KİNETİK DENKLEM İÇİN TERS PROBLEM

Özden ULKAR

Zonguldak Karaelmas Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalında
Yüksek Lisans Tezi
Olarak Hazırlanmıştır

ZONGULDAK
Eylül 2009

KABUL:

Özden ULKAR tarafından hazırlanan " KİNETİK DENKLEM İÇİN TERS PROBLEM " başlıklı bu çalışma jürimiz tarafından değerlendirilerek, Zonguldak Karaelmas Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak oybirliğiyle kabul edilmiştir 25/09/2009.

Başkan: Prof. Dr. İrfan Baki YAŞAR (UFUK Ü) ....

Üye : Prof. Dr. Arif AMİROV (ZKÜ) ....

Üye : Yrd. Doç. Dr. Mustafa YILDIZ (ZKÜ) ....

ONAY:

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.29../.9../2009

Prof. Dr. Kemal BÜYÜKGÜZEL
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

"Bu tezdeki tüm bilgilerin akademik kurallara ve etik ilkelere uygun olarak elde edildiğini ve sunulduğunu; ayrıca bu kuralların ve ilkelerin gerektirdiği şekilde, bu çalışmadan kaynaklanmayan bütün atıfları yaptığımı beyan ederim."

Özden ULKAR

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

KİNETİK DENKLEM İÇİN TERS PROBLEM

Özden ULKAR

Zonguldak Karaelmas Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof.Dr. Arif AMİROV
Eylül 2009, 47 sayfa

Bu tez üç bölümü kapsamaktadır. Birinci bölümde Kinetik denklem için ters problemin incelen mesinde kullanılan başlıca tanım ve teoremler verilmiştir. İkinci bölümde bazı Kinetik denklemler verilmiştir. Üçüncü bölümde

$$Lu \equiv \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial v_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial H}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial v_i} \right) = \lambda(x, v)$$

ters problemi incelenmiş ve uygun uzay çiftinde Hadamard anlamında iyi konulmuş bir problem olduğu gösterilmiştir.

Anahtar kelimeler **:** Ters Problem, Kinetik Denklemler, İyi Konulmuş Problemler
Bilim Kodu **:** 403.06.01

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

THE INVERSE PROBLEM FOR KINETIC EQUATION

Özden ULKAR

Zonguldak Karaelmas University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Thesis Advisor: Prof. Dr. Arif AMİROV

September 2009, 47 pages

This dissertation consists of third chapters. In the first chapter, definitions and theorems which are used in investigation inverse of problems for Kinetic equations are given. In the second chapter, different types of kinetic equations are given. The inverse problem for the equation

$$Lu \equiv \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial v_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial H}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial v_i} \right) = \lambda(x, v)$$

are considered in chapter third, well-posedness of this problem in Hadamard sense has been proved.

Key Words **:** Inverse Problem, Kinetic Equations, well-posed problems.
Science Code : 403.06.01

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım sırasında değerli zamanını bana ayıran ve tüm çalışmalarımı titizlikle inceleyen değerli hocam sayın Prof. Dr. Arif AMİROV' a, Sayın Yrd. Doç. Mustafa YILDIZ'a teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

İÇİNDEKİLER (devam ediyor)

SİMGELER DİZİNİ

C^{∞} : Sonsuz kez diferansiyellenebilir fonksiyon sınıfı

C^{k} : k. Mertebeye kadar türevleri sürekli olan fonksiyonlar sınıfı

$L_2(\Omega)$: $\{f : f$ ölçülebilir ve $\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx < \infty \}$

$H_m(\Omega)$: Kendisi ve m. Mertebeye kadar genelleşmiş türevleri $L_2(\Omega)$'ya ait olan fonksiyonlar sınıfı.

$\overset{0}{H}_m(\Omega)$: Kendisi ve m. Mertebeye kadar genelleşmiş türevleri $L_2(\Omega)$'ya ait olan ve m-1. mertebeye kadar tüm genelleşmiş türevleri Ω'nın sınırında sıfır olan fonksiyonlar sınıfı.

∇ : $\left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \dfrac{\partial}{\partial x_2}, ..., \dfrac{\partial}{\partial x_n}\right)$

∂D : D bölgesinin sınırı.

L :Lineer operatör.

Δ : $\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x_1^{\ 2}} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^{\ 2}} + ... + \dfrac{\partial^2}{\partial x_n^{\ 2}}\right)$

BÖLÜM 1

GİRİŞ

1.1 TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde kinetik denklem için ters probleminin incelenmesinde gerekli olan tanım ve teoremler ele alınmıştır.

Tanım 1.1.1: M$\subset R^n$ nokta kümesinin her (x,y) nokta çifti için,

i) d(x,y) = 0 $\Leftrightarrow$ x = y
ii) d(x,y) = d(y,x)
iii) d(x,y) $\leq$ d(x,z) + d(z,y) (Üçgen eşitsizliği)

koşullarına uyan negatif olmayan d(x,y) : M M$\rightarrow R^+$ fonksiyonu varsa, M nokta kümesine metrik uzay, d(x,y)'ye ise x ile y arasındaki uzaklık denir.

Tanım 1.1.2: Bir M metrik uzayının bir alt kümesi A olmak üzere, $[A] = M$ ise A kümesine M'de her yerde yoğundur denir. Örneğin rasyonel katsayılı polinomların kümesi $C_{[a,b]}$'de her yerde yoğundur.

Tanım 1.1.3: Sayılabilir sayıda her yerde yoğun bir alt küme içeren metrik uzaya ayrılabilir uzay denir. Örneğin $R, R^n, C_{[a,b]}$ ayrılabilir uzaylardır.

Tanım 1.1.4: M metrik uzay olmak üzere $x_n \in M$ ve n$\in$ N olsun. k ve p birbirinden bağımsız olarak sonsuza gittiğinde $d(x_1p, x_1k$)$\rightarrow 0$ oluyorsa (x_n) dizisine **Cauchy dizisi** denir. Yakınsak her dizi Cauchy dizisidir. Gerçekten, ($x_1n)$ dizisi x limitine yakınsıyor ise $\forall\varepsilon > 0$ için bir N_ε sayısı vardır, öyle ki $n > N_\varepsilon$ için $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ yapılabilir. Aynı zamanda tüm $n, n' > N_\varepsilon$ için,

$$d(x_n, x_{n'}) \leq d(x_n, x) + d(x_{n'}, x) < \varepsilon \text{ dur.}$$

Tanım 1.1.5: Bir M metrik uzayında seçilen her Cauchy dizisinin limiti yine bu uzayda ise M metrik uzayına **tam uzay** denir.

Örnek 1.1.1: $C_{[a,b]}$ uzayı tam uzaydır.

İspat: $C_{[a,b]}$'de $(x_n(t))$ bir Cauchy dizisi ise $\forall\varepsilon > 0$ için bir N_ε sayısı vardır, öyle ki tüm $n, n' > N_\varepsilon$ ve tüm $t\epsilon[a, b]$ için,

$$|x_n(t) - x_{n'}(t)| < \varepsilon$$

olur. $(x_n(t))$ dizisi düzgün yakınsaktır. Sürekli fonksiyonların düzgün yakınsak dizisinin limiti de bir sürekli fonksiyondur. $n' \to \infty$ için limit alınırsa, tüm $n > N_\varepsilon$ ve $t\epsilon[a, b]$ için,

$$|x_n(t) - x(t)| < \varepsilon$$

bulunur. Yani $(x_n(t))$ dizisi $C_{[a,b]}$'nin metriğine göre $x(t)\epsilon C_{[a,b]}$ elemanına yakınsar. Dolayısıyla $C_{[a,b]}$ tam metrik uzaydır.

Tanım 1.1.6: Tam normlu lineer uzaya **Banach uzayı** denir.

Örnek 1.1.2: $C_{[a,b]}$ uzayı $\|f\| = (_a\leq t \leq b^{max}|f(t)|$ normu ile bir Banach uzayıdır. Bu norma uygun metrik $d(f, g) = (_a\leq t \leq b^{max}|f(t) - g(t)|$ alınarak ispat Örnek 1.1.1'deki gibidir.

Tanım 1.1.7: *X* bir lineer uzay ve $A \subset X$ bir alt küme olsun. *A*'yı kapsayan en dar A_L alt uzayına *A*'nın gereni denir ve span*A* ile gösterilir. Burada A_L alt uzayı, *A*'nın elemanlarının bütün sonlu lineer kombinasyonlarının kümesini gösterir.

Örnek 1.1.3: R^n reel lineer uzayını göz önüne alalım. $e_1 = (1,0,0, \dots, 0), e_2 = (0,1,0, \dots, 0),$ …,$e_n = (0,0,0, \dots, 1)$ olmak üzere $A = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ alt kümesi için $A_L = SpanA = R^n$'dir.

Tanım 1.1.8: $x_1, x_2, \dots, x_k$'lar X lineer uzayının elemanları olsun. Eğer,

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots c_nx_n = 0$$

eşitliğini gerçekleyen, hepsi birden sıfır olmayan, $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{C}$ sayıları bulunabiliyorsa $x_1, x_2, \dots, x_k$ elemanlarına lineer bağımlı, aksi halde lineer bağımsız denir.

1.2 KUVVETLİ VE ZAYIF YAKINSAKLIK

Tanım 1.2.1: *X* normlu lineer uzayında (x_n) dizisi verilsin. Eğer $\forall\varepsilon > 0$ için $\exists N(\varepsilon)$ sayısı var ve $\forall n > N(\varepsilon)$ için $\|x_n - x\| < \varepsilon$ ise, (x_n) dizisi $n \to \infty$ için *x*'e kuvvetli yakınsaktır ya da norma göre yakınsaktır denir. Bu durum $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ veya kısaca $x_n \to x$ ile gösterilir (Kızmaz 1993).

Tanım 1.2.2: *X* normlu lineer uzayında (x_n) dizisi verilsin X' de *X*'in dual uzayını göstermek üzere, eğer her $f \epsilon X'$ için $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$ olacak şekilde bir $x \epsilon X$ varsa (x_n) dizisine zayıf yakınsak bir dizidir denir ve bu durum $x_n \xrightarrow{w} x$ şeklinde gösterilir. *X* elemanına (x_n) dizisinin zayıf limiti adı verilir.

Teorem 1.2.1: Normlu bir *X* uzayında kuvvetli yakınsak bir dizi (x_n) olsun. O taktirde $x_n \to x$ olmak üzere,

(a) (x_n) dizisi *x*'e zayıf yakınsaktır.
(b) $\|x_n\| \to \|x\|$ dır (Kızmaz 1993).

İspat: Her $f \epsilon X'$ için, $|f(x_n) - f(x)| = |f(x_n - x)| \leq \|f\| . \|x_n - x\| \to 0|$ $(n \to \infty)$ dolayısıyla $x_n \xrightarrow{w} x$ dir.

(a) Normun özelliklerinden,

$$\|x_n\| \leq \|x_n - x\| + \|x\|$$
$$\|x\| \leq \|x_n - x\| + \|x_n\|$$

eşitsizlikleri yazılabilir. Bu iki eşitsizlikten,

$$\|x_n\| - \|x\| \leq \|x_n - x\|$$

olur. X normlu uzayında (x_n) dizisi x'e kuvvetli yakınsadığından $n \to \infty$ için limite geçilirse $\|x_n\| \to \|x\|$ sonucuna varılır.

Lemma 1.2.1: Normlu bir X uzayında zayıf yakınsak bir dizi (x_n) olsun. O taktirde,

(a) (x_n)'in zayıf limiti tektir.
(b) (x_n)'in her alt dizisi de aynı zayıf limite yakınsar (Kreyszig 1978).

İspat: **(a)** Kabul edelim ki (x_n) dizisinin x ve y gibi birbirinden farklı iki zayıf limiti olsun. Yani $x_n \xrightarrow{w} x$ ve $x_n \xrightarrow{w} y$ olsun. Bu durumda, her $f \in X'$ için $f(x_n) \to f(x)$ ve $f(x_n) \to f(y)$ yazılabilir. $f(x_n)$ bir sayı dizisi olduğundan limiti tektir. O halde $f(x) = f(y)$ olup, her $f \in X'$ için,

$$f(x) - f(y) = f(x - y) = 0$$

yazabiliriz. Bu ise $x - y = 0$ olmasını gerektirir ve zayıf limitin tekliğini gösterir.

(b) İspatın bu kısmı, $(f(x_n))$'in yakınsak bir sayı dizisi olması gerçeğinden kaynaklanır ve dolayısıyla $(f(x_n))$'in her alt dizisi de yakınsak olup dizi ile aynı limite sahiptir.

1.3 HİLBERT UZAYLARI

Hilbert uzayı teorisi 1912 yıllarında ünlü Alman matematikçilerinden Hilbert tarafından integral denklemlere ilişkin bir çalışmasında ele alınmış ve incelenmiştir. Bununla birlikte, Hilbert uzayının aksiyomatik tanımı daha sonraları J.Von Neumann (1927) tarafından verilmiştir. Bu tanım, Hilbert uzayının "ayrılabilme" koşulunu içermektedir. Ancak söz konusu koşul, H. Löwig (1934), F. Rellich (1934) ve F. Riesz (1934)'in çalışmaları sonucu teorinin bir çok kısımlarında gereksiz bir kısıtlama olarak görülmüş ve kaldırılmıştır.

Tanım 1.3.1: Elemanlarını *f,g,h,…,* ile gösterdiğimiz bir H kümesi, aşağıdaki koşulları sağlıyor ise **Hilbert uzayıdır** denir.

(a) H lineer bir uzaydır.
(b) H içinde bir iç çarpım tanımlıdır; yani her bir *f* ve *g* çiftine karşı,

(i) $(f,g) = \overline{(g,f)}$

(ii) $\forall \alpha \epsilon \mathbf{C}$ için $(\alpha f, g) = \alpha (f,g)$

(iii) $(f_1 + f_2, g) = (f_1, g) + (f_2, g)$

(iv) $f \neq 0 \Rightarrow (f,f) > 0$

koşullarını sağlayan bir (f,g) kompleks sayısı karşılık gelir.

(a) ve (b) koşulları sağlanıyorsa H uzayına **Öklid uzayı** denir. $\|f\| = \sqrt{(f,f)}$ sayısına f elemanının normu adı verilir.

(c) H uzayı $d(f,g) = \|f-g\|$ metriğine göre tamdır.

(d) H uzayı sonsuz boyutludur; yani her n doğal sayısı için, H içinde lineer bağımsız n tane vektör bulunabilir.

(e) Her Hilbert uzayının normu,

$$\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = 2.(\|f\|^2 + \|g\|^2)$$

şartını sağlar.

Kısaca iç çarpımın oluşturduğu norm altında H Banach uzayı ise H'ye bir Hilbert uzayı denir. Dolayısıyla her Hilbert uzayı aynı zamanda bir Banach uzayıdır, fakat tersi doğru değildir.

Örnek 1.3.1: $C[0,\frac{\pi}{2}]$ uzayı $\|f\| = \max_{a \le t \le b} |f(t)|$ normuna göre bir Banach uzayıdır, fakat Hilbert uzayı değildir.

İspat: $C[0,\frac{\pi}{2}]$ uzayının bir Banach olduğu örnek 1.1.2'de gösterilmiştir. Şimdi de $C[0,\frac{\pi}{2}]$ uzayının bir Hilbert uzayı olmadığını gösterelim. Bunun için $f(t) = \cos t$, $g(t) = \sin t$ alalım.

$$\|f\| = \|g\| = 1$$

ve

$$\|f+g\| = \max_{0 \le t \le \pi/2} |\cos t + \sin t| = \sqrt{2},$$

$$\|f-g\| = \max_{0 \le t \le \pi/2} |\cos t - \sin t| = 1$$

dir. Buradan

$$\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 \neq 2.(\|f\|^2 + \|g\|^2)$$

sonucuna varılır.

Tanım 1.3.2: $f_m(x)$ ve $f_n(x)$ bir (a,b) aralığında reel değerli ve integrallenebilen iki fonksiyon olsun. Eğer,

$$(f_n(x).f_m(x)) = \int_b^a f_m(x).f_n(x)dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \text{ için} \\ \neq 0 & m = n \text{ için} \end{cases}$$

eşitliği sağlanıyor ise $f_m(x)$ ve $f_n(x)$ fonksiyonlarına (a,b) aralığı üzerinde ortogonaldir denir. Daha genel olarak; eğer

$$\int_b^a r(x) f_m(x).f_n(x)dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \text{ için} \\ \neq 0 & m = n \text{ için} \end{cases} \qquad (1.3.1)$$

eşitliği sağlanıyor ise $f_m(x)$ ve $f_n(x)$ fonksiyonlarına (a,b) aralığı üzerinde $r(x) > 0$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonaldir denir.

Örneğin (-a,a) aralığında $1, \sin\frac{\pi x}{a}, \cos\frac{\pi x}{a}, \sin\frac{2\pi x}{a}, \cos\frac{2\pi x}{a}, \ldots,$ fonksiyonlar dizisi ortogonaldir. (1.3.1)'de m=n için elde edilen integralin,

$$\|f_n(x)\| = \left[\int_b^a f_n^2(x) r(x) dx\right]^{\frac{1}{2}}$$

değerine $f_n(x)$'in normu denir.

$$\|f_n(x)\| = \left[\int_b^a f_n^2(x) r(x) dx\right]^{\frac{1}{2}}$$

değerine $f_n(x)$'in normu denir.

Tanım 1.3.3: $f_m(x)$ ve $f_n(x)$ bir (a,b) aralığında reel değerli ve integrallenebilen iki fonksiyon olsun. Eğer,

$$(f_n(x).f_m(x)) = \int_b^a f_m(x).f_n(x)dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \text{ için} \\ 1 & m = n \text{ için} \end{cases}$$

eşitliği sağlanıyor ise $f_m(x)$ ve $f_n(x)$ fonksiyonlarına (a,b) aralığı üzerinde ortonormaldir denir.

Örneğin (-a,a) aralığında ortonormal fonksiyonlardır.

Ortonormal bir sistem aynı zamanda lineer bağımsızdır. f_n n=1,2,… elemanlarının sayılabilir sonsuz lineer bağımsız bir kümesi, aşağıdaki gibi Gramm Schmidt’s yöntemiyle sayılabilir sonsuz ortonormal bir sisteme dönüştürülebilir.

$$e_1 = \frac{f_1}{\|f_1\|}, e_2 = \frac{f_2 - (f_2, e_1)e_1}{\|f_2 - (f_2, e_1)e_1\|}, \ldots, e_n = \frac{f_n - (f_n, e_1)e_1 - \cdots - (f_n, e_{n-1})e_{n-1}}{\|f_n - (f_n, e_1)e_1 - \cdots - (f_n, e_{n-1})e_{n-1}\|}, \ldots,$$

Teorem 1.3.1: Ayrılabilir H Hilbert uzayında bir ortonormal baz vardır (Mikhailov 1978).

İspat: $f'_1, f'_2, \ldots,$ H’da her yerde yoğun bir küme olsun. f_1 sıfır olmayan ilk f'_k elemanı göstersin. Yani $(f_1 1^{\dagger\prime} = f_1 2^{\dagger\prime} = \cdots = f_1(k-1)^{\dagger\prime} = 0)$. f_2 ile f'_{k-1}, f'_{k-2},…, kümesinin sıfır olmayan ve f_1 ile lineer bağımsız ilk elemanı gösterilsin. f_1, f_2 lineer bağımsız eleman çiftidir. Böylece, $f_1, f_2, \ldots,$ sayılabilir sistemi lineer bağımsızdır. Bu sistemin elemanlarının lineer kombinasyonların kümesi H’da her yerde yoğundur. $f_1, f_2, \ldots,$ sistemini, $e_1, e_2, \ldots,$ elemanlarının sayılabilir ortonormal sisteme dönüştürebiliriz (Gramm S. Yöntemiyle) ki onun lineer kombinasyonu H’de yoğundur. Dolayısıyla bu sistem H için bir ortonormal baz oluşturur.

Teorem 1.3.2: Bir H Hilbert uzayı üzerinde tanımlanan her sınırlı lineer fonksiyonel için bir tek $z \in H$ vardır. Öyle ki tüm $x \in H$ için,

$$f(x) = (x, z) \tag{1.3.2}$$

dır (Mikhailov 1978).

İspat: $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ H için bir ortonormal baz ve $x \in H$ ’nın Fourier açılımı $\sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k$ olsun. $p \to \infty$ için, $\sum_{k=1}^{p} x_k e_k \to x$ dır. f’nin sürekliliğinden,

$$f(x) = (_{p\to\infty}^{lim} f\left(\sum_{k=1}^{p} x_k e_k\right)\square = (_{p\to\infty}^{lim} \sum_{k=1}^{p} [x_k f(e]_k)\square = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{z_k} \qquad (1.3.3) \text{ olur.}$$

Burada $z_k = (f e_k)$, k = 1,2,… dır. $z^p = \sum_{k=1}^{p} z_k e_k$ elemanını düşünelim.

$$|f(z^p)| \leq \|f\|.\|z^p\|$$

ve

$$f(z^p) = \sum_{k=1}^{\infty} z_k f(e_k) = \sum_{k=1}^{p} |z_k|^2 = \|z^p\|^2$$

olduğundan, tüm $p \geq 1$ için,

$$\sum_{k=1}^{p} |z_k|^2 = \|f\|^2$$

bulunur. O taktirde $\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|^2$ serisi yakınsaktır ve $\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|^2 = \|f\|^2$ dir. Bu durumda $\sum_{k=1}^{\infty} z_k e_k$ serisi H'nın normunda bir $z \in H$ elemanına yakınsar (z_k'lar z'nin Fourier katsayılarıdır).

(1.1.3)'de $x_k = (x, e_k)$ yazılır ve f'nin sürekliliğinden tekrar yararlanılırsa,

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (x, z_k e_k) = (x, \sum_{k=1}^{\infty} z_k e_k) = (x, z)$$

elde edilir.

Şimdi de z'nin tek olduğunu gösterelim. Varsayalım ki f için $f(x) = (x, z^{'})$ ve $f(x) = (x, z)$ olsun. O zaman tüm $x \in H$ $için$ $(x, z - z^{'}) = 0$ olur. Buradan da $z = z^{'}$ bulunur.

Lemma 1.3.1: Bir Hilbert uzayında $x_n \xrightarrow{w} x$ olması için gerek ve yeter koşul, uzaydaki her z için,

$$(x_n, z) \longrightarrow (x, z)$$

olmasıdır.

İspat: Bir H Hilbert uzayı üzerinde her sınırlı lineer f fonksiyoneli iç çarpım cinsinden ifade edilebilir, yani z f'e bağlı olmak üzere $\forall z \in H$ için,

$$f(x) = \langle x, z \rangle$$

f tarafından tek olarak belirlenmiş olup $\|z\| = \|f\|$ normuna sahiptir. Buna göre,

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) \quad = f(x)$$

$$\langle x_n, z \rangle \to \langle x, z \rangle$$

şeklinde ifade edilebilir.

Teorem 1.3.3: Bir Hilbert uzayında z_n , z 'ye zayıf ve x_n de x 'e kuvvetli yakınsıyor ise o zaman,

$$\langle x_n . z_n \rangle \longrightarrow \langle x . z \rangle$$

dir.

İspat:

$$|\langle x_n, z_n \rangle - \langle x, z \rangle + \langle x, z_n \rangle - \langle x, z_n \rangle| \leq |\langle x_n, z_n \rangle - \langle x, z \rangle| + |\langle x, z_n \rangle - \langle x, z_n \rangle|$$

$$= |x_n - x, z_n| + |\langle x, z_n \rangle - \langle x, z \rangle| \leq \|x_n - x\|. \|z_n\| + |\langle x, z_n \rangle - \langle x, z \rangle|$$

$n \longrightarrow \infty$ için limit alınırsa $\langle x_n, z_n \rangle \longrightarrow \langle x, z \rangle$ sonucuna varılır.

Lemma 1.3.2: Hilbert uzayında $x_n \xrightarrow{w} x$ ise $\|x\| \leq \left(_n \to \infty^{lim} \|x_n\|\right.$ dir.

İspat: $x_n \xrightarrow{w} x$ ise $\forall z \in H$ için $\langle x_n . z \rangle \to \langle x . z \rangle$ dir. Keyfi $z \in H$ olduğundan, z yerine $x \in H$ alınırsa,

$$\langle x_n . x \rangle \longrightarrow \langle x . x \rangle = \|x\|^2$$

$$|\langle x_n . x \rangle| \leq \|x_n\|. \|x\|$$

alt limite geçersek,

$$\|x\|^2 \leq \left(_n \to \infty^{lim} \|x_n\| \; \|x\|\right.$$

$$\|x\| \leq \quad \left(_n \to \infty^{lim} \|x_n\|\right.$$

bulunur.

Teorem 1.3.4: Bir Hilbert uzayının her sınırlı alt kümesi zayıf kopmaktır (Mikhailov 1978).

İspat: $e_k, k = 1,2,\ldots$ H Hilbert uzayı için ortonormal baz ve M'de H'da sınırlı bir küme olsun. M kümesinin elemanlarının keyfi bir $f^k, k = 1,2,\ldots$ dizisini düşünelim. Tüm k'lar için $\|f^k\| \leq c$ olduğundan $(f^k, e_1), k = 1,2,\ldots$ sayısal dizisi sınırlıdır.

$$|(f^k, e_1)| \leq \|f^k\| . \|e_1\| \leq c$$

$f^k, k = 1,2,\ldots$ dizisinden bir $f^{1,k}, k = 1,2,\ldots$ alt dizisi seçilebilir öyle ki $(f^{1,k}, e_1)$ sayısal dizisi bir σ_1 sayısına yakınsar. $(f^{1,k}, e_2)$ sayısal dizisi de yakınsaktır. Yani $f^{1,k}, k = 1,2,\ldots$ dizisinden bir $f^{2,k}, k = 1,2,\ldots$ alt dizisi seçilebilir ki $(f^{2,k}, e_2)$ bir σ_2 elemanına yakınsar ve bu şekilde devam edilebilir.

Biz $f^{k,k}, k = 1,2,\ldots$ diagonal dizisinin zayıf yakınsak olduğunu göstermek istiyoruz. Her $s \geq 1$ için,

$$(f^{\dagger}(k,k), e_1 s) \rightarrow \sigma_1 s \qquad (k \rightarrow \infty \text{ için})$$

dır.O halde her $m > 1$ için,

$$\left(f^{k,k}, \sum_{i=1}^{m} \sigma_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \overline{\sigma_i} (f^{k,k}, e_i) \rightarrow \sum_{i=1}^{m} |\sigma_i|^2 \qquad (k \rightarrow \infty \text{ için})$$

dır.

$$\left|\left(f^{k,k}, \sum_{i=1}^{m} \sigma_i e_i\right)\right|^2 \leq \|f^{k,k}\|^2 \sum_{i=1}^{m} |\sigma_i|^2 \leq c^2 \sum_{i=1}^{m} |\sigma_i|^2$$

olduğundan,

$$\sum_{i=1}^{m} |\sigma_i|^2 \leq c^2 \qquad (\text{her } m > 1 \text{ için})$$

dir. Böylece,

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\sigma_i|^2 \leq c^2$$

dir. $\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i e_i$ serisi bir $f \in H$ 'ya yakınsar ve $\|f\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\sigma_i|^2$ dir.

Şimdi $f^{k,k}, k = 1,2,\dots$ dizisinin f'e zayıf yakınsadığını gösterelim. g, H'nın herhangi bir elemanı olsun. Keyfi bir $\xi > 0$ için bir $s = s(\xi)$ seçelim; öyle ki, $\sum_{i=s+1}^{\infty} |g_i|^2 \le \xi^2$ Parseval-Stelov eşitsizliğinden,

$$|(f^{k,k} - f, g)| = \left|\sum_{i=1}^{\infty}((f^{k,k}, e_i) - \sigma_i)\overline{g_i}\right| \le \sum_{i=1}^{s}|(f^{k,k}, e_i) - \sigma_i| . |g_i| \qquad (1.3.4)$$

Ayrıca,

$$\left(\sum_{i=s+1}^{\infty}|\sigma_i| . |g_i|\right)^2 \le \sum_{i=s+1}^{\infty}|\sigma_i|^2 . \sum_{i=s-1}^{\infty}|g_i|^2 \le \|f\|^2\xi^2$$

$$\left(\sum_{i=s+1}^{\infty}|(f^{k,k}, e_1)| . |g_i|\right)^2 \le \sum_{i=s+1}^{\infty}|(f^{k,k}, e_i)|^2 . \sum_{i=s+1}^{\infty}|g_i|^2 \le c^2\xi^2$$

σ_i sayılarının tanımından aynı $k_0(\xi)$ için $k > k_0(\xi)$ (1.3.4)'nin sağ tarafındaki 1. terimi ξ 'dan küçük yapabilir. Böylece $k > k_0(\xi)$ için,

$$|(f^{k,k} - f, g)| \le \xi + \xi(c + \|f\|)$$

bulunur.

Tanım 1.3.4: (Ortogonal Projeksiyon) Ayrılabilir bir H Hilbert uzayının ortonormal bir bazı $e_1, e_2, \dots$ olsun. $e_{i1}, e_{i2}, \dots, e_{ik}, \dots$ bu bazın sayılabilir alt kümesi, bu seçilen alt kümenin tümleyeni de $e_{j1}, e_{j2}, \dots, e_{jk}, \dots$ olsun. η', η'' alt uzayları sırasıyla e_{ik}, $k = 1,2,\dots$ ve e_{jk}, $k = 1,2,\dots$ elemanlarının lineer örtüsünü göstersin. O taktirde keyfi bir f elemanı Fourier serisine açılabilir. P' ve $P''H$ üzerinde tanımlanan iki operatör olmak üzere,

$$f' = P'f = \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} f_{ik}\, e_{ik}, \quad f'' = P''f = \sum_{k=1}^{\infty} f_{jk}\, e_{jk}$$

eşitliklerinden $f = P'f + P''f$ yazılabilir.

Bu operatörlere H'nın ortogonal projeksiyonu denir. $P^{'}$'nün görüntü kümesi $\eta^{'}$, $P^{''}$'nün görüntü kümesi $\eta^{''}$'dür.

Bir ortogonal projeksiyon operatör sınırlıdır ve normu 1'dir. Gerçekten; $\forall f \in H$ için,

$$\|P^{'}f\|^2 = \|f^{'}\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |f_{ik}|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |f_k|^2 = \|f\|^2$$

$$\|P^{'}\| < 1$$

ve

$P^{'}e_{i1} = e_{i1}$ olduğundan $\|P^{'}\| = 1$ dir.

Bir ortogonal projeksiyon operatör self-adjointtir. Gerçekten; $\forall f, h \in H$ için,

$$(P^{'}f, h) = (\sum_{k=1}^{\infty} f_{ik} e_{ik}, h) = \sum_{k=1}^{\infty} f_{ik} (e_{ik}, h) = \sum_{k=1}^{\infty} f_{ik} \overline{h_{ik}} = (f, P^{'}h)$$

dır (Mikhailov 1978).

1.4 İKİNCİ BASAMAKTAN YARI LİNEER KISMİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SINIFLANDIRILMASI

n boyutlu Q bölgesinde,

$$Lu \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i^{'}(x) u_{x_i} + a(x) u = f(x) \qquad (1.4.1)$$

denklemini ele alalım. Burada $a_{ij}(x)$ katsayıları reel değerli, (1.4.1) denkleminin çözümü de $C^2(Q)$'ya ait olsun. $a_{ij}(x)$ katsayılarının oluşturduğu $A(x) = [a_{ij}(x)]$ matrisi simetrik matris kabul edilmektedir. Gerçekten,

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) u_{x_i x_j} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{'}(x) u_{x_i x_j} + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{''}(x) u_{x_i x_j}$$

$$a_{ij}^{'} = \frac{a_{ij} + a_{ji}}{2}, \qquad a_{ij}^{''} = \frac{a_{ij} - a_{ji}}{2}$$

$u_{x_i x_j} = u_{x_j x_i}$ olduğundan $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{''}(x) u_{x_i x_j} \equiv 0$ dır.

Böylece,

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{xixj} = \sum_{i,j=1}^{n} a'_{ij}(x)u_{xixj}$$

olur. Burada $[a'_{ij}(x)]$ matrisi simetriktir.

Q bölgesinin keyfi bir noktası x_0 ve $A(x_0)$ matrisinin özdeğerleri $\lambda_1(x_0), \lambda_2(x_0), \dots, \lambda_n(x_0)$ olsun. Pozitif özdeğerlerinin sayısı $n_+ = n_+(x_0)$, negatif özdeğerlerinin sayısı $n_- = n_-(x_0)$ ve sıfır özdeğerlerinin sayısını $n_0 = n_0(x_0)$ ile gösterelim. $n = n_+ + n_- + n_0$ dır.

Eğer $n_+ = n$ veya $n_- = n$ ise (1.4.1) denklemine x_0 noktasında **eliptik** tiptendir denir. Q bölgesinin her $x_0 \in Q$ noktasında eliptik ise (1.4.1) denklemine Q bölgesinde eliptik tiptendir denir. R^n'de eliptik tip denkleme örnek olarak,

$$\forall u = f$$

Poisson denklemini verebiliriz.

Eğer $n_+ = n-1$ ve $n_- = 1$ veya $n_+ = 1$ ve $n_- = n-1$ ise (1.4.1) denklemine x_0 noktasında **hiperbolik** tiptendir denir. (1.4.1) denklemi her $x_0 \in Q$ için hiperbolik ise, Q bölgesinde hiperbolik tiptendir denir. R^n uzayında hiperbolik tip denkleme örnek olarak,

$$u_{x_1x_1} + \dots + u_{x_{n-1}x_{n-1}} - u_{x_nx_n} = f(x)$$

Dalga denklemini verebiliriz. $n_0 = 0$ ve $1 < n_+ < n-1$ ise (1.4.1) denklemine x_0 noktasında **ultra hiperbolik** tip denklem denir. Örneğin,

$$u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} - u_{x_3x_3} - u_{x_4x_4} = f(x)$$

denklemi R^4'ün tümü üzerinde ultra hiperbolik tipten bir denklemdir.

Eğer $n_0 > 0$ ise (1.4.1) denklemine x_0 noktasında **parabolik** tiptendir denir. Q bölgesinin her $x_0 \in Q$ noktasında parabolik ise (1.4.1) denklemine Q bölgesinde parabolik tiptendir denir. R^n ‘de parabolik tip denkleme örnek olarak,

$$u_{x_1x_1} + \cdots + u_{x_{n-1}x_{n-1}} - u_{x_n} = f(x)$$

ısı denklemini verebiliriz.

Bununla birlikte bir denklem verilen bir bölgenin tüm noktalarında aynı tipten olmayabilir. Örneğin R^2 ’de,

$$u_{x_1x_1} + T(x_1)u_{x_2x_2} = f(x)$$

Chapligin denklemini ele alalım. Burada $T(x_1), x_1 > 0$ için pozitif , $x_1 < 0$ için negatif, $x_1 = 0$ için sıfır olan bir fonksiyondur. Chapligin denklemi, $x_1 > 0$ için eliptik, $x_1 < 0$ için hiperbolik, $x_1 = 0$ için parabolik tipten bir denklemdir.

1.5 HADAMARD ANLAMINDA İYİ KONULMUŞ PROBLEMLER

20. yüzyılın başlarında Fransız Matematikçisi Hadamard iyi konulmuş problem tanımını vermiştir. Bu tanımı

$$Au = f \tag{1.5.1}$$

için verelim.

$$A: U \longrightarrow F$$

operatörü U metrik uzayından F metrik uzayına tanımlı olsun. (1.5.1) denkleminin aşağıdaki özellikleri sağlayan çözümünün bulunması problemine (U, F) çifti için Hadamard anlamında iyi konulmuş problem denir.

1. Her $f \in F$ için problemin U uzayında çözümü vardır.
2. Problemin çözümü U’da tektir.
3. Problemin koşulları F’de az değiştiğinde çözüm U’da az değişir.

Bu şartlardan herhangi biri gerçekleşmez ise, probleme (U,F) uzay çiftinde Hadamard anlamında kötü konulmuş problem adı verilir. Bir problem bir uzay çifti için kötü, başka bir uzay çifti için iyi konulmuş olabilir. Örneğin türev bulma problemi $A \equiv \frac{d}{dx}$ $(u(0) = 0$ ve sürekli diferansiyellenebilen $u(x)$ fonksiyonlar kümesi A'nın tanım bölgesi olsun). Türev bulma problemi;

$$C[0,1] = \{f | f: [0,1] \to R \text{ } sürekli\}$$
$$\|f\|_{C[0,1]} = (_{x} \in [0,1]^{max} \{|f(x)|\}$$

ve

$$C^1[0,1] = \{f | f: [0,1] \to R \text{ } sürekli \text{ } ve \text{ } dif. bilir\}$$
$$\|f\|_{C^1[0,1]} = (_{x} \in [0,1]^{max} \{|f(x)| + |f'(x)|\}$$

olmak üzere ($C[0,1], C[0,1])$ uzay çifti için kötü konulmuş, ($C^1 [0,1], C[0,1])$ uzay çifti için ise iyi konulmuştur. Problemin ($C[0,1], C[0,1])$ uzay çiftinde çözümü var ve tektir fakat stabil değildir. Gerçekten,

$$u_n = \frac{1}{n} \sin n^2 x, \qquad u_n' = n \cos n^2 x$$

yani

$$(_{n} \to \infty^{lim} \|u_n(x)\|_C \to 0$$

dır. Fakat,

$$(_{n} \to \infty^{lim} \|u_n(x)\|_{C^1} \to \infty$$

olur. Benzer durum, ($C^1 [0,1], C[0,1])$ uzay çifti için,

$$\|u_n'(x)\|_C = \|u_n(x)\|_{C^1}$$

olup türev bulma problemi ($C^1 [0,1], C[0,1])$ uzay çifti için iyi konulmuştur.

Herhangi bir (U_1, F_1) uzay çifti için iyi, başka bir (U_2, F_2) uzay çifti için kötü konulmuş probleme (U_2, F_2)'de zayıf kötü konulmuş problem denir. Burada uzayların metrikleri fonksiyonun kendisi ve sonlu sayıda türevleri yardımıyla tanımlanmıştır. Örneğin türev bulma problemi ($C[0,1], C[0,1])$ uzay çiftinde zayıf kötü konulmuş problemdir.

Normları sonlu sayıda türevlerin yardımı ile meydana gelmiş uzay çiftlerinden hiçbirinde iyi konulmayan problemlere de kuvvetli kötü konulmuş problem denir.

1.6 BAZI PROBLEMLER

1.6.1 Cauchy,1.,2.ve 3. Karışık Problemler

$\Omega = \{x \in D \subset R^n (x,t) | x \in R^n, 0 < t < T\}$ bölgesinde verilen,

$$Lu \equiv u_{tt} - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) u_{xixj} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x) u_{xi} + b(x) u_t + a_0(x) u = f(x,t) \tag{1.6.1}$$

hiperbolik tip denkleminden,

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad u_t(x,0) = u_1(x) \tag{1.6.2}$$

koşulunu sağlayan çözümünün bulunması problemine **Cauchy problemi** denir. (1.6.2) şartına da Cauchy şartı denir. Eğer $D = R^n$ ise hiperbolik denklem için Cauchy problemi $(C^2(\Omega), C(\Omega))$ uzay çiftinde Hadamard anlamında iyi konulmuştur. Fakat D bölgesi R^n ile çakışmıyor ise (1.6.1)-(1.6.2) probleminin çözümü birden fazla olabilir. Yani $D \neq R^n$ iken hiperbolik tip denklem $(C^2(\Omega), C(\Omega))$ uzay çiftinde kötü konulmuştur. (1.6.1)-(1.6.2) probleminin çözümünün tekliğini garanti etmek için Ω bölgesinin sınırının,

$$\Gamma = \partial D \times (0,T) = \{(x,t) | x \in \partial D, 0 < t < T\}$$

kısmında ek koşul vermek gerekir. Örneğin,

$$u\big|_{\Gamma} = u_2(x,t) \tag{1.6.3}$$

koşulu verilebilir. (1.6.1)-(1.6.2)-(1.6.3) problemine **1.karışık problem** denir. Bu problem $(C^2(\Omega), C(\Omega))$ uzay çiftinde Hadamard anlamında iyi konulmuştur. (1.6.3) koşulu yerine,

$$\frac{\partial u}{\partial N}\Big|_{\Gamma} = u_3(x,t) \tag{1.6.4}$$

koşulu verilebilir. (1.6.1)-(1.6.2)-(1.6.4) problemine **2. karışık problem** denir. Bu problem $(C^2(\Omega), C(\Omega))$ uzay çiftinde Hadamard anlamında iyi konulmuştur.

$$\alpha(x,t)u(x,t) + \beta(x,t)\frac{\partial u}{\partial N}\Big|_{\Gamma} = u_4(x,t) \tag{1.6.5}$$

(1.6.5) koşulu verildiğinde elde edilen (1.6.1)-(1.6.2)-(1.6.5) problemine **3.karışık problem** denir. Bu problem $(C^2(\Omega), C(\Omega))$ uzay çiftinde Hadamard anlamında iyi konulmuştur. Burada $\alpha(x,t)$ ve $\beta(x,t)$ verilen keyfi fonksiyonlar olup $\alpha^2(x,t) + \beta^2(x,t) \neq 0$ dır. (1.6.1) denklemi yerine,

$$Lu \equiv u_{tt} + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{xixj} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)u_{xi} + b(x)u_t + a_0(x)u = f(x,t) \tag{1.6.6}$$

eliptik tipten bir denklem alınırsa, tüm bu problem çeşitleri $(C^2(\Omega), C(\Omega))$ uzay çiftinde Hadamard anlamında kötü konulmuştur. (1.6.1) denklemi yerine,

$$Lu \equiv u_t - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{xixj} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)u_{xi} + a_0(x)u = f(x,t)$$

parabolik tipten bir denklem alınırsa (1.6.2) şartı

$$u(x,0) = u_0(x)$$

olur ve parabolik tip denklem için Cauchy problemi, 1., 2. ve 3. karışık problemleri $(C^2(\Omega), C(\Omega))$ uzay çiftinde Hadamard anlamında iyi konulmuştur.

1.6.2 Dirichlet, Neumann, Roben Problemleri

Q bölgesinde,

$$Lu \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{xixj} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)u_{xi} + a(x)u = f(x) \tag{1.6.7}$$

denkleminden,

$$u\Big|_{\partial Q} = u_0(x) \qquad (1.6.8)$$

koşulunu sağlayan çözümünün bulunması problemine **Dirichlet problemi** (1.sınır değer), (1.6.8) şartına da Dirichlet şartı denir.

Eliptik denklem için Dirichlet problemi $(C^2(\Omega), C(\Omega))$ uzay çiftinde iyi konulmuş, hiperbolik ve parabolik tipten bir denklem için ise Dirichlet problemi $(C^2(\Omega), C(\Omega))$ uzay çiftinde kötü konulmuştur. Eğer (1.6.8) yerine,

$$\frac{\partial u}{\partial N}\Big|_{\partial Q} = u_1(x) \qquad (1.6.9)$$

şartı alınırsa (1.6.7) denkleminden (1.6.9) şartını sağlayan çözümün bulunması problemine **Neumann problemi** (2.sınır değer), (1.6.9) şartına da Neumann şartı denir. Burada N, ∂Q 'nun dış normalidir.

Eliptik tip denklem için Neumann problemi $(C^2(Q), C(Q))$ uzay çiftinde Hadamard anlamında iyi konulmuş, hiperbolik ve parabolik tip denklem için ise kötü konulmuştur. Eğer (1.6.8) yerine,

$$\alpha(x)u(x) + \beta(x)\frac{\partial u}{\partial N}\Big|_{\partial Q} = u_2(x) \qquad (1.6.10)$$

şartı alınırsa, (1.6.7) denkleminden (1.6.10) şartını sağlayan çözümün bulunması problemine **Roben problemi** (3.sınır değer), (1.6.10) şartına da Roben şartı denir. Burada $\alpha(x)$ ve $\beta(x)$ sürekli fonksiyonlar olup $\alpha^2(x) + \beta^2(x) \neq 0$ dır.

Eliptik tip denklem için Roben problemi $(C^2(Q), C(Q))$ uzay çiftinde Hadamard anlamında iyi konulmuş, hiperbolik ve parabolik tip denklem için ise kötü konulmuştur.

Örnek 1.6.1: Isı denklemi için Cauchy problemi kötü konulmuştur.

İspat:

$$u_t - \Delta u = 0$$

denklemini,

$$D = \{(x,t)|0 < x < \pi, \qquad 0 < t < T\}$$

bölgesinde inceleyelim. Cauchy şartı olarak,

$$u(x,T) = e^{-\sqrt{n}} \sin nx$$

alalım. Çözümü,

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t) \sin kx$$

şeklinde arayalım. Çözümü denklemde yerine yazarsak,

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_{kt}(t) + k^2 a_k(t)) \sin kx = 0$$

elde edilir. $\sin kx$'lerin lineer bağımsız olmasından,

$$a_{kt}(t) + k^2 a_k(t) = 0$$
$$a_k(T) = \delta_{n,k} e^{-\sqrt{n}}$$

bulunur. Bu denklem adi diferansiyel denklemdir. Problem adi diferansiyel denklem için Cauchy problemidir. Bu problem çözüldüğünde,

$$u(x,t) = e^{-\sqrt{n}} e^{-n^2(T-t)} \sin nx$$

çözümü elde edilir. $n \to \infty$ için $e^{-\sqrt{n}} \sin nx$'in tüm normları sonlu sayıda türevlerden oluşan uzayda sıfıra yaklaşır. Fakat,

$$u(x,t) = e^{-\sqrt{n}} e^{-n^2(T-t)} \sin nx$$

çözümü böyle uzaylarda $+\infty$ 'a yaklaşır. Dolayısıyla koşullar az değiştiğinde çözüm çok değiştiğinden problem stabillik şartını sağlamaz.

Örnek 1.6.2: Dalga denklemi için Dirichlet problemi kötü konulmuştur.

İspat:

$$u_{yy} - u_{xx} = 0$$

denklemini,

$$D = \{(x, y)|0 < x < 1, \qquad 0 < y < T\}$$

bölgesinde inceleyelim. Dirichlet şartları olarak,

$$u(0, y) = 0 \qquad u(x, 0) = 0$$
$$u(1, y) = 0 \qquad u(x, T) = 0$$

alalım. Çözümü,

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(y) \sin k\pi x$$

şeklinde arayalım. Çözümü denklemde yerine yazarsak,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(a_{k_{yy}}(y) + k^2\pi^2 a_k(y)\right) \sin k\pi x = 0$$

elde edilir. Problemin koşullarından,

$$u(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(0) \sin k\pi x = 0$$
$$u(x, T) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(T) \sin k\pi x = 0$$

ve $\sin kx$ 'lerin lineer bağımsız olmasından,

$$a_{k_{yy}}(y) + k^2\pi^2 a_k(y) = 0$$
$$a_k(0) = 0 \qquad a_k(T) = 0$$

bulunur. Bu denklem adi diferansiyel denklemdir. Problem adi diferansiyel denklem için Cauchy problemidir. Bu problem çözüldüğünde

$$u(x,y) = a_{km} \sin \frac{\pi y m}{T} \sin k\pi x$$

çözümü bulunur. Eğer T rasyonel ise lineer homogen problemin sıfırdan farklı bir çözümü vardır. Dolayısıyla problemin tek çözümü yoktur. T irrasyonel olduğunda problemin stabilliği bozulur.

1.7 GENELLEŞMİŞ TÜREV

f_α ve $v(x)$ fonksiyonları Ω 'da integrallenebilir fonksiyonlar olsun. Her bir $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ için, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$ olmak üzere,

$$\int_\Omega f_\alpha \varphi d\Omega = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v D^\alpha \varphi d\Omega$$

ise f_α'ya Ω bölgesinde $v(x)$ fonksiyonunun α 'ıncı mertebeden genelleşmiş türevi denir.

$$f_\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|} v}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n}} \quad , \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$$

işaret olunur.

Örnek 1.7.1: $Q = \{|x| < 1\}$ bölgesinde $f(x) = |x_1|$ fonksiyonunun genelleştirilmiş türevleri $f_{x_1} = sgn x_1, \quad f_{x_i} = 0, \quad i = 1,2,\dots,n$ dir. Gerçekten, herhangi $\varphi(x) \in C_0^1(\overline{Q})$ için,

$$\int_Q |x_1| \varphi_{x_1} dx = \int_{Q^+} \varphi_{x_1} dx - \int_{Q^-} x_1 \varphi_{x_1} dx$$

dir. Burada $Q^+ = Q \cap (x_1 > 0), \quad Q^- = Q \cap (x_1 < 0)$ bölgeleridir. Ostragradskii formülü kullanılırsa,

$$\int_Q |x_1| \varphi_{x_1} dx = \int_{Q^+} \varphi dx - \int_{Q^-} \varphi dx = \int_Q sgn x_1 \varphi dx$$

olur. Buradan $f(x) = |x_1|$ fonksiyonunun x_1'e göre genelleştirilmiş türevi $sgn x_1$ olduğu görülür. Şimdi de $i \geq 2$ için,

$$\int_Q |x_i| \varphi_{x_i} dx = \int_Q (|x_i|\varphi)_{x_i} dx = 0 = -\int_Q \varphi dx$$

elde edilir ki bu $f(x) = |x_i|$ fonksiyonunun x_i'ye göre (i=2,3,…,n) genelleşmiş türevinin sıfır olduğunu gösterir.

Örnek 1.7.2: $v(x_1, x_2) = f(x_1) + g(x_2)$ fonksiyonunun $-1 \le x_1 \le 1$, $-1 \le x_2 \le 1$ kare bölgesinde birinci mertebeden genelleştirilmiş türevi yoktur. Ancak $\frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2}$ ikinci mertebeden genelleştirilmiş türevi var ve sıfırdır.

İspat:

$$\overline{\Omega} = \{(x_1, x_2) | -1 \le x_1, x_2 \le 1\}, \ \varphi(x) = \varphi(x_1, x_2) \in C_0^2(\overline{\Omega})$$

$$\int_\Omega vD^\alpha \varphi d\Omega = (-1)^2 \int_\Omega f_\alpha \varphi(x) d\Omega$$

$$\iint_{-1}^1 v(x_1, x_2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1 dx_2$$

$$= \iint_{-1}^1 (f(x_1), g(x_2)) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1 dx_2$$

$$= \iint_{-1}^1 f(x_1) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1 dx_2 + \iint_{-1}^1 g(x_2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1 dx_2$$

$$= \int_{-1}^1 f(x_1) \left(\int_{-1}^1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} dx_2 \right) dx_1 + \int_{-1}^1 g(x_2) \left(\int_{-1}^1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1 \right) dx_2$$

$$= \int_{-1}^1 f(x_1) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \Big| dx_1 + \int_{-1}^1 g(x_2) \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} | dx_2$$

yazılır. φ 'nin kendisi ve türevleri sınırda sıfır olduğundan,

$$\iint_{-1}^{1} \frac{v(x_1, x_2)(\partial^2 \varphi)}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1 dx_2 = \int_{-1}^1 [f(x_1)]).0 dx_1 + \int_{-1}^1 [g(x_2)]).0 dx_2 = 0$$

dır (Yıldız 1995).

1.8 GALERKİN METODU

D bölgesi R^n uzayında sınırlı bir alt bölge olsun. Q_T ile silindirik bölgeyi, Γ_T ile silindirin yanal yüzeyini, ∂Q_T ile silindirin sınırını, D_T ile de silindirin üst kısmını ve D_0 ise silindirin tabanını göstermek üzere,

$$Q_T = \{(x,t)|x \in D, 0 < t < T\}$$
$$\Gamma_T = \{(x,t)|x \in \partial D, 0 < t < T\}$$
$$D_T = \{(x,T)|x \in D\}$$
$$D_0 = \{(x,0)|x \in \partial D\}$$

olsun.

Bu metod bir çok problemin çözümünün varlığını ispatlamak için kullanılan bir yöntemdir. Karmaşık problemlerde verilen denklemin katsayılarının zamandan bağımsız olması halinde problemi Fourier metodu ile çözmek mümkündür. Galerkin metodu ise daha genel olup, karmaşık problemlerde verilen denklemin katsayılarının zamana bağlı olması önemli değildir. Galerkin metodunu aşağıdaki örnek üzerinde gösterelim:

$$Lu \equiv u_{tt} - div(k(x)\nabla u) + a(x)u = f(x,t) \tag{1.8.1}$$
$$k(x) \in C^1(\overline{D}), a(x) \in C(\overline{D}); k(x) \geq k_0 = sabit > 0$$

Denkleminin Q_T bölgesinde,

$$u(x,t)\big|_{t=0} = \varphi(x) \tag{1.8.2}$$

$$u_t(x,t)\big|_{t=0} = \Psi(x) \tag{1.8.3}$$

başlangıç şartları ve

$$u(x,t)\big|_{\Gamma_T} = 0 \tag{1.8.4}$$

sınır şartlarını sağlayan problemin çözümünü bulalım. Bunun için, $v_1(x), v_2(x), \ldots$ fonksiyonları $C^2(\overline{D})$'den ve k=1,2,… $v_k\big|_{\partial D} = 0$ olmak üzere, keyfi lineer bağımsız ve $H^1(D)$ de tam olan fonksiyonlar sistemini göz önüne alalım. (1.8.1)-(1.8.4) probleminin yaklaşık çözümünü,

$$u_N(x,t) = \sum_{k=1}^{N} c_k(t) v_k(x) \tag{1.8.5}$$

şeklinde arayalım. Yaklaşık çözüm için başlangıç şartları,

$$\varphi^N(x) = \sum_{k=1}^{N} \varphi_k v_k(x)$$

$$\Psi^N(x) = \sum_{k=1}^{N} \Psi_k v_k(x)$$

biçiminde olsun. Çözümü (1.8.5)'de olduğu gibi,

$$(u_{N_{tt}} - div(k(x)\nabla u_N) + a(x)u_N, v_j) = (f(x,t), v_j), \qquad j = \overline{1,N}$$

burada $(.,.)$ $L_2(D)$'de iç çarpımdır.

$$(L_{u_N}, v_j) = (f(x,t), v_j), \qquad j = \overline{1,N} \tag{1.8.6}$$

sisteminden

$$u_N(x,t)\big|_{t=0} = \varphi^N \tag{1.8.7}$$

$$u_{N_t}(x,t)\big|_{t=0} = \Psi^N \tag{1.8.8}$$

şartlarını sağlayacak biçimde arayacağız.

(1.8.6)-(1.8.8) Cauchy probleminin çözümünün varlığı ispatlanabilir. Bunun için uygun homogen problemin $C^2(0,T)$'de yalnız sıfır çözümünün olduğunu göstermek yeterlidir (Naimark 1969).

$\{u_N(x,t)\}$'ler için ön değerlendirmelerden $\{u_N(x,t)\}$ yaklaşık çözümler dizisinin $H^1(Q_T)$'de sınırlı olduğu görülür. Hilbert uzayında sınırlı bir cümle zayıf kompakt olduğundan, $\{u_N(x,t)\}$

dizisinin zayıf yakınsak bir alt dizisi vardır. Dolayısıyla $\{u_N(x,t)\}$'den $H^1(Q_T)$'de zayıf yakınsak bir alt dizi seçilebilir.

$$(u_N, L^* v_j) = (f, v_j), \qquad j = \overline{1, N}$$

eşitliğinde $N \to \infty$ için limit alınırsa, genelleştirilmiş fonksiyonlar anlamında,

$$(u, L^* v_j) = (f, v_j), \qquad j = \overline{1, N}$$
$$(Lu - f, v_j) = 0 \quad j = \overline{1, N}$$

elde edilir. $\{v_j\}$'ler $L_2(D)$'de tam ve lineer bağımsız olduğundan,

$$Lu - f = 0$$

bulunur (Mikhailov 1978).

BÖLÜM 2

KİNETİK DENKLEMLER

Bu bölümde en önemli kinetik denklemler hakkında bilgiler verildi. Kinetik denklemler bir maddenin hareketinin sürekliliğini karakterize ederler ve bilimin temel denklemleridirler. Onlar genel olarak fiziksel, kimyasal, biyolojik ve diğer çeşit proseslerin mikroskobik ölçekte niteliksel ve niceliksel tasviri için kullanılırlar. Kinetik denklemler sıklıkla temel denklemler olarak bilinirler. Kinetik denklemler çoğunlukla integro-diferansiyel denklemler olup, sıklıkla nonlineerdir. (*F(x,p,t)*) burada *F(x,p,t)* *x* uzay koordinatına bağlı, *p* momentumlu, *t* zamanına göre maddenin dinamik durumunu karakterize eder. Eğer güçlü bir etkileşim varsa kinetik denklemler içerisinde quantum terimleri ortaya çıkar. Kinetik denklem örnekleri; Liouville denklemi, Boltzman denklemi, Vlasov denklemi, Bogolyuboz zincir denklemi, Fokker –Planck denklemi, Kuantum kinetik denklemleri. Kinetik denklemler ayrıntılı bilgi ve uygulamaları Case ve Zweifel (1967), Klimantovich (1982), Liboff (1979), Polyachenko ve Fridman (1976), Silin (1971), ve Cercignani (1975) ta bulunabilir. Şimdi kinetik denklemlerle ilgili örnekler veriyoruz. Bundan sonra dağılım fonksiyonu *F(x,p,t)* yeteri kadar diferensiyellenebilir ve p'ye göre yeterince hızlı azaldığı kabul edilecektir. Burada $x \in D$, $p \in R^n$, $t \in R^1$, olup D düzgün sınırlı bir bölge F(x,p,t)$\Delta x \Delta p$ çarpımı t anında faz hacmin birim elemanındaki parçacık sayısını temsil eder.

2.1 LİOUVİLLE DENKLEMİ

Aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H\} = 0, \tag{2.1}$$

Burada F(x,p,t) dağılım fonksiyonu, $x \in D$, $p \in R^n$, $t \in R^1$, H=H(x,p,t) Hamiltonian fonksiyonu,

$$\{F, H\} = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial x_j}\frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial F}{\partial p_j}\frac{\partial H}{\partial x_j}\right)$$

(2.1) denkleminde Hamiltonian fonksiyonu için sıklıkla,

$\mathrm{H} = \frac{1}{2}|p|^2 - \Phi(x,t)$ formu kullanılır.

Bunları Liouville denkleminde yerine yazarsak

$\frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial x_j}p_j + \frac{\partial F}{\partial p_j}\frac{\partial \Phi}{\partial x_j}\right) = 0$ elde edilir.

2.2 BOLTZMANN DENKLEMİ

Boltzman denkleminin formu:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial x_j}p_j = stF .$$

Burada *stF* çarpışma integrali olarak adlandırılır. *F*(x,p,t) dağılım fonksiyonu

stF aşağıdaki biçimde ifade edilir.

$$stF = \int_{R^n}\int_{R^n}\int_{R^n} w(p, p_1; p', p_1')\,[F(x,p,t)\,F(x, p_1, t) - F(x, p', t)\,F(x, p_1', t)]\,dp_1\,dp'\,dp_1',$$

Burada $w(p, p_1; p', p_1')$

p, p_1 momentumu iki parçacığın çarpışma ihtimalini karakterize eden değişim sonrası moment p', p_1' olur.

$$w(p, p_1; p', p_1') = w(p', p_1'; p, p_1).$$

Boltzman denklemi genellikle gaz dinamiği yönteminin niteniksel ve niceliksel olarak anlamamızda yardımcı olur.

2.3 QUANTUM KİNETİK DENKLEMLERİ

Quantum kinetik denklemlerinin integro diferansiyel denklemleri aşağıdaki gibidir.

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H\} + \sigma F$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n h} \int_{R^{2n}} \left[\Phi\left(x - \frac{1}{2}hy, t\right) - \Phi\left(x + \frac{1}{2}hy, t\right)\right] e^{-iy(p-p')} . F(x, p', t)\, d p'\, dy$$

$$+ stF + q(x,p,t) \qquad (2.2)$$

Burada F (x,p,t) quantum dağılım fonksiyonu, H, Hamiltonian fonksiyonu, Φ, ortalama potansiyel, σ (x,p,t) emilim, h plank sabiti, stF çarpışma integrali, q (x,p,t) kaynağı belirleyen fonksiyondur.

$$\int_{R^n} [\Phi] \exp[-iy(p - p')]\, d p'\, dy$$

İntegralin varlığı denklemin kuantum karakterini ifade eder. Eğer $\sigma = 0$, $stF = 0$, $q = 0$ ve $H = |p|^2 / 2 + \Phi$ (x,t) ise kuantum dağılım fonksiyonu ψ (x,t) dalga fonksiyonu ile aşağıdaki eşitlikle bağlıdır.

$$F(x,p,t) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{R^n} \psi^*\left(x - \frac{1}{2}hy, t\right) e^{iyp}\, dy$$

ψ (x,t) dalga fonksiyonu ile Schrödinger denkleminin çözümüdür.

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{1}{2h^2}\,\Delta\psi + \Phi\psi.$$

h'nın kuvvetleri genişletilerek quantum kinetik denklemi p'ye göre sonsuz mertebeden bir denklem formunda şöyle ifade edilebilir:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H\ \} + \sigma F = \sum C_\alpha h^{2\alpha} D_x^{2\alpha+1}\Phi D_P^{2\alpha+1} F + stF + q$$

Burada C_α sabitler, sırasıyla D_x ve D_p x ve p'ye bağlı diferansiyel operatörler.

Önceki denklem çeşitli klasik yaklaşımlar elde etmek için kullanılır. (Aşağıdaki gibi sadece α =0 durumundaki terimler dikkate alındığında):

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H\ \} + \sigma F = \sum \frac{\partial\Phi}{\partial x_j}\partial F \partial p_j + stF + q.$$

Eğer H=$|p|^2/2$, $\partial\sigma/\partial p_j$ =0 ve $stF=0$, (2) denklemi p'ye göre Fourier transformu aşağıdaki

ikinci mertebeden denklem $w(x,y,t) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{R^n} Fe^{-iyp}\,dp$:

$$\frac{\partial w}{\partial t} - i\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 w}{\partial x_i^2} + \sigma w$$

$$= \left[\Phi\left(x - \frac{1}{2}hy, t\right) - \Phi\left(x + \frac{1}{2}hy, t\right)\right] w + q.$$

2.4 TRANSPORT TEORİSİNİN LİNEER DENKLEMLERİ

Denge denklemleri olarak adlandırılır:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial F}{\partial x_i} + |\vec{v}|\sigma(x, v, t)F$$

$$= \int_{R^n} w(v', v, x, t) F(x, v', t) dv' + q(x, v, t). \tag{2.3}$$

Burada $F\Delta x\Delta v$ parçacıkların sayısını gösterir. Örneğin nötronlar t anında $\Delta x\Delta v$ birim hacmindeki elemanı, w dağılımı gösterir. q(x,v,t) kaynağı karakterize eden fonksiyon, $1/\sigma$ bunlardan bağımsız bir tanecik, $|\vec{v}|$, $\vec{v}$ vektörünün mutlak değeridir. $\vec{v} =(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ (2.3) formundaki lineer denklemler Boltzmann tipi nonlineer denklemlerden elde edilirler. (2.3) denklemine uygun olarak aşağıdaki denklem yazılabilir.

$$\frac{\partial F}{\partial t} + |\vec{v}|\Omega grad_x F + |\vec{v}|\sigma F = \int_{w_n} w(x, \Omega, \Omega', t) F d\Omega' + q(x, \Omega', t), \tag{2.4}$$

burada $|\Omega'|=1$, $|\Omega|=1$ ve w_n birim küre alanı.

2.5 VLASOV SİSTEMİ

Kinetik denklemlerin bu sistemi elektromagnetik alan içindeki yüklü par çacıkların etkileşimini tanımlar. Bu form:

$$\frac{\partial F_e}{\partial t} + \vec{v}\frac{\partial F_e}{\partial x} - e\left(\vec{E} + \frac{1}{C}\left[\vec{v}\vec{B}\right]\right)\frac{\partial F_e}{\partial p} = 0$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial t} + \vec{v}\frac{\partial F_i}{\partial x} + z\,e\left(\vec{E} + \frac{1}{C}\left[\vec{v}\vec{B}\right]\right)\frac{\partial F_e}{\partial p} = 0$$

$$rot\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad rot\vec{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + 4\pi c\vec{J}. \tag{2.5}$$

$$div\vec{B} = 0, \qquad div\vec{E} = 4\pi\rho$$

$$\rho = e\int_{R^n}(zF_i - F_e)d\vec{p}, \qquad \gamma = e\int_{R^n}(zF_i - F_e)\vec{v}d\vec{p}.$$

Burada F_e ve F_i elektronlar ve iyonlar için dağılım fonksiyonları, ρ ve γ sırasıyla yük ve yoğunluk $\vec{E}$ ve $\vec{B}$ sırasıyla elektrik ve magnetik alan kuvvetleri, e elektron yükü, z iyon yüküdür.

(2.5) sistemi F_e, F_i, $\vec{E}$, H için integro-diferensiyel denklemlerin nonlineer sistemidir.

2.6 FOKKER-PLANCK DENKLEMLERİ

Bu denklemler sıklıkla hafif gazın içindeki ağır gazın taşıma ve iletim işlevini ifade eder. Bunlar lineer integro-diferansiyel denklemlerdir. Bu gibi denklemlerin genel formu:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H\} = \int_{R^n} [w(p+q,q)F(p, p+q,t) - w(p,q)F(p,q,t)]dq. \tag{2.6}$$

Burada $w(p,q)$ yüklü ağır parçacıkların momentumu değiştirme olasılığıdır. (2.6) denkleminde integrandın Taylor serisinin açılımı kullanılarak ikinci mertebede fokker-planck kinetik diferan siyel denklemleri elde edilir:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H\} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial p_j} A_j F + \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial p_j} \frac{\partial}{\partial p_k} (B_{kj} F) = 0,$$

$$A_j = \int_{R^n} q_j w dq, \qquad B_{kj} = \int_{R^n} q_j q_k w dq,$$

2.7 BOGOLYUBOV ZİNCİR DENKLEMLERİ

Bu denklem sistemleri k taraflı dağılım fonksiyonları için kinetik denklemler zincirini gösterir.

$$F_k\left(x^1, x^2, ..., p^1, ..., p^k, t\right) = v^k \int F_N dx^{k+1} ... dx^N dp^{k+1} ... dp^N,$$

Burada k=1,2,…,N ve F_N Liouville denkleminin çözümü.

$$\frac{\partial F_N}{\partial t} + \{F_N, H_N\} = 0.$$

v çalışan bölgenin faz uzayının hacmi.

Bogolyubov zincir denklemlerini takip eden formda yazılımı:

$$\frac{\partial F_k}{\partial t} + \{F_k, H_k\} = \int_{R^{2n}} \{\Phi_k, F_{k+1}\} dx^{k+1} dp^{k+1},$$

K=1,2,…,N

burada H_k Hamilton fonksiyonu ve Φ_k potansiyel güç.

2.8 İNTEGRAL GEOMETRİ PROBLEMLERİNDE KİNETİK DENKLEMLER

$x \in R^n$ ve $t \in R$'de $\lambda(x,t)$ sonlu sürekli diferansiyellenebilir fonksiyon olsun. $\Gamma(x,p,t)$ ile p doğrusu ve (x,t) noktasının köşesi ile $(x + p(\tau - t), \tau), \quad t \leq \tau < \infty.$ ışınını gösteriyoruz.

$$F(x,p,t) = \int_t^\infty \lambda(x + p(\tau - t), \tau) d\tau.$$

Açıkça, *F(x,p,t),* $\Gamma(x,p,t)$ ışını boyunca λ'nın integralidir. Tanımından bellidir ki , *F(x,p,t),* kinetik denklemi sağlar.

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_j} p_j + \lambda = 0.$$

Not, λ p yönüne bağlı olabilir. $\Gamma(x,p,t)$, ışını Hamilton sistemini sağlayan $H(x,p)$ eğrileri ile yer değiştirir. $F(x,p,t)$ integrali için p doğrusu ve (x,t) noktasının köşesi ile öyle eğriler var ve biz sağ taraflı λ ile Liouville denklemini elde ederiz:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H\} = \lambda.$$

Doğrular ve eğrilerin doğal paremetrik durumları λ'nın integrali için ilgili kinetik denklem için sahip olduğu form:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_j} \Omega_j = \lambda, \qquad |\vec{\Omega}| = 1.$$

Daha genel keyfi eğriler için,

$$\sum_{j=1}^{n} (\frac{\partial F}{\partial x_j} \Omega_j - \frac{\partial F}{\partial \varphi_j}) K_j (x, \vec{\Omega}) = \lambda.$$

$n=2,\ x_1 = x,\ x_2 = y$ için,

$$\frac{\partial F}{\partial x} \cos\varphi + \frac{\partial F}{\partial y} \sin\varphi + K(x, y, \varphi) \frac{\partial F}{\partial \varphi} = \lambda.$$

$F(x, y, \varphi) = \int_{\Gamma(x,y,\varphi)} \lambda ds,$ burada $\Gamma(x, y, \varphi)$ (x, y) noktasının eğrisi

Eğer Γ eğrisi $ds^2 = a(dx^2 + dy^2),$

$$K = -(\frac{a_x}{a} \sin\varphi - \frac{a_y}{a} \cos\varphi).$$

$a = \lambda$ için ters kinematik denklemini elde ederiz:

$$\frac{\partial F}{\partial x} \cos\varphi + \frac{\partial F}{\partial y} \sin\varphi - (\frac{\lambda_x}{\lambda} \sin\varphi - \frac{\lambda_y}{\lambda} \cos\varphi) \frac{\partial F}{\partial \varphi} = \lambda.$$

BÖLÜM 3

KİNETİK DENKLEM İÇİN TERS PROBLEM

3.1 $Lu \equiv \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial v_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}-\frac{\partial H}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial v_i}\right)=\lambda(x,v)$ OPERATÖRÜ İÇİN TERS PROBLEMİN KONULUŞU

Bu bölümde

$\Omega=\{(x,v)\,|\,x\in D, v\in G\}$ bölgesinde verilen

$$Lu \equiv \{u,H\}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial v_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}-\frac{\partial H}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial v_i}\right)=\lambda(x,v) \tag{3.1}$$

denkleminden,

$\forall\eta\in \overset{0}{H}_{1,2}(\Omega)$ için

$$\langle\lambda,\hat{L}\eta\rangle=0 \tag{3.2}$$

$$u(x,v)\,|_{\partial\Omega}=u_0 \tag{3.3}$$

koşullarını sağlayan (u,λ) fonksiyon çiftinin bulunması ters problemi araştırılmıştır.

Burada $\hat{L}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial v_i}$ dir ve Ω R^{2n} $(n\geq 1)$ de bir bölgedir. $\partial D,\partial G\in C^2$ olan D ve G R^n'de sınırlıdır. $\partial\Omega=\overline{\Gamma}_1\cup\overline{\Gamma}_2$, $\Gamma_1=\partial D\times G$, $\Gamma_2=D\times\partial G$ dir.

Şimdi problemin çözümü için gerekli olan uzayları tanımlayalım.

$\overset{0}{H}_m(\Omega)$ Sobolev uzayı olmak üzere,

$H_{1,c}(\Omega) = \left\{ f \middle| f, f_{x_i}, f_{v_i}, f_{x_i v_j}, f_{v_i v_j} \in L_2(\Omega) \right\} \quad i = 1,\dots,n$

$\overset{0}{H}_{1,c} = H_{1,c} \cap \overset{0}{H}_1$ dır.

$\tilde{C}_0^3$ kümesi, $\tilde{C}_0^3 = \{\varphi : \varphi \in C^3(\Omega), \varphi|_{\partial\Omega} = 0\}$ şeklinde tanımlansın. $\{w_i\}_{i=1}^{\infty}$ sistemi, elemanları $\tilde{C}_0^3(\Omega)$'dan olan $L_2(\Omega)$'da tam ve ortonormal fonksiyonlar sistemi olsun. Bu sistemin lineer örtüsünü $\overset{0}{H}_{1,2}(\Omega)$'da her yerde yoğun farz edebiliriz. Gerçekten foksiyonel analizden bilindiği gibi $\tilde{C}_0^3(\Omega)$'dan alınan ve lineer örtüsü $\overset{0}{H}_{1,2}(\Omega)$'da her yerde yoğun olan bir sistem vardır. Bu sistem $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \tilde{C}_0^3(\Omega)$ olsun. Gerekirse bunu lineer örtüsü $L_2(\Omega)$'da her yerde yoğun bir sisteme genişletebiliriz. P_n $L_2(\Omega)$'dan M_n'ye tanımlı bir orta projektör olsun. Burada M_n ile $w_1, w_2, \dots, w_n$ fonksiyonlarının lineer örtüsü gösterilmiştir.

$\Gamma(A)$ da aşağıdaki şartları sağlayan *u* fonksiyonlar kümesi olsun.

i) $u \in \Gamma(A)$, genelleşmiş anlamda $Au \in L_2(\Omega)$; $Au = \hat{L}Lu$

ii) Her u için bir $\{u_k\} \subset \tilde{C}_0^3(\Omega)$ dizisi vardır ki, $L_2(\Omega)$'da ($k \to \infty$ için)

a) $u_k \xrightarrow{w} u$

b) $\langle Au_k, u_k \rangle \to \langle Au, u \rangle$ dur.

Genelleşmiş anlamda $Au \in L_2(\Omega)$ dır. Yani $f \in L_2(\Omega)$; $Au = f$ ve $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ için

$$\langle u, A^*\varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle$$

dır. Burada A^*, A'ın Lagrange-Conjugate diferansiyel ifadesidir.

3.2 TERS PROBLEMİN İNCELENMESİ

Problem 3.2.1: (3.1) denkleminden (3.2), (3.3) şartlarını sağlayan (u, λ) fonksiyon çiftinin bulunması.

Problem 3.2.1 için aşağıdaki teorem doğrudur.

Teorem 3.2.1: Kabul edelim ki;

1) $H(x,v) \in C^2(\overline{\Omega})$

2) $\forall \xi \in R^n, \forall (x,v) \in \overline{\Omega}$ olmak üzere, aşağıdaki eşitsizlikler sağlansın:

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 H}{\partial v_i \partial v_j} \xi^i \xi^j \geq \alpha |\xi|^2, \qquad \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j} \xi^i \xi^j \leq 0, \tag{3.4}$$

Burada α pozitif bir sayı, $u \in \Gamma(\mathrm{A})$ ve $\lambda \in L_2(\Omega)$

Bu durumda problem 3.2.1 en fazla bir (u, λ) çözümüne sahiptir.

İspat: (u, λ) 3.2.1 Problemi'nin çözümüdür. (3.2.1) ve (3.2.2)'den açıkça görülüyor ki $Au = 0$'dır. $u \in \Gamma(A)$, $\{u_k\}$ dizisi vardır öyle ki $u_k \in \tilde{C}_0^3$ ve $k \to \infty$,

$$u_k \xrightarrow{w} u \qquad L_2, \tag{3.5}$$

$$\langle Au_k, u_k \rangle \to 0.$$

Bölgenin sınırında $u_k = 0$ olduğunu dikkate alırsak, aşağıdaki sonuca erişiriz.

$$-\langle Au_k, u_k \rangle = \sum_{i=1}^{n} \left\langle \frac{\partial}{\partial v_i}(Lu_k), u_{kx_i} \right\rangle. \tag{3.6}$$

(3.6) denkleminin sağ tarafını aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial v_j}(Lu_k)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial v_i \partial v_j} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} - \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial u_k}{\partial v_i} \frac{\partial u_k}{\partial v_j} \right)$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial v_j} \left[\frac{\partial u_k}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial H}{\partial v_i} - \frac{\partial u_k}{\partial v_i} \frac{\partial H}{\partial x_i} \right) \right] \tag{3.7}$$

$$- \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\partial u_k}{\partial v_j} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial H}{\partial v_i} - \frac{\partial H}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial v_i} \right) \right]$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial H}{\partial v_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \frac{\partial u_k}{\partial v_j} \right) - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial v_i} \left(\frac{\partial H}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \frac{\partial u_k}{\partial v_j} \right).$$

Ω bölgesinde $u_k = 0$ koşulu ile,

$$-\langle Au_k, u_k \rangle = J(u_k) \tag{3.8}$$

buluruz.

Burada,

$$J(u_k) \equiv \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial v_i \partial v_j} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} - \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial u_k}{\partial v_i} \frac{\partial u_k}{\partial v_j} \right) d\Omega.$$

Ω sınırlı bir bölge ve bölgenin sınırında $u_k = 0$, (3.4)'ten aşağıdaki eşitsizliği oluştururuz.

$$J(u_k) \geq \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 H}{\partial v_i \partial v_j} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} d\Omega \geq C \int_{\Omega} u_k^2 d\Omega. \tag{3.9}$$

Burada $C > 0$ ve k'dan bağımsız. Böylelikle (3.5) (3.8) ve (3.9)'dan aşağıda belirtildiği

gibi

$$C\int_{\Omega} u^2 d\Omega \leq 0,$$

Ω bölgesinde $u = 0$, (3.2.1)'den $\lambda(x,v) = 0$ bulunur. Homogen sistemin yalnız sıfır çözümü varsa homogen olmayan sistemin çözümü vardır ve tektir. Böylelikle teorem ispatlanmış oldu.

Problem 3.2.1' verilen denklem;

$$Lu = \lambda + F, \tag{3.10}$$

Burada λ (3.2.2)'deki koşula uyar. F, $H_2(\Omega)$'nın bilinen bir fonksiyonu (u,λ) fonksiyonlar çifti $u|_{\partial\Omega} = 0$ (3.2.11) şartı altında bulunur.

Teorem 3.2.2: Farz edelim ki, $H \in C^2(\overline{\Omega})$ ve bütün $(x,v) \in \overline{\Omega}, \xi \in R^n$ için aşağıdaki eşitsizlikler sağlansın.

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 H}{\partial v_i \partial v_j} \xi^i \xi^j \geq \alpha_1 |\xi|^2, \qquad \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j} \xi^i \xi^j \leq -\alpha_2 |\xi|^2, \tag{3.4'}$$

Burada, α_1 ve α_2 pozitif sayılardır. $F(x,v) \in H_2(\Omega)$ için 3.2.1' probleminin (u,λ) çözümü vardır, öyle ki $u(x,v) \in \Gamma(A) \cap \overset{0}{H}_1(\Omega)$ ve $\lambda(x,v) \in L_2(\Omega)$ 'dır.

İspat: Problem 3.2.1' için aşağıda ki yardımcı problemi ele alalım.

$$Au = \Im \tag{3.12}$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0 \tag{3.13}$$

burada $Au = \hat{L}Lu$ ve $\Im = \hat{L}F$ dir. (3.12)-(3.13) probleminin yaklaşık çözümünü,

$$u_N = \sum_{i=1}^{N} \alpha_{N_i} w_i$$

şeklinde,

$$\langle Au_N - \Im, w_i \rangle = 0, \quad \text{i=1,2,…,N}, \tag{3.14}$$

veya

$$\left\langle \sum_{j=1}^{N} \alpha_{N_j} Aw_j - \Im, w_i \right\rangle = 0 \qquad \text{i=1,2,…,N}, \tag{3.15}$$

sisteminden arayalım. (3.15) sistemi α_{N_j} (j=1,2,…,N) ler için lineer cebirsel bir denklem sis temidir. Teorem 3.2.2 nin koşulları altında bir tek $(\alpha_{N_i})_{i=1}^{N}$ çözümünün olduğunu ispatlamak için, uygun homogen sistemin yalnız sıfır çözümünün olduğunu göstermek yeterlidir. Bu maksatla sistemin i. denklemini $-2\alpha_{N_i}$ ile çarpıp, 1'den N'ye kadar toplarsak;

$$-2\langle Au_N, u_N \rangle = 0 \qquad \text{elde ederiz.}$$

(3.8)'den;

$$-2\langle Au_N, u_N \rangle = 2J(u_N) = 0 \quad \text{olur.} \tag{3.16}$$

Teorem 3.2.2 nin kabulünden $\nabla u_N = 0$ olduğundan, Ω bölgesinde $u_N = 0$ dır. w_i' ler lineer

bağımsız olduğundan $\alpha_{N_i} = 0$, i=1,2,…,N dır. Sonuç olarak $\forall F(x,v) \in H_2(\Omega)$ için (3.15) sisteminin bir tek $\alpha_N = (\alpha_{N_i})_{i=1}^{N}$ çözümü vardır.

Şimdi $u_N(x,v)$'yi değerlendirmek için (3.15) sistemini denklemini $-2\alpha_{N_i}$ ile çarpıp, i'ye göre 1'den N'ye kadar toplarsak,

$$-2\langle Au_N, u_N \rangle = -2\langle \hat{L}F, u_N \rangle \tag{3.17}$$

bulunur. $u_N\big|_{\partial\Omega}=0$ 'e göre (3.17)'ün sağ tarafı düzenlenirse,

$$-2\left\langle \hat{L}F, u_N \right\rangle = 2\int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial v_i}\frac{\partial u_N}{\partial x_i}\, d\Omega \le \beta \int_\Omega \left|\nabla_v F\right|^2 d\Omega + \beta^{-1}\int_\Omega \left|\nabla_x u_N\right|^2 d\Omega.$$

elde edilir. Burada $\beta^{-1} < \alpha_1$ dır.(3.17)'ün sol tarafı $2J(u_N)$ olduğundan,

$$2J(u_N) \le \beta \int_\Omega \left|\nabla_v F\right|^2 d\Omega + \beta^{-1}\int_\Omega \left|\nabla_x u_N\right|^2 d\Omega$$

$$(\alpha_1 - \beta^{-1})\int_\Omega \left|\nabla_x u_N\right|^2 d\Omega + \alpha_1 \int_\Omega \left|\nabla_v u_N\right|^2 d\Omega \le \beta \int_\Omega \left|\nabla_v F\right|^2 d\Omega$$

$$\int_\Omega \left(\left|\nabla_x u_N\right|^2 + \left|\nabla_v u_N\right|^2 \right) d\Omega \le c \int_\Omega \left|\nabla_v F\right|^2 d\Omega$$

$$\left\| u_N \right\|_{\overset{0}{H}_1(\Omega)} \le c \left\| \nabla_v F \right\|_{L_2(\Omega)} \tag{3.18}$$

yazılır. Burada c, N'den bağımsız bir sabittir.

Böylece u_N, N=1,2,…,fonksiyonlarının kümesi $\overset{0}{H}_1$'de sınırlıdır. $\overset{0}{H}_1$ bir Hilbert uzayı olduğundan bu küme $\overset{0}{H}_1$'de zayıf kompakttır. Yani bu küme, $u \in \overset{0}{H}_1$ fonksiyonuna $\overset{0}{H}_1$'de zayıf yakınsayan bir alt dizi içerir (Bu alt diziyi de $\{u_N\}$ ile gösterelim. N=1,2,…). $\{u_N\}$'nin u'ya $\overset{0}{H}_1$'de zayıf yakınsamasından

$$\left\| u \right\|_{\overset{0}{H}_1} \le \underline{\lim}_{N\to\infty} \left\| u_N \right\|_{\overset{0}{H}_1} \le c \left\| \nabla_v F \right\|_{L_2(\Omega)} \tag{3.19}$$

yazılır. $u \in \overset{0}{H}_1$ olduğundan $u\big|_{\partial\Omega}=0$ dır. (3.15) sistemi $u_N\big|_{\partial\Omega}=0$'a göre düzenlenirse,

$$\left\langle Lu_N - F, \hat{L}w_i \right\rangle = 0 \qquad (i \le N \text{ için})$$

elde edilir. $N \to \infty$ için limite geçilir ve $\{w_i\}_{i=1}^{\infty}$ fonksiyonlar sisteminin lineer örtüsü $\overset{0}{H}_{1,2}(\Omega)$ de her yerde yoğun olduğundan $\forall \eta \in \overset{0}{H}_{1,2}(\Omega)$ için,

$$\left\langle Lu - F, \hat{L}\eta \right\rangle = 0 \tag{3.20}$$

dır. $\lambda = Lu - F$ koyarsak, $\forall \eta \in \overset{0}{H}_{1,2}(\Omega)$ için (3.2.2) koşulunu sağlayan $\lambda(x,v)$ (3.20) denkleminden elde edilir.

$$\|\lambda\|_{L_2(\Omega)} \le \|Lu\|_{L_2(\Omega)} + \|F\|_{L_2(\Omega)}$$

$$\|\lambda\|_{L_2(\Omega)} \le c\|u\|_{\overset{0}{H}_1(\Omega)} + \|F\|_{L_2(\Omega)}$$

ve

$$\|u\|_{\overset{0}{H}_1(\Omega)} \le c\left\|\nabla_v F\right\|_{L_2(\Omega)}$$

eşitsizliğinden

$$\|\lambda\|_{L_2(\Omega)} \le c\left\|\nabla_v F\right\|_{L_2(\Omega)} + \|F\|_{L_2(\Omega)}$$

bulunur.

Burada c, bölgenin büyüklüğüne ve verilen fonksiyonlara bağlı farklı sabitleri gösterir. Böylece $u \in \overset{0}{H}_1$, $\lambda \in L_2(\Omega)$ olduğu zaman Problem 3.2.1' bir (u,λ) çözümü vardır.

Şimdi $u \in \Gamma(A)$ olduğunu gösterelim.

i) $u \in L_2(\Omega)$, $F \in H_{1,2}$ olduğundan, genelleşmiş anlamda $Au = \Im \in L_2(\Omega)$ dır. Gerçekten;

$\forall \eta \in C_0^{\infty}(\Omega)$ için,

$$\left\langle u, A^*\eta \right\rangle = \left\langle u, L^*\hat{L}\eta \right\rangle = \left\langle Lu, \hat{L}\eta \right\rangle = \left\langle F, \hat{L}\eta \right\rangle = \left\langle \Im, \eta \right\rangle$$

dır. Burada $\Im = \hat{L}F \in L_2(\Omega)$ dır.

ii) $\langle Au_N, u_N \rangle \to \langle Au, u \rangle$ $\quad (N \to \infty$ için)

olduğunu gösterelim. P_N ortoprojektörü için (3.15) denklemleri, $P_N Au_N = P_N \Im$ şeklinde yazı labilir. P_N ortoprojektör olduğundan, $L_2(\Omega)$'da $P_N \Im$, $\Im$'e güçlü yakınsar. Yani

$$P_N Au_N \to \Im = Au \qquad (N \to \infty \text{ için})$$

dır. $\{u_N\}$ u'ya zayıf, $L_2(\Omega)$'da $\{P_N Au_N\}$'nin Au'ya güçlü yakınsamasından,

$$\langle P_N Au_N, u_N \rangle \to \langle Au, u \rangle \qquad (N \to \infty \text{ için})$$

elde edilir. P_N ve u_N'nin tanımından,

$$\langle Au_N, u_N \rangle = \langle Au_N, P_N u_N \rangle = \langle P_N Au_N, u_N \rangle$$

$$\langle Au_N, u_N \rangle \to \langle Au, u \rangle \qquad (N \to \infty \text{ için})$$

Böylece teorem 3.2.2 ispatlanmış olur.

Sonuç olarak incelenen bu problemin uygun uzaylarda Hadamard anlamında iyi konulmuş olduğu görülmüştür.

KAYNAKLAR

Amirov A (1995) *Inverse Problem For a Kinetic Equation* J.Inv III-Posed Problems, Vol. 3 pp. 351-357

Amirov A (2001) *Integral Geometry and Inverse Problems for Kinetic Equations,* VSP, Utrecht, The Netherlands.

Anikonov Yu E (2001) *Inverse Problems for Kinetic and other Evolution Equations,* VSP, Utrecht, The Netherlands.

Kızmaz H (1993) *Fonksiyonel Analize Giriş,* K.T.Ü. Basımevi Trabzon, 114, 212 s

Kolmogrov A N and Fomin S V (1970) *Introductory Real Analysis.* Prentice Hall International, Inc., London.

Kreysizg E (1978) *Introductory Functional Analysis with Applications,*John Wiley-Sons. Inc, Canada, pp.257-258

Mikhailov V P (1978) *Partical Differential Equations,* Mir Publishers, Moskow, pp.75,79,82,112,299.

Yıldız M (1995) $Lu = x\Delta u + ku_x = xf(x,y)$ *Eliptik Denklemi için Genelleştirilmiş Fonksiyon Sınıflarında Bazı Problemler,* Doktora Tezi A.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, Ankara, 16,24-27s

ÖZGEÇMİŞ

Özden ULKAR, 23.04.1975 yılında Kdz. Ereğli'de doğdu. 1992 yılında Kdz.Ereğli lisesinden mezun oldu ve aynı yıl Ankara Üniversitesi Fen Fakültesine girdi. 1996 yılında mezun olduktan sonra 1997 yılında Gazi Üniversitesi'nde formasyon eğitimini tamamladı. 2000 yılında M.E.B. ataması ile Akçakoca Hamiyet Sevil İ.Ö.O'da 3 yıl öğretmenlik yaptı ve halen çalışmakta olduğu Kdz.Ereğli Teknik ve Endüstri Meslek Lisesi'nin Anadolu kadrosuna matematik öğretmeni olarak atandı. Evli ve yaşları sırasıyla 9 ve 5 olan iki oğlu vardır. Halen 2006'da girdiği Z.K.Ü Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans programını sürdürmektedir.

Adres : Kırmacı mah. E. Özdamar sok. No: 29
KDZ. Ereğli ZONGULDAK

E-posta : eulkar@anadolusigorta.com.tr

Özden ULKAR