

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

BAZI FARK DENKLEMLERİNİN KARARLILIĞI

Durhasan Turgut TOLLU

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd.Doç. Dr. Necati TAŞKARA

2009

69 Sayfa

Jüri: Prof. Dr. Durmuş BOZKURT

Doç. Dr. Galip OTURANÇ

Yrd. Doç. Dr. Necati TAŞKARA

Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, maksimumlu fark denklemleri ve bazı fark denklemlerin denge noktalarının global asimptotik kararlılığı ile ilgili yapılmış çalışmalar hakkında bilgi verildi.

İkinci bölümde, fark denklemler ile ilgili genel tanım ve teoremler verildi.

Üçüncü bölümde, bazı rasyonel fark denklemler hakkında bilgi verildi.

Dördüncü bölümde de, [26] da verilen fark denkleminin ilk defa kararlılık analizi yapıldı.

Daha sonra $x_{n+1} = A_n + (x_{n-k}/x_n)^p$ rasyonel denkleminin ilk defa kararlılığı ve periyodikliği incelenerek yeni tanım ve teoremler verildi. Son olarak da, $x_{n+1} = (p_n x_{n-2} + x_{n-3}) / (q_n + x_{n-3})$ rasyonel fark denkleminin periyodik olma şartları elde edildi.

Beşinci bölümde ise, söz konusu denklemlerin kararlılığı veya periyodikliği ile ilgili nümerik uygulamalar verildi.

Anahtar Kelimeler: Maksimumlu Fark Denklem, Rasyonel Fark Denklem, Kararlılık, Periyodiklik, Denge Noktası.

ABSTRACT

The Post Graduate Thesis

STABILITY OF SOME DIFFERENCE EQUATIONS

Durhasan Turgut TOLLU

Selcuk University Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Necati TAŞKARA

2009

69 Pages

Jury: Prof. Dr. Durmuş BOZKURT

Doç. Dr. Galip OTURANÇ

Yrd. Doç. Dr. Necati TAŞKARA

This study consists of five sections. The first section, information about some difference equations with maximum and stability of equilibrium points of some difference equations studied before were given.

The second section, general definitions and theorems related to the difference equations is given.

In the third section, information was given about some rational difference equations.

In the fourth section, [26] that the stability analysis of difference equation is the first time. Then the first time, stability and periodicity of rational difference equation

$x_{n+1} = A_n + (x_{n-k}/x_n)^p$ was studied with a new definition and theorems. Finally, periodicity terms of rational difference equation $x_{n+1} = (p_n x_{n-2} + x_{n-3}) / (q_n + x_{n-3})$ was achieved.

The fifth section, numerical applications were given related to periodicity and the stability of these equations.

Keywords: Difference Equations with Maximum, Rational Difference Equations, Stability, Periodicity, Equilibrium Point.

1. GİRİŞ

1.1. Maksimumlu Fark Denklemlerle İlgili Yapılmış Çalışmalar

Bu bölümde, fark denklemlerinin önemli çalışma alanlarından olan maksimumlu ve minimumlu fark denklemler ile ilgili yapılan bazı çalışmalar hakkında kısa bilgiler verilmiştir.

Amleh (1998), G.Ladas yönetiminde yaptığı doktora tezinde; fark denklemlerinin üç farklı konusunu ele almıştır. İlk bölümde, $x_{n+1} = \max\left\{\frac{A}{x_n}, \frac{B}{x_{n-1}}\right\}$ fark denkleminin çözümlerinin sıfırdan farklı reel sayılar olan A, B parametreleri ve x_{-1}, x_0 başlangıç şartları için periyodik olduğunu göstermiştir. İkinci bölümde, $x_{n+1} = \frac{x_n + x_{n-1}x_{n-2}}{x_n x_{n-1} + x_{n-2}}$ rasyonel fark denkleminin global asimptotik kararlılığını incelemiş ve son bölümde ise, Plant-Herbivore sisteminin çözümlerinin sınırlılığı üzerine çalışmıştır.

Amleh, Hoag ve Ladas (1998),

$$x_{n+1} = \max\left\{\frac{1}{x_n}, \frac{A}{x_{n-1}}\right\}$$

fark denkleminin çözümlerinin periyodikliğini incelemişlerdir. Bu çalışmada; A parametresi ve başlangıç şartlarının sıfırdan farklı reel sayılar olduğunu kabul ederek, bu fark denklemin bütün çözümlerinin er geç periyodik olduğunu ve ayrıca A parametresi ve başlangıç şartlarına bağlı olarak çözümlerin er geç 2, 3 ve 4 periyotlu olabileceğini göstermişlerdir.

Grove, Kent ve Ladas (1998), yaptıkları çalışmada; $x_{n+1} = \frac{ax_n + b_n}{x_{n-1}}$ otonom olmayan Lyness fark denklemi ile $x_{n+1} = \frac{\max\{a_n x_n, b_n\}}{x_{n-1}}$ maksimumlu fark denkleminde

katsayıların negatif olmayan $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ ve $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizileri olduğunu varsaymışlar, bu

varsayımlar doğrultusunda bu denklemlerin bütün pozitif çözümlerinin sürekli ve sınırlı olabilmesi için yeter şartlar elde etmişlerdir. Ayrıca çalışmada zıt durumların her biri için örnekler vermişlerdir.

Janowski, Kocic, Ladas ve Tzanetopoulos (1998), yaptıkları çalışmada;

$$x_{n+1} = \min \left\{ \frac{A}{x_n x_{n-1} \dots x_{n-k}}, \frac{B}{x_{n(k+2)} \dots x_{n-(2k+2)}} \right\}, \text{ ve } x_{n+1} = \frac{\max \{x_n^k, A\}}{x_{n-1}} \text{ maksimumlu rasyonel}$$

fark denklemlerinin çözümlerinin sınırlılık ve salınımlılık özelliklerini incelemişlerdir. Bu fark denklemlerde A, k parametreleri ve başlangıç şartlarının pozitif sayı değerleri aldıklarını varsaymışlar ve çalışma sonucunda bu denklemin çözümlerinin sınırlı ve salınımlı olma şartlarını A, k parametreleri ile başlangıç şartlarına bağlı olarak elde etmişlerdir.

Valicenti (1999), yaptığı doktora tezinde $x_{n+1} = \frac{a_n x_n + b_n}{x_{n-1}}$ otonom olmayan

Lyness fark denklemi ile $x_{n+1} = \frac{\max \{a_n x_n, b_n\}}{x_{n-1}}$ maksimumlu fark denkleminin

çözümlerinin periyodikliği ve global asimptotik kararlılığı üzerine çalışmıştır.

Teixeria (2000), yaptığı doktora tezinde; ilk olarak A herhangi bir reel sayı ve

başlangıç şartları sıfır olmayan reel sayılar olmak üzere, $x_{n+1} = \frac{\max \{x_n, A\}}{x_n x_{n-1}}$ fark

denkleminin çözümlerinin periyodikliğini incelemiştir. İkinci bölümde ise,

$x_{n+1} = \frac{a}{x_n} + \frac{b}{y_n}, y_{n+1} = \frac{c}{x_n} + \frac{d}{y_n}$ fark denklem sisteminin çözümlerini analiz etmiş ve

sonuncu bölümde de $y_{n+1} = \frac{p + y_{n-1}}{q y_n + y_{n-1}}$ fark denkleminin pozitif parametreler ve

başlangıç şartları altında global asimptotik kararlı olduğunu göstermiştir.

Papascihinopoulos ve Hatzifilippidis (2001), katsayılarının pozitif sayı dizileri

ve başlangıç şartlarına pozitif sayı olarak aldıkları $x_{n+1} = \frac{\max \left\{ a_n \left(\prod_{i=n-k+1}^n x_i \right), b_n \right\}}{\prod_{i=n-k}^n x_i}$ fark

denkleminin pozitif çözümlerinin süreklilik, sınırlılık ve periyodiklik özelliklerini incelemişlerdir.

Mishev, Patula ve Voulov (2002), $x_{n+1} = \max \left\{ \frac{A}{x_n}, \frac{B}{x_{n-2}} \right\}$ fark denkleminin

periyodikliği üzerine yaptığı çalışmada; A, B, k parametreleri ile başlangıç şartlarını pozitif kabul ederek denklemin bütün pozitif çözümlerinin er geç periyodik olduğunu ispat etmişlerdir.

Voulov (2002), yaptığı iki çalışmadan birincisinde; G. Ladas tarafından verilen bir açık problemi çözmüştür. Bu çalışmada A, B, C parametreleri negatif olmayan reel

sayılar olmak üzere $A+B+C > 0$ için $x_n = \max \left\{ \frac{A}{x_{n-1}}, \frac{B}{x_{n-3}}, \frac{C}{x_{n-5}} \right\}$ fark denkleminin

bütün çözümlerinin periyodik olduğunu göstermiştir. İkincisinde ise A ve B parametreleri pozitif reel sayılar ve k ile m parametreleri pozitif tam sayılar olmak

üzere, $x_n = \max \left\{ \frac{A}{x_{n-k}}, \frac{B}{x_{n-m}} \right\}$ maksimumlu fark denkleminin pozitif çözümlerinin

periyodik karakterini incelemiştir. A, B, k ve m parametrelerine bağlı olarak denklemin bütün pozitif çözümlerinin er geç periyodik olduğunu ispat etmiştir.

Papaschinopoulos ve arkadaşları (2003), yaptıkları çalışmada daha önce Feuer tarafından çalışılmış olan $x_{n+1} = \frac{\max \{x_n, A\}}{x_n x_{n-1}}$ fark denkleminin çözümleri,

çözümlerinin periyodikliği ve değişmez aralığı üzerine çalışmışlardır.

Feuer (2003), $x_{n+1} = \frac{\max \{x_n^k, A\}}{x_n^l x_{n-1}}$ maksimumlu Lyness fark denkleminde

yaptığı çalışmada; A 'nın pozitif bir reel sayı, k, l ve başlangıç şartlarının da keyfi reel sayılar olduğunu kabul ederek denklemin çözümlerinin periyodiklik özelliğini incelemiştir.

Patula ve Voulov (2004), yaptıkları çalışmada A_n, B_n pozitif terimli ve 3

periyotlu diziler olmak üzere, $x_{n+1} = \max \left\{ \frac{A_n}{x_n}, \frac{B_n}{x_{n-2}} \right\}$ fark denkleminin çözümlerinin

periyodikliğini incelemiştir.

Çınar ve arkadaşları (2005), yaptıkları çalışmada; $A, B > 0$ olmak üzere, sıfırdan farklı başlangıç şartları için $x_{n+1} = \max \left\{ \frac{A}{x_n}, \frac{B}{x_{n-2}} \right\}$ fark denkleminin pozitif çözümlerinin periyodikliğini incelemişlerdir. Ayrıca, bu denklemi genelleştirerek elde ettikleri $x_{n+1} = \min \left\{ \frac{A}{x_n x_{n-1} \dots x_{n-k}}, \frac{B}{x_{n(k+2)} \dots x_{n-(2k+2)}} \right\}$ fark denkleminin pozitif başlangıç şartları altında periyodik olma durumlarını incelemişlerdir.

Yang ve arkadaşları (2006), $x_n = \max \left\{ \frac{1}{x_{n-1}^\alpha}, \frac{A}{x_{n-2}} \right\}$ maksimumlu fark denklemini üzerine yaptığı çalışmada $0 < \alpha < 1$ ve $A > 0$ olmak üzere fark denklemini için pozitif çözümlerin asimptotik davranışını çalışmışlardır. Bu denklemin her pozitif çözümünün $x^* = 1$ 'e yakınsadığını veya bu denklemin her pozitif çözümünün $A \leq 1$ veya $A > 1$ durumunda 4 periyot ile er geç periyodik olduğunu ispatlamışlardır.

Stefanidou ve Papaschinopoulos (2006), yaptıkları çalışmada; A_0, A_1 ve başlangıç şartları pozitif fuzzy sayıları, k ve m parametreleri pozitif tam sayılar olmak üzere $x_n = \left\{ \frac{A_0}{x_{n-k}}, \frac{A_1}{x_{n-m}} \right\}$ fuzzy fark denkleminin pozitif çözümlerinin periyodikliğini incelemişlerdir.

Yalçınkaya ve arkadaşları (2007), yaptıkları çalışmada; A parametresi herhangi bir reel sayı ve x_{-1}, x_0 başlangıç şartları sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere $x_{n+1} = \max \left\{ \frac{1}{x_n}, Ax_{n-1} \right\}$ maksimumlu fark denklemini tanımlamışlar ve bu denklemin çözümlerini incelemişlerdir. Bu fark denklemin A parametresine ve başlangıç şartlarına bağlı olarak çözümlerinin periyodikliğini incelemişlerdir.

Gelişken ve arkadaşları (2008), yaptıkları çalışmada; bir açık problem olan $x_{n+1} = \frac{\max \{x_n, A\}}{x_{n-1}}$ fark denkleminin çözümlerinin periyodikliğini incelemişlerdir.

1.2. Fark Denklemlerin Global Asimptotik Kararlılığı İle İlgili Yapılmış Çalışmalar

Amleh ve arkadaşları (1999),

$$x_{n+1} = \frac{x_n + x_{n-1}x_{n-2}}{x_n x_{n-1} + x_{n-2}}, x_{n+1} = \frac{x_{n-1} + x_n x_{n-2}}{x_n x_{n-1} + x_{n-2}}, x_{n+1} = \frac{x_n + x_{n-1}x_{n-2}}{x_n x_{n-2} + x_{n-1}}$$

denklemlerini incelemişler ve bu denklemlerin pozitif başlangıç şartlarına göre $\bar{x} = 1$ denge noktasının global asimptotik kararlı olduğunu göstermişlerdir. Ayrıca bu denklemlerin yarı döngü analizi ile de ilgilenip bir veya iki uzunluklu pozitif, bir veya üç uzunluklu negatif yarı döngüye sahip olduklarını göstermişlerdir.

Devault ve Galminas (1999), yaptıkları çalışmada $x_{-1}, x_0, A \in (0, \infty), p > 1$ için

$$x_{n+1} = \frac{A}{x_n^p} + \frac{1}{x_{n-1}^{1/p}}$$

fark denkleminin pozitif denge noktasının global asimptotik kararlı olduğunu göstermişlerdir.

Kruse ve Nasemann (1999), yaptıkları çalışmada, $x_{-3}, x_{-2}, x_{-1}, x_0$ pozitif başlangıç şartları altında

$$x_{n+1} = \frac{x_n + x_{n-1} + x_{n-2}x_{n-3}}{x_n x_{n-1} + x_{n-2} + x_{n-3}}$$

fark denkleminin $\bar{x} = 1$ denge noktasının global asimptotik kararlı olduğunu göstermişlerdir.

Feuer ve arkadaşları (2000), yaptıkları çalışmada, A herhangi bir reel sayı ve başlangıç şartları sıfır olmayan reel sayılar olmak üzere,

$$x_{n+1} = \frac{\max\{x_n, A\}}{x_n x_{n-1}}$$

fark denkleminin çözümlerinin global asimptotik kararlı olduğunu göstermişlerdir.

El-Metwally ve arkadaşları (2001),

$$x_{n+1} = \alpha + \beta x_{n-1} e^{-x_n}$$

fark denkleminin pozitif çözümlerinin global asimptotik kararlı olduğunu göstermişlerdir. Bunun yanında bu denklemin periyodik karakterini de incelemişlerdir.

Li ve Zhu (2003), yaptıkları iki çalışmadan birincisinde $a \in [0, \infty)$ ve başlangıç şartları $x_{-1}, x_0 \in (0, \infty)$ olmak üzere,

$$x_{n+1} = \frac{x_n x_{n-1} + a}{x_n + x_{n-1}}$$

fark denkleminin çözümlerinin global asimptotik kararlı olduğunu ve ikincisinde ise, $a \in [0, \infty)$ ve başlangıç şartları $x_{-2}, x_{-1}, x_0 \in (0, \infty)$ olmak üzere,

$$x_{n+1} = \frac{x_n x_{n-1} + x_{n-2} + a}{x_n + x_{n-1} x_{n-2} + a}$$

ve

$$x_{n+1} = \frac{x_n + x_{n-1} x_{n-2} + a}{x_n x_{n-1} + x_{n-2} + a}$$

fark denklemlerini incelemişlerdir. Bu çalışmalarında bu denklemlerin $\bar{x} = 1$ denge noktalarının global asimptotik kararlı olduğunu göstermişlerdir. Fakat, Yang (2005) yaptığı çalışmada; bu incelemelerle ilgili bazı hatalar tespit etmiş ve bu hataları düzelterek,

$$x_{n+1} = \frac{x_n x_{n-1} + x_{n-2} + a}{x_n + x_{n-1} x_{n-2} + a}$$

denklemini yeniden incelemiştir.

Yang ve Li (2003), yaptıkları iki çalışmadan birincisinde, $\alpha \geq 0$ ve $\beta, \gamma > 0$ olduğunda,

$$x_{n+1} = \frac{\alpha + \beta x_n}{\gamma - x_{n-1}}$$

rasyonel fark denkleminin pozitif çözümlerinin periyodikliğini, değişmez aralığını ve global asimptotik kararlılık karakterini incelemişlerdir. İkinci çalışmada ise,

$$x_{n+1} = \frac{\alpha - \beta x_n}{\gamma - x_{n-1}}$$

rasyonel fark denkleminin, $\alpha \geq 0, \beta, \gamma > 0$ ve $0 < \alpha < \beta(\gamma - \beta)$ şartları altında pozitif denge noktasının global asimptotik kararlı olduğunu göstermişlerdir.

Çınar ve arkadaşları (2004), $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$x_{n+1} = \frac{1 + x_n \sum_{i=1}^k x_{n-i}}{x_n + x_{n-1} + x_n \sum_{i=2}^k x_{n-i}}$$

fark denklem ailesindeki denklemlerin pozitif çözümlerinin global asimptotik kararlı olduğunu göstermişlerdir.

El-Afifi (2004), yaptığı çalışmasında; negatif olmayan katsayılar ve pozitif başlangıç şartları ile,

$$x_{n+1} = \frac{\alpha + \beta x_n + \gamma x_{n-1}}{Bx_n + Cx_{n-1}}$$

rasyonel fark denkleminin pozitif denge noktasının global asimptotik kararlı olduğunu göstermişlerdir. Bununla beraber, bu denklemin yarı döngü ve değişmez aralık analizini yapmışlardır.

El-Owaidy, Ahmed ve Mousa (2004), yaptıkları iki çalışmanın ilkinde, $\alpha \in (1, \infty), k = 1, 2, \dots$ olmak üzere pozitif başlangıç şartları için,

$$x_{n+1} = \alpha + \frac{x_{n-k}}{x_n}$$

fark denkleminin periyodik karakterini ve $\bar{x} = \alpha + 1$ pozitif denge noktasının global asimptotik kararlılığını incelemişlerdir. Diğerinde ise; $\alpha, \beta > 0$ olmak üzere,

$$x_{n+1} = \frac{\alpha - \beta x_{n-1}}{\gamma + x_n}$$

rasyonel fark denkleminin pozitif denge noktasının global asimptotik kararlı olduğunu göstermişlerdir.

Papaschinopoulos ve Schinas (2004), yaptıkları çalışmada, $k=1,2,\dots$ için $x_{-k}, x_{-k+1}, \dots, x_0$ pozitif başlangıç şartları altında, $i \neq j, j-1$ ve $j=1,2,\dots,k$ olmak üzere,

$$x_{n+1} = \frac{\sum_{i=0}^k x_{n-i} + x_{n-j+1}x_{n-j} + 1}{\sum_{i=0}^k x_{n-i}}$$

fark denklem ailesi üzerine çalışmışlardır. Bu ailenin fark denklemlerinin pozitif çözümlerinin salınımlı olduğunu ve $\bar{x}=1$ denge noktasının global asimptotik kararlı olduğunu göstermişlerdir.

Li ve Zhu (2004), yaptıkları iki çalışmada, $a, b \in [0, \infty)$ ve $x_{-2}, x_{-1}, x_0 \in (0, \infty)$ başlangıç şartları olmak üzere ilk çalışmada,

$$x_{n+1} = \frac{x_n x_{n-2} + a}{x_n + x_{n-2}}$$

ve

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1} x_{n-2} + a}{x_{n-1} + x_{n-2}}$$

rasyonel fark denklemlerinin denge noktalarının, ikincisinde ise

$$x_{n+1} = \frac{x_n x_{n-1}^b + x_{n-2}^b + a}{x_{n-1}^b + x_n x_{n-2}^b + a}$$

fark denkleminin $\bar{x}=1$ denge noktasının global asimptotik kararlı olduğunu göstermişlerdir.

Yan ve Li (2004), yaptıkları çalışmada; $A, b, b_k \in (0, \infty)$; $a, b_0, b_1, \dots, b_k \in [0, \infty)$ ve $k=1,2,\dots$ için,

$$x_{n+1} = \frac{a - bx_n}{A - \sum_{i=0}^k b_i x_{n-i}}$$

rasyonel fark denkleminin pozitif çözümlerinin global asimptotik kararlı olduğunu göstermişlerdir.

Yang ve arkadaşları (2004), yaptıkları iki çalışmanın ilkinde, $a, b \geq 0; c, d > 0$ için,

$$x_{n+1} = \frac{a + bx_{n-1} + cx_{n-1}^2}{d - x_{n-2}}$$

fark denkleminin, ikincisinde ise, $A_1, A_2, A_3, A_4, B_1, B_2, B_3, B_4$ pozitif sabitleri $A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = B_1 + B_2 + B_3 + B_4$ şartını sağlamak üzere, pozitif başlangıç şartları için

$$x_{n+1} = \frac{A_1 x_n + A_2 x_{n-1} + A_3 x_{n-2} x_{n-3} + A_4}{B_1 x_n x_{n-1} + B_2 x_{n-2} + B_3 x_{n-3} + B_4}$$

Putnam Type rasyonel fark denkleminin global asimptotik kararlılık karakterlerini incelemişlerdir.

Aloqeili (2005), yaptığı çalışmada, $x_{-1}, x_0 \in \mathbb{R}$ ve $a > 0$ için,

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1}}{a - x_{n-1} x_n}$$

rasyonel fark denkleminin kararlılık analizini ve yarı döngü analizini yapmıştır. Bununla birlikte bu denklemin bazı şartlar altında çözümlerini genellemiş ve periyodikliğini incelemiştir.

Camouzis (2005), yaptığı çalışmada; $\beta, \gamma, A, x_{-2}, x_{-1}, x_0 \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}, \beta + \gamma > 0$ ve $B, C > 0$ olup, paydası sıfır olmamak şartıyla,

$$x_{n+1} = \frac{\beta x_n + \gamma x_{n-2}}{A + Bx_n + Cx_{n-1}}$$

rasyonel fark denkleminin pozitif denge noktasının global asimptotik kararlı olduğunu göstermiştir.

Dehghan ve Douraki (2005), yaptıkları çalışmada; $B, C, \alpha, \beta, \gamma$ ve başlangıç şartları pozitif reel sayılar olmak üzere $k = 1, 2, \dots$ için,

$$x_{n+1} = \frac{\alpha + \beta x_{n-k+1} + \gamma x_{n-2k+1}}{Bx_{n-k+1} + Cx_{n-2k+1}}$$

rasyonel fark denkleminin pozitif denge noktasının global asimptotik kararlı olduğunu göstermişlerdir.

El-Owaidy, Ahmed ve Youssef (2005); α, β, γ, p ve başlangıç şartları negatif olmayan reel sayılar olmak üzere,

$$x_{n+1} = \frac{\alpha x_{n-1}}{\beta + \gamma x_{n-2}^p}$$

rasyonel fark denkleminin periyodik karakterini, salınımlılığını, sınırlılığını ve sıfır denge noktasının global asimptotik kararlılığını incelemişlerdir.

Hamza (2005), yaptığı çalışmada; a, x_{-1}, x_0 negatif reel sayılar olmak üzere,

$$x_{n+1} = \alpha + \frac{x_{n-1}}{x_n}$$

fark denkleminin salınımlılığını ve $\bar{x} = \alpha + 1$ denge noktasının global asimptotik kararlılığını çalışmıştır.

Saleh ve Aloqeili (2005),

$$y_{n+1} = A + \frac{y_{n-k}}{y_n}$$

fark denklemi üzerine yaptıkları çalışmada, $A \in (0, \infty), k = \{2, 3, 4, \dots\}$ alarak pozitif başlangıç şartları için bu denklemin periyodik karakterini ve $\bar{y} = \alpha + 1$ denge noktasının global asimptotik kararlılığını incelemişlerdir. Ayrıca; bu denklemin yarı döngü analizini de söz konusu şartlar altında yapmışlardır.

Saleh ve Aloqeili (2005),

$$y_{n+1} = A + \frac{y_n}{y_{n-k}}$$

fark denklemi üzerine yaptıkları çalışmada; $A < 0, k = \{1, 2, 3, \dots\}$ alarak negatif başlangıç şartları için tek negatif denge noktası olan $\bar{y} = A + 1$ noktasının global asimptotik kararlılığını incelemişlerdir. Ayrıca bu denklemin sınırlılık ve yarı döngü analizlerini yapmışlardır. Bununla birlikte, $A \neq 1$ iken bu denklemin iki asal periyotlu çözümlerinin var olmadığını göstermişlerdir.

Stevic (2005), yaptığı çalışmada; pozitif başlangıç şartları için,

$$x_{n+1} = \alpha + \frac{x_{n-1}^p}{x_n^p}$$

fark denkleminin çözümlerinin sınırlılığını, $\bar{x} = \alpha + 1$ denge noktasına göre bu çözümlerin salınımlılığını ve $\bar{x} = \alpha + 1$ denge noktasının global asimptotik kararlılığını incelemiştir.

Yan ve arkadaşları (2005), yaptıkları çalışmada; $\alpha, x_{-1}, x_0 \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$x_{n+1} = \alpha - \frac{x_n}{x_{n-1}}$$

fark denkleminin çözümlerinin sınırlılığını, $\bar{x} = \alpha - 1$ denge noktasına göre bu çözümlerin salınımlılığını ve $\bar{x} = \alpha - 1$ denge noktasının global asimptotik kararlılığını incelemiştir.

Stevo Stevic (2007), $n \in \mathbb{N}_0$ için,

$$x_{n+1} = \max \left\{ c, \frac{x_n^p}{x_{n-1}^p} \right\}$$

maksimumlu fark denklemi üzerine yaptığı çalışmada; $p, c \in (0, \infty)$ olmak üzere bu fark denklemin $\bar{x} = 1$ denge noktasının global çekimliliğini ve pozitif çözümlerinin sınırlılığını çalışmıştır. Bu çalışmada;

- a) $p \geq 4$ olduğunda sınırsız çözümlerin mevcut olduğunu
- b) $p \in (0, 4)$ olduğunda tüm çözümlerin sınırlı olduğunu
- c) $p \in (0, 4)$ ve $c \geq 1$ olduğunda her pozitif çözümün er geç $\bar{x} = 1$ 'e eşit olduğunu

d) $p, c \in (0, 4)$ için de tüm pozitif çözümlerin $\bar{x} = 1$ 'e yakınsadığını göstermiştir.

Christos Schinas ve Arkadaşları(2008), $n = 0, 1, \dots$ ve A_n dizisi sınırlı ve pozitif bir dizi, $p \in (0, 1) \cup (1, \infty)$ ve $x_{-1}, x_0 \in (0, \infty)$ olmak üzere $x_{n+1} = A_n + \left(\frac{x_{n-1}}{x_n} \right)^p$ denkleminin sınırlılığı, periyodikliği ve çekimliliğini incelemişlerdir.

Papaschinopoulos G. ve arkadaşları (2008), $x_{n+1} = \frac{p_n x_{n-2} + x_{n-3}}{q_n + x_{n-3}}$ fark denkleminin çözümlerinin kararlılığı, çekimliliği ve sınırlılığını incelemişlerdir.

2.FARK DENKLEMLER

Fark denklem; bir veya daha çok değişkenli bir fonksiyonun sonlu farklar ile bağımsız değişkenleri arasındaki cebirsel bir bağıntıdır. Diferansiyel denklemlere benzerlik gösteren ve inceleme süreci yönünden daha yeni olan fark denklemlere *fonksiyonel denklemler* de denir.

Diferansiyel denklemlerde fiziksel olayların matematiksel modeli, sürekli değişim oranları arasındaki denklemler ile ifade ediliyordu. Fakat 20. yüzyılın başlarında radyasyondaki quanta ile biyolojide görülen genetik olaylardaki gelişmeler, tüm doğa olaylarının süreklilik terimleri ile ifade edilmeyeceğini göstermiştir. Böylece fark denklemler kullanılarak diferansiyel denklemlerde görülen süreksizlik halleri kaldırılmak istenmiştir. Günümüzde birçok alanda uygulanan fark denklemler, daha çok hareket analizinde devreleri matematiksel olarak ifade etmede, ekonomide talep ve arz denklemlerini oluşturmada, ekonomik dalgalanmalar veya devresel hareketleri açıklamada, işsizlik oranı hesabında, spektrum analizinde filtre dizaynı gibi alanlarda yaygın olarak kullanılmaktadır.

Bu bölümde fark denklemler için literatürde var olan genel tanım ve teoremler verilmiştir.

x bağımsız değişkeninin sürekli olduğu durumda, $y(x)$ bağımlı değişkeninin değişimi $y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)$ türevleri yardımıyla açıklanabilmektedir. Ancak x in kesikli değerler alması durumunda değişim türevler yardımıyla açıklanamaz. Bu bölümde x in tamsayı değerler aldığı durumlarda ortaya çıkan ve içinde sonlu farkların bulunduğu denklemler üzerinde durulacaktır.

Tanım 2.1 n bağımsız değişken ve buna bağımlı değişken de y olmak üzere, bağımlı ve bağımsız değişken ile bağımlı değişkenin $E(y), E^2(y), \dots, E^{(n)}(y), \dots$ gibi farklarını içeren denkleme *Fark Denklem* denir.

Dikkat edilirse n 'nin sürekli olduğu halde diferansiyel denklemler ile arasında büyük benzerlikler vardır.

$$a_0 y(n) + a_1 y(n+1) = f(n)$$

denklemini birinci mertebeden fark denklemdir.

$$a_0 y(n-1) + a_1 y(n) + y(n+1) = g(n)$$

denklemini ise ikinci mertebeden fark denklemdir.

Buradaki E operatörü kaydırma operatörü olup, bağımsız değişkeni bir adım ileri öteler. Yani; x bağımsız ve $y(x)$ bağımlı değişken olmak üzere, h adım uzunluğu olsun. Bu durumda,

$$E(y(x)) = y(x+h)$$

olur.

Denklemin mertebesinin belirlenmesi; ya y 'nin hesaplanabilmesi için gerekli olan başlangıç şartı sayısının, ya da denklemdaki en büyük mertebeli terimin mertebesi ile en küçük mertebeli terimin mertebesi arasındaki farkın tespit edilmesiyle olur.

2.1. Lineer Fark Denklem

Tanım 2.1.1 Bir fark denkleminde bağımlı değişken birinci derecedense bu denkleme *Lineer Fark Denklem* denir. Genel olarak lineer fark denklemler:

$$a_0 y(k+n) + a_{n-1} y(k+n-1) + \dots + a_0 y(k) = f(k)$$

şeklinde gösterilir

Lineer fark denklemler, $f(k)$ ve $a_i (0,1,2,\dots,n)$ katsayılarının durumuna göre isimlendirilirler.

- i) Eğer $f(k) = 0$ ise denkleme *Lineer Homojen Fark Denklem* denir.
- ii) $a_i (0,1,2,\dots,n)$ katsayıları sabit iseler, denkleme *Sabit Katsayılı Lineer Fark Denklem* denir.

iii) $a_i (0,1,2,...n)$ katsayıları bağımsız değişkenin fonksiyonları iseler denkleme

Değişken Katsayılı Lineer Fark Denklem denir. Örneğin;

$$(k+1)k\Delta^2 y(k) - 6ky(k) + 10y(k) = 0, k \in \mathbb{Z}$$

Euler Fark Denklemini; değişken katsayılı lineer homogen bir fark denklemdir.

Örnek 2.1.1. $y_{k+2} - ay_k = 0; a, y_0, y_1 \in \mathbb{R}$ fark denkleminin genel çözümünü elde ediniz.

Çözüm. Bu denklem ikinci mertebeden sabit katsayılı lineer homogen bir fark denklemdir. Şimdi, y_0, y_1 başlangıç şartları için sırayla y_n değerleri elde edilsin. Bunun için y_0, y_1 başlangıç şartlarını denklemde yerine yazarak çözümü başlatmak gereklidir, şöyle ki:

$$y_2 = ay_0$$

$$y_3 = ay_1$$

$$y_4 = ay_2 = a(ay_0) = a^2 y_0$$

$$y_5 = ay_3 = a(ay_1) = a^2 y_1$$

$$y_6 = ay_4 = a(a^2 y_0) = a^3 y_0$$

$$y_7 = ay_5 = a(a^2 y_1) = a^3 y_1$$

sonuçları bulunur. Bu şekilde iterasyona devam edilirse görülür ki;

$$y_n = \begin{cases} a^k y_0, & n = 2k \\ a^k y_1, & n = 2k+1 \end{cases}, k = 0,1,\dots$$

şeklinde bir y_n çözümü elde edilir.

2.2.Fark Denklemler İçin Genel Tanım ve Teoremler

Teorem 2.2.1[7] reel sayıların bir alt aralığı olmak üzere;

$$f : I \times I \rightarrow I$$

sürekli diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun. O zaman $\forall x_{-1}, x_0 \in I$ için

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}) , \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.1)$$

denklemini bir tek $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ çözümüne sahiptir.

Tanım 2.2.1 Eğer $\bar{x}$ noktası $f(\bar{x}, \bar{x}) = \bar{x}$ denkleminin bir çözümü ise $\bar{x}$ 'e f 'nin *denge noktası* denir. Eğer $\forall n \geq 0$ için $x_n = \bar{x}$ ise $\bar{x}$ 'e f 'nin *sabit noktası* denir.

Örnek 2.2.1.

$$x_{n+1} = \frac{A}{x_n}$$

denkleminin denge noktalarının $\bar{x} = \pm\sqrt{A}$ olduğunu gösterelim.

Çözüm. Denge noktası tanımından, $f(\bar{x}, \bar{x}) = \bar{x}$ olur. Buradan,

$$\bar{x} = \frac{A}{\bar{x}}$$

yazılabilir. Böylece görülür ki;

$$\bar{x} = \pm\sqrt{A}$$

dır.

Tanım 2.2.2. $\bar{x}$,

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}) \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

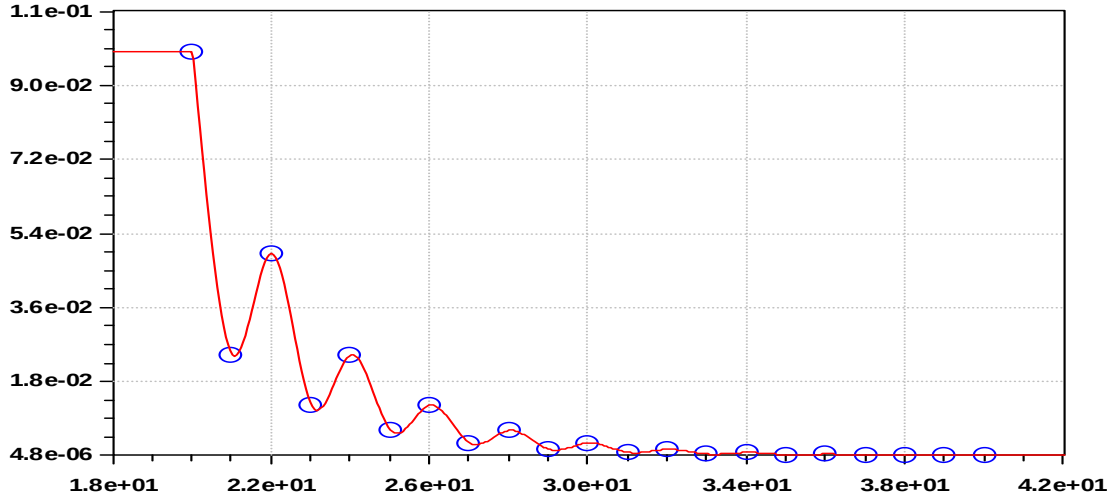
denkleminin denge noktası olmak üzere:

- a) Her $\varepsilon > 0$ sayısı için eğer $x_{-1}, x_0 \in I$ iken $|x_0 - \bar{x}| + |x_{-1} - \bar{x}| < \delta$ olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı varsa ve $\forall n \geq -1$ için $|x_n - \bar{x}| < \varepsilon$ eşitsizliği sağlanıyorsa denklemin $\bar{x}$ denge noktasına *Lokal Kararlıdır* denir.
- b) $\bar{x}$ denge noktası kararlı olsun. Eğer $x_{-1}, x_0 \in I$ iken $|x_0 - \bar{x}| + |x_{-1} - \bar{x}| < \gamma$ olacak şekilde $\gamma > 0$ sayısı varsa ve $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}$ oluyorsa $\bar{x}$ denge noktası *Lokal Asimptotik Kararlıdır* denir.
- c) Her $x_{-1}, x_0 \in I$ için eğer $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}$ ise; o zaman $\bar{x}$ denge noktası *Global Çekimlidir* denir.
- d) Eğer $\bar{x}$ denge noktası kararlı ve global çekimli ise $\bar{x}$ 'e *Global Asimptotik Kararlıdır* denir.
- e) Eğer $\bar{x}$ denge noktası kararlı değil ise $\bar{x}$ denge noktası *Kararsızdır* denir.
- f) Eğer $x_{-1}, x_0 \in I$ iken $|x_0 - \bar{x}| + |x_{-1} - \bar{x}| < r$ olacak şekilde bir $r > 0$ sayısı varsa ve $|x_N - \bar{x}| \geq r$ olacak şekilde bir $N \geq -1$ sayısı varsa $\bar{x}$ denge noktasına *Repeller* denir.

Örnek 2.2.1. $x_{n+1} - ax_{n-1} = 0$; $|a| < 1$, $x_{-1}, x_0 \in \mathbb{R}$ ikinci mertebeden lineer fark denkleminin $\bar{x} = 0$ denge noktası hem lokal asimptotik kararlı hem de global çekimli olduğundan $\bar{x} = 0$ denge noktası global asimptotik kararlıdır. Aşağıda söz konusu denklemin $a = 0,5$; $x_{-1} = 50$; $x_0 = 100$ şartları altındaki uygulaması verilmiştir.

n	x_n	n	x_n	n	x_n
20	0,097656	27	0,003052	34	0.000763
21	0,024414	28	0.006104	35	0,000191
22	0,048828	29	0,001526	36	0,000381
23	0,012207	30	0,003052	37	0,000095
24	0,024414	31	0.000763	38	0,000191
25	0,006104	32	0,001526	39	0,000048
26	0,012207	33	0,000381	40	0,000095

Tablo 1



Grafik 1

Görüldüğü gibi $x_{n+1} - ax_{n-1} = 0$; denklemi, $|a| < 1, x_{-1}, x_0 \in \mathbb{R}$ şartları altında global asimptotik kararlıdır.

Tanım 2.2.3. Eğer $\{x_n\}$ dizisi için $x_{n+p} = x_n$ ise, $\{x_n\}$ dizisine p periyotludur denir ve p bu şartı sağlayan en küçük pozitif tam sayıdır.

Tanım 2.2.4. Eğer $\{x_n\}$ dizisinde sonlu sayıda terim hariç tutulduğunda, geriye kalan sonsuz sayıdaki terim için $x_{n+p} = x_n$ ise, $\{x_n\}$ dizisine *er geç* p periyotludur denir ve p bu şartı sağlayan en küçük pozitif tam sayıdır.

Örnek 2.2.2. $x_{n+1} = \frac{1}{x_n}$ denkleminin periyodunun 2 olduğunu gösterelim. x_0 başlangıç şartı olmak üzere, $n = 0, 1, 2, \dots$ için

$$x_1 = \frac{1}{x_0}, \quad x_2 = \frac{1}{x_1} = x_0, \quad x_3 = \frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_0} = x_1$$

olup bu şekilde devam edilirse,

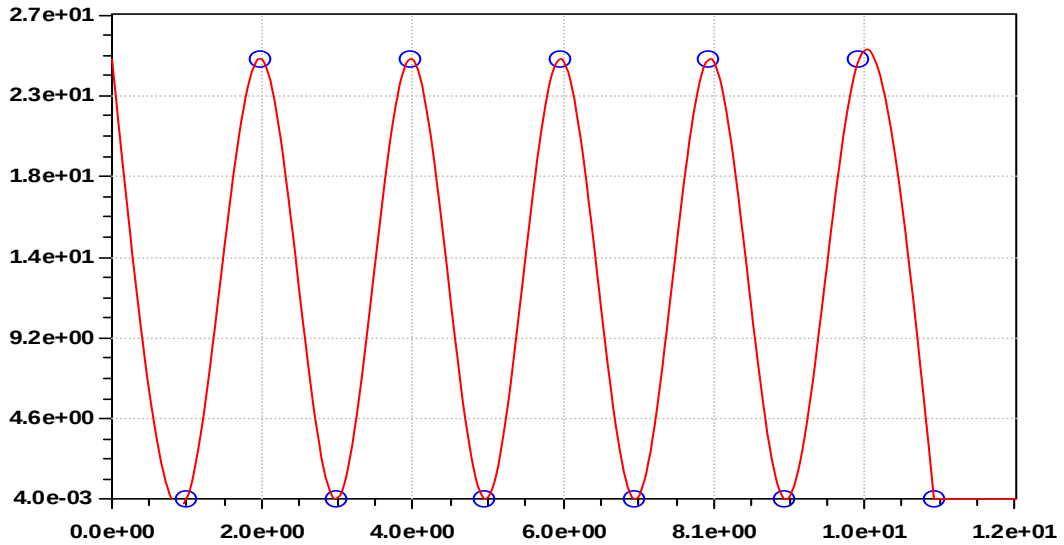
$$x_n = \left\{ \frac{1}{x_0}, x_0, \frac{1}{x_0}, x_0, \dots \right\}$$

şeklinde çözümler elde edilir. Bu da söz konusu denklemin 2 periyotlu olduğunu gösterir.

Aşağıda, yukarıdaki örneğin nümerik bir uygulaması verilmiştir. Burada, $x_0 = 25$ alınıp grafik, Curve Expert 1.1 programında hazırlanmıştır.

n	x_n	n	x_n
0	25,0	6	25,0
1	0,04	7	0,04
2	25,0	8	25,0
3	0,04	9	0,04
4	25,0	10	25,0
5	0,04	11	0,04

Tablo 2



Grafik 2

Görüldüğü gibi

$$x_{n+1} = \frac{1}{x_n}$$

denklemini $\{...0,04; 25; 0,04; 25; ...\}$ olacak şekilde iki periyotludur.

Tanım 2.2.5. Herhangi bir fark denkleminin karakterini inceleyebilmek için o denklemin denge noktasındaki kısmi türevleri ile oluşturulan yeni denkleme o denklemin *Denge Noktası Civarındaki Lineer Denklemi* denir. (2.1) denklemi için:

$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}) = f(u, v)$ olmak üzere oluşturulan

$$z_{n+1} - \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{x})}{\partial u} z_n - \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{x})}{\partial v} z_{n-1} = 0$$

denklemi, (2.1) denkleminin denge noktası civarındaki lineer denklemdir.

$$r = \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{x})}{\partial u}$$

ve

$$s = \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{x})}{\partial v}$$

olmak üzere,

$$y_{n+1} = ry_n + sy_{n-1} \quad (2.2)$$

elde edilir. Bu denkleme $\bar{x}$ denge noktası civarında lineer denklem denir.

(2.2) denkleminin karakteristik denklemi ise;

$$\lambda^2 - r\lambda - s = 0 \quad (2.3)$$

denklemdir.

Teorem 2.2.2.(Lineer Kararlılık Teoremi)

- a)** Eğer (2.3) denkleminin her iki kökü de mutlak değerce 1' den küçük ise, $\bar{x}$ denge noktası *lokal asimptotik kararlıdır*.
- b)** Eğer (2.3) denkleminin köklerinden en az biri mutlak değerce 1'den büyük ise, $\bar{x}$ denge noktası *kararsızdır*.
- c)** (2.3) denkleminin her iki kökünün de mutlak değerce 1' den küçük olması için gerek ve yeter şart $|r| < 1 - s < 2$ olmasıdır. Bu durumda, $\bar{x}$ denge noktası *lokal asimptotik kararlıdır*.

- d)** (2.3) denkleminin her iki kökünün de mutlak değerce 1' den büyük olması için gerek ve yeter şartlar $|s| > 1$ ve $|r| < |1-s|$ olmasıdır. Bu durumda, $\bar{x}$ denge noktası *repellerdir*.
- e)** (2.3) denkleminin, bir kökünün mutlak değerce 1'den büyük, diğer kökünün mutlak değerce 1' den küçük olması için gerek ve yeter şartlar $r^2 + 4s > 0$ ve $|r| > |1-s|$ olmasıdır. Bu durumda, $\bar{x}$ denge noktası *kararsızdır*. (Chatterjee ve arkadaşları,2003).

Benzer şekilde, mertebesi 3 olan fark denklemleri için Teorem 2.2 aşağıdaki şekilde genelleştirilebilir.

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.4)$$

fark denklemini ele alalım.

(2.4) denkleminde, $f(x_n, x_{n-1}, x_{n-2})$ fonksiyonunu $f(u, v, w)$ şeklinde düşünelim:

$$r = \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{x}, \bar{x})}{\partial u}, \quad s = \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{x}, \bar{x})}{\partial v}, \quad t = \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{x}, \bar{x})}{\partial w}$$

olmak üzere,

$$y_{n+1} = ry_n + sy_{n-1} + ty_{n-2} \quad (2.5)$$

denklemini elde edilir. Bu denkleme $\bar{x}$ denge noktası civarındaki lineer denklem denir.

(2.5) denkleminin *karakteristik denklemi*:

$$\lambda^3 - r\lambda^2 - s\lambda - t = 0 \quad (2.6)$$

ifadesidir. Teorem 2.2.2 (2.6) denkleminde yararlanılarak tekrar yazılabilir.

Teorem 2.2.3.(Lineer Kararlılık Teoremi)

- a)** Eğer (2.6) denkleminin bütün kökleri mutlak değerce 1' den küçük ise, $\bar{x}$ denge noktası *lokal asimptotik kararlıdır*.

- b)** Eğer (2.6) denkleminin köklerinden en az biri mutlak değerce 1' den büyük ise, $\bar{x}$ denge noktası *kararsızdır*.
- c)** (2.6) denkleminin bütün köklerinin mutlak değerce 1' den küçük olması için gerek ve yeter şartlar $|r+1| < 1-s$, $|r-3t| < 3+s$ ve $t^2 - s - rt < 1$ olmasıdır. Bu durumda, $\bar{x}$ denge noktası *lokal asimptotik kararlıdır*. (Chatterjee ve arkadaşları,2003)

Tanım 2.2.6. $\bar{x}$,

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

denkleminin bir denge noktası olsun.

Bu denklemin $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ çözümlerinin bir parçası için $\{x_L, x_{L+1}, \dots, x_M\}$ çözümlerinin tamamı $\bar{x}$ denge noktasından büyük ya da eşit ve $x_{L-1} < \bar{x}$ ve $x_{M+1} < \bar{x}$ ise $\{x_L, x_{L+1}, \dots, x_M\}$ kümesine *Pozitif Yarı Dönme* denir.

Aynı denklemin $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ çözümlerinin bir parçası için $\{x_L, x_{L+1}, \dots, x_M\}$ çözümlerinin tamamı $\bar{x}$ denge noktasından küçük ve $x_{L-1} \geq \bar{x}$ ve $x_{M+1} \geq \bar{x}$ ise $\{x_L, x_{L+1}, \dots, x_M\}$ kümesine *Negatif Yarı Dönme* denir. Burada M ve L değerleri $L \geq -1$ ve $M \leq \infty$ olacak şekilde düşünülmelidir.

Tanım 2.2.7. $\bar{x}$,

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

denkleminin bir denge noktası olsun. Bu denklemin $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ çözümlerinin pozitif ya da negatif yarı dönmeye sahip olduğunu varsayalım. Eğer bu dönmeyi ters yöne çeviren, yani; denklemin denge noktasından küçük ya da denklemin denge noktasından büyük veya eşit değere sahip en az bir tane x_N ($N \geq -1$) çözümü varsa

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

denklemine *Denge Noktası Civarında Salınımlıdır* denir.

Tanım 2.2.8. $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$. çözümlerinin hepsi birden ne pozitif nede negatif ise, bu çözümlere *Sıfır Civarında Salınımlıdır* denir. Aksi halde *Salınımlı değildir* denir.

Tanım 2.2.9. $\{x_n - \bar{x}\}$ dizisi salınımlı ise, $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ çözümüne $\bar{x}$ *Denge Noktası Civarında Salınımlıdır* denir.

Tanım 2.2.10. $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ dizisinde her n için $P \leq x_n \leq Q$ olacak şekilde P ve Q pozitif sayıları varsa, $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ dizisine *Sınırlıdır* denir.

Teorem 2.2.4 (Clark Teoremi) $p, q \in R$ ve $k, n \in \{1, 2, \dots\}$ olmak üzere;

$$x_{n+1} + px_n + qx_{n-k} = 0$$

fark denkleminin lokal asimptotik kararlı olması için gerek ve yeter şart $|p| + |q| < 1$ olmasıdır.

Örnek 2.2.3. $x_{n+1} - ax_{n-1} = 0$; $|a| < 1$, $x_{-1}, x_0 \in \mathbb{R}$ ikinci mertebeden lineer fark denkleminin $\bar{x} = 0$ denge noktası hem lokal asimptotik kararlı hem de global çekimli olduğundan $\bar{x} = 0$ denge noktası global asimptotik kararlıdır.

Çözüm. Denge noktası tanımından, $\bar{x} - a\bar{x} = 0$ olup, $\bar{x} = 0$ dır. Bu denklem,

$$x_{n+1} = 0x_n + ax_{n-1}$$

şeklinde yazılabilir. Teorem 2.2.4 bu denkleme uygulanırsa aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir.

$$|0| + |a| < 1$$

olup, $|a| < 1$ elde edilir. Böylece, Teorem 2.2.4 (Clark Teoremi)'e göre $x_{n+1} - ax_{n-1} = 0$ denklemi, $|a| < 1$, $x_{-1}, x_0 \in \mathbb{R}$ şartları altında lokal asimptotik kararlıdır. Dahası,

$$x_n = \begin{cases} a^k x_0, & n = 2k \\ a^k x_{-1}, & n = 2k + 1 \end{cases}, k = 0, 1, \dots$$

olduğundan,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k-1} = \lim_{k \rightarrow \infty} a^k x_{-1} = 0$$

ve

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k} = \lim_{k \rightarrow \infty} a^k x_0 = 0$$

olup,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 = \bar{x}$$

limiti elde edilir. Bu ise söz konusu denklemin $\bar{x} = 0$ denge noktasının global çekimli olduğunu gösterir. Böylece denklem global asimptotik kararlıdır.

Teorem 2.2.5.[7]

$$f(x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-k}) = 0, \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.7)$$

denkleminin bir $\bar{x}$ denge noktası civarındaki lineer denklemi,

$$x_{n+1} = p_0 x_n + p_1 x_{n-1} + \dots + p_k x_{n-k}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.8)$$

denklemdir. (2.8) lineer denkleminin karakteristik denklemi ise,

$$\lambda^{k+1} - p_0 \lambda^k - \dots - p_{k-1} \lambda - p_k = 0 \quad (2.9)$$

denklemdir. Burada $p_0, p_1, \dots, p_k$ katsayıları reel sayılar olmak üzere;

$$|p_0| + |p_1| + \dots + |p_k| < 1$$

ise, bu durumda, (2.9)'un bütün kökleri mutlak değerce 1'den küçüktür.

Teorem 2.2.6.(Comparison Teoremi)[7] m negatif olmayan bir tamsayı,

$\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m$ negatif olmayan reel sayılar ve β herhangi bir sayı olsun. $\{x_n\}_{n=-m}^{\infty}$,

$\{y_n\}_{n=-m}^{\infty}$ ve $\{z_n\}_{n=-m}^{\infty}$ reel sayıların birer dizisi olsun, öyle ki;

$$x_n \leq y_n \leq z_n, \quad -m \leq n \leq 0$$

ve öyle ki;

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &\leq \alpha_0 x_n + \alpha_1 x_{n-1} + \dots + \alpha_m x_{n-m} + \beta, \quad n = 0, 1, \dots \\
y_{n+1} &\leq \alpha_0 y_n + \alpha_1 y_{n-1} + \dots + \alpha_m y_{n-m} + \beta, \quad n = 0, 1, \dots \\
z_{n+1} &\leq \alpha_0 z_n + \alpha_1 z_{n-1} + \dots + \alpha_m z_{n-m} + \beta, \quad n = 0, 1, \dots
\end{aligned}$$

ise, bu durumda,

$$x_n \leq y_n \leq z_n, \quad -m \leq n$$

olur.

Teorem 2.2.7.[2] $[a, b]$ reel sayıların bir aralığı ve

$$f : [a, b] \times [a, b] \rightarrow [a, b]$$

şeklinde tanımlı f fonksiyonu sürekli ve aşağıdaki özellikleri sağlasın.

a) $f(x, y)$, her bir $y \in [a, b]$ için $x \in [a, b]$ 'e göre azalmayan ve $f(x, y)$, her bir $x \in [a, b]$ için $y \in [a, b]$ 'ye göre artmayandır.

b) Eğer $(m, M) \in [a, b] \times [a, b]$ ikilisi,

$$f(m, M) = m$$

ve

$$f(M, m) = M$$

sisteminin bir çözümü ise,

$$m = M$$

dir. O zaman söz konusu denklem bir denge noktasına sahiptir ve bütün çözümleri bu denge noktasına yakınsar.

İspat. $m_0 = a$ ve $M_0 = b$ olsun. $i = 1, 2, \dots$ için

$$M_i = f(M_{i-1}, m_{i-1})$$

ve

$$m_i = f(m_{i-1}, M_{i-1})$$

olur. Şimdi görülebilir ki; her bir $i \geq 0$ için,

$$m_0 \leq m_1 \leq \dots \leq m_i \leq \dots \leq M_i \leq \dots \leq M_1 \leq M_0$$

ve

$$m_i \leq x_k \leq M_i, \quad k \geq 2i+1$$

olur. Böylece;

$$m = \lim_{i \rightarrow \infty} m_i$$

ve

$$M = \lim_{i \rightarrow \infty} M_i$$

yazılabilir. O zaman

$$M \geq \limsup_{i \rightarrow \infty} x_i \geq \liminf_{i \rightarrow \infty} x_i \geq m$$

ve f sürekli olduğundan

$$m = f(m, M)$$

ve

$$M = f(M, m)$$

olur. Böylece,

$$m = M$$

olur. Bu ise istenen sonuçtur.

Teorem 2.2.8.[2] $[a, b]$ reel sayıların bir aralığı ve f

$$f : [a, b] \times [a, b] \rightarrow [a, b]$$

şeklinde tanımlı, sürekli ve aşağıdaki özellikleri sağlayan bir fonksiyon olsun.

a) $f(x, y)$, her bir $y \in [a, b]$ için $x \in [a, b]$ 'e göre artmayan ve $f(x, y)$, her bir $x \in [a, b]$ için $y \in [a, b]$ 'ye göre azalmayandır.

b) (2.1) fark denklemi $[a, b]$ kapalı aralığında asal iki periyotlu çözüme sahip değildir.

O zaman (2.1) denkleminin $[a, b]$ kapalı aralığında bir denge noktası vardır ve (2.1) denkleminin bütün çözümleri bu denge noktasına yakınsar.

Teorem 2.2.9.[7] $[a, b]$ reel sayıların bir aralığı olsun. f de

$$f : [a, b] \times [a, b] \rightarrow [a, b]$$

şeklinde tanımlı ve aşağıdaki özellikleri sağlayan sürekli bir fonksiyon olsun.

a) $f(x, y)$, her bir $x \in [a, b]$ ve $y \in [a, b]$ 'ye göre artmayandır.

b) Eğer $(m, M) \in [a, b] \times [a, b]$ ikilisi,

$$f(m, m) = M$$

ve

$$f(M, M) = m$$

sisteminin bir çözümü ise,

$$m = M$$

dir. Bu durumda denklem (2.1)'in bir tek $\bar{x} = [a, b]$ bir denge noktası vardır ve denklem (2.1)'in bütün çözümleri bu denge noktasına yakınsar.

Teorem 2.2.10.[7] $[a, b]$ reel sayıların bir aralığı olmak üzere. f de

$$f : [a, b] \times [a, b] \rightarrow [a, b]$$

şeklinde tanımlı ve aşağıdaki özellikleri sağlayan sürekli bir fonksiyon olsun.

a) $f(x, y)$, her bir $x \in [a, b]$ ve $y \in [a, b]$ 'ye göre azalmayandır.

- b) $f(x, x) = x$ denklemi bir tek pozitif çözüme sahiptir. Bu durumda denklem (2.1)'in bir tek $\bar{x} = [a, b]$ bir denge noktası vardır ve denklem (2.1)'in bütün çözümleri bu denge noktasına yakınsar.

3. RASYONEL FARK DENKLEMLERİNİN KARARLILIĞI

Bu bölümde önce,

$$x_{n+1} = \frac{\gamma x_{n-(2k+1)} + x_{n-2l}}{A + x_{n-2l}}, \quad n = 0, 1, \dots$$

denkleminin kararlılık karakteri incelenecek ve

$$x_{n+1} = \frac{\alpha + \beta x_n + \gamma x_{n-1}}{A + Bx_n + Cx_{n-1}}, \quad n = 0, 1, \dots$$

denkleminin $\alpha, \beta, \gamma, A, B, C \in (0, \infty)$ parametrelerine göre kararlılık analizi yapılacaktır.

Son olarak ise, $\alpha \in [1, \infty)$, $k \in \{1, 2, \dots\}$ ve keyfi reel sayılar olan $x_{-k}, x_{-k+1}, \dots, x_0$ başlangıç şartları için,

$$x_{n+1} = \alpha + \frac{x_{n-k}}{x_n}, \quad n = 0, 1, \dots$$

denkleminin kararlılık analizi yapılacaktır.

3.1 $x_{n+1} = \frac{\gamma x_{n-(2k+1)} + x_{n-2l}}{A + x_{n-2l}}$ Denkleminin Kararlılık Karakteri

$$x_{n+1} = \frac{\gamma x_{n-(2k+1)} + x_{n-2l}}{A + x_{n-2l}}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (3.1)$$

denkleminin kararlılık karakterini açıklayabilmek için öncelikle bu denklemin denge noktalarını elde etmek gerekir. Denge noktası tanımına göre (3.1) denklemi,

$$\bar{x} = \frac{\gamma \bar{x} + \bar{x}}{A + \bar{x}}$$

şeklinde yazılır. Buradan basit işlemlerle,

$$\bar{x} [\bar{x} - (\gamma + 1 - A)] = 0$$

denklemini elde edilir. Böylece, $A > 0$ için,

$$\bar{x} = 0$$

(3.1) denkleminin sıfır denge noktası; $\gamma + 1 > A$ için,

$$\bar{x} = \gamma + 1 - A$$

ifadesi ise (3.1) denkleminin pozitif denge noktası olur.

3.1.1. $\bar{x} = 0$ denge noktasının kararlılığı

$\bar{x} = 0$ noktasının (3.1) denkleminin denge noktası olması için gerek ve yeter şart $A > 0$ olmasıdır. Dahası;

$$\gamma + 1 \leq A$$

olduğunda $\bar{x} = 0$ (3.1) denkleminin tek denge noktasıdır. Fakat, $\gamma + 1 > A \geq 0$ olduğunda (3.1) denklemi bir tek pozitif denge noktasına sahip olur ve bu denge noktası ise;

$$\bar{x} = \gamma + 1 - A$$

dır.

Aşağıdaki teorem (3.1) denkleminin $\bar{x} = 0$ denge noktasının lokal kararlılığını açıklar.

Teorem 3.1.1.[14] (3.1) denkleminde $0 < \gamma$ ve $0 < A$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur.

- i) $A > \gamma + 1$ ise, $\bar{x} = 0$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.
- ii) $A = \gamma + 1$ ise, $\bar{x} = 0$ denge noktası lokal kararlıdır.
- iii) $0 < A < \gamma + 1$ ise, $\bar{x} = 0$ denge noktası kararsızdır.

İspat.

i) (3.1) denkleminin $\bar{x} = 0$ denge noktası civarındaki lineer denklemi;

$$z_{n+1} - \frac{\gamma}{A} z_{n-(2k+1)} - \frac{1}{A} z_{n-2l} = 0, \quad n = 0, 1, \dots$$

ifadesidir. Bu denklemin karakteristik denklemi ise;

$$\lambda^{K+1} - \frac{\gamma}{A} \lambda^{K-(2k+1)} - \frac{1}{A} \lambda^{K-2l} = 0$$

denklemdir.

$$\left| -\frac{\gamma}{A} \right| + \left| -\frac{1}{A} \right| = \frac{\gamma+1}{A}$$

eşitliği yazılabilir. Böylece,

$$A > \gamma + 1$$

olduğundan

$$\frac{\gamma+1}{A} < 1$$

olup karakteristik denklemin bütün kökleri 1'den küçüktür. Bu durumda $\bar{x} = 0$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.

ii) Şimdi de $A = \gamma + 1$ olduğunu kabul edelim. $\bar{x} = 0$ denge noktasının kararlı olduğunu göstereceğiz. Bunun için $\varepsilon > 0$ olsun. Ayrıca $\{x_n\}_{n=-K}^{\infty}$ (3.1) denkleminin negatif olmayan bir çözümü olsun. Öyle ki;

$$0 \leq x_{-K} < \varepsilon, 0 \leq x_{-K+1} < \varepsilon, \dots, 0 \leq x_0 < \varepsilon$$

koşulu sağlandığı takdirde,

$$0 \leq x_1 < \varepsilon$$

olduğunu göstermek yeterlidir. O halde,

$$0 \leq x_1 = \frac{\gamma x_{n-(2k+1)} + x_{n-2l}}{(\gamma+1) + x_{n-2l}} \leq \frac{\gamma x_{n-(2k+1)} + x_{n-2l}}{\gamma+1} < \frac{\gamma\varepsilon + \varepsilon}{\gamma+1} = \varepsilon$$

olur. Böylece iterasyonla işlem devam ettirilirse görülür ki;

$$0 \leq x_n < \varepsilon, \quad n = -K, -K+1, \dots$$

dir. Bu da ispatı tamamlar.

iii) c fonksiyonu,

$$c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$c(\lambda) = \lambda^{K+1} - \frac{\gamma}{A} \lambda^{K-(2k+1)} - \frac{1}{A} \lambda^{K-2l}$$

şeklinde tanımlansın. Eğer $0 < A < \gamma + 1$ ise, bu durumda;

$$c(1) = \frac{A - (\gamma + 1)}{A} < 0$$

ve

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} c(\lambda) = \infty$$

olur. Yani açıktır ki: c 'nin bir kökü 1'den büyüktür. Bu ise $\bar{x} = 0$ denge noktasının kararsız olması için yeterli bir sebeptir.

Teorem 3.1.2.[14] γ ve A birer pozitif reel sayı olmak üzere, $\gamma + 1 \leq A$ olsun. Bu durumda (3.1) denkleminin $\bar{x} = 0$ denge noktası global asimptotik kararlıdır.

İspat. $\bar{x} = 0$ denge noktası zaten önceki teoremden görüldüğü gibi lokal kararlıdır. Bu durumda $\bar{x} = 0$ denge noktasının global çekimli olduğunu göstermek yeterlidir.

(3.1) denkleminin negatif olmayan bir çözümü $\{x_n\}_{n=-K}^{\infty}$ olsun. Bu durumda,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$$

olduğu gösterilmelidir. Bu iki durumda incelenir.

i) $A > \gamma + 1$ olsun. $\forall n \geq 0$ için,

$$x_{n+1} = \frac{\gamma x_{n-(2k+1)} + x_{n-2l}}{A + x_{n-2l}} \leq \frac{\gamma}{A} x_{n-(2k+1)} + \frac{1}{A} x_{n-2l}$$

yazılabilir. $\{z_n\}_{n=-K}^{\infty}$ dizisi ise,

$$z_{n+1} = \frac{\gamma}{A} z_{n-(2k+1)} + \frac{1}{A} z_{n-2l}, \quad n = 0, 1, \dots$$

denkleminin çözümü olsun. Bu çözüm için başlangıç şartları,

$$z_{-K} = x_{-K}, \quad z_{-K+1} = x_{-K+1}, \dots, z_0 = x_0$$

olsun. Teorem 2.2.6'dan,

$$x_n \leq z_n, \quad n \geq -K$$

olur. Şimdi de Teorem 2.2.5'ten

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$$

ise

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$$

olması gerekir.

ii) $A = \gamma + 1$ olsun. Öncelikle,

$$A = \gamma + 1 > \gamma$$

olur. Bu durumda, öyle bir $N \geq 0$ tamsayısı vardır ki;

$$x_n < 1, \quad n \geq N$$

eşitsizliği sağlanır. Bu yüzden,

$$S = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n \leq 1 < \frac{\gamma + 1}{\gamma}$$

olur. Böylece,

$$z_{n+1} = \frac{\gamma z_{n-(2k+1)} + z_{n-2l}}{A + z_{n-2l}}, \quad n \in \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$$

fark denkleminin bir $\{L_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ çözümü vardır. Ayrıca $L_0 = S$ dir. Öyle ki;

$$0 \leq L_n \leq S, \quad n \in \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$$

eşitsizliği vardır.

$$S < \frac{\gamma+1}{\gamma}$$

olduğu da dikkate alınır,

$$S = L_0 = \frac{\gamma L_{-(2k+2)} + L_{-(2l+1)}}{(\gamma+1) + L_{-(2l+1)}} \leq \frac{\gamma S + L_{-(2l+2)}}{(\gamma+1) + L_{-(2l+1)}} \leq \frac{(\gamma+1)S}{(\gamma+1) + S}$$

olduğu görülür ve

$$(\gamma+1)S + S^2 \leq (\gamma+1)S$$

eşitsizliğinin varlığı da kolayca görülür. Buradan $S^2 \leq 0$ olur. Ve böylece, $S = 0$ olması gerekir. Bu da ispatı tamamlar.

3.1.2. Pozitif denge noktasının kararlılığı

Eğer

$$0 \leq A \leq \gamma+1$$

ise (3.1) denkleminin pozitif bir denge noktası vardır. Bu denge noktası ise;

$$\bar{x} = \gamma+1 - A$$

dır. Aşağıdaki teorem (3.1) denkleminin $\bar{x} = \gamma+1 - A$ pozitif denge noktasının kararlılık karakterini açıklar.

Teorem 3.1.3.[14] (3.1) denkleminde $0 < \gamma$ ve $0 \leq A \leq \gamma+1$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur.

i) Eğer,

$$\gamma-1 < A < \gamma+1$$

ise (3.1) denkleminin $\bar{x} = \gamma+1 - A$ pozitif denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.

ii) (3.1) denkleminin $\bar{x} = \gamma + 1 - A$ pozitif denge noktası,

$$0 \leq A \leq \gamma - 1$$

olduğunda, karakteristik denkleminin en az bir kökü mutlak değerce 1'den küçük ve en az bir kökü mutlak değerce 1'den büyük olan kararsız bir denge noktasıdır.

İspat. (3.1) denkleminin $\bar{x} = \gamma + 1 - A$ pozitif denge noktası civarındaki lineer denklemi,

$$z_{n+1} - \frac{\gamma}{\gamma+1} z_{n-(2k+1)} - \frac{\gamma-A}{\gamma+1} z_{n-2l} = 0, \quad n = 0, 1, \dots$$

ifadesidir. Karakteristik denklemi ise,

$$\lambda^{K+1} - \frac{\gamma}{\gamma+1} \lambda^{K-(2k+1)} - \frac{\gamma-A}{\gamma+1} \lambda^{K-2l} = 0$$

dır. Şimdi kabul edelim ki;

$$\gamma - 1 < A < \gamma + 1$$

eşitsizliği vardır. Bu durumda Teorem 2.2.5'ten (3.1) denkleminin $\bar{x} = \gamma + 1 - A$ pozitif denge noktası lokal asimptotik kararlıdır. Diğer taraftan,

$$0 \leq A \leq \gamma - 1$$

olduğunu kabul edelim. c fonksiyonu,

$$c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

tanımlı ve

$$c(\lambda) = \lambda^{K+1} - \frac{\gamma}{\gamma+1} \lambda^{K-(2k+1)} - \frac{\gamma-A}{\gamma+1} \lambda^{K-2l}$$

kuralıyla verilen bir fonksiyon olsun. Bu durumda,

$$|c(0)| < 1$$

ve

$$\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} c(-1)c(\lambda) = -\infty$$

olur. Böylece karakteristik denklemin $|\lambda_1| < 1$ ve $\lambda_2 < -1$ olacak şekilde iki kökü vardır. Böylece ispat tamamlanır.

3.2. $x_{n+1} = \frac{\alpha + \beta x_n + \gamma x_{n-1}}{A + Bx_n + Cx_{n-1}}$, $n = 0, 1, \dots$ Denkleminin Kararlılık Karakteri

Bu kısımda,

$$x_{n+1} = \frac{\alpha + \beta x_n + \gamma x_{n-1}}{A + Bx_n + Cx_{n-1}}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (3.2)$$

genel denkleminin denge noktaları incelenecektir. Burada,

$$\alpha + \beta + \gamma, B + C \in (0, \infty); \alpha, \beta, \gamma, A, B, C \in [0, \infty) \quad (3.3)$$

şartları sağlanır. Başlangıç şartları olan x_{-1} ve x_0 ise negatif olmayan keyfi reel sayılardır. Ayrıca, denklem (3.2)'nin sağ tarafı, $\forall n \geq 0$ için iyi tanımlıdır.

$\bar{x} = 0$ noktası, (3.2) denkleminin bir denge noktası olduğunda, aşağıdaki teorem (3.2) denkleminin global asimptotik kararlılığının şartlarının tespit edilmesinde yardımcı olur.

Teorem 3.1.[14]

$$x_{n+1} = f_0(x_n, x_{n-1})x_n + f_1(x_n, x_{n-1})x_{n-1}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (3.4)$$

denklemini negatif olmayan başlangıç koşullarıyla ele alınsın. Ayrıca;

$$f_0, f_1 \in C[[0, \infty) \times [0, \infty), [0, 1]]$$

şeklinde tanımlı olsun. Aşağıdaki ifadeler sağlanırsa, (3.4) denkleminin $\bar{x} = 0$ denge noktası global asimptotik kararlıdır.

- i) f_0 ve f_1 her iki argümanına göre artmayandır.
- ii) $\forall x \geq 0$ için $f_0(x, x) > 0$

iii) $\forall x, y \in (0, \infty)$ için $f_0(x, y) + f_1(x, y) < 1$ dir.

Teorem 3.2.[1]

$$f \in C^1[[0, \infty) \times [0, \infty), [0, \infty)]$$

şeklinde tanımlı f fonksiyonu verilsin. Öyle ki; $\forall x, y \in (0, \infty)$ için

$$x \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| + y \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| < f(x, y)$$

olsun. Bu durumda aşağıdaki durumlardan biri mutlaka vardır.

- i) $\forall (x_{-1}, x_0) \neq (0, 0)$ başlangıç koşulları için $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ dur.
- ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ tüm başlangıç koşulları için vardır ve $\bar{x} = 0$ tek denge noktasıdır.
- iii) $\forall (x_{-1}, x_0) \neq (0, 0)$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x} \in (0, \infty)$ ifadesi vardır ve $\bar{x}$ tek pozitif denge noktasıdır.

Bu üçlüye **Kararlılık Üçlüsü** denir.

3.2.1.Denge noktaları

Denklem (3.2)'nin başlangıç şartlarına uygulanan kısıtlamaya göre, denklem (3.2)'nin denge noktaları,

$$\bar{x} = \frac{\alpha + (\beta + \gamma)\bar{x}}{A + (B + C)\bar{x}} \quad (3.5)$$

denkleminin negatif olmayan çözümleridir. Ya da buna denk olarak,

$$(B + C)\bar{x}^2 - (\beta + \gamma - A)\bar{x} - \alpha = 0 \quad (3.6)$$

denkleminin kökleridir. Sıfırın bir denge noktası olması için gerek ve yeter şart,

$$\alpha = 0, A > 0 \quad (3.7)$$

olmasıdır. (3.7) şartı sağlanırsa $\bar{x} = 0$ 'a ilaveten, denklem (3.2)'nin pozitif bir denge noktasına sahip olması için gerek ve yeter şart,

$$\beta + \gamma > A$$

dır. Aslında bu durumda denklem (3.2)'nin pozitif denge noktası bir tektir ve,

$$\bar{x} = \frac{\beta + \gamma - A}{B + C} \quad (3.8)$$

ifadesiyle verilir.

$$\alpha = 0, A = 0$$

olduğunda ise yine (3.2) denkleminin pozitif denge noktası bir tektir ve bu denge noktası,

$$\bar{x} = \frac{\beta + \gamma}{B + C} \quad (3.9)$$

ifadesiyle verilir. (3.3) şartına göre $\alpha = 0$ olduğunda $\beta + \gamma$ pozitiftir. Son olarak $\alpha > 0$ olduğunda ise (3.2) denkleminin tek denge noktası, (3.6) denkleminin pozitif çözümü olan,

$$\bar{x} = \frac{\beta + \gamma + \sqrt{(\beta + \gamma - A)^2 + 4\alpha(B + C)}}{2(B + C)} \quad (3.10)$$

ifadesidir.

3.2.2.Sıfır denge noktasının kararlılığı

(3.2) denkleminin sıfır denge noktasının kararlılığı Lineer Kararlılık Teoremi esas alınarak incelenir. Bunun için (3.2) denklemi,

$$f(u, v) = \frac{\alpha + \beta u + \gamma v}{A + Bu + Cv}$$

şeklinde yazılır. Buradan görülür ki; u 'ya göre türev,

$$f_u(u, v) = \frac{(\beta A - \alpha B) + (\beta C - \gamma B)v}{(A + Bu + Cv)^2} \quad (3.11)$$

olur. Aynı şekilde v 'ye göre türev ise,

$$f_v(u, v) = \frac{(\gamma A - \alpha C) + (\beta C - \gamma B)v}{(A + Bu + Cv)^2} \quad (3.12)$$

olur. Eğer (3.2) denkleminin denge noktası $\bar{x}$ ile gösterilirse, (3.2) denkleminin $\bar{x}$ denge noktası civarındaki lineer denklemi,

$$z_{n+1} - pz_n - qz_{n-1} = 0$$

olur. Burada,

$$p = f_u(\bar{x}, \bar{x})$$

ve

$$q = f_v(\bar{x}, \bar{x})$$

dir. (3.2) denkleminin $\bar{x}$ denge noktasının lokal kararlılık karakteri, Teorem 2.2.2 (Lineer Kararlılık Teoremi) ile açıklanır. (3.2) denkleminin $\bar{x} = 0$ denge noktası için,

$$p = \frac{\beta}{A}, \quad q = \frac{\gamma}{A}$$

olduğu görülür. Bu durumda (3.2) denkleminin $\bar{x} = 0$ denge noktası civarındaki lineer denklemi,

$$z_{n+1} - \frac{\beta}{A}z_n - \frac{\gamma}{A}z_{n-1} = 0, \quad n = 0, 1, \dots$$

olur. (3.2) denkleminin $\bar{x} = 0$ denge noktasının lokal kararlılığı için Teorem 2.2.2 (Lineer Kararlılık Teoremi) ile beraber, global kararlılığı için Teorem 3.1 bu incelemeyi kolaylaştırır. Her iki teoremin bir sonucu olarak aşağıdaki teorem ortaya çıkar.

Teorem 3.2.2.1.[14] $A > 0$ olsun. Eğer $\beta + \gamma \leq A$ ise,

$$x_{n+1} = \frac{\alpha + \beta x_n + \gamma x_{n-1}}{A + Bx_n + Cx_{n-1}}, \quad n = 0, 1, \dots$$

denkleminin $\bar{x} = 0$ denge noktası global asimptotik kararlıdır. Fakat, eğer

$$\beta + \gamma > A$$

şartı sağlanırsa $\bar{x} = 0$ denge noktası kararsızdır.

3.3. $x_{n+1} = \alpha + \frac{x_{n-k}}{x_n}$, $n = 0, 1, \dots$ Denkleminin Kararlılık Karakteri

Bu kısımda,

$$x_{n+1} = \alpha + \frac{x_{n-k}}{x_n}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (3.13)$$

denkleminin global asimptotik kararlılığı incelenecektir. (3.13) denkleminde $\alpha \in [1, \infty)$, $k \in \{1, 2, \dots\}$ ve başlangıç şartları $x_{-k}, \dots, x_0$ keyfi reel sayılardır. Ayrıca (3.13)

denkleminin denge noktası $\bar{x} = \alpha + \frac{\bar{x}}{\bar{x}} = \alpha + 1$ dir.

Teorem 3.3.1.[6] $a, b \in \mathbb{R}$ ve $k \in \{1, 2, \dots\}$ olmak üzere,

$$x_{n+1} - ax_n + bx_{n-k} = 0, \quad n = 0, 1, \dots$$

denkleminin lokal asimptotik kararlı olması için bir yeter şart,

$$|a| + |b| < 1 \quad (3.14)$$

olmasıdır. Fakat eğer;

- (a) k tek sayı ve $b < 0$
- (b) k çift sayı ve $ab < 0$

durumlarından biri mevcut ise, bu durumda (3.14) koşulu

$$x_{n+1} - \alpha x_n + b x_{n-k} = 0, \quad n = 0, 1, \dots$$

denkleminin asimptotik kararlılığı için bir gerek koşuldur.

Teorem 3.3.2.[9]

- (i) k tek tamsayı olsun. Bu durumda, (3.13) denkleminin denge noktası olan $\bar{x} = \alpha + 1$ 'in lokal asimptotik kararlı olması için gerek ve yeter şart, $\alpha > 1$ olmasıdır.
- (ii) k çift tamsayı olsun. Bu durumda $\alpha > 1$, (3.13) denkleminin asimptotik kararlılığı için bir yeter şarttır.

İspat. (3.13) denkleminin $\bar{x} = \alpha + 1$ denge noktası civarındaki lineer denklemi,

$$z_{n+1} + \frac{1}{\alpha+1} z_n - \frac{1}{\alpha+1} z_{n-k} = 0, \quad n = 0, 1, \dots$$

dir. Buradan, $\alpha + 1 > 2$ ise $\frac{1}{\alpha+1} < \frac{1}{2}$ olur. Buradan da $\frac{2}{\alpha+1} < 1$ ve dolayısıyla,

$$\frac{2}{\alpha+1} = \left| \frac{1}{\alpha+1} \right| + \left| -\frac{1}{\alpha+1} \right| < 1$$

yazılabilir. Diğer taraftan,

$$\left| \frac{1}{\alpha+1} \right| + \left| -\frac{1}{\alpha+1} \right| = \frac{2}{\alpha+1} < 1$$

eşitsizliğinin varlığı zaten kolayca görülebilir. Teorem 3.3.1'den ispat tamamdır.

Teorem 3.3.3.[6]

$$y_{n+1} = f(y_n, y_{n-k}), \quad n = 0, 1, \dots \quad (3.15)$$

denklemi dikkate alınsın. Burada, $k \in \{1, 2, \dots\}$ ve $[a, b]$ reel sayıların bir aralığı olsun.

Öyle ki; f fonksiyonu,

$$f : [a, b] \times [a, b] \rightarrow [a, b]$$

şeklinde tanımlı, sürekli ve aşağıdaki özellikleri sağlayan bir fonksiyon olsun.

a) $f(u, v)$, u 'ya göre artmayan ve v 'ye göre azalmayandır.

b) Eğer, $(m, M) \in [a, b]$,

$$m = f(M, m)$$

ve

$$M = f(m, M)$$

sisteminin bir çözümü ise, o zaman; $m = M$ olup, (3.15) denklemini pozitif bir denge noktasına sahiptir ve her çözüm bu pozitif denge noktasına yakınsar.

Teorem 3.3.4.[9] (3.13) denkleminde $\alpha > 1$ olsun. Bu durumda (3.13) denkleminin $x = \alpha + 1$ denge noktası global asimptotik kararlıdır.

İspat. $u, v \in (0, \infty)$ için,

$$f(u, v) = \alpha + \frac{v}{u}$$

olur. O zaman,

$$f : (0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$$

bir sürekli fonksiyondur. Ayrıca, f , u 'ya göre artmayan ve v 'ye göre de azalmayandır. Şimdi de $(m, M) \in (0, \infty)$, $m = f(M, m)$ ve $M = f(m, M)$ sisteminin bir çözümü ise,

$$m = \alpha + \frac{m}{M}, \quad M = \alpha + \frac{M}{m}$$

olur. Buradan,

$$mM = \alpha M + m, \quad Mm = \alpha m + M$$

olup sol tarafların eşitliğinden sağ taraflar da eşittir. Böylece,

$$\alpha M + m = \alpha m + M$$

olur ve basit işlemlerden sonra,

$$(M - m)(\alpha - 1) = 0$$

ifadesi elde edilir. Böylece, $\alpha > 1$ olduğundan,

$$m = M$$

olur ki, bu da ispatı tamamlar.

4.BAZI FARK DENKLEMLERİNİN KARARLILIĞI VE PERİYODİKLİĞİ

Bu bölümde; öncelikle,

$$x_{n+1} = \max \left\{ \frac{1}{x_n}, \min \left\{ 1, \frac{A}{x_n} \right\} \right\} \quad (4.1)$$

denkleminin denge noktası hesaplanarak, önce $A \in [1, \infty)$, $x_0 \in (1, \infty)$ ve $\forall n \in \mathbb{N}_0$ için $A^n < x_0$ ve sonra da $A \in [1, \infty)$, $x_0 \in (0, 1)$ ve $\forall n \in \mathbb{N}_0$ için $A^n x_0 < 1$ olacak şekilde $\bar{x} = 1$ denge noktasına göre kararlılık karakteri incelendi. Daha sonra ise,

$$x_{n+1} = A_n + \left(\frac{x_{n-k}}{x_n} \right)^p$$

rasyonel fark denkleminin, kararlılığı ve periyodik çözümlerinin varlığı incelendi. Son olarak da

$$x_{n+1} = \frac{p_n x_{n-2} + x_{n-3}}{q_n + x_{n-3}}$$

denkleminin iki periyotlu çözümlerinin varlığı ve periyodik olma şartları elde edildi.

4.1. $x_{n+1} = \max \left\{ \frac{1}{x_n}, \min \left\{ 1, \frac{A}{x_n} \right\} \right\}$ Denkleminin Kararlılık Karakteri

Bu kısımda (4.1) denkleminin hangi şartlar altında lokal asimptotik kararlı olduğu incelenecektir. Bunun için önce birkaç lemma verelim.

Lemma 4.1.1. (4.1) denkleminin tek denge noktası $\bar{x} = 1$ 'dir.

İspat. Denge noktası tanımından,

$$\bar{x} = \max \left\{ \frac{1}{\bar{x}}, \min \left\{ 1, \frac{A}{\bar{x}} \right\} \right\}$$

dır. Burada, maksimum ve minimum operatörlerinin içini ayrı ayrı değerlendirmek gerekir.

1) $\frac{A}{\bar{x}} \leq 1$ için

$$\bar{x} = \max \left\{ \frac{1}{\bar{x}}, \min \left\{ 1, \frac{A}{\bar{x}} \right\} \right\}$$

$$\bar{x} = \max \left\{ \frac{1}{\bar{x}}, \frac{A}{\bar{x}} \right\}$$

i) $\frac{1}{\bar{x}} > \frac{A}{\bar{x}}$ olarak düşünüldüğünde,

$$\bar{x} = 1$$

olur.

ii) $\frac{1}{\bar{x}} \leq \frac{A}{\bar{x}}$ durumunda ise,

$$\bar{x} = \sqrt{A}$$

ise, $A > 1$ olup $\sqrt{A} \geq 1$ ve $\frac{1}{\sqrt{A}} \leq 1$ olur. Gerçekten;

$$\bar{x} = \max \left\{ \frac{1}{\bar{x}}, \min \left\{ 1, \frac{A}{\bar{x}} \right\} \right\}$$

$$\sqrt{A} = \max \left\{ \frac{1}{\sqrt{A}}, \min \left\{ 1, \frac{A}{\sqrt{A}} \right\} \right\}$$

$$= \max \left\{ \frac{1}{\sqrt{A}}, \min \left\{ 1, \sqrt{A} \right\} \right\}$$

$$= \max \left\{ \frac{1}{\sqrt{A}}, 1 \right\}$$

$$= 1$$

olduğu görülür. Görüldüğü gibi eğer denge noktası $\bar{x} = \sqrt{A}$ ise $\sqrt{A} = 1$ olur.

2) $\frac{A}{\bar{x}} > 1$ ise

$$\bar{x} = \max \left\{ \frac{1}{\bar{x}}, 1 \right\}$$

i) $\frac{1}{\bar{x}} > 1$ kabul edilirse;

$$\bar{x} = \frac{1}{\bar{x}}$$

ifadesi elde edilir. Negatif çözüm kabul etmediğimizden,

$$\bar{x} = 1$$

olur.

ii) $\frac{1}{\bar{x}} \leq 1$ kabul edilirse;

$$\bar{x} = 1$$

olur. Buradan (4.1) denkleminin tek denge noktasının $\bar{x} = 1$ olduğu görülür.

Lemma 4.1.2.[26] Eğer $A \in [1, \infty)$, $x_0 \in (1, \infty)$, $A^k < x_0$, $k \in N_0$ ise (4.1) denkleminin çözümleri,

$$x_n = \begin{cases} \frac{x_0}{A^k}, & n = 2k \\ \frac{A^k}{x_0}, & n = 2k + 1 \end{cases}$$

şeklinde yazılabilir.

Teorem 4.1.1. $A \in [1, \infty)$, $x_0 \in (1, \infty)$ ve $A^n < x_0$ olsun. Bu durumda (4.1) denkleminin $\bar{x} = 1$ denge noktası lokal kararlıdır.

İspat. $x_0 \in (1, \infty)$ olduğundan her zaman

$$x_0 < \delta_1$$

olacak şekilde bir $\delta_1 > 0$ sayısı vardır. $\delta_1 - 1 = \delta$ olmak üzere,

$$|x_0 - 1| = |x_0 - \bar{x}| < \delta$$

yazılabilir. Çünkü Lemma 4.1.2'ye göre,

$$x_1 = \frac{1}{x_0} < x_0$$

$$x_2 = \frac{x_0}{A} < x_0$$

$$x_3 = \frac{A}{x_0} < x_0$$

olur. Bu şekilde devam edilirse görülür ki, $\forall n \in \mathbb{N}_0$ için, $x_0 \geq x_n$ olup, $\delta = \varepsilon$ olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ sayısı daima vardır. Böylece;

$$|x_n - 1| = |x_n - \bar{x}| < \varepsilon$$

şartı sağlanır. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 4.1.2. $A \in [1, \infty)$, $x_0 \in (1, \infty)$ ve $A^k < x_0$ olsun. Bu durumda (4.1) denkleminin $\bar{x} = 1$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.

İspat. $A \in [1, \infty)$, $x_0 \in (1, \infty)$ ve $A^k < x_0$ (4.1) denkleminin çözümleri $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ olsun.

Lemma 4.1.2'den $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ çözümleri

$$x_n = \begin{cases} \frac{x_0}{A^k}, & n = 2k \\ \frac{A^k}{x_0}, & n = 2k + 1 \end{cases}$$

şeklindedir.

$\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin, $\{x_{2n}\}_{n=0}^{\infty}$ ve $\{x_{2n+1}\}_{n=0}^{\infty}$ olacak şekilde iki tane alt dizisi vardır.

$A^k < x_0$ eşitsizliğinden dolayı $\frac{A^k}{x_0} < 1$ ve doğal olarak $\frac{x_0}{A^k} > 1$ eşitsizlikleri mevcut olur.

Yani;

$x_{2k} = \frac{x_0}{A^k} > 1$ ve $x_{2k+1} = \frac{A^k}{x_0} < 1$ olur. Böylece, $\{x_{2n}\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi alttan, $\{x_{2n+1}\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi ise

üstten sınırlıdır. Diğer taraftan; $A > 1$ olduğundan,

$$x_0 > \frac{x_0}{A} > \dots > \frac{x_0}{A^k} > 1$$

olur ki bu,

$$x_0 > x_2 > \dots > x_{2k} > 1$$

olması demektir. Aynı düşünce ile,

$$\frac{1}{x_0} < \frac{A}{x_0} < \dots < \frac{A^k}{x_0} < 1$$

olur ki bu da,

$$x_1 < x_3 < \dots < x_{2k+1} < 1$$

eşitsizliğinin varlığını gösterir. Bütün bunlar göz önüne alındığında aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir.

$$x_1 < x_3 < \dots < x_{2k+1} < 1 < x_{2k} < \dots < x_2 < x_0$$

yukarıdaki bu eşitsizlikte,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k} = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k+1} = 1$$

limitlerinin var olduğu açıkça görülür. Sonuç olarak;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1 = \bar{x}$$

limiti vardır. Böylece Teorem 4.1.1'den $x_0 \in (1, \infty)$ başlangıç şartı için (4.1)

denkleminin $\bar{x} = 1$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.

Lemma 4.1.3. $A \in [1, \infty)$, $x_0 \in (0, 1)$ ve $\forall n \in \mathbb{N}_0$ için $A^n x_0 < 1$ ise (4.1) denkleminin çözümleri,

$$x_n = \begin{cases} A^n x_0, & n = 2k \\ \frac{1}{A^n x_0}, & n = 2k+1 \end{cases}, \quad k = 0, 1, \dots$$

şelindedir.

İspat. $A \in [1, \infty)$, $x_0 \in (0, 1)$ ve $\forall n \in \mathbb{N}_0$ için $A^n x_0 < 1$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} x_1 &= \max \left\{ \frac{1}{x_0}, \min \left\{ 1, \frac{A}{x_0} \right\} \right\} = \max \left\{ \frac{1}{x_0}, 1 \right\} = \frac{1}{x_0} \\ x_2 &= \max \left\{ \frac{1}{x_1}, \min \left\{ 1, \frac{A}{x_1} \right\} \right\} = \max \left\{ x_0, \min \left\{ 1, Ax_0 \right\} \right\} = Ax_0 \\ x_3 &= \max \left\{ \frac{1}{x_2}, \min \left\{ 1, \frac{A}{x_2} \right\} \right\} = \max \left\{ \frac{1}{Ax_0}, \min \left\{ 1, \frac{A}{Ax_0} \right\} \right\} = \frac{1}{Ax_0} \end{aligned}$$

$n \geq 4$ için iterasyona devam edilirse aşağıdaki gibi bir eşleştirme ve sınıflandırma yapılabilir. Yani; çift indisli terimler,

$$\begin{aligned} x_0 &= A^0 x_0 \\ x_2 &= A^1 x_0 \\ x_4 &= A^2 x_0 \\ x_6 &= A^3 x_0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

ve tek indisli terimler,

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{A^0 x_0} \\ x_3 &= \frac{1}{A^1 x_0} \\ x_5 &= \frac{1}{A^2 x_0} \\ x_7 &= \frac{1}{A^3 x_0} \\ &\vdots \end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Böylece görülür ki, bu durumda (4.1) denkleminin çözümleri

$$x_n = \begin{cases} A^k x_0, & n = 2k \\ \frac{1}{A^k x_0}, & n = 2k+1, \end{cases} \quad k = 0, 1, \dots$$

şeklinde parçalı olarak yazılabilir.

Teorem 4.1.3. $A \in [1, \infty)$, $x_0 \in (0, 1)$ ve $\forall n \in \mathbb{N}_0$ için $A^n x_0 < 1$ ise (4.1) denkleminin $\bar{x} = 1$ denge noktası lokal kararlıdır.

İspat. $x_0 \in (0, 1)$ olduğundan,

$$0 < x_0 < 1 \quad (4.2)$$

yazılabilir. Buradan,

$$-1 < x_0 - 1 < 0 < 1$$

veya

$$-1 < x_0 - 1 < 1$$

yazılabilir. Buradan,

$$|x_0 - 1| = |x_0 - \bar{x}| < 1 = \delta$$

olup bu şartları sağlayan $\forall x_0 \in (0, 1)$ için $k \geq 0$ olmak üzere,

$$x_{2k} \leq x_0$$

olduğundan $\forall \varepsilon_0 = \delta$ için

$$|x_{2k} - \bar{x}| = |x_{2k} - 1| < \varepsilon_0$$

şartı sağlanır. Benzer şekilde $k \geq 0$ için,

$$x_{2k+1} \leq \frac{1}{x_0} = x_1$$

olduğundan ve (4.2) şartından dolayı, $\forall \varepsilon_1 > \frac{1}{x_0} > 1$ için,

$$|x_{2k+1} - \bar{x}| = |x_{2k+1} - 1| < \varepsilon_1$$

şartı sağlanır. Şimdi,

$$\varepsilon = \max \{ \varepsilon_0, \varepsilon_1 \}$$

olsun. Böylece;

$$|x_n - \bar{x}| = |x_n - 1| < \varepsilon$$

eşitsizliği yazılabilir. Bu da, ispatı tamamlar.

Teorem 4.1.4 $A \in [1, \infty)$, $x_0 \in (0, 1)$ ve $\forall n \in \mathbb{N}_0$ için $A^n x_0 < 1$ ise (4.1) denkleminin $\bar{x} = 1$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.

İspat. $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ dizisi (4.1) denkleminin bir çözümü olsun. Lemma 4.1.3.'ten $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ çözümü,

$$x_n = \begin{cases} A^k x_0, & n = 2k \\ \frac{1}{A^k x_0}, & n = 2k+1, \end{cases} \quad k = 0, 1, \dots$$

şeklindedir. Açıkça görülür ki; $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ çözüm dizisinin $\{x_{2k}\}_{k=0}^{\infty}$ ve $\{x_{2k+1}\}_{k=0}^{\infty}$ şeklinde iki alt dizisi vardır. Lemma 4.1.3. kullanılarak,

$$x_{2k} = A^k x_0 < 1$$

olduğundan $\{x_{2k}\}_{k=0}^{\infty}$ alt dizisi üstten $\bar{x} = 1$ denge noktasıyla sınırlıdır. Diğer taraftan, $A^n x_0 < 1$ olduğundan,

$$x_{2k+1} = \frac{1}{A^k x_0} > 1$$

olup, $\{x_{2k+1}\}_{k=0}^{\infty}$ alt dizisi de alttan $\bar{x} = 1$ denge noktasıyla sınırlıdır. Şimdi, $A > 1$ olduğundan kolayca görülür ki;

$$x_0 < Ax_0 < \dots < A^k x_0 < 1$$

dir. Dolayısıyla,

$$x_0 < x_2 < \dots < x_{2k} < 1 \quad (4.3)$$

olur. Benzer şekilde,

$$\frac{1}{x_0} > \frac{1}{Ax_0} > \dots > \frac{1}{A^k x_0} > 1$$

dir. Dolayısıyla,

$$x_1 > x_3 > \dots > x_{2k+1} > 1 \quad (4.4)$$

olur. (4.3) ve (4.4) eşitsizlikleri birleştirilerek.

$$x_0 < x_2 < \dots < x_{2k} < 1 < x_{2k+1} < \dots < x_3 < x_1$$

eşitsizliği elde edilir. Bu halde,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k} = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k+1} = 1$$

olur. Böylece,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 1 = \bar{x}$$

olup Teorem 4.1.3'ten, (4.1) denkleminin $\bar{x}=1$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.

4.2. $x_{n+1} = A_n + \left(\frac{x_{n-k}}{x_n} \right)^p$ **Rasyonel Denklemini**

Bu kısımda [27] de verilen denklem yeniden yazılarak,

$$x_{n+1} = A_n + \left(\frac{x_{n-k}}{x_n} \right)^p \quad (4.5)$$

denklemini elde edilip, bu denklemin periyodiklik ve kararlılık özellikleri incelenecektir.

Bu inceleme yapılırken, başlangıç şartları herhangi reel sayılar ve $p \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ alınacaktır.

Tanım 4.2.1.

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-k})$$

fark denkleminin denge noktası $\bar{x} = \bar{x}(n)$ ise

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{x}(n) = \tilde{x}$$

limit değerine *Limit Denge Noktası* denir.

Teorem 4.2.1. $p \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ ve $\forall n \in \mathbb{N}_0$ için A_n , $2p-1 < A_n$ şartını sağlayan bir dizi

olsun. Bu durumda,

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$$

olmak üzere, (4.5) denkleminin $\tilde{x} = A+1$ limit denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.

İspat. Denge noktası tanımından

$$\bar{x} = A_n + \left(\frac{\bar{x}}{\bar{x}}\right)^p$$

olur ve (4.5) denkleminin limit denge noktası,

$$\tilde{x} = A+1$$

olarak bulunur. Tanım 2.2.5'e göre (4.5) denkleminin $\tilde{x} = A+1$ limit denge noktası civarındaki lineer denklemini ve bu lineer denklemin karakteristik denklemini bulunur. Bunun için önce,

$$f(u, v) = A_n + \left(\frac{u}{v}\right)^p$$

fonksiyonu verilsin. Buradan r değeri,

$$\begin{aligned}
 r &= \frac{\partial f(u, v)}{\partial u} \bigg|_{\substack{u=\bar{x} \\ v=\bar{x}}} \\
 &= \frac{\partial \left(A_n + \left(\frac{u}{v} \right)^p \right)}{\partial u} \bigg|_{\substack{u=\bar{x} \\ v=\bar{x}}} \\
 &= p \frac{u^{p-1}}{v^p} \bigg|_{\substack{u=\bar{x} \\ v=\bar{x}}} \\
 &= p \frac{1}{A_n + 1}
 \end{aligned}$$

olarak bulunur. Aynı şekilde s değeri,

$$\begin{aligned}
 s &= \frac{\partial f(u, v)}{\partial v} \bigg|_{\substack{u=\bar{x} \\ v=\bar{x}}} \\
 &= \frac{\partial \left(A_n + \left(\frac{u}{v} \right)^p \right)}{\partial v} \bigg|_{\substack{u=\bar{x} \\ v=\bar{x}}} \\
 &= -p \frac{u^p}{v^{p+1}} \bigg|_{\substack{u=\bar{x} \\ v=\bar{x}}} \\
 &= -p \frac{1}{A_n + 1}
 \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Böylece, (4.5) denkleminin $\bar{x} = A_n + 1$ denge noktası civarındaki lineer denklemi,

$$\begin{aligned}
 z_{n+1} &= sz_n + rz_{n-k}, \quad n = 0, 1, \dots \\
 z_{n+1} &= -p \frac{1}{A_n + 1} z_n + p \frac{1}{A_n + 1} z_{n-k}, \quad n = 0, 1, \dots \\
 z_{n+1} + p \frac{1}{A_n + 1} z_n - p \frac{1}{A_n + 1} z_{n-k} &= 0, \quad n = 0, 1, \dots
 \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Bu lineer denklemin karakteristik denklemi ise,

$$\lambda^{k+1} + \frac{p}{A_n + 1} \lambda^k - \frac{p}{A_n + 1} = 0$$

şeklinde elde edilir. Teorem 2.2.4(Clark teoremi)'e göre,

$$\left| \frac{p}{A_n + 1} \right| + \left| -\frac{p}{A_n + 1} \right| < 1$$

$$\frac{1}{|A_n + 1|} < \frac{1}{|2p|}$$

$$2p - 1 < A_n$$

sonucuna varılır.

Teorem 4.2.2. $p \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ olsun.

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$$

$$I = \liminf_{n \rightarrow \infty} \{x_n\} > 0$$

$$S = \limsup_{n \rightarrow \infty} \{x_n\} < \infty$$

olmak üzere, $A > 1$ ve $I \leq S$ ise bu durumda, (4.5) denkleminin $\tilde{x} = A + 1$ denge noktası global çekimlidir.

İspat. $p \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ ve $I \leq S$ ise,

$$\frac{I}{S} \leq \left(\frac{I}{S}\right)^p$$

olur. Buradan,

$$IS^p \leq SI^p$$

dir. Burada,

$$S \leq A + \left(\frac{S}{I}\right)^p$$

$$I \geq A + \left(\frac{I}{S}\right)^p$$

eşitsizlikleri yazılabilir. Çünkü, bu eşitsizliklerin sağ tarafları sırasıyla $\tilde{x} = A+1$ limit denge noktasının yukarısında ve aşağısındadır. Ayrıca, S 'den önceki değerler S 'den büyük ve I 'dan önceki değerler ise I 'dan küçüktür. Böylece,

$$\begin{aligned} SI^p &\leq AI^p + S^p \\ IS^p &\geq AS^p + I^p \end{aligned}$$

olur. Burada, $IS^p \leq SI^p$ olduğu da dikkate alınırsa,

$$AI^p + S^p \geq AS^p + I^p$$

ifadesi yazılabilir. Bu durumda basit işlemlerden sonra aşağıdaki eşitsizliğe ulaşılabilir.

$$(I^p - S^p)(A-1) \geq 0$$

Buradan, $S^p \leq I^p$ ve dolayısıyla, $S \leq I$ olması için $A > 1$ olması gerekir. Böylece $S = I$ olur ki bu da (4.5) denkleminin global çekimli olduğunu gösterir.

Sonuç.4.2.1. Teorem 4.2.1. ve Teorem 4.2.2.'den (4.5) denklemi global asimptotik kararlıdır.

Teorem 4.2.3. $\frac{1}{2} < p < 1$ ve $A_n = A_{n+2}$ olsun. $A_0 \neq \Psi$ ve $A_1 \neq \Phi$ olacak şekilde sayılar ve $k = 2n$, $n \in \mathbb{N}$ olsun. Bu durumda (4.5) denkleminin iki periyotlu çözümleri mevcuttur.

İspat. Kabul edelim ki; (4.5) denkleminin

$$..., \Phi, \Psi, \Phi, \Psi, ...$$

şeklinde çözümleri mevcut olsun. O zaman

$$\begin{aligned} \Phi &= x_{2n} \\ \Psi &= x_{2n+1} \\ A_0 &= A_{2n} \\ A_1 &= A_{2n+1} \end{aligned}$$

olur. Böylece,

$$\Phi = A_1 + \left(\frac{\Phi}{\Phi} \right)^p = A_1 + 1$$

$$\Psi = A_0 + \left(\frac{\Psi}{\Psi} \right)^p = A_0 + 1$$

yazılabilir. Bu durumda (4.5) denkleminin çözümü;

$$..., A_1 + 1, A_0 + 1, A_1 + 1, A_0 + 1, ...$$

şeklinde iki periyotludur.

4.3. $x_{n+1} = \frac{p_n x_{n-2} + x_{n-3}}{q_n + x_{n-3}}$ Denkleminin İki Periyotlu Çözümleri

Bu kısımda,

$$x_{n+1} = \frac{p_n x_{n-2} + x_{n-3}}{q_n + x_{n-3}}$$

denkleminin asal iki periyotlu çözümlerinin varlığının hangi koşullar altında sağlandığının incelemesi yapılacaktır. Bu inceleme yapılırken, başlangıç şartları negatif olmayan reel sayılar olarak kabul edilecektir.

Teorem 4.3.1. $x_{-3}, x_{-2}, x_{-1}, x_0$ negatif olmayan başlangıç şartları olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{p_n x_{n-2} + x_{n-3}}{q_n + x_{n-3}} \quad (4.8)$$

denkleminin asal iki periyotlu bir çözümü, $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi olsun. Bu durumda,

$$x_{-3} = 1 - q_0$$

$$x_{-2} = 1 - q_1$$

olur. Ayrıca; $p_n = 0$ ve $q_n \in (0,1)$ olur.

İspat. (4.8) denklemini için $x_{-2} = x_0$, $x_{-3} = x_{-1}$ ise, sırasıyla $n=0$ ve $n=1$ için,

$$x_1 = \frac{p_0 x_{-2} + x_{-3}}{q_0 + x_{-3}} = x_{-1} = x_{-3}$$

$$x_2 = \frac{p_1 x_{-1} + x_{-2}}{q_1 + x_{-2}} = x_0 = x_{-2}$$

eşitlikleri yazılır. Buradan sırasıyla,

$$p_0 x_{-2} + x_{-3} = x_{-3}^2 + q_0 x_{-3}$$

$$p_1 x_{-3} + x_{-2} = x_{-2}^2 + q_1 x_{-2}$$

eşitliklerine ulaşılır. Buradan basit yer değiştirmelerle,

$$p_0 x_{-2} - q_0 x_{-3} = x_{-3}^2 - x_{-3}$$

$$p_1 x_{-3} - q_1 x_{-2} = x_{-2}^2 - x_{-2}$$

ifadeleri elde edilir. Bu son ifadeler taraf tarafa bir toplanırsa,

$$(p_0 - q_1)x_{-2} + (p_1 - q_0)x_{-3} = x_{-3}(x_{-3} - 1) + x_{-2}(x_{-2} - 1)$$

eşitliği yazılır. Polinom eşitliği ilkesi gereğince,

$$x_{-3} = p_1 - q_0 + 1$$

$$x_{-2} = p_0 - q_1 + 1$$

olarak x_{-3} ve x_{-2} bulunur. Aynı düşünüşle, yine aynı ifadeler taraf tarafa çıkarılırsa,

$$(p_0 + q_1)x_{-2} - (p_1 + q_0)x_{-3} = x_{-3}(x_{-3} - 1) - x_{-2}(x_{-2} - 1)$$

eşitliği yazılır. Yine polinom eşitliği ilkesi gereğince,

$$x_{-3} = -p_1 - q_0 + 1$$

$$x_{-2} = -p_0 - q_1 + 1$$

olarak x_{-3} ve x_{-2} bulunur. Böylece anlaşılır ki; $p_0 = 0$ ve $p_1 = 0$ dır. Yani; p_n dizisi bir sıfır dizisidir. Böylece;

$$x_{-3} = 1 - q_0$$

$$x_{-2} = 1 - q_1$$

olur. Buradan anlaşılır ki, $x_{-3} > 0$ ve $x_{-2} > 0$ olduğundan,

$$p_n = 0$$

$$q_n \in (0,1)$$

dir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.3.2. $x_{-2} = x_0$, $x_{-3} = x_{-1}$ negatif olmayan başlangıç şartları olmak üzere, $p_n = 0$ ve q_n , iki periyotlu bir dizi olsun. $x_{-3} = 1 - q_0$ ve $x_{-2} = 1 - q_1$ olup $x_{-2} = x_0$, $x_{-3} = x_{-1}$ ise bu durumda, (4.8) denklemini asal iki periyotlu çözümlere sahiptir.

İspat. (4.8) denkleminde $n = 0$ için,

$$x_1 = \frac{x_{-3}}{q_0 + x_{-3}} = \frac{x_{-3}}{1 - x_{-3} + x_{-3}} = x_{-3}$$

olur. Aynı şekilde, $n = 1$ için,

$$x_2 = \frac{x_{-2}}{q_1 + x_{-2}} = \frac{x_{-2}}{1 - x_{-2} + x_{-2}} = x_{-2}$$

olur. $n = 2$ için,

$$x_3 = \frac{x_{-1}}{q_0 + x_{-1}} = \frac{x_{-1}}{1 - x_{-3} + x_{-1}} = \frac{x_{-3}}{1 - x_{-3} + x_{-3}} = x_{-3}$$

ve böyle devam edilecek olursa, $n = \{-3, -2, -1, 0, \dots\}$ için,

$$x_n = \{\dots, 1 - q_0, 1 - q_1, 1 - q_0, 1 - q_1, \dots\}$$

periyodik çözümü elde edilir.

5. NÜMERİK SONUÇLAR

Bu bölümde, dördüncü bölümdeki bazı teoremlerin nümerik uygulamalarına yer verilecektir.

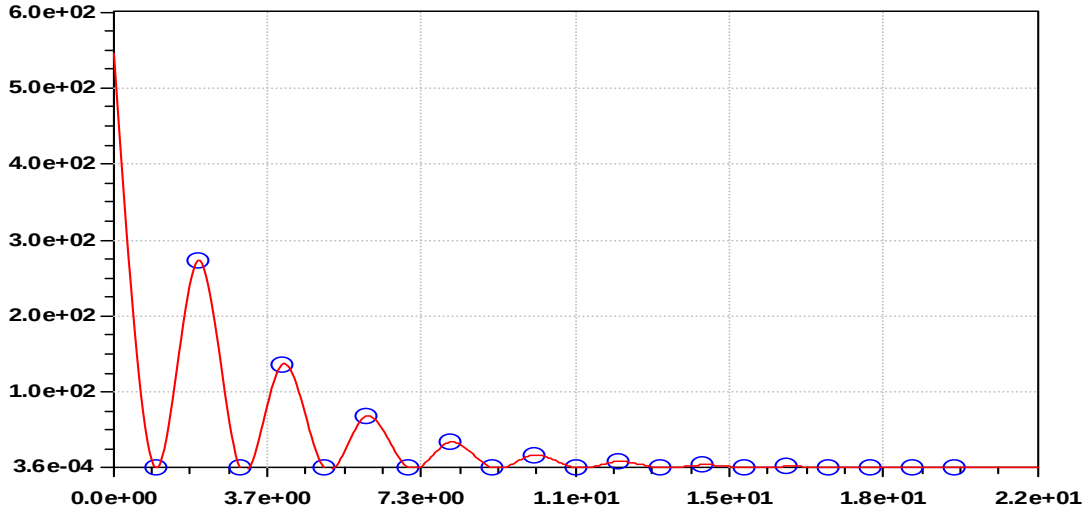
Teorem 4.1.1 için bir uygulama:

Bu uygulamada, (4.1) denkleminde $x_0 = 550$ ve $A = 2$ alınarak C^{++} program kodu kullanılarak, bu programdan elde edilen değerlerle aşağıdaki tablo hazırlanmıştır. Grafik ise tablo değerlerine uygun olarak Curve Expert 1.1 programında çizilmiştir.

```
main(Teorem 4.1.1. için uygulama)
{
    int i;
    float m1,m2,A,x[20];
    float m3,max;
    x[0]=0.005; A=2;
    printf("\n N sayac degeri   Sonuc\n");
    printf(".....\n");
    printf("\n   %d           %f \n",0,x[0]);
    for(i=0;i<20;i++)
    {
        m1=1/x[i]; m2=A/x[i];
        if(1<m2) m3=1;
        else
            m3=m2;
        if(m3>m1) max=m3;
        else
            max=m1; x[i+1]=max; printf("   %d           %f \n",i+1,x[i+1]);
    }
```

n	x_n	n	x_n	n	x_n
0	550,0000	7	0,029091	14	4,296875
1	0,003636	8	34,37500	15	0,465455
2	275,0000	9	0,058182	16	2,148438
3	0,007273	10	17,18750	17	0,930909
4	137,5000	11	0,116364	18	1,074219
5	0,014545	12	8,593750	19	1,000000
6	68,75000	13	0,232727	20	1,000000

Tablo 3



Grafik 3

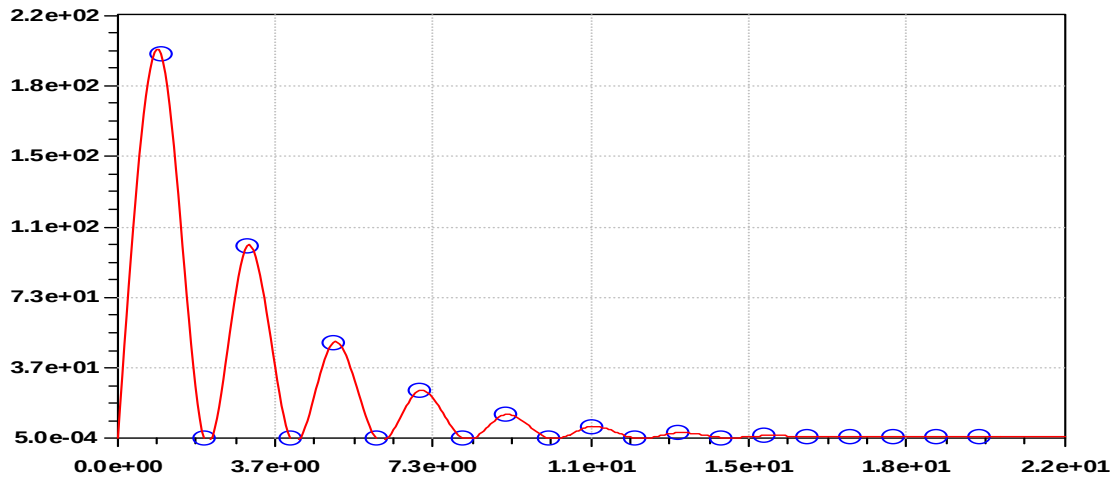
Teorem 4.1.3. için bir uygulama:

Bu uygulamada, (4.1) denkleminde $x_0 = 550$ ve $A = 2$ alınarak C^{++} programında elde edilen değerlerle aşağıdaki tablo hazırlanmıştır. Grafik ise tablo değerlerine uygun olarak Curve Expert 1.1 programında çizilmiştir.

```
main(Teorem 4.1.3. için uygulama)
{
    int i;
    float m1,m2,A,x[20];m3,max;
    x[0]=0.005; A=2;
    printf("\n N sayac degeri   Sonuc\n");
    printf(".....\n");
    printf("\n   %d       %f \n",0,x[0]);
    for(i=0;i<20;i++)
    {
        m1=1/x[i]; m2=A/x[i];
        if(1<m2)
            m3=1;
        else
            m3=m2;
        if(m3>m1)
            max=m3;
        else
            max=m1;
        x[i+1]=max; printf("   %d       %f \n",i+1,x[i+1]); }
}
```

n	x_n	n	x_n	n	x_n
0	0,0050	7	25,000	14	0,6400
1	200,00	8	0,0800	15	1,5625
2	0,0100	9	12,500	16	1,0000
3	100,00	10	0,1600	17	1,0000
4	0,0200	11	6,2500	18	1,0000
5	50.000	12	0,3200	19	1,0000
6	0,0400	13	3,1250	20	1,0000

Tablo 4



Grafik 4

Teorem 4.2.2 için bir uygulama:

Aşağıdaki tabloda, denklem (4.5) için Teorem 4.2.2.'nin Maple 12'de hazırlanmış bir uygulama programı bulunmaktadır.

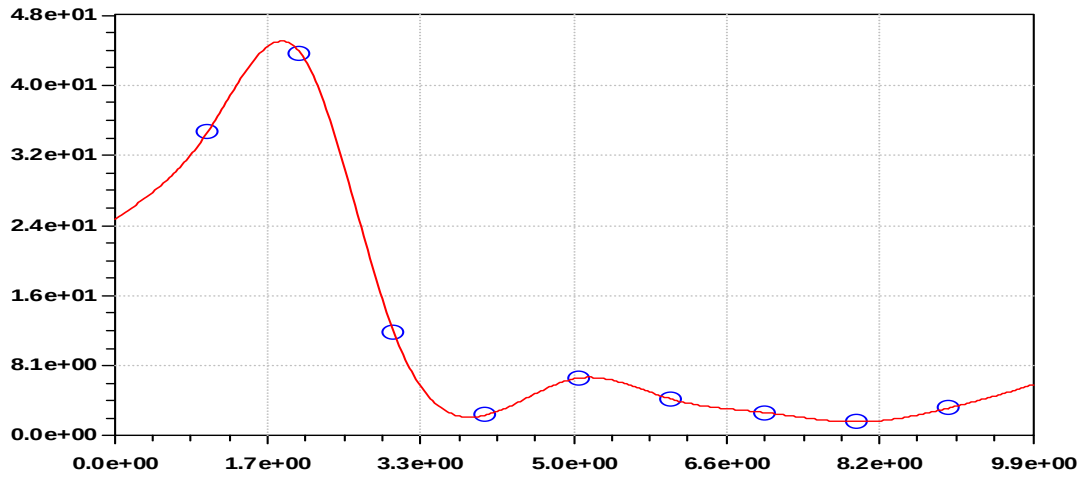
```
restart;
p:=evalf(2/3);k:=3;d:=20;
x(0):=1;x(1):=0.1;x(2):=0.5;x(3):=2;
for n from 0 to d do
  Y:=(2/3)+(1/2)^n;
  A(n):=evalf(Y);
end do;
for n from 3 to d do
  x(n+1):=A(n)+(x(n-k)/x(n))^p;
end do;
for n from 0 to d do
  Z:=1+(2/3)+(1/2)^n; B(n):=evalf(Z);
end do;
```

Tablo 5

Yukarıdaki programda $B(n) = A(n) + 1$ ataması yapılarak $\bar{x}(n) = A(n) + 1$ denge nokta dizisi de hesaplanmıştır. Aşağıda $d=100$ alınarak elde edilen değerlerden ilk 10 ve son 10 tanesi, $\bar{x}(n)$ ve $\bar{x}(n) = A(n) + 1$ için birer tablo halinde verilmiştir.

n	x_n	n	x_n	n	x_n	n	x_n
0	25	5	6,660600	92	1,666388	97	1,666848
1	35	6	4,218594	93	1,666923	98	1,666500
2	44	7	2,689885	94	1,666432	99	1,666819
3	12	8	1,607153	95	1,666882	100	1,666526
4	2,422861	9	3,250678	96	1,666469	101	1,666795

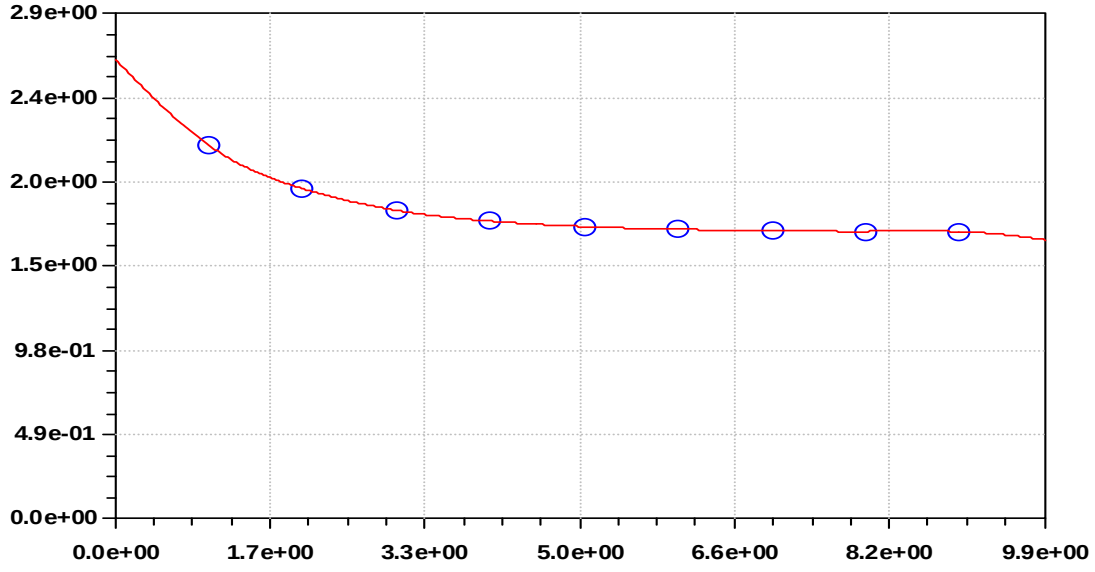
Tablo 6



Grafik 5

n	$A(n) + 1$	n	$A(n) + 1$	n	$A(n) + 1$	n	$A(n) + 1$
0	2,666666	5	1,697916	92	1,666666	97	1,666666
1	2,166666	6	1,682291	93	1,666666	98	1,666666
2	1,916666	7	1,674479	94	1,666666	99	1,666666
3	1,791666	8	1,670572	95	1,666666	100	1,666666
4	1,729166	9	1,668619	96	1,666666	101	1,666666

Tablo 7



Grafik 6

Görüldüğü gibi $\bar{x}(n)$ ve $\bar{x}(n) = A(n) + 1$ dizileri $n = 100$ durumunda birbirine çok yakın değerler almıştır. Bu da gösteriyor ki; gerçekten,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{x}(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} A(n) + 1 = \bar{x}$$

olur.

Teorem 4.3.2 için bir uygulama:

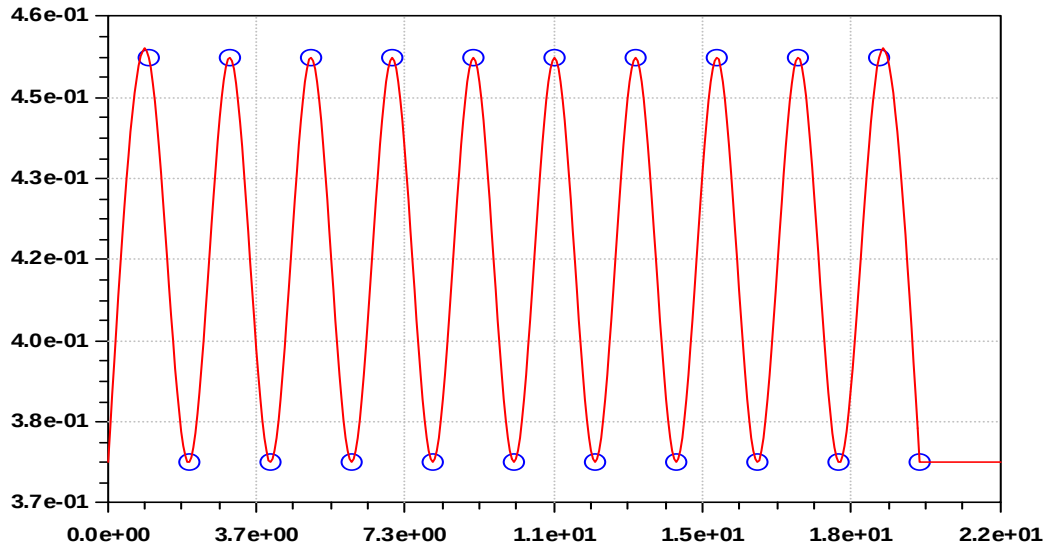
Bu uygulamada, (4.7) denkleminde $x_{-3} = x_{-1} = 0,455$ ve $x_{-2} = x_0 = 0,375$ ve alınıp, C^{++} program kodu verilerek, elde edilen değerlerle aşağıdaki tablo hazırlanmıştır. Grafik ise tablo değerlerine uygun olarak Curve Expert 1.1 programında çizilmiştir.

main(Teorem 4.3.1. için uygulama)

```
{
  int i,k;
  float p[20],q[20],x[20],A[20],m;
  x[0]=0.375;x[1]=0.455;x[2]=0.375;x[3]=0.455;q[0]=0.545;q[1]=0.625;q[2]=0.545;q[3]=
  0.625;
  printf("\n N sayac degeri   Sonuc\n");
  printf(".....\n"); printf("\n   %d           %f \n",0,x[0]);
  for(i=3;i<20;i++)
  {
    p[i]=0;k=fmod(i,2);
    if(k==0)
      q[i]=0.545;
    else
      q[i]=0.625;
    x[i+1]=(p[i]*x[i-2]+x[i-3])/(q[i]+x[i-3]); printf("   %d           %f \n",i+1,x[i+1]); } }
```

n	x_n	n	x_n	n	x_n
0	0,375	7	0,455	14	0,375
1	0,455	8	0,375	15	0,455
2	0,375	9	0,455	16	0,375
3	0,455	10	0,375	17	0,455
4	0,375	11	0,455	18	0,375
5	0,455	12	0,375	19	0,455
6	0,375	13	0,455	20	0,375

Tablo 8



Grafik 7

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada;

$$x_{n+1} = \max \left\{ \frac{1}{x_n}, \min \left\{ 1, \frac{A}{x_n} \right\} \right\}$$

denkleminin çözümlerinin A ve x_0 'a konulan şartlara göre kararlılığı incelenmiştir.

Daha sonra,

$$x_{n+1} = A_n + \left(\frac{x_{n-k}}{x_n} \right)^p$$

denkleminin, A_n ve $p \in \left(\frac{1}{2}, 1 \right)$ arasında bazı kıyaslamalar yapılarak kararlılığı ve periyodikliği incelendi. Bu işlemler yapılırken, yeni bir tanıma ihtiyaç duyulduğundan denge noktasının bağımsız değişkene bağımlı bir dizi çıkması sonucunda, bu diziye bazı kısıtlar getirilerek *Limit Denge Noktası* adında yeni bir tanıma ulaşıldı.

Son olarak ise,

$$x_{n+1} = \frac{p_n x_{n-2} + x_{n-3}}{q_n + x_{n-3}}$$

denkleminin çözümlerinin iki periyotlu olması için p_n dizisinin bir sıfır dizisi, q_n dizisinin ise başlangıç şartlarına bağlı periyodik bir dizi olması gerektiği sonucuna varıldı. Bu işlemlerde başlangıç şartları iki periyotlu olarak seçildi.

Bu tür denklemler için parametrelere farklı kısıtlamalar getirilip, kararlılık, periyodiklik, sınırlılık ve yarı döngü analizleri yapılabilir.

KAYNAKLAR

- [1] **U. Krause**, Stability Trichotomy, Path Stability and Relative Stability for Positive Nonlinear Difference Equations of Higher Order, J. Differ. Equations Appl. 1(4) (1995), 323-346.
- [2] **G. Ladas**, Intervals for Generalized Lyness Equations, J. Differ. Equations Appl. 1(2) (1995), 209-214.
- [3] **Y. K. Kuang and J. M. Cushing**, Global Stability in a Nonlinear Difference-Delay Equation Model of Flour Beetle Population Growth, J. Differ. Equations Appl. 2(1)(1996), 31-37.
- [4] **H. Sedaghat**, Geometric Stability Conditions for Higher Order Difference Equations, J. Math. Anal. Appl. 224(1998), 255-272
- [5] **E. A. Grove, C.M.Kent, R.Levins, G.Ladas and S.Valicenti**, Global stability in some population models, Proceedings of the Fourth International Conference on Difference Equations and Applications, August 27-31, 1998, Poznan, Poland, Gordon and Breach Science Publishers, 2000, 149-176.
- [6] **R. Devault, W. Komsala, G. Ladas, S.W. Schultz**, Global behavior of $y_{n+1} = (p + y_{n-k}) / (qy_n + y_{n-k})$, Nonlinear Analysis 47 (2001) 4743-4751.
- [7] **Kulenevic, M. R. S. And Ladas, G., 2002**, Dynamics of Second Order Rational Difference Equations with Open Problems and Conjecture, Boca raton, London.
- [8] **El-Owaidy, H.M., Ahmed, A.M., Youssef, A.M., 2003**, The Dinamics Of The Recursive Sequence $x_{n+1} = \alpha x_{n-1} / (\beta + \gamma x_{n-2}^p)$, Applied Mathematics Letters.
- [9] **El-Owaidy, H.M., Ahmed, A.M., Mousa, M.S., 2003**, On Asymptotic Behaviour Of The Difference Equation $x_{n+1} = \alpha + (x_{n-k} / x_n)$, Applied Mathematics and Computation.
- [10] **Yang, X., Lai, H., Evans D.J., Megson, G.M.,** Global Asymptotic Stability in a Rational Recursive, Applied Mathematics and Computation, 158, (2004), 703-716.
- [11] **Li, X. Zhu, D.,** Global Asymptotic Stability for two Recursive Difference Equations, Applied Mathematics and Computation, 150, (2004), 481-492.
- [12] **Çinar, C.,Stevic, S. And Yalçinkaya, İ.,2005**, On positive solution of reciprocal difference equation with minimum, J. Appl. Math & Computing, 17(1-2), 307-304.

- [13] **Saleh, M., Aloqeili, M.** On The Rational Difference Equation $y_{n+1} = A + (y_{n-k}/y_n)$, Applied Mathematics and Computation, 171, (2005), 862-869.
- [14] **Grove, E. A., and Ladas, G.,** Periodicities in Nonlinear Difference Equations Chapman hall a crc pres company 2005 by crc pres.
- [15] **Yang, X.,** On The Global Asymptotic Stability of the Difference Equation $x_{n+1} = (x_{n-1}x_{n-2} + x_{n-3} + a)/(x_{n-1} + x_{n-2}x_{n-3} + a)$, Applied Mathematics and Computation, 171, (2005), 857-861.
- [16] **Su, Y.H., Li, W.T.,** Global Asymptotic Stability of a Second-Order Nonlinear Difference Equation, Applied Mathematics and Computation, 168, (2005), 981-989.
- [17] **Yan, X., Liao, X. And Li, C., 2006,** On a difference equation with maximum, Applied Mathematics and Computation, 181, 1-5.
- [18] **Peng, Y.,** Global Asymptotic Stability for Nonlinear Difference Equation, Applied Mathematics and Computation, 182, (2006), 67-72.
- [19] **Dehghan, M., Mazrooei-Sebdani, R.,** The Characteristics of a Higher-Order Rational Difference Equation, Applied Mathematics and Computation, 182, (2006), 521-528.
- [20] **Saleh, M., Aloqeili, M.** On The Rational Difference Equation $y_{n+1} = A + (y_n/y_{n-k})$, Applied Mathematics and Computation, 177, (2006), 189-193.
- [21] **Zhang, Y., Yang, X., Megson, G.M., Evans, D.J.,** On The System of Rational Difference Equations $x_n = A + (1/y_{n-p})$, $y_n = A + (y_{n-1}/x_{n-r}y_{n-s})$, Applied Mathematics and Computation, 176, (2006), 403-408.
- [22] **Saleh, M., Aloqeili, M.** On The Difference Equation $y_{n+1} = A + (y_n/y_{n-k})$, with $A < 0$, Applied Mathematics and Computation, 176, (2006), 359-363.
- [23] **Stevic, S., 2007,** On the recursive sequence $x_{n+1} = \max \left\{ c, \frac{x_n^p}{x_{n-1}^p} \right\}$, Applied Mathematics Letters, (in pres).

[24] Yang, X., Yang, Y., Luo, J., On The Difference Equation $x_{n+1} = (p + x_{n-s}) / (qx_{n-t} + x_{n-s})$, Applied Mathematics and Computation, 189, (2007), 918-926.

[25] Hu, L.X., Li, W.T., Global Stability of a Rational Difference Equation, Applied Mathematics and Computation, (2007)

[26] Şekerci, N., Taşkara, N. and Tollu D.T., 2008, On The Behaviour Of The Difference Equation $x_{n+1} = \max \left\{ \frac{1}{x_n}, \min \left\{ 1, \frac{A}{x_n} \right\} \right\}$, 14th International Conference On Difference Equations and Applications, İstanbul, 2008

[27] Schinas C., Papaschinopoulos G., Stefanidou G., 2008, Boundedness, periodicity, attaractivitiy of the difference equation $x_{n+1} = A_n + \left(\frac{x_{n-1}}{x_n} \right)^p$, 14th International Conference On Difference Equations and Applications, İstanbul, 2008

[28] Papaschinopoulos G., Stefanidou G., Schinas C., 2008, Boundedness, attaractivitiy, stability of a rational difference equation with two periodic coefficients, 14th International Conference On Difference Equations and Applications, İstanbul, 2008