

JET DEMETLER ÜZERİNDE GAUGE YAPILAR

Pamukkale Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı

Fatma BADEM

Danışman: Yard. Doç. Dr. Şevket CİVELEK

Ocak, 2009
DENİZLİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ ONAY FORMU

Fatma BADEM tarafından Yardımcı Doçent Dr Şevket CİVELEK yönetiminde hazırlanan **Jet Demetler Üzerinde Gauge Yapılar** başlıklı tez tarafımızdan okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.



Y. Doç. Dr. Şevket CİVELEK
Juri Başkanı(Danışman)



Y. Doç. Dr. Cansel AYCAN

Jüri Üyesi



Y. Doç. Dr. Zekeriya GİRGİN

Jüri Üyesi

Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
...../...../.....tarih vesayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Halil KARAHAAN

Müdür

Bu tezin tasarımı, hazırlanması, yürütülmesi, araştırmaların yapılması ve bulgularının analizlerinde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini; bu çalışmanın doğrudan birincil ürünü olmayan bulguların, verilerin ve metaryallerin bilimsel etiğe uygun olarak kaynak gösterildiğini ve alıntı yapılan çalışmalara atfedildiğini beyan ederim.

Fatma BADEM

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasının hazırlanması sırasında, görev saatleri içerisinde olsun olmasın bana desteklerini esirgemeyen değerli tez danışmanı hocam Yardımcı Doçent Dr. Şevket CİVELEK' in özverileri ve katkıları için teşekkür ederim. Ayrıca bu çalışmamın bir çok aşamasında bilgisine başvurduğum değerli hocam; Yardımcı Doçent Dr. Cansel AYCAN'a bu desteği için teşekkürü bir borç bilirim.

Tez konusunun soyut ve kolay anlaşılabilir nitelikte olmaması, bu konuda yerel kaynakların yeterli olmaması, yabancı kaynaklara ise ulaşmanın zorluğu nedeni ile zaman ve emek yönünden güçlüklerle karşılaştık. Bu dönemde özellikle G. Sardanashvilly nin 'Gauge Theory in Jet Manifolds' adlı eserini temin edebilmek için oldukça zaman ve emek harcadık. Ancak yazarın kendisine kadar ulaşmamıza rağmen, yazar eserin kendisinde de bulunmadığını bildirmiş, yayıncı kuruluştan ve çevremizde yaptığımız araştırmada da bu kaynağa ulaşamadık. Çalışmamızın uygulama kısmında yaptığımız örneğin bilgisayar modellemesini yapmak arzumuzu, biraz da bu zaman kaybından dolayı bu aşamada gerçekleştiremedik. Bunu da çalışmamızın bundan sonraki hedefi olarak belirledik.

Tez çalışmam esnasında anlayış ve desteğini esirgemeyen değerli eşim Mustafa Tahsin BADEM' e teşekkür ederim. Beni bugünlere getiren, yetiştiren aileme de çok teşekkür ederim. Ayrıca bazen sevgi, ilgi ve zamanımı veremediğim minik oğlum Kağan Furkan'dan beni affetmesini istiyorum.

ÖZET

JET DEMETLER ÜZERİNDE GAUGE YAPILAR

BADEM, Fatma
Yüksek Lisans Tezi, Matematik ABD
Tez Yöneticisi: Yardımcı Doç. Dr. Şevket CİVELEK

Ocak, 2009, 62 Sayfa

Bu tez çalışması beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde demet teorisi, multivektör alanları, diferansiyel formlar ve konneksiyonların tanımları verilmiştir. Ayrıca birinci mertebeden jet demetler ile ilgili temel tanım ve teoremler verilmiştir.

İkinci bölümde; zamana bağlı mekanik sistemler ele alındıktan sonra poisson manifoldların geometrisine yer verilmiştir. Üçüncü bölümde; gauge teoriyle ilgili temel kavramlar detaylı bir biçimde incelenmiştir.

Dördüncü bölümde ise; R üzerinde lif demetlerinin özellikleri ifade edildikten sonra, koordinat ve hızların faz uzayı üzerinde zamana bağlı olan Langrangien denklemler elde edilmiştir.

Beşinci bölümde; Gauge jet teorisinin bir mekanik probleme nasıl uygulanacağı gösterilmiştir.

Son bölümde ise; yapılan bu çalışmalarla ilgili sonuç ve değerlendirmeler verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Demet, Multivektör Alanları, Diferansiyel Formlar, Jet Demetler, Gauge teori, Langrangien Denklemler

Y.Doç.Dr. Şevket CİVELEK
Y.Doç.Dr. Cansel AYCAN
Y.Doç.Dr. Zekeriya GİRGIN

ABSTRACT**GAUGE STRUCTURES IN JET BUNDLES**

BADEM, Fatma
M.Sc. Thesis in Mathematics
Supervisor: Asst. Prof. Dr. Şevket CİVELEK

January, 2009, 62 Pages

This thesis consists of five sections. In first section of this study, Basic definitions of bundle theory, multi vector fields and differential forms, connections are given. Besides, basic definitions and theories related to first jet bundles are given.

In the second section, after time-depended mechanical systems are mentioned, Poisson, symplectic and Jacobi manifolds are described. Third section is devoted to basic definitions, theory, and examples about gauge theory.

In fourth section, properties of jet bundles on R are given. After that the formulations of Langrangien time-dependent systems on a phase space of coordinates and velocities are obtained.

In the fifth section, it has been shown how can apply the Gauge Jet Theory to a problem in mechanics.

In the last section the conclusion and evaluation of these studies are expressed.

Keywords: Bundle, Multivector Fields, Differential Forms, Connections, Jet Bundles, Gauge Theory, Langrangian Equations.

**Asst. Prof.Dr. Şevket CİVELEK
Asst. Prof.Dr. Cansel AYCAN
Asst. Prof.Dr. Zekeriya GİRĞİN**

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
İçindekiler Dizini.....	vii
Simgeler ve Kısaltmalar Dizini.....	viii
1. BÖLÜM	
TEMEL YAPILAR.....	1
1.1. Giriş ve Önceki Çalışmalar.....	1
1.2. Lif Demetleri.....	2
1.3. Multivektör Alanları ve Diferansiyel Formlar.....	7
1.4. Konneksiyonlar.....	16
1.5. Birinci Mertebeden Jetler.....	17
2. BÖLÜM	
MEKANİK SİSTEMLER.....	20
2.1. Zamana Bağlı Mekanik Sistemler.....	20
2.2. Poisson Manifoldlarının Geometrisi.....	23
2.3. Simplektik Yapı.....	25
3. BÖLÜM	
GAUGE TEORİSİ.....	28
3.1. Gauge Transformasyonu.....	28
3.2. Gauge Alanları ve Gauge Freedom.....	29
3.3. Gauge Cebir Demeti.....	31
3.4. Bir Asli Demetin Gauge Transformasyonu.....	32
3.5. Gauge Potansiyelleri.....	37
4. BÖLÜM	
LANGRANGİEN ZAMANA BAĞLI MEKANİKLERİ.....	40
4.1. R üzerinde lif demetleri.....	41
4.2. Langrangien Sistemler.....	43
5. BÖLÜM	
GAUGE JET TEORİNİN BİR MEKANİK PROBLEME UYGULANMASI	52
6. BÖLÜM	
SONUÇ VE DEĞERLENDİRME.....	60
Kaynaklar.....	61
Özgeçmiş.....	62

SİMGE VE KISALTMALAR DİZİNİ

E, M	C^∞ - manifoldlar
π	Örten submersiyon
(E, π, M)	Demet
$(x^{0i}, u^{0\alpha})$	(E, π, M) demeti üzerinde tanımlı uyarlanmış koordinatlar
E_p	(E, π, M) demetinin lifi
φ	(E, π, M) demetinin kesiti
TE	E manifoldunun tanjant manifoldu
T^*E	E manifoldunun kotanjant manifoldu
V^*E	E manifoldunun düşey tanjant manifoldu
$T\pi$	π demetinin tanjant dönüşümü (functor'u)
$\chi_r(E)$	E manifoldu üzerinde r-vektör alanlarının vektör uzayı
$\chi_o(E)$	E manifoldu üzerinde $C^\infty(E)$ düzgün fonksiyonların vektör uzayı
$\chi_*(E)$	E manifoldu üzerinde multivektör alanlarının dış cebiri
$\Lambda_0^1\pi$	π demeti üzerinde yatay 1-formların uzayı
$\Lambda^1 E$	E manifoldu üzerinde 1-formların uzayı
$\Lambda_0^r\pi$	π demeti üzerinde yatay r-formların uzayı
$\Lambda_s^r\pi$	π demeti üzerinde yatay (r-s)-formların uzayı
ϕ	Dış r-form
ω	Bivektör alanı
$\omega^\#$	Bivektör alanının lineer lifli morfizmi
Ω	2-form
Ω^p	2-formun lineer lifli morfizmi
$[\dots, \dots]_{SN}$	Schouton-Nijenhuis Bracketi
Γ	Konneksiyon
$\Gamma(\pi)$	π demetinin global kesitlerinin kümesi
$j_p^1\phi$	ϕ 'nin p noktasındaki 1-jeti
$J^1\pi$	π demetinin 1-jet manifoldu
χ^{p^1}	χ vektör alanının birinci prolangosyonu
\mathcal{L}	Langrangien fonksiyon
L	Langrangien
\hat{L}	Legendre dönüşümü
\mathcal{H}	Hamiltonian fonksiyon
H	Hamiltonian
H_i	Poincare-Carton formu

\hat{H}_L	Legendre morfizmi
γ	Lokal Gauge transformasyonu
ε_L	Euler-Langrange Operatörü
ξ_L	Langrangien konneksiyonu
ε_T	Euler Langrange-Cartan Operatör
${}^M G$	Gauge grup
${}^M \mathfrak{g}$	Gauge algebra
d	Dış diferensiyel
$F(M)$	Çatı demeti
$\mathbb{1}$	Birim matris
D	Dış kovaryant türev
\mathfrak{g}_l	Sol Lie cebiri
\mathfrak{g}_r	Sağ Lie cebiri

1.BÖLÜM

TEMEL YAPILAR

1.1. Giriş ve Önceki Çalışmalar

Bu çalışmada; son zamanlarda mühendislikte diferensiyel geometrik yapıları kullanarak; kendine önemli bir çalışma alanı bulan Gauge Mekaniği konusu ele alınacaktır. Yapılan çalışmalar değerlendirildiğinde, Gauge yapıları 1.mertebe jet yapıları ile elde edilmektedir. Fakat Saunders'ın jetler üzerine yayınlamış olduğu çalışmalarında jet demet yapılarının yüksek mertebeden çalışılabildiği görülmektedir. Ayrıca Yrd.Doç.Dr. Cansel Aycan'a ait olan Yüksek Lisans ve Doktora tezleri ile yapılan diğer yayınlarda yüksek mertebeden jetler üzerinde tanımlı diferensiyel yapıların yanı sıra jet demet dizileri ve yüksek mertebeden Lagrange ve Hamilton enerji denklemleri elde edilmiştir. 1940'lı ve 1950'li yıllarda F. Bob, Ostrogransky, B.Podolsky tarafından başlatılan yüksek mertebeden türevlenebilme çalışmaları Ch.Ehresman tarafından jet manifold kavramına uyarlanmıştır. Daha sonra Saunders ve Kupper Shimidt bu çalışmaları yüksek mertebeden jet kavramına genişletmişlerdir.

Öncelikle 1960'lı yıllarda J.Klein'in çalışmalarında görülmeye başlanan Hamilton Teorisi 1980'li yıllarda daha yoğun olarak M.Crampin, De Leon, Rodrigues, I.Mendez, P.Dirac gibi matematikçilerin yayınlarında karşımıza çıkmaktadır. Bu çalışmaların temelinde de 1.mertebeden jet manifold yapıları vardır. Lagrangien ve Hamiltonien dinamikleri çalışmalarında gerekli olan Jakobi, Poisson, Simplektik yapılar 1980'lerin sonlarına doğru yoğun olarak, 1990'larda G.Sardanashvily, M.Gökheler ve T.Schucker'e ait çalışmalarda ele alınmıştır. Gauge teorisi ise bahsettiğimiz geometrik yapıların birer dinamik yapı olarak ele alınmasının yanı sıra, ziyadesiyle fiziksel

uygulama ve yorumlarına dayanmaktadır. M. Gökhele bir fizikçi olduğundan Gauge Teoriyi Einstein-Cartan teori ile birleştirerek ele almıştır.

Bu çalışmanın amacı ise; yukarıda bahsedilen önceki çalışmaların üzerine, sadece temel dinamikte kullanılan tanjant demete ve klasik zamana dayalı 1.jet kavramına nazaran daha detaylı bir jet incelemesiyle bu kavramları yeniden ele almaktır. Ayrıca "Genişletilmiş Jet Demetler Üzerinde Euler-Lagrange ve Hamilton Denklemlerinin Lifleri" doktora tezinde kullanılmış olan farklı zaman parametreleri Einstein teoride kendine yer edinebildiği için bu şekliyle Gauge Teoriyi ele almaktır.

Öncelikle girişte temel kavramlar tanımlanacaktır. Lifli demet yapısı verildikten sonra, cebirden bilinen Lie Cebiri kavramını genelleleyen Schouten Nijenhuis Braketi tanımlanacaktır. Sonra birinci mertebeden jet verildikten sonra çalışma zamana bağlı gelişeceği için zamana bağlı mekanik sistemler sunulacaktır. Poisson yapısı, Simplektik yapı gibi temel yapılar ele alınıp, Gauge Teoriye ait üzerinde çalışılacak kavram ve özellikler verilecektir. Son olarak Lagrangien zamana bağlı mekanikler ele alınıp yaptığımız çalışmalarla ilgili uygulamaya yer verilecektir.

1.2. Lif Demetleri

Tanım 1.2.1. (Lifli Manifold)

$E, M \in C^\infty$ - manifoldlar,

$$\pi : E \rightarrow M$$

bir C^∞ dönüşüm olsun. Eğer π , örten submersiyon ise (E, π, M) üçlüsüne *lifli manifold* denir. (E, π, M) lifli manifoldunda, E 'ye total uzay M 'ye taban uzay, π 'ye *projeksiyon* denir. Her bir $p \in M$ noktası için E 'nin $\pi^{-1}(p)$ cümlesine de p üzerindeki *lif* denir. (Civelek 1993)

- $\pi^{-1}(p)$ lifi E_p ile gösterilebilir.

• Bir (E, π, M) lifli manifoldunun π projeksiyonu bir örten submersiyon olduğundan, E_p lifinin her bir irtibatlı bileşeni M 'in bir alt manifoldudur ve $\text{Boy}E_p = \text{boy}E - \text{boy}M$ sayısına π 'nin *lif boyutu* denir.

• Bir (E, π, M) lifli manifoldu için genelde E uzayının tümü, M uzayı ile bir başka manifoldun kartezyen çarpımına diffeomorfik olmak zorunda değildir. Fakat π projeksiyonunun submersion olmasından dolayı bir lokal çarpım yapısı belirlemek mümkündür. Kapalı fonksiyon teoreminden, her bir $a \in E$ noktası için;

$$pr_1(t_a(b)) = \pi(b), \quad \forall b \in U_a$$

şartını sağlayacak bir $U_a \subset E$ komşuluğu, bir diğer V_a manifoldu ve bir ;

$$t_a : U_a \rightarrow \pi(U_a) \times V_a$$

diffeomorfizmi vardır. Böylece, total uzayın her bir noktası, bir çarpım manifolduna benzeyen bir komşuluğa sahip olur. t_a üzerindeki yukarıda belirtilen şart :

$$\begin{array}{ccc} U_a & \xrightarrow{t_a} & \pi(U_a) \times V_a \\ \pi|_{U_a} \downarrow & & \downarrow pr_1 \\ \pi(U_a) & \xrightarrow{id_{\pi(U_a)}} & \pi(U_a) \end{array}$$

değişmeli diyagramı ile ifade edilebilir. Burada pr_1 ile birinci izdüşüm fonksiyonu ve id ile de özdeşlik fonksiyonu gösterilmektedir.

Tanım 1.2.2.

Bir lifli manifold (E, π, M) , $\text{boy}M = m$, $\text{boy}E = m + n$, $U \subset E$ açık alt cümlesi üzerinde bir koordinat sistemi; $y : U \rightarrow R^{m+n}$ olsun. $pr_1 : R^{m+n} \rightarrow R^m$ olmak üzere; $a, b \in U$ ve $\pi(a) = \pi(b) = p \Rightarrow pr_1(y(a)) = pr_1(y(b))$ önermesi doğru ise y 'ye bir *uyarlanmış (adapted) koordinat sistemi* denir. (Civelek 1993)

• Bu tanıma göre, aynı $E_p \cap U$ lifinde bulunan noktaların ilk m tane koordinatlarının eşit ve geri kalan son n tane koordinatların ise farklı olabileceği bir koordinat sistemi seçilebileceği anlaşılmaktadır.

• Bir lifli manifold (E, π, M) ve $a \in E$ olsun. a civarında uyarlanmış koordinatlar lokal çarpım yapısından oluşturulabilir. Bunun için, $W \subset \pi(U)$ olmak üzere

$\pi(a) = pr_1(t_a(a)) \in M$ noktası civarında bir $x:W \rightarrow R^m$ koordinat sistemi ve $pr_2(t_a(a)) \in V \subset V_a$ civarında bir $u:V \rightarrow R^n$ koordinat sistemi seçerek, tıpkı çarpım manifoldlarında olduğu gibi;

$$y = (x \circ pr_1 \circ t_a, u \circ pr_2 \circ t_a)$$

eşitliği ile $y:t_a^{-1}(W \times V) \rightarrow R^{m+n}$ dönüşümünü tanımlayalım. E'nin bir uyarlanmış koordinat sistemi olduğu açıktır. Karşıt olarak, herhangi bir

$$y:U \rightarrow R^{m+n}$$

uyarlanmış koordinat sistemi,

$$x(p) = pr_1(y(a)), a \in E_p \cap U$$

olarak bir

$$x:\pi(U) \rightarrow R^m$$

koordinat sistemi verir.

- Bir uyarlanmış koordinat sisteminin bileşen fonksiyonları ile ilgilenirken genellikle aşağıdaki notasyon kullanılır:

M üzerindeki koordinatlar (x^{0i}) ($1 \leq i \leq m$) ise E üzerindeki koordinat fonksiyonları $(x^{0i}, u^{0\alpha})$ $1 \leq \alpha \leq n$ şeklinde ifade edilecektir. Burada $x^{0\alpha}$ sembolü için $\pi(U) \rightarrow R$ fonksiyonu ve $U \rightarrow \pi(U) \rightarrow R$ bileşke fonksiyonu kullanılacaktır.

Tanım 1.2.3. (*[Global] Trivial Lifli Manifold*)

Bir lifli manifold (E, π, M) ve bir C^∞ -manifold F olmak üzere eğer;

$$t: E \rightarrow M \times F$$

dönüşümü,

$$pr_1 \circ t = \pi$$

olacak şekilde bir diffeomorfizm ise; (F, t) ikilisine π 'nin bir *[global] trivializasyonu*, F'ye π 'nin model (tipik) lifi ve en azından bir trivializasyona sahip bir (E, π, M) lifli manifolduna da *[global] trivial lifli manifold* veya yalnızca *trivial lifli manifold* denir. (Civelek 1993)

Tanım 1.2.4. (*[Lokal] Trivial Lifli Manifold*)

Bir lifli manifold (E, π, M) ve $p \in M$ olsun. F_p bir C^∞ -manifold, p 'in bir komşuluğu W_p ve $p r_1 \circ t_p = \pi \Big|_{\pi^{-1}(W_p)}$ şartını sağlayacak bir diffeomorfizm,

$$t_p : \pi^{-1}(W_p) \rightarrow W_p \times F_p$$

ise; o zaman (W_p, V_p, t_p) üçlüsüne p civarında π 'nin bir lokal trivializasyonu ve taban uzayın her bir noktası civarında en az bir lokal trivializasyona sahip bir (E, π, M) lifli manifolduna da *lokal trivial lifli manifold* veya *demet* denir. (Civelek 1993)

$\Psi = \{(W_p, t_p)\}$ lif demetinin bir atlasıdır.

Tanım 1.2.5. (*Lif Demetinin Tanjant Demeti*)

$$\pi_E : TE \rightarrow E,$$

$\pi : E \rightarrow M$ lif demetinin tanjant demeti olsun. E üzerindeki lifli koordinatlar

$$(x^{0i}, u^{0\alpha})$$

olmak üzere; TE tanjant demetinin koordinatları; $(x^{0i}, u^{0\alpha}, x^{1i}, u^{1\alpha})$ olur. $T\pi : TE \rightarrow TM$ tanjant dönüşüm iken TE tanjant demeti $\pi \circ \pi_E : TE \rightarrow M$, M üzerinde bir lif demetidir.

$\pi_p \circ T\pi = \pi \circ \pi_E$ olup aşağıdaki değişmeli diyagram vardır:

$$\begin{array}{ccc} TE & \xrightarrow{T\pi} & TM \\ \pi_E \downarrow & & \downarrow \pi_p \\ E & \xrightarrow{\pi} & M \end{array}$$

(Sardanashvily and Mangiarotti 1998)

Tanım 1.2.6. (*Düşey Tanjant Alt Demeti*)

$E \rightarrow M$ lif demetinin $TE \rightarrow E$ tanjant demeti $VE \stackrel{def}{=} \text{Çek} T\pi$ olacak şekilde bir düşey tanjant alt demete sahiptir. $x^{1i} = 0$ koordinat bağıntısı vardır. $(x^{0i}, u^{0\alpha}, u^{1\alpha})$ koordinatları ile ve $\left\{ \frac{\partial}{\partial u^{0\alpha}} \right\}$ çatısı ile verilir.

Bu alt demet E 'nin liflerine teğet vektörlerden oluşur. (Sardanashvily and Mangiarotti 1998)

Tanım 1.2.7. (Kotanjant Demet)

$E \rightarrow M$ lif demetinin kotanjant demeti T^*E olup, $(x^{0i}, u^{0\alpha}, x_{1i}, u_{1\alpha})$ koordinatlarıyla donatılmıştır. M üzerinde $T^*E \rightarrow M$ doğal liflenmesi vardır.

Tanım 1.2.8. (Düşey Kotanjant Demet)

$E \rightarrow M$ lif demetinin $V^*E \rightarrow E$ düşey kotanjant demeti, $VE \rightarrow E$ düşey tanjant demetinin duali olan vektör demetidir. $\{du^{0\alpha}\}$, V^*E nin lifleri için bazdır. (Sardanashvily and Mangiarotti 1998)

Tanım 1.2.9. (Kesit)

(E, π, M) lifli manifold ve $\phi: M \rightarrow E$ bir dönüşüm olsun. Eğer $\pi \circ \phi = id_M$ koşulu gerçekleşiyorsa, ϕ 'ya π 'nin bir kesiti denir. π 'nin tüm kesitlerinin kümesi $\Gamma(\pi)$ ile gösterilir. (Civelek 1993)

Tanım 1.2.10. (Legendre demeti)

$E \rightarrow M$ keyfi bir lif demeti olsun. E üzerinde $(x^{0i}, u^{0\alpha}, p_{0\alpha}^{0i})$ holonomik koordinatlarıyla ve

$$p_{0\alpha}^{0i} = \frac{\partial u^j}{\partial u^{0\alpha}} \frac{\partial x^{0i}}{\partial x^\mu} \det\left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\beta}\right) p_j^\mu \quad (1.2.1)$$

geçişli fonksiyonuyla verilen,

$$\Pi = \Lambda^m T^*M \otimes_{\mathbb{R}} TM \otimes_{\mathbb{R}} V^*E \cong V^*E \wedge (\Lambda^{m-1} T^*M) \quad (1.2.2)$$

lif demetine *Legendre Demeti* denir. (Sardanashvily and Mangiarotti 1998)

Tanım 1.2.11. (Legendre Dönüşümü)

TE konfigürasyon uzayı üzerinde her \mathcal{L} Langrangian'ı, E üzerinde aşağıda verilen;

$$\hat{\mathcal{L}} \stackrel{\text{def}}{\cong} \pi_{T^*E} \circ \beta^{-1} \circ d\mathcal{L}: TE \rightarrow T^*TE \rightarrow TT^*E \rightarrow T^*E \quad (1.2.3)$$

$$p_{0\alpha} = \partial_{0\alpha} \mathcal{L} \quad (1.2.4)$$

lifli morfizmini verir. Bu $\hat{\mathcal{L}}$ lifli morfizmüne *Legendre dönüşümü* denir. Burada $\beta: TT^*M \cong T^*TM$ dir. (Sardanashvily and Mangiarotti 1998)

Tanım 1.2.12. (Legendre morfizmi)

$J^1 E \rightarrow E$ afin jet demetinden $T^* E \rightarrow E$ kotanjan demetine bir lifli morfizim

$$\hat{H}_L : J^1 E \rightarrow T^* E \quad (1.2.5.)$$

$$(p_{0\alpha}, p) \circ \hat{H}_L = (\pi_{0\alpha}, \mathcal{L} - \pi_{0\alpha} u_i^{0\alpha})$$

şeklinde tanımlı olup, $(t, u^{0\alpha}, p, p_{0\alpha})$ koordinatlarıyla donatılan bir homojen legendre demetidir. Bu \hat{H}_L dönüşümüne; H_L Poincare-Cartan formuna bağlı *legendre morfizmi* denir. \hat{L} Legendre dönüşümü ve \hat{H}_L Legendre morfizmi arasında $\zeta, T^* E \rightarrow V^* E$ ya bir kanonik projeksiyon olmak üzere; $\hat{L} = \zeta \circ \hat{H}_L$ bağıntısı vardır. (Sardanashvily and Mangiarotti 1998)

1.3. Multivektör Alanları ve Diferensiyel Formlar**Tanım 1.3.1. (Schouten-Nijenhuis Braketi)**

E manifoldu üzerinde multivektör alanlarının dış cebiri aşağıdaki vektör alanlarının Lie braketini genelleleyen *Schouten-Nijenhuis braketi* ile verilir ;

$$\begin{aligned} [\cdot, \cdot]_{SN} : \mathcal{X}_r(E) \times \mathcal{X}_s(E) &\rightarrow \mathcal{X}_{r+s-1}(E) \\ \mathcal{G} &= \frac{1}{r!} g^{\alpha_1 \dots \alpha_r} \frac{\partial}{\partial u^{\alpha_1}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial u^{\alpha_r}} \\ \mathcal{V} &= \frac{1}{s!} v^{\lambda_1 \dots \lambda_s} \frac{\partial}{\partial u^{\lambda_1}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial u^{\lambda_s}} \end{aligned} \quad (1.3.1)$$

$$[\mathcal{G}, \mathcal{V}]_{SN} \stackrel{def}{=} \mathcal{G}^* \mathcal{V} + (-1)^{rs} \mathcal{V}^* \mathcal{G}$$

$$\mathcal{G}^* \mathcal{V} = \frac{r}{r!s!} (g^{\mu\alpha_2 \dots \alpha_r} \partial_\mu v^{\lambda_1 \dots \lambda_s} \partial_{\alpha_2} \wedge \dots \wedge \partial_{\alpha_r} \wedge \partial_{\lambda_1} \wedge \dots \wedge \partial_{\lambda_s})$$

olup,

$$[\mathcal{G}, \mathcal{V}]_{SN} = (-1)^{|\mathcal{G}| |\mathcal{V}|} [\mathcal{V}, \mathcal{G}]_{SN} \quad (1.3.2)$$

$$[\mathcal{V}, \mathcal{G} \wedge \mathcal{V}]_{SN} = [\mathcal{V}, \mathcal{G}]_{SN} \wedge \mathcal{V} + (-1)^{(|\mathcal{V}|-1)|\mathcal{G}|} \mathcal{G} \wedge [\mathcal{V}, \mathcal{V}]_{SN} \quad (1.3.3)$$

eşitlikler sağlar. (Sardanashvily and Mangiarotti 1998)

Örnek 1.3.1 :

$\omega = \frac{1}{2} \omega^{\mu\nu} \partial_\mu \wedge \partial_\nu$ bivektör alanı olsun.

$$[\omega, \omega]_{SN} = \omega^{\mu\alpha} \partial_\mu \omega^{\alpha_2\alpha_3} \partial_{\alpha_1} \wedge \partial_{\alpha_2} \wedge \partial_{\alpha_3}$$

olur. (Sardanashvily and Mangiarotti 1998)

Tanım 1.3.2.

R_1 ve R_2 sırası ile π_1 ve π_2 boyunca ρ -bağlı vektör değerleri r-formları ve S_1 ve S_2 ρ_1, ρ_2 boyunca π -bağlı vektör değerli s-formları ise $[R_1, S_1]$ braketi

$$d_{[R_1, S_1]} = d_{R_1} \circ d_{S_2} - (-1)^{rs} d_{S_1} \circ d_{R_2}$$

olarak tanımlanan $\pi_2 \circ \rho_1 = \rho_2 \circ \pi_1$ boyunca r+s- vektör değerli formdur. Burada $d_{[R_1, S_1]}$ kolaylıkla görülür ki $\pi_2 \circ \rho_1$ boyunca d . tipinden (r+s) - dereceden bir derivasyondur. Bu braket bazen Frölicher-Nijenhuis braketi olarak adlandırılır. (Saunders 1989)

Örnek 1.3.2.

π_i, ρ_i ler M manifoldu üzerinde kurulmuş özdeşlik dönüşümü ile elde edilen demetler olmak üzere R ve S ler vektör değerli O-formlar olduğu kabul edilirse; $[R, S]$ çarpımı Lie braket çarpımına dönüşür. Daha genel olarak; sadece R bir vektör alanı ise bu durumda $[R, S], L_R S$ Lie türevidir. (Saunders 1989)

Lemma 1.3.1.

$\Lambda M \otimes \chi(M)$, M üzerindeki vektör değerli tüm formların kümesi Frölicher-Nijenhuis braketi çarpımı yardımıyla bir Lie cebiri olur. (Saunders 1989)

İspat :

Braket işlemi açıkça R-lineerdir ve tanımdan

$$[S, R] = (-1)^{rs+1} [R, S]$$

sağlar. Bu tanım kullanılarak basit bir hesaplama yapılırsa; Jakobi özdeşliğinin aşağıdaki versiyonu elde edilir:

$$(-1)^r [R, [S, T]] + (-1)^{rs} [S, [T, R]] + (-1)^{st} [T, [R, S]] = 0$$

R ve S vektör değerli 1-formlar olduğunda bu yapının önemli örneği ortaya çıkar, bu durumda vektör değerli 2-form $[R, S]$, R ve S 'nin *Nijenhuis tensörü* olarak adlandırılır.

Teorem 1.3.1.

$\forall X, Y \in \mathcal{X}(M)$ için ,

$$\begin{aligned} (X, Y) \rfloor [R, S] &= [X, Y] \rfloor R \rfloor S + [X \rfloor R, Y \rfloor S] - [X \rfloor R, Y] \rfloor S - [X, Y \rfloor R] \rfloor S + \\ & [X, Y] \rfloor S \rfloor R + [X \rfloor S, Y \rfloor R] - [X \rfloor S, Y] \rfloor R - [X, Y \rfloor S] \rfloor R. \end{aligned}$$

(Saunders 1989)

İspat :

Yukarıdaki eşitliğin her tarafı bir vektör alanıdır. Her taraf bir keyfi tam 1-form ile kurulduğu zaman aşağıdaki eşitliği kanıtlayacağız. Şimdi eğer $f \in C^\infty(M)$ ise ;

$$\begin{aligned} ((X, Y) \rfloor [R, S]) \rfloor df &= (X, Y) \rfloor i_{[R, S]} df \\ &= (X, Y) \rfloor d_{[R, S]} f \\ &= (X, Y) \rfloor d_R d_S df + (X, Y) \rfloor d_S d_R f \end{aligned}$$

Birinci terim detaylarıyla açılırsa; tanımdan;

$$\begin{aligned} (X, Y) \rfloor d_R d_S df &= (X, Y) \rfloor (i_R \circ d - d \circ i_R)(i_S df) \text{ ve} \\ (X, Y) \rfloor i_R d_S df &= (X \rfloor R, Y) \rfloor d(S \rfloor df) + (X, Y \rfloor R) \rfloor d(S \rfloor df) \\ &= d_{X \rfloor R}(Y \rfloor S \rfloor df) - d_Y(X \rfloor R \rfloor S \rfloor df) - [X \rfloor R, Y] \rfloor S \rfloor df + \\ & d_X(Y \rfloor R \rfloor S \rfloor df) - d_{Y \rfloor R}(X \rfloor S \rfloor df) - [X, Y \rfloor R] \rfloor S \rfloor df - (X, Y) \rfloor d_{i_R} i_S df \\ &= -d_X(Y \rfloor R \rfloor S \rfloor df) + d_Y(X \rfloor R \rfloor S \rfloor df) + [X, Y] \rfloor R \rfloor S \rfloor df \end{aligned}$$

olur ve

$$\begin{aligned} (X, Y) \rfloor d_R d_S f &= [X, Y] \rfloor R \rfloor S \rfloor df - [X \rfloor R, Y] \rfloor S \rfloor df - [X, Y \rfloor R] \rfloor S \rfloor df + \\ & d_{X \rfloor R}(Y \rfloor S \rfloor df) - d_{Y \rfloor R}(X \rfloor S \rfloor df) \end{aligned}$$

şekindedir. Benzer şekilde:

$$\begin{aligned} (X, Y) \rfloor d_S d_R f &= [X, Y] \rfloor S \rfloor R \rfloor df - [X \rfloor S, Y] \rfloor R \rfloor df - [X, Y \rfloor S] \rfloor R \rfloor df - \\ & d_{X \rfloor S}(Y \rfloor R \rfloor df) - d_{Y \rfloor S}(X \rfloor R \rfloor df) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} d_{X \rfloor R}(Y \rfloor S \rfloor df) - d_{Y \rfloor S}(X \rfloor R \rfloor df) &= d_{X \rfloor R} d_{Y \rfloor S} f - d_{Y \rfloor S} d_{X \rfloor R} f \\ &= d[X \rfloor R, Y \rfloor S] f \\ &= [X \rfloor R, Y \rfloor S] \rfloor df \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

Tanım 1.3.3.(Dış Diferansiyel)

E üzerinde bir dış r-form,

$$\phi = \frac{1}{r!} \phi_{\alpha_1 \dots \alpha_r} du^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge du^{\alpha_r},$$

$\overset{r}{\Lambda} T^* E \rightarrow E$ dış çarpımının bir kesitidir. E manifoldu üzerinde bir r formların vektör uzayı $\overset{r}{\Lambda} E$ ile temsil edilir. $\overset{0}{\Lambda} E = C^\infty E$ halkası üzerinde bir modüldür. $\overset{0}{\Lambda} E$ bu fonksiyonların vektör uzayı iken $C^\infty(E)$, E manifoldu üzerinde düzgün fonksiyonların halkasıdır. E üzerinde bütün dış formlar, dış çarpıma bağlı $\overset{*}{\Lambda} E$ dış cebirini oluşturur.

Dış diferansiyel, $\overset{*}{\Lambda} E$ üzerinde 1. mertebeden diferansiyel operatör olup

$$d : \overset{r}{\Lambda} (E) \rightarrow \overset{r+1}{\Lambda} (E)$$

$$d\phi = \frac{1}{r!} \partial_\mu \phi_{\alpha_1 \dots \alpha_r} du^\mu \wedge du^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge du^{\alpha_r}$$

dır. $|\phi|$, ϕ 'nin derecesi olmak üzere;

$$d(\phi \wedge \sigma) = d(\phi) \wedge \sigma + (-1)^{|\phi|} \phi \wedge d(\sigma) \quad d \circ d = 0$$

bağıntıları vardır. (Sardanashvily and Mangiarotti 1998)

Tanım 1.3.4. (Lif Demeti Üzerinde Dış Form)

$\pi : E \rightarrow M$, $(x^{0i}, u^{0\alpha})$ koordinatlarıyla bir lif demeti olsun.

$$\pi^* : \overset{*}{\Lambda} M \rightarrow \overset{*}{\Lambda} E$$

π^* 'nin pull back dönüşümü olup, dış formlar,

$$\phi : E \rightarrow \overset{r}{\Lambda} T^* M, \quad \phi = \frac{1}{r!} \phi_{i_1 \dots i_r} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}$$

şeklinindedir. (Sardanashvily and Mangiarotti 1998)

Tanım 1.3.5 (İç Çarpım)

$\nu = \nu^\mu \partial_\mu$ vektör alanı ve ϕ dış r formunun iç çarpımı

$$\begin{aligned} \nu \lrcorner \phi &= \sum_{k=1}^r \frac{(-1)^{k-1}}{r!} \nu^{\alpha_k} \phi_{\alpha_1 \dots \alpha_k \dots \alpha_r} du^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge \hat{d} u^{\alpha_k} \wedge \dots \wedge du^{\alpha_r} \\ &= \frac{1}{(r-1)!} \nu^\mu \phi_{\mu \alpha_2 \dots \alpha_r} du^{\alpha_2} \wedge \dots \wedge du^{\alpha_r} \end{aligned} \quad (1.3.4)$$

koordinat ifadesi ile verilir. Aşağıdaki bağıntılar sağlanır:

$$\phi(\nu_1, \dots, \nu_r) = \nu_r \lrcorner \dots \nu_1 \lrcorner \phi \quad (1.3.5)$$

$$\nu \rfloor (\phi \wedge \sigma) = \nu \rfloor \phi \wedge \sigma + (-1)^{|\phi|} \phi \wedge \nu \rfloor \sigma \quad (1.3.6)$$

$$[\nu, \nu'] \rfloor \phi = \nu \rfloor d(\nu' \rfloor \phi) - \nu' \rfloor d(\nu \rfloor \phi) - \nu \rfloor \nu' \rfloor d\phi \quad \phi \in \Lambda^1 E \quad (1.3.7)$$

Multivektör alanları için iç çarpımın genelleştirilmesi dış formların ve multivektör alanlarının sol iç çarpımı

$$\mathcal{G} \rfloor \phi = \phi(\mathcal{G}), |\mathcal{G}| \leq |\phi|, \quad \phi \in \Lambda^* E, \quad \mathcal{G} \in \mathcal{X}_*(E)$$

şeklindedir. $\phi(\nu_1 \wedge \dots \wedge \nu_r) = \phi(\nu_1, \dots, \nu_r)$ dir. Bu durumda,

$$\mathcal{G} \rfloor \nu \rfloor \phi = (\nu \wedge \mathcal{G}) \rfloor \phi = (-1)^{|\nu||\mathcal{G}|} \nu \rfloor \mathcal{G} \rfloor \phi, \quad \phi \in \Lambda^* E, \quad \mathcal{G}, \nu \in \mathcal{X}_*(E)$$

eşitliği elde edilir. (Sardanashvily and Mangiarotti 1998)

Örnek 1.3.3

(1.3.7) formülü multivektör alanları için aşağıdaki gibi genelleştirilebilir ;

$$[\mathcal{G}, \nu]_{SN} \rfloor \phi = (-1)^{|\nu|(|\mathcal{G}|-1)} \mathcal{G} \rfloor d(\nu \rfloor \phi) + (-1)^{|\mathcal{G}|} \nu \rfloor d(\mathcal{G} \rfloor \phi) - \nu \rfloor \mathcal{G} \rfloor d\phi$$

$$|\phi| = |\mathcal{G}| + |\nu| - 1$$

dir. Dış formlar ve multivektör alanlarının sağ iç çarpımı,

$$\mathcal{G} \rfloor \phi = \mathcal{G}(\phi) \quad |\phi| \leq |\mathcal{G}|, \quad \phi \in \Lambda^* E, \quad \mathcal{G} \in \mathcal{X}_*(E)$$

$$\mathcal{G}(\phi_1, \dots, \phi_r) = \mathcal{G} \rfloor \phi_r \dots \rfloor \phi_1 \quad \phi_i \in \Lambda^1 E, \quad \mathcal{G} \in \mathcal{X}_r(E)$$

$$\mathcal{G} \rfloor \varphi = \frac{1}{(r-1)!} \mathcal{G}^{\alpha_1 \dots \alpha_{r-1} \mu} \varphi_\mu \partial_{\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_{r-1}} \quad \phi \in \Lambda^1 E$$

eşitliklerle verilir. İç çarpım işlemi için;

$$(\mathcal{G} \wedge \nu) \rfloor \phi = \mathcal{G} \wedge (\nu \rfloor \phi) + (-1)^{|\nu|} (\mathcal{G} \rfloor \phi) \wedge \nu, \quad \phi \in \Lambda^1 E$$

$$\mathcal{G}(\phi \wedge \sigma) = \mathcal{G} \rfloor \sigma \rfloor \phi, \quad \phi, \sigma \in D^*(M)$$

eşitlikler geçerlidir. Eğer $|\mathcal{G}| = |\phi|$ ise;

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{X}_r(E) \times \Lambda^r E \rightarrow C^\infty(E)$$

$$\langle \mathcal{G}, \phi \rangle = \mathcal{G} \rfloor \phi = \mathcal{G} \rfloor \phi = \mathcal{G}(\phi) = \phi(\mathcal{G})$$

doğal çarpım tanımlanabilir. (Sardanashvily and Mangiarotti 1998)

Tanım 1.3.6

$X \in \chi(\pi)$ olmak üzere; $\sigma \in \Lambda^1 M$ formu için $X \rfloor \sigma \in C^\infty(E)$ fonksiyonu

$$(X \rfloor \sigma)(\alpha) = \sigma_{\pi(\alpha)}(X_\alpha)$$

şeklinde tanımlanır. Eğer σ_j , M üzerinde lokal fonksiyonlar olmak üzere lokal koordinatlarda $\sigma = \sigma_j dx^j$ ise; $X \rfloor \sigma = x^j \sigma_j$ olur. Eğer $\theta \in \Lambda^r M$ ise; $X \rfloor \theta \in \Lambda^{r-1} E$ şeklinde bir $(r-1)$ -formdur. (Saunders 1989)

Tanım 1.3.7

$(\pi^*(T^*M), \pi^* \circ \tau_M^*, E)$ demetinin herhangi bir σ kesitine E üzerinde M 'nin yatay-1 formu denir. π demetinin 1-formlarının kümesini $\Lambda^1_0 \pi$ ile gösterilecektir. Benzer şekilde; M üzerinde k formların kümesini de $\Lambda^k_0 \pi$ ile gösterilecektir. Yatay 1-formların diğer adı yarı basit 1-formdur. $\Lambda^1_0 \pi$ bir vektör uzayıdır. $\{\pi^*(\sigma) : \sigma \in \Lambda^1 M\}$ tarafından $C^\infty(E)$ üzerinde üretilmiş modüldür. $V(\pi)$ 'nin annihilatörüdür. (Saunders 1989)

Lemma 1.3.2

$\sigma \in \Lambda^1 E$ 1-formunun π 'nin bir $\sigma \in \Lambda^1_0 \pi$ 1-formu olması için $\Leftrightarrow \forall X \in V(\pi)$ düşey vektör alanı için $X \rfloor \sigma = 0$ olmalıdır. (Saunders 1989)

İspat :

Eğer $\sigma \in \Lambda^1_0 \pi$ ise bu durumda $\forall a \in E$ ve bazı $\eta \in T^*_{\pi(a)} M$ için $\sigma_a = \pi^*(\eta)$ olur.

Bu durumda eğer $X \in V(\pi)$ ise

$$\begin{aligned} (X \rfloor \sigma)_a &= \sigma_a(X_\alpha) \\ &= \pi^*(\eta)(X_\alpha) \\ &= \eta(\pi_*(X_\alpha)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olur. Tersine $\sigma \in \Lambda^1 E$ ve $\forall X \in V(\pi)$ için; $X \rfloor \sigma = 0$ olduğu kabul edilirse; $a \in E$ olsun. $\forall \zeta \in V_a \pi$ için $X_\alpha = \zeta$ olmak üzere bir $X \in V(\pi)$ düşey vektör alanı vardır. X , örneğin ζ lokal koordinatlarda yazılarak, değerleri a da olan düzgün fonksiyonlar seçilerek oluşturulabilir. Bu durumda

$$\sigma_a(\zeta) = \sigma_a(X_\alpha) = (X \rfloor \sigma)_a = 0$$

olur. $\bar{\xi} \in T_{\pi(a)}^*M$, $\eta \in T_{\pi(a)}^*M$ kotanjant vektörü ve $\xi \in T_aE$ için $\pi_*(\xi) = \bar{\xi}$ tanımlansın. Eğer $\pi_*(\xi_1) = \pi_*(\xi_2) = \bar{\xi}$ ise $\xi_1 - \xi_2 \in V_a\pi$ olduğundan $\pi_*(\xi_1 - \xi_2) = 0$ dir. Ve bu nedenle $\sigma_a(\xi_1) = \sigma_a(\xi_2)$ iken $\eta(\bar{\xi}) = \sigma_a(\xi)$ olur. Herhangi $\xi \in T_aE$ için, $\sigma_a = \pi^*(\eta)$ olduğundan $\sigma_a(\xi) = \eta(\pi_*(\xi)) = \pi^*(\eta)(\xi)$ olur, bu yüzden $\sigma \in \Lambda_0^1\pi$ dir.

Lokal olarak; herhangi bir $\sigma \in \Lambda^1E$ 1-formu;

$$\sigma = \sigma_{0i} dx^{0i} + \sigma_{0\alpha} du^{0\alpha}$$

şeklinde yazılabilir. Eğer $\sigma \in \Lambda_0^1\pi$ ise o zaman;

$$\sigma = \sigma_{0i} dx^{0i}$$

olacaktır. Buradaki $du^{0\alpha}$ nın bütün bileşenleri sıfır olmaktadır. (Saunders 1989)

Tanım 1.3.8

$X \in \chi(M)$ ve $\sigma \in \Lambda_0^1\pi$ için $X \rfloor \sigma \in C^\infty(E)$ çarpımı $\forall a \in E$ için

$$(X \rfloor \sigma)(a) = \eta(X_{\pi(a)})$$

şeklinde tanımlı olup burada $\eta \in T_{\pi(a)}^*M$, $\pi^*(\eta) = \sigma_a$ eşitliğini sağlar. (Saunders 1989)

Tanım 1.3.9

$X \in \chi(\pi)$, $\sigma \in \Lambda_0^1M$ için $x \rfloor \sigma \in C^\infty(E)$ çarpımı $\forall a \in E$ için

$$(x \rfloor \sigma)(a) = \eta(X_a)$$

tanımlı olup, $\eta \in T_{\pi(a)}^*M$ olup, $\pi^*(\eta) = \sigma_a$ dir. (Saunders 1989)

Lemma 1.3.3

$\theta \in \Lambda^r E$ için $\theta \in \Lambda_s^r \pi$ $1 \leq s \leq r-1$ olması için $\Leftrightarrow \forall X \in V(\pi)$ için $x \rfloor \theta \in \Lambda_{s-1}^{r-1} \pi$

olmalıdır. (Saunders 1989)

İspat :

Lemma 1.2.2 nin ispatına benzemektedir. Bu sefer multilineer cebir kullanılarak, $\theta_a E \wedge T_a^* E \wedge \Lambda_s^r \pi^*(T_{\pi(a)}^*M)$ olduğu ispat edilir.

Tanım 1.3.10.

Bir R-lineer $D: \Lambda M \rightarrow \Lambda E$ dönüşümü eğer ;

$$1-) \theta \in \Lambda^s M \text{ için } D\theta \in \Lambda^{r+s} E$$

$$2-) \theta_1 \in \Lambda^{s_1} M \text{ ve } \theta_2 \in \Lambda^{s_2} M \text{ için}$$

$$D(\theta_1 \wedge \theta_2) = D\theta_1 \wedge \pi^*(\theta_2) + (-1)^{s_1} \pi^*(\theta_1) \wedge D\theta_2$$

koşulları gerçekleşiyorsa bu D dönüşümüne r . dereceden π demeti boyunca bir derivasyon denir. (Saunders 1989)

Tanım 1.3.11.

$\forall f \in C^\infty(M) \cong \Lambda^0 M$ için $Df = 0$ olup, D 'ye π boyunca i . tipinden bir derivasyon denir. (Saunders 1989)

Tanım 1.2.12.

$D \circ d = (-1)^r d \circ D$ koşulunu sağlayan D derivasyonuna d^* tipinden r . dereceden π demeti boyunca bir derivasyon denir. (Saunders 1989)

Tanım 1.3.13. (Bivektör Alanları)

$\omega = \frac{1}{2} \omega^{\mu\nu} \partial_\mu \wedge \partial_\nu$ E manifoldu üzerinde her bivektör alanı

$$\omega^\# : T^*E \xrightarrow{E} TE$$

şeklinde bir lineer lifli morfizm tanımlar.

$$\omega^\#(\alpha) \stackrel{def}{=} -w(y) \lrcorner \alpha, \quad \alpha \in T_y^*E \quad (1.3.9)$$

$$\omega^\#(\alpha) = \omega^{\mu\nu}(y) \alpha_\mu \partial_\nu$$

$$\omega(y)(\alpha, \beta) = \omega^\#(\alpha) \lrcorner \beta \lrcorner \alpha, \quad y \in E, \quad \alpha, \beta \in T_y^*E$$

Eğer $\omega^\#$ lineer lifli morfizm y 'de r ranklı ise, w bivektör alanı $y \in E$ noktasında r ranklıdır.

Eğer bu morfizm $y \in E$ 'nin bütün noktalarında bir izomorfizm ise, ω non-dejeneredir. Bu gibi bir vektör alanı sadece çift manifoldlar üzerinde vardır. (Sardanashvily and Mangiarotti 1998)

Tanım 1.3.14. (2- Formlar)

Her 2-form ,

$$\Omega = \frac{1}{2} \Omega_{\mu\nu} du^\mu \wedge du^\nu ,$$

E manifoldu üzerinde,

$$\Omega^b : TE \rightarrow T^*E \quad (1.3.10)$$

$$\Omega^b(v) \stackrel{def}{=} -v \rfloor \Omega(y) \quad v \in T_y E$$

$$\Omega(v) = -\Omega_{\mu\nu}(y) v^\mu du^\nu$$

bir lineer lifli morfizm tanımlar.

Eğer $y \in E$ noktasında morfizm r ranklı ise, Ω 2-form r ranklıdır. Eğer $y \in E$ 'nin bütün noktalarında E 'nin rankı Ω 'nin rankına eşitse, Ω non-dejeneredir. (Sardanashvily and Mangiarotti 1998)

Tanım 1.3.15. (Lie Türevi)

Bir v vektör alanı boyunca ϕ dış formunun Lie türevi

$$L_v \phi = v \rfloor d\phi + d(v \rfloor \phi)$$

eşitliğiyle verilir. Eğer f fonksiyon ise,

$$L_v f = v(f) = v \rfloor df$$

olur.

$$L_v(\phi \wedge \sigma) = L_v \phi \wedge \sigma + \phi \wedge L_v \sigma$$

dır. (Sardanashvily and Mangiarotti 1998)

1.4. Konneksiyonlar

Tanım 1.4.1.

$E \rightarrow M$ lif demeti üzerinde bir konneksiyon $J^1E \rightarrow E$ afin jet demetinin bir global kesiti,

$$\Gamma : E \rightarrow J^1E$$

$$\Gamma = dx^{0i} \otimes \left(\frac{\partial}{\partial x^{0i}} + \Gamma_i^\alpha(x^{0\mu}, u^{0j}) \frac{\partial}{\partial u^{0\alpha}} \right)$$

olarak tanımlanır. (Sardanashvily and Mangiarotti 1998)

Tanım 1.4.2 (Konneksiyon)

$\forall \sigma \in \Lambda_0^1 \pi$ için $\Gamma \rfloor \sigma = \sigma$ şartını sağlayan bir $\Gamma \in \Lambda_0^1 \pi \otimes \chi(E)$ vektör değerli 1-formuna π demeti üzerinde bir *konneksiyon* denir.

Bu tanımdan sonra hemen herhangi $\sigma \in \Lambda^1 E$ için $\Gamma \rfloor \Gamma = \Gamma$ olduğundan

$$\Gamma \rfloor \Gamma \rfloor \sigma = \Gamma \rfloor \sigma$$

eşitliği yazılabilir.

Buradan $\Gamma_a, T_a E$ üzerinde bir projeksiyon operatörü olarak göz önüne alınır. Koordinatlarda, bir konneksiyon aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\Gamma = dx^{0i} \otimes \left(\frac{\partial}{\partial x^{0i}} + \Gamma_{0i}^{0\alpha} \frac{\partial}{\partial u^{0\alpha}} \right)$$

(Saunders 1989)

Örnek 1.4.1.

$\pi, (M \times R, pr_1, M)$ şeklinde trivial dönüşüme sahip olsun. (x^{0i}, t) koordinatlarıyla verilsin. t, R üzerinde $M \times R$ 'nin kanonik koordinatlarının pull-back dönüşümüdür. Bu durumda Γ konneksiyonunun koordinat temsili,

$$\Gamma = dx^{0i} \otimes \left(\frac{\partial}{\partial x^{0i}} + \Gamma_{0i} \frac{\partial}{\partial t} \right)$$

şekindedir. Γ konneksiyonu bir yatay 1-form

$$\Gamma \rfloor dt = \Gamma_{0i} dx^{0i}$$

oluşturur. (Saunders 1989)

Örnek 1.4.2.

$\pi, (t, q^{0\alpha})$ koordinatlarıyla tanımlı $(R \times F, pr_1, R)$ şeklinde bir trivial demet olsun.

Γ nin koordinat temsili :

$$\Gamma = dt \otimes \left(\frac{\partial}{\partial t} + \Gamma^{0\alpha} \frac{\partial}{\partial q^{0\alpha}} \right)$$

olur. Eğer $Y \in \chi_{\partial/\partial t}(\pi)$ vektör alanlarını dikkate alırsak bu durumda bu gibi herhangi Y vektör alanı, düşey vektör alanıyla farklılaşır, $Y \rfloor \Gamma$, Y 'nin özel seçimine bağlı olmadığı için. Bu durumda bu yapı $\frac{\partial}{\partial t} \rfloor \Gamma$ şeklinde yazılabilir, bu yolla $R \times F$ üzerinde;

$$\frac{\partial}{\partial t} + \Gamma^{0\alpha} \frac{\partial}{\partial q^{0\alpha}}$$

özel formların bir vektör alanı elde edilir. (Saunders 1989)

1.5. Birinci Mertebeden Jetler**Teorem 1.5.1.**

(E, π, M) bir demet, $p \in M$ olsun. Kabul edelim ki; $\phi(p) = \psi(p)$ olacak şekilde $\phi, \psi \in \Gamma_p(\pi)$ kesitleri verilsin. $(x^{0i}, u^{0\alpha})$ ve $(y^{0j}, v^{0\beta})$, $\phi(p)$ civarında iki koordinat sistemi ve

$$\left. \frac{\partial}{\partial x^{0i}} \right|_p [u^{0\alpha} \circ \phi] = \left. \frac{\partial}{\partial x^{0i}} \right|_p [u^{0\alpha} \circ \psi] \quad (1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq \alpha \leq n) \quad (1.5.1)$$

olsun. O zaman ;

$$\left. \frac{\partial}{\partial y^{0j}} \right|_p [v^{0\beta} \circ \phi] = \left. \frac{\partial}{\partial y^{0j}} \right|_p [v^{0\beta} \circ \psi] \quad (1 \leq j \leq m, \quad 1 \leq \beta \leq n) \quad (1.5.2)$$

dır.

Tanım 1.5.1

(E, π, M) bir demet ve $(x^{0i}, u^{0\alpha})$ demet koordinatları ve $p \in M$ olsun. $\phi, \psi \in \Gamma_p(\pi)$ lokal kesitleri için $\phi(p) = \psi(p)$ olmak üzere; $\phi(p)$ civarındaki $(x^{0i}, u^{0\alpha})$ koordinat sistemi göz önüne alındığında ;

$$\left. \frac{\partial \phi^{0\alpha}}{\partial x^{0i}} \right|_p = \left. \frac{\partial \psi^{0\alpha}}{\partial x^{0i}} \right|_p \quad (1 \leq i \leq m \quad 1 \leq \alpha \leq n) \quad (1.5.3)$$

ise bu bir denklik sınıfı olup, ϕ 'yi içeren denklik sınıflarına ϕ nin p noktasındaki 1 -jet'i denir. Ve $J_p^1 \phi$ ile gösterilir. (Aycan 2003)

Tanım 1.5.2. (1. Jet Manifold)

(E, π, M) bir demet olsun. Bu durumda,

$$J^1 \pi = \{J_p^1 \phi : p \in M, \phi \in \Gamma_p(\pi)\}$$

cümlesine π 'nin 1 . jet manifoldu denir. π_1 kaynak ve $\pi_{1,0}$ hedef projeksiyonları sırasıyla:

$$\begin{aligned} \pi_1 : J^1 \pi &\rightarrow M & \pi_{1,0} : J^1 \pi &\rightarrow E \\ J_p^1 \phi &\rightarrow p & J_p^1 \phi &\rightarrow \phi(p) \end{aligned} \quad (1.5.5)$$

şeklinde tanımlıdır. (Aycan 2003)

Tanım 1.5.3

(E, π, M) bir demet, (U, u) , $u = (x^{0i}, u^{0\alpha})$ olmak üzere E üzerinde adapte koordinat sistemi olsun. Bu durumda $J^1 \pi$ üzerinde (U^1, u^1) indirgenmiş koordinat sistemi

$$\begin{aligned} U^1 &= \{J_p^1 \phi : \phi(p) \in U\} \\ u^1 &= (x^{0i}, u^{0\alpha}, u_{0i}^{0\alpha}) \end{aligned} \quad (1.5.6)$$

ile tanımlı olup, burada

$$\begin{aligned} x^{0i}(J_p^1 \phi) &= x^{0i}(p) \\ u^{0\alpha}(J_p^1 \phi) &= u^{0\alpha}(\phi(p)) \end{aligned}$$

dır. Yeni mn adet $u_{0i}^{0\alpha} = U^1 \rightarrow R$ fonksiyonu,

$$u_{0i}^{0\alpha}(J_p^1 \phi) = \left. \frac{\partial \phi^{0\alpha}}{\partial x^{0i}} \right|_p$$

şeklinde tanımlıdır. (Aycan 2003)

Sonuç 1.5.1 :

(E, π, M) bir demet, $\{U_j, u_j\}_{j \in J}$, E üzerinde adapte harita koleksiyonu olsun. Bu durumda; $\left\{ \left(U_j^1, u_j^1 \right) \right\}_{j \in J}$ koleksiyonu $J_p^1 \pi$ üzerinde sonlu boyutlu C^∞ -bir atlasır. (Aycan 2003)

Tanım 1.5.4.

(E, π, M) bir demet, $W \subset M$ bir açık alt manifold ve $\phi \in \Gamma_W(\pi)$ ise; o zaman $p \in W$, $J^1 \phi : W \subset M \rightarrow J^1 \pi$ $J^1 \phi(p) = J_p^1 \phi$ ile tanımlı $J^1 \phi \in \Gamma_W(\pi_1)$ kesitine ϕ kesitinin *birinci prolongasyonu* denir. $J^1 \phi$ nin koordinat temsili $\left(\phi^{0\alpha}, \frac{\partial \phi^{0\alpha}}{\partial x^{0i}} \right)$ şeklindedir. (Aycan 2003)

Tanım 1.5.5.

$\mathfrak{h}_1 : (J^1(\pi \circ \tau_e) \rightarrow TJ^1 \pi$ dönüşümü

$$\mathfrak{h}_1(J_p^1 \gamma) = J_1(J_p^1(\gamma - \phi_* \circ X)) + (J^1 \phi)^*(X_p)$$

ile tanımlı olup, burada $\phi = \tau_E \circ \gamma$ ve $X : \pi_* \circ \gamma$ dir. (Aycan 2003)

Tanım 1.5.6

$\forall X \in \mathcal{X}(E)$ vektör alanı için

$$X_{J_p^1 \phi}^{p^1} = \mathfrak{h}_1(J_p^1(X \circ \phi)), \quad X \circ \phi \in \Gamma_W(\Pi \circ \tau_E)$$

eşitliği ile tanımlı $X^{p^1} \in \mathcal{X}(J^1 \pi)$ bir vektör alanı olup, buna X 'in *birinci prolongasyonu* denir.

Böylece X 'in koordinat temsili,

$$X = X^{0i} \frac{\partial}{\partial x^{0i}} + X^{0\alpha} \frac{\partial}{\partial u^{0\alpha}}$$

ise X^{p^1} in koordinat temsili

$$X^{p^1} = X^{0i} \frac{\partial}{\partial x^{0i}} + X^{0\alpha} \frac{\partial}{\partial u^{0\alpha}} + \left(\frac{dx^{0\alpha}}{dx^{0i}} - u_{0j}^{0\alpha} \frac{dx^{0j}}{dx^{0i}} \right) \frac{\partial}{\partial u_{0i}^{0\alpha}}$$

şeklindedir. (Aycan 2003)

2. BÖLÜM

MEKANİK SİSTEMLER

2. 1. Zamana Bağlı Mekanik Sistemler

Bu bölümde; Koordinatlarda ikinci dereceden diferansiyel denklemler ile koordinatlarda ve momentte birinci derece diferansiyel denklemlerce yönetilen mekanik sistemler ele alınacaktır.

Amaç, hareketli ve hareketsiz çatı dönüşümleri ve faz dönüşümleri içeren zamana bağlı dönüşümleri konu alan non-conservative mekanik sistemlerin tanımlanmasıdır.

Konneksiyonlar ve jet manifoldların uygulamasına dayanan, analitik mekanikte modern geometrik metotlar tanıtılacaktır.

Hamilton yapıların zamandan bağımsız conservative mekaniklerinin uygun Hamilton formülünü sağlamak için simplektik teknik iyi bilinmelidir. Örneğin, M konfigürasyon uzayının, T^*M kotanjant demeti momentum faz uzayı olan bir mekanik sistemdir. Bu lif demeti, $(x^{0i}, p_{0i} = x_{1i})$ holonomik koordinatlarıyla verilir.

Bu sistemin \mathcal{H} Hamiltonianı T^*M faz uzayı üzerinde reel fonksiyondur. Zamana bağlı mekaniklerin genel formülü :

M bir manifold, R zaman eksenini olmak üzere:

$$E = R \times M \tag{2.1.1}$$

bölünmesini verir.

$R \times TM$, hız faz uzayı; $R \times T^*M$ momentum faz uzayıdır. \mathcal{H} Hamiltonianı $R \times T^*M$ 'de bir reel fonksiyondur. $M = R$ iken konfigürasyon uzayı $\pi : E \rightarrow R$ lifli manifoldu olup, $(t, u^{0\alpha})$ koordinatı ile verilir. $R, \partial t$ standart vektör alanı ve dt standart 1-formu ile ifade edilir.

Şu ana kadar mekanik sistemlerde kullanılan yöntemler momentum faz uzayında yeterli olmadığı için bu çalışmada özel alan teorisi olarak; non-relativistik zamana bağlı mekanikler kullanılacaktır. Burada, R zaman ekseninde, konfigürasyon uzayı bir lifli manifolddur.

Alan teorisinin geometrik formülü, $E \rightarrow M$ lifli manifoldunun kesitleri ile klasik alanların tanınmasına dayanır. Jet manifoldlar, Langrangian alan teorisi için uygun matematiksel dili verir.

E üzerinde momentum bir Legendre demeti,

$$\Pi = V^* E \otimes (\wedge^{m-1} T^* M) \quad (m = \text{boy}M) \quad (2.1.2)$$

iken hız faz uzayı, $E \rightarrow M$ 'in kesitlerinin $J^1 E$ birinci dereceden jet manifoldudur.

Non-relativistik zamana bağlı mekaniklerin hız faz uzayı $E \rightarrow R$ lifli manifoldunun kesitlerinin $J^1 E$ 1. jet manifoldudur. Bu manifold $(t, u^{0\alpha}, u_i^{0\alpha})$ adapte koordinat ile verilir.

$M = R$ iken non-relativistik zamana bağlı mekaniklerin momentum faz uzayı (2.1.2) Legendre demetidir. Bu faz uzayı $\Pi = V^* E$ düşey kotanjant demetine izomorfiktir. $((t, u^{0\alpha}, p_{0\alpha} = u_{i\alpha}))$ holonomik koordinatları ile verilir. $\Pi = V^* E$ almakla, yapılan kabul Langrange karşılıklara sahip Hamilton sistemlerine sınırlanacaktır.

$$\lambda : J^1 E \xrightarrow{E} TE \quad (\text{kanonik imbedding}) \quad (2.1.3)$$

$$\lambda = \partial_t + u_i^{0\alpha} \partial_{0\alpha}$$

Bu dönüşüm zamana bağlı mekaniklerin formülünde önemli rol oynar. $J^1 E$ manifoldunu bir mekanik sistemin hız faz uzayı olarak ele almamıza imkan sağlar. Bu dönüşüm sayesinde $E \rightarrow R$ lifli manifoldu üzerinde her Γ konneksiyonu, R üzerinde ∂_t standart vektör alanlarının yatay lifti olan, E üzerinde hiçbir yerde sıfır olmayan vektör alanı ile özdeşleştirilebilirler.

$$\Gamma = E \rightarrow J^1 E \subset TE \quad (2.1.4)$$

$$\Gamma = \partial_t + \Gamma^{0\alpha} \partial_{0\alpha}$$

Bu konneksiyon E konfigürasyon uzayının her noktasında bir tanjant vektör kurar. O noktadaki tanjant vektörü de hız vektörünü temsil eder. Bu da bize birinci jetleri verir. Jet formülü jet demetlerin kesitleri ile temsil edilen lineer olmayan konneksiyonları konu olarak ele alan diferansiyel geometrinin çağdaş dilini verir.

Sadece jet uzayları, konneksiyonlar, Langrangian ve Hamiltonian denklemleri eş zamanlı olarak işlenmesine imkan verir. Γ zamana bağlı mekaniklerin konfigürasyon uzayı üzerinde bir referans çatı tanımlar. Hız faz uzayı üzerinde holonomik konneksiyonlar, non-relativistik dinamik denklem belirler. Hamilton zamana bağlı mekanikleri, geodezikleri Hamilton denklemlerinin çözümleri olan Hamilton konneksiyonlarını konu olarak ele alır. Bir referans çatının varlığı, konneksiyon terimleri içinde ifade edilen, zamana bağlı mekaniklerin ana özelliğidir. Özellikle her referans çatı bir enerji fonksiyonu tanımlar. (Sardanashvily and Mangiarotti 1998)

Tanım 2.1.1.

$E \rightarrow R$ zamana bağlı mekaniklerin konfigürasyon uzayı, bir M lifi ile bir lif demeti olarak kabul edilir ve *konfigürasyon demeti* olarak adlandırılır.

$E = R \times M$ ye diffeomorfik olmasına rağmen, $E = R \times M$ kanonik olarak özdeş olmayabilir. Onun

$$\psi : E \cong R \times M,$$

farklı trivializasyonları, $E \rightarrow R$ liflenmeleri, hepsi için tek iken, $E \rightarrow M$ liflenmelerinde birbirinden farklılık gösterebilir.

Bu trivializasyonun,

$$\text{Hız faz uzayı} \quad : \quad J^1 E \cong R \times TM$$

$$\text{Momentum faz uzayı} \quad : \quad V^* E \cong R \times T^* M \quad \text{dır.}$$

Conservative mekaniğin iyi bilinen bir çok kavramı, zamana bağlı mekanikler için geçerli olmaktan yoksundur ve alan teorisinin metodlarını izlemelidir. Fakat alan teorisi ve zamana bağlı mekanikler arasında esaslı farklılık vardır. Alan teoride gauge potansiyellerine zıt olarak, zamana bağlı mekaniklerin konfigürasyon uzayı üzerinde

konneksiyonlar, eğrilikleri benzer biçimde ortadan kayboldukları için dinamik değişken olmaktan yoksundur. Alan teorisinin geometrik metotlarını izleyerek, zamana bağlı mekaniklerin çatı-kovaryant formülü elde edilebilir. Gauge alan teorisine benzetme yolu ile, gauge zamana bağlı mekanikleri hakkında konuşulabilir. (Sardanashvily and Mangiarotti 1998)

2.2. Poisson Manifolrlarının Geometrisi

Tanım 2.2.1. (Jakobi Manifolrları)

E , r -boyutlu ($r = m+n$) ($u^{0\alpha}$) koordinatları ile verilen bir manifold olsun. E manifoldu üzerinde

$$\Lambda^0 E \times \Lambda^0 E \ni (f, g) \rightarrow \{f, g\} \in \Lambda^0 E$$

bilineer dönüşüm aşağıdaki şartları sağlıyorsa E manifolduna *Jakobi Manifoldu* denir.

$$(A1) \{g, f\} = -\{f, g\} \quad (\text{ters simetri})$$

$$(A2) \{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0 \quad (\text{Jacobi özdeşliği})$$

$$(A3) \{f, g\} \text{ 'nin tanım kümesi } f \text{ ve } g \text{ 'nin tanım kümelerini içerir.}$$

$\Lambda^0 E$, E manifoldu üzerine reel fonksiyonların vektör uzayıdır. (Sardanashvily and Mangiarotti 1998)

Teorem 2.2.1

E manifoldu üzerinde her Jakobi braketi aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\{f, g\} = \omega(df, dg) + u \lrcorner (fdg - gdf) \quad u \in \chi(E) \quad \omega \in \Lambda^1 E \quad (2.2.1)$$

$$[u, \omega] = 0, \quad [\omega, \omega] = 2u \wedge \omega \quad (2.2.2)$$

Örnek 2.2.1

(2.2.1) de $u=0$ ise $\{f, g\} = \omega(df + dg)$ poisson braketidir ω bivektör alanı,

$$[\omega, \omega] = \omega^{\mu\alpha_1} \partial_\mu \omega^{\alpha_2\alpha_3} \partial_{\alpha_1} \wedge \partial_{\alpha_2} \wedge \partial_{\alpha_3} = 0$$

şartını sağlıyorsa ω , poisson bivektör alanıdır.

Tanım 2.2.2.

(E; ω, u) bir Jakobi manifoldu üzerinde verilen $f \in \Lambda^0 E$ fonksiyonu için,

$$\mathcal{G}_f \stackrel{def}{=} \omega^\#(df) + fu \quad (2.2.3)$$

vektör alanına f fonksiyonu için *Hamiltonian vektör alanı* denir. Böylece;

$$[\mathcal{G}_f, \mathcal{G}_g] = \mathcal{G}_{\{f, g\}}$$

dır. (Sardanashvily and Mangiarotti 1998)

Tanım 2.2.3.(Poisson Yapısı)

E Manifoldu üzerinde $\omega = \frac{1}{2} \omega^{\mu\nu} \partial_\mu \wedge \partial_\nu$ bivektör alanının,

$$\{f, g\} = \omega(df, dg) = \omega^{\mu\nu} \partial_\mu f \partial_\nu g \quad (2.2.4)$$

şeklindeki poisson yapısını (poisson braketi) tanımlaması için gerek ve yeter şart

$$[\omega, \omega] = 0, \quad \omega^{\mu\alpha_1} \partial_\mu \omega^{\alpha_2 \alpha_3} + \omega^{\mu\alpha_2} \partial_\mu \omega^{\alpha_3 \alpha_1} + \omega^{\mu\alpha_3} \partial_\mu \omega^{\alpha_1 \alpha_2} = 0$$

olmasıdır.

Poisson braketi (A1, A3) şartlarını ve $\{h, fg\} = \{h, f\}g + f\{h, g\}$ (Leibniz kuralı) kuralını da gerçekler. Bu koşulları sağlayan E manifolduna, *poisson manifoldu* denir. (Sardanashvily and Mangiarotti 1998)

Tanım 2.2.4.(Hamiltonian vektör alanı)

(E, ω) poisson manifoldu üzerinde f reel fonksiyonu verildiğinde $\omega^\#$ morfizmiyle df dış diferansiyelinin görüntüsü,

$$\mathcal{G}_f = \omega^\#(df)$$

$$\mathcal{G}_f = \omega^{\mu\nu} \partial_\mu f \partial_\nu \quad (2.2.5)$$

olup, ω poisson yapısına karşılık gelen f fonksiyonu için *Hamiltonian vektör alanı* olarak adlandırılır.

Her Hamiltonian vektör alanının aynı zamanda kanonik vektör alanı olduğu kolayca gözlemlenir. O halde u vektör alanı, poisson manifoldu üzerinde olmak üzere,

$$L_u \omega = [u, \omega] = 0 \quad (2.2.6)$$

ise; böyle bir vektör alanına *kanoniktir* denir. (Sardanashvily and Mangiarotti 1998)

Tanım 2.2.5.

Bir poisson manifoldunun herhangi y noktası için E' nin bir komşuluğunda

$$(q^1, \dots, q^m, p_1, \dots, p_m, u^{2m+1}, \dots, u^r) \quad (2.2.7)$$

koordinatlarına *kanonik koordinatlar* denir. Bu durumda, kanonik koordinatlarda bir f fonksiyonu için *Hamiltonian vektör alanı*,

$$\mathcal{G}_f = \partial^{0\alpha} f \partial_{0\alpha} - \partial_{0\alpha} f \partial^{0\alpha} \quad (2.2.8)$$

olur. (Sardanashvily and Mangiarotti 1998)

2.3. Simplektik Yapı**Tanım 2.3.1.**

Non-dejenere poisson manifoldları simplektik manifoldlardır. Eğer Ω kapalı ise; yani $d\Omega = 0$, ise; o zaman E manifoldu üzerinde non-dejenere Ω dış 2-formına *simplektiktir* denir. Bir simplektik form ile donatılan bir manifold, bir *simplektik manifold* olarak adlandırılır. Her simplektik manifold (E, Ω) , $2r$ -boyutludur, yönlendirilebilirdir ve E üzerinde $\nu = \frac{1}{r!} \wedge^r \Omega$ hacim elementidir. (Sardanashvily and Mangiarotti 1998)

Örnek 2.3.1 .

$E, (u^{0\alpha})$ koordinatlarıyla verilen bir manifold ve $(u^{0\alpha}, p_{0\alpha} = u_{1\alpha})$ holonomik koordinatlarıyla donatılan T^*E , momentum faz uzayı olsun. Bu durumda; kanonik Liouville formu;

$$\theta = p_{0\alpha} du^{0\alpha} \quad (2.3.1)$$

ve kanonik simplektik formu,

$$d\theta = \Omega = dp_{0\alpha} \wedge du^{0\alpha} \quad (2.3.2)$$

olur.

Zamana bağlı mekanikte, $R \times T^*E$ momentum faz uzayı, T^*E 'nin kanonik simplektik formun pull-back dönüşümü olan $pr_2^* \Omega = dp_{0\alpha} \wedge du^{0\alpha}$ presimplektik formu ile verilir. $pr_2^* \Omega$ kanonik değildir. (Sardanashvily and Mangiarotti 1998)

Örnek 2.3.2.

Non-relativistik zamana bağlı mekaniklerin momentum faz uzayı olan V^*E düşey kotanjan demetinin holonomik koordinatları $(t, u^{0\alpha}, p_{0\alpha} = u_{1\alpha})$ olmak üzere, *kanonik 3-formu*:

$$\Omega = dp_{0\alpha} \wedge du^{0\alpha} \wedge dt \quad (2.3.3)$$

ile verilir. Bu form V^*E faz uzayı üzerinde *kanonik dejenere poisson yapısı* tanımlar.

Örnek 2.3.3.

Zamana bağlı mekaniklerin homojen Legendre demeti olan $(t, u^{0\alpha}, p, p_{0\alpha})$ holonomik koordinatlarla verilen T^*E kotanjan demetinin, *kanonik Liouville formu* :

$$\Xi = pdt + p_{0\alpha} du^{0\alpha} \quad (2.3.4)$$

Kanonik simplektik formu ;

$$d\Xi = dp \wedge dt + dp_{0\alpha} \wedge du^{0\alpha} \quad (2.3.5)$$

ile temsil edilir.

T^*E üzerindeki fonksiyonların $C^\infty(T^*E)$ uzayı üzerinde yöndeş poisson braketi :

$$\{f, g\} = \partial^p f \partial_t g - \partial^p g \partial_t f + \partial^{0\alpha} f \partial_{0\alpha} g - \partial^{0\alpha} g \partial_{0\alpha} f \quad (2.3.6)$$

olur. (Sardanashvily and Mangiarotti 1998)

Örnek 2.3.4.

V^*E üzerindeki *kanonik poisson yapısı* :

$$\{f, g\}_v = \partial^{0\alpha} f \partial_{0\alpha} g - \partial^{0\alpha} g \partial_{0\alpha} f \quad (2.3.7)$$

olur.

V^*E üzerindeki *poisson bivektörü*:

$$\omega(df, dg) = \{f, g\}_v \quad (2.3.8)$$

olur. $V^*E \rightarrow R$ liflenmesine bağlı olarak düşeydir. Ve

$$\omega^{0\alpha 0j} = 0 \quad \omega_{0\alpha}^{0j} = 0 \quad \omega^{0\alpha}_{0j} = 1$$

olarak okunur.

V^*E üzerinde bir f fonksiyonunun \mathcal{G}_f Hamiltonian vektör alanı,

$$\{f, g\}_v = \mathcal{G}_f \lrcorner dg \quad \forall g \in (V * E) \quad (2.3.9)$$

bağıntısıyla tanımlanır.

$$\mathcal{G}_f = \partial^{0\alpha} f \partial_{0\alpha} - \partial_{0\alpha} f \partial^{0\alpha} \quad (2.3.10)$$

düşey vektör alanıdır. (Sardanashvily and Mangiarotti 1998)

3. BÖLÜM

GAUGE TEORİSİ

3.1. Gauge Transformasyonu

Tanım 3.1.1.

$\pi : E \rightarrow M$ ve $\pi' : E' \rightarrow M' \in C^\infty$ - dönüşümleri örten submersion olmak üzere, eğer $\Phi : E \rightarrow E'$ ve $f : M \rightarrow M'$ dönüşümleri için $\pi' \circ \Phi = f \circ \pi$ ise; o zaman (Φ, f) çiftine π den π' ye bir demet morfizmi denir. f ye de Φ' nin projeksiyonu denir. (Φ, f) demet morfizmi ise :

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\Phi} & E' \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ M & \xrightarrow{f} & M' \end{array} \quad (3.1.1)$$

diyagramı değişmeli yani $f \circ \pi = \pi' \circ \Phi$ olup, $(\Phi, f) : (E, \pi, M) \rightarrow (E', \pi', M')$ biçiminde de gösterilir. Eğer; $f = id_M$ ise; bu durumda :

$$\Phi : E \rightarrow E'$$

M üzerinde bir *lifli morfizm* olarak adlandırılır. (Sardanashvily and Mangiarotti 1998)

Tanım 3.1.2.

Lif demetlerinin bir izomorfizmi, Φ bir diffeomorfizm olduğundan, (3.1.1) lifli morfizmdir. $E \rightarrow M$ lif demetinin kendi üzerine lifli morfizmi [İzomorfizmi], endomorfizm [otomorfizm] olarak adlandırılır. Id_M üzerinde bir otomorfizme *düşey otomorfizm* denir. (Sardanashvily and Mangiarotti 1998)

Fiziksel terminolojiyi izleyerek, lif demetlerinin otomorfizmi *gauge transformasyonları* olarak adlandırılır. Bu tanım biraz daha açılırsa;

$$\gamma : \mathcal{U} \rightarrow G \quad (3.1.2)$$

dönüşümü, yani lokal gauge transformasyonları, çarpma ile tanımlanan sonsuz boyutlu bir grup formundadır, G gauge grubu olarak adlandırılır. ${}^{\mathcal{U}}G$ ile gösteririz. (sadece G olarak da adlandırılır.)

Bir sonsuz küçük gauge transformasyonu

$$\tilde{\lambda} : \mathcal{U} \rightarrow \mathfrak{g} \quad (3.1.3)$$

iken,

$$\gamma = e^{\tilde{\lambda}} = 1 + \tilde{\lambda} + \dots \quad (3.1.4)$$

olarak yazılır. Bu $\tilde{\lambda}$ dönüşümleri sonsuz boyutlu Lie cebiri oluşturur. Bu yüzden *gauge cebiri* olarak adlandırılır, ${}^{\mathcal{U}}\mathfrak{g}$ olarak gösterilir. (Göckeller, and Schücker 1987)

3.2. Gauge Alanları ve Gauge Freedom

Tanım 3.2.1.

Ω presimplektik 2 -formunun çekirdeği ,

$$\text{Çek}\Omega \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{y \in E} \{v \in T_y E : v \lrcorner u \lrcorner \Omega = 0, \forall u \in T_y E\}$$

olmak üzere; sıfır Hamiltonian için $(\Omega, 0)$ presimplektik Hamiltonian sistemlerin çözümleri olduğunu vurgulamak için $\text{Çek}\Omega \rightarrow E$ vektör demetinin kesitleri bazen *gauge alanları* olarak adlandırılır. Onlar fiziksel duruma katkıda bulunmaz, *gauge freedom* için sorumludurlar. . (Sardanashvily and Mangiarotti 1998)

Gauge alanı A , gauge grubun afin temsiline göre dönüşüm geçirir.

$$A' = \gamma A \gamma^{-1} + \gamma d\gamma^{-1} \quad (3.2.1)$$

olur. $\tilde{\lambda}$ sonsuz küçük gauge dönüşümü altında A 'nın davranışı;

$$A' - A = -[A, \tilde{\lambda}] - d\tilde{\lambda} = -D\tilde{\lambda} \quad (3.2.2)$$

yani; gauge cebirinin bir afin temsilcisi olarak verilir.

Alan uzunluğu ,

$$F = dA + \frac{1}{2}[A, F] \quad (3.2.3)$$

gauge grubunun lineer temsilcisine göre :

$$F' = \gamma F \gamma^{-1} \quad (3.2.4)$$

şeklinde dönüşüm geçirir. Sonsuz küçük boyutlu olarak;

$$F' - F = -[F, \lambda] \quad (3.2.5)$$

G'nin lineer temsilcilerini taşıyan vektör uzaylar içinde değer alan Φ p-formları için dış kovaryant türevi

$$D\Phi = d\Phi + A \wedge \Phi \quad (3.2.6)$$

şeklinde tanımlanır. $D\Phi$, Φ gibi dönüşüm geçirdiği için ,

$$D(\gamma\Phi) = \gamma D\Phi \quad (3.2.7)$$

olur. (Göckeller, and Schücker 1987)

Aynı zamanda fiziksel olarak ilginç presimplektik Hamiltonian sistemler vardır. Örnek relativistik mekanikte bir Hamiltonian sifıra eşit olduğu zaman. Bu durumda $\mathcal{C}ekdH = TE$ ve Hamiltonian denklemi $v \rfloor \Omega + d\mathcal{H}(y) = 0$, ve $T_y E$, E manifoldu üzerinde her yerde bir çözüme sahiptir.

Diğer pull-back yapı yukarıdaki bahsedilen gauge freedom ile ilişkilendirilir. E manifoldu üzerinde Ω sabit ranklı bir presimplektik form olsun. Ve karakteristik foliasyonu basit olsun yani lifleri (P, Ω_p) simplektik manifold üzerinde $\pi : E \rightarrow P$ lif demetinin lifleridir. Bu durumda Ω , bu liflenme ile P bazı üzerinde Ω_p simplektik formunun $\pi^* \Omega_p$ pull-back dönüşümüdür.

Bir \mathcal{H} Hamiltonianı, P üzerinde \mathcal{H}_P fonksiyonunun $\pi^* \mathcal{H}_P$ pull-back dönüşümü olsun. Bu durumda :

$$\mathcal{C}ek\Omega = VN \subset \mathcal{C}ekd\mathcal{H}$$

ve presimplektik Hamiltonian sistem (Ω, \mathcal{H}) , E manifoldu üzerinde her yerde çözümlere sahiptir. Gauge alanları, $E \rightarrow P$ lif demeti üzerinde düşey vektör alanları iken her hangi $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ çözümü P manifoldu üzerinde $(\Omega_p, \mathcal{H}_P)$ simplektik Hamilton sisteminin tek çözümü üzerine izdüşürülür. P, bir fiziksel faz uzayı olduğunda bu bir gauge invariant Hamilton sistemlerinin bir durumunu oluşturur. (Sardanashvily and Mangiarotti 1998)

3.3.Gauge Cebir Demeti

Tanım 3.3.1.

M bir diferansiyellenebilir manifold, G lie grubu, $\pi_p : P \rightarrow M$ projeksiyonu ile M üzerinde P bir lifli manifold olmak üzere; P, total uzay, X taban uzayı ve G bir Yapı grubu olsun. Bu durumda; P üzerinde G nin sağ hareketi için;

$$(i) \quad \pi_p(pg) = \pi(g), \quad p \in P \text{ ve } g \in G$$

(ii) P lokal olarak trivialdir. Yani; her $p \in M$ için M'in U_α komşuluğu için,

$$\Psi_\alpha^p : \pi_p^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times G \text{ diffeomorfizmi vardır.}$$

şartları sağlanıyorsa; $P(M, G, \pi)$ üçlüsüne M üzerinde bir *asli demet* denir.

$$\Psi_\alpha^p(p) = (\pi(p), \varphi(p)) \text{ formunda olup, burada } \varphi,$$

$$\varphi : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow G$$

dönüşümü :

$$\varphi(pg) = (\varphi(p)) \quad g \in G, \quad p \in \pi^{-1}(U_\alpha)$$

şeklinde tanımlanır. . (Sardanashvily and Mangiarotti 1998)

Tanım 3.3.2.

P üzerinde; R_g ile G ' nin sağda kendi üzerindeki hareketi;

$$R_G : P \times_M G \rightarrow P$$

$$R_g : p \rightarrow pg \quad p \in P, \quad g \in G$$

(3.3.1)

ile tanımlı olup; buna G'nin bir *kanonik serbest geçiş hareketi* denir.

Bir $P \rightarrow M$ asli demetin kanonik trivial bölünmesi,

$$\alpha : VP \cong P \times g_l$$

olsun. Burada g_l bir sol Lie cebirdir.

TR_g tanjant dönüşümüyle, $TP \rightarrow P$ tanjant demeti ve $VP \rightarrow P$ düşey tanjant demetinin bölünmesini alarak; M üzerinde,

$$T_G P = TP/G \text{ ve } V_G P = VP/G \quad (3.3.2)$$

vektör demetlerini elde edilir.

$T_G P \rightarrow M$ 'nin kesitleri, P üzerinde G invariant vektör alanları, $V_G P \rightarrow M$ in kesitleri P üzerinde G -invariant düşey vektör alanlarıdır. Bu durumda $V_G P \rightarrow M$ in tipik lifi G grubu üzerinde sağ invariant vektör alanlarının \mathfrak{g}_r sağ Lie cebiridir.

P üzerinde vektör alanlarının Lie braketi (3.3.2) bölünmelerine gider ve $V_G P \rightarrow M$ ve $T_G P \rightarrow M$ vektör demetlerinin kesitlerinin Lie braketini tanımlar. $V_G P \rightarrow M$, Lie cebirlerinin lif demeti olup lifleri G grubunun \mathfrak{g}_r sağ Lie cebirine izomorfiktir. Bu demet, gauge teori terminolojisinde *gauge cebir demeti* olarak adlandırılır. (Sardanashvily and Mangiarotti 1998)

Örnek 3.3.1.

$P = M \times G$ trivial olduğu zaman, $V_G P = M \times TG / G \cong M \times \mathfrak{g}_r$ dir.

Örnek 3.3.2.

P 'nin lokal demet bölünmesi verilsin. $T_G P$ ve $V_G P$ nin yöndeş lokal demet bölünmeleri vardır. \mathfrak{g}_r Lie cebiri için $\{\varepsilon_p\}$ bazları verilsin. $T_G P \rightarrow M$ lif demeti için $\{\partial_{0i}, \varepsilon_p\}$ lokal lif bazları ve $V_G P \rightarrow M$ lif demeti için $\{\varepsilon_p\}$ bazı elde edilir. Eğer;

$$\begin{aligned} \xi, \eta : M &\rightarrow T_G P \\ \xi &= \xi^{0i} \partial_{0i} + \xi^p \varepsilon_p, \quad \eta = \eta^\mu \partial_\mu + \eta \varepsilon_q \end{aligned}$$

kesitler ise, braketlerinin koordinat ifadeleri;

$$[\xi, \eta] = (\xi^\mu \partial_\mu \eta^{0i} - \eta^\mu \partial_\mu \xi^{0i}) \partial_{0i} + (\xi^{0i} \partial_{0i} \eta^r - \eta^{0i} \partial_{0i} \xi^r + c_{pq}^r \xi^p \eta^q) \varepsilon_r$$

olarak hesaplanır.

3.4. Bir Asli Demetin Gauge Transformasyonu

Tanım 3.4.1.

$$\pi_p : P \rightarrow R$$

G Lie grubu ile bir asli demet verilsin. Bu durumda;

$$E = P \times M / G \tag{3.4.1}$$

ile tanımlı P bağı lif demeti için, P üzerinde G grup yapısının (3.3.1) kanonik hareketine bağı olarak; Φ düşey otomorfizmine P asli demetinin gauge transformasyonu denir. Bu durumda;

$$\Phi \circ r_g = r_g \circ \Phi, \quad \forall_g \in G \quad (3.4.2)$$

dir.

(3.4.2) özelliğinden dolayı, asli demetlerin Φ gauge transformasyonları, P birleştirilmiş lif demetinin gauge transformasyonunu verir.

$$\Phi_E : (P \times M)/G \rightarrow (\Phi(P) \times M)/G$$

dır.

Bundan olayı, E lif demeti $E = (P \times M)/G$ G gauge simetri grubuyla bir mekanik sistemin konfigürasyon uzayı olarak ele alınır.

Her $E \rightarrow R$ konfigürasyon demetinin gauge transformasyonu aşağıdaki gibi kanonik olarak, $V^*E \rightarrow R$ momentum faz uzayının holonomik düşey otomorfizmleri olan,

$$(u^{0\alpha}, p_{0\alpha}) \rightarrow (u'^{0\alpha}, p_{0\alpha}' = \frac{\partial u^{0j}}{\partial u'^{0\alpha}} p_{0j})$$

dönüşümünü üretir. Bunlar V^*E üzerinde kanonik poisson yapısı için kanonik otomorfizmlerdir.

Bir gauge transformasyonu $\gamma : \mathcal{U} \rightarrow G$ şeklinde bir dönüşümlüp, Konneksiyon üzerinde bir iyi tanımlı hareket tanımlarıdır. Bu gibi dönüşümlerin çarpımlarını aynı şekilde tanımlayarak G gauge grubuna ulaşıldı. Burada; gauge transformasyonları kavramını trivial olmayan demetlere genellemek istenecektir. Yani; konneksiyonu sadece lokal olarak; baz uzayı üzerinde \mathfrak{g} -değerli 1-form yardımıyla tanımlandığı bir duruma genellenecektir.

G yapı grubuyla (P, M, π) asli demeti için lokal trivializasyonlar,

$$\sigma_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \rightarrow \pi^{-1}(\mathcal{U}_\alpha) \quad (3.4.3)$$

lokal kesitlerin bir ailesini belirler.

Burada :

$$g_{s\alpha} : \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_s \rightarrow G \quad (3.4.4)$$

geçişli fonksiyonlarıyla :

$$\sigma_\alpha(x) = \sigma_s(x)g_{s\alpha}(x), \quad x \in \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_s \quad (3.4.5)$$

şeklinde tanımlanır.

P üzerinde bir \mathcal{A} konneksiyonu, \mathcal{U}_α trivializing komşuluğu üzerinde

$$A_\alpha = \sigma_\alpha^* \mathcal{A}$$

1-formları ile temsil edilebilir. G üzerinde ζ Maurer-Cartan denklemi yardımıyla A_α ve A_s arasındaki bağıntı;

$$A_{\alpha,x} = Ad(g_{s\alpha}^{-1}(x))A_{s,x} + (g_{s\alpha}^* \zeta)_x \quad (3.4.6)$$

olarak yazılır.

$\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_s$ üzerinde lokal potansiyeller A_α ve A_s , gauge transformasyonları ile ilişkilendirilir. Bununla birlikte, bu dönüşümler global olarak tanımlı dönüşümleri ortaya çıkaramaz. Daha doğrusu onlar A_α lokal potansiyelleri için uyumlu olarak görülür. (Göckeller, and Schücker 1987)

Problem 3.4.1.

Eğer $\gamma_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \rightarrow G$ ile σ_α lokal kesitleri yeni σ'_α ile yer değiştirirse;

$$\sigma'_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \rightarrow \pi^{-1}(\mathcal{U}_\alpha)$$

$$x \mapsto \sigma'_\alpha(x) = \sigma_\alpha(x)\gamma_\alpha^{-1}(x) \quad (3.4.7)$$

$A'_\alpha = \sigma'^*_\alpha \mathcal{A}$ yeni 1-formları elde edilir. A'_α , \mathcal{U}_α üzerinde temsil edilen bir konneksiyon olup;

$$A'_{\alpha,x} = Ad(\gamma_\alpha(x))A_{\alpha,x} + (\gamma_\alpha^{-1})^* \zeta|_x \quad (3.4.8)$$

bağıntısı yazılır.

Elbette A'_α (3.4.6.)' ya benzer şartları sağlar.

$$A'_{\alpha,x} = Ad(g'^{-1}_{s\alpha}(x))A'_{s,x} + (g'^*_s \zeta)_x \quad (3.4.9)$$

$g'_{s\alpha}, \sigma'_\alpha$ kesitleri ile tanımlı, lokal trivializasyonlara ait geçiş fonksiyonlarıdır.

Bu yeni geçiş fonksiyonları;

$$\begin{aligned}\sigma'_\alpha(x) &= \sigma_\alpha(x)\gamma_\alpha^{-1}(x) = \sigma_s(x)g_{s\alpha}(x)\gamma_\alpha^{-1}(x) \\ &= \sigma'_s(x)\gamma_s(x)g_{s\alpha}(x)\gamma_\alpha^{-1}(x) \\ &= \sigma'_s(x)g'_{s\alpha}(x)\end{aligned}$$

şeklinde kolayca hesaplanır; yani:

$$g'_{s\alpha}(x) = \gamma_s(x)g_{s\alpha}(x)\gamma_\alpha^{-1}(x), \quad x \in \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_s \quad (3.4.10)$$

dır.

A_α dan A'_α ya süren (3.4.8), transformasyonu aynı zamanda bütün \mathcal{U}_α üzerinde tanımlanır. Fakat global olarak; tanımlı dönüşüm elde etmek için γ_α ' belirlenmelidir; yani $\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_s$ üzerinde γ_α dan γ_s ye bir dönüşüm ifade edilmelidir. Bunun için aşağıdaki işlemler takip edilmelidir.

1. Adım: A'_α lokal gauge potansiyelleri arasında uyuma durumları orijinal potansiyelleri ile temsil edilen A_α lara özdeştir. Eğer ;

$$g'_{s\alpha} = g_{s\alpha} \quad (3.4.11)$$

ise; yani :

$$\begin{aligned}\gamma_\alpha(x) &= g_{s\alpha}^{-1}(x) \gamma_s(x) g_{s\alpha}(x) \\ &= g_{\alpha s}(x) \gamma_s(x) g_{\alpha s}^{-1}(x)\end{aligned} \quad (3.4.12)$$

(3.4.11) şartı $\{A_\alpha\}$ 1-formlarının ailesinden $\{A'_\alpha\}$ yeni ailesine ulaştırın dönüşümün global obje olmasını sağlar.

2. Adım: G-değerli fonksiyonlardan dolayı γ_α , P'ye birleştirilmiş bir B demetinin kesitini tanımlar. Bu birleştirilmiş demet standart G life sahiptir ve standart lif üzerinde G yapı grubunu ρ^B hareketi;

$$\rho_h^B g = hgh^{-1}, \quad g, h \in G$$

iç otomorfizmi ile verilir.

B ' nin bir asli demet olmadığını görülür. Çünkü yapı grubu standart lif demeti üzerinde sol dönüşüm ile temsil edilemez. Bunun ötesinde; B trivial olmasa da global kesitleri kabul eder.

3. Adım: Daha fazla ilerlemek için bakış açısı değiştirilirse; Şimdi \mathcal{A}' ' yı sabit tutup ve trivial kesitlerin değişimi altında A_α lokal potansiyellerin varyasyonu üzerinde çalışılırsa; aynı zaman da devamında da A_α sabitlenirse $A_\alpha, \mathcal{A}'_\alpha$ şekline dönüşür.

$$A_\alpha = \sigma_\alpha^* \mathcal{A} = \sigma_\alpha' * \mathcal{A}' \quad (3.4.13)$$

4. Adım: (3.4.13)' yi sağlayan P üzerinde konneksiyon 1-formları \mathcal{A} ve \mathcal{A}' belirler. Bu durumda; \mathcal{A} ve \mathcal{A}' arasındaki ilişki incelenirse; B'nin kesiti,

$$\Gamma(pg) = g^{-1}\Gamma(p)g \quad , \quad g \in G, p \in P \quad (3.4.14)$$

sağlayan $\Gamma : P \rightarrow G$ fonksiyonuna yöndeş $\gamma_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \rightarrow G$ yardımıyla lokal olarak temsil edilir ve γ_α fonksiyonları,

$$\gamma_\alpha = \Gamma \circ \sigma_\alpha \quad (3.4.15)$$

formülü ile yeniden elde edilebilir.

5. Adım:

$$f : P \rightarrow P$$

$$f(p) = p\Gamma(p) \quad , \quad p \in P \quad (3.4.16)$$

dönüşümünü tanımlanırsa; $g \in G$ için :

$$f(pg) = pg\Gamma(pg) = p\Gamma(p)g = f(p)g$$

olur. Yani :

$$f \circ \tilde{R}_g = \tilde{R}_g \circ f \quad (3.4.17)$$

olup, Bu yüzden $(f, id_G, id_M), (P, M, \pi)$ nin kendi üzerine demet izomorfizmidir, yani demet otomorfizmidir. f ile pull-back dönüşümü \mathcal{A} yı diğer 1-form konneksiyon üzerine dönüştürür.

$$f^* \mathcal{A} \Big|_p = Ad(\Gamma^{-1}(p)) \mathcal{A} \Big|_p + \Gamma^* \zeta \Big|_p \quad (3.4.18)$$

ve \mathcal{U}_α üzerindeki lokal potansiyeller için

$$\sigma_\alpha^* (f^* \mathcal{A}) \Big|_x = Ad(\gamma_\alpha^{-1}(x)) \sigma_\alpha^* \mathcal{A} \Big|_x + \gamma_\alpha^* \zeta \Big|_x \quad (3.4.19)$$

olur.

$$\sigma'_\alpha(x) = \sigma_\alpha(x)\gamma_\alpha^{-1}(x) \quad (3.4.20)$$

dönüşümü altında σ'_α lokal kesitleri için M üzerinde $f^*\mathcal{A}$ konneksiyonunun temsili

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha^*(f^*\mathcal{A})|_x &= Ad(\gamma_\alpha(x))\sigma_\alpha^*(f^*\mathcal{A})|_{x+(\gamma_\alpha^{-1})^*\zeta}|_x \\ &= Ad(\gamma_\alpha(x))Ad(\gamma_\alpha^{-1}(x))(\sigma_\alpha^*\mathcal{A})|_x + Ad(\gamma_\alpha(x))\gamma_\alpha^*\zeta|_x + (\gamma_\alpha^{-1})^*\zeta|_x \\ &= \sigma_\alpha^*\mathcal{A}|_x \end{aligned} \quad (3.4.21)$$

olarak bulunur. (3.4.13) ile kıyaslanırsa;

$$\mathcal{A} = f^*\mathcal{A} \quad (3.4.22)$$

bulunur.

(3.4.19) ün gösterdiği gibi oluşturulan lokal potansiyeller, gauge transformasyonu ile ilişkilendirildi. Bu nedenle; (f, id_G, id_M) formunun demet otomorfizmi aynı zamanda düşey otomorfizm olarak adlandırılan bir *gauge transformasyonudur*.

(3.4.14)' ü sağlayan P üzerinde Γ nın, G-değerli fonksiyonuyla eşdeğerli olarak da (3.4.15) dönüşümü ile lokal olarak verilen B birleştirilmiş demetinin kesiti ile anlatılabileceği görüldü.

6. Adım: $P = M \times G$ trivial demetinin durumu içinde $\gamma: M \rightarrow G$ bir gauge transformasyonunu temsil eden bir dönüşüm vardır, ve;

$$\Gamma(x, g) = g^{-1}\gamma(x)g \quad (3.4.23)$$

$$f(x, g) = (x, \gamma(x)g) \quad x \in X, \quad g \in G \quad (3.4.24)$$

olarak ifade edilir. (Göckeller, and Schücker 1987)

3.5. Gauge Potansiyelleri

Tanım 3.5.1.

$P \rightarrow M$ asli demeti üzerinde;

$$K: P \rightarrow J^1P$$

ile tanımlı bir K konneksiyonu, P üzerinde G grubunun (3.3.1) hareketi altında equvaryant ise; yani;

$$J^1 R_g \circ K = K \circ R_g, \quad \forall g \in G \quad (3.5.1)$$

ise; bu K'ya bir *asli konneksiyon* adı verilir. Bir K konneksiyonu

$$K = dx^{0\alpha} \otimes (\partial_{0\alpha} + K_{0\alpha}^{0q} \varepsilon_{0q}), \quad (3.5.2)$$

şeklinde tanımlanır. . (Sardanashvily and Mangiarotti 1998)

Tanım 3.5.2.

K_{0i}^{0p} , M üzerinde lokal fonksiyonlar olmak üzere, (3.3.2) den dolayı $P \rightarrow M$ asli demeti üzerinde asli konneksiyon ve $C \rightarrow M$ ($C = J^1 P / G \rightarrow M$) lif demetinin global kesitleri ile birlikte göz önüne alınırsa; bir demet olup, bu demete *asli konneksiyon demeti* olarak adlandırılır ve arasında 1:1 bir dönüşüm vardır. . (Sardanashvily and Mangiarotti 1998)

Tanım 3.5.3

$P \rightarrow M$ asli demeti üzerinde bir asli konneksiyon,

$$K = (du^{0\alpha} - K_{0i}^{0\alpha} dx^{0i}) \otimes \partial_{0\alpha}$$

ile temsil edilsin. Bu durumda,

$$\bar{K} = P \xrightarrow{K} T^* P \otimes VP \xrightarrow{id \otimes \alpha} T^* P \otimes g_{\mathcal{L}}$$

formuna P asli demeti üzerinde bilinen $g_{\mathcal{L}}$ - değerli konneksiyon formu denir. P'nin $(U_{\xi}, \mathcal{Y}_{\xi})$ lokal demet bölünmesi verilsin. Bu form, θ_p , P üzerinde kanonik $g_{\mathcal{L}}$ -değerli 1-form, $\{\varepsilon_p\}$, $g_{\mathcal{L}}$ nin bir bazı, K_{0i}^{0p} P üzerinde lokal fonksiyonlar olmak üzere ;

$$\bar{K}_{0i}^{0q}(pq)\varepsilon_q = \bar{K}_{0i}^{0q}(p) Adg^{-1}(\varepsilon_q)$$

için,

$$\bar{K} = \theta_p - K_{0i}^{0q} dx^{0i} \otimes (\varepsilon_q) \quad (3.5.3)$$

olur. (Sardanashvily and Mangiarotti 1998)

Tanım 3.5.4.

U_ξ üzerinde \bar{K} nin $y_\xi^* \bar{K}$ pullback dönüşümü, $K_{0i}^{0q} = \bar{K}_{0i}^{0q} \circ y_\xi$ M üzerinde lokal fonksiyonlar olmak üzere ;

$$K_\xi = -K_{0i}^{0q} dx^{0i} \otimes (\epsilon_q) \quad (3.5.4)$$

formuna iyi bilinen *lokal konneksiyon 1-form* denir. . (Sardanashvily and Mangiarotti 1998)

Tanım 3.5.5

Bundan başka P 'nin atlas demeti verilsin. $C \rightarrow M$ 'in her K kesiti için lokal fonksiyonlar,

$$K_{0i}^{0q} = a_{0i}^{0q} \circ K$$

(3.5.4) lokal konneksiyon 1- formun katsayıları olduğu için, C asli konneksiyonlarının demeti (x^{0i}, a_{0i}^{0q}) birleştirilmiş demet koordinatları ile donatılır. Gauge teorisinde bu katsayılara, *gauge potansiyelleri* denir. . (Sardanashvily and Mangiarotti 1998)

4.BÖLÜM

LANGRANGIEN ZAMANA BAĞLI MEKANİKLERİ

Bu bölüm koordinat ve hızların faz uzayı üzerinde zamana bağlı mekaniklerin formüllendirilmesine ayrılmıştır. Bu faz uzayı $E \rightarrow R$ bir konfigürasyon demetin J^1E birinci mertebeden jet manifoldudur. $E = R \times M$ direk çarpım durumu, kesin referans çatının seçimine uyar. Kısalık için, hareket denklemleri illede Langrange denklemleri olmamasına rağmen yukarıda bahsedilen formüllendirme langrangien zamana bağlı mekanikleri olarak adlandırılır.

Konneksiyonlar zamana bağlı mekaniklerin Langrangien formülleri içinde ana maddeleri verir. Bunlar $E \rightarrow R$ konfigürasyon demeti üzerinde konneksiyonlar olarak görülen referans çatıları $J^1E \rightarrow R$ jet demetleri üzerinde konneksiyonlar tarafından temsil edilen dinamik denklemler $J^1E \rightarrow E$ afin jet demetleri üzerinde dinamik konneksiyonlar, $TE \rightarrow E$ ve $TJ^1E \rightarrow J^1E$ tanjant demetleri üzerinde konneksiyonlar ve Langrange konneksiyonlarıdır. Misal olarak, E konfigürasyon uzayı üzerinde her non-relativistik dinamik denklemin, $TE \rightarrow E$ tanjant demeti üzerinde bazı konneksiyonlara bağlı bir geodezik denklem olarak ele alınabildiği gösterilebilir.

Zamana bağlı mekanikler içinde dinamik denklemler, güçler, ivmeler ve koruma kuralları ele alındığı zaman, referans çatılar mutlaka kapsanır.

Kütle metriği, Langrangien ve Newtonian sistemlerin, ters problemin ve holonomik ve non-holonomik sınırlı sistemlerin diğer ilgi çekici konusudur.

Bu bölüm boyunca π , taban bazı R , $t' = t + \text{const}$ geçişli fonksiyonun sahibi olan t kartezyen koordinatlarıyla parametrize edilirken

$$\pi : E \rightarrow R \quad (4.0.1)$$

tipik lifi m -boyutlu olan M manifoldunun bir lif demetidir. Uluslararası birim sisteminde, t nin fiziksel boyutu, $[\text{length}]$ uzunluğa eşittir. Bir $E \rightarrow R$ lif demeti $(t, u^{0\alpha})$ demet koordinatlarıyla ile verilir. Uygunluk için, $u^0 = t$ olduğu yerde aynı zamanda; $u^{0\alpha}$ kompakt notasyonu kullanılacaktır. . (Sardanashvily and Mangiarotti 1998)

4.1 R Üzerinde Lif Demetleri

Bu bölümde, R üzerinde lif demetlerinin en önemli özellikleri üzerinde çalışılacaktır.

1. Adım: (4.0.1) lif demetinin R bazı $t' = t + \text{const}$ koordinat dönüşümleri altında değişmez olan dt standart 1-form ve ∂_t standart vektör alanı ile verilir. Aynı dt sembolü, R üzerinde bir lif demeti üzerinde dt standart 1-formunun herhangi pull-back dönüşümünü temsil eder. R üzerinde f reel fonksiyonları ve $f\partial_t$ vektör alanları arasında birebir yöndeşlik olduğuna dikkat edelim. Benzer yöndeşlik ϕdt düşey yoğunlukları ve $E \rightarrow R$ lif demeti üzerinde ϕ reel fonksiyonları arasında yer alır.

Aynı zamanda, uluslararası birim sisteminin yapısı içinde bu gibi basitleştirmelerle ilgili dikkatli olunmalıdır. Misal olarak; ϕdt düşey yoğunluğunun ϕ katsayısı fiziksel boyut $[\text{length}]^{-1}$ a sahiptir, halbuki bir ϕ fonksiyonu fiziksel olarak boyutsuzdur.

2. Adım: Eğer R kendi üzerinde herhangi lif demetini temsil ediyorsa trivialdir. $E \rightarrow R$ bir lif iken,

$$\psi : E \cong R \times M \quad (4.1.1)$$

dönüşümünde farklı trivializasyonlar, $E \rightarrow M$ liflerinde birbirinden farklılık gösterir. Bir $J^1 E$, $E \rightarrow R$ (4.0.1) lif demetinin birinci mertebeden jet manifoldu, $(t, u^{0\alpha}, u_i^{0\alpha})$ adapte koordinatları ile verilir.

$E = R \times M \rightarrow R$ direkt çarpımı $(t, \bar{u}^{0\alpha})$ koordinatları ile verilsin. $u^{0\alpha}$ nin dönüşüm formülü t 'den bağımsız olduğu zaman $\bar{u}_i^{0\alpha}$ ve $\bar{u}^{1\alpha}$ koordinatlarının dönüşüm formülleriyle doğruluğu kanıtlanabilecek olan,

$$J^1(R \times M) = R \times TM \quad (4.1.2)$$

$$\bar{u}_i^{0\alpha} = \bar{u}^{1\alpha}$$

kanonik izomorfizmi vardır, (4.1.2) izomorfizmi sayesinde, her (4.1.1) trivializasyonu,

$$J^1 E \cong R \times TM \quad (4.1.3)$$

jet manifoldunun yöndeş trivializasyonunu verir.

3. Adım: $E \rightarrow R$ bir lif demetinin $J^1 E$ jet manifoldu verilsin, bu durumda kanonik imbedding,

$$\lambda : J^1 E \rightarrow TE$$

$$\lambda : (t, u^{0\alpha}, u_i^{0\alpha}) \rightarrow (t, u^{0\alpha}, i=1, u^{1\alpha} = u_i^{0\alpha}) \quad (4.1.4)$$

formunu alır. Kısalık için,

$$\lambda = d_t = \partial_t + u_i^{0\alpha} \partial_{0\alpha} \quad (4.1.5)$$

yazılır. d_t , total türev anlamındadır. Bundan sonra $J^1 E$ jet manifoldunu TE 'de onun görüntüsü ile temsil edilecektir.

Uyarı 4.1.1:

(4.1.4.) morfizmini şu şekilde de yazabiliriz:

$$\lambda = dt \otimes (\partial_t + u_i^{0\alpha} \partial_{0\alpha})$$

(4.1.4.) morfizmini kullanarak;

$$J^1 E \times_{T^* E} E \times R$$

$$(u_i^{0\alpha}, i, \dot{u}_{0\alpha}) \mapsto \lambda \left(idt + \dot{u}_{0\alpha} du^{0\alpha} \right) = \dot{t} + u_i^{0\alpha} \dot{u}_{0\alpha}$$

dönüşümü yazılabilir. $T^* E$ nin koordinatları $(t, u^{0\alpha}, i, \dot{u}_{0\alpha})$ olur.

4. Adım: $E \rightarrow R$ lif demeti üzerindeki konneksiyonlar, $E \rightarrow R$ üzerinde düşey vektör alanlarının vektör uzayı üzerinde modellenmiş bir afin uzay meydana getirir. Buna göre $E \rightarrow R$ üzerinde bir konneksiyon ile birleşen, kovaryant diferansiyel, $E \rightarrow R$ 'nin VE düşey tanjant demeti içinde değerlerini alır.

$$D_{\Gamma} : J^1 E \rightarrow VE$$

$$u^{1\alpha} \circ D_{\Gamma} = u_t^{0\alpha} - \Gamma^{\alpha} \quad (4.1.6)$$

$E \rightarrow R$ lif demeti üzerinde Γ konneksiyonu (flat) düzlemseldir. (Sardanashvily and Mangiarotti 1998)

4.2 Langrangien Sistemler

Zamana bağlı mekaniklerin bir $J^1 E$ hız faz uzayı, herhangi kanonik yapıyı kabul etmez. $J^1 E$ tek boyutlu bir manifold olduğunda, simplektik yapıya sahip değildir. Halbuki presimplektik ve Poisson yapıları sadece Langrangien sistemler için tanımlanır ve bir Lagrangien'e bağlı olur. Bir Langrangien sistem, hareketleri $J^1 E$ hız faz uzayı üzerinde bazı langrangien için Langrange denklemlerinin çözümleri olan bir mekanik sistemdir. Belli ki bir mekanik sistem Langrangien olmak zorunda değildir, mademki Langrange denklemleri dinamik denklemler olmak zorunda değildir. Bundan başka Langrange denklemleri değişmez anlamda diferansiyel denklemler olmayı başaramayabilir. Langrange formalizminin yapısında, Langrangien yapının yanında aynı zamanda Cartan ve Hamilton- De Donder denklemleri ile karşılaşılır. Bu denklemler birbirine denktir ve bir düzenli Langrangien durumunda Langrange denklemlerine denktir.

Tanım 4.2.1

Bir mekanik sistemin Langrangien'i

$$\mathcal{L} : J^1 E \rightarrow R$$

$$L = \mathcal{L} dt \quad (4.2.1)$$

$J^1 E$ hız faz uzayı üzerinde bir *yatay yoğunluk* (density) olarak tanımlanır. Öyleki eğer karıştırma tehlikesi olmazsa, \mathcal{L} bir *langrangien fonksiyon* yada basitçe bir *lagrangien* olarak adlandırılır. Uluslararası birim sistemine bağlı olarak, bir Langrangien (4.2.1.) fiziksel olarak boyutsuzdur. (Sardanashvily and Mangiarotti 1998)

Tanım 4.2.2.

$E \rightarrow R$ konfigürasyon demeti üzerinde;

$$\nu = \nu^i \partial_i + \nu^{0\alpha} \partial_{0\alpha}, \quad \mathcal{G}^i = 0,1 \quad (4.2.2.)$$

$$d_i = \partial_i + u_i^{0\alpha} \partial_{0\alpha} + u_{ii}^{0\alpha} \partial'_{0\alpha}$$

ile tanımlı vektör alanına bir *izdüşürülebilir vektör alanı* denir.

Dikkat edilirse; ν 'nun jet prolongasyonu;

$$\bar{\nu} = \nu^i \partial_i + \nu^{0\alpha} \partial_{0\alpha} + \partial_i \nu^{0\alpha} \partial'_i$$

$$d_i = \partial_i + u_i^{0\alpha} \partial_{0\alpha} + u_{ii}^{0\alpha} \partial'_i$$

olarak tanımlanır. (Sardanashvily and Mangiarotti 1998)

Tanım 4.2.3

$\nu: E \rightarrow R$ konfigürasyon demeti üzerinde izdüşürülebilir vektör alanı, ν ' nun jet prolongasyonu $\bar{\nu}$, olmak üzere;

$$L_{\bar{\nu}} L = (\bar{\nu} \rfloor dL) dt = (\nu^i \partial_i + \nu^{0\alpha} \partial_{0\alpha} + \partial_i \nu^{0\alpha} \partial'_i) L dt \quad (4.2.3)$$

eşitliğiyle tanımlı ifadeye $\bar{\nu}$, boyunca bir *Langrangien' in Lie türevi* adı verilir.

1. formül, varyasyonel problem gereğince (4.2.3) Lie türevinin;

$$\bar{\nu} \rfloor dL = (\nu^{0\alpha} - \nu^i u_i^{0\alpha}) \varepsilon_{0\alpha} + d_i (\nu \rfloor H_i) \quad (4.2.4)$$

kanonik düzenlemesini verir. Burada:

$$H_i = \hat{\nu}^* (dL) + L = \pi_{0\alpha} du^{0\alpha} - (\pi_{0\alpha} u_i^{0\alpha} - L) dt \quad (4.2.5)$$

Poincaré -Cartan form 'dur. Bu ifadeye; $\hat{\nu}^*: T^* J^1 E \rightarrow T^* J^1 E$ dönüşümü $\hat{\nu}$ düşey endomorfizminin transpozesidir :

$$\hat{\nu}^*(dt) = 0, \quad \hat{\nu}^*(du^{0\alpha}) = 0, \quad \hat{\nu}^*(du_i^{0\alpha}) = \theta^{0\alpha}, \quad \theta^{0\alpha} = du^{0\alpha} - u_i^{0\alpha} dt$$

Tanım 4.2.4.

L bir Langrangien fonksiyonu olmak üzere;

$$\varepsilon_L: J^2 E \rightarrow V^* E$$

$$\varepsilon_L = \varepsilon_{0\alpha} \bar{d}u^{0\alpha} = (\partial_{0\alpha} - d_i \partial'_{0\alpha}) L \bar{d}u^{0\alpha} \quad (4.2.6)$$

ile tanımlı *Euler- Langrange operatörü* denir. Bu operatör,

$$\varepsilon_L = (\partial_{0\alpha} - d_t \partial'_{0\alpha}) \mathcal{L} du^{0\alpha} \wedge dt$$

şeklinde de görülebilir. $\varepsilon_{0\alpha}$ katsayıları varyasyonel türevlerdir. Böylece; bu varyasyonel türevler için;

$$\pi_{0\alpha} = \partial'_{0\alpha} \mathcal{L}, \quad \pi_{j\alpha} = \partial'_j \partial'_{0\alpha} \mathcal{L}$$

notasyonu kullanılacaktır. (Sardanashvily and Mangiarotti 1998)

Tanım 4.2.5.

Euler-Langrange opeatörünün (4.2.6.) çekirdeği $\mathcal{C}ek\varepsilon_L \subset J^2E$, E üzerinde;

$$(\partial_{0\alpha} - d_t \partial'_{0\alpha}) \mathcal{L} = 0 \quad (4.2.7)$$

ile tanımlı bir 2. mertebeden diferansiyel denklem sistemi tanımlanır. Bu denklem sistemi *langrange denklemleri* olarak adlandırılır. Langrange denklemlerin çözümleri (4.2.7) de bulunan 2. mertebeden jet prolongasyonları \dot{c} olan $E \rightarrow R$ lif demetinin c lokal kesitleridir ve

$$\partial_{0\alpha} \mathcal{L} \circ \dot{c} - \frac{d}{dt} (\pi_{0\alpha} \circ \dot{c}) = 0 \quad (4.2.8.)$$

denklemlerine uyar. (Sardanashvily and Mangiarotti 1998)

Uyarı 4.2.1.

Bir Euler-Langrange operatörünün çekirdeği $\mathcal{C}ek\varepsilon_L$ genellikle $J^2E \rightarrow R$ lif demetinin alt demeti olmayı başaramaz. Bu nedenle; yukarıda bahsedildiği gibi Langrange denklemleri mutlak anlamda diferansiyel denklemler değildir. Özellikle (4.2.6) morfizmi sabit ranklı olduğu zaman; mesela eğer bir L langrangien regulerse o bir diferansiyel denklemdir. Tekrar vurgulamak gerekirse, eğer; J^1E hız faz uzayı üzerinde her yerde;

$$\det \pi_{j\alpha} \neq 0$$

ise bir *L Langrangien reguler (non-dejenere)* olarak adlandırılır. Eğer bir L langranien non-dejenere ise; Langrange denklemleri ikinci mertebe türevler için cebirsel olarak çözülebilir ve bir dinamik denkleme denktir. (Sardanashvily and Mangiarotti 1998)

Örnek 4.2.2.

$E = R^2 \rightarrow R$ bir konfigürasyon uzayı olsun ve (t, u) ile koordinatlandırılınsın. Yöndeş hız faz uzayı $J^1U, (t, u, u_t)$ adapte koordinatları ile donatılır. J^1E üzerinde Langrangien

$$L = \frac{1}{2}u^2u_t^2 dt$$

$u = 0$ noktasında çekirdeği bir alt manifold olmayan Euler-Langrange operatör,

$$\varepsilon_L = [uu_t^2 - d_t(u^2u_t)] \bar{d}u$$

ye götürür.

J^1E jet manifoldu üzerinde her L Langrangienine bağlı olarak; Legendre dönüşümü;

$$\hat{L}: J^1E \rightarrow V^*E$$

$$p_{0\alpha} \circ \hat{L} = \pi_{0\alpha} \quad (4.2.9)$$

şeklinde verilebilir. Burada $(t, u^{0\alpha}, p_{0\alpha})$, V^*E düşey kotejanjant demeti üzerinde koordinatlarıdır. Gerçekten düşey bölünme sayesinde $VL \rightarrow L$ ye düşey tanjant morfizmi;

$$VL: J^1E \times VE \rightarrow R$$

lineer morfizmini ve sonuç olarak; (4.2.9) morfizmini verir.

$E \rightarrow R$ konfigürasyon uzayı üzerinde zamana bağlı mekaniklerde düşey kotejanjant demeti V^*E bir momentum faz uzayı rolü oynar. (Sardanashvily and Mangiarotti 1998)

Uyarı 4.2.2 :

(4.2.9) Legendre dönüşümü bir lokal difeomorfizmdir $\Leftrightarrow \hat{L}$ Langrangieni regulerdir. Eğer \hat{L} legendre dönüşümü bir difeomorfizm ise, L bir langrangien hiperregulerdir.

Tanım 4.2.6

V^*E düşey kotejanjant demetinin bir polisimplektik formdan türetilen;

$$\Omega \stackrel{def}{=} dp_{0\alpha} \wedge du^{0\alpha} \wedge dt \quad (4.2.10)$$

kanonik formuna bir *kanonik 3-form* adı verilir.

J^1E üzerinde \hat{L} Legendre dönüşümü (4.2.9) yardımı ile kanonik form (4.2.10) un pull-back dönüşümü olan

$$\Omega_L = \hat{L}^* \Omega = d\pi_{0\alpha} \wedge du^{0\alpha} \wedge dt \quad (4.2.11)$$

ifadesini gözönüne alalım. Ω_L formu bir L Langrangienin seçimine bağlı olarak, Hamiltonian mekaniklere benzer yapısıyla Langrangien formülünü verir. Bu yapıda bir Hamiltonian formunun Langrangien karşılığı, (4.2.5) Poincaré-Cartan formudur. (Sardanashvily and Mangiarotti 1998)

Tanım 4.2.7.

Eğer bir L Langrangien regüler ise; Ω_L (4.2.11) formunun J^1E jet manifoldu üzerinde tanımladığı yapıya bir *poisson yapısı* denir.

Ω_L yardımıyla her $J^1E \rightarrow R$ jet demeti üzerinde;

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}^{0\alpha} \partial_{0\alpha} + \mathcal{G}^{1\alpha} \partial'_{0\alpha}$$

düşey vektör alanının Ω_L formu ile iç çarpımı:

$$\mathcal{G} \rfloor \Omega_L = \{ [\mathcal{G}^{1j} \pi_{0j0\alpha} + \mathcal{G}^{0\alpha} (\partial_{0\alpha} \pi_{0\alpha} - \partial_{0\alpha} \pi_{0j})] du^{0\alpha} - \mathcal{G}^{0\alpha} \pi_{0j0\alpha} du_t^{0j} \} \wedge dt$$

2-formunu verir.

Eğer bir Langrangien regüler ise bu dönüşüm birebirdir. Gerçekten J^1E üzerinde keyfi 2-form

$$\phi = (\phi_{0\alpha} du^{0\alpha} + \phi_{0\alpha} du_t^{0\alpha}) \wedge dt$$

ile verilsin.

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^{1j} \pi_{0j0\alpha} + \mathcal{G}^{0\alpha} (\partial_{0j} \pi_{0\alpha} - \partial_{0\alpha} \pi_{0j}) &= \phi_{0\alpha} \quad , \\ -\mathcal{G}^{0\alpha} \pi_{0j0\alpha} &= \phi_{1j} \end{aligned}$$

cebirsel denklemleri;

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^{0\alpha} &= -(\pi^{-1})^{0\alpha 0j} \phi_{1j} \\ \mathcal{G}^{1j} &= (\pi^{-1})^{0j 0\alpha} [\phi_{0\alpha} + (\pi^{-1})^{0r 0m} \phi_{1n} (\partial_{0r} \pi_{0\alpha} - \partial_{0\alpha} \pi_{0r})] \end{aligned}$$

şeklinde bir tek çözüme sahiptir.- (Sardanashvily and Mangiarotti 1998)

Tanım 4.2.8.

J^1E üzerinde her f fonksiyonu,

$$\mathcal{G}_f \mid \Omega_L = -df \wedge dt$$

bağıntısı gereğince $J^1E \rightarrow R$ üzerinde bir düşey vektör alanı;

$$\mathcal{G}_f = (\pi^{-1})^{0\alpha 0j} \partial_{0j}^t f \partial_{0\alpha} - (\pi^{-1})^{0j 0\alpha} \left[\partial_{0\alpha} f + (\pi^{-1})^{0r 0m} \partial_{0m}^t f (\partial_{0r} \pi_{0\alpha} - \partial_{0\alpha} \pi_{0r}) \right] \partial_{0j}^t \quad (4.2.12)$$

yi belirler.

Bu durumda *Poisson braketi* :

$$\{f, g\}_L \stackrel{def}{=} \mathcal{G}_f \mid \mathcal{G}_g \mid \Omega_L, \quad f, g \in \Lambda^0 J^1E \quad (4.2.13)$$

$$\begin{aligned} \{f, g\}_L = & (\pi^{-1})^{0\alpha 0j} (\partial_{0\alpha}^t f \partial_{0j} g - \partial_{0\alpha}^t g \partial_{0j} f) + \\ & (\partial_{0m} \pi_{0r} - \partial_{0r} \pi_{0m}) (\pi^{-1})^{0r 0\alpha} (\pi^{-1})^{0m 0j} \partial_{0\alpha}^t f \partial_{0j}^t g \end{aligned}$$

J^1E jet manifoldu üzerinde, fonksiyonların $\Lambda^0 J^1E$ uzayı üzerinde tanımlanabilir. Özellikle düşey vektör alanı \mathcal{G}_f (4.2.12), Poisson yapısı (4.2.13) 'a göre f fonksiyonu için Hamiltonian vektör alanıdır. Poisson yapısı (4.2.13) $J^1E \rightarrow R$ liflenmesi ile benzeyen, J^1E jet manifoldu üzerinde yöndeş simplektik foliasyon tanımlar. Bu foliasyonun J^1E lifleri üzerinde simplektik form,

$$\Omega_t = d\pi_{0\alpha} \wedge du^{0\alpha}$$

şekindedir. (Sardanashvily and Mangiarotti 1998)

Örnek 4.2.2.

Eğer bir L langrangien hiperregüler ise Poisson yapısı (4.2.13), V^*E momentum faz uzayı üzerinde kanonik Poisson yapısına izomorfiktir. Gerçekten Poisson braketi (4.2.13)

$$\{\pi_{0\alpha}, \pi_{0j}\} = \{u^{0\alpha}, u^{0j}\} = 0 \quad \{\pi_{0\alpha}, u^{0j}\} = \delta_{0\alpha}^{0j}$$

olur.

Tanım 4.2.9

$J^1E \rightarrow R$ jet demeti üzerinde bir

$$\xi_L = \partial_t + f^{0\alpha} \partial_{0\alpha} + \xi^{0\alpha} \partial_{0\alpha}^t$$

konneksiyonu verilsin. Eğer;

$$(f^{0\alpha} - u_t^{0\alpha})\pi_{0j0\alpha} = 0 \quad (4.2.15a)$$

$$\partial_{0\alpha} \mathcal{L} - \partial_t \pi_{0\alpha} - f^{0j} \partial_{0j} \pi_{0\alpha} - \xi^{0j} \pi_{0j0\alpha} + (f^{0j} - u_t^{0j}) \partial_{0\alpha} \pi_{0j} = 0 \quad (4.2.15b)$$

Koordint formunda olan,

$$\xi_l \mid \Omega_l = dH_l \quad (4.2.14)$$

denklemi sağlanıyorsa ξ_l konneksiyonuna, L Langrangien için bir *langrangien konneksiyon* denir. (Sardanashvily and Mangiarotti 1998)

Örnek 4.2.3

(4.2.15a) ve (4.2.15b) denklemlerine bakıldığında bir L regüler Langrangien için, bir tek holonomik Langrangien konneksiyonu vardır.

Tanım 4.2.10.

(4.2.14) denkleminin anlamını açıklamak için, $J^1 J^1 E$ tekrarlanmış jet manifoldu üzerinde;

$$\bar{\mathcal{L}} = \mathcal{L}(t, u^{0\alpha}, u_t^{0\alpha}) + (u_{(t)}^{0\alpha} - u_t^{0\alpha}) \pi_{0\alpha}(t, u^{0\alpha}, u_t^{0\alpha})$$

eşitliği ile tanımlı $\bar{\mathcal{L}}$ bir Langrangien olup, bu durumda Yöndeş Euler-Langrange operatörü *Euler-Langrange-Cartan operatörü* olarak adlandırılır ve

$$\varepsilon_{\bar{\mathcal{L}}} : J^1 J^1 E \rightarrow T^* J^1 E \quad (4.2.16)$$

$$\varepsilon_{\bar{\mathcal{L}}} = \left[\partial_{0\alpha} \mathcal{L} + \partial_{0\alpha} \pi_{0j} (u_{(t)}^{0j} - u_t^{0j}) - \hat{d}_t \pi_{0\alpha} du^{0\alpha} + \pi_{0\alpha 0j} (u_{(t)}^{0j} - u_t^{0j}) du_t^{0\alpha} \right] \wedge dt$$

$$\bar{d}_t = \partial_t + u_{(t)}^{0\alpha} \partial_{0\alpha} + u_{tt}^{0\alpha} \partial_{0\alpha}'$$

şeklinde tanımlanır. Bu durumda; (4.2.14), $J^1 E$ jet manifoldu üzerinde birinci mertebeden diferansiyel denklem olan Cartan denklemleri olarak adlandırılan,

$$\xi_l(J^1 E) \subset \text{Ker} \varepsilon_{\bar{\mathcal{L}}}$$

durumuna denktir ve

$$\pi_{0\alpha 0j} (u_{(t)}^{0\alpha} - u_t^{0\alpha}) = 0 \quad (4.2.17a)$$

$$\partial_{0\alpha} \mathcal{L} - d_t \pi_{0\alpha} + (u_{(t)}^{0\alpha} - u_t^{0\alpha}) \partial_{0\alpha} \pi_{0j} = 0 \quad (4.2.17b)$$

şeklinde dirler. (Sardanashvily and Mangiarotti 1998)

Uyarı 4.2.3

Euler-Langrange-Cartan operatörü (4.2.16), bir Hamilton operatörünün Langrange karşılığıdır.

Cartan denklemlerinin (4.2.17a) – (4.2.17b) çözümleri, bir L Langrangien için ξ_l Langrangien konneksiyonlarının $\bar{c} : () \rightarrow J^1 E$ (lokal) integral kesitlerdir. Yani $J^1 \bar{c} = \xi_l \circ \bar{c}$. Ayrıca, bu integral kesitleri için (4.2.14) denklemi, $J^1 E \rightarrow R$ jet demeti üzerinde herhangi bir düşey vektör alanı \mathcal{G} için;

$$\bar{c}^*(\mathcal{G} \rfloor dH_l) = 0$$

bağıntısına denktir.

Kolaylıkla görülebilir ki; Euler–Langrange-Cartan operatörü ε_L , (4.2.16) nın, $J^2 E \subset J^1 J^1 E$ ikinci mertebeden jet manifolduna kısıtlaması olan

$$Ker \varepsilon_L = J^2 E \cap Ker \varepsilon_L \quad (4.2.18)$$

L Langrangian için Euler-Langrange operatörü ε_L (4.2.6) yi yeniden elde eder. Bu nedenle; Langrange denklemleri (4.2.7), $J^1 E \rightarrow R$ jet demetinin $\bar{c} = J^1 c$ holonomik kesitleri üzerinde Cartan denklemleri (4.2.17a) – (4.2.17b) ye denktir. Langrange denklemlerinin (4.2.7) çözümleri, L Langrangian için holonomik Langrangien konneksiyonlarının integral kesitleri olup, Euler Langrangien operatörü (4.2.18) nün çekirdeğidir. Farklı holonomik Langrangian konneksiyonlar, aynı Langrange denklemlerinin sistemi ile birleştirilmiş farklı dinamik denklemlere götürür. Bir L Langrangianın reguler olması durumunda, Cartan denklemleri (4.2.17a)-(4.2.17b), Langrange denklemleri (4.2.7) ye denktir. ve E konfigürasyon uzayı üzerinde;

$$u_{ii}^{0\alpha} = (\pi^{-1})^{0\alpha 0j} \left[-\partial_{0\alpha} \mathcal{L} + \partial_i \pi_{0\alpha} + u_i^{0r} \partial_{0r} \pi_{0\alpha} \right] \quad (4.2.19)$$

tek dinamik denklemine götürür. Çoğu tanımdan, Poincaré-Cartan form H_L (4.2.5) afin demet $J^1 E \rightarrow E$ dan kotanjant demet $T^* E \rightarrow E$ üzerinde lifli morfizm;

$$\hat{H}_L : J^1 E \rightarrow T^* E$$

$$(p_{0\alpha}, p) \circ \hat{H}_L = (\pi_{0\alpha}, \mathcal{L} - \pi_{0\alpha} u_i^{0\alpha}) \quad (4.2.20)$$

tanımlar öyleki; bu morfizm $(t, u^{0\alpha}, p, p_{0\alpha})$ koordinatları ile donatılmış homojen Legendre demeti rolü oynar. (4.2.20) morfizmine H_L ile birleştirilmiş Legendre morfizmi adı verilir. Legendre dönüşümü, \hat{L} (4.2.9) ve Legendre morfizmi \hat{H}_L (4.2.20) arasında;

$$\hat{L} = \zeta \circ \hat{H}_L \quad (4.2.21)$$

aşağıdaki bağıntı vardır. Burada $\zeta, T^*E \rightarrow V^*E$ kanonik projeksiyondur. (Sardanashvily and Mangiarotti 1998)

Tanım 4.2.11.

H_L Poincaré-Cartan formu olmak üzere; Legendre morfizmi (4.2.20) ile belirtilen birleştirilmiş T^*E kotejanant demeti üzerinde tanımlı;

$$\Xi = p dt + p_{0\alpha} du^{0\alpha}$$

dönüşümüne *kanonik Liouville formu* adı verilir. Bu dönüşüm H_L Poincaré-Cartan formunun bir pull-back dönüşümüdür. (Sardanashvily and Mangiarotti 1998)

Tanım 4.2.12.

E konfigürasyon uzayının T^*E kotejanant demeti üzerindeki J^1E jet manifoldu üzerinde tanımlı

$$d\Xi =; dp \wedge dt + dp_{0\alpha} \wedge du^{0\alpha}$$

dönüşümüne *kanonik simplektik form* adı verilir. Bu dönüşüm

$$dH_L = d\pi_{0\alpha} \wedge du^{0\alpha} - d(\pi_{0\alpha} u^{0\alpha} - L) \wedge dt \quad (4.2.22)$$

presimplektik formunun bir pull-back dönüşümüdür. (Sardanashvily and Mangiarotti 1998)

5. BÖLÜM

GAUGE JET TEORİNİN BİR MEKANİK PROBLEME UYGULANMASI

Bu bölümde öncelikle bir dik dairesel silindir üzerine çizilen helis eğrisi için birinci jetler elde edilecektir. Daha sonra, sürtünmesiz durumda, bu helis eğrisi üzerinde yerçekimi altında hareket eden m kütleli bir parçacığı içeren mekanik sistem için Hamilton ve Lagrange denklemleri incelenecektir.

Dik dairesel silindirin denklemi,

$$S: [0, 2\pi] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$$

$$(u, v) \rightarrow S(u, v) = (a \cos u, a \sin u, v)$$

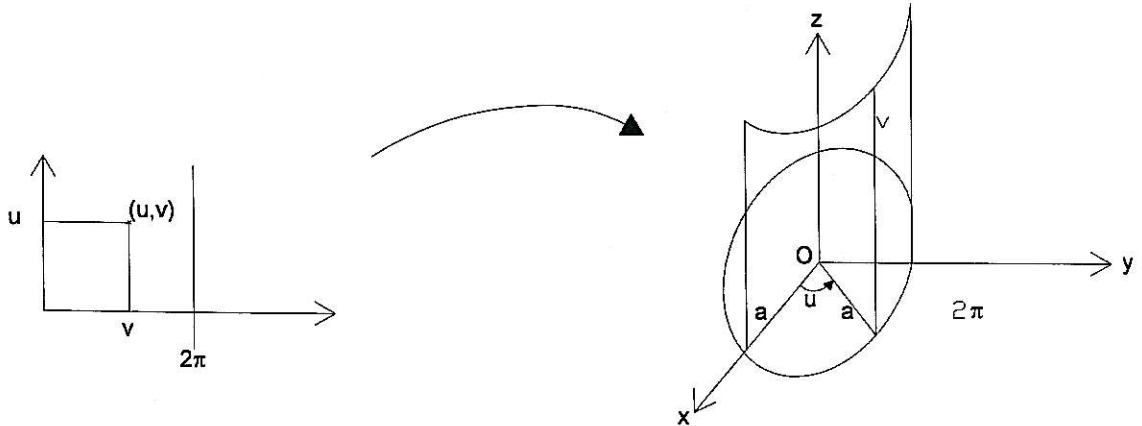
şeklinde tanımlı olup, $S([0, 2\pi] \times \mathbb{R})$ yada kısaca S cümlesi olarak ifade edilir. S üstündeki her eğriye bir;

$$\varphi: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(u) = v$$

şeklinde bir fonksiyon karşılık gelir. Böylece S de, her eğri ;

$$\alpha(u) = (a \cos u, a \sin u, \varphi(u))$$

eşitliği ile belirtilir.



Şekil 5.1

Dik dairesel silindir üzerine çizilen helis eğrisi, silindirin ana doğruları ile sabit açılar yapan bir eğridir. Bu dik dairesel helisin denklemi;

$$H = \left\{ \begin{array}{l} \alpha(u) \mid \alpha: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ u \rightarrow \alpha(u) = \nu(u) = (a \cos u, a \sin u, bu) \quad , b > 0 \end{array} \right\}$$

olarak tanımlı H cümlesi ile ifade edilir.

Ayrıca,

$$\begin{array}{l} x: \quad H \quad \rightarrow \quad \mathbb{R} \quad 0 \leq u \leq 2\pi \\ \quad (a \cos u, a \sin u, bu) \rightarrow u \end{array}$$

dönüşümü süreklidir. Ve (x, H) ikilisi H için haritadır, dolayısıyla $\{(x, H)\}$ tek haritalı atlas olur. H helis eğrileri cümlesi 1-boyutlu bir manifolddur. Böylece H için birinci jetlerin cümlesi $J^1 H$ ile gösterilip, üzerindeki indirgenmiş koordinat sistemi $(J^1 H, x^1)$,

$$J^1 H = \{J^1 \alpha(u) : \alpha(u) \in H, 0 \leq u \leq 2\pi\}$$

$$x^1 = (t, u^1, u_1^1)$$

şeklinde tanımlanır. Burada,

$$\begin{array}{l} t(J^1 \alpha(u)) = t \\ u^1(J^1(\alpha(u))) = \alpha(u) \end{array}$$

ve u_1^1 türevsel koordinatları,

$$\begin{aligned} u_1^1(J^1 \alpha(u)) &= \frac{d\alpha(u)}{dt} = \left(-a \sin u \frac{du}{dt}, a \cos u \frac{du}{dt}, b \frac{du}{dt} \right) \\ &= (-a \sin u, a \cos u, b) \frac{du}{dt} \\ &= \dot{\alpha}(u) \cdot \dot{u}, 0 \leq u \leq 2\pi \end{aligned}$$

olarak tanımlıdır. Böylece; kısalık için $\alpha(u)$ helis eğrilerin birinci mertebeden jetleri

$$J^1 \alpha(u) = (t, u^1, u_1^1)$$

şeklinde ifade edilecektir.

Silindirin ekseninden geçen u doğrusunun \vec{u} doğrultusu ile helisin teğet vektör alanları daima sabit açı yapar.

Burada α 'nın 1.jetleri, $J^1 \alpha = (t, u^1, u_1^1)$ ve $\alpha(u) = (a \cos u, a \sin u, bu)$ olup,

$$\begin{array}{l} J^1 \alpha \times T^* \alpha \rightarrow \alpha \times \mathbb{R} \\ (u_1^1, i, \dot{u}^1) \rightarrow dt \otimes (u_1^1 \partial_1)^{\perp} (i dt + \dot{u}^1 du^1) = i + u_1^1 + \dot{u}^1 \end{array}$$

olarak tanımlanır. Ayrıca $i = 1$ ve $\dot{u}^1 = du^1$ olduğunu bilinmektedir.

$T^* \alpha$ 'nın koordinatları ise $(t, u^1, i, \dot{u}^1) = (t, u^1, 1, \dot{u}^1)$ şeklindedir.

$J^1\alpha$ jet manifoldunun poisson yapısı

$$\Omega_L = \left(\frac{\partial^2 L}{\partial t \partial u_1} + u_1 \frac{\partial^2 L}{\partial u_1 \partial u_1} - \frac{\partial L}{\partial u_1} \right) dt \wedge du^1 + \left(u_1 \frac{\partial^2 L}{(\partial u_1)^2} \right) dt \wedge du^1 + \frac{\partial^2 L}{(\partial u_1)^2} du^1 \wedge du^1$$

şeklinde tanımlanır.

$J^1\alpha \rightarrow \mathbb{R}$ jet demeti üzerinde;

$$\xi_L = \frac{\partial}{\partial t} + X^1 \frac{\partial}{\partial u^1} + \xi^1 \frac{\partial}{\partial u_1^1} \quad (5.1)$$

konneksiyonu bir Langrangien konneksiyon olup, bu konneksiyon;

$$\xi_L \lrcorner \Omega_L = dH_L$$

denklemini sağlar. H_L Poincare Cartan Formu homojen legendre dönüşümü olan,

$$\hat{H}_L : J^1\alpha \rightarrow T^*\alpha$$

lifli morfizmini verir, koordinatları da (t, u^1, p, p_1) olup

$$(p_1, p) \circ \hat{H}_L = (\pi_1, L - \pi; u_1^1)$$

şeklinde ifade edilir.

$T^*\alpha \rightarrow \alpha$ kotanjant demet olup, koordinatları (t, u^1, p, p_1) alınır; böylece, $p = i = 1$ ve $\dot{u}^1 = p_1 = du^1$ olacaktır.

H_L Poincare Cartan formu;

$$\Xi = (idt + \dot{u}^1 du^1) = dt + \dot{u}^1 du^1$$

Liouville formunun pull-backidir. Böylece; kanonik simplektik form

$$\begin{aligned} d\Xi &= d\dot{u}^1 \wedge dt + d\dot{u}^1 \wedge du^1 \\ &= d\dot{u}^1 \wedge du^1 \quad (d\dot{u}^1 = 0) \end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

Tanjant uzayın bazı $\left\{ \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial u^1}, \frac{\partial}{\partial u_1^1} \right\}$ olduğuna göre, (5.1) vektör alanı için

$$\begin{aligned} -a \sin u &= 1 \\ a \cos u &= X^1 & \text{ise } \sin u &= -\frac{1}{a} \\ b &= \xi^1 \end{aligned}$$

eşitlikleri ele alınır ve Aycan 2003'e göre

$$1) X^1 \left(\frac{\partial^2 L}{dt du_1^1} + u_1^1 \frac{\partial^2 L}{\partial u^1 \partial u_1^1} - \frac{\partial L}{\partial u^1} \right) + \xi^1 \left(u_1^1 \frac{\partial^2 L}{(\partial u_1^1)^2} \right) = 0$$

$$2) \frac{\partial^2 L}{dt du_1^1} + u_1^1 \frac{\partial^2 L}{\partial u^1 \partial u_1^1} + \xi^1 \frac{\partial^2 L}{(\partial u_1^1)^2} - \frac{\partial L}{\partial u^1}$$

$$3) (X^1 - u_1^1) \frac{\partial^2 L}{(\partial u_1^1)^2} = 0$$

denklemleri ele alındığında Langrange fonksiyonu için

$$\frac{\partial^2 L}{\partial t \partial u_1^1} + u_1^1 \frac{\partial^2 L}{\partial u^1 \partial u_1^1} + \xi^1 \frac{\partial^2 L}{(\partial u_1^1)^2} - \frac{\partial L}{\partial u^1} = 0$$

(Aycan 2003)

diferansiyel denkleminin çözümü incelediğinde

$$\frac{\partial^2 L}{(\partial u_1^1)^2} = 0$$

olduğu görülür. Böylece;

$$L(t, u^1, u_1^1) = u_1^1 - b \left(\frac{t^2}{a^2} + \frac{(u^1)^2}{b^2} \right) = 0$$

Langrange enerji fonksiyonu elde edilir.

Ayrıca

$$\hat{L} : J^1 \alpha \rightarrow V^* \alpha$$

olup, bir $X \in \chi(J^1 \alpha)$ vektör alanı;

$$X = a \sin u \frac{\partial}{\partial t} - a \cos u \frac{\partial}{\partial u^1} + b \frac{\partial}{\partial u_1^1}$$

olarak tamamlandığında;

$$du^1 \circ \hat{L} = \pi_1 \Rightarrow 0 - a \cos u \frac{\partial u^1}{\partial u^1} + 0 = \pi_1$$

$$\Rightarrow \pi_1 = -a \cos u$$

olarak bulunur.

$J^1\alpha$ üzerinde bir Γ konneksiyonu vektör değerli 1-form olup $\Gamma \in \Lambda_0^1 J^1\alpha \otimes \chi(J^1\alpha)$ ve $\Gamma \rfloor \sigma = \sigma$, $\sigma \in \Lambda_0^1 J^1\alpha$ olmak üzere;

$$\Gamma = dt \otimes \left(\frac{\partial}{\partial t} + \Gamma_1 \frac{\partial}{\partial u^1} \right)$$

olarak tanımlanır. Burada ; $\left(\frac{\partial}{\partial t} + \Gamma_1 \frac{\partial}{\partial u^1} \right)$ $J^1\alpha$ üzerinde bir vektör alanıdır. Bu vektör alanı yerine Helisin teğet vektör alanı alınırsa;

$$\Gamma = -a \cos u dt$$

olarak bulunur.

$J^1\alpha$ demeti üzerinde vektör değerli (1,1) tipindeki tensörel formlar

$$R = btu dt \otimes \frac{\partial}{\partial t}$$

$$S = t\sqrt{a^2 \cos^2 u + b^2 \sin^2 u} dt \otimes \frac{\partial}{\partial t}$$

olarak tanımlanırsa; Schouten-Nijenhuis braketi;

$$\begin{aligned} [R, S] &= -1 \left(btu \frac{\partial (t\sqrt{a^2 \cos^2 u + b^2 \sin^2 u})}{\partial t} \right) + \left(t\sqrt{a^2 \cos^2 u + b^2 \sin^2 u} \frac{\partial btu}{\partial t} \right) \\ &= -1 \left(btu \sqrt{a^2 \cos^2 u + b^2 \sin^2 u} + t\sqrt{a^2 \cos^2 u + b^2 \sin^2 u} bu \right) \\ &= -btu \left(2\sqrt{a^2 \cos^2 u + b^2 \sin^2 u} \right) \\ &= -2btu \sqrt{a^2 \cos^2 u + b^2 \sin^2 u} \end{aligned}$$

olarak hesaplanacaktır. Bu durumda; helis eğrisinin + yönde ilerlediği sürece; yani dönme yörüngeleri üzerinde hareket eden cisim yukarıya doğru z ekseninin (+) yönünde yükselerek hareketine devam eder. Fakat yer çekimi kuvvetinin etkisi altında helisin dönme yörüngeleri üzerinde serbest olarak hareketine devam ederse; bu durumda cisim z eksenine göre (-) yönde hareketine devam edecektir.

$$\begin{array}{ccc} J^1\alpha & \xrightarrow{\varphi} & T\alpha \\ \pi \downarrow & & \downarrow T\pi \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{id_{\mathbb{R}}} & \mathbb{R} \end{array}$$

Yukarıdaki diyagram değişmeli olup yani $id_{\mathbb{R}} \circ \pi = T\pi \circ \varphi$ dir. ϕ diffeomorfizm, $id_{\mathbb{R}}$ otomorfizm olmak üzere, φ , $J^1\alpha$ üzerindeki konneksiyonları $T\alpha$ üzerine aynen resmeder, yani taşır. O halde bu bir otomorfizm (endomorfizm) olup. Bu dönüşüm gauge transformasyonu (dönüşümü) olarak kabul edilir.

$J^1\alpha$ yapısı üzerinde çarpma ve toplama işlemlerini ele alınırsa;

$$\oplus : J^1\alpha \otimes J^1\alpha \rightarrow J^1\alpha$$

$$(J_p^1\varphi, J_p^1\psi) \rightarrow J_p^1\varphi \oplus J_p^1\psi = J_p^1(\varphi + \psi)$$

$$\otimes : \mathbb{R} \otimes J^1\alpha \rightarrow J^1\alpha$$

$$(\lambda \otimes J_p^1\phi) \rightarrow J_p^1(\lambda \cdot \phi)$$

$J^1\pi$ 'nin grup yapısı araştırılırsa;

(1) Kapalılık özelliği:

$$+ : (J_p^1\phi, J_p^1\psi) \rightarrow J_p^1(\phi + \psi) \in J^1\pi$$

Kapalılık özelliği vardır.

(2) $(J^1\pi, \pi, R)$ demeti üzerinde;

$$0 : \mathbb{R} \rightarrow J^1\pi$$

$$p \rightarrow 0(p) = 0_p \in J^1\pi$$

birim eleman $0 \in \Gamma(\pi)$ olmak üzere,

$$J_p^1\phi + 0_p = J_p^1\phi = 0_p + J_p^1\phi$$

olduğundan 0_p birim elemandır.

(3) Ters eleman özelliği:

$$(J_p^1\phi + J_p^1\phi) = 0_p \text{ olduğunda } -J_p^1\phi \text{ jeti } J_p^1\phi \text{ 'nin tersidir.}$$

(4) $J_p^1\phi, J_p^1\psi, J_p^1\gamma \in J^1\pi$ olmak üzere;

$$(J_p^1\phi + J_p^1\psi) + (J_p^1\gamma) = J_p^1(\phi + \psi) + J_p^1\gamma = J_p^1(\phi + \psi + \gamma) \quad (5.2)$$

$$J_p^1\phi + (J_p^1\psi + J_p^1\gamma) = J_p^1\phi + J_p^1(\psi + \gamma) = J_p^1(\phi + \psi + \gamma) \quad (5.3)$$

(5.2)=(5.3) olduğundan, birleşme özelliği vardır.

Sonuç olarak; bir toplam grup olduğu görülür. Aynı zamanda bir vektör demet yapısına sahip olduğu kolaylıkla gösterilebilir.

$(J^1\pi, \pi, R)$ demeti ele alınırsa,

$$\zeta_{ek}\pi = \pi^{-1}(0(p)) \subset J^1\pi$$

olur. Burada 0,

$$0 : \mathbb{R} \rightarrow J^1\pi$$

$$p \rightarrow J_1^p 0$$

olup, sıfır kesiti olduğunu gösterir. Bu da $0(p) \subset (J^1\pi)$ olması anlamına gelir.

Bir alt manifold üzerinde (Ω, H) Hamilton sistemlerinin çözümleri $\zeta_{ek}\Omega \cap TM \rightarrow M$ vektör demetin kesitlerinin lineer uzayı üzerinde bir afin uzay modeli oluşturur. Bu vektör demeti Sıfırdan farklı ise Hamilton denklemlerin çözümleri birinci mertbe diferansiyel denkleme karşılık gelir. Bir manifold üzerinde presimplektik yapıya karşılık gelen Hamilton denklemi bu manifold üzerinde bir birinci mertbeden diferansiyel denkleme denktir.

Böylece; Aycan'a (2003) göre;

$$\zeta_{ek}\Omega \rightarrow J^1\alpha$$

$$u^1(J^1(\alpha(u))) = \alpha(u)$$

$$u_1^1(J^1(\alpha(u))) = (-a\text{Sin}u, a\text{Cos}u, b) \cdot \dot{u}$$

vektör demetinin kesitleri bir gauge alanı olur. Yani; bunlar 0 Hamiltonian için, Hamilton sisteminin çözümleri olup, bunlar Gauge freedom(serbestliği)ne karşılık gelirler. Hamilton enerji fonksiyonu

$$H = (b + mg)u^1 - \text{Cot}u u_1^1 \quad (\text{Aycan 2003})$$

ve, Hamiltonien vektör alanı

$$X_H = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial u_1^1} \frac{\partial}{\partial u^1} - \frac{\partial H}{\partial u^1} \frac{\partial}{\partial u_1^1}$$

Örneğimize göre Hamiltonien vektör alanı

$$X_H = a\text{Sin}u \frac{\partial}{\partial t} - a \cos \frac{\partial}{\partial u^1} - (b + mg) \frac{\partial}{\partial u_1^1}$$

olur. Buradan,

$$a\text{Sin}u = 1 \quad , \quad -a\text{Cos}u = \frac{\partial H}{\partial u_1^1} \quad , \quad b + mg = \frac{\partial H}{\partial u^1}$$

eşitliklerinden

$$b + mg = 0 \text{ ise } b = -mg \quad \text{ve}$$

$$u = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

olacağından,

$$a = \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

bulunur. Böylece; Hamilton enerji fonksiyonu sıfır Hamiltoniene karşılık geldiğinden Hamilton vektör alanı;

$$X_H = \frac{\partial}{\partial t}$$

dir. Sonuç olarak; bu problemdeki gauge vektör alanı $A = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_0$ vektör alanıdır. Yine

$G = (0, 0, mg)$ olmak üzere;

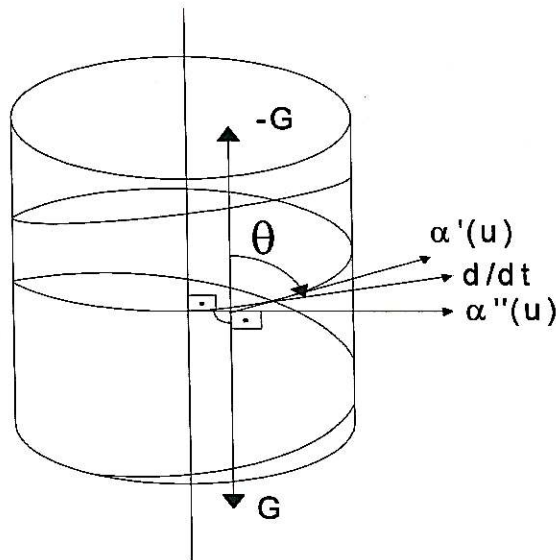
$$A \perp G \text{ dir ve } u = \frac{\pi}{2} \text{ için } \alpha''(u) = (0, -1, 0)$$

olup,

$$\alpha' \perp \alpha'' \quad \alpha'' \perp -G \text{ ve } A \perp \alpha''$$

olduğu görülmektedir. Sonuç olarak; $A \perp G$ ve $A \perp \alpha''$ ise $A // G \wedge \alpha''$ dir.

$G \wedge \alpha''$ vektörü yani A , $-mg$ doğrultusundadır.



(Şekil 5.2)

6. BÖLÜM

SONUÇ VE DEĞERLENDİRME

Bu çalışmada; zamana bağlı mekanik sistemler ele alındıktan sonra Poisson manifoldların geometrisine yer verilmiştir. Daha sonra Gauge jet teorisinin bir mekanik probleme nasıl uygulanacağı verilmiştir. Bu çalışma; Gauge Jet teori ile Langrangien ve Hamiltonien mekanik sistemleri birleştirmesi açısından önem arz etmektedir. Bu çalışmanın, ayrıca bu konuda ileride araştırma yapacak olan araştırmacılara yön vereceği düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

- Mangiaratti, L., and Sardanashvily, G. (1998) Gauge Mechanics, **World Scientific Press**, Singapore, 355 s.
- Göckeller, M., and Schücker, T. (1987) Differential Geometry, Gauge Theories, and Gravity, **Cambridge University Press**, Cambridge, 230 s.
- Frankel, T. (1997). The Geometry of Physics, An Introduction, **Cambridge University Press**, Cambridge, 654 s.
- Thirring W. (1997) Classical Math Physics, Dynamical Systems and Field Theories, **Springer**, Newyork Vienna, 543 s.
- Saunders, D.J. (1989) The Geometry of Jet Bundles, **Cambridge University Press**, Cambridge, 293 s.
- Civelek, Ş. (1993) Genişletilmiş Vektör Demetlerine Yüksek Mertebeden Lift'ler, Doktora Tezi, **Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü**, Ankara, 118s.
- Aycan, C. (2003) Genişletilmiş Jet Demetleri üzerinde Euler-Langrange ve Hamilton Denklemlerinin Liftleri, Doktora Tezi, **Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü**, Eskişehir 129 s.
- Aycan, C. (1998) Jet Demetler Üzerinde Yükseltmeler ve Prolongasyon Bağlıları, Yüksek Lisans Tezi, **Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü**, Denizli, 94
- De Leon M., Lacombe E. A. (1989) Langrangien Submanifolds and Higher Order Mechanical Systems, J. Phys., A. Math. Gen., 22 : 3809-3820
- Domingo C., De Leon M., Marmara J.C. (1994) The constraint Algorithm for Time-Dependent Langrangians, J. Math. Phys., 35 : (7) 3410-3447
- Sardanashvily G.A., (1998) Hamiltonian Time-Dependent Mechanics, Journal of Mathematical Physics 39, (5) 2714-2722
- Marmo G., Vilasi G., Vinogradov A. M. (1997) The Local Structure of n-Poisson and n-Jakobi Manifolds, J. Phys., : (9709046v1), 12-18
- De Leon M., Marrera Juan C. and Padron E. (1997) Lichnerowicz-Jakobi Cohomology of Jakobi Manifolds, C. R. Acad. SCI., (t.324) 71-76

ÖZGEÇMİŞ

Fatma BADEM, 1981 yılında Denizli'de doğdu. ilk, orta ve lise öğrenimini Denizli'de tamamladı. Lisans eğitimini Selçuk Üniversitesi İlköğretim Matematik Bölümü'nde tamamladı. 2003 yılında İlköğretim Matematik Öğretmeni olarak Denizli Karahisar Kasabası'nda göreve başladı. 2004 yılında atandı. 2005 yılında Pamukkale Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde yüksek Lisansa başladı. Halen Dentaş İlköğretim Okulu'nda görevine devam etmektedir.