarrow X$ ,  $t \mapsto x$ ,  $x$  noktasında sabit eğri olmak üzere  $[1_x]$  homotopi sınıfı  $x$  noktasındaki birim morfizmdir. Bir  $\alpha$  eğrisini takip eden bir  $\beta$  eğrisi için  $\beta\alpha$  eğri birleşimi

$$\beta\alpha : [0,1] \rightarrow X \quad \beta\alpha(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2t-1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

olmak üzere morfizmlerin birleşimi  $[\beta][\alpha] = [\beta\alpha]$  şeklinde tanımlanır. Burada sürekli fonksiyonlar için Yapıştırma Lemması'ndan  $\beta\alpha$  bileşkesinin de sürekli olduğuna dikkat edelim. Bir  $\alpha$  eğrisi için  $\alpha^{-1}(t) = \alpha(1-t)$  olmak üzere  $[\alpha^{-1}]$  homotopi sınıfı  $[\alpha]$  nın grupoiddeki tersidir [6].

**Not 3.1.5:** Eğer  $X$  topolojik uzayı basit irtibatlı ise bu durumda her  $x, y \in X$  için  $x$  den  $y$  ye tüm eğriler birbirine homotopik olacağından  $\pi_1 X(x, y)$  morfizmlerin cümlesi bir tek elemana sahip olacaktır.

**Tanım 3.1.6:**  $G$  ve  $H$  birer grupoid olmak üzere eğer  $f : G \rightarrow H$  bir fanktor ise  $f$  ye bir *grupoid morfizmi* denir.

O halde objeleri tüm grupoidler ve morfizmleri ise grupoid morfizmleri olan bir kategori elde etmek mümkün olup, bu kategoriye grupoidlerin kategorisi denir ve  $Gpd$  olarak yazılır.

**Örnek 3.1.7:** Topolojik uzayların kategorisi  $Top$  ve grupoidlerin kategorisi  $Gpd$  olmak üzere her bir  $X$  topolojik uzayını  $\pi_1 X$  temel grupoidine dönüştüren  $\pi_1 : Top \rightarrow Gpd$  bir fanktordur [2].

Burada eğer  $f : X \rightarrow Y$  bir homeomorfizm ise  $\pi_1 f : \pi_1 X \rightarrow \pi_1 Y$  nin de  $Gpd$  de bir izomorfizm olduğuna dikkat edelim. Ayrıca  $X$  ve  $Y$  topolojik uzayları için  $\pi_1(X \times Y) \simeq \pi_1 X \times \pi_1 Y$  izomorftur.

**Tanım 3.1.8:**  $G$  ve  $H$  birer grupoid olmak üzere eğer kategori olarak  $H$ ,  $G$  nin bir alt kategorisi ve her bir  $a \in H$  için  $a^{-1} \in H$  ise  $H$  ye  $G$  nin bir *alt grupoidi* denir.

**Örnek 3.1.9:** Bir  $G$  grupoidinde  $H = \{1_x \mid x \in O_G\}$  sınıfı  $G$  nin geniş bir alt grupoididir. Ayrıca her  $x \in O_G$  için  $G(x)$ ,  $x$  noktasında obje grubu olmak üzere  $H = \bigcup_{x \in O_G} G(x)$  de  $G$  nin geniş bir alt grupoididir.

**Tanım 3.1.10:**  $G$  bir grupoid ve  $N$  de  $G$  nin geniş bir alt grupoidi olsun. Eğer her  $x, y \in O_G$  ve  $a \in G(x, y)$  için  $aN(x)a^{-1} \subseteq N(y)$  ise veya buna denk olarak  $aN(x) = N(y)a$  ise  $N$  ye  $G$  nin bir *normal alt grupoidi* denir.

**Örnek 3.1.11:** Bir  $f : G \rightarrow H$  grupoid morfizmi için

$$Kerf = \{a \in G \mid f(a) = 1_x, \exists x \in O_G\}$$

$f$  nin çekirdeği,  $G$  nin normal bir alt grupoididir.

Bir  $G$  grupoidinde her bir  $x \in O_G$  için  $G_x = \{a \in G \mid s(a) = x\}$  cümlesine,  $G$  grupoidinin  $x$  noktasındaki *starı* denir.

**Tanım 3.1.12:**  $p: \tilde{G} \rightarrow G$  bir grupoid morfizmi olsun. Eğer her bir  $x \in O_{\tilde{G}}$  için  $p_x: \tilde{G}_x \rightarrow G_{p(x)}$  kısıtlaması biyektif ise  $p: \tilde{G} \rightarrow G$  ye bir *grupoid örtü morfizmi* denir. Burada eğer  $G$  ve  $\tilde{G}$  birer grup ise  $p: \tilde{G} \rightarrow G$  örtü morfizmi bir grup izomorfizmi olur. Herhangi bir  $p: \tilde{G} \rightarrow G$  grupoid morfizmi ve  $\tilde{x} \in O_{\tilde{G}}$  için  $G(p(\tilde{x}))$  nin  $p(\tilde{G}(\tilde{x}))$  alt grubuna  $p$  nin  $\tilde{x}$  noktasında *karakteristik grubu* denir [2].

Aşağıdaki, örtü morfizmlerinin yükselmeleriyle ilgili önemli bir teoremdir.

**Teorem 3.1.13:**  $p: (\tilde{G}, \tilde{x}) \rightarrow (G, x)$  bir örtü morfizmi ve  $F$  irtibatlı olacak şekilde  $f: (F, z) \rightarrow (G, x)$  bir grupoid morfizmi olsun. Bu taktirde  $f$  bir tek  $\tilde{f}: (F, z) \rightarrow (\tilde{G}, \tilde{x})$  grupoid morfizmine yükselir ancak ve ancak  $f$  nin karakteristik grubu  $p$  nin karakteristik grubu tarafından kapsanır [2].

**Teorem 3.1.14:**  $r: K \rightarrow H$ ,  $q: H \rightarrow G$  birer grupoid morfizmi olsun. Eğer  $r$  ve  $q$  örtü morfizmleri ise  $qr$  de bir örtü morfizmidir. Eğer  $q$  ve  $qr$  örtü morfizmleri ise  $r$  de örtü morfizmidir. Eğer  $r$  ve  $qr$  örtü morfizmleri ve  $O_r$  örten ise  $q$  bir örtü morfizmidir [2].

**Önerme 3.1.15:** Eğer  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  topolojik uzayların bir örtü fonksiyonu ise  $p$  den üretilen  $\pi_1(p): \pi_1 \tilde{X} \rightarrow \pi_1 X$  de bir grupoid örtü morfizmidir [2].

Bir  $G$  grupoidinde her  $x, y \in O_G$  için  $G(x, y)$  boştan farklı ise  $G$  grupoidine *irtibatlı* veya *geçişken* denir. Bir  $p: \tilde{G} \rightarrow G$  grupoid örtü morfizminde  $\tilde{G}$  ve  $G$  grupoidleri geçişken ise  $p$  örtü morfizmine *geçişkendir* denir.

**Tanım 3.1.16:**  $G$ ,  $O_G$  üzerinde bir grupoid olsun. Eğer Tanım 3.1.1 deki grupoid yapısını oluşturan

$$s, t: G \rightarrow O_G, \mu: G_s \times_t G \rightarrow G, \varepsilon: O_G \rightarrow G, u: G \rightarrow G$$

fonksiyonları sürekli olacak şekilde  $G$  ve  $O_G$  cümleleri üzerinde birer topoloji yapısı varsa  $G$  ye  $O_G$  üzerinde bir *topolojik grupoid* denir.

O halde bir topolojik grup bir objeli topolojik grupoid olarak düşünülebilir.

**Örnek 3.1.17 :** Eğer bir  $X$  topolojik uzayı basit irtibatlı bir örtüye sahip ise  $\pi_1 X$  temel grupoidi bir topolojik grupoiddir [3].

**Tanım 3.1.18:** Bir  $G$  topolojik grupoidinde  $a \in G(x, y)$  olmak üzere  $R_a : G_y \rightarrow G_x, b \mapsto b \cdot a$  dönüşümüne *sağ dönüşüm*,  $L_a : G^x \rightarrow G^y, b \mapsto a \cdot b$  dönüşümüne ise *sol dönüşüm* denir.

Bir  $G$  topolojik grupoidinde sağ ve sol dönüşümlerin birer homeomorfizm olduğu açıktır.

**Tanım 3.1.19:** Bir  $G$  grupoidinde her bir  $G_x = \{a \in G : s(a) = x\}$  bir topolojiye sahip ve  $a \in G(x, y)$  için  $R_a : G_y \rightarrow G_x, b \mapsto b \cdot a$  bir homeomorfizm ise  $G$  ye bir *star topolojik grupoid* denir [2]. Burada  $O_G$  bir elemanlı ise star topolojik grupoid bir topolojik grup olur.

### 3.2 Grup-grupoid

Grupoidlerin kategorisindeki bir grup objesine bir *grup-grupoid* denir. Grup-grupoidin ayrıntılı tanımı Brown ve Spencer [7] referansındaki gibi aşağıdaki şekilde verilebilir. Bu referansta grup-grupoidlerin kategorisinin gruplardaki crossed modüllerin kategorisine denk olduğu gösterilmiştir. Buradan hareketle daha genel olarak çok işlemli grupların kategorisindeki internal kategorilerin bunlara karşılık gelen crossed modüllere denk olduğu Porter [19] tarafından verilmiştir. Burada grup-grupoidden daha genel bir kavram olan “*internal kategori*” yapısı da verilmiştir [19]. Buna göre grup-grupoid kavramı grupların kategorisinde bir internal kategoridir.

**Tanım 3.2.1:**  $G, O_G$  üzerinde bir grupoid olmak üzere  $G$  ve  $O_G$  birer grup yapısına sahip olsun. Eğer grup yapısını oluşturan ve sırasıyla çarpım, birim ve inverse (ters) olarak adlandırılan

- i)  $m : G \times G \rightarrow G, (a, b) \mapsto a \circ b$
- ii)  $e : \{*\} \rightarrow G$  (burada  $\{*\}$  tek morfizimli bir kategori )
- iii)  $u : G \rightarrow G, a \mapsto a^{-1}$

dönüşümleri birer fanktor ise  $G$  ye  $O_G$  üzerinde bir *grup-grupoid* denir. Burada grup işlemi ile grupoid işleminini ayırt etmek için  $a, b \in G$  için grup çarpımı  $a \circ b$  ve grupoiddeki birleşim  $b \cdot a$  olarak yazılır.

Bu tanımda  $m$  nin bir fanktor olduğu biraz daha ayrıntılı incelenirse bir  $G$  grupoidinde  $b \cdot a$  ve  $d \cdot c$  grupoid birleşimleri tanımlı olmak üzere  $a, b, c, d \in G$  için (interchange law) olarak bilinen

$$(b \cdot a) \circ (d \cdot c) = (b \circ d) \cdot (a \circ c)$$

kuralı elde edilir.

**Önerme 3.2.2:** Eğer  $X$  bir topolojik grup ise  $\pi_1 X$  bir grup-grupoiddir [7].

**Tanım 3.2.3:**  $G$  ve  $H$  birer grup-grupoid ve  $f : H \rightarrow G$  de bir grupoid morfizmi olsun. Eğer  $f : H \rightarrow G$  grupoidler üzerindeki grup yapılarını koruyor ise  $f$  ye bir *grup-grupoid morfizmi* denir.

**Tanım 3.2.4:**  $f : H \rightarrow G$  bir grup-grupoid morfizmi olsun. Eğer  $f : H \rightarrow G$ ,  $G$  ve  $H$  grupoidleri üzerinde bir grupoid örtü morfizmi ise  $f$  ye bir *grup-grupoid örtü morfizmi* denir.

**Önerme 3.2.5:**  $X$ , basit irtibatlı bir örtüye sahip olan irtibatlı bir topolojik uzay olsun.  $X$  topolojik uzayının örtülerinin kategorisi  $TCov/X$  ve  $\pi_1 X$  temel grupoidinin grupoid örtülerinin kategorisi  $GdCov/\pi_1 X$  denktir [2].

Bunlara ilaveten eğer  $X$  bir topolojik grup ise  $X$  in topolojik grup örtülerinin kategorisi  $TGpCov/X$  ile  $\pi_1 X$  nin grup-grupoid örtülerinin kategorisi  $GpGdCov/\pi_1 X$  nin denk olduğu Brown ve Mucuk [10] referansından bilinmektedir. Topolojik gruptan

daha genel olan  $H$  - grubu kavramı için benzer bir kategori denkliği Bölüm 5 de verilecektir.

### 3.3 Monodromy Grupoidi

Monodromy grupoid kavramı hem bir topolojik uzayın temel grupoid yapısını hem de bir topolojik grubun evrensel örtüsünü genelleştiren bir yapı olması bakımından önemlidir. Monodromy grupoidi yapısı farklı iki yolla oluşturulabilir. Fakat bazı şartlar altında bu grupoidler denktir. Bunlardan biri [20] referansındaki Lie grupları için verilen bir yapıya benzer olarak Paradines [21] tarafından ele alınmış ve daha sonra Brown ve Mucuk [10] tarafından geliştirilmiştir. Diğeri ise direkt olarak bir topolojik grupoidin starlarının evrensel örtülerinin birleşimi olarak tanımlanır [6]. Daha sonra bazı şartlar altında bunların denk olduğu [5] referansında gösterilmiştir.

Monodromy grupoidinin birinci yapısını oluşturabilmek için önce kısaca free (serbest) grupoid kavramını açıklayalım.  $G$  bir topolojik grupoid ve  $W$  da tüm birimleri kapsayan  $G$  nin açık bir alt cümlesi olsun.  $W$  cümlesi  $G$  deki grupoid yapısının kısıtlaması ile bir *pregrupoid* olur (Crowell-Smythe [4]). Yani  $W$ ,  $s, t : W \rightarrow O_G$  başlangıç ve bitiş fonksiyonlarına sahip ve  $s(b) = t(a)$  olacak şekildeki  $a, b \in W$  için  $b \circ a \in W$  işlemi tanımlıdır.  $t(a_i) = s(a_{i+1})$  olmak üzere  $u = (a_n \dots a_1)$   $W$  da bir *zincir* olarak adlandırılır.  $\bar{W} = \{\bar{a} : a \in W\}$  olmak üzere  $W \cup \bar{W}$  üzerinde tanımlı zincirler bir kategori oluşturur ve bu kategori  $P(W)$  ile gösterilir. Burada  $u = (a_n \dots a_1)$  ve  $v = (b_m \dots b_1)$  zincirleri için  $t(a_n) = s(b_1)$  olduğunda  $v \circ u$  birleşimi tanımlı olup

$$v \circ u = (b_m, \dots, b_1) \circ (a_n \dots a_1) = (b_m, \dots, b_1, a_n \dots a_1)$$

olarak tanımlanır.  $P(W)$  üzerinde aşağıdaki şekilde bir denklik bağıntısı tanımlanır:

$u, v \in P(W)$  için  $u \sim v \Leftrightarrow u$  ya  $\bar{a}_i a_i$  veya  $a_i \bar{a}_i$  şeklindeki elemanlarının eklenip veya çıkarılması ile  $v$  elde edilir.

Yukarıda tanımlanan bağıntı bir denklik bağıntısıdır ve bu denklik bağıntısına göre denklik sınıflarının cümlesi  $F(W) = \{[u] : u \in P(W)\}$  dir. Bu şekilde tanımlı  $F(W)$  bir grupoid olup bu grupoid  $W$  üzerindeki *free grupoid* olarak adlandırılır.

$F(W)$  ,  $W$  üzerindeki free grupoid olsun.  $N$  grupoidi,  $a, b, ba \in W$  olmak üzere  $[b \cdot a]^{-1}[b][a]$  formundaki elemanlar tarafından üretilen  $F(W)$  nin normal alt grupoidi olsun. Burada  $b \cdot a$  nin grupoiddeki birleşim,  $[b][a]$  nin ise free grupoiddeki birleşim olduğuna dikkat edelim.  $F(W)/N$  nin bölüm grupoidi  $M(G, W)$  ile gösterilir ve  $G$  nin *monodromy grupoidi* olarak adlandırılır [10].

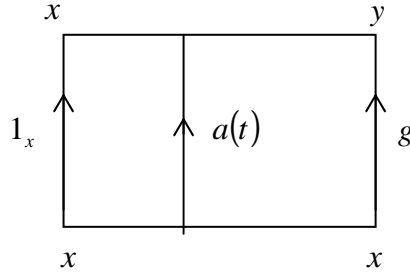
Burada  $F(W)$  nin yapısından verilen herhangi bir  $f : W \rightarrow H$  grup lokal morfizmi önce bir  $\hat{f} : F(W) \rightarrow H$  grupoid morfizmine ve daha sonra bir  $\tilde{f} : M(G, W) \rightarrow H$  morfizmine genişler. Bundan dolayı monodromy grupoidi bir lokaldan globala problem (local to global) olarak bilinir.

Bir  $G$  topolojik grubunun  $MG$  ile gösterilen monodromy grupoidi,  $G_x$  starlarının evrensel örtüsü kavramı kullanılarak aşağıdaki şekilde oluşturulur [6]. Bunun için önce bir  $X$  topolojik uzayının herhangi bir noktasındaki evrensel örtüsünü hatırlatalım: Basit irtibatlı bir örtüye sahip olan bir  $X$  topolojik uzayı ve bir  $x \in X$  noktası verilsin.  $X$  in basit irtibatlı bir örtüye sahip olması şartı buna denk olarak  $X$  in yarı lokal basit irtibatlı olması şeklinde ifade edilebilir. Buraki düşünce  $X$  in her bir noktasının  $X$  in örtülerine yükselebilen bir komşuluğu bulunmasıdır.  $x \in X$  noktasından başlayan eğrilerin (uç noktalarına göre) homotopi sınıflarının cümlesi  $(\pi_1 X)_x$  ve  $(\pi_1 X)_x$  deki her bir homotopi sınıfını o eğrinin bitiş noktasına eşleyen fonksiyon  $p : (\pi_1 X)_x \rightarrow X$  olsun.  $X$  topolojik uzayının  $x \in X$  noktasındaki evrensel örtüsü  $((\pi_1 X)_x, p)$  çifti olarak bilinir.

Şimdi  $G$  bir topolojik grupoid ve her bir  $G_x$  starı (başlangıcı  $x$  olan morfizmlerin sınıfı) basit irtibatlı bir örtüye sahip olmak üzere  $G$  nin monodromy grupoidi tanımı aşağıdaki şekildedir.

**Tanım 3.3.1:**  $G$  bir topolojik grupoid ve her bir  $G_x$  starı basit irtibatlı bir örtüye sahip olsun.  $G_x$  uzayının  $1_x$  noktasındaki  $(\pi_1(G_x))_{1_x}$  evrensel örtüsü  $(\tilde{G}_x)_{1_x}$  şeklinde gösterilsin. O halde  $(\tilde{G}_x)_{1_x}$  nin elemanları başlangıcı  $1_x$  olan  $G_x$  deki eğrilerin

homotopi sınıfıdır, yani  $a : [0,1] \rightarrow G_x$ ,  $a(0) = 1_x$ ,  $a(1) = g$  ve  $\forall t \in [0,1]$  için  $s(a(t)) = x$  olacak şekildeki eğrilerin homotopi sınıfıdır.



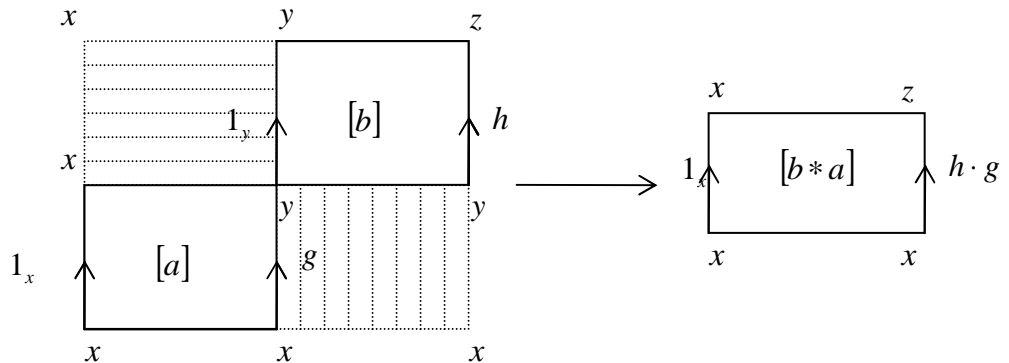
$MG$  ile gösterilen  $G$  nin monodromy grupoidi  $MG = \bigcup_{x \in O_G} (\tilde{G}_x)_{1_x}$  ile tanımlanır. Burada  $Ob(MG) = Ob(G)$  ve  $\forall (x, y) \in Ob(G)$  için  $MG(x, y)$  başlangıcı  $a(0) = 1_x$  ve  $t(a(1)) = y$  olacak şekildeki  $a : [0,1] \rightarrow G_x$ , eğrilerinin homotopi sınıfı olarak alınır. O halde yukarıdaki diyagramdaki  $a$  eğrisinin homotopi sınıfı  $MG$  de  $x$  den  $y$  ye bir morfizmdir.  $MG$ ,  $O_G$  üzerinde

$$MG(y, z) \times MG(x, y) \rightarrow MG(x, z), ([b], [a]) \mapsto [b * a]$$

$$(b * a)(t) = \begin{cases} a(2t), & 0 \leq t \leq 1/2 \\ b(2t-1) \cdot a(1), & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlı parçalı işlemi ile bir grupoid olup bu grupoid  $G$  nin *monodromy grupoidi* olarak adlandırılır [5,6].

Bu grupoid işlemi aşağıdaki şekilde gösterilebilir.



Her iki yollada tanımlanan  $M(G, W)$  ve  $MG$  grupoidlerinin denk olduğu örtü fonksiyonu özellikleri kullanılarak [5] referansında gösterilmiştir.

**Örnek 3.3.2: (i)** Eğer  $G$  bir topolojik grup ise bir tek objesi olan bir topolojik grupoid olacağından  $G$  nin monodromy grupoidi  $G$  nin evrensel örtüsü, yani  $MG = (\pi_1(G))_e$  dir.

**(ii)**  $X$  bir topolojik uzay olmak üzere  $G$  topolojik grupoidi  $G = X \times X$  ise  $G_x = \{x\} \times X \cong X$  olacağından  $G$  nin monodromy grupoidi

$$MG = \bigcup_{x \in X} (\tilde{G}_x)_{1_x} = \bigcup_{x \in X} (\pi_1 X)_x = \pi_1 X$$

temel grupoidi olur.

O halde monodromy grupoid yapısı hem evrensel örtü yapısını, hem de temel grupoid kavramını genelleştiren bir yapıdır.

**Not 3.3.3:** Eğer  $X$  bir topolojik grup ise  $G = X \times X$  topolojik grupoidinin monodromy grupoidi  $MG = \pi_1 X$  olup bir grup- grupoiddir.

Buradan hareketle eğer  $G$  topolojik grubu bir grup-grupoid ise  $MG$  monodromy grupoidinin de bir grup-grupoid olabilirmi sorusu akla gelebilir. Bunun için önce aşağıdaki tanımı verelim.

**Tanım 3.3.4:**  $G$  bir grup-grupoid olsun. Eğer grup ve grupoid yapısındaki tüm işlemler sürekli olacak şekilde  $G$  ve  $O_G$  üzerinde birer topoloji yapısı varsa  $G$  ye bir topolojik grup-grupoid denir [22].

**Örnek 3.3.5:**  $G$  değişmeli bir topolojik grup ise bir topolojik grup-grupoiddir.

**Örnek 3.3.6:**  $X$  bir topolojik grup ise  $G = X \times X$  bir topolojik grup-grupoiddir.

Burada  $G = X \times X$  nin morfizmleri  $(x, y)$  ikilileri olmak üzere başlangıç ve bitiş fonksiyonları sırasıyla  $s(x, y) = x$  ve  $t(x, y) = y$  şeklinde tanımlıdır.  $G$  üzerindeki grupoid birleşimi

$$(y, z) \cdot (x, y) = (x, z)$$

ve grup işlemi ise

$$(z, t) \circ (x, y) = (z \circ x, t \circ y)$$

şeklinde tanımlıdır. Diğer taraftan  $G = X \times X$  üzerindeki topoloji çarpım topolojisi olduğu için başlangıç, bitiş, birim, ters eleman, grup ters dönüşümleri, grup işlemi ve grupoid birleşimi süreklidir. Dolayısıyla  $G = X \times X$  bir topolojik grup-grupoiddir [22].

**Örnek 3.3.7:** Eğer  $X$  bir topolojik grup ve topolojisi basit irtibatlı bir örtüye sahip ise  $\pi_1 X$  temel grupoidi bir topolojik grup-grupoiddir [22].

**Teorem 3.3.8:** Eğer  $G$  bir topolojik grup-grupoid ise  $MG$  monodromy grupoidi bir grup-grupoiddir.

**İspat:**  $G$  bir topolojik grup-grupoid olsun. O halde  $G$  ve  $O_G$  üzerinde birer grup yapısı mevcut olup grup yapısındaki

$$i) m : G \times G \rightarrow G, (a, b) \mapsto a \circ b$$

$$ii) e : \{*\} \rightarrow G$$

$$iii) u : G \rightarrow G, a \mapsto a^{-1}$$

dönüşümleri birer fanktordur. Burada

$$m : G \times G \rightarrow G, (a, b) \mapsto a \circ b$$

$$x \xrightarrow{a} y, z \xrightarrow{b} t \mapsto x \circ z \xrightarrow{a \circ b} y \circ t$$

grup işlemi bir fanktor olduğundan  $a \in G(x, y)$  ve  $b \in G(z, t)$  iken  $a \circ b \in G(x \circ z, y \circ t)$  ve gerekli olan birleşimler mümkün olduğunda interchange kuralı olarak bilinen

$$(a \circ b) \cdot (c \circ d) = (a \cdot c) \circ (b \cdot d)$$

eşitliği sağlanır. Diğer taraftan  $MG$  nin  $O_G$  üzerinde bir grupoid olduğunu ve  $O_G$  üzerinde bir grup yapısının var olduğunu biliyoruz. Burada  $MG$

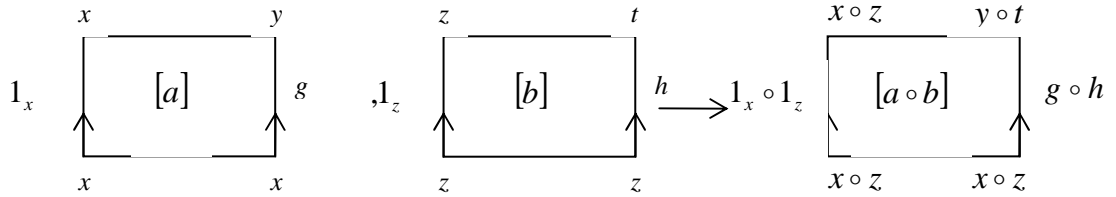
$$MG \times MG \rightarrow MG$$

$$[b], [a] \mapsto [b * a]$$

$$(b * a)(t) = \begin{cases} a(2t), & 0 \leq t \leq 1/2 \\ b(2t-1) \cdot a(1), & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

parçalı işlemine göre  $O_G$  üzerinde bir grupoiddir [6]. Şimdi  $MG$  üzerinde aşağıdaki şekilde bir grup işlemi tanımlayalım.

$$MG \times MG \rightarrow MG, ([a], [b]) \mapsto [a \circ b]$$



Şimdi bu işlemin iyi tanımlı olduğunu gösterelim. Homotopi kavramından

$a_1 \in [a]$  ise  $F_0 = a$  ve  $F_1 = b$  olacak şekilde sürekli bir  $F_t : I \rightarrow G$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) fonksiyonu

$b_1 \in [b]$  ise  $H_0 = b$  ve  $H_1 = b_1$  olacak şekilde sürekli bir  $H_t : I \rightarrow G$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) fonksiyonu vardır.

Burada  $G$  bir topolojik grup-grupoid olduğundan  $G \times G \rightarrow G, (a, b) \mapsto a \circ b$  grup

işlemi sürekli olup dolayısıyla  $K_t = F_t \circ H_t : I \rightarrow G$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) fonksiyonu süreklidir.

Burada

$$K_0 = F_0 \circ H_0 = a \circ b, K_1 = F_1 \circ H_1 = a_1 \circ b_1$$

olup  $a_1 \circ b_1$  ile  $a \circ b$  homotopiktir. Burada  $a \circ b$  her  $t \in [0, 1]$  için

$$(a \circ b)(t) = a(t) \circ b(t)$$

ile tanımlıdır. O halde  $MG$  üzerindeki grup işlemi iyi tanımlıdır. Şimdi grup şartlarının sağlandığını gösterelim.  $MG$  üzerinde bu şekilde tanımlanan işlemin grup aksiyomlarını sağladığını göstermek kolaydır. Gerçekten

(i)  $\forall [a], [b], [c] \in MG$  için  $([a] \circ [b]) \circ [c] = [a] \circ ([b] \circ [c])$  dir.

(ii)  $MG$  nin birim elemanı  $[1_e]$  dir.

(iii) Bir  $[a] \in MG$  nin tersi  $[\bar{a}] \in MG$  dir. Burada  $\bar{a}(t) = \overline{a(t)}$  ile tanımlanır.

$$[a] = \begin{array}{ccc} & x & \\ & \square & \\ & x & \end{array} \quad \text{nin tersi} \quad [\bar{a}] = \begin{array}{ccc} & x^{-1} & \\ & \square & \\ & x^{-1} & \end{array}$$

dir.

Son olarak interchange kuralının sağlandığını gösterelim. Burada

$$([b] * [a]) \circ ([d] * [c]) = ([b] \circ [d]) * ([a] \circ [c])$$

eşitliği yerine ,

$$[b * a] \circ [d * c] = [b \circ d] * [a \circ c]$$

eşitliğinin sağlandığının gösterilmesi yeterli olacaktır. Burada

$$\begin{aligned} (b * a) \circ (d * c)(t) &= \begin{cases} a(2t), & 0 \leq t \leq 1/2 \\ b(2t-1) \cdot a(1), & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases} \circ \begin{cases} c(2t), & 0 \leq t \leq 1/2 \\ d(2t-1) \cdot c(1), & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} a(2t) \circ c(2t), & 0 \leq t \leq 1/2 \\ b(2t-1) \cdot a(1) \circ d(2t-1) \cdot c(1), & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} a(2t) \circ c(2t), & 0 \leq t \leq 1/2 \\ (b(2t-1) \circ d(2t-1)) \cdot (a(1) \circ c(1)), & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (b \circ d) * (a \circ c)(t) &= \begin{cases} (a \circ c)(2t), & 0 \leq t \leq 1/2 \\ (b \circ d)(2t-1) \cdot (a \circ c)(1), & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} a(2t) \circ c(2t), & 0 \leq t \leq 1/2 \\ (b(2t-1) \circ d(2t-1)) \cdot (a(1) \circ c(1)), & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

olduğundan

$$([b] * [a]) \circ ([d] * [c]) = ([b] \circ [d]) * ([a] \circ [c])$$

olduğu görülür. Dolayısıyla  $MG$  bir grup-grupoiddir.

$G$  bir topolojik grupoid olsun.  $W$  tüm birimleri kapsayan  $G$  nin bir açık alt cümlesi olmak üzere  $F(W)$ ,  $W$  üzerinde bir free grupoid olsun.  $N$ ,  $ba$ ,  $a$ ,  $b \in W$  olmak üzere  $[ba^{-1}][b][a]$  formundaki elemanlar tarafından üretilen  $F(W)$  nin normal alt grupoidi olsun.  $F(W)/N$  bölüm grupoidinin  $M(G,W)$  ile gösterildiği ve  $G$  nin *monodromy grupoidi* olarak adlandırıldığı ifade edilmişti. Bu yolla elde edilen  $M(G,W)$  grupoidinin bir topolojik grupoid olduğu [5] referansında gösterilmiştir. Diğer bir monodromy grupoid yapısı ise bir  $G$  topolojik grubu için  $MG$  monodromy grupoidi,  $G_x$  starlarının evrensel örtüsü kullanılarak oluşturulmuştur [6]. Bu yolla elde edilen  $MG$  monodromy grupoidi üzerinde de bir topolojik grupoid yapısı olduğu gösterilebilir. Şimdi bunun için gerekli olacak bazı tanımları verelim.

**Tanım 3.3.9:**  $G$  bir grupoid ve  $O_G$  bir topolojik uzay olsun.  $U$ ,  $O_G$  de açık bir cümle olmak üzere aşağıdaki şartları sağlayan bir  $s : U \rightarrow G$  fonksiyonuna bir “*uygun lokal kesit*” denir [23].

- i)  $\forall x \in U$  için  $\alpha(s(x)) = x$
- ii)  $\beta(s(U))$ ,  $O_G$  de açık olmalı
- iii)  $\beta s : U \rightarrow \beta s(U)$  bir homeomorfizmdir.

**Tanım 3.3.10:**  $G$  bir grupoid,  $O_G \subseteq W$  olacak şekilde  $W$ ,  $G$  nin bir alt cümlesi ve  $W$  üzerinde bir topolojik uzay yapısı bulunsun. Her  $w \in W$  için aşağıdaki şartlar sağlanacak şekilde bir  $s : U \rightarrow G$  bir *uygun lokal kesit* varsa  $(\alpha, \beta, W)$  ya “*sürekli uygun lokal kesite sahiptir*” denir [23].

- i)  $s(\alpha(w)) = w$
- ii)  $s(U) \subset W$
- iii)  $s : U \rightarrow W$  sürekli.

**Tanım 3.3.11:**  $X$  basit irtibatlı örtüye sahip bir topolojik uzay olsun.  $W$ ,  $X$  in bir alt cümlesi olsun. Eğer  $W$  alt cümlesi açık, eğrisel irtibatlı ve  $\forall x \in W$  için  $\pi_1(W, x)$  tek elemanlı ise  $W$  ya *kanonik* bir cümle denir [23].

**Tanım 3.3.12:**  $G$  bir topolojik grupoid ve  $W$ ,  $G$  nin bir alt uzayı olsun. Eğer her bir  $W_x = W \cap G_x$  irtibatlı ise  $W$  ya star irtibatlı ve eğer her bir  $W_x$  kanonik ise  $W$  ya star kanonik denir [23].

Şimdi  $MG$  monodromy grupoidinin bir topolojik grupoide dönüştürülmesine yönelik bir sonuç verelim.

**Teorem 3.3.13:**  $G$  bir topolojik grupoid ve  $W$ ,  $G$  nin aşağıdaki şartları sağlayan açık bir alt cümlesi olsun.

- a)  $O_G \subseteq W$
- b)  $W = W^{-1}$
- c)  $W, G$  yi üretir.
- d)  $(\alpha_W, \beta_W, W)$  sürekli uygun lokal kesite sahip olsun.

$O_p : O_M \rightarrow O_G$  objeler üzerinde birim dönüşüm olacak şekilde  $p : M \rightarrow G$  bir grupoid morfizmi,  $p\tilde{i} = i : W \rightarrow G$  dahil etme dönüşümü ve  $\tilde{W} = \tilde{i}(W)$ ,  $M$  yi üretecek şekilde  $\tilde{i} : W \rightarrow M$  bir yerel morfizm olsun. Bu durumda  $p : M \rightarrow G$  bir topolojik grupoid morfizmi olacak şekilde  $M$  üzerinde bir topolojik grupoid yapısı vardır [5].

Şimdi bu teoremin bir sonucu olarak  $G$  ve  $W$  üzerinde uygun şartların sağlandığı kabul edilerek  $MG$  monodromy grupoidinin bir topolojik grupoide dönüştürülebileceği aşağıdaki şekilde verilebilir.

**Teorem 3.3.14:** Bir  $G$  topolojik grupoidi ile her bir  $W_x$  starı kanonik olacak şekilde  $G$  nin bir  $W$  açık alt cümlesi verilsin. Kabul edelim ki aşağıdaki şartlar sağlansın:

- a)  $O_G \subseteq W$ , yani  $W$  tüm birim morfizmleri içersin.
- b)  $W = W^{-1}$
- c)  $W, G$  yi üretsinsin.
- d)  $(\alpha_W, \beta_W, W)$  sürekli uygun lokal kesite sahip olsun.
- e)  $W^2 \subseteq V$  olacak şekilde  $G$  de star kanonik bir  $V$  alt cümlesi bulunsun.

Bu durumda  $p : MG \rightarrow G$  bir topolojik grupoid morfizmi olacak şekilde  $MG$  üzerinde bir topolojik grupoid yapısı vardır.

**İspat:** İspat için Teorem 3.3.13 ün koşullarının sağlandığını göstermek yeterlidir.

$p : MG \rightarrow G$   $p([a]) = a(1)$  ile tanımlanan  $p$  bir grupoid morfizmi olup  $O_p : O_{MG} \rightarrow O_G$  objeler üzerinde birim,  $p\tilde{i} = i : W \rightarrow G$  dahil etme dönüşümüdür.

Şimdi bir  $\tilde{i} : W \rightarrow MG$  yerel morfizmini tanımlayalım.  $u \in W(x, y)$  olsun. Burada  $W(x, y) = W \cap G(x, y)$  dir. O halde  $u \in W_x$  dir.  $W_x$  star kanonik olduğundan eğrisel irtibatlıdır ve  $1_x$  den  $u$  ya bir  $a$  eğrisi vardır. Burada  $1_x \in W_x$  dir.

$$\tilde{i} : W \rightarrow MG, u \mapsto [a]$$

$$[a] = 1_x \quad \begin{array}{c} \uparrow \\ \square \\ \uparrow \\ u \end{array}$$

şeklinde tanımlayalım.  $W_x$  kanonik olduğundan  $\pi_1(W_x, x) = \{*\}$  dir ve homotopi sınıfının tekliğinden  $\tilde{i}$  iyi tanımlıdır.

Şimdi ise  $\tilde{i}$  nin bir yerel morfizm olduğunu gösterelim.  $u \in W(x, y), v \in W(y, z)$  ve  $vu \in W$  olsun.  $W^2 \subset V$  ve  $V$  star kanonik olduğundan

$$\tilde{i}(vu) = \tilde{i}(v)\tilde{i}(u)$$

dır. Dolayısıyla  $\tilde{i}$  bir yerel morfizmdir. Bunlara ilaveten  $\tilde{W} = \tilde{i}(W)$  nin  $MG$  yi ürettiği Mucuk [23] tarafından ayrıntılı olarak verilmiştir. Böyle bir teknik yöntem ileride  $MG$  nin daha genel hali olan  $(MG)_H$  için verileceğinden burada ispatın ayrıntısına yer verilmemiştir. O halde Teorem 3.3.13 den  $p : MG \rightarrow G$  bir topolojik grupoid morfizmi olacak şekilde  $MG$  üzerinde bir topolojik grupoid yapısı vardır [5].

## 4. BÖLÜM

### GENELLEŞTİRİLMİŞ MONODROMY GRUPOİD

#### 4.1. Topolojik Gruplarda Örtü Grubunun Varlığı

$G$  bir topolojik grupoid olsun. Her bir  $G_x$  starı evrensel bir örtüye sahip ise  $G$  nin monodromy grupoidinin  $G_x$  starlarının evrensel örtülerinin bileşkesi olarak tanımlandığını Bölüm 3.3 den biliyoruz. Diğer yandan bir  $X$  topolojik uzayının bir  $x_0 \in X$  noktasındaki  $\pi_1(X, x_0)$  temel grubunun bir  $H$  alt grubuna karşılık gelen bir örtü uzayı Rotman [12] tarafından verilmiştir. Burada  $H$  nin sadece birimden oluşan bir grup olması halinde bu örtü evrensel örtüyü verir. Bu kesimde Rotman [12] referansındaki bu yapı verilerek monodromy groupoid yapısındaki starların evrensel örtülerden ziyade bunların yerine bu tür örtüler alınarak daha genel olan bir monodromy grupoidi yapısı elde edilecektir.

Topolojik grupların evrensel örtüsü diğer bir yolla Douady ve Lazard [20], aşağıdaki şekilde oluşturmuştur:  $G$  bir topolojik grup ve  $U$  da  $e$  birim elemanının simetrik açık bir komşuluğu olsun.  $U$  üzerindeki free grup  $F(U)$  ve  $a, b, ab \in U$  olmak üzere  $[ab]^{-1}[a][b]$  şeklindeki elemanlar tarafından üretilen  $F(U)$  nun normal alt grubu  $N$  olsun. Buradan  $F(U)/N$  bölüm grubu  $G_U$  olmak üzere bir  $\iota: U \rightarrow G_U$  içine fonksiyonu mevcuttur. Herhangi bir  $f: U \rightarrow H$  lokal grup homomorfizmi için  $f = \tilde{f} \iota$  olacak şekilde bir tek  $\tilde{f}: G_U \rightarrow H$  grup homomorfizmi genişlemesi vardır. Özel olarak  $i: U \rightarrow G$  içine fonksiyonuna karşılık bir tek  $p: G_U \rightarrow G$  grup homomorfizmi vardır.  $\iota: U \rightarrow G_U$  içine fonksiyonunda  $\iota(U) = \tilde{U}$  olsun.  $U$  üzerindeki topoloji  $\iota: U \rightarrow \tilde{U}$  bir homeomorfizm olacak şekilde önce  $\tilde{U}$  ya daha sonra

da sağ dönüşümler yardımı ile  $G_U$  üzerine yaygınlaştırılır. Bu şekilde  $G_U$  üzerinde elde edilen topolojiye göre sağ ve sol dönüşümler birer homeomorfizm ve  $p: G_U \rightarrow G$  bir örtü fonksiyonudur [20]. Bunlara ilaveten  $G$  üzerindeki bazı şartlar altında  $p: G_U \rightarrow G$  bir evrensel örtü morfizmidir.

Topolojik grupların daha genel olan örtü grupları kavramı Scherer grupları yardımı ile Plautt [24] de verilmiştir.

Douady ve Lazard [20] bu yapının grupoid durumuna uygulanması ve bu yolla monodromy grupoidinin elde edilmesi ile ilgili bir taslak Pradines'in önerisi ile Brown [2] referansında verilmiş, daha sonra Brown- Mucuk [25] referansında da ayrıntılı ispatlar verilmiştir.

Şimdi  $X$  basit irtibatlı bir örtüye sahip olan, yani evrensel örtüye sahip, bir topolojik uzay olsun. Yukarıda bahsedilen Rotman [12] referansındaki yapı aşağıdaki şekilde oluşturulmuştur.

$X$  evrensel bir örtüye sahip bir topolojik uzay ve  $x_0 \in X$  olsun.  $X$  in  $x_0$  noktasındaki  $\pi_1(X, x_0)$  temel grubunun bir alt grubu  $H$  ve başlangıç noktası  $x_0$  olan  $X$  deki tüm eğrilerin cümlesi  $P(X, x_0)$  olsun.  $P(X, x_0)$  cümlesi üzerinde bir bağıntı aşağıdaki şekilde tanımlansın:  $\alpha, \beta \in P(X, x_0)$  için  $\alpha \sim_H \beta$  dir ancak ve ancak  $\alpha(1) = \beta(1)$  ve  $[\beta^{-1}\alpha] \in H$  dir. Bu şekilde tanımlı bağıntı bir denklik bağıntısıdır.  $\alpha$  eğrisinin denklik sınıfını  $\langle \alpha \rangle_H$  ve tüm denklik sınıflarının cümlesini  $\tilde{X}_H$  ile gösterelim.  $x_0$  noktasındaki birim eğri  $e_0$  olmak üzere  $\tilde{x}_0 = \langle e_0 \rangle_H \in \tilde{X}_H$  olsun. Ayrıca  $p: \tilde{X}_H \rightarrow X$ ,  $\langle \alpha \rangle_H \mapsto \alpha(1)$  şeklinde tanımlanan bir fonksiyon olsun. Burada açık olarak  $p(\tilde{x}_0) = x_0$  dir. Eğer  $X$  topolojik uzayı eğrisel irtibatlı ve basit irtibatlı bir örtüye sahip ise  $p: \tilde{X}_H \rightarrow X$ ,  $\langle \alpha \rangle_H \mapsto \alpha(1)$  bir örtü fonksiyonu olacak şekilde  $\tilde{X}_H$  üzerinde bir topoloji vardır. Buna ilaveten  $p: \tilde{X}_H \rightarrow X$ ,  $\langle \alpha \rangle_H \mapsto \alpha(1)$  nin karakteristik grubu  $H$  dir.

$\tilde{X}_H$  üzerindeki topoloji yapısı bazı ispatlarda gerekli olduğundan şimdi bu topolojiyi tanıtalım.

**Tanım 4.1.1:**  $\alpha \in P(X, x_0)$  ve  $\alpha(1)$  in bir açık komşuluğu  $U$  olsun.  $\lambda(0) = \alpha(1)$  ve  $\lambda(I) \subset U$  olacak şekilde  $F = \lambda\alpha$  şeklinde tanımlı bir  $F \in P(X, x_0)$  eğrisine  $\alpha$  nın  $U$  da bir devamı denir.

**Tanım 4.1.2:** Bir  $\alpha \in P(X, x_0)$  için  $\tilde{x} = \langle \alpha \rangle_H$  ve  $\alpha(1) = x$  in açık bir komşuluğu  $U$  olmak üzere

$$(U, \tilde{x}) = (U, \langle \alpha \rangle_H) = \{F \in \tilde{X}_H \mid F, X \text{ de } \alpha \text{ nin devamı}\}$$

tüm  $(U, \tilde{x})$  cümleleri  $\tilde{X}_H$  üzerindeki bir topoloji için bir bazdır.

**Teorem 4.1.3:**  $(X, x_0)$  noktalı bir topolojik uzay ve  $\pi_1(X, x_0)$  temel grubunun bir alt grubu  $H$  olsun. Eğer  $X$  eğrisel irtibatlı ve basit irtibatlı bir örtüye sahip ise  $(\tilde{X}_H, p)$  çifti  $X$  in bir örtü uzayı ve  $p_*(\pi_1(\tilde{X}_H, x_0)) = H$  dir [12].

**Not 4.1.4:**  $(X, x_0)$  bir noktalı topolojik uzay,  $X$  eğrisel irtibatlı ve basit irtibatlı bir örtüye sahip olsun. Bir  $q: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$  örtü fonksiyonu verilsin.  $q: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$  nun karakteristik grubu  $H$  olmak üzere Lemma 2.4.7 den  $q$  örtü fonksiyonu  $H$  ye karşılık gelen  $p: \tilde{X}_H \rightarrow X$  örtü dönüşümüne denktir.

Tüm bunların bir sonucu olarak aşağıdaki teorem verilebilir.

**Teorem 4.1.5 :**  $X$  irtibatlı ve basit irtibatlı bir örtüye sahip olan bir topolojik grup olsun.  $e \in X$  birim eleman olmak üzere bir  $q: (\tilde{X}, \tilde{e}) \rightarrow (X, e)$  örtü dönüşümü verilsin. Bu durumda  $X$  in grup yapısı  $\tilde{X}$  ya yükselir, yani  $\tilde{X}$  birim elemanı  $\tilde{e}$  olan bir topolojik grup ve  $q: (\tilde{X}, \tilde{e}) \rightarrow (X, e)$  bir topolojik grup morfizmi olacak şekilde  $\tilde{X}$  üzerinde bir grup yapısı vardır [12].

## 4.2 Genelleştirilmiş Monodromy Grupoid

Bu bölümde, Bölüm 4.1 de tanıtılan örtü uzayı yapısı monodromy grupoidine uygulanarak bir genelleştirilmiş monodromy grupoid yapısı elde edilerek bununla ilgili bazı sonuçlar verilecektir.

Bunun için önce aşağıdaki hazırlığı yapalım.

$G$  bir topolojik grupoid ve  $H$  da  $\pi_1 G$  temel grupoidinin normal bir alt grupoidi olsun.  $G$  topolojik grupoidinde  $\forall g \in G(x, y)$  için

$$R_g : G_y \rightarrow G_x, h \mapsto h \cdot g$$

sağ dönüşümü bir homeomorfizm olduğundan

$$\pi_1(R_g) : \pi_1(G_y) \rightarrow \pi_1(G_x), [a] \mapsto [a \cdot g]$$

dönüşümü bir izomorfizmdir. Burada  $(a \cdot g)(t) = a(t)g$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) ile tanımlıdır. Şimdi kabul edelim ki  $H$  normal alt grupoidi  $\forall g \in G(x, y)$  için  $\pi_1(R_g)$  grupoid izomorfizmi altında invariant, yani  $[a] \in H$  ve  $[a] \in \pi_1(G_y)$  iken  $[a \cdot g] \in H$  olsun.

Diğer taraftan  $H, \pi_1 G$  nin bir alt grupoidi olduğundan  $\forall x \in O_G$  için  $H(1_x)$  obje grubu  $\pi_1(G, 1_x)$  temel grubunun bir alt grubudur. Aynı şekilde  $G_x \subseteq G$  olduğundan  $\pi_1(G_x, 1_x)$  temel grubu da  $\pi_1(G, 1_x)$  nin bir alt grubudur. Buradan  $\pi_1(G_x, 1_x) \cap H(1_x)$  kesişimi de  $\pi_1(G, 1_x)$  nin bir alt grubudur. O halde

$$H(1_x) \cap \pi_1(G_x, 1_x) \leq \pi_1(G, 1_x) \quad (1)$$

ifadesinin her iki tarafını  $\pi_1(G_x, 1_x)$  ile kesiştirilirse

$$H(1_x) \cap \pi_1(G_x, 1_x) \leq \pi_1(G_x, 1_x)$$

alt grubu elde edilir. Burada  $H(1_x) \cap \pi_1(G_x, 1_x)$  ifadesi  $H(x)$  ile gösterilirse  $\pi_1(G_x, 1_x)$  nin bir  $H(x)$  alt grubu elde edilmiş olur.

Şimdi Bölüm 4.1 deki bağıntıya benzer olarak aşağıdaki şekilde bir bağıntı tanımlayalım.

**Önerme 4.2.1:**  $G$  bir topolojik grupoid ve  $H$  da  $\pi_1 G$  temel grupoidinin normal bir alt grupoidi olsun.  $G$  üzerinde başlangıç noktaları birim olan tüm eğrilerin sınıfı üzerinde bir  $\sim_H$  bağıntısı aşağıdaki şekilde tanımlansın. Bu tür  $a$  ve  $b$  eğrileri için

$$a \sim_H b \Leftrightarrow a(0) = b(0), a(1) = b(1) \text{ ve } [b^{-1}a] \in H$$

dir. Bu şekilde tanımlanan bağıntı bir denklik bağıntısıdır.

**İspat:** Gerçekten

i) Bir  $a$  için  $a(0) = a(0)$ ,  $a(1) = a(1)$  ve  $[a^{-1}a] = [1_{a(0)}] \in H$  olduğundan  $a \sim_H a$  dir. Burada  $H$  normal bir alt grupoid olduğundan  $[a^{-1}a] = [1_{a(0)}] \in H$  olduğuna dikkat edelim.

ii) Eğer  $a$  ve  $b$  için  $a \sim_H b$  ise  $a(0) = b(0)$ ,  $a(1) = b(1)$  ve  $[b^{-1}a] \in H$  dir.  $H$  bir alt grupoid olduğundan  $[b^{-1}a]^{-1} = [a^{-1}b] \in H$  olup  $b \sim_H a$  dir.

iii)  $a \sim_H b$  ve  $b \sim_H c$  ise  $a(0) = b(0)$ ,  $a(1) = b(1)$  ve  $b(0) = c(0)$ ,  $b(1) = c(1)$  olacağından  $a(0) = c(0)$  ve  $a(1) = c(1)$  dir. Ayrıca  $a \sim_H b$  ve  $b \sim_H c$  den  $[b^{-1}a] \in H$  ve  $[c^{-1}b] \in H$  olduğundan  $[c^{-1}b][b^{-1}a] = [c^{-1}bb^{-1}a] = [c^{-1}a] \in H$  dir. Buradan da  $a \sim_H c$  dir.

Bu denklik bağıntısına göre bir  $a$  eğrisinin denklik sınıfını  $\langle a \rangle_H$  ile gösterilsin.

Buradan anlaşılacağı üzere bu denklik bağıntısı her bir  $G_x$  üzerinde tanımlanan ve başlangıcı  $1_x$  birim olan eğrilerin sınıfı olan  $P(G_x, 1_x)$  üzerinde bir denklik bağıntısı oluşturur. Bu denklik bağıntısına göre her bir  $P(G_x, 1_x)$  deki tüm eğrilerin denklik sınıflarının cümlesi  $(\tilde{G}_x)_{H(x)}$  ile gösterilsin. Şimdi

$$(MG)_H = \bigcup_{x \in O_G} (\tilde{G}_x)_{H(x)}$$

olarak tanımlanan  $(MG)_H$  nin  $O_G$  üzerinde bir grupoid olduğunu gösterelim.

**Teorem 4.2.2:**  $G$  bir topolojik grupoid,  $H \subseteq \pi_1 G$  bir normal alt grupoid olsun. Kabul edelimki  $H$  alt grupoidi  $\forall g \in G(x, y)$  için  $\pi_1(R_g): \pi_1(G_y) \rightarrow \pi_1(G_x)$  grupoid izomorfizmi altında invaryant olsun. Bu taktirde  $(MG)_H = \bigcup_{x \in O_G} (\tilde{G}_x)_{H(1_x)}$ ,  $O_G$  üzerinde bir grupoiddir.

**İspat:** Şimdi  $(MG)_H$  nin bir grupoid olduğunu göstermek için grupoid yapısını oluşturan fonksiyonları aşağıdaki şekilde tanımlayalım.

1) Başlangıç ve bitiş fonksiyonları

$s, t: (MG)_H \rightarrow O_G$ ,  $s(\langle a \rangle_H) = s(a(0))$ ,  $t(\langle a \rangle_H) = t(a(1))$  ile tanımlansın.

2) Birim morfizmler fonksiyonu  $\varepsilon: O_G \rightarrow (MG)_H$ ,  $x \mapsto \varepsilon(x) = \langle 1_x \rangle_H$ ,  $1_x$  noktasında kapalı eğri, olarak alınsın.

3) Ters morfizmler fonksiyonu

$u: (MG)_H \rightarrow (MG)_H$ ,  $\langle a \rangle_H \mapsto u(\langle a \rangle_H) = \langle a \rangle_H^{-1} = \langle \bar{a} \rangle_H$  olsun.

Burada  $\bar{a}: [0,1] \rightarrow G$ ,  $t \mapsto a(1-t) \cdot (a(1))^{-1}$  ile tanımlıdır.

4) Grupoid parçalı işlemi “concatination” olarak bilinen

$\mu: (MG)_{H_s} \times_t (MG)_H \rightarrow (MG)_H$ ,  $(\langle b \rangle_H, \langle a \rangle_H) \mapsto \langle b \rangle_H * \langle a \rangle_H = \langle b * a \rangle_H$

$$(b * a)(t) = \begin{cases} a(2t), & 0 \leq t \leq 1/2 \\ b(2t-1) \cdot a(1), & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

ile verilsin. Burada  $(MG)_{H_s} \times_t (MG)_H = \{ \langle b \rangle_H, \langle a \rangle_H : s(\langle b \rangle_H) = t(\langle a \rangle_H) \}$  dir. Bu şekilde tanımlanan  $\mu$  işlemi iyi tanımlıdır. Gerçekten  $c \in \langle a \rangle_H$  ve  $d \in \langle b \rangle_H$  ise sırasıyla  $c(0) = a(0)$ ,  $c(1) = a(1)$  ve  $[c^{-1}a] \in H(1_x)$ ,  $d(0) = b(0)$ ,  $d(1) = b(1)$  ve  $[d^{-1}b] \in H(1_y)$  dir.

Buradan

$$d * c(0) = c(0) = a(0) = b * a(0), \quad d * c(1) = d(1) \cdot c(1) = b(1) \cdot a(1) = b * a(1)$$

dir. Şimdi ise  $[(d * c)^{-1}(b * a)] \in H$  olduğunu gösterelim. Bunun için  $c(1) = g$  olmak üzere  $d * c$  ve  $b * a$  yı aşağıdaki şekilde gösterelim.

$$d * c = (d \cdot c(1))c = (d \cdot g)c = d_1c \quad \text{ve} \quad b * a = (b \cdot a(1))a = (b \cdot g)a = b_1a$$

olsun. Buradan

$$\begin{aligned} [(d * c)^{-1}(b * a)] &= [((d \cdot c(1))c)^{-1}((b \cdot a(1))a)] \\ &= [(d_1c)^{-1}(b_1a)] \\ &= [c^{-1}d_1^{-1}(b_1a)] \\ &= [c^{-1}(d \cdot g)^{-1}(b \cdot g)a] \\ &= [c^{-1}(d^{-1} \cdot g)(b \cdot g)a] \\ &= [c^{-1}((d^{-1}b) \cdot g)a] \end{aligned}$$

dır. Diğer taraftan  $H \subseteq \pi_1 G$  grupoidi bir normal alt grupoid ve  $\forall g \in G(x, y)$  için  $\pi_1(R_g) : \pi_1(G_y) \rightarrow \pi_1(G_x)$  grupoid izomorfizmi altında invaryant olduğundan  $\langle c \rangle_H, \langle a \rangle_H \in (MG)_H(x, y)$  için  $[c^{-1}a] \in H(1_x)$  ve  $\alpha \in H(g)$  olmak üzere  $[c^{-1}\alpha a] \in H$  dir. Dolayısıyla  $\alpha = (d^{-1}b) \cdot g \in H(g)$  olduğundan  $[c^{-1}((d^{-1}b) \cdot g)a] \in H$ , yani  $[(d * c)^{-1}(b * a)] \in H$  dir. Buradan  $\mu$  fonksiyonunun iyi tanımlı olduğu görülür.

Şimdi bu şekilde tanımlı fonksiyonların grupoid şartlarını sağladığını gösterelim.

i)  $\forall \langle a \rangle_H, \langle b \rangle_H \in (MG)_H \times_t (MG)_H$  için

$$s(\langle b * a \rangle_H) = s(b * a(0)) = s(a(0)) = s(\langle a \rangle_H),$$

$$t(\langle b * a \rangle_H) = t(b * a(1)) = t(b(1) \cdot a(1)) = t(\langle b \rangle_H) \text{ dir.}$$

ii)  $s(\langle b \rangle_H) = t(\langle a \rangle_H)$ ,  $s(\langle c \rangle_H) = t(\langle b \rangle_H)$  olacak şekilde  $\forall \langle a \rangle_H, \langle b \rangle_H, \langle c \rangle_H \in (MG)_H$  için

$$s(\langle c * (b * a) \rangle_H) = s(c * (b * a)(0)) = s(a(0)) = s(\langle a \rangle_H) = s(\langle (c * b) * a \rangle_H),$$

$$t(\langle c * (b * a) \rangle_H) = t(c * (b * a)(1)) = t(c(1) \cdot b(1) \cdot a(1)) = t((c * b) * a(1)) = t(\langle (c * b) * a \rangle_H) \text{ ve}$$

$$[c * (b * a)] = [(c * b) * a] \text{ olduğundan } [(c * (b * a))^{-1}((c * b) * a)] = [1_x] \in H(1_x)$$

dir. Buradan  $\langle (c * b) * a \rangle_H = \langle c * (b * a) \rangle_H$  dir.

iii)  $a : [0, 1] \rightarrow G_x$ ,  $a(0) = 1_x$ ,  $a(1) = g$  ve  $t(g) = y$  olmak üzere  $\langle a \rangle_H \in (MG)_H$  olsun.

$$\text{Burada } s(\langle a \rangle_H) = s(a(0)) = x, \quad t(\langle a \rangle_H) = t(a(1)) = y \text{ ve } 1_{s(\langle a \rangle_H)} = \langle 1_x \rangle,$$

$1_{t\langle a \rangle_H} = \langle 1_{1_y} \rangle_H$  dir. Ayrıca  $s\langle a * 1_{1_x} \rangle = s((a * 1_{1_x})(0)) = s(1_{1_x}(0)) = s(1_x) = x = s\langle a \rangle_H$ ,  
 $t\langle a * 1_{1_x} \rangle = t((a * 1_{1_x})(1)) = t(a(1) \cdot 1_{1_x}(1)) = t(a(1) \cdot 1_x) = y = t\langle a \rangle_H$  ve  
 $[(a * 1_{1_x})^{-1} a] = [a^{-1} a] = [1_x] \in H$  olduğundan  $\langle a \rangle_H = \langle a * 1_{1_x} \rangle_H$  dir. Benzer şekilde  
 $\langle 1_{1_y} \rangle_H * \langle a \rangle_H = \langle 1_{1_y} * a \rangle_H = \langle a \rangle_H$  dir.

iv)  $\langle 1_{1_x} \rangle_H$ ,  $1_{1_x} : [0,1] \rightarrow G_x$ ,  $1_{1_x}(0) = 1_x, 1_{1_x}(1) = 1_x$  ve  $\forall t \in [0,1]$  için  $s(1_{1_x}(t)) = x$  olacak şekildeki eğrilerin denklik sınıfı olmak üzere  $s\langle 1_{1_x} \rangle_H = t\langle 1_{1_x} \rangle_H = x$  dir.

v)  $a : [0,1] \rightarrow G_x$ ,  $a(0) = 1_x$ ,  $a(1) = g$  ve  $t(g) = y$  olmak üzere  $\langle a \rangle_H \in (MG)_H$  olsun.  
 $s\langle \bar{a} * a \rangle_H = s(\bar{a} * a(0)) = s(a(0)) = x = s\langle 1_{1_x} \rangle_H$ ,  
 $t\langle \bar{a} * a \rangle_H = t((\bar{a} * a)(1)) = t(a(0)) = x = t\langle 1_{1_x} \rangle_H$  ve  
 $[(\bar{a} * a)^{-1} 1_{1_x}] = [1_x^{-1} 1_{1_x}] = [1_x] \in H$  olduğundan  $\langle \bar{a} * a \rangle_H = \langle 1_{1_x} \rangle_H$  dir. Benzer şekilde  
 $\langle a * \bar{a} \rangle_H = \langle 1_{1_y} \rangle_H$  olduğu da görülebilir. Buradan  
 $\langle \bar{a} \rangle_H * \langle a \rangle_H = \langle \bar{a} * a \rangle_H = \langle 1_{1_x} \rangle_H = 1_{s\langle a \rangle_H}$  ve  $\langle a \rangle_H * \langle \bar{a} \rangle_H = \langle a * \bar{a} \rangle_H = \langle 1_{1_y} \rangle_H = 1_{t\langle a \rangle_H}$   
dir.

**Tanım 4.2.3:**  $G$  bir topolojik grupoid ve  $H$  da  $\pi_1 G$  temel grupoidinin  $\forall g \in G(x, y)$  için  $\pi_1(R_g) : \pi_1(G_y) \rightarrow \pi_1(G_x)$  izomorfizmi altında invaryant olan normal bir alt grupoidi olmak üzere  $O_G$  üzerinde yukarıda tanımlanan  $(MG)_H = \bigcup_{x \in O_G} (\tilde{G}_x)_{H(1_x)}$  grupoidine ( $H$  ye bağlı) *genelleştirilmiş monodromy grupoidi* denir.

Şimdi  $H$  alt grupoidin varlığına birkaç örnek verelim.

**Örnek 4.2.4:**  $G$  bir topolojik grupoid olsun.

i) Her bir  $a \in G$  için  $1_a : [0,1] \rightarrow G$ ,  $1_a(t) = a$  ile tanımlanan birim eğri olmak üzere  $H = \{ [1_a] : a \in G \}$  (sadece birimlerin sınıfı)  $\pi_1 G$  nin normal bir alt grupoidi olup

her  $g \in G(x, y)$  için  $\pi_1(R_g): \pi_1(G_y) \rightarrow \pi_1(G_x)$  izomorfizmi altında invaryanttır.

Çünkü  $\pi_1(R_g)([1_a]) = [1_a g] = [1_{ag}] \in H$  dır.

ii) Her bir  $h \in G$  için  $\pi_1(G, h)$  obje grubu (temel grup) olmak üzere  $H = \bigcup_{g \in G} \pi_1(G, h)$

birleşimi  $\pi_1 G$  nin normal bir alt grupoidi olup her  $g \in G(x, y)$  için

$\pi_1(R_g): \pi_1(G_y) \rightarrow \pi_1(G_x)$  izomorfizmi altında invaryanttır. Geçekten  $[a] \in H$  ve

$[a] \in \pi_1(G_y)$  ise  $\pi_1(R_g)([a]) = [a.g] \in H$  dır.

**Sonuç 4.2.5:**  $G$  bir topolojik grupoid olsun. Eğer  $H$  normal alt grupoidi özel olarak (i) deki gibi  $H = \{ [1_a] : a \in G \}$  alınırsa  $(\tilde{G}_x)_{H(1_x)} = \tilde{G}_x$  evrensel örtü ve  $(MG)_H = MG$  olur. Bundan dolayı  $(MG)_H$  grupoidi  $MG$  den daha genel bir grupoiddir.

**Sonuç 4.2.6:** Diğer yandan  $G = X \times X$  topolojik grupoidi olarak alınırsa,  $H$  normal alt grupoidine karşılık gelen  $(MG)_H$  grupoidini inceleyelim. Burada  $G_x = \{x\} \times X \cong X$  dır.

Dolayısıyla  $(MG)_H = \bigcup_{x \in O_G} (\pi_1 G_x)_{H(x)} = \bigcup_{x \in O_G} (\pi_1 X)_H = (\pi_1 X)_H$  olur. Burada  $(\pi_1 X)_H$ ,

$O_{(\pi_1 X)_H} = X$  ve  $Mor(\pi_1 X)_H = (\pi_1 X)_H$  olacak şekilde  $X$  üzerinde bir grupoiddir. Aynı zamanda  $(\pi_1 X)_H$  grupoidi  $\pi_1 X / H$  bölüm grupoididir.

$MG$  monodromy grupoidi üzerinde bir star topolojik grupoid yapısı olduğu [5] referansında gösterilmiştir. Buradan hareketle  $(MG)_H$  genelleştirilmiş monodromy grupoidi üzerinde bir star topolojik grupoid yapısı olabileceği düşünülebilir. Bunun için önce star topolojik grupoid yapısının tanımını ifade edelim.

**Tanım 4.2.7:** Bir  $G$  grupoidinde her bir  $G_x = \{a \in G : s(a) = x\}$  starı birer topolojiye sahip ve her bir  $a \in G(x, y)$  için  $R_a : G_y \rightarrow G_x, [b] \mapsto [b \circ a]$  dönüşümü bir homeomorfizm ise  $G$  ye bir *star topolojik grupoid* denir [2].

Bir topolojik grupoidinde her bir sağ ve sol dönüşüm birer homeomorfizm olduğundan bir topolojik grupoid bir star topolojik grupoiddir. Şimdi elde edilen  $(MG)_H$

genelleştirilmiş monodromy grupoidi üzerinde bir star topolojik grupoid yapısı oluşturulabileceğini görelim.

**Teorem 4.2.8:**  $G$  bir star topolojik grupoid olsun. Her bir  $G_x$  starı irtibatlı ve bir evrensel örtüye sahip olsun.  $H \subseteq \pi_1 G$  bir normal alt grupoid olsun. Kabul edelimki  $H$  alt grupoidi  $\forall g \in G(x, y)$  için  $\pi_1(R_g) : \pi_1(G_y) \rightarrow \pi_1(G_x)$  grupoid izomorfizmi altında invariant olsun.  $\forall x \in O_G$  için  $\pi_1(G_x, 1_x)$  temel grubunun bir  $H(x) \subseteq \pi_1(G_x, 1_x)$  alt grubu verilsin. Bu durumda  $(MG)_H$  grupoidi üzerinde bir star topolojik grupoid yapısı oluşturulabilir.

**İspat:** Teorem 4.2.2 den  $(MG)_H$  in bir grupoid olduğunu biliyoruz. Burada  $G_x$  starı irtibatlı ve bir evrensel örtüye sahip olduğundan  $p_x : (\pi_1 G_x)_{H(x)} \rightarrow G_x$  örtü fonksiyonu olacak şekilde  $(\pi_1 G_x)_{H(x)}$  üzerinde bir topoloji vardır. Bundan dolayı Tanım 4.1.2 den  $\beta = \{\hat{U}_g + \langle b \rangle_H : \langle b \rangle_H \in (\pi_1 G_x)_{H(x)}\}$  sınıfı,  $(MG)_{H(x)}$  üzerindeki topoloji için bir bazdır. Burada  $\hat{U}_g = \{\langle c \rangle_H : s(\langle c \rangle_H) = g = b(1)\}$  ve  $\hat{U}_g + \langle b \rangle_H = \{\langle c \rangle_H + \langle b \rangle_H : \langle c \rangle_H \in \hat{U}_g\}$  dır.

Şimdi her bir  $\langle a \rangle_H \in (MG)_H(x, y)$  için

$$R_{\langle a \rangle_H} : ((MG)_H)_y \rightarrow ((MG)_H)_x, \langle b \rangle_H \mapsto \langle b * a \rangle_H$$

sağ dönüşümünün bir homeomorfizm olduğunu göstermeliyiz.  $R_{\langle a \rangle_H}$  sağ dönüşümü birebir ve örten bir fonksiyon olup tersi  $R_{\langle a \rangle_H}^{-1}$  olduğundan, bu dönüşümün sadece açık olduğunu göstermek yeterlidir.  $\hat{U}_g + \langle b \rangle_H$ ,  $g = b(1)$  olmak üzere  $((MG)_H)_y$  nin açık bir (baz komşuluğu) alt cümlesi olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} R_{\langle a \rangle_H}(\hat{U}_g + \langle b \rangle_H) &= (\hat{U}_g + \langle b \rangle_H) * \langle a \rangle_H \\ &= \{\langle c \rangle_H + \langle b \rangle_H * \langle a \rangle_H : \langle c \rangle_H \in \hat{U}_g\} \\ &= \langle ca(1) \rangle_H + \langle b * a \rangle_H \\ &= \hat{U}_g a(1) + \langle b * a \rangle_H \end{aligned}$$

ve  $\hat{U}_g a(1) + \langle b * a \rangle_H$ ,  $((MG)_H)_x$  in bazının bir elemanıdır yani  $((MG)_H)_x$  nin açık bir alt cümlesidir. Dolayısıyla  $R_{\langle a \rangle_H}$  dönüşümü açık olup bir homeomorfizmdir. Buradan  $(MG)_H$  üzerinde bir star topolojik grupoid yapısı oluşturulabildiği görülür.

Şimdi ise Teorem 3.3.13 ü kullanarak  $(MG)_H$  üzerinde bir topolojik grupoid yapısı olduğunu göstereceğiz.

**Teorem 4.2.15:** Bir  $G$  topolojik grupoidi ile her bir  $W_x$  starı canonical olacak şekilde  $G$  nin bir  $W$  açık alt cümlesi verilsin. Kabul edelim ki aşağıdaki şartlar sağlansın:

- $O_G \subseteq W$ , yani  $W$  tüm birim morfizmleri içersin.
- $W = W^{-1}$
- $W, G$  yi üretsın.
- $(\alpha_W, \beta_W, W)$  sürekli admissible local sectiona sahip olsun.
- $W^2 \subseteq V$  olacak şekilde  $G$  de star kanonik bir  $V$  alt cümlesi bulunsun.

Bu durumda  $p : (MG)_H \rightarrow G$  bir topolojik grupoid morfizmi olacak şekilde  $(MG)_H$  üzerinde bir topolojik grupoid yapısı vardır.

**İspat :** İspat için Teorem 3.3.13 ün koşullarının sağlandığını göstermek yeterlidir.

$(MG)_H$ ,  $O_G$  üzerinde bir grupoid olduğundan  $O_p : O_{(MG)_H} \rightarrow O_G$  objeler üzerinde birim olacak şekilde bir  $p : (MG)_H \rightarrow G$ ,  $p(\langle a \rangle_H) = a(1)$  grupoid morfizmi vardır. Burada  $p\tilde{i} = i : W \rightarrow G$  dahil etme fonksiyonudur. Şimdi  $\tilde{i} : W \rightarrow (MG)_H$  yerel morfizmini tanımlayalım.

$u \in W(x, y)$  olsun. Burada  $W(x, y) = W \cap G(x, y)$  olup  $u \in W_x$  dir.  $W_x$  star kanonik olduğundan eğrisel irtibatlıdır ve  $1_x$  den  $u$  ya bir  $a$  eğrisi vardır. Burada  $1_x \in W_x$  dir.

$$\tilde{i} : W \rightarrow (MG)_H, u \mapsto \langle a \rangle_H$$

şeklinde tanımlayalım.  $W_x$  kanonik olduğundan  $\pi_1(W_x, x) = \{*\}$  dir ve  $H$  üzerinde tanımlanan denklik bağıntısından dolayı  $\tilde{i}$  iyi tanımlıdır. Gerçekten  $b \in \langle a \rangle_H$  olmak üzere  $b(0) = a(0), b(1) = a(1)$  ve  $[b^{-1}a] = [1_x] \in H$  dir.

Şimdi ise  $\tilde{i}$  nin bir yerel morfizm olduğunu gösterelim.  $u \in W(x, y), v \in W(y, z)$  ve  $vu \in W$  olsun. Varsayımdan  $W^2 \subset V$  ve  $V$  star kanonik olduğundan

$$\tilde{i}(vu) = \tilde{i}(v)\tilde{i}(u)$$

Dolayısıyla  $\tilde{i}$  bir yerel morfizmdir.

Bunlara ilaveten şimdi  $\tilde{W} = \tilde{i}(W)$  nin  $(MG)_H$  yi ürettiğini gösterelim. Bunun için bir  $\langle a \rangle_H \in (MG)_H(x, y)$  verilsin.  $\langle a \rangle_H$  in  $\tilde{W} = \tilde{i}(W)$  nin elemanlarının herhangi bir birleşimi olarak yazılabileceğini gösterelim.  $(MG)_H$  in yapısından dolayı  $\langle a \rangle_H \in (MG)_H(x, y)$  morfizmi

$$s(\langle a \rangle_H) = s(a(0)) = x, a(0) = 1_x \text{ ve } t(\langle a \rangle_H) = t(a(1)) = y, a(1) = g \in G(x, y)$$

olacak şekilde  $G_x$  de bir eğridir.

Şimdi  $S \subseteq [0, 1]$  ve

$$S = \{s \in [0, 1] : a^s = a/[0, s], a^s = a_n \dots a_1, \text{Im } a_i \subseteq W\}$$

olsun.  $S \subseteq [0, 1]$  olduğundan üstten 1 ile sınırlı olup  $\sup S = u$  mevcuttur. Dolayısıyla

a)  $u \in S$

b)  $u = 1$

olduğunu göstermeliyiz.

a)  $a(u) \in G(x, x_u)$ ,  $x_u = t(a(u))$  olacak şekilde bir eğri olsun. Buradan aşağıdaki şekilde tanımlı

$$f : [0, 1] \rightarrow G_{x_u}, t \mapsto a(t)a(u)^{-1}$$

fonksiyonu süreklidir. Çünkü,

$$a : [0, 1] \rightarrow G_x, t \mapsto a(t) \text{ ve } R_{a(u)^{-1}} : G_x \rightarrow G_{x_u}, b \mapsto ba(u)^{-1} \text{ dönüşümleri süreklidir.}$$

Burada  $f(u) = a(u)a(u)^{-1} = 1_{x_u} \in W$  dır. Diğer taraftan  $W$  açık ve  $f$  sürekli olduğundan  $f([u - \varepsilon, u + \varepsilon]) \subseteq W$  olacak şekilde bir  $\varepsilon > 0$  sayısı vardır. Burada  $G$  bir topolojik grupoid olduğundan

$$\delta_G : G \times_{\alpha} G \rightarrow G, (g, h) \mapsto gh^{-1}$$

fark fonksiyonu süreklidir. O halde bu fonksiyonun  $W$  ya kısıtlaması olan  $\delta_W : W \times W \rightarrow G$  fark fonksiyonu da süreklidir. Dolayısıyla,

$$\delta_W \circ (f \times f) : [u - \varepsilon, u + \varepsilon] \times [u - \varepsilon, u + \varepsilon] \rightarrow W \times W \rightarrow G$$

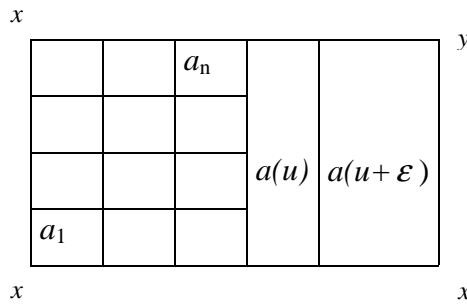
$$(t_1, t_2) \mapsto (a(t_1)a(u)^{-1}, a(t_2)a(u)^{-1}) \mapsto a(t_1)a(t_2)^{-1}$$

dönüşümde süreklidir. Bu yüzden  $\varepsilon' < \varepsilon$  olacak şekilde bir  $\varepsilon' > 0$  için

$$\delta_W \circ (f \times f)([u - \varepsilon', u + \varepsilon'] \times [u - \varepsilon', u + \varepsilon']) \subseteq W \quad (1)$$

dır.  $u = \sup S$  olduğundan  $u - \varepsilon' < s$  olacak şekilde bir  $s \in S$  vardır. O halde  $\text{Im } a_i \subseteq W$  olacak şekilde  $n$  ler için  $a^s = a_n \dots a_1$  şeklinde yazılabilir ve buradan  $t \in [s, u]$  için  $a_{n+1}(t) = a(t)a(s)^{-1}$  olmak üzere  $a^u = a_{n+1}(t)(a_n \dots a_1)$  dır. (1) den dolayı  $\text{Im } a_{n+1} \subseteq W$  dır. Bu yüzden  $u \in S$  dir.

b)  $u=1$  olduğunu gösterelim. Bunun için  $u < 1$  olduğunu kabul edelim.  $u \in S$  olduğundan  $\text{Im } a_i \subseteq W$  olacak şekilde bazı  $n$  ler için  $a^u = a_n \dots a_1$  dır.  $1 \leq i \leq n$  için  $x_0 = x$  ve  $x_n = y$  olmak üzere  $a_i(1) = g_i \in G(x_{i-1}, x_i)$  olsun. Buradan  $a(u) = g_n \dots g_1$  dir ve  $a$  aşağıdaki gibi küçük eğri parçalarına bölünebilir.



Burada,

$$[u, 1] \rightarrow G_{x_n}, t \mapsto a(t)a(u)^{-1}$$

dönüşümü sürekli olduğundan,  $t \in [u, u + \varepsilon]$  için  $a(t)a(u)^{-1} \in W$  olacak şekilde bir

$\varepsilon > 0$  vardır. Bu yüzden  $t \in [u, u + \varepsilon]$  için  $a_{n+1}(t) = a(t)a(u)^{-1}$  olmak üzere

$a^{u+\varepsilon} = a_{n+1}(a_n \dots a_1)$  şeklindedir. Dolayısıyla  $a^{u+\varepsilon} \in S$  olur ki bu bir çelişkidir. Bu ise

$u=1$  olduğunu ispatlar ve böylece  $\tilde{W} = \tilde{i}(W)$  nin  $(MG)_H$  yi ürettiği görülür.

O halde Terorem 3.3.13 den  $p : (MG)_H \rightarrow G$  bir topolojik grupoid morfizmi olacak şekilde  $(MG)_H$  üzerinde bir topolojik grupoid yapısı vardır.

## 5. BÖLÜM

### H-UZAYI ve H-GRUBU

#### 5.1. H -Uzayı

Bu bölümde, Bölüm 4.1 de Rotman [12] tarafından tanımlanan yapıyı önce bir  $H$ -uzayına uygulayarak  $H$ -uzayı yapısının örtülerine yükselmesi ile ilgili bazı sonuçlar verilecektir. Bunun için öncelikle gerekli olan bazı tanım ve teoremleri verelim.

**Tanım 5.1.1:**  $X, Y$  topolojik uzaylar ve  $f, g : X \rightarrow Y$  ye sürekli fonksiyonlar olsunlar. Eğer tüm  $x \in X$  ler için  $F(x,0) = f(x)$  ve  $F(x,1) = g(x)$  olacak şekilde sürekli bir  $F : I \times X \rightarrow Y$  fonksiyonu mevcut ise  $f$  ve  $g$  fonksiyonlarına *homotopiktir* denir ve  $f \cong g$  şeklinde gösterilir.

Aşağıdaki teorem literatürde "Covering Homotopy Teoremi" olarak bilinir.

**Teorem 5.1.2:**  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  bir örtü dönüşümü ve  $Z$  irtibatlı bir uzay olsun.  $\forall z \in Z$  için  $j : Z \rightarrow Z \times I, j(z) = (z,0)$  olacak şekilde sürekli dönüşümlerin

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{\tilde{f}} & \tilde{X} \\ \downarrow j & & \downarrow p \\ Z \times I & \xrightarrow{F} & X \end{array}$$

değişmeli diyagramını göz önüne alalım.

Bu taktirde  $p\tilde{F} = F$  ve  $\tilde{F}j = \tilde{f}$  olacak şekilde bir tek  $\tilde{F} : Z \times I \rightarrow \tilde{X}$  sürekli dönüşümü vardır [2].

Bu teoremin bir sonucu aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

**Sonuç 5.1.3:** Eğer  $f, g : Z \rightarrow X$  fonksiyonları homotopik ise sırası ile bu fonksiyonların yükselmeleri olan  $\tilde{f}$  ve  $\tilde{g}$  da homotopiktir. Çünkü eğer  $f \cong g$  ise  $F(z,0) = f(z)$  ve  $F(z,1) = g(z)$  olacak şekilde  $F : Z \times I \rightarrow X$  sürekli fonksiyonu vardır. Diğer taraftan Teorem 5.1.2 den  $\tilde{F} : Z \times I \rightarrow \tilde{X}$  sürekli fonksiyonu mevcuttur. Burada  $p\tilde{F}(z,0) = F(z,0) = f(z)$  ve  $p\tilde{F}(z,1) = F(z,1) = g(z)$  dir. Yükselmenin tekliğinden dolayı  $\tilde{F}(z,0) = \tilde{f}(z)$  ve  $\tilde{F}(z,1) = \tilde{g}(z)$  dir. Buradan  $\tilde{f} \cong \tilde{g}$  olduğu görülür.

**Önerme 5.1.4:** Eğer  $F : I^2 \rightarrow X$  sürekli bir dönüşüm ve  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  da

$$F(s,0) = \alpha(s), \quad F(s,1) = \beta(s), \quad F(0,t) = \gamma(t) \quad \text{ve} \quad F(1,t) = \delta(t)$$

şeklinde tanımlı eğriler, yani  $F$  fonksiyonunun yüzey fonksiyonları ise  $\alpha\delta \cong \gamma\beta \text{ rel } \{0,1\}$  homotopiktir [12].

**Tanım 5.1.5:**  $(X, x_0)$  bir noktalı topolojik uzay,  $m : (X \times X, (x_0, x_0)) \rightarrow (X, x_0)$  sürekli bir fonksiyon olsun.  $m(x_0, -)$  ve  $m(-, x_0)$  dönüşümleri

$$m(x_0, -) : (X, x_0) \rightarrow (X, x_0), a \mapsto m(x_0, a)$$

ve

$$m(-, x_0) : (X, x_0) \rightarrow (X, x_0), a \mapsto m(a, x_0)$$

şeklinde tanımlansın. Eğer  $m(x_0, -) \cong 1_X \text{ rel } \{x_0\}$  ve  $m(-, x_0) \cong 1_X \text{ rel } \{x_0\}$  ise yani uç noktalara göre homotopik ise  $(X, x_0)$  noktalı uzayına bir  $H$  - uzayı denir. Burada  $1_X$  fonksiyonu  $X$  den  $X$  e birim fonksiyonudur [12].

**Tanım 5.1.6:**  $(X, x_0)$  ve  $(Y, y_0)$  birer  $H$ -uzayı olsun.  $x, x' \in X$  için  $f(x \circ x') = f(x) \circ f(x')$  olacak şekilde sürekli bir  $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  dönüşümüne bir  $H$ -uzayı morfizmi denir.

O halde objeleri  $H$ -uzayları ve morfizmleri ise  $H$ -uzay morfizmleri olan bir kategori elde edilebilir.

**Örnek 5.1.7 :** Birim elemanı  $e$  olan bir  $X$  topolojik grubu bir  $H$ -uzayıdır.

$H$  uzayları için Teorem 4.1.5 e benzer bir sonuç elde etmeden önce aşağıdaki ifadeyi verelim.

$(X, x_0)$  bir  $H$ -uzayı ise  $m(x_0, -)$  fonksiyonu birim dönüşüme homotopik olacağından  $F(x, 0) = x_0 \circ x$  ve  $F(x, 1) = x$  olacak şekilde sürekli bir  $F : X \times I \rightarrow X$  dönüşümü mevcuttur. Burada  $F_t(x) = F(x, t)$  olarak yazılırsa  $F_0 = m(x_0, )$  ve  $F_1 = 1_X$  olmak üzere  $\forall t \in [0, 1]$  için  $F_t : X \rightarrow X$  sürekli olur. Benzer olarak  $m(-, x_0)$  birim dönüşüme homotopik olacağından  $H_0 = m(-, x_0)$  ve  $H_1 = 1_X$  olacak şekilde  $\forall t \in [0, 1]$  için bir  $H_t : X \rightarrow X$  sürekli dönüşümü vardır.

**Teorem 5.1.8 :**  $(X, x_0)$  bir  $H$ -uzayı ve  $G$  de  $x_0 \in X$  noktasındaki  $\pi_1(X, x_0)$  temel grubunun bir alt grubu olsun. Kabul edelimki  $X$  üzerindeki topoloji basit irtibatlı bir örtüye sahip, yani  $X$  uzayı irtibatlı, lokal eğrisel irtibatlı ve yarı lokal basit irtibatlı olsun.  $G$  alt grubuna karşılık gelen örtü fonksiyonu  $p : (\tilde{X}_G, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$  olsun. Bu durumda  $X$  üzerindeki  $H$ -uzayı yapısı  $\tilde{X}_G$  üzerine yükselir. Yani  $p : (\tilde{X}_G, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$   $H$ -uzaylarının bir morfizmi olacak şekilde  $(\tilde{X}_G, \tilde{x}_0)$  üzerinde bir  $H$ -uzayı yapısı vardır.

**İspat:**  $(X, x_0)$  bir  $H$ -uzayı olduğundan

$$m(x_0, -) \cong 1_X \text{ rel } \{x_0\} \text{ ve } m(-, x_0) \cong 1_X \text{ rel } \{x_0\}$$

homotopik olacak şekilde sürekli bir

$$m : (X \times X, (x_0, x_0)) \rightarrow (X, x_0), (x, y) \mapsto x \circ y$$

dönüşümü mevcuttur.

$P(X, x_0)$  üzerinde bir çarpım  $\alpha, \beta \in P(X, x_0)$  ve  $\forall t \in I$  için  $(\alpha \circ \beta)(t) = \alpha(t) \circ \beta(t)$  şeklinde tanımlansın. Burada  $\alpha \times \beta$  ve  $m$  dönüşümleri sürekli olduğundan  $\alpha \circ \beta$  nın da sürekli olduğuna dikkat edelim. Burada  $\alpha(0) = x_0 = \beta(0)$  olduğundan  $(\alpha \circ \beta)(0) = \alpha(0) \circ \beta(0) = x_0 \circ x_0 = x_0$  ve buradan  $\alpha \circ \beta \in P(X, x_0)$  olur. Şimdi  $\tilde{m}$  dönüşümünü aşağıdaki şekilde tanımlayalım.

$$\begin{aligned} \tilde{m} : \tilde{X}_G \times \tilde{X}_G, (x_0, x_0) &\rightarrow (\tilde{X}_G, \tilde{x}_0), \\ (\langle \alpha \rangle_G, \langle \beta \rangle_G) &\rightarrow \langle \alpha \circ \beta \rangle_G \end{aligned} \quad (1)$$

Şimdi bu işlemin iyi tanımlı olduğunu göstermek için gerekli olan bazı sonuçları verelim.

$\alpha_1(1) = \beta_1(0)$  ve  $\alpha_2(1) = \beta_2(0)$  olacak şekilde  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$  eğrileri için

$$(\alpha_1 \beta_1) \circ (\alpha_2 \beta_2) = (\alpha_1 \circ \alpha_2)(\beta_1 \circ \beta_2) \quad (2)$$

dir.

Diğer yandan bir  $\alpha$  eğrisi için  $\alpha^{-1}(t) = \alpha(1-t)$  şeklinde tanımlı olduğundan

$$(\alpha_1 \circ \alpha_2)^{-1} = \alpha_1^{-1} \circ \alpha_2^{-1} \quad (3)$$

dir. Şimdi  $\alpha, \beta$   $x_0$  noktasında kapalı eğriler olmak üzere

$$\alpha\beta \cong \alpha \circ \beta \quad (4)$$

olduğunu gösterelim. Bunun için

$$F : I \times I \rightarrow X, F(s, t) = \alpha(st) \circ \beta(s)$$

sürekli dönüşümünü göz önünü alalım. Burada

$$F(0, t) = x_0, F(s, 1) = \alpha(s) \circ \beta(s), F(s, 0) = x_0 \circ \beta(s) \text{ ve } F(1, t) = \alpha(t) \circ x_0$$

dır. Burada  $F(0, t) = x_0$  birim eğridir.  $m(x_0, -) \cong 1_X \text{ rel } \{x_0\}$  ve  $m(-, x_0) \cong 1_X \text{ rel } \{x_0\}$

olduğundan  $x_0 \circ \beta \cong \beta$  ve  $\alpha \circ x_0 \cong \alpha$  dır. Dolayısıyla Önerme 5.1.4 den  $\alpha \circ \beta \cong \beta\alpha$

olduğu görülür. Teorem 3.20 de[12] bir  $(X, x_0)$   $H$ -uzayında  $\pi_1(X, x_0)$  temel grubu değişmeli olduğundan  $\alpha \circ \beta \cong \alpha\beta$  dir.

Eğer  $\alpha_1 \in \langle \alpha \rangle_G, \beta_1 \in \langle \beta \rangle_G$  ise  $\alpha_1(1) = \alpha(1), \beta_1(1) = \beta(1)$  ve  $[\alpha_1^{-1}\alpha] \in G, [\beta_1^{-1}\beta] \in G$  dir.

Burada

$$\begin{aligned} (\alpha \circ \beta)(1) &= \alpha(1) \circ \beta(1) \\ &= \alpha_1(1) \circ \beta_1(1) \\ &= (\alpha_1 \circ \beta_1)(1) \end{aligned}$$

ve (2), (3) ve (4) den

$$\begin{aligned} [(\alpha_1 \circ \beta_1)^{-1}(\alpha \circ \beta)] &= [(\alpha_1^{-1} \circ \beta_1^{-1})(\alpha \circ \beta)] \\ &= [(\alpha_1^{-1}\alpha) \circ (\beta_1^{-1}\beta)] \\ &= [(\alpha_1^{-1}\alpha)(\beta_1^{-1}\beta)] \\ &= [(\alpha_1^{-1}\alpha)] [(\beta_1^{-1}\beta)] \in G \text{ dir.} \end{aligned}$$

Buradan  $\langle \alpha \rangle_G \circ \langle \beta \rangle_G = \langle \alpha \circ \beta \rangle_G$  olduğu görülür.

Şimdi  $\tilde{m}$  dönüşümünün sürekli olduğunu gösterelim. Bunun için  $(\alpha \circ \beta)(1)$  nin bir  $W$  açık komşuluğu ile

$$U \circ V = \{u \circ v : u \in U, v \in V\} \subseteq W$$

olacak şekilde  $\alpha(1)$  ve  $\beta(1)$  nin sırasıyla  $U$  ve  $V$  açık komşulukları verilsin. Buradan  $(U, \langle \alpha \rangle_G) \times (V, \langle \beta \rangle_G) \subseteq (W, \langle \alpha \circ \beta \rangle_G)$  olup  $\tilde{m}$  süreklidir.

Bunlara ilaveten  $\tilde{m}(\tilde{x}_0, -) \cong 1_{\tilde{x}_G}$  ve  $\tilde{m}(-, \tilde{x}_0) \cong 1_{\tilde{x}_G}$  homotopilerinin varlığını göstermek gereklidir. Fakat  $\tilde{m}(\tilde{x}_0, -)$  ve  $1_{\tilde{x}_G}$  sırası ile birbirine homotopik olan  $m(x_0, )$  ve  $1_x$  in yükselmeleri olduğundan Teorem 5.1.2 nin bir sonucu olarak  $\tilde{m}(\tilde{x}_0, -) \cong 1_{\tilde{x}_G}$  dir. Benzer şekilde  $\tilde{m}(-, \tilde{x}_0) \cong 1_{\tilde{x}_G}$  olduğu görülür. Tüm bunların bir sonucu olarak  $(\tilde{X}_G, \tilde{x}_0)$  bir  $H$ -uzaydır.

Bu kesimde son olarak  $H$ -uzayları üzerinde bir yerel morfizme yükselme ile ilgili bir sonuç vereceğiz.

**Tanım 5.1.9 :** Bir  $X$  topolojik uzayının bir  $V$  alt cümlesi açık, eğrisel irtibatlı ve  $X$  in her örtüsüne yükseliyor ise yani  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  bir örtü dönüşümü,  $i: V \rightarrow X$  bir dahil etme fonksiyonu ve  $\tilde{x} \in \tilde{X}, p(\tilde{x}) = x$  iken  $p\hat{i} = i$  ve  $\hat{i}(x) = \tilde{x}$  olacak şekilde bir tek  $\hat{i}: V \rightarrow \tilde{X}$  morfizmi varsa,  $V$  ye *yükseltilebilirdir* denir.

**Teorem 5.1.10:**  $(X, x_0), (Y, y_0)$  birer  $H$ -uzayı ve  $q: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$  uzaylar üzerinde bir örtü dönüşümü olacak şekilde bir  $H$ -uzayı morfizmi olsun.  $x_0 \in X$  in eğrisel irtibatlı bir  $W$  açık komşuluğu verilsin. Kabul edelim ki  $W^2 \subseteq V$  olacak şekilde  $x_0 \in X$  in yükseltilebilir bir  $V$  açık komşuluğu bulunsun. Bu takdirde  $i: (W, x_0) \rightarrow (X, x_0)$  dahil etme fonksiyonu  $H$ -uzaylarının bir  $\hat{i}: (W, x_0) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$  yerel morfizmine yükselir.

**İspat:**  $V, \tilde{X}$  ya yükseldiğinden,  $\hat{i}: W \rightarrow \tilde{X}$  dönüşümü ile  $W, \tilde{X}$  ya yükselir. Şimdi  $\hat{i}$  nın  $H$ -uzaylarının bir yerel morfizmi olduğunu gösterelim. Burada  $\hat{i}: W \rightarrow \tilde{X}$  süreklidir.  $x \circ y \in W$  olacak şekilde  $x, y \in W$  verilsin.  $a$  ve  $b$  sırasıyla  $x_0$  dan  $x$  ve  $y$  ye  $W$  da iki eğri ve  $c = a \circ b$  olsun. Varsayımdan  $W^2 \subseteq V$  olduğundan bu şekilde tanımlanan  $c, V$  de  $x_0$  dan  $x \circ y$  ye bir eğridir. Böylece  $a, b$  ve  $c$  eğrileri  $\tilde{X}$  ya yükselir.  $\tilde{a}, \tilde{b}$  ve  $\tilde{c}$  sırasıyla  $a, b$  ve  $c$  nin  $\tilde{X}$  daki yükselmeleri olsun.  $q$  bir  $H$ -uzayı morfizmi olduğundan

$$q(\tilde{c}) = c = a \circ b = q(\tilde{a}) \circ q(\tilde{b}) = q(\tilde{a} \circ \tilde{b})$$

dır.  $\tilde{c}$  ve  $\tilde{a} \circ \tilde{b}$  nin başlangıç noktası  $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$  olup, yükselmenin tekliğinden  $\tilde{c} = \tilde{a} \circ \tilde{b}$  dir. Bu eğrilerin uç noktaları eşit olduğundan

$$\hat{i}(x \circ y) = \hat{i}(x) \circ \hat{i}(y)$$

dir. Dolayısıyla  $\hat{i}: (W, x_0) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$   $H$ -uzayların bir yerel morfizmidir.

## 5.2. $H$ -Grubu

Bu bölümde,  $H$ -grubu yapısı incelenerek Bölüm 4.1 de tanıtilan Rotman [12] referansındaki yapıyı önce bir  $H$ -grubuna uygulayarak  $H$ -grubu yapısının örtülerine

yükselmesi ile ilgili bazı sonuçlar verilecektir. Daha sonra bir  $(X, x_0)$   $H$ -grubunun  $\pi_1 X$  temel grupoidi tanıtılacak, bu amaca uygun olarak bir  $H$  grup-grupoid tanımı verilecektir. Buna ilaveten bir  $(X, x_0)$   $H$ -grubunun örtü morfizmlerinin kategorisi olan  $HGCov/(X, x_0)$  ile  $\pi_1 X$  temel grupoidinin  $H$  grup-grupoid örtü morfizmlerinin kategorisi olan  $HGGdCov/\pi_1 X$  in birbirine denk olduğu gösterilecektir.

**Tanım 5.2.1:**  $(X, x_0)$  bir noktalı uzay olmak üzere

$$\mu : (X \times X, (x_0, x_0)) \rightarrow (X, x_0) \text{ ve } \eta : (X, x_0) \rightarrow (X, x_0)$$

sürekli dönüşümleri verilsin.

$$i_1, i_2 : X \rightarrow X \times X, i_1(x) = (x, x_0) \text{ ve } i_2(x) = (x_0, x)$$

içine dönüşümleri ve  $c : X \rightarrow (X, x_0)$  noktasında sabit dönüşüm olmak üzere

$$\mu(1_X \times \mu) \cong \mu(\mu \times 1_X)$$

$$\mu i_1 \cong 1_X \cong \mu i_2$$

$$\mu(1_X, \eta) \cong c \cong \mu(\eta, 1_X)$$

homotopileri mevcut ise  $(X, x_0)$  uzayına bir  $H$ -grubu denir [12].

**Not 5.2.2:** Tanım 5.2.1 deki  $\mu i_1 \cong 1_X \cong \mu i_2$  şartından bir  $H$ -grubunun aynı zamanda bir  $H$ -uzayı olduğu açıktır.

**Örnek 5.2.3:** Bir  $X$  topolojik grubu birim elemanı  $e$  olan bir  $H$ -grubudur. Burada homotopi yerine fonksiyonların eşitliği gelir.

**Tanım 5.2.4:**  $(X, x_0)$  bir noktalı uzay ve  $I = [0,1]$  dan  $X$  e tüm sürekli fonksiyonların sınıfı  $X^I$  olsun.  $X^I$  in bir alt uzayı olan  $\Omega(X, x_0) = (X, x_0)^{(I, \{0,1\})}$  (kapalı eğrilerin sınıfı) fonksiyon uzayına *düğüm uzayı* denir. Burada  $X^I$  üzerindeki topoloji kompakt-açık topoloji olup  $\Omega(X, x_0)$  üzerindeki topoloji alt topolojidir [12].

**Teorem 5.2.5:** Bir  $(X, x_0)$  noktalı uzayında  $\Omega X$  düğüm uzayı bir  $H$ -grubudur[12].

**Tanım 5.2.6:**  $(X, x_0)$  ve  $(Y, y_0)$  birer  $H$ -grubu olsun.  $\forall x, x' \in X$  için  $f(x \circ x') = f(x) \circ f(x')$  olacak şekildeki  $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  sürekli fonksiyonuna bir  $H$ -grup morfizmi denir.

O halde objeleri  $H$ -grupları, morfizmleri ise  $x, x' \in X$  için  $f(x \circ x') = f(x) \circ f(x')$  olacak şekildeki sürekli  $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  fonksiyonlarından oluşan bir kategori oluşturmak mümkündür. Bu kategoriye  $HGrup$  ile gösterelim.

**Teorem 5.2.7:**  $(X, x_0)$ ,  $X$  irtibatlı ve temel uzayı basit irtibatlı bir örtüye sahip olacak şekilde bir  $H$ -grubu olsun.  $\pi_1(X, x_0)$  temel grubunun bir alt grubu  $G$  verilsin.  $G$  alt grubuna karşılık gelen örtü dönüşümü  $p : (\tilde{X}_G, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$  olsun. Bu durumda  $X$  in  $H$ -grup yapısı  $\tilde{X}_G$  ya yükselir, yani  $(\tilde{X}_G, \tilde{x}_0)$  bir  $H$ -grup ve bir  $p : (\tilde{X}_G, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$   $H$ -grup morfizmidir.

**İspat:**  $(X, x_0)$  bir  $H$ -grubu olduğundan;

$$\mu(1_x \times \mu) \cong \mu(\mu \times 1_x)$$

$$\mu i_1 \cong 1_x \cong \mu i_2$$

$$\mu(1_x, \eta) \cong c \cong \mu(\eta, 1_x)$$

homotopik olacak şekilde

$$\mu : (X \times X, (x_0, x_0)) \rightarrow (X, x_0) \quad \text{ve} \quad \eta : (X, x_0) \rightarrow (X, x_0)$$

sürekli dönüşümleri mevcuttur. Başlangıç noktası  $x_0$  olan tüm eğrilerin sınıfı olan  $P(X, x_0)$  üzerinde bir çarpım  $\alpha, \beta \in P(X, x_0)$  ve  $t \in [0, 1]$  için  $(\alpha \circ \beta)(t) = \alpha(t) \circ \beta(t)$  şeklinde tanımlansın. Burada dikkat edelim ki  $\mu : (X \times X, (x_0, x_0)) \rightarrow (X, x_0)$  sürekli olduğundan  $(\alpha \circ \beta)$  tanımlı ve  $P(X, x_0)$  dadır.

$$\tilde{\mu} : (\tilde{X}_G \times \tilde{X}_G, (\tilde{x}_0, \tilde{x}_0)) \rightarrow (\tilde{X}_G, \tilde{x}_0),$$

$$\tilde{\mu}(\langle \alpha \rangle, \langle \beta \rangle) = \langle \alpha \rangle \circ \langle \beta \rangle = \langle \alpha \circ \beta \rangle \quad (1)$$

şeklinde tanımlansın. Bu çarpımın iyi tanımlı olduğunu ispatlamalıyız. Bunun için gerekli olan hazırlığın yapılması gereklidir.

Bir  $\alpha$  eğrisi için  $\alpha^{-1}(t) = \alpha(1-t)$  olmak üzere

$$(\alpha_1 \circ \alpha_2)^{-1} = \alpha_1^{-1} \circ \alpha_2^{-1} \quad (2)$$

dir.

$\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$  eğrileri  $\alpha_1(1) = \beta_1(0)$  ve  $\alpha_2(1) = \beta_2(0)$  olacak şekilde eğriler olsun.

Bu durumda

$$(\alpha_1 \beta_1) \circ (\alpha_2 \beta_2) = (\alpha_1 \alpha_2) \circ (\beta_1 \beta_2) \quad (3)$$

Şimdi  $\alpha$  ve  $\beta$ ,  $x_0$  noktasında kapalı eğriler olsun.

$$K : I \times I \rightarrow X, K(s, t) = \alpha(st) \circ \beta(s)$$

şeklinde tanımlanan sürekli dönüşümünü gözönüne alalım. Burada

$$K(0, t) = x_0, K(s, 1) = \alpha(s) \circ \beta(s), K(s, 0) = x_0 \circ \beta(s) \text{ ve } K(1, t) = \alpha(t) \circ x_0$$

dır. Buradan  $\mu i_2 \cong 1_x$  homotopisinden  $\mu i_2 \beta \cong 1_x \beta = \beta$  dır ve bu yüzden  $x_0 \circ \beta \cong \beta$  dır. Benzer şekilde  $\mu i_1 \cong 1_x$  den  $\mu i_1 \alpha \cong 1_x \alpha = \alpha$  dır ve buradan  $\alpha \circ x_0 \cong \alpha$  elde edilir.

Önerme 5.1.4 den  $\beta \alpha \cong (\alpha \circ \beta) \text{ rel}\{0, 1\}$  homotopisi elde edilir. Teorem 3.20 de [12]

$(X, x_0)$   $H$ -uzayı için bundan dolayı bir  $H$ -grubu için  $\pi_1(X, x_0)$  temel grubu değişmeli olduğundan

$$\alpha \beta \cong \alpha \circ \beta \quad (4)$$

dır. Şimdi eğer  $\alpha_1 \in \langle \alpha \rangle, \beta_1 \in \langle \beta \rangle$  ise  $\alpha_1(1) = \alpha(1), \beta_1(1) = \beta(1)$  ve

$[\alpha_1^{-1} \alpha] \in G, [\beta_1^{-1} \beta] \in G$  dir. Buradan

$$\begin{aligned} (\alpha \circ \beta)(1) &= \alpha(1) \circ \beta(1) \\ &= \alpha_1(1) \circ \beta_1(1) \\ &= (\alpha_1 \circ \beta_1)(1) \end{aligned}$$

ve (2),(3) ve (4) den

$$\begin{aligned} [(\alpha_1 \circ \beta_1)^{-1}(\alpha \circ \beta)] &= [(\alpha_1^{-1} \circ \beta_1^{-1})(\alpha \circ \beta)] \\ &= [(\alpha_1^{-1} \alpha) \circ (\beta_1^{-1} \beta)] \\ &= [(\alpha_1^{-1} \alpha)(\beta_1^{-1} \beta)] \end{aligned}$$

$$= [(\alpha_1^{-1} \alpha)] [(\beta_1^{-1} \beta)] \in G$$

dir. Buradan  $\langle \alpha \rangle_G \circ \langle \beta \rangle_G = \langle \alpha \circ \beta \rangle_G$  olduğu görülür.

$\tilde{\eta}_G : \tilde{X}_G \rightarrow \tilde{X}_G, \langle \alpha \rangle \rightarrow \langle \eta \alpha \rangle$  nın sürekli olduğunu görmek için  $\langle \eta \alpha \rangle$  nın bir açık baz komşuluğu  $(U, \langle \eta \alpha \rangle)$  olsun. Burada  $U$ ,  $\eta \alpha(1)$  in açık kanonik komşuluğudur.  $\eta : (X, x_0) \rightarrow (X, x_0)$  sürekli olduğundan  $\eta(U') \subseteq U$  olacak şekilde  $\alpha(1)$  in bir  $U'$  açık komşuluğu mevcuttur. Burada  $U'$  nü kanonik kabul edebiliriz. Bu ise  $\eta(U', \alpha) \subseteq (U, \langle \eta \alpha \rangle)$  olmasını gerektirir. Buradan  $\tilde{\eta}_G : \tilde{X}_G \rightarrow \tilde{X}_G, \langle \alpha \rangle \rightarrow \langle \eta \alpha \rangle$  dönüşümü süreklidir.

Şimdi

$$\tilde{\mu} : (\tilde{X}_G \times \tilde{X}_G, (\tilde{x}_0, \tilde{x}_0)) \rightarrow (\tilde{X}_G, \tilde{x}_0)$$

dönüşümünün sürekli olduğunu göstermeliyiz.  $(\alpha \circ \beta)$  nın bir açık baz komşuluğu  $(W, \langle \alpha \circ \beta \rangle)$  olsun. Burada  $W$ ,  $(\alpha \circ \beta)(1)$  in bir açık komşuluğudur.  $\mu : (X \times X, (x_0, x_0)) \rightarrow (X, x_0)$  dönüşümü sürekli olduğundan  $\alpha_1$  ve  $\beta_1$  in  $\mu(U \times V) = U \circ V \subseteq W$  olacak şekilde  $U$  ve  $V$  açık baz komşulukları mevcuttur. Burada  $(u, \langle \alpha \rangle)$  ve  $(v, \langle \beta \rangle)$  sırasıyla  $\langle \alpha \rangle$  ve  $\langle \beta \rangle$  nın açık baz komşuluklarıdır ve

$$(U, \langle \alpha \rangle) \circ (V, \langle \beta \rangle) = (U \circ V, \langle \alpha \circ \beta \rangle) \subseteq (W, \langle \alpha \circ \beta \rangle)$$

olup  $\tilde{\mu}$  süreklidir.

Şimdi  $\tilde{i}_1, \tilde{i}_2 : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X} \times \tilde{X}, \tilde{i}_1(\tilde{x}) = (\tilde{x}, \tilde{x}_0)$  ve  $\tilde{i}_2(\tilde{x}) = (\tilde{x}_0, \tilde{x})$  şeklinde tanımlı izdüşümler olmak üzere,

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}(1_{X_G} \times \tilde{\mu}) &\cong \tilde{\mu}(\tilde{\mu} \times 1_{X_G}) \\ \tilde{\mu}(1_{X_G} \times \tilde{\eta}) &\cong \tilde{c} \cong \tilde{\mu}(\tilde{\eta} \times 1_{X_G}) \\ \tilde{\mu}\tilde{i}_1 &\cong 1_{X_G} \cong \tilde{\mu}\tilde{i}_2 \end{aligned}$$

homotopilerin varlığını ispatlayalım.

$\tilde{\mu}(1_{X_G} \times \tilde{\mu})$  ve  $\tilde{\mu}(\tilde{\mu} \times 1_{X_G})$  sırası ile birbirine homotopik olan  $\mu(1_{X_G} \times \mu)(p \times p \times p)$

ve  $\mu(\mu \times 1_{x_G})(p \times p \times p)$  nin yükselmeleri olduğundan Teorem 5.1.2 nin sonucundan

$$\tilde{\mu}(1_{x_G} \times \tilde{\mu}) \cong \tilde{\mu}(\tilde{\mu} \times 1_{x_G})$$

dır. Benzer şekilde  $\tilde{\mu}(1_{x_G} \times \tilde{\eta})$  ve  $\tilde{\mu}(\tilde{\eta} \times 1_{x_G})$  sırasıyla birbirine homotopik olan

$\tilde{\mu}(1_{x_G} \times \eta)(p \times p)$  ve  $\tilde{\mu}(\eta \times 1_{x_G})(p \times p)$  nin yükselmeleri olduğundan Teorem 5.1.2 nin

sonucundan

$$\tilde{\mu}(1_{x_G} \times \tilde{\eta}) \cong \tilde{c} \cong \tilde{\mu}(\tilde{\eta} \times 1_{x_G})$$

dır. Benzer sebeplerden

$$\tilde{\mu}_1 \cong 1_{x_G} \cong \tilde{\mu}_2$$

elde edilir.

**Sonuç 5.2.8:**  $X$  in temel uzayı basit irtibatlı bir örtüye sahip olacak şekilde  $(X, x_0)$  bir  $H$ -grubu olsun.  $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$  bir örtü dönüşümü olsun. Bu takdirde  $(X, x_0)$  ın  $H$ -grup yapısı  $(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$  ya yükselir.

Şimdi fanktorlarla ilgili aşağıdaki özellikleri verelim.

**Önerme 5.2.9:**  $C, D, \mathcal{E}$  birer kategori olmak üzere bir  $F: C \times D \rightarrow \mathcal{E}$  fanktoru verilsin. Bu durumda

$$\forall x \in Ob(C) \text{ için } F(x, -): D \rightarrow \mathcal{E}$$

$$\forall y \in Ob(D) \text{ için } F(-, y): C \rightarrow \mathcal{E}$$

fanktorları vardır [2].

**İspat:** İspatı sadece  $F(x, -)$  için açıklamak yeterlidir. Diğerleri ise benzerdir.

Bir  $y \in Ob(D)$  için  $F(x, -)(y) = F(x, y)$  ve bir  $a: y \rightarrow y'$  morfizmi için

$$F(x, -)(a) = F(x, a) = F(1_x, a): F(x, y) \rightarrow F(x, y')$$

ile tanımlanır. Şimdi fanktor şartlarının sağlandığını gösterelim.

1)  $a \in D(y, y)$ ,  $D$  de birim morfizm olsun. Bu durumda  $F(x, a): F(x, y) \rightarrow F(x, y)$

olup  $F(x, a) = 1_{F(x, y)} = 1_{F(x, a)}$  dır.

2)  $a \in D(y, z), b \in D(z, w)$   $D$  nin morfizmeleri olmak üzere  $ba \in D(y, w)$  da  $D$  nin bir morfizmidir. O halde

$$F(x, )(ba) = F(x, ba) = F((x, b)(x, a)) = F(x, b)F(x, a)$$

dır. Dolayısıyla  $F(x, -)$  bir fanktordür.

Sürekli fonksiyonların homotopisine benzer olarak fanktorların homotopisini vermeden önce aşağıdaki özel bir kategori tanıtalım.

**Örnek 5.2.10:** Objeleri 0 ile 1 ve birimlerden farklı morfizmeleri ise  $i$  ve  $i^{-1}$  olan bir kategori  $J$  ile gösterilsin. Bu kategori aynı zamanda bir grupoiddir [2].

**Sonuç 5.2.11:** Bir  $F : C \times J \rightarrow D$  fanktoru verilsin. Önerme 5.2.9 dan  $F(-, 0)$  ve  $F(-, 1)$  fanktorları mevcuttur.

Sürekli fonksiyonların homotopisine benzer olarak fanktorların homotopisi aşağıdaki şekilde tanımlanır.

**Tanım 5.2.12:**  $C$  ve  $D$  kategorileri için  $f, g : C \rightarrow D$  fanktorları verilsin. Eğer  $F(-, 0) = f$  ve  $F(-, 1) = g$  olacak şekilde bir  $F : C \times J \rightarrow D$  fanktoru varsa  $f$  ve  $g$  fanktorlarına *homotopiktir* denir ve  $f \cong g$  şeklinde gösterilir [2].

**Önerme 5.2.13:** Eğer  $f, g : X \rightarrow Y$  fonksiyonları homotopik ise  $\pi_1 : Top \rightarrow Gpd$  (temel grupoid) fanktoru tarafından üretilen  $\pi_1 f, \pi_1 g : \pi_1 X \rightarrow \pi_1 Y$  fanktorları da homotopiktir [2].

**İspat:** Eğer  $f \cong g$  (homotopik) ise  $F(-, 0) = f$  ve  $F(-, 1) = g$  olacak şekilde sürekli bir  $F : X \times I \rightarrow Y$  fonksiyonu vardır. Buradan  $\pi_1 F : \pi_1 X \times \pi_1 I \rightarrow \pi_1 Y$  bir fanktor olup  $J \subseteq \pi_1 I$  olduğundan bir  $\pi_1 F : \pi_1 X \times J \rightarrow \pi_1 Y$  fanktoru elde edilir. Burada  $F(-, 0) = f$  olduğundan  $\pi_1 F(-, 0) = \pi_1 f$  ve  $F(-, 1) = g$  olduğundan  $\pi_1 F(-, 1) = \pi_1 g$  olup  $\pi_1 f \cong \pi_1 g$  homotopisi elde edilir.

Bir  $H$ -grubunun temel grup yapısını verebilmek için aşağıdaki tanımı yapalım.

**Tanım 5.2.14:**  $G$  bir grupoid olsun.

$$m(1 \times m) \cong m(m \times 1)$$

$$mi_1 \cong 1_G \cong mi_2$$

$$m(1, n) \cong 1_G \cong m(n, 1)$$

fanktorları homotopik olacak şekilde

$$m : G \times G \rightarrow G, (a, b) \mapsto (a \circ b)$$

$$n : G \rightarrow G, a \mapsto \bar{a}$$

$$\{*\} \rightarrow G$$

fanktorları varsa  $G$  ye bir  $H$  grup-grupoid denir. Burada  $a \in G$  için

$$i_1, i_2, (n, 1), (1, n) : G \rightarrow G \times G$$

$$i_1(a) = (a, e), i_2(a) = (e, a), (1, n)(a) = (a, n(a)), (n, 1)(a) = (n(a), a)$$

ile tanımlıdır.

**Tanım 5.2.15:**  $G$  ve  $K$  birer  $H$  grup-grupoid olsunlar.  $\forall a, b \in G$  için  $f(a \circ b) = f(a) \circ f(b)$  olacak şekildeki  $f : G \rightarrow K$  grupoid morfizmine bir  $H$  grup-grupoid morfizmi denir.

Burada objeleri  $H$  grup-grupoidler ve morfizmleri ise  $a, b \in G$  için  $f(a \circ b) = f(a) \circ f(b)$  olacak şekilde  $f : G \rightarrow K$  grupoid morfizmleri olan bir kategori elde etmek mümkündür. Bu kategoriye  $HGpGd$  ile gösterelim.

Şimdi  $(X, x_0)$  bir  $H$ -grubu iken temel grupoidinin bir  $H$  grup-grupoid olduğunu gösterelim.

**Önerme 5.2.16:**  $(X, x_0)$  bir  $H$ -grubu ise  $\pi_1 X$  temel grupoidi bir  $H$  grup-grupoididir.

**İspat :** Örnek 3.1.3 den  $\pi_1 X$  in bir grupoid olduğunu biliyoruz. Buna ilaveten,  $(X, x_0)$  bir  $H$ -grubu olduğundan homotopi ile ilgili aşağıdaki şartlar sağlanacak şekilde

$$\mu : (X \times X, (x_0, x_0)) \rightarrow (X, x_0), (x, y) \mapsto x \circ y$$

ve

$$\eta : (X, x_0) \rightarrow (X, x_0), x \mapsto \bar{x}$$

sürekli fonksiyonları mevcuttur:

$$\mu(1_X \times \mu) \cong \mu(\mu \times 1_X)$$

$$\mu i_1 \cong 1_X \cong \mu i_2$$

$$\mu(1_X, \eta) \cong c \cong \mu(\eta, 1_X)$$

Burada  $i_1, i_2 : X \rightarrow X \times X, i_1(x) = (x, x_0)$  ve  $i_2(x) = (x_0, x)$  içine fonksiyonlar ve  $c : X \rightarrow (X, x_0)$  noktasında sabit fonksiyondur.  $\mu, \eta$  fonksiyonlarına  $\pi_1$  temel grupoid fanktoru uygulandığında

$$\tilde{\mu} = \pi_1 \mu : \pi_1 X \times \pi_1 X \rightarrow \pi_1 X$$

ve

$$\tilde{\eta} = \pi_1 \eta : \pi_1 X \rightarrow \pi_1 X$$

fanktorları elde edilir. Burada  $\mu$  ve  $\eta$  fonksiyonları sürekli olduğundan bu fonksiyonlardan üretilen  $\tilde{\mu}$  ve  $\tilde{\eta}$  grupoid morfizmleri iyi tanımlıdır. Önerme 5.2.13 den

$$\mu(1_X \times \mu) \cong \mu(\mu \times 1_X) \text{ olduğundan } \pi_1 \mu(1 \times \pi_1 \mu) \cong \pi_1 \mu(\pi_1 \mu, 1)$$

$$\mu i_1 \cong 1_X \cong \mu i_2 \text{ olduğundan } \pi_1 \mu \pi_1 i_1 \cong \pi_1(1_X) \cong \pi_1 \mu \pi_1 i_2$$

$$\mu(1_X, \eta) \cong c \cong \mu(\eta, 1_X) \text{ olduğundan } \pi_1 \mu(1_{\pi_1 X}, \pi_1 \eta) \cong \pi_1 c \cong \pi_1 \mu(\pi_1 \eta, 1_{\pi_1 X})$$

fanktorlarının homotopisi elde edilir. O halde fanktorların homotopisine göre  $\pi_1 X$  temel grupoidi bir  $H$  grup-grupoididir.

Bu bölümün girişinde bahsedilen kategorilerin denkliğini göstermek üzere önce bu kategorileri tanımlayalım.

**Örnek 5.2.17:**  $(X, x_0)$  bir  $H$ -grubu olsun. Objeleri  $H$ -grupların  $(X, x_0)$  üzerindeki  $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$  örtü morfizmleri ve morfizmleri ise bunlar arasındaki sürekli fonksiyonlar olan bir kategori elde etmek mümkündür. Burada  $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$  den  $q : (\hat{X}, \hat{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$  ye bir morfizm  $p = qf$  olacak şekilde sürekli bir

$f : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (\hat{X}, \hat{x}_0)$  fonksiyonu olup aynı zamanda bir örtü fonksiyonudur. Bu kategoriye  $HGCov/(X, x_0)$  ile gösterelim.

**Örnek 5.2.18 :**  $(X, x_0)$  bir  $H$  grubu iken  $\pi_1 X$  temel grupoidi bir  $H$  grup-grupoididir. Objeleri  $\pi_1 X$  üzerinde  $p : \tilde{G} \rightarrow \pi_1 X$   $H$  grup-grupoid örtü morfizmleri ve morfizmleri ise bunlar arasındaki  $H$  grup-grupoid morfizmleridir. Burada  $p : \tilde{G} \rightarrow \pi_1 X$  den  $q : \hat{G} \rightarrow \pi_1 X$  ye bir morfizm  $p = qf$  olacak şekilde bir  $f : \tilde{G} \rightarrow \hat{G}$   $H$  grup-grupoid morfizmi olup aynı zamanda bir örtü morfizmidir. Bu kategoriye  $HGGdCov/\pi_1 X$  ile gösterelim.

Bu bölümün sonucu olan kategorilerin denkliğinde kullanılan “*lifted topoloji*” kavramını kısaca hatırlatalım. Bununla ilgili daha fazla ayrıntı Brown [2] referansında mevcuttur:

$X$ , basit irtibatlı bir örtüye sahip olan bir topolojik uzay olmak üzere bir  $p : \tilde{G} \rightarrow \pi_1 X$  grupoid örtü morfizmi verilsin. Burada  $\tilde{G}$  bir grupoiddir.  $X$  basit irtibatlı bir örtüye sahip olduğundan her bir  $x \in X$  noktası yükselen bir  $U$  açık komşuluğa sahiptir. Bu tür cümlelerin  $\tilde{G}$  ye yükselmeleri  $Ob(\tilde{G}) = \tilde{X}$  üzerindeki bir topoloji için baz oluşturur.  $Ob(\tilde{G}) = \tilde{X}$  üzerinde bu şekilde oluşturulan topolojiye *yükselen (lifted) topoloji* denir. Bu topoloji aşağıdaki teoremde verilen özelliği sağlar.

**Teorem 5.2.19:**  $X$  basit irtibatlı bir örtüye sahip bir topolojik uzay olmak üzere  $p : \tilde{G} \rightarrow \pi_1 X$  grupoidlerin bir örtü morfizmi olsun.  $Ob(\tilde{G}) = \tilde{X}$  olmak üzere  $\tilde{X}$  üzerindeki yükselen topolojisi aşağıdaki özelliklere sahiptir:

- $q = Ob(p) : \tilde{X} \rightarrow X$  bir örtü dönüşümü
- Aşağıdaki diyagramı değişmeli yapan ve objeler üzerinde birim olan bir  $r : \tilde{G} \rightarrow \pi \tilde{X}$  grupoid izomorfizmi mevcuttur [2].

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{G} & \xrightarrow{r} & \pi\tilde{X} \\
 & \searrow & \swarrow \\
 & \pi X &
 \end{array}$$

Şimdi bu bölümün sonucu olan kategorilerin denliğini verelim.

**Teorem 5.2.20 :**  $X$  basit irtibatlı bir örtüye sahip olan bir topolojik uzay olmak üzere  $(X, x_0)$  bir  $H$ -grubu olsun. Bu durumda  $H$ -gruplarının örtü morfizmlerinin kategorisi  $HGCov/(X, x_0)$  ile  $\pi_1 X$  nin  $H$  grup-grupoid örtü morfizmlerinin kategorisi olan  $HGGdcov/\pi_1 X$  birbirine denktir.

**İspat:** Bir  $\pi_1 : HGCov/(X, x_0) \rightarrow HGGdcov/\pi_1 X$  fanktorunu aşağıdaki şekilde tanımlayalım.  $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$   $H$ -gruplarının bir örtü morfizmi olsun. Önerme 5.2.16 dan  $(X, x_0)$  ve  $(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$  birer  $H$ -grubu iken  $\pi_1 X$  ve  $\pi_1 \tilde{X}$  temel grupoidleri birer  $H$  grup-grupoididir. O halde  $H$ -gruplarının  $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$  örtü morfizmine  $\pi_1$  fanktorü uygulandığında  $p$  den üretilen  $\pi_1 p : \pi_1 \tilde{X} \rightarrow \pi_1 X$  morfizmi  $H$  grup-grupoidlerin bir morfizmidir. Diğer yandan  $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$  topolojik uzaylar üzerinde bir örtü morfizmi olduğundan  $\pi_1 p : \pi_1 \tilde{X} \rightarrow \pi_1 X$  grupoidler üzerinde bir örtü morfizmidir. Dolayısıyla  $\pi_1 p : \pi_1 \tilde{X} \rightarrow \pi_1 X$ ,  $HGGdcov/\pi_1 X$  kategorisinin bir objesidir. Bu yolla bir

$$\pi_1 : HGCov/(X, x_0) \rightarrow HGGdcov/\pi_1 X$$

fanktorü elde edilmiş olur.

Şimdi bir  $\eta : HGGdcov/\pi_1 X \rightarrow HGCov/(X, x_0)$  fanktorunu aşağıdaki şekilde tanımlayalım. Bir  $H$  grup-grupoid örtü morfizmi  $p : \tilde{G} \rightarrow \pi_1 X$  verilsin.. Teorem 5.2.19 dan  $q = Ob(p) : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$  bir örtü fonksiyonu olacak şekilde  $\tilde{X} = Ob(\tilde{G})$  üzerinde bir ltopoloji (lifted topoloji) mevcut olup  $p = \pi_1 q \circ r$  olacak şekilde bir  $r : \tilde{G} \rightarrow \pi_1 \tilde{X}$  izomorfizmi vardır. Burada  $\tilde{X}$  üzerindeki topolojinin yükselen

topoloji olduğuna dikkat edilmelidir. Burada  $\tilde{G}$  üzerindeki  $H$ -grup groupoid yapısı  $\pi_1 \tilde{X}$  üzerine aktarılır. Dolayısıyla  $\pi_1 q \circ \tilde{m} = m \circ (\pi_1 q \times \pi_1 q)$  ve  $\eta \pi_1 q = \pi_1 q(\tilde{\eta})$  olacak şekilde

$$\tilde{m} : \pi_1 \tilde{X} \times \pi_1 \tilde{X} \rightarrow \pi_1 \tilde{X} \text{ ü}$$

$$\tilde{\eta} : \pi_1 \tilde{X} \rightarrow \pi_1 \tilde{X}$$

grupoid morfizmleri vardır. Bu morfizmlerden dolayı objeler üzerinde

$$\tilde{m} : \tilde{X} \times \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$$

$$\tilde{\eta} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$$

dönüşümleri vardır. Diğer taraftan  $(X, x_0)$  bir  $H$ -grubu olduğundan;

$$\mu(1_x \times \mu) \cong \mu(\mu \times 1_x)$$

$$\mu i_1 \cong 1_x \cong \mu i_2$$

$$\mu(1_x, \eta) \cong c \cong \mu(\eta, 1_x)$$

homotopik olacak şekilde

$$\mu : (X \times X, (x_0, x_0)) \rightarrow (X, x_0) \quad \text{ve} \quad \eta : (X, x_0) \rightarrow (X, x_0)$$

sürekli dönüşümleri mevcuttur. Dolayısıyla Teorem 5.1.2 gereğince yukarıda homotopik olan fonksiyonların yükselmeleride

$$\tilde{\mu}(1_{\tilde{x}} \times \tilde{\mu}) \cong \tilde{\mu}(\tilde{\mu} \times 1_{\tilde{x}})$$

$$\tilde{\mu} \tilde{i}_1 \cong 1_{\tilde{x}} \cong \tilde{\mu} \tilde{i}_2$$

$$\tilde{\mu}(1_{\tilde{x}}, \tilde{\eta}) \cong c \cong \tilde{\mu}(\tilde{\eta}, 1_{\tilde{x}})$$

homotopiktir. Bu yüzden  $(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$  bir  $H$ -grubu ve  $q = Ob(p) : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$  ise  $H$ -gruplarının bir örtü morfizmidir. Bu şekilde bir

$$\eta : HGGdCov / \pi_{1,x} \rightarrow HGCov / (X, x_0)$$

fanktoru elde edilmiş olur.

Bu kategorilerin denkliğini göstermek için  $\pi_1 \eta \cong 1$  ve  $\eta \pi_1 \cong 1$  (doğal olarak izomorf) olduğunu göstermeliyiz.  $\eta \pi_1 \cong 1$  doğal olarak izomorf olduğunu göstermek için  $HGCov / (X, x_0)$  kategorisinin bir objesi  $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$  olmak üzere  $(\eta \pi_1)(p)$  ye bakalım.  $p$  den üretilen  $\pi_1 p : \pi_1 \tilde{X} \rightarrow \pi_1 X$  morfizmi  $H$  grup-groupoidlerin bir örtü

morfizmidir. Burada  $(\eta\pi_1)(p)$ ,  $p = Ob(\pi_1 p)$  ve  $\tilde{X} = Ob(\pi_1 \tilde{X})$  olmak üzere Teorem 5.2.19 dan  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  bir örtü dönüşümüdür. Burada  $\tilde{X}$  üzerindeki topolojinin yükselen topoloji olduğuna dikkat edilmelidir. Burada Sonuç 5.2.11 gereğince  $X$  üzerindeki  $H$ -grup yapısı  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  bir  $H$ -grup morfizmi olacak şekilde  $\tilde{X}$  üzerine yükselir. Dolayısıyla  $(\eta\pi_1)(p) = \eta(\pi_1 p) = p$  olup  $\eta\pi_1 = 1$  dir.

Diğer yandan  $\pi_1 \eta \cong 1$  doğal olarak izomorf olduğunu göstermek için  $HGGdCov/\pi_1 X$  kategorisinin bir objesi  $p: \tilde{G} \rightarrow \pi_1 X$  olmak üzere  $(\pi_1 \eta)(p)$  ye bakalım. Teorem 5.2.19 dan  $\eta(p): \tilde{X} \rightarrow X$  topolojik uzayların bir örtü fonksiyonudur. Burada  $\tilde{X} = Ob(\tilde{G})$  üzerindeki topoloji yükselen topoloji olmak üzere  $(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$  bir  $H$ -grubu ve  $\eta(p): (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$  bir  $H$ -grup morfizmidir. Buradan  $(\pi_1 \eta)(p): \pi_1(\tilde{X}) \rightarrow \pi_1(X)$   $H$  grup-grupoidlerin örtü morfizmi elde edilir. Fakat Teorem 5.2.19 dan  $p: \tilde{G} \rightarrow \pi_1 X$  ile  $(\pi_1 \eta)(p): \pi_1(\tilde{X}) \rightarrow \pi_1(X)$  morfizmleri izomorftur. Dolayısıyla  $\pi_1 \eta \cong 1$  olup bu kategoriler birbirine denktir.

### KAYNAKLAR

1. Brandt, H., Über eine Verallgemeinerung des Gruppenbegriffes, Math. Ann., 96, 360-366, 1926.
2. Brown, R., Topology and groupoids , BookSurge LLC, U.K., 2006.
3. Brown, R., Danesh-Naruie, G., The Fundamental Groupoid as a Topological Groupoid, Proc. Edinburgh. Math. Soc.(2) 19, 237-244, 1975.
4. Crowell, R.H., Smythe, N., The Subgroup Theorem for Amalgamated Free Products, HNN-Constructions and Colimits, Proc. Second Internat. Conf. Theory of Groups, Canberra, 241-280, 1987.
5. Mucuk, O., Covering Groups of non-connected Topological Groups and Monodromy Groupoid of a Topological Groupoid, PhD Thesis, University of Wales, 1993.
6. Mackenzie, K., Lie Groupoids and Lie Algebroids in Differential Geometry, London Math. Soc. Lec. Notes Series, Cambridge University Press, 1987.
7. Brown, R., Spencer, C.B., G-groupoids, Crossed Modules and the Fundamental Groupoid of Topological Group, Proc. Konn. Ned. Akad. v. Wet., 79, 296-302, 1976.
8. Porter, T., Internal Categories and Crossed Modules ,in Kamps et al., [7], 249-255.
9. Datuashvili, T., Categorical, Homological and Homotopical Properties of Algebraic Objects, Dissertation, Georgian Academy of Science, Tbilisi, 2006.
10. Brown, R., Mucuk, O., Covering Groups of non-connected Topological Groups Reviseted, Math. Proc. Camb. Phill. Soc., 115, 97-110, 1994.
11. Taylor, R., L., Coverings Groups of non-connected Topological Groups, Proc. Amer. Math. Soc. 5, 753-768, 1954.
12. Rotman, Joseph J., An Introduction to Algebraic Topology, Springer- Verlag New York Inc., 1988.
13. Higgins, P. J., Notes on Categories and Groupoids, Van Nostrand, 1971.
14. Eilenberg, S., Maclane, S., The General Theory of Natural Equivalences, Trans. Amer Math. Soc., 58, 231-294, 1945.
15. Maclane, S., Categories for the working Mathematician, Springer- Verlag, Berlin, 1971.
16. Greene, R. E., Gamelin W. T., Introduction to Topology, University of California, Los Angeles, 1983.

17. Massey, W. S., Algebraic Topology: An Introduction, Springer-Verlag New York Inc., 1990.
18. Brown, R., From Groups to Groupoids: A Brief Survey, Bull. London Math. Soc., 19, 113-134, 1987.
19. Porter, T., Extensions, Crossed Modules and Internal Categories in Categories of Groups with Operations, Proc. Edinburgh. Math. Soc., 30, 373-381, 1987.
20. Douady, A., Lazard, M., Espaces fibrés en algèbres de Lie et en groupes, Invent. Math. 1, 133-151, 1966.
21. Pradines, J., Théories de Lie pour les Groupoides Différentiables: relations entre propriétés locales et globales, C. R. Acad. Sci.Paris Sér., A 263, 907-910, 1966.
22. İcen, İ., Özcan, A.,F., Topological Group-Groupoids and Their Coverings, Indian J.Pure Appl.Math., 36(9): 493-502, 2005.
23. Mucuk, O., Locally Topological Groupoids, Turkish Journal of Mathematics 21- 2, 235-243, 1997.
24. Plaut, C., Berestovskii, V., Covering Group Theory for Topological Groups, Topology and Its Applications, 114, 141-186, 2001.
25. Brown, R., Mucuk, O., Foliations, Locally Lie Groupoids and Holonomy, Cah. Top. Géom. Diff.Cat., 37, 61-67, 1996.
26. Mucuk, O., İcen, İ., Holonomy, extendibility and the star universal cover of a topological groupoid, Applied General Topology, 1, 79-89, 2003.
27. AOF. M.E-S.A-F., Brown, R., The Holonomy Grupoid of a Locally Topological Groupoid, Top. Appl., 47, 97-113, 1992.
28. Bagriyanik, B., Mucuk, O., Covering Maps of H-Spaces, Hadronic Journal 29-6, 711, 2006.
29. Mucuk, O., Kılıçarslan, B., Alemdar, N., Ay, H.,Y., Covering Groupoids and Fundamental Groupoids of H-Groups, Homology, Homotopy and Applications, 2009 (incelemede)
30. Mucuk, O., Kılıçarslan, B., Group Groupoids and Generalized Monodromy Groupoids, International Conference on Topology and Its Applications, Department of Mathematics, Hacettepe University, July 6-11, 2009.

## ÖZGEÇMİŞ

Berrin KILIÇARSLAN, 1980 yılında Kayseri’de doğdu. İlk ve orta öğrenimini Kayseri’de tamamladı. Erciyes Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü’nden 2001 yılında mezun oldu. 29.09.2001 tarihinde Kayseri’de Matematik öğretmeni olarak göreve başladı. 2003 yılında yüksek lisans tezini tamamladı ve aynı yılda Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda doktora programına kabul edildi.

### **İletişim Bilgileri:**

Tel. Nu.: 05056494807

e-posta: berrinbagriyanik@yahoo.com.