

2^Y ÜZERİNDEKİ TOPOLOJİLER VE ÖZELLİKLERİ

İdris ZORLUTUNA
DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
2000

T.C. YÜKSEKÖĞRETİM BAKANLIĞI
DOKTORA TEZİ

T.C.
CUMHURİYET ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

2^y ÜZERİNDEKİ TOPOLOJİLER VE ÖZELLİKLERİ

98109

İdris ZORLUTUNA
DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
2000

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ'NE

Bu çalışma, jürimiz tarafından, Matematik Anabilim Dalı'nda Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Rauf Amirov R. Shlezynets
Üye : Prof. Dr. Yalçın Küçük
Üye :
Üye : Doç. Dr. Mahide Küçük
Üye : Yrd. Doç. Dr. Mustafa Yıldırım M. Mustafa

ONAY

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

.../.../2000

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRÜ

Prof. Dr. Necati ÇELİK



Bu tez, Cumhuriyet Üniversitesi Senatosunun 05.01.1984 tarihli toplantısında kabul edilen ve daha sonra 30.12.1993 tarihinde C. Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğünce hazırlanan ve yayınlanan “Yüksek Lisans ve Doktora tez yazım Kılavuzu” adlı yönergeye göre hazırlanmıştır.

İÇİNDEKİLER

ÖZET

SUMMARY

GİRİŞ.....	1
1.BÖLÜM-ÖN BİLGİLER.....	3
2.BÖLÜM- 2^X Üzerindeki Bazı Yeni Topolojiler.....	11
1) 2^X Üzerindeki Üst ve Alt Vietoris Topolojilerin Temel Özellikleri.....	11
2) 2^X Üzerindeki Yarı Regüler Topolojiler.....	18
3) 2^X Üzerindeki θ -Topolojiler.....	21
3.BÖLÜM-Küme Değerli Dönüşümlerin Çeşitli Süreklilikleri.....	25
1) Küme Değerli Dönüşümler için Faintly Süreklilik.....	25
2) Küme Değerli Dönüşümler için Süper Faintly Süreklilik.....	36
3) Küme Değerli Dönüşümler için Kuvvetli Faintly Süreklilik.....	46
4.BÖLÜM-Küme Değerli Dönüşümlerin Sürekliliklerinin Görüntü Uzayı Üzerindeki Topolojiler İle İlişkilendirilmesi.....	55
1) Küme Değerli Dönüşümlerin Bazı sürekliliklerinin Karakterizasyonları.....	55
2) Sürekliliklerin Karşılaştırılması.....	63
KAYNAKLAR	

ÖZET

Doktora Tezi

2^Y ÜZERİNDEKİ TOPOLOJİLER VE ÖZELLİKLERİ

İdris ZORLUTUNA

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Yalçın KÜÇÜK

2^Y üzerinde yeni topolojiler tanımlayarak küme değerli dönüşümlerin sürekliliklerinin bu yeni topolojiler ile ilişkilerini incelemeyi amaçlayan bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, ön bilgiler ile bu alanda yapılmış çalışmalardan bazı önemli tanım ve teoremler, bunlara ilişkin kaynaklar verildi. İkinci, üçüncü ve dördüncü bölümlerde ise tezin özgün çalışmaları sunuldu.

İkinci bölümde, ilk olarak üst ve alt Vietoris topolojilere ait bazı temel özellikler verildi. Daha sonra 2^Y üzerinde yarı regüler ve θ -topolojiler tanımlanarak, bunların üst ve alt Vietoris topolojiler ile ilişkilerinin yanısıra kendi aralarındaki ilişkileri ve bazı temel özellikleri sonuçlar halinde verildi.

Üçüncü bölümde, ilk kez Long ve Herrington (1982) tarafından tek değerli dönüşümler için verilen faintly süreklilik ve Yalvaç (1990) tarafından verilen bazı kuvvetli formları küme değerli dönüşümlere genişletildi. Küme değerli dönüşümlerin bu tür süreklilikleri için, tek değerli dönüşümler de kullanılarak karakterizasyonlar verildi ve çeşitli özellikleri incelendi.

Dördüncü bölümde, daha önce değişik yazarlar tarafından çalışılmış olan küme değerli dönüşümlere ait süreklilik tipleri, görüntü uzayının yeniden topolojilendirilmesi ile karakterize edildi. Tek değerli dönüşümler için süreklilikleri

tanımlamada ve karakterize etmede daha önce kullanılmış olan görüntü uzayının yeniden topolojilendirilmesi yöntemi, burada küme değerli dönüşümler için kullanıldı. Sonuç olarak ortaya çıkan yeni tür süreklilikler ile eskileri arasındaki ilişkiler incelendi.

Anahtar Kelimeler: Küme Değerli Dönüşüm, Vietoris topoloji, Faintly süreklilik, Süreklilik



SUMMARY

Ph.D Thesis

TOPOLOGIES ON 2^Y AND PROPERTIES OF THEM

İdris ZORLUTUNA

Graduate School of Natural and Applied

Science of Department of Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Yalçın KÜÇÜK

This study which main purpose is to examine the relationships with new topologies of continuities of multivalued maps by defining new topologies on 2^Y is composed four main parts.

In the first part, preliminaries, some important definitions and theorems from studings made before in this area and relevant sources have been given. As for in the remaining parts have been presented original studings of thesis.

In the second part, firstly some essential properties which belong to upper and lower Vietoris topologies have been given. After that some new topologies on 2^Y have been defined. Relationships between upper (and lower) Vietoris topologies and new topologies have been given and also among relationships of new topologies and some essential properties have given as results.

In the third part, faintly continuity defined by Long and Herrington (1982) for single valued maps and some strong forms of it defined by Yalvaç (1990) have been extended to multivalued maps. For such continuities of multivalued maps, characterizations have been given using single valued maps and different properties have been analyzed.

In the last part, types of continuities belong to multivalued maps which had been studied by some authors before have been characterized by retopologized

image spaces. Retopologized method of image space which had been used for the single valued maps to characterize and to define the continuities before have been used for set valued maps. Consequently, the relationships of new continuities which arise from retopologized of image spaces with olds have been investigated.

Keywords: Multivalued map, Vietoris topology, Faintly continuity, Continuity.





Bu çalışmayı yöneten ve çalışmam sırasında beni aydınlatan danışman hocam sayın Prof. Dr. Yalçın KÜÇÜK'e, çalışmam sırasında istisnasız bir şekilde yardımları esirgemeyen sayın Doç.Dr. Mahide KÜÇÜK'e ayrıca matematik bölümü elemanlarına en içten teşekkürlerimi sunarım.

İdris ZORLUTUNA

GİRİŞ

Küme değerli dönüşümler 1930 lu yıllarda ayrı bir konu olarak çalışılmaya başlanmış ve bugüne kadar bu tür dönüşümlerin süreklilikleri, türevlenebilirlikleri, integrallenebilirlikleri, ölçülebilirlikleri ve homotop olmaları gibi bir çok özellikleri değişik araştırmacılar ((Eilenberg and Montgomery, 1946), (Stroter, 1955), (Jacobs, 1968), (Bridgland, 1970) v.s.) tarafından çalışılmıştır.

Bu çalışmada önemli bir yer tutacak olan küme değerli dönüşümlerin süreklilikleri ise 1941 yılında A.D. Wallace ın American Mathematical Society adlı dergide yayınlanan “A fixed Point Theorem for Trees” adlı makalesi ile başlar. Küme değerli dönüşümler için değişik araştırmacılar tarafından değişik süreklilik tanımları verilmiştir ((Choquet, 1947), (Ratner, 1949) v.s.). Stroter 1955 yılında Sociedade de Matematica de Sao Paulo adlı dergide yayınlamış olduğu “Continuous Multivalued Functions” başlıklı makalesinde, o tarihe kadar verilmiş süreklilik tanımları arasındaki ilişkiyi incelemiş ve bunların eşdeğerliliklerini araştırmıştır. Daha sonra Lechicki (1979) tarafından benzer bir çalışma daha yapılmıştır.

Tek değerli dönüşümün tanım veya görüntü uzayının topolojileri değiştirildiğinde, kanıtlanması zor olan bazı teoremlerin kanıtlarının kolaylıkla yapıldığı bilinmektedir ((Reilly and Vamanamurth, 1983), (Long and Herrinton, 1981), (Noiri and Kang, 1984) v.s.).

Bir küme değerli dönüşüme tek değerli bir dönüşüm karşı getirilerek, bu dönüşümün sürekliliği karşı gelen tek değerli dönüşümün sürekliliği yardımıyla ifade edilebilmektedir (Michael, 1951). Küme değerli dönüşümlerin süreklilikleri tek değerli dönüşümlerin sürekliliklerinin doğal genişlemeleri olduğundan tek değerli dönüşümler için geçerli olan bir çok özelliğin bu dönüşümler içinde geçerli olması beklenmektedir. Bugüne kadar bu özellikleri küme değerli dönüşüme karşı gelen tek değerli dönüşümün tanım veya görüntü uzayındaki topolojileri değiştirerek inceleme yoluna pek gidilmemiştir. Bunun nedeni kuvvet

kümesi üzerindeki topolojilerin incelenmesinin güç olmasıdır.

Bu çalışmada küme değerli dönüşümlere tek değerli dönüşümler karşılık getirilerek, bunların görüntü uzayları yeniden topolojilendirilip süreklilikleri incelenecektir.

Önce görüntü uzayının yeniden topolojilendirilmesi için bu uzayın kuvvet kümesi üzerinde yeni topolojiler oluşturulmuştur. Daha sonra bu topolojiler yardımıyla küme değerli dönüşümlerin bu topolojilere göre süreklilikleri incelenmiştir. Bu inceleme sonunda, küme değerli dönüşümler için daha önce verilen süreklilik tanımlarının ((Popa, 1982), (Özer, 1986), (Küçük, 1994), v.s.) yeni tanımlar ile çakışması beklenirken bunun gerçekleşmediği gözlenmiştir. Bu da küme değerli dönüşümler için yeni bir kaç süreklilik tanımının verilebileceğini ortaya koymuştur. Burada daha önce yapılan genelleştirme çalışmaları ile yeni verilen tanımlar karşılaştırılmıştır.

1.BÖLÜM

ÖN BİLGİLER

1.1. X ve 2^X Üzerindeki Topolojiler ve Özellikleri

1.1.1.Tanım: (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. A nın içi $\text{int}A$, A nın kapanışı $\text{cl}A$ ile gösterilecektir. Karışıklık olması muhtemel durumlarda, sırasıyla $\tau - \text{int}A$ ve $\tau - \text{cl}A$ gibi gösterimler kullanılacaktır.

a) $A = \text{int}(\text{cl}A)$ ise A kümesine regüler açık küme denir. Bir regüler açık kümenin tümleyeni regüler kapalı küme olarak tanımlanır (Stone, 1937).

b) $A \subseteq \text{cl}(\text{int}A)$ ise A kümesine yarı açık küme denir. Bir yarı açık kümeni tümleyeni yarı kapalı küme olarak tanımlanır (Levine, 1963).

1.1.2.Tanım: (X, τ) bir topolojik uzay olsun. X teki bütün regüler açık alt kümelerin ailesi X üzerinde bir topoloji için tabandır. Bu topolojiye τ nun yarı regülerleştirilmesi denir ve τ_s ile gösterilir (Raghavan, 1984).

1.1.3.Tanım: (X, τ) bir topolojik uzay, $A \subseteq X$ ve $x \in X$ olsun. x noktasının her bir U açık komşuluğu için $\text{cl}U \cap A \neq \emptyset$ ise x noktasına A kümesinin θ -kapanış noktasıdır denir. A nın bütün θ -kapanış noktalarının kümesi A nın θ -kapanışı olarak isimlendirilir ve $\theta - \text{cl}A$ ile gösterilir. $A = \theta - \text{cl}A$ ise A ya θ -kapalı küme denir. θ -kapalı kümenin tümleyeni θ -açık küme olarak adlandırılır (Velicko, 1968).

1.1.4.Tanım: (X, τ) bir topolojik uzay olsun. X teki bütün θ -açık kümelerin ailesi X üzerinde bir topolojidir. Bu topoloji τ_θ ile gösterilir (Long and Herrington, 1982).

1.1.5.Tanım: (X, τ) bir topolojik uzay olsun.

a) Her bir $x \in X$ ve x noktasını bulundurmeyen her bir A regüler kapalı kümesi için $x \in U$, $A \subseteq V$ ve $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde U , V açık kümeleri varsa (X, τ) ya hemen hemen regüler (almost regular) uzay denir (Singal and Arya, 1969).

b) Her bir $x \in X$ ve x noktasını bulundurmeyen her bir A yarı kapalı kümesi için $x \in U$, $A \subseteq V$ ve $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde U , V yarı açık kümeleri varsa (X, τ) ya yarı regüler (semi regular) uzay denir (Dorsett, 1982).

Bir (X, τ) topolojik uzay için $\tau_\theta \subseteq \tau_s \subseteq \tau$ olduğu açıktır. Bir (X, τ) topolojik uzayının regüler olması için gerek ve yeterli koşul $\tau_\theta = \tau$ olmasıdır (Raghavan, 1984). Yine bir (X, τ) topolojik uzayının yarı regüler olması için gerek ve yeterli koşul $\tau_s = \tau$ olmasıdır (Raghavan, 1984). Ayrıca bir (X, τ) topolojik uzayının hemen hemen regüler olması için gerek ve yeterli koşul $\tau_s = \tau_\theta$ olmasıdır (Long and Herrington, 1982).

1.1.6.Tanım: (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun.

a) A kümesinin her bir $\{U_\alpha \mid \alpha \in I\}$ açık örtüsünden, $A \subseteq \bigcup \{int(cl(U_{\alpha_i})) \mid i = 1, 2, \dots, n\}$ olacak biçimde sonlu bir alt örtü seçilebilirse, A kümesine yakın kapalı (N-closed) küme denir (Carnahan, 1972).

b) A kümesinin her bir $\{U_\alpha \mid \alpha \in I\}$ açık örtüsünden, $A \subseteq \bigcup \{cl(U_{\alpha_i}) \mid i = 1, 2, \dots, n\}$ olacak biçimde sonlu bir alt örtü seçilebilirse, A kümesine quasi H-kapalı (quasi H-closed) küme (Porter and Thomas, 1969) veya H-küme (H-set) (Velicko, 1968) denir.

1.1.7.Tanım: (X, τ) bir topolojik uzay olsun.

a) X in kendisi yakın kapalı ise (X, τ) ya yakın kompakt (nearly compact) uzay denir (Singal and Mathur, 1969)

b) X in kendisi quasi H-kapalı ise (X, τ) ya quasi H-kapalı (quasi H-closed) uzay (Porter and Thomas, 1969) veya hemen hemen kompakt (almost compact) uzay (Noiri, 1979) denir.

Quasi H-kapalı Hausdorff uzaylar genelde H-closed olarak adlandırılır.

1.1.8.Tanım: (X, τ) bir topolojik uzay ve Σ , X in alt kümelerinin bir

ailesi olsun. Her bir $x \in X$ noktası için x in Σ ailesinden en fazla sonlu tane öge ile kesişen bir komşuluğu varsa, Σ ya yerel sonlu (locally finite) aile denir.

1.1.9.Tanım: (X, τ) bir topolojik uzay, $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$, X uzayında bir ağ ve $x \in X$ olsun.

a) x noktasını bulunduran her bir U regüler açık kümesi için, $\alpha \geq \alpha_0$ iken $x_\alpha \in U$ olacak şekilde bir $\alpha_0 \in I$ var ise, $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ ağı x noktasına δ -yakınsaktır denir (Noiri, 1980).

b) x noktasını bulunduran her bir U θ -açık kümesi için, $\alpha \geq \alpha_0$ iken $x_\alpha \in U$ olacak şekilde bir $\alpha_0 \in I$ var ise, $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ ağı x noktasına θ -yakınsaktır denir.

c) x noktasını bulunduran her bir U açık kümesi için, $\alpha \geq \alpha_0$ iken $x_\alpha \in clU$ olacak şekilde bir $\alpha_0 \in I$ var ise, $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ ağı x noktasına r -yakınsaktır denir (Herrington and Long, 1975).

1.1.10.Tanım: (X, τ) bir topolojik uzay olsun ve 2^X , X in boş kümeden farklı bütün alt kümeleri ailesini gösterebilir. $U_1, U_2, \dots, U_n$ X te açık kümeler olmak üzere $B(U_1, U_2, \dots, U_n)$ ile $\{T \in 2^X \mid T \subseteq \cup_{i=1}^n U_i \text{ ve } T \cap U_i \neq \emptyset, i = 1, 2, \dots, n\}$ kümeler ailesini gösterelim. $B(U_1, U_2, \dots, U_n)$ biçimindeki bütün kümelerin koleksiyonu 2^X üzerinde bir topoloji için tabandır. Bu topolojiye Vietoris veya finite topoloji denir (Michael, 1951). Bu topoloji burada τ_V ile gösterilecektir.

$$CL(X) = \{T \subseteq X : T \neq \emptyset \text{ ve } T \text{ kapalı}\}$$

$K(X) = \{T \subseteq X : T \neq \emptyset \text{ ve } T \text{ kompakt}\}$ olarak tanımlansın. $CL(X)$ veya $K(X)$ üzerindeki Vietoris topoloji, 2^X ten indirgenen alt uzay topolojisinden başka bir şey değildir (Michael, 1951).

1.1.11.Tanım: (X, τ) bir topolojik uzay olsun. 2^X üzerindeki üst (alt) Vietoris topoloji, U X te bir açık alt küme olmak üzere $U^+ = \{T \in 2^X : T \subseteq U\}$ ($U^- = \{T \in 2^X : T \cap U \neq \emptyset\}$) biçimindeki bütün ailelerin taban (alt taban) olduğu topolojidir (Michael, 1951). Başka bir deyişle, üst (alt) Vietoris topoloji, U X te bir açık alt küme iken U^+ (U^-) ailesinin açık olduğu

2^X üzerindeki topolojidir. Bu topolojiler sırayla $\tau_V^+(\tau_V^-)$ ile gösterilecektir.

2^X üzerindeki Vietoris topoloji $\tau_V = \tau_V^+ \vee \tau_V^-$ dir (Michael, 1951).

1.2. Tek ve Küme Değerli Dönüşümler

1.2.1.Tanım: X ve Y iki topolojik uzay olsun. X in her bir ögesine Y nin boş olmayan bir alt kümesini karşılık getiren bir F bağıntısına X ten Y ye bir küme değerli dönüşüm denir ve $F : X \rightsquigarrow Y$ olarak yazılır. $x \in X$ ögesine karşılık gelen alt küme $F(x)$ ile gösterilir.

1.2.2.Tanım: X ve Y iki topolojik uzay ve $F : X \rightsquigarrow Y$ bir küme değerli dönüşüm olsun. $B \subseteq Y$ için, $F^+(B) = \{x \in X : F(x) \subseteq B\}$ ve $F^-(B) = \{x \in X : F(x) \cap B \neq \emptyset\}$ kümelerine sırasıyla B nin F altındaki üst ters görüntüsü ve B nin F altındaki alt ters görüntüsü denir. Bir $A \subseteq X$ için $F(A) = \cup\{F(x) : x \in A\}$ dir.

1.2.3.Tanım: X ve Y iki topolojik uzay, $F : X \rightsquigarrow Y$ bir küme değerli dönüşüm ve $x \in X$ olsun.

a) $x \in F^+(V)$ olan Y deki her V açık kümesi için $U \subseteq F^+(V)$ (yani, $\forall z \in U$ için $F(z) \subseteq V$) koşulunu sağlayan x noktasının bir U açık komşuluğu var ise, F ye x noktasında üstten yarı sürekli (upper semi continuous) küme değerli dönüşüm denir. Bu durumu kısaca, ü.y.sürekli olarak göstereceğiz.

b) $x \in F^-(V)$ olan Y deki her V açık kümesi için $U \subseteq F^-(V)$ (yani, $\forall z \in U$ için $F(z) \cap V \neq \emptyset$) koşulunu sağlayan x noktasının bir U açık komşuluğu var ise, F ye x noktasında alttan yarı sürekli (lower semi continuous) küme değerli dönüşüm denir. Bu durumu kısaca, a.y.sürekli olarak göstereceğiz.

c) F ü.y.sürekli ve a.y.sürekli ise F ye X üzerinde süreklidir denir (Ponomarev, 1964).

1.2.4.Tanım: X ve Y iki topolojik uzay ve $F : X \rightsquigarrow Y$ bir küme değerli dönüşüm olsun. Her $x \in X$ için $f(x) = F(x)$ denirse X ten 2^Y ye bir f tek değerli dönüşüm tanımlanır. F nin ü.y.sürekli (a.y.sürekli) olması tanımı F ye karşı gelen f dönüşümünün sürekliliği cinsinden aşağıdaki biçimde verilir.

F küme değerli dönüşümünün ü.y.sürekli (a.y.sürekli) olması için gerekli ve yeterli koşul X ten 2^Y ye tanımlı ve F ye karşı gelen f tek değerli dönüşümünün 2^Y üzerindeki τ_V^+ (τ_V^-) topolojilerine göre sürekli olmasıdır.

Bazı yazarlar bu ifadeyi F dönüşümünün ü.y.sürekli (a.y.sürekli) olması tanımı olarak almışlardır (Michael, 1951).

1.2.5.Önerme: X ve Y iki topolojik uzay, $F : X \rightsquigarrow Y$ bir küme değerli dönüşüm ve $B \subseteq Y$ olsun. Bu durumda $X - F^+(B) = F^-(Y - B)$ eşitliği doğrudur.

1.2.6.Tanım: X ve Y iki topolojik uzay ve $F : X \rightsquigarrow Y$ bir küme değerli dönüşüm olsun. Her $x \in X$ için $F(x)$, Y de kompakt bir küme ise F ye nokta kompakt küme değerli dönüşüm denir (Smithson,1972).

1.3. Tek ve Küme Değerli Dönüşümlerin Süreklilikleri

1.3.1.Tanım: X ve Y iki topolojik uzay, $f : X \longrightarrow Y$ bir tek değerli dönüşüm ve $x \in X$ olsun.

a) $f(x) \in V$ olan her $V \subseteq Y$ açık kümesi için, $f(int(clU)) \subseteq V$ koşulunu sağlayan x noktasının bir U açık komşuluğu varsa f ye x noktasında süper sürekli (super continuous) denir (Munshi and Bassan, 1982).

b) $f(x) \in V$ olan her $V \subseteq Y$ açık kümesi için, $f(int(clU)) \subseteq int(clV)$ koşulunu sağlayan x noktasının bir U açık komşuluğu varsa f ye x noktasında δ -sürekli (δ -continuous) denir (Noiri, 1980).

c) $f(x) \in V$ olan her $V \subseteq Y$ açık kümesi için, $f(clU) \subseteq V$ koşulunu sağlayan x noktasının bir U açık komşuluğu varsa f ye x noktasında kuvvetli θ -sürekli (strongly θ -continuous) denir (Long and Herrington, 1981).

d) $f(x) \in V$ olan her $V \subseteq Y$ açık kümesi için, $f(clU) \subseteq int(clV)$ koşulunu sağlayan x noktasının bir U açık komşuluğu varsa f ye x noktasında hemen hemen kuvvetli θ -sürekli (almost strongly θ -continuous) denir (Noiri and Kang, 1984).

1.3.2.Tanım: $F : X \rightsquigarrow Y$ küme değerli dönüşüm ve $x \in X$ olsun.

a) $x \in F^+(V)$ olan Y deki her V açık kümesi için $U \subseteq F^+(int(clV))$ (yani, $\forall z \in U$ için $F(z) \subseteq int(clV)$) koşulunu sağlayan x noktasının bir U açık komşuluğu var ise, F ye x noktasında üstten hemen hemen sürekli (upper almost continuous) küme değerli dönüşüm denir. Bu durumu kısaca, ü.h.h.sürekli olarak göstereceğiz.

b) $x \in F^-(V)$ olan Y deki her V açık kümesi için $U \subseteq F^-(int(clV))$ (yani, $\forall z \in U$ için $F(z) \cap int(clV) \neq \emptyset$) koşulunu sağlayan x noktasının bir U açık komşuluğu var ise, F ye x noktasında alttan hemen hemen sürekli (lower almost continuous) küme değerli dönüşüm denir. Bu durumu kısaca, a.h.h.sürekli olarak göstereceğiz.

c) F , küme değerli dönüşümü $\forall x \in X$ noktasında ü(a).h.h.sürekli ise F ye X üzerinde ü(a).h.h.sürekli denir (Popa, 1982).

1.3.3.Tanım: $F : X \rightsquigarrow Y$ küme değerli dönüşüm ve $x \in X$ olsun.

a) $x \in F^+(V)$ olan Y deki her V açık kümesi için $int(clU) \subseteq F^+(int(clV))$ (yani, $\forall z \in int(clU)$ için $F(z) \subseteq int(clV)$) koşulunu sağlayan x noktasının bir U açık komşuluğu var ise, F ye x noktasında üstten δ -sürekli (upper δ -continuous) küme değerli dönüşüm denir. Bu durumu kısaca, ü. δ -sürekli olarak göstereceğiz.

b) $x \in F^-(V)$ olan Y deki her V açık kümesi için $int(clU) \subseteq F^-(int(clV))$ (yani, $\forall z \in int(clU)$ için $F(z) \cap int(clV) \neq \emptyset$) koşulunu sağlayan x noktasının bir U açık komşuluğu var ise, F ye x noktasında alttan δ -sürekli (lower δ -continuous) küme değerli dönüşüm denir. Bu durumu kısaca, a. δ -sürekli olarak göstereceğiz.

c) F , küme değerli dönüşümü $\forall x \in X$ noktasında ü(a). δ -sürekli ise F ye X üzerinde ü(a). δ -sürekli denir (Küçük, 1995).

1.3.4.Tanım: $F : X \rightsquigarrow Y$ küme değerli dönüşüm ve $x \in X$ olsun.

a) $x \in F^+(V)$ olan Y deki her V açık kümesi için $clU \subseteq F^+(int(clV))$ (yani, $\forall z \in clU$ için $F(z) \subseteq int(clV)$) koşulunu sağlayan x noktasının bir U açık komşuluğu var ise, F ye x noktasında üstten hemen hemen kuvvetli

θ -sürekli (upper almost strongly θ -continuous) küme değerli dönüşüm denir. Bu durumu kısaca, ü.h.h.k. θ -sürekli olarak göstereceğiz.

b) $x \in F^-(V)$ olan Y deki her V açık kümesi için $clU \subseteq F^-(int(clV))$ (yani, $\forall z \in clU$ için $F(z) \cap int(clV) \neq \emptyset$) koşulunu sağlayan x noktasının bir U açık komşuluğu var ise, F ye x noktasında alttan hemen hemen kuvvetli θ -sürekli (lower almost strongly θ -continuous) küme değerli dönüşüm denir. Bu durumu kısaca, a.h.h.k. θ -sürekli olarak göstereceğiz.

c) F , küme değerli dönüşümü $\forall x \in X$ noktasında ü(a).h.h.k. θ -sürekli ise F ye X üzerinde ü(a).h.h.k. θ -sürekli denir (Özer, 1986).

1.3.5.Tanım: $F : X \rightsquigarrow Y$ küme değerli dönüşüm ve $x \in X$ olsun.

a) $x \in F^+(V)$ olan Y deki her V açık kümesi için $clU \subseteq F^+(V)$ (yani, $\forall z \in clU$ için $F(z) \subseteq V$) koşulunu sağlayan x noktasının bir U açık komşuluğu var ise, F ye x noktasında üstten kuvvetli θ -sürekli (upper strongly θ -continuous) küme değerli dönüşüm denir. Bu durumu kısaca, ü.k. θ -sürekli olarak göstereceğiz.

b) $x \in F^-(V)$ olan Y deki her V açık kümesi için $clU \subseteq F^-(V)$ (yani, $\forall z \in clU$ için $F(z) \cap V \neq \emptyset$) koşulunu sağlayan x noktasının bir U açık komşuluğu var ise, F ye x noktasında alttan kuvvetli θ -sürekli (lower strongly θ -continuous) küme değerli dönüşüm denir. Bu durumu kısaca, a.k. θ -sürekli olarak göstereceğiz.

c) F , küme değerli dönüşümü $\forall x \in X$ noktasında ü(a).k. θ -sürekli ise F ye X üzerinde ü(a).k. θ -sürekli denir (Küçük, 1994).

1.3.6.Tanım: $F : X \rightsquigarrow Y$ küme değerli dönüşüm ve $x \in X$ olsun.

a) $x \in F^+(V)$ olan Y deki her V açık kümesi için $U \subseteq F^+(clV)$ (yani, $\forall z \in U$ için $F(z) \subseteq clV$) koşulunu sağlayan x noktasının bir U açık komşuluğu var ise, F ye x noktasında üstten zayıf sürekli (upper weakly continuous) küme değerli dönüşüm denir. Bu durumu kısaca, ü.z.sürekli olarak göstereceğiz.

b) $x \in F^-(V)$ olan Y deki her V açık kümesi için $U \subseteq F^-(clV)$ (yani, $\forall z \in U$ için $F(z) \cap clV \neq \emptyset$) koşulunu sağlayan x noktasının bir U açık komşuluğu

var ise, F ye x noktasında alttan zayıf sürekli (lower weakly continuous) küme değerli dönüşüm denir. Bu durumu kısaca, a.z.sürekli olarak göstereceğiz.

c) F , küme değerli dönüşümü $\forall x \in X$ noktasında $\bar{u}(a).z.$ sürekli ise F ye X üzerinde $\bar{u}(a).z.$ sürekli denir (Smithson, 1978).

1.3.7.Tanım: X ve Y iki topolojik uzay ve $F : X \rightsquigarrow Y$ bir küme değerli dönüşüm olsun. $G_F : X \rightsquigarrow X \times Y$, $G_F(x) = \{(x, y) : y \in F(x)\}$ biçiminde tanımlanan küme değerli dönüşüm, F ye karşılık gelen küme değerli grafik dönüşümü denir (Smithson, 1978).

1.3.8.Tanım: X ve Y iki topolojik uzay ve $F : X \rightsquigarrow Y$ bir küme değerli dönüşüm olsun. $G(F) = \{(x, y) : y \in F(x)\} \subseteq X \times Y$ kümesine F nin grafiği denir.

1.3.9.Tanım: X ve Y iki topolojik uzay ve $F : X \rightsquigarrow Y$ bir küme değerli dönüşüm olsun. $G(F)$, F nin grafiği olmak üzere her bir $(x, y) \in (X \times Y) - G(F)$ için $(U \times V) \cap G(F) = \emptyset$ olacak şekilde X içinde x noktasının bir U açık, Y içinde y noktasının bir V θ -açık komşuluğu varsa F ye grafiği aşırı kapalıdır (extremely closed) denir (Long and Herrington, 1982).

1.3.10.Tanım: X ve Y iki topolojik uzay ve $F : X \rightsquigarrow Y$ bir küme değerli dönüşüm olsun. $G(F)$, F nin grafiği olmak üzere her bir $(x, y) \in (X \times Y) - G(F)$ için $(clU \times V) \cap G(F) = \emptyset$ olacak şekilde X içinde x noktasının bir U açık, Y içinde y noktasının bir V açık komşuluğu varsa F ye grafiği X e göre θ -kapalıdır (θ -closed with respect to X) denir.

2.BÖLÜM

2^X ÜZERİNDEKİ BAZI YENİ TOPOLOJİLER

Bu bölümün birinci kesiminde, üst ve alt Vietoris topolojik uzaylarda iç ve kapanış özellikleri, bu topolojilerin sahip oldukları ayırma aksiyomları, kompaktlık ve bağlantılılık özellikleri incelenecektir. İkinci ve üçüncü kesimlerde, 2^X üzerinde yeni topolojiler tanımlanarak, bu yeni topolojilerin öncelikle sahip oldukları temel özellikler daha sonra birbirleri ile olan ilişkileri verilecektir.

2.1 2^X Üzerindeki Üst ve Alt Vietoris Topolojilerin Temel Özellikleri

Öncelikle 2^X üzerindeki üst ve alt Vietoris topolojilerin temel özelliklerini incelemede kullanılacak iki önerme verilmiştir.

2.1.1.Önerme: X in boş kümeden farklı G_1, G_2 kümeleri için aşağıdakiler doğrudur.

- 1) $G_1^+ \cap G_2^+ = (G_1 \cap G_2)^+$
- 2) $G_1^+ \cup G_2^+ \subseteq (G_1 \cup G_2)^+$
- 3) $G_1^- \cap G_2^- \supseteq (G_1 \cap G_2)^-$
- 4) $G_1^- \cup G_2^- = (G_1 \cup G_2)^-$
- 5) $G_1^+ \subseteq G_2^+ \iff G_1 \subseteq G_2$
- 6) $G_1^- \subseteq G_2^- \iff G_1 \subseteq G_2$

Kanıt: 1) $T \in G_1^+ \cap G_2^+$ olsun. Bu $T \in G_1^+$ ve $T \in G_2^+$ demektir. Buradan $T \subseteq G_1$ ve $T \subseteq G_2$ olur. Dolayısıyla $T \subseteq G_1 \cap G_2$ olur ki, bu $T \in (G_1 \cap G_2)^+$ demektir. Tersinin doğruluğu benzer biçimde görülür.

2) $T \in G_1^+ \cup G_2^+$ olsun. Bu $T \in G_1^+$ veya $T \in G_2^+$ demektir. Buradan $T \subseteq G_1$ veya $T \subseteq G_2$ olur. Dolayısıyla $T \subseteq G_1 \cup G_2$ olur ki, bu $T \in (G_1 \cup G_2)^+$ demektir.

3) $T \in (G_1 \cap G_2)^-$ olsun. Bu $T \cap (G_1 \cap G_2) \neq \emptyset$ demektir. Buradan $T \cap G_1 \neq \emptyset$ ve $T \cap G_2 \neq \emptyset$ olur. Dolayısıyla $T \in G_1^-$ ve $T \in G_2^-$ olur ki, bu $T \in G_1^- \cap G_2^-$ demektir.

4) $T \in (G_1 \cup G_2)^-$ olsun. Bu $T \cap (G_1 \cup G_2) \neq \emptyset$ demektir. Buradan $T \cap G_1 \neq \emptyset$ veya $T \cap G_2 \neq \emptyset$ olur. Dolayısıyla $T \in G_1^-$ veya $T \in G_2^-$ olur ki, bu $T \in G_1^- \cup G_2^-$ demektir. Tersinin doğruluğu benzer biçimde görülür.

5) $G_1^+ \subseteq G_2^+$ ve $x \in G_1$ olsun. Bu durumda $\{x\} \in G_1^+$ dır. $G_1^+ \subseteq G_2^+$ olduğundan $\{x\} \in G_2^+$ olur. Buradan $x \in G_2$ elde edilir. Tersinin doğruluğu benzer biçimde görülür.

6) $G_1 \subseteq G_2$ ve $T \in G_1^-$ olsun. Bu durumda $T \cap G_1 \neq \emptyset$ tur ve $G_1 \subseteq G_2$ olduğundan $T \cap G_2 \neq \emptyset$ olur. Bu ise $T \in G_2^-$ olduğunu verir. Tersinin doğruluğu benzer biçimde görülür.

2.1.2.Önerme: X in boş kümeden farklı G, H alt kümeleri verilsin. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur.

$$1) G \cap H = \emptyset \iff G^+ \cap H^+ = \emptyset$$

$$2) G^- \cap H^- \neq \emptyset$$

Kanıt: Önceki önermenin kanıtına benzer olarak yapılır.

Şimdi de üst ve alt Vietoris topolojik uzaylarda iç ve kapanış özelliklerini veren önermeler verilecektir.

2.1.3.Önerme: (X, τ) bir topolojik uzay ve $(2^X, \tau_V^+)$, (X, τ) dan elde edilen üst Vietoris topolojik uzayı olsun. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur.

$$1) X \text{ in her } A \text{ alt kümesi için } (intA)^+ = \tau_V^+ - intA^+ \text{ dır.}$$

2) X in her A alt kümesi için $(clA)^+ \subseteq \tau_V^+ - clA^+$ dır. Ancak, A yoğun bir alt küme ise $(clA)^+ = \tau_V^+ - clA^+$ olur.

$$3) X \text{ in her } B \text{ alt kümesi için } (clB)^- = \tau_V^+ - clB^- \text{ dir.}$$

$$4) X \text{ in her } B \text{ alt kümesi için } \tau_V^+ - intB^- \subseteq (intB)^- \text{ dir.}$$

Kanıt: 1) $A \subseteq X$ ve $T \in (intA)^+$ olsun. Buradan $T \subseteq intA \subseteq A$ olur. Dolayısıyla $T \in (intA)^+ \subseteq A^+$ ve $(intA)^+ \in \tau_V^+$ olduğundan $T \in \tau_V^+ - intA^+$ elde edilir.

Tersine; $T \in \tau_V^+ - \text{int}A^+$ ise $T \in V^+ \subseteq A^+$ olan en az bir $V^+ \in \tau_V^+$ açık kümesi vardır. Buradan $T \subseteq V \subseteq A$ olur. Yani $T \subseteq \text{int}A$ elde edilir. Bu ise $T \in (\text{int}A)^+$ olduğunu verir.

2) $A \subseteq X$ ve $T \in (clA)^+$ olsun. $V^+ \in \tau_V^+$, T nin keyfi bir komşuluğu olarak alınsın. $T \in (clA)^+$ olduğundan $T \subseteq clA$ dir, yani her $x \in T$ ve x noktasının her bir U açık komşuluğu için $U \cap A \neq \emptyset$ olur. Buradan $T \in V^+$ olan her V açık kümesi için de $V \cap A \neq \emptyset$ olur. Dolayısıyla $T \in \tau_V^+ - clA^+$ olduğu görülmüş olur.

Ek olarak, A yoğun bir alt küme, $T \in (clA)^+ = 2^X$ ve $T \notin \tau_V^+ - clA^+$ olsun. Bu durumda T nin en az bir $V^+ \in \tau_V^+$ -açık komşuluğu için $V^+ \cap A^+ = \emptyset$ yani, T yi kapsayan en az bir V τ -açık kümesi için $V \cap A = \emptyset$ olur. Bu ise A nın X de yoğun olması ile çelişir. Sonuç olarak $(clA)^+ = \tau_V^+ - clA^+$ dir.

3) $B \subseteq X$ alalım. $A = X - B$ olsun. 1) den $(\text{int}A)^+ = \tau_V^+ - \text{int}A^+$ olduğunu biliyoruz. Bu eşitliğin her iki tarafından tümleyene geçilirse, $2^X - (\text{int}A)^+ = 2^X - (\tau_V^+ - \text{int}A^+)$ olur. Bu durumda $(X - \text{int}A)^- = \tau_V^+ - cl(2^X - A^+) = \tau_V^+ - cl(X - A)^-$ dir. Buradan $(cl(X - A))^- = \tau_V^+ - cl(X - A)^-$ yani, $(clB)^- = \tau_V^+ - clB^-$ elde edilir.

4) $B \subseteq X$ alalım. $A = X - B$ olsun. 2) den $(clA)^+ \subseteq \tau_V^+ - clA^+$ olduğunu biliyoruz. Bu kapsamın her iki tarafından tümleyene geçilirse, $2^X - (\tau_V^+ - clA^+) \subseteq 2^X - (clA)^+$ olur. Bu durumda $\tau_V^+ - \text{int}(2^X - A^+) \subseteq (X - clA)^-$ dir. Buradan $\tau_V^+ - \text{int}(X - A)^- \subseteq (\text{int}(X - A))^-$ yani, $\tau_V^+ - \text{int}B^- \subseteq (\text{int}B)^-$ elde edilir.

2.1.4.Önerme: (X, τ) bir topolojik uzay ve $(2^X, \tau_V^-)$, (X, τ) dan elde edilen alt Vietoris topolojik uzay olsun. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur.

1) X in her A alt kümesi için $(\text{int}A)^- \subseteq \tau_V^- - \text{int}A^-$ dir. A açık bir alt küme ise $(\text{int}A)^- = \tau_V^- - \text{int}A^-$

2) Boş kümeden farklı X in her A alt kümesi için $\tau_V^- - clA^- = 2^X$ tir. Dolayısıyla $(clA)^- \subseteq \tau_V^- - clA^-$ dir. Eğer A , X te yoğun bir alt küme ise $(clA)^- = \tau_V^- - clA^-$ dir.

3) Her kapalı $B \subseteq X$ için $(clB)^+ = \tau_V^- - clB^+$ dir.

4) Her $B \subseteq X$ için $\tau_V^- - intB^+ \subseteq (intB)^+$ dir.

Kanıt: 1) $A \subseteq X$ ve $T \in (intA)^-$ olsun. Buradan $T \in (intA)^- \subseteq A^-$ ve $(intA)^- \in \tau_V^-$ olduğundan $T \in \tau_V^- - intA^-$ olur. Şimdi $A \subseteq X$ açık bir küme olsun. Alt Vietoris topoloji τ_V^- , $A \subseteq X$ açık iken A^- lerin açık olduğu en küçük topoloji olduğundan, $(intA)^- = \tau_V^- - intA^-$ olduğu açıktır.

2) Kabul edelim ki, $2^X - (\tau_V^- - clA^-) = \tau_V^- - int(2^X - A^-) = \tau_V^- - int(X - A)^+ \neq \emptyset$ olsun. Bu durumda $T \in \tau_V^- - int(X - A)^+$ için $T \in \cap_{i=1}^n V_i^- \subseteq (X - A)^+$ olacak şekilde en az bir $\cap_{i=1}^n V_i^- \in \tau_V^-$ var olmalıdır. Bu ise imkansızdır. Çünkü $X \in \cap_{i=1}^n V_i^-$ olduğu halde $X \notin (X - A)^+$ dir. O halde $\tau_V^- - clA^- = 2^X$ olmalıdır. Buradan $(clA)^- \subseteq \tau_V^- - clA^-$ dir. Eğer A, X te yoğun bir alt küme ise $clA = X$ ve $X^- = 2^X$ olacağından $(clA)^- = \tau_V^- - clA^-$ elde edilir.

3) $B \subseteq X$ kapalı olsun. $A = X - B$ alalım. 1) den $(intA)^- = \tau_V^- - intA^-$ olduğunu biliyoruz. Bu eşitliğin her iki tarafından tümleyene geçilirse, $2^X - (intA)^- = 2^X - (\tau_V^- - intA^-)$ olur. Bu durumda $(X - intA)^+ = \tau_V^- - cl(2^X - A^-) = \tau_V^- - cl(X - A)^+$ dir. Buradan $(cl(X - A))^+ = \tau_V^- - cl(X - A)^+$ yani, $(clB)^+ = \tau_V^- - clB^+$ elde edilir.

4) $B \subseteq X$ alalım. $A = X - B$ olsun. 2) den $(clA)^- \subseteq \tau_V^- - clA^-$ olduğunu biliyoruz. Bu kapsamın her iki tarafından tümleyene geçilirse, $2^X - (\tau_V^- - clA^-) \subseteq 2^X - (clA)^-$ olur. Bu durumda $\tau_V^- - int(2^X - A^-) \subseteq (X - clA)^+$ dir. Buradan $\tau_V^- - int(X - A)^+ \subseteq (int(X - A))^+$ yani, $\tau_V^- - intB^+ \subseteq (intB)^+$ elde edilir.

Bir (X, τ) topolojik uzayı için $CL(X)$ üzerindeki Vietoris topolojinin sahip olduğu ayırma aksiyomları Michael (1951) tarafından incelenmiştir. Burada $2^X, CL(X)$ ve $K(X)$ üzerindeki üst ve alt Vietoris topolojilerin sahip oldukları ayırma aksiyomlarına bakılacaktır.

2.1.5.Teorem: (X, τ) topolojik uzayı T_1 -uzay ise $(2^X, \tau_V^+)$ topolojik uzayı T_0 -uzaydır.

Kanıt: (X, τ) topolojik uzayı T_1 -uzay olsun. $A, B \in 2^X$ ve $A \neq B$ olsun. Bu durumda $B - A \neq \emptyset$ veya $A - B \neq \emptyset$ tur. $B - A \neq \emptyset$ olsun. Hipotezden, $x \in B - A$ ve her $y \in A$ için $x \in U_x$, $y \notin U_x$ ve $y \in U_y$, $x \notin U_y$ olan U_x, U_y açık kümeleri vardır. $U = \cup_{y \in A} U_y$ denirse, $A \in U^+$ ve $B \notin U^+$ olan $U^+ \in \tau_V^+$ elde edilmiş olur. $A - B \neq \emptyset$ olması durumunda da benzer ispat yapılır.

2.1.6.Sonuç: T_1 -uzay olma kahtsal özellik olduğundan, (X, τ) topolojik uzayı T_1 -uzay ise $(CL(X), \tau_V^+)$ ve $(K(X), \tau_V^+)$ topolojik uzayları da T_0 -uzaydır.

Yukarıdaki teorem ve sonucun tersleri genelde doğru değildir. Ancak $(2^X, \tau_V^+)$ ve $(K(X), \tau_V^+)$ topolojik uzayları T_0 -uzay ise (X, τ) topolojik uzayının T_0 -uzay olduğu kolayca görülebilir.

(X, τ) bir topolojik uzay olsun. Herhangi bir $A \subseteq X$ için $\tau_V^+ - cl(\{A\}) \neq \{A\}$ olduğundan $(2^X, \tau_V^+)$ topolojik uzayı T_1 -uzay olamaz. Benzer düşünce ile $(CL(X), \tau_V^+)$ ve X kompakt uzay olmasa bile $(K(X), \tau_V^+)$ topolojik uzayları da T_1 -uzay olamazlar.

Aşağıdaki örnek, (X, τ) topolojik uzayının T_0, T_1, T_2, T_3, T_4 -uzay olma aksiyomlarını sağladığı halde 2^X üzerindeki üst Vietoris topolojinin bu ayırma aksiyomlarından T_0 lık dışında hiçbirini sağlamadığını göstermektedir.

2.1.7.Örnek: X gerçel sayılar ve üzerindeki topoloji τ , bilinen topoloji olsun. Bu durumda (X, τ) topolojik uzayı T_1, T_2 ve regülerdir. Fakat $(2^X, \tau_V^+)$ topolojik uzayı bu ayırma aksiyomlarından hiç birini sağlamaz. Gerçekten, $A = (0, 5)$ ve $B = (2, 4)$ kümeleri 2^X in elemanlarıdır ancak $A \in U^+$, $B \notin U^+$ ve $B \in V^+$, $A \notin V^+$ olacak şekilde $U^+, V^+ \in \tau_V^+$ açık kümeleri bulunamaz. Dolayısıyla $(2^X, \tau_V^+)$ topolojik uzayı T_1 ve T_2 olamaz. Yine $A = 2^X - (0, 5)^+$ τ_V^+ -kapalı bir küme ve $\{2\} \notin A$ olsun. $A \subseteq U^+$, $\{2\} \in V^+$ ve $U^+ \cap V^+ = \emptyset$ olacak şekilde $U^+, V^+ \in \tau_V^+$ açık kümeleri bulunamaz. Dolayısıyla $(2^X, \tau_V^+)$ topolojik uzayı regüler uzay da değildir.

2.1.8.Teorem: (X, τ) bir topolojik uzay ve τ nun $\emptyset$ ve X den farklı öğeleri X in bir ayrışımını oluştursun. Bu durumda $(2^X, \tau_V^+)$ topolojik uzayı yarı regüler uzaydır.

Kanıt: Hipotezden, $(\tau_V)^+ \tau_V^+$ nun yarı regülerleştirilmişini göstermek üzere, $(\tau_V)^+ = \tau_V^+$ olduğundan açıktır.

2.1.9. Teorem: (X, τ) bir topolojik uzay olsun. $(2^X, \tau_V^+)$ topolojik uzayı yarı regüler uzay ise (X, τ) topolojik uzayı da yarı regüler uzaydır.

Kanıt: $x \in V$ ve $V \in \tau$ olsun. $\{x\} \in V^+ \in \tau_V^+$ dir. $(2^X, \tau_V^+)$ topolojik uzayı yarı regüler olduğundan, $\{x\} \in U^+ \subseteq \tau_V^+ - \text{int}(\tau_V^+ - clU^+) \subseteq V^+$ olacak şekilde en az bir $U^+ \in \tau_V^+$ vardır. Buradan $x \in U \subseteq \text{int}(clU) \subseteq V$ olur. Bu ise (X, τ) topolojik uzayının yarı regüler uzay olduğunu verir.

2.1.10. Uyarı: (X, τ) herhangi bir topolojik uzay olsun. $(2^X, \tau_V^+)$ topolojik uzayı regüler uzay olamaz. Gerçekten, $(2^X, \tau_V^+)$ topolojik uzayı regüler bir uzay olsaydı, her bir $T \in 2^X$ ve $T \in \beta$ olan her bir $\beta \in \tau_V^+$ için $T \in \varpi \subseteq \tau_V^+ - cl\varpi \subseteq \beta$ olacak şekilde en az bir $\varpi \in \tau_V^+$ var olması gerekirdi. Oysa böyle bir ϖ olsaydı, $\beta = \cup\{V^+ \in \tau_V^+ : V^+ \subseteq \beta\}$, $\varpi = \cup\{U^+ \in \tau_V^+ : U^+ \subseteq \varpi\}$ olmak üzere, $2^X - \beta = 2^X - (\cup\{V^+ \in \tau_V^+ : V^+ \subseteq \beta\}) \subseteq 2^X - (\tau_V^+ - cl\varpi) = \tau_V^+ - \text{int}(2^X - (\cup\{U^+ \in \tau_V^+ : U^+ \subseteq \varpi\}))$, yani $\cap\{(X - V)^- : V^+ \in \tau_V^+, V^+ \subseteq \beta\} \subseteq \tau_V^+ - \text{int}(\cap\{(X - U)^- : U^+ \in \tau_V^+, U^+ \subseteq \varpi\})$ olurdu. $X \in \cap\{(X - V)^- : V^+ \in \tau_V^+, V^+ \subseteq \beta\}$ olduğundan bu mümkün değildir. Dolayısıyla $(2^X, \tau_V^+)$ topolojik uzayı regüler uzay olamaz. Her bir regüler kapalı küme aynı zamanda kapalı bir küme olduğundan $(2^X, \tau_V^+)$ topolojik uzayı hemen hemen regüler uzay da olamaz.

2.1.11. Teorem: (X, τ) bir topolojik uzay olsun. $(2^X, \tau_V^+)$ topolojik uzayı normal uzaydır.

Kanıt: $(2^X, \tau_V^+)$ topolojik uzayında ayrık τ_V^+ -kapalı kümeler yoktur. Gerçekten, $\kappa_1, \kappa_2 \subseteq 2^X$ iki τ_V^+ -kapalı küme olsun. Bu durumda $2^X - \kappa_1, 2^X - \kappa_2$ kümeleri τ_V^+ -açık kümeler olur. Dolayısıyla $2^X - \kappa_1 = \cup\{V^+ \in \tau_V^+ : V^+ \subseteq 2^X - \kappa_1\}$ ve $2^X - \kappa_2 = \cup\{U^+ \in \tau_V^+ : U^+ \subseteq 2^X - \kappa_2\}$ olarak yazılabilir. Buradan $\kappa_1 \cap \kappa_2 = (2^X - (\cup\{V^+ \in \tau_V^+ : V^+ \subseteq 2^X - \kappa_1\})) \cap (2^X - (\cup\{U^+ \in \tau_V^+ : U^+ \subseteq 2^X - \kappa_2\})) = (\cap\{(X - V)^- : V^+ \in \tau_V^+, V^+ \subseteq 2^X - \kappa_1\}) \cap (\cap\{(X - U)^- : U^+ \in \tau_V^+, U^+ \subseteq 2^X - \kappa_2\}) \neq \emptyset$ olur. Çünkü X bu arakesitin elemanı olacaktır.

2.1.12.Teorem: (X, τ) bir topolojik uzay olsun. $(2^X, \tau_V^+)$ topolojik uzayı kompakt uzaydır.

Kanıt: Sonlu arakesit özelliğine sahip her bir $F = \{\kappa \subseteq 2^X : \kappa \tau_V^+ \text{-kapalı}\}$ ailesi için $\cap F = \cap_{\kappa \in F} \kappa \neq \emptyset$ olacaktır. Gerçekten, F sonlu arakesit özelliğine sahip kapalılar ailesi olduğundan her bir elemanında X kümesi vardır. Dolayısıyla da $\cap F \neq \emptyset$ tur.

Sonuç olarak $(2^X, \tau_V^+)$ topolojik uzayı yakın kompakt ve quasi H-kapalı uzaydır.

2.1.13.Teorem: Bir (X, τ) topolojik uzayı bağlantılı ise $(2^X, \tau_V^+)$ topolojik uzayı da bağlantılı uzaydır.

Kanıt: (X, τ) bağlantılı uzay ise (Michael, 1951) den $(2^X, \tau_V)$ bağlantılı uzaydır. $\tau_V^+ \subseteq \tau_V$ olduğundan $(2^X, \tau_V^+)$ bağlantılı uzaydır.

2^X üzerindeki alt Vietoris topolojide ayrık açık alt kümeler bulunamayacağından ayırma özelliklerinin çoğu sağlanmaz. Bu uzay ile taban uzayı arasındaki ilişkilerin bazıları aşağıda verilmiştir.

2.1.14.Teorem: $(CL(X), \tau_V^-)$ topolojik uzayı T_0 -uzaydır.

Kanıt: Boş kümeden farklı $A, B \in CL(X)$ alalım ve $B - A \neq \emptyset$ olsun. Bu durumda $B \in (X - A)^-$ ve $A \notin (X - A)^-$ olup, $(X - A)^- \in \tau_V^-$ dir. Dolayısıyla uzay T_0 -uzaydır.

Yukarıda verilen 2.1.14.Teorem e bağlı olarak;

2.1.15.Sonuç: (X, τ) topolojik uzayı T_2 -uzay ise $(K(X), \tau_V^-)$ topolojik uzayı T_0 -uzaydır.

2.1.16.Teorem: Bir (X, τ) topolojik uzayının kompakt uzay olması için gerekli ve yeterli koşul $(2^X, \tau_V^-)$ topolojik uzayının kompakt uzay olmasıdır.

Kanıt: $(\Rightarrow)$ (X, τ) kompakt uzay ve $\{\cap_{i=1}^{n_\alpha} (V_i^\alpha)^- : \alpha \in I\}$ 2^X in bir açık örtüsü olsun (Bkz (Frink, 1942), Teorem 15(3)). Bu durumda $\{\cap_{i=1}^{n_\alpha} V_i^\alpha\}_{\alpha \in I}$ ailesi X in bir açık örtüsüdür. (X, τ) kompakt uzay olduğundan, $X = \cup_{\alpha \in I_0} (\cap_{i=1}^{n_\alpha} V_i^\alpha)$ olacak şekilde I nın bir I_0 sonlu alt kümesi vardır. Buradan 2.1.1.Önermenin 3. şikkından, $2^X = \cup_{\alpha \in I_0} (\cap_{i=1}^{n_\alpha} V_i^\alpha)^- \subseteq \cup_{\alpha \in I_0} (\cap_{i=1}^{n_\alpha} (V_i^\alpha)^-)$ elde edilir. Bu ise

$(2^X, \tau_V^-)$ topolojik uzayının kompakt uzay olduğunu verir.

$(\Leftarrow)$ $(2^X, \tau_V^-)$ kompakt uzay ve $\{V_\alpha : \alpha \in I\}$ X in bir açık örtüsü olsun. Bu durumda $\{V_\alpha^- : \alpha \in I\}$ 2^X in bir açık örtüsüdür. $(2^X, \tau_V^-)$ kompakt uzay olduğundan, $2^X = \bigcup_{\alpha \in I_0} V_\alpha^-$ olacak şekilde I nın bir I_0 sonlu alt kümesi vardır. Buradan $X = \bigcup_{\alpha \in I_0} V_\alpha$ elde edilir. Bu ise (X, τ) topolojik uzayının kompakt uzay olduğunu verir.

2.1.17. Teorem: $(2^X, \tau_V^-)$ topolojik uzayı bağlantılı bir uzaydır.

Kanıt: $(2^X, \tau_V^-)$ topolojik uzayında ayrık açık alt kümeler bulunamayacağından bu uzay bağlantılı uzaydır.

2.2 2^X Üzerindeki Yarı Regüler Topolojiler

Bu kesimde 2^X üzerindeki üst ve alt Vietoris topolojilerin yarı regüler topolojileri tanımlanmış ve bazı temel özellikleri verilmiştir.

2.2.1. Önerme: $\beta_1 = \{V^+ : V \in \tau_s\}$ ailesi 2^X üzerinde bir topoloji için tabandır.

Kanıt: Açıktır.

β_1 ailesinin taban olduğu bu topolojiyi $(\tau_s)_V^+$ ile göstereceğiz. $\tau_s \subseteq \tau$ olduğundan $(\tau_s)_V^+ \subseteq \tau_V^+$ olacağı açıktır.

2.2.2. Önerme: $\beta_2 = \{\bigcap_{i=1}^n V_i^- : V_i \in \tau_s\}$ ailesi 2^X üzerinde bir topoloji için tabandır.

Kanıt: Açıktır.

β_2 ailesinin taban olduğu bu topolojiyi $(\tau_s)_V^-$ ile göstereceğiz. $\tau_s \subseteq \tau$ olduğundan $(\tau_s)_V^- \subseteq \tau_V^-$ olacağı açıktır.

(X, τ) bir topolojik uzay ve $(2^X, \tau_V^+)$, (X, τ) dan elde edilen üst Vietoris topolojik uzay olsun. $(\tau_V)_s^+$ ile τ_V^+ topolojisinin yarı regülerleştirilmesini göstereyim. Bu durumda $(\tau_V)_s^+ \subseteq \tau_V^+$ olduğu açıktır.

Benzer şekilde (X, τ) bir topolojik uzay ve $(2^X, \tau_V^-)$, (X, τ) dan elde edilen alt Vietoris topolojik uzay olsun. $(\tau_V)_s^-$ ile τ_V^- topolojisinin yarı regülerleştirilmesini gösterelim. Bu durumda $(\tau_V)_s^- \subseteq \tau_V^-$ olduğu açıktır.

2.2.3.Önerme: Herhangi bir (X, τ) topolojik uzayı için aşağıdakiler doğrudur.

1-) $(\tau_V)_s^+ \subseteq (\tau_s)_V^+$ dir.

2-) $(\tau_V)_s^- = \{\emptyset, 2^X\}$ tir. Dolayısıyla $(\tau_V)_s^- \subseteq (\tau_s)_V^-$ dir.

Kanıt: 1-) $T \in \beta \in (\tau_V)_s^+$ olsun. $T \in \beta$ olduğundan, $T \in V^+ \subseteq \tau_V^+ - \text{int}(\tau_V^+ - \text{cl}V^+) \subseteq \beta$ olacak şekilde en az bir $V^+ \in \tau_V^+$ vardır. Bu durumda $T \in V^+ \subseteq (\text{int}(\text{cl}V))^+ \subseteq \tau_V^+ - \text{int}(\tau_V^+ - \text{cl}V^+) \subseteq \beta$ elde edilir ve $\text{int}(\text{cl}V) \in \tau_s$ olduğundan, $\beta \in (\tau_s)_V^+$ olur. Yani, $(\tau_V)_s^+ \subseteq (\tau_s)_V^+$ dir.

2-) $\{\emptyset, 2^X\} \subseteq (\tau_V)_s^-$ olduğu açıktır. Ters kapsamı göstermek için $\beta \in (\tau_V)_s^-$ alalım. $\beta = \emptyset$ ise $\beta \in \{\emptyset, 2^X\}$ olur. $\beta \neq \emptyset$ ve $T \in \beta$ olsun. $\beta \in (\tau_V)_s^-$ olduğundan, $T \in \cap_{i=1}^n V_i^- \subseteq \tau_V^- - \text{int}(\tau_V^- - \text{cl}(\cap_{i=1}^n V_i^-)) \subseteq \beta$ olacak şekilde en az bir $\cap_{i=1}^n V_i^- \in \tau_V^-$ vardır. $\tau_V^- - \text{cl}(\cap_{i=1}^n V_i^-) = 2^X$ olduğundan $\beta = 2^X$ olmalıdır. Buradan $(\tau_V)_s^- \subseteq \{\emptyset, 2^X\}$ elde edilir. Dolayısıyla da $(\tau_V)_s^- \subseteq (\tau_s)_V^-$ dir.

2.2.4.Önerme: (X, τ) bir topolojik uzay olsun.

1-) τ topolojisinin $\emptyset$ ve X den farklı öğeleri X in bir ayrışımını oluşturuyor ise $(\tau_s)_V^+ \subseteq (\tau_V)_s^+$ dir.

2-) τ topolojisinin elemanları X te yoğun alt kümeler ise $(\tau_s)_V^- = (\tau_V)_s^-$ dir.

Kanıt: 1-) Hipotezden, $\tau = \tau_s$ olduğundan 2.1.8.Teoremden açıktır.

2-) Önceki önermeden $(\tau_V)_s^- = \{\emptyset, 2^X\} \subseteq (\tau_s)_V^-$ olduğundan, $(\tau_s)_V^- = \{\emptyset, 2^X\}$ veya $\tau_s = \{\emptyset, X\}$ olduğunu göstermek yeterlidir. $\{\emptyset, X\} \subseteq \tau_s$ olduğu açıktır. $V \in \tau_s$ alalım. $V = \emptyset$ ise $V \in \{\emptyset, X\}$ olur. $V \neq \emptyset$ ve $x \in V$ olsun. $V = \text{int}(\text{cl}V)$ ve hipotezden $\text{cl}V = X$ olduğundan, $V = X$ olmalıdır. Buradan $\tau_s \subseteq \{\emptyset, X\}$ elde edilir. Dolayısıyla da $(\tau_s)_V^- = (\tau_V)_s^-$ dir.

2.2.5.Sonuç: (X, τ) bir topolojik uzay olsun.

1-) τ topolojisinin $\emptyset$ ve X den farklı öğeleri X in bir ayrışımını oluşturuyor ise $V \in \tau_s$ iken $V^+ \in (\tau_V)_s^+$ dir.

2-) τ topolojisinin elemanları X te yoğun alt kümeler ise $V \in \tau_s$ iken $V^- \in (\tau_V)_s^-$ dir.

Birinci kesimde üst ve alt Vietoris topolojiler için incelenen ayırma aksiyomları elde edilen yeni topolojiler için aşağıda incelenecektir.

Birinci kesimde, $(2^X, \tau_V^+)$ ve $(K(X), \tau_V^+)$ topolojik uzayları T_0 -uzay iken (X, τ) topolojik uzayının da T_0 -uzay olduğu belirtilmişti. Bu durumda (Mrsevic ve ark., 1985, Önerme 2.) den aşağıdaki iki sonuç elde edilir.

2.2.6.Sonuç: (X, τ) bir topolojik uzay olsun.

- 1) $(2^X, (\tau_V)_s^+)$ topolojik uzayı T_0 -uzay ise (X, τ) topolojik uzayı da T_0 -uzaydır.
- 2) $(2^X, (\tau_s)_V^+)$ topolojik uzayı T_0 -uzay ise (X, τ) topolojik uzayı da T_0 -uzaydır.

2.2.7.Sonuç: (X, τ) bir topolojik uzay olsun.

- 1) $(K(X), (\tau_V)_s^+)$ topolojik uzayı T_0 -uzay ise (X, τ) topolojik uzayı da T_0 -uzaydır.
- 2) $(K(X), (\tau_s)_V^+)$ topolojik uzayı T_0 -uzay ise (X, τ) topolojik uzayı da T_0 -uzaydır.

$(2^X, \tau_V^+)$, $(CL(X), \tau_V^+)$ ve $(K(X), \tau_V^+)$ topolojik uzaylarının T_1 -uzay olmayacağı birinci kesimde incelenmişti. Buradan $(\tau_s)_V^+ \subseteq \tau_V^+$ ve $(\tau_V)_s^+ \subseteq \tau_V^+$ olduğundan 2^X , $CL(X)$ ve $K(X)$ kümeleri de bu yeni topolojiler ile T_1 -uzay olamazlar.

2.1.12.Teorem den aşağıdaki sonuç elde edilir.

2.2.8.Sonuç: (X, τ) bir topolojik uzay olsun. $(2^X, (\tau_V)_s^+)$ ve $(2^X, (\tau_s)_V^+)$ topolojik uzayları kompakttır.

2.1.13.Teorem ve (Mrsevic ve ark., 1985, Sonuç 3.) den aşağıdaki sonuç elde edilir.

2.2.9.Sonuç: Bir (X, τ) topolojik uzayı bağlantılı ise $(2^X, (\tau_s)_V^+)$ ve $(2^X, (\tau_V)_s^+)$ topolojik uzayları da bağlantılıdır.

(Mrsevic ve ark., 1985, Önerme 1.) den 2.1.15.Sonuç a bağlı olarak aşağıdaki sonuç elde edilir.

2.2.10.Sonuç: (X, τ) topolojik uzayı T_2 -uzay ise $(K(X), (\tau_s)_V^-)$ topolojik uzayı T_0 -uzaydır.

2.1.16.Teorem ve (Mrsevic ve ark., 1985, Teorem 4.) den aşağıdaki sonuç

elde edilir.

2.2.11.Sonuç: Bir (X, τ) topolojik uzayının yakın kompakt uzay olması için gerekli ve yeterli koşul $(2^X, (\tau_s)_V^-)$ topolojik uzayının kompakt uzay olmasıdır.

2.1.17. Teorem den aşağıdaki sonuç elde edilir.

2.2.12.Sonuç: $(2^X, (\tau_s)_V^-)$ ve $(2^X, (\tau_V)_s^-)$ topolojik uzayları bağlantılıdır.

2.3 2^X Üzerindeki θ -Topolojiler

Bu kesimde 2^X üzerindeki üst ve alt Vietoris topolojilerin θ -topolojileri tanımlanmış ve bazı temel özellikleri verilmiştir.

2.3.1.Önerme: $\beta_1 = \{V^+ : V \in \tau_\theta\}$ ailesi 2^X üzerinde bir topoloji için tabandır.

Kanıt: Açıktır.

β_1 ailesinin taban olduğu bu topolojiyi $(\tau_\theta)_V^+$ ile göstereceğiz. $\tau_\theta \subseteq \tau$ olduğundan $(\tau_\theta)_V^+ \subseteq \tau_V^+$ olacağı açıktır.

2.3.2.Önerme: $\beta_2 = \{\cap_{i=1}^n V_i^- : V_i \in \tau_\theta\}$ ailesi 2^X üzerinde bir topoloji için tabandır.

Kanıt: Açıktır.

β_2 ailesinin taban olduğu bu topolojiyi $(\tau_\theta)_V^-$ ile göstereceğiz. $\tau_\theta \subseteq \tau$ olduğundan $(\tau_\theta)_V^- \subseteq \tau_V^-$ olacağı açıktır.

(X, τ) bir topolojik uzay ve $(2^X, \tau_V^+)$, (X, τ) dan elde edilen üst Vietoris topolojik uzay olsun. 2^X teki $\tau_V^+ - \theta$ -açık kümelerin ailesi 2^X üzerinde bir topolojidir. Bu topolojiyi $(\tau_V)_\theta^+$ ile göstereceğiz ve $(2^X, \tau_V^+)$ topolojik uzayından elde edilen θ -topoloji olarak adlandıracağız. Bu yeni topoloji için $(\tau_V)_\theta^+ \subseteq \tau_V^+$ olduğu açıktır.

Benzer şekilde (X, τ) bir topolojik uzay ve $(2^X, \tau_V^-)$, (X, τ) dan elde edilen alt Vietoris topolojik uzay olsun. 2^X teki $\tau_V^- - \theta$ -açık kümelerin ailesi 2^X üzerinde bir topolojidir. Bu topolojiyi $(\tau_V)_\theta^-$ ile göstereceğiz ve $(2^X, \tau_V^-)$ topolojik

uzayından elde edilen θ -topoloji olarak adlandıracağız. Bu yeni topoloji için $(\tau_V)_\theta^- \subseteq \tau_V^-$ olduğu açıktır.

Hemen hemen regüler bir (X, τ) topolojik uzayında $\tau_\theta = \tau_s$ dir (Long and Herrington, 1982). Öte yandan $(\tau_s)_\theta = \tau_\theta$ (Yalvaç, 1991) olduğundan, uzay hemen hemen regüler uzay ise $(\tau_\theta)_\theta = \tau_\theta$ elde edilir. Buradan hemen hemen regüler bir topolojik uzayda herhangi bir alt kümenin θ -içi bir θ -açık kümedir.

2.3.3.Önerme: (X, τ) bir topolojik uzay olsun.

1) (X, τ) hemen hemen regüler bir uzay ise $(\tau_V)_\theta^+ \subseteq (\tau_\theta)_V^+$ dir.

2-) $(\tau_V)_\theta^- = \{\emptyset, 2^X\}$ tir. Dolayısıyla $(\tau_V)_\theta^- \subseteq (\tau_\theta)_V^-$ dir.

Kanıt: 1) $T \in \beta \in (\tau_V)_\theta^+$ olsun. $T \in \beta = \theta - \tau_V^+ - \text{int}\beta$ olduğundan, $T \in V^+ \subseteq \tau_V^+ - \text{cl}V^+ \subseteq \beta$ olacak şekilde en az bir $V^+ \in \tau_V^+$ vardır. Bu durumda $T \subseteq V \subseteq \text{cl}V$ dir. Buradan her bir $x \in T$ için $x \in V \subseteq \text{cl}V \subseteq \text{cl}V$ olduğundan $x \in \theta - \text{int}(\text{cl}V)$ dir. Dolayısıyla $T \subseteq \theta - \text{int}(\text{cl}V) \subseteq \text{cl}V$ olur. Böylece $T \in (\theta - \text{int}(\text{cl}V))^+ \subseteq (\text{cl}V)^+ \subseteq \tau_V^+ - \text{cl}V^+ \subseteq \beta$ elde edilir. Uzayın hemen hemen regülerliğinden $\theta - \text{int}(\text{cl}V) \in \tau_\theta$ olduğundan, $\beta \in (\tau_\theta)_V^+$ olur. Yani, $(\tau_V)_\theta^+ \subseteq (\tau_\theta)_V^+$ dir

2-) $\{\emptyset, 2^X\} \subseteq (\tau_V)_\theta^-$ olduğu açıktır. Ters kapsamı göstermek için $\beta \in (\tau_V)_\theta^-$ alalım. $\beta = \emptyset$ ise $\beta \in \{\emptyset, 2^X\}$ olur. $\beta \neq \emptyset$ ve $T \in \beta$ olsun. $\beta = \theta - \tau_V^- - \text{int}\beta$ olduğundan, $T \in \cap_{i=1}^n V_i^- \subseteq \tau_V^- - \text{cl}(\cap_{i=1}^n V_i^-) \subseteq \beta$ olacak şekilde en az bir $\cap_{i=1}^n V_i^- \in \tau_V^-$ vardır. $\tau_V^- - \text{cl}(\cap_{i=1}^n V_i^-) = 2^X$ olduğundan $\beta = 2^X$ olmalıdır. Buradan $(\tau_V)_\theta^- \subseteq \{\emptyset, 2^X\}$ elde edilir. Dolayısıyla da $(\tau_V)_\theta^- \subseteq (\tau_\theta)_V^-$ dir.

2.2.3.Önermenin 1. şıkında verilen kapsamın tersi, τ topolojisinin $\emptyset$ ve X den farklı öğelerinin X in bir ayrışımını oluşturması durumunda bile gerçekleşmeyebilir. Buna bir örnek aşağıda verilecektir.

2.3.4.Örnek: $X = \{a, b, c, d\}$ ve üzerindeki topoloji $\tau = \{\emptyset, X, \{a, b\}, \{c, d\}\}$ olarak verilsin. Bu durumda $(\tau_V)_\theta^+ = \{\emptyset, 2^X\} \not\subseteq \tau_V^+ = (\tau_\theta)_V^+$ dir.

2.3.5.Önerme: (X, τ) bir topolojik uzay olsun. τ topolojisinin elemanları X te yoğun alt kümeler ise $(\tau_\theta)_V^- = (\tau_V)_\theta^-$ dir.

Kanıt: Önceki önermeden $(\tau_V)_\theta^- = \{\emptyset, 2^X\} \subseteq (\tau_\theta)_V^-$ olduğundan, $(\tau_\theta)_V^- = \{\emptyset, 2^X\}$ veya $\tau_\theta = \{\emptyset, X\}$ olduğunu göstermek yeterlidir. $\{\emptyset, X\} \subseteq \tau_\theta$ olduğu açıktır. $V \in \tau_\theta$ alalım. $V = \emptyset$ ise $V \in \{\emptyset, X\}$ olur. $V \neq \emptyset$ ve $x \in V$ olsun. $V = \theta - \text{int}V$ olduğundan, $x \in U \subseteq clU \subseteq V$ olacak şekilde en az bir $U \in \tau$ vardır. Hipotezden $clU = X$ olduğundan $V = X$ olmalıdır. Buradan $\tau_\theta \subseteq \{\emptyset, X\}$ elde edilir. Dolayısıyla da $(\tau_\theta)_V^- = (\tau_V)_\theta^-$ dir.

2.1.12. Teorem den aşağıdaki sonuç elde edilir.

2.3.6. Sonuç: (X, τ) bir topolojik uzay olsun. $(2^X, (\tau_V)_\theta^+)$ ve $(2^X, (\tau_\theta)_V^+)$ topolojik uzayları kompakttır.

2.1.13. Teorem den aşağıdaki sonuç elde edilir.

2.3.7. Sonuç: (X, τ) bir topolojik uzayı bağlantılı bir uzay ise $(2^X, (\tau_V)_\theta^+)$ ve $(2^X, (\tau_\theta)_V^+)$ topolojik uzaylarında bağlantılıdır.

2.1.16. Teorem ve (Yalvaç, 1991, 3.6. Teorem) den aşağıdaki sonuç elde edilir.

2.3.8. Sonuç: (X, τ) topolojik uzayı quasi H-kapalı uzay ise $(2^X, (\tau_\theta)_V^-)$ topolojik uzayı kompakt uzaydır. Tersi, (X, τ) topolojik uzayının hemen hemen regüler uzay olması durumunda sağlanır.

2.1.17. Teorem den aşağıdaki sonuç elde edilir.

2.3.9. Sonuç: $(2^X, (\tau_V)_\theta^-)$ ve $(2^X, (\tau_\theta)_V^-)$ topolojik uzayları bağlantılı uzaylardır.

Bu bölümün sonunda, şimdiye kadar çalıştığımız tüm topolojiler arasındaki ilişkileri aşağıdaki biçimde özetleyebiliriz.

(X, τ) bir topolojik uzay olsun.

$\tau_\theta \subseteq \tau_s \subseteq \tau$ olduğundan $(\tau_\theta)_V^+ \subseteq (\tau_s)_V^+ \subseteq \tau_V^+$ ve $(\tau_\theta)_V^- \subseteq (\tau_s)_V^- \subseteq \tau_V^-$ dir.

(X, τ) hemen hemen regüler uzaydır $\Leftrightarrow \tau_\theta = \tau_s$ (Long ve Herrington, 1982). Dolayısıyla (X, τ) hemen hemen regüler uzay ise $(\tau_\theta)_V^+ = (\tau_s)_V^+$ ve $(\tau_\theta)_V^- = (\tau_s)_V^-$ dir.

(X, τ) regüler uzaydır $\Leftrightarrow \tau_\theta = \tau$ (Raghavan, 1984). Dolayısıyla (X, τ) regüler uzay ise $(\tau_\theta)_V^+ = \tau_V^+$ ve $(\tau_\theta)_V^- = \tau_V^-$ dir.

(X, τ) yarı regüler uzaydır $\Leftrightarrow \tau_s = \tau$ (Raghavan, 1984). Dolayısıyla (X, τ) yarı regüler uzay ise $(\tau_s)_V^+ = \tau_V^+$ ve $(\tau_s)_V^- = \tau_V^-$ dir.

2.2.3-2.2.4.Önergelerden, τ topolojisinin $\emptyset$ ve X den farklı öğeleri X in bir ayrışımını oluşturuyor ise $(\tau_V)_s^+ = \tau_V^+ = (\tau_s)_V^+$ dir.



3.BÖLÜM

KÜME DEĞERLİ DÖNÜŞÜMLERİN ÇEŞİTLİ SÜREKLİLİKLERİ

Bu bölümde, ilk olarak Long ve Herrington (1982) tarafından tek değerli dönüşümler için tanımlanan faintly süreklilik ve bu süreklilik tipinin kuvvetli formları (Yalvaç, 1990) küme değerli dönüşümlere genişletildi. Küme değerli dönüşümlerin bu tür süreklilikleri için tezin ikinci bölümünde çalışılmış olan zayıf topolojiler de kullanılarak karakterizasyonlar verildi ve çeşitli özellikleri incelendi.

3.1 Küme Değerli Dönüşümler İçin Faintly Süreklilik

3.1.1.Tanım: $F : X \rightsquigarrow Y$ küme değerli dönüşüm ve $x \in X$ olsun.

a) $x \in F^+(V)$ olan Y deki her V θ -açık kümesi için $U \subseteq F^+(V)$ (yani, $\forall z \in U$ için $F(z) \subseteq V$) koşulunu sağlayan x noktasının bir U açık komşuluğu var ise, F ye x noktasında üstten faintly sürekli (upper faintly continuous) küme değerli dönüşüm denir. Bunu kısaca, ü.f.sürekli olarak göstereceğiz.

b) $x \in F^-(V)$ olan Y deki her V θ -açık kümesi için $U \subseteq F^-(V)$ (yani, $\forall z \in U$ için $F(z) \cap V \neq \emptyset$) koşulunu sağlayan x noktasının bir U açık komşuluğu var ise, F ye x noktasında alttan faintly sürekli (lower faintly continuous) küme değerli dönüşüm denir. Bunu kısaca, a.f.sürekli olarak göstereceğiz.

c) F , küme değerli dönüşümü $\forall x \in X$ noktasında ü(a).f.sürekli ise F ye X üzerinde ü(a).f.sürekli dir denir.

Bu tanıımı gerçekleyen bir örnek aşağıda verilmiştir.

3.1.2.Örnek: $X = \{0, 1\}$ kümesi üzerindeki topoloji, $\tau = \{\emptyset, X, \{1\}\}$ ve $Y = \{a, b, c\}$ kümesi üzerindeki topoloji $\nu = \{\emptyset, Y, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ olsun. $F : X \rightsquigarrow Y$ küme değerli dönüşümü $F(0) = \{a\}$, $F(1) = \{b\}$ olarak tanımlansın. Bu durumda F ü(a).f.sürekli dir.

3.1.3.Sonuç: $F : (X, \tau) \rightsquigarrow (Y, \nu)$ küme değerli dönüşümü $\bar{u}(a).y.$ sürekliliği ise F $\bar{u}(a).f.$ süreklidir.

Bir F küme değerli dönüşümü için $\bar{u}(a).f.$ sürekliliğin genelde $\bar{u}(a).y.$ sürekliliği gerektirmediği ancak görüntü uzayı regüler uzay ise bunun doğru olduğu aşağıdaki teorem ile ifade edilmiştir.

3.1.4.Teorem: $F : (X, \tau) \rightsquigarrow (Y, \nu)$ küme değerli dönüşümü $\bar{u}(a).f.$ sürekliliği ve Y regüler uzay ise F $\bar{u}(a).y.$ süreklidir.

Kanıt: F x noktasında $\bar{u}.f.$ sürekliliği olsun. $F(x) \subseteq V$ olan Y deki V açık kümesini alalım. Y regüler uzay olduğundan V, Y de θ -açık kümedir. F $\bar{u}.f.$ sürekliliği olduğu için $z \in U$ iken $F(z) \subseteq V$ olacak biçimde x noktasının bir U açık komşuluğu vardır. Buradan $F(U) \subseteq V$ elde edilir. Bu F nin $\bar{u}.y.$ sürekliliği olduğunu verir.

F, x noktasında $a.f.$ sürekliliği olsun. $F(x) \cap V \neq \emptyset$ olan Y deki V açık kümesini alalım. Y regüler uzay olduğundan V, Y de θ -açık kümedir. F $a.f.$ sürekliliği olduğu için $z \in U$ iken $F(z) \cap V \neq \emptyset$ olacak biçimde x noktasının bir U açık komşuluğu vardır. Buradan $F(U) \cap V \neq \emptyset$ elde edilir. Bu F nin $a.y.$ sürekliliği olduğunu verir.

Bir F küme değerli dönüşümü için $\bar{u}(a).f.$ sürekliliğin genelde $\bar{u}(a).z.$ sürekliliği gerektirmediği ancak görüntü uzayı hemen hemen regüler uzay ise bunun doğru olduğu aşağıdaki teorem ile ifade edilmiştir.

3.1.5.Teorem: $F : (X, \tau) \rightsquigarrow (Y, \nu)$ küme değerli dönüşümü $\bar{u}(a).f.$ sürekliliği ve Y hemen hemen regüler uzay ise F $\bar{u}(a).z.$ süreklidir.

Kanıt: F x noktasında $\bar{u}.f.$ sürekliliği olsun. $F(x) \subseteq V$ olan Y deki V açık kümesini alalım. Bu durumda $y \in F(x)$ için $y \in V \subseteq clV \subseteq clV$ olduğundan $y \in \theta - int(clV)$ dir. Dolayısıyla $F(x) \subseteq \theta - int(clV)$ dir ve Y hemen hemen regüler uzay olduğundan $\theta - int(clV), Y$ de θ -açık kümedir. F $\bar{u}.f.$ sürekliliği olduğu için $z \in U$ iken $F(z) \subseteq \theta - int(clV)$ olacak biçimde x noktasının bir U açık komşuluğu vardır. Buradan $F(U) \subseteq \theta - int(clV) \subseteq clV$ elde edilir. Bu F nin $\bar{u}.z.$ sürekliliği olduğunu verir.

F , x noktasında a.f.sürekli olsun. $F(x) \cap V \neq \emptyset$ olan Y deki V açık kümesini alalım. Bu durumda $y \in F(x) \cap V$ için $y \in V \subseteq clV \subseteq clV$ olur. Dolayısıyla $y \in \theta - int(clV)$ dir. Y hemen hemen regüler uzay olduğundan $\theta - int(clV)$, Y de θ -açık kümedir. F a.f.sürekli olduğu için $z \in U$ iken $F(z) \cap \theta - int(clV) \neq \emptyset$ olacak biçimde x noktasının bir U açık komşuluğu vardır. Buradan $F(U) \cap \theta - int(clV) \subseteq F(U) \cap clV \neq \emptyset$ elde edilir. Bu F nin a.z.sürekli olduğunu verir.

Şimdi $\tilde{u}(a)$.f.sürekli olup $\tilde{u}(a)$.z.sürekli ve $\tilde{u}(a)$.y.sürekli olmayan küme değerli dönüşüme bir örnek verelim.

3.1.6.Örnek: 3.1.2.Örneği gözönüne alalım. Bu durumda F $\tilde{u}(a)$.f.sürekli fakat $\tilde{u}(a)$.z.sürekli ve $\tilde{u}(a)$.y.sürekli değildir. Gerçekten, $F(0) \subseteq V$ olan açık küme $V = \{a\}$ olarak alınırsa, $\forall z \in U$ için $F(z) \subseteq clV = \{a, c\}$ koşulunu sağlayan 0 noktasının bir U açık komşuluğu bulunamaz. Bu yüzden F $\tilde{u}.z$.sürekli değildir. Buradan F $\tilde{u}.y$.sürekli de olamaz.

Benzer şekilde, $0 \in X$ için $F(0) \cap V \neq \emptyset$ olan açık küme $V = \{a\}$ olarak alınırsa, $\forall z \in U$ için $F(z) \cap clV = F(z) \cap \{a, c\} \neq \emptyset$ koşulunu sağlayan 0 noktasının bir U açık komşuluğu bulunamayacağından F a.z.sürekli olamaz. Buradan F $\tilde{u}.y$.sürekli de olamaz.

3.1.7.Teorem: $F : (X, \tau) \rightsquigarrow (Y, \nu)$ küme değerli dönüşüm $\tilde{u}.z$.sürekli ise F a.f.sürekli dir.

Kanıt: F x noktasında a.z.sürekli olsun. $F(x) \cap V \neq \emptyset$ olan Y deki V θ -açık kümesini alalım. Bu durumda $y \in F(x) \cap V$ için $y \in V = \theta - intV$ olduğundan, $y \in T_y \subseteq clT_y \subseteq V$ olacak şekilde $T_y \in \nu$ vardır. Dolayısıyla $F(x) \cap T_y \neq \emptyset$ ve F a.z.sürekli olduğu için $z \in U$ iken $F(z) \cap clT_y \neq \emptyset$ olacak şekilde x noktasının bir U açık komşuluğu vardır. Buradan $F(U) \cap clT_y \subseteq F(U) \cap V \neq \emptyset$ elde edilir. Bu F nin a.f.sürekli olduğunu verir.

Şimdi $\tilde{u}.z$.sürekliğin $\tilde{u}.f$.sürekliği gerektirmediğine bir örnek verelim

3.1.8.Örnek: $X = \{a, b, c\}$ üzerindeki topoloji, $\tau = \{\emptyset, X, \{b\}, \{a, b\}\}$ olsun ve $Y = [0, 1]$ kümesini bilinen topoloji ile düşünelim.

$$F : X \rightsquigarrow Y, F(x) = \begin{cases} [0, 1/2) & ; x = a \\ \{1/2\} & ; x = b \\ Y & ; x = c \end{cases}$$

olarak tanımlansın.

$a \in X$ için $F(a) \subseteq V = [0, 1/2)$ açık kümesi için $a \in U = \{a, b\} \in \tau$ alınırsa, $F(U) = [0, 1/2] \subseteq clV = [0, 1/2]$ olur.

$b \in X$ için $F(b) \subseteq V = (1/2 - \varepsilon, 1/2 + \varepsilon)$ açık kümesi için $b \in U = \{b\} \in \tau$ alınırsa, $F(U) = \{1/2\} \subseteq clV = [1/2 - \varepsilon, 1/2 + \varepsilon]$ olur.

$c \in X$ için $F(c) \subseteq V = Y$ olduğundan açıktır. Dolayısıyla F ü.z.sürekli dir. Fakat $a \in X$ için $F(a) \subseteq V$ olan $V = [0, 1/2)$ θ -açık kümesi için, $F(U) \subseteq V$ olacak şekilde a noktasının U açık komşuluğu yoktur. Bu ise F nin ü.f.sürekli olmadığını verir.

Bir F küme değerli dönüşümü için ü.z.sürekli liğin genelde ü.f.sürekli liği gerektirmediği ancak $\bar{v} = \{clT : T \in v\}$ ailesi yerel sonlu bir aile ise bunun doğru olduğu aşağıdaki teorem ile ifade edilmiştir.

3.1.9. Teorem: $F : (X, \tau) \rightsquigarrow (Y, v)$ küme değerli dönüşümü ü.z.sürekli ve $\bar{v} = \{clT : T \in v\}$ ailesi yerel sonlu bir aile ise F ü.f.sürekli dir.

Kanıt: F x noktasında ü.z.sürekli olsun. $F(x) \subseteq V$ olan Y deki V θ -açık kümesini alalım. Bu durumda $y \in F(x)$ için $y \in T_y \subseteq clT_y \subseteq V$ olacak şekilde $T_y \in v$ vardır. Dolayısıyla $F(x) \subseteq \bigcup_{y \in F(x)} T_y \subseteq cl(\bigcup_{y \in F(x)} T_y) \subseteq cl(\bigcup_{y \in F(x)} clT_y) = \bigcup_{y \in F(x)} clT_y \subseteq V$ elde edilir. $F(x) \subseteq \bigcup_{y \in F(x)} T_y = T \in v$ ve F ü.z.sürekli olduğu için $z \in U$ iken $F(z) \subseteq clT$ olacak şekilde x noktasının bir U açık komşuluğu vardır. Buradan $\bar{v}$ ailesinin yerel sonlu bir aile olduğu kullanılarak $F(U) \subseteq clT = cl(\bigcup_{y \in F(x)} T_y) \subseteq cl(\bigcup_{y \in F(x)} clT_y) = \bigcup_{y \in F(x)} clT_y \subseteq V$ elde edilir. Bu F nin ü.f.sürekli liğini verir.

Aşağıda bir küme değerli dönüşümün üstten (alttan) faintly sürekliliği için bazı karakterizasyonlar verilecektir.

3.1.10. Teorem: $F : (X, \tau) \rightsquigarrow (Y, v)$ küme değerli dönüşümü için aşağıdaki ifadeler denktir.

1-) F ü.f.sürekli dir,

2-) $F : (X, \tau) \rightsquigarrow (Y, \nu_\theta)$ küme değerli dönüşümü ü.y.sürekli dir,
 3-) Y deki her bir V θ -açık kümesi için $F^+(V) \subseteq X$ açıktır,
 4-) Y deki her bir K θ -kapalı kümesi için $F^-(K) \subseteq X$ kapalıdır,
 5-) F ye karşı gelen $f : (X, \tau) \longrightarrow (2^Y, (\nu_\theta)_V^+)$ tek değerli dönüşümü sürekli dir,

6-) Her bir $x \in X$, x e yakınsak olan her $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ ağı ve $F(x) \subseteq V$ olan her bir V θ -açık kümesi için, $\alpha \geq \alpha_0$ iken $F(x_\alpha) \subseteq V$ olacak şekilde en az bir $\alpha_0 \in I$ vardır.

Kanıt: (1) $\Rightarrow$ (2), (2) $\Rightarrow$ (3) gerektirmeleri tanımdan açıktır.

(3) $\Rightarrow$ (4). $K \subseteq Y$ bir θ -kapalı küme olsun. $Y - K \subseteq Y$ bir θ -açık kümedir ve (3) ten dolayı $F^+(Y - K) \subseteq X$ açık kümedir. Buradan $X - F^+(Y - K) = X - (X - F^-(K)) = F^-(K) \subseteq X$ kapalı küme olur.

(4) $\Rightarrow$ (1). $x \in X$ için $x \in F^+(V)$ olan V θ -açık kümesini alalım. $Y - V \subseteq Y$ bir θ -kapalı kümedir ve (4) den dolayı $F^-(Y - V) \subseteq X$ kapalı kümedir. Buradan $X - F^-(Y - V) = F^+(V) \subseteq X$ açık kümedir ve $x \in F^+(V)$ dir. Yani $x \in U \subseteq F^+(V)$ olacak şekilde x noktasının bir U açık komşuluğu vardır. Bu F nin ü.f.sürekli olduğunu verir.

(1) $\Rightarrow$ (5). F x noktasında ü.f.sürekli ve $f(x) \in V^+ \in (\nu_\theta)_V^+$ olsun. Bu durumda $F(x) = f(x) \subseteq V \in \nu_\theta$ dir ve F ü.f.sürekli olduğu için $z \in U$ iken $F(z) \subseteq V$ olacak biçimde x noktasının bir U açık komşuluğu vardır. Buradan $f(U) = F(U) \subseteq V^+$ elde edilir. Bu f nin sürekliliğini verir.

(5) $\Rightarrow$ (1). f , x noktasında sürekli olsun ve $x \in F^+(V)$ olan V θ -açık kümesini alalım. Bu durumda $f(x) = F(x) \subseteq V^+ \in (\nu_\theta)_V^+$ dir ve f sürekli olduğu için $F(U) = f(U) \subseteq V^+$ olacak biçimde x noktasının bir U açık komşuluğu vardır. Böylece $z \in U$ iken $F(z) \subseteq V$ olacak biçimde x noktasının bir U açık komşuluğu elde edilmiş olur. Bu F nin ü.f.sürekliğini verir.

(3) $\Rightarrow$ (6). $x \in X$ için $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$, x noktasına yakınsak olan bir ağ olsun. $F(x) \subseteq V$ olan V θ -açık kümesini alalım. Hipotezden $F^+(V)$, X te açık bir kümedir ve x noktasının bir komşuluğudur. $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ ağı x noktasına yakınsak

olduğu için $\alpha \geq \alpha_0$ iken $x_\alpha \in F^+(V)$ olacak şekilde en az bir $\alpha_0 \in I$ vardır. Bu ise $\alpha \geq \alpha_0$ iken $F(x_\alpha) \subseteq V$ olduğunu verir.

(6) $\Rightarrow$ (3). Kabul edelim ki (3) doğru olmasın. Yani $x \in X$, $x \in F^+(V)$ olan bir V θ -açık kümesi ve x noktasının her bir U açık komşuluğu için $x \in U \not\subseteq F^+(V)$ olsun. Bu durumda $x_U \in U$ ve $x_U \notin F^+(V)$ olacak şekilde bir x_U noktası vardır. $D = \{(x_U, U) : U \in \tau(x), x_U \in U, x_U \notin F^+(V)\}$ kümesi " $(x_U, U_1) \leq (x_U, U) \Leftrightarrow U \subseteq U_1$ " şeklinde tanımlanan bağıntı ile yönlendirilmiş bir kümedir. $g : D \longrightarrow X$ fonksiyonu bir ağdır ve bu $(x_U)_{(x_U, U) \in D}$ ağı x noktasına yakınsaktır. Fakat bütün $(x_U, U) \in D$ ler için $x_U \notin F^+(V)$ dir. Bu ise hipotez ile çelişir. O halde $F^+(V) \subseteq X$ açık küme olmalıdır.

3.1.11. Teorem: $F : (X, \tau) \rightsquigarrow (Y, \nu)$ küme değerli dönüşümü için aşağıdaki ifadeler denktir.

- 1-) F a.f.sürekli,dir,
- 2-) $F : (X, \tau) \rightsquigarrow (Y, \nu_\theta)$ küme değerli dönüşümü a.y.sürekli,dir,
- 3-) Y deki her bir V θ -açık kümesi için $F^-(V) \subseteq X$ açıktır,
- 4-) Y deki her bir K θ -kapalı kümesi için $F^+(K) \subseteq X$ kapalıdır,
- 5-) F ye karşı gelen $f : (X, \tau) \longrightarrow (2^Y, (\nu_\theta)_V^-)$ tek değerli dönüşümü sürekli,dir,
- 6-) Her bir $x \in X$, x e yakınsak olan her $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ ve $F(x) \cap V \neq \emptyset$ olan her bir V θ -açık kümesi için $\alpha \geq \alpha_0$ iken $F(x_\alpha) \cap V \neq \emptyset$ olacak şekilde en az bir $\alpha_0 \in I$ vardır,
- 7-) Her bir $y \in F(x)$ ve x noktasına yakınsak olan her $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ ağı için $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ ağının bir $(z_\beta)_{\beta \in J}$ alt ağı vardır ve $y_\beta \in F(z_\beta)$ olan $(y_\beta)_{(\beta, V) \in J}$ ağı y noktasına θ -yakınsaktır.

Kanıt: (1) $\Rightarrow$ (2), (2) $\Rightarrow$ (3) gerektirmeleri tanımdan açıktır.

(3) $\Rightarrow$ (4). $K \subseteq Y$ bir θ -kapalı küme olsun. $Y - K \subseteq Y$ bir θ -açık kümedir ve (3) ten dolayı $F^-(Y - K) \subseteq X$ açık kümedir. Buradan $X - F^-(Y - K) = X - (X - F^+(K)) = F^+(K) \subseteq X$ kapalı küme olur.

(4) $\Rightarrow$ (1). $x \in X$ için $x \in F^-(V)$ olan V θ -açık kümesini alalım. $Y - V \subseteq Y$

bir θ -kapalı kümedir ve (4) den dolayı $F^+(Y - V) \subseteq X$ kapalı kümedir. Buradan $X - F^+(Y - V) = F^-(V) \subseteq X$ açık kümedir ve $x \in F^-(V)$ dir. Yani $x \in U \subseteq F^-(V)$ olacak şekilde x noktasının bir U açık komşuluğu vardır. Bu F nin a.f.sürekli olduğunu verir.

(1) $\Rightarrow$ (5). F x noktasında a.f.sürekli ve $f(x) \in \cap_{i=1}^n V_i^- \in (v_\theta)_V^-$ olsun. Bu durumda $i = 1, 2, \dots, n$ için $f(x) \in V_i^-$ olduğundan $F(x) \cap V_i \neq \emptyset$ tur ve $V_i \in v_\theta$ dır. F a.f.sürekli olduğu için $i = 1, 2, \dots, n$ ve $z \in U_i$ iken $F(z) \cap V_i \neq \emptyset$ olacak biçimde x noktasının bir U_i açık komşuluğu vardır. Buradan $U = \cap_{i=1}^n U_i$ denirse, $z \in U$ iken her $i = 1, 2, \dots, n$ için $F(z) \cap V_i \neq \emptyset$ olur. Buradan $z \in U$ iken $f(z) \in \cap_{i=1}^n V_i^-$ elde edilir. Yani $f(U) \subseteq \cap_{i=1}^n V_i^-$ bulunur. Bu f nin sürekliliğini verir.

(5) $\Rightarrow$ (1). f x noktasında sürekli olsun ve $x \in F^-(V)$ olan V θ -açık kümesini alalım. Bu durumda $f(x) = F(x) \in V^- \in (v_\theta)_V^-$ dır ve f sürekli olduğundan $F(U) = f(U) \subseteq V^-$ olacak biçimde x noktasının bir U açık komşuluğu vardır. Böylece $z \in U$ iken $F(z) \cap V \neq \emptyset$ olacak biçimde x noktasının bir U açık komşuluğu elde edilmiş olur. Bu ise F nin a.f.sürekliliğini verir.

(3) $\Rightarrow$ (6). $x \in X$ için $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$, x noktasına yakınsak olan bir ağ olsun. $F(x) \cap V \neq \emptyset$ olan V θ -açık kümesini alalım. Hipotezden $F^-(V)$, X te açık bir kümedir ve x noktasının bir komşuluğudur. $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ ağ x noktasına yakınsak olduğu için $\alpha \geq \alpha_0$ iken $x_\alpha \in F^-(V)$ olacak şekilde en az bir $\alpha_0 \in I$ vardır. Bu ise $\alpha \geq \alpha_0$ iken $F(x_\alpha) \cap V \neq \emptyset$ olduğunu verir.

(6) $\Rightarrow$ (3). Kabul edelim ki (3) doğru olmasın. Yani, $x \in X$, $x \in F^-(V)$ olan bir V θ -açık kümesi ve x noktasının her bir U açık komşuluğu için $x \in U \not\subseteq F^-(V)$ olsun. Bu durumda $x_U \in U$ ve $x_U \notin F^-(V)$ olacak şekilde bir x_U noktası vardır. $D = \{(x_U, U) : U \in \tau(x), x_U \in U, x_U \notin F^-(V)\}$ kümesi “ $(x_U, U_1) \leq (x_U, U) \Leftrightarrow U \subseteq U_1$ ” şeklinde tanımlanan bağıntı ile yönlendirilmiş bir kümedir. $g : D \rightarrow X$ fonksiyonu bir ağ dır ve bu $(x_U)_{(x_U, U) \in D}$ ağ x noktasına yakınsaktır. Fakat bütün $(x_U, U) \in D$ ler için $x_U \notin F^-(V)$ dir. Bu ise hipotez ile çelişir. O halde $F^-(V) \subseteq X$ açık küme olmalıdır.

(1) $\Rightarrow$ (7). Kabul edelim ki F , x noktasında a.f.sürekli olsun. x noktasına yakınsayan bir $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ ağını alalım. $y \in F(x)$ ve V , y noktasını bulunduran bir θ -açık küme olsun. F , x noktasında a.f.sürekli olduğu için $x \in U \subseteq F^-(V)$ olacak şekilde x noktasının bir U açık komşuluğu vardır. $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ ağı x noktasına yakınsak olduğundan bu U için $\alpha \geq \alpha_0$ iken $x_\alpha \in U$ olacak şekilde en az bir $\alpha_0 \in I$ vardır. Buradan $\alpha \geq \alpha_0$ iken $x_\alpha \in F^-(V)$ olur. $y \in V$ olan her V θ -açık kümesi için $I_V = \{\alpha_0 \in I : \alpha \geq \alpha_0 \Rightarrow x_\alpha \in F^-(V)\}$ ve $\xi = \{(\alpha, V) : \alpha \in I_V, y \in V \text{ ve } V \text{ } \theta\text{-açık küme}\}$ kümelerini tanımlayalım. “ $(\acute{\alpha}, \acute{V}) \geq (\alpha, V) \Leftrightarrow \acute{V} \subseteq V$ ve $\acute{\alpha} \geq \alpha$ ” şeklinde tanımlanan “ $\geq$ ” bağıntısı ξ üzerinde bir sıralama bağıntısıdır. $\varphi : \xi \longrightarrow I$, $\varphi((\beta, V)) = \beta$ olarak tanımlanan φ artandır ve I üzerinde kofinaldir. Bu nedenle φ , $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ ağının bir alt ağıdır. Bu alt ağı $(z_\beta)_{(\beta, V) \in \xi}$ ile gösterelim. Diğer taraftan herhangi bir $(\beta, V) \in \xi$ için $\beta \geq \beta_0$ olduğunda $x_\beta \in F^-(V)$ dir. Buradan $F(z_\beta) \cap V = F(x_\beta) \cap V \neq \emptyset$ olur. $y_\beta \in F(z_\beta) \cap V \neq \emptyset$ olan y_β lar için $(y_\beta)_{(\beta, V) \in \xi}$ ağı y noktasına θ -yakınsaktır. Bunu görmek için $y \in V_0$ olan V_0 θ -açık kümesini alalım. V_0 θ -açık olduğundan $\varphi((\beta_0, V_0)) = \beta_0$ olan en az bir $\beta_0 \in I$ vardır öyleki $y_{\beta_0} \in V$ dir. Eğer $(\beta, V) \geq (\beta_0, V_0)$ ise $\beta \geq \beta_0$ ve $V \subseteq V_0$ dir. Buradan $y_\beta \in F(z_\beta) \cap V = F(x_\beta) \cap V \subseteq F(x_\beta) \cap V_0$ dir. Bu yüzden $y_\beta \in V_0$ olur. Böylece $(y_\beta)_{(\beta, V) \in \xi}$ ağı y noktasına θ -yakınsak olur.

(7) $\Rightarrow$ (1). Kabul edelim ki (1) doğru olmasın. Yani $x \in X$, $x \in F^-(V)$ olan bir V θ -açık kümesi ve x noktasının her bir U açık komşuluğu için $x \in U \not\subseteq F^-(V)$ olsun. Bu durumda $x_U \in U$ ve $x_U \notin F^-(V)$ olacak şekilde bir $x_U \in U$ noktası vardır. Açıktır ki $\tau(x)$, x noktasının kapsama bağıntısı ile yönlendirilmiş komşuluklar sistemi olmak üzere bu $(x_U)_{U \in \tau(x)}$ ağı x noktasına yakınsaktır. $y \in F(x) \cap V$ olsun. Hipotezden $(x_U)_{U \in \tau(x)}$ ağının bir $(z_w)_{w \in W}$ alt ağı vardır ve $y_w \in F(z_w)$ olan $(y_w)_{w \in W}$ ağı y noktasına θ -yakınsaktır. Bu yüzden $w \geq w_0$ iken $y_w \in V$ olacak şekilde en az bir $w_0 \in W$ vardır. Diğer taraftan $(z_w)_{w \in W}$ ağı $(x_U)_{U \in \tau(x)}$ ağının bir alt ağı olduğundan $z_w = x_{h(w)}$ olacak şekilde bir $h : W \longrightarrow \tau(x)$ fonksiyonu ve her $U \in \tau(x)$ için $h(w_0) \geq U$ olan en

az bir $\check{w}_0 \in W$ vardır. Eğer $w \geq \check{w}_0$ ise $h(w) \geq h(\check{w}_0) \geq U$ olur. $w_0 \in W$ yi $w_0 \geq \check{w}_0$ ve $w_0 \geq \check{w}_0$ olarak alırsak $w \geq w_0$ için $y_w \in V$ olur. $(x_U)_{U \in \tau(x)}$ ağının tanımından dolayı $F(z_w) \cap V = F(x_{h(w)}) \cap V = \emptyset$ olur. Bunun anlamı $y_w \notin V$ dir. Bu bir çelişkidir. Bu yüzden F a.f.sürekli olmalıdır.

Aşağıdaki teorem $\bar{u}(a)$.f.sürekli dönüşümlerin açık alt kümelere kısıtlanmasının da $\bar{u}(a)$.f.sürekli olacağını ifade eder.

3.1.12. Teorem: Bir $F : X \rightsquigarrow Y$ küme değerli dönüşümü için aşağıdakiler doğrudur.

- a) F $\bar{u}(a)$.f.sürekli ve $A \subseteq X$ açık bir alt küme ise $F|_A : A \rightsquigarrow Y$ $\bar{u}(a)$.f.sürekli dir.
- b) $\{A_\alpha : \alpha \in I\}$ X in herhangi bir açık örtüsü olsun. $F : X \rightsquigarrow Y$ küme değerli dönüşümünün $\bar{u}(a)$.f.sürekli olması için gerekli ve yeterli koşul her $\alpha \in I$ için indirgenen dönüşüm $F|_{A_\alpha} : A_\alpha \rightsquigarrow Y$ nın $\bar{u}(a)$.f.sürekli olmasıdır.

Kanıt:a) Kabul edelim ki, F $\bar{u}.f.$ sürekli olsun ve $x \in A$ için $x \in (F|_A)^+(V)$ olan V θ -açık kümesini alalım. Bu durumda F $\bar{u}.f.$ sürekli ve $(F|_A)(x) = F(x)$ olduğundan $F(U) \subseteq V$ olacak şekilde x noktasının bir U açık komşuluğu vardır. $U_0 = U \cap A$ alınırsa U_0 x noktasının A alt uzayında bir açık komşuluğudur ve $(F|_A)(U_0) \subseteq V$ dir. Bu ise $F|_A$ nın $\bar{u}.f.$ sürekli olduğunu verir.

Altan faintly süreklilik içinde benzer ispat yapılabilir.

b) $(\Rightarrow)$ a) şikkından elde edilir.

$(\Leftarrow)$ Her $\alpha \in I$ için $F|_{A_\alpha}$ $\bar{u}.f.$ sürekli olsun. Herhangi bir $x \in X$ için $x \in F^+(V)$ olan V θ -açık kümesini alalım. $\{A_\alpha : \alpha \in I\}$ X in bir açık örtüsü olduğundan $x \in A_\alpha$ olacak şekilde en az bir $\alpha \in I$ vardır ve $(F|_{A_\alpha})(x) = F(x)$ olduğundan $x \in (F|_{A_\alpha})^+(V)$ dir. $F|_{A_\alpha}$ $\bar{u}.f.$ sürekli olduğu için $(F|_{A_\alpha})(U) \subseteq V$ olacak şekilde x noktasının A_α da bir U açık komşuluğu vardır. $U = W \cap A_\alpha$ olan W açık kümesini alalım. Bu durumda U , X uzayında açıktır ve $F(U) \subseteq V$ dir. Dolayısıyla da F $\bar{u}.f.$ sürekli dir.

Her $\alpha \in I$ için $F|_{A_\alpha}$ a.f.sürekli olsun. Herhangi bir $x \in X$ için $x \in F^-(V)$ olan V θ -açık kümesini alalım. $\{A_\alpha : \alpha \in I\}$ X in bir açık örtüsü olduğundan

$x \in A_\alpha$ olacak şekilde en az bir $\alpha \in I$ vardır ve $(F|_{A_\alpha})(x) = F(x)$ olduğundan $x \in (F|_A)^-(V)$ dir.. $F|_{A_\alpha}$ a.f.sürekli olduğu için $z \in U$ iken $(F|_{A_\alpha})(z) \cap V \neq \emptyset$ olacak şekilde x noktasının A_α da bir U açık komşuluğu vardır. $U = W \cap A_\alpha$ olan W açık kümesini alalım. Bu durumda U , X uzayında açıktır ve $z \in U$ iken $F(z) \cap V \neq \emptyset$ tur. Dolayısıyla da F , a.f.sürekli dir.

Bir $F : X \longrightarrow (Y, \nu)$ küme değerli dönüşümü için grafik fonksiyonu, $G_F : X \rightsquigarrow X \times Y$, $G_F(x) = \{x\} \times F(x)$ olarak tanımlanır.

Bir $F : X \rightsquigarrow Y$ küme değerli dönüşümü için $G_F^+(A \times B) = A \cap F^+(B)$ ve $G_F^-(A \times B) = A \cap F^-(B)$ eşitliklerinin doğruluğu Noiri ve Popa (1993) tarafından gösterilmiştir.

Aşağıdaki teorem bir F küme değerli dönüşümünün grafiği $\bar{u}(a)$.f.sürekli olduğunda kendisinin de $\bar{u}(a)$.f.sürekli olacağını verir.

3.1.13.Teorem: $F : X \rightsquigarrow Y$ bir küme değerli dönüşüm olsun. F nin grafiği $G_F : X \rightsquigarrow X \times Y$ $\bar{u}(a)$.f.sürekli ise F $\bar{u}(a)$.f.sürekli dir.

Kanıt: G_F $\bar{u}(a)$.f.sürekli olsun. Herhangi bir $x \in X$ için $x \in F^+(V)$ olan V , θ -açık kümesini alalım. Bu durumda $G_F(x) \subseteq X \times V$ dir ve $X \times V$, $X \times Y$ uzayında θ -açık kümedir. G_F $\bar{u}(a)$.f.sürekli olduğu için $G_F(U) \subseteq X \times V$ olacak şekilde x noktasının bir U açık komşuluğu vardır. Buradan Noiri-Popa daki eşitlik kullanılarak $U \subseteq G_F^+(X \times V) = F^+(V)$ elde edilir. Bu F nin $\bar{u}(a)$.f.sürekli olduğunu verir.

G_F a.f.sürekli olsun. Herhangi bir $x \in X$ için $x \in F^-(V)$ olan V θ -açık kümesini alalım. Bu durumda $X \times V$, $X \times Y$ uzayında θ -açık kümedir ve $G_F(x) \cap (X \times V) = (\{x\} \times F(x)) \cap (X \times V) = \{x\} \times (F(x) \cap V) \neq \emptyset$ olur. G_F a.f.sürekli olduğundan $z \in U$ iken $G_F(z) \cap (X \times V) \neq \emptyset$ olacak şekilde x noktasının bir U açık komşuluğu vardır. Böylece Noiri-Popa daki eşitlik kullanılarak $U \subseteq G_F^-(X \times V) = F^-(V)$ bulunur. Bu F nin a.f.sürekli olduğunu verir.

3.1.14.Önerme: $F : X \rightsquigarrow Y$ ve $G : Y \rightsquigarrow Z$ iki küme değerli dönüşüm olsun. Bu durumda her $V \subseteq Z$ için,

- a) $(G \circ F)^+(V) = F^+(G^+(V))$,
b) $(G \circ F)^-(V) = F^-(G^-(V))$ olur.

$\bar{u}(a)$.f.sürekli küme değerli dönüşüm ile $\bar{u}(a)$.y.sürekli bir küme değerli dönüşümün bileşkesinin $\bar{u}(a)$.f.sürekli olduğu aşağıdaki teoremdedir.

3.1.15. Teorem: $F : X \rightsquigarrow Y$ $\bar{u}(a)$.y.sürekli ve $G : Y \rightsquigarrow Z$ $\bar{u}(a)$.f.sürekli ise $G \circ F : X \rightsquigarrow Z$ $\bar{u}(a)$.f.sürekli.

Kanıt: $V \subseteq Z$ bir θ -açık küme olsun. G $\bar{u}(a)$.f.sürekli olduğundan $G^+(V) \subseteq Y$ bir açık kümedir. F $\bar{u}(a)$.y.sürekli olduğundan $F^+(G^+(V)) \subseteq X$ açık küme olur. Önceki Önermeden $F^+(G^+(V)) = (G \circ F)^+(V)$ olur. Dolayısıyla $G \circ F$ $\bar{u}(a)$.f.sürekli. Benzer kanıt a.f.sürekli için yapılabilir.

Nokta kapalı ve $\bar{u}(a)$.f.sürekli bir küme değerli dönüşümün grafiğinin aşırı kapalı olduğu aşağıdaki teoremdedir.

3.1.16. Teorem: $F : X \longrightarrow (Y, v)$ nokta kapalı ve $\bar{u}(a)$.f.sürekli küme değerli dönüşüm olsun. Y regüler uzay ise F nin grafiği $G(F)$ aşırı kapalıdır.

Kanıt: $(x, y) \notin G(F)$ olsun. Bu durumda $y \notin F(x)$ tir ve Y regüler uzay olduğundan $y \in V_1$ ve $F(x) \subseteq V_2$ olacak şekilde V_1, V_2 ayrık açık kümeleri vardır. Yine uzay regüler uzay olduğundan V_1 ve V_2 aynı zamanda θ -açık kümelerdir ve F $\bar{u}(a)$.f.sürekli olduğundan $F(U) \subseteq V_2$ olacak şekilde x in bir U açık komşuluğu vardır. Bu durumda $(x, y) \in U \times V_1 \subseteq (X \times Y) - G(F)$ elde edilir. Bu $G(F)$ in aşırı kapalı küme olduğunu verir.

Aşağıdaki teorem kompakt kümelerin nokta kompakt $\bar{u}(a)$.f.sürekli küme değerli dönüşüm altındaki görüntüsünün v_θ -kompakt olacağını ifade eder.

3.1.17. Teorem: $F : (X, \tau) \rightsquigarrow (Y, v)$ nokta kompakt ve $\bar{u}(a)$.f.sürekli küme değerli dönüşüm olsun. $A \subseteq X$ te kompakt bir alt küme ise $F(A) \subseteq Y$ de v_θ -kompaktır.

Kanıt: $A \subseteq X$ kompakt ve Σ , $F(A)$ nin v_θ -açık örtüsü olsun. Bu durumda $a \in A$ için $F(a) \subseteq \cup \Sigma$ olur. $v_\theta \subseteq v$ ve $F(a)$ kompakt olduğundan $F(a) \subseteq \cup \Sigma_{n(a)}$ olacak şekilde Σ nin sonlu bir $\Sigma_{n(a)}$ alt ailesi vardır. $\cup \Sigma_{n(a)} = V_a$ olsun. $V_a \subseteq Y$ de θ -açık küme ve F $\bar{u}(a)$.f.sürekli olduğu için $U_a \subseteq F^+(V_a)$ koşulunu

sağlayan a noktasının bir U_a açık komşuluğu vardır. $\Psi = \{U_a : a \in A\}$ ailesi A nın bir açık örtüsüdür. A X te kompakt olduğundan $A \subseteq \cup\{U_{a_i} : a_i \in A, i = 1, 2, \dots, k\}$ olacak şekilde $a_1, a_2, \dots, a_k \in A$ vardır. Buradan $F(A) \subseteq F(\cup\{U_{a_i} : a_i \in A, i = 1, 2, \dots, k\}) \subseteq \cup\{V_{a_i} : a_i \in A, i = 1, 2, \dots, k\} \subseteq \cup\{\cup\Sigma_{n(a_i)} : a_i \in A, i = 1, 2, \dots, k\}$ elde edilir. Böylece $F(A)$ Y de v_θ -kompakt tır.

3.1.18.Sonuç: $F : (X, \tau) \rightsquigarrow (Y, v)$ nokta kompakt ve ü.f.sürekli küme değerli dönüşüm olsun. X kompakt bir uzay ise Y v_θ -kompakt tır.

Bir $F : (X, \tau) \rightsquigarrow (Y, v)$ küme değerli dönüşümü için faintly sürekliliğin diğer bazı süreklilikler ile ilişkileri (1) (Y, v) regüler uzay, (2) $\bar{v}$ ailesi yerel sonlu, (3) (Y, v) hemen hemen regüler uzay ı göstermek üzere aşağıdaki biçimde özetlenebilir :

ü.y.süreklilik	$\longrightarrow$	ü.z.süreklilik	a.y.süreklilik	$\longrightarrow$	a.z.süreklilik
$\downarrow\uparrow(1)$		$(2)\downarrow\uparrow(3)$		$\downarrow\uparrow(1)$	$\downarrow\uparrow(3)$
ü.f.süreklilik		ü.f.süreklilik		a.f.süreklilik	a.f.süreklilik

3.2 Küme Değerli Dönüşümler İçin Süper Faintly Süreklilik

Bu kesimde, Yalvaç (1990) tarafından tek değerli dönüşümler için tanımlanan süper faintly süreklilik küme değerli dönüşümlere genişletilerek, karakterizasyonları ve bazı özellikleri verilecektir.

3.2.1.Tanım: $F : X \rightsquigarrow Y$ küme değerli dönüşüm ve $x \in X$ olsun.

a) $x \in F^+(V)$ olan Y deki her V θ -açık kümesi için $\text{int}(clU) \subseteq F^+(V)$ (yani, $\forall z \in \text{int}(clU)$ için $F(z) \subseteq V$) koşulunu sağlayan x noktasının bir U açık komşuluğu var ise, F ye x noktasında üstten süper faintly sürekli (upper super faintly continuous) küme değerli dönüşüm denir. Bunu kısaca, ü.s.f.sürekli olarak göstereceğiz.

b) $x \in F^-(V)$ olan Y deki her V θ -açık kümesi için $\text{int}(clU) \subseteq F^-(V)$ (yani, $\forall z \in \text{int}(clU)$ için $F(z) \cap V \neq \emptyset$) koşulunu sağlayan x noktasının bir U

açık komşuluğu var ise, F ye x noktasında alttan süper faintly sürekli (lower super faintly continuous) küme değerli dönüşüm denir. Bunu kısaca, a.s.f.sürekli olarak göstereceğiz.

c) F , küme değerli dönüşümü $\forall x \in X$ noktasında $\bar{u}(a)$.s.f.sürekli ise F ye X üzerinde $\bar{u}(a)$.s.f.sürekli denir.

Bir küme değerli dönüşümün $\bar{u}(a)$.f.sürekliliği ile $\bar{u}(a)$.s.f.sürekliliği arasındaki ilişki tanımlar yardımıyla aşağıdaki sonuç ile verilmiştir.

3.2.2.Sonuç: $F : X \rightsquigarrow Y$ küme değerli dönüşümü $\bar{u}(a)$.s.f.sürekli ise F $\bar{u}(a)$.f.sürekli dir.

Şimdi $\bar{u}(a)$.f.sürekliğin $\bar{u}(a)$.s.f.sürekliği gerektirmediğine ilişkin örnekler verelim.

3.2.3.Örnek: $X = \{0, 1, 2\}$ kümesi üzerindeki topoloji $\tau = \{\emptyset, X, \{1, 2\}, \{2\}, \{0, 2\}\}$ ve $Y = \{a, b, c, d, e\}$ kümesi üzerindeki topoloji $\nu = \{\emptyset, Y, \{a, b\}, \{c, d\}, \{c, d, e\}, \{a, b, c, d\}\}$ olsun. $F : X \rightsquigarrow Y$ küme değerli dönüşümü $F(0) = \{a, b, c\}$, $F(1) = \{d\}$, $F(2) = \{c, e\}$ olarak tanımlansın. Bu durumda F $\bar{u}$.f.sürekli dir fakat $1 \in X$ noktasında $\bar{u}$.s.f.sürekli değildir.

3.2.4.Örnek: $X = \{0, 1, 2\}$ kümesi üzerindeki topoloji, $\tau = \{\emptyset, X, \{1, 2\}, \{2\}, \{0, 2\}\}$ ve $Y = \{a, b, c, d, e\}$ kümesi üzerindeki topoloji $\nu = \{\emptyset, Y, \{a, b\}, \{c, d\}, \{c, d, e\}, \{a, b, c, d\}\}$ olsun. $F : X \rightsquigarrow Y$ küme değerli dönüşümü $F(0) = \{a, b, c\}$, $F(1) = \{d\}$, $F(2) = \{b, c, e\}$ olarak tanımlansın. Bu durumda F a.f.sürekli dir fakat $0 \in X$ noktasında a.s.f.sürekli değildir.

Aşağıda bir küme değerli dönüşümün üstten (alttan) süper faintly sürekliliği için bazı karakterizasyonlar verilecektir.

3.2.5.Teorem: $F : (X, \tau) \rightsquigarrow (Y, \nu)$ küme değerli dönüşümü için aşağıdaki ifadeler denktir.

1-) F $\bar{u}$.s.f.sürekli dir,

2-) Herhangi bir $V \in \nu_\theta$ ve $F(x) \subseteq V$ olan her bir $x \in X$ için $F(U) \subseteq V$ olacak şekilde x noktasının bir regüler açık U komşuluğu vardır.

3-) $F : (X, \tau_s) \rightsquigarrow (Y, \nu_\theta)$ küme değerli dönüşümü $\bar{u}$.y.sürekli dir,

4-) Y deki her bir V θ -açık kümesi için $F^+(V) \subseteq X$ δ -açıktır,
 5-) Y deki her bir K θ -kapalı kümesi için $F^-(K) \subseteq X$ δ -kapalıdır,
 6-) F ye karşı gelen $f : (X, \tau) \longrightarrow (2^Y, (\nu_\theta)_V^+)$ tek değerli dönüşümü süper
 süreklidir,

7-) F ye karşı gelen $f : (X, \tau_s) \longrightarrow (2^Y, (\nu_\theta)_V^+)$ tek değerli dönüşümü
 süreklidir,

8-) Her bir $x \in X$, x e δ -yakınsak olan her $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ ağı ve $F(x) \subseteq V$ olan
 her bir V θ -açık kümesi için, $\alpha \geq \alpha_0$ iken $F(x_\alpha) \subseteq V$ olacak şekilde en az bir
 $\alpha_0 \in I$ vardır.

Kanıt:(1) $\Rightarrow$ (2). F ü.s.f.sürekli olsun. $F(x) \subseteq V$ olan $V \in \nu_\theta$ alalım.
 (1) den dolayı, $F(int(clW)) \subseteq V$ olacak şekilde x noktasının bir açık W
 komşuluğu vardır. $int(clW) = U$ seçilirse U , x noktasının bir regüler açık
 komşuluğu olur ve $F(U) \subseteq V$ koşulunu sağlar.

(2) $\Rightarrow$ (3). $x \in X$ ve $x \in F^+(V)$ olan $V \in \nu_\theta$ alalım. (2) den dolayı,
 $U \subseteq F^+(V)$ olacak şekilde x noktasının bir regüler açık U komşuluğu vardır.
 $U \in \tau_s$ olduğundan $F^+(V) \in \tau_s$ elde edilir. Bu F nin ü.y.sürekliğini verir.

(3) $\Rightarrow$ (4). $V \subseteq Y$ bir θ -açık küme ve $x \in F^+(V)$ olsun. Hipotezden,
 $x \in U \subseteq F^+(V)$ olacak şekilde bir $U \in \tau_s$ vardır. U regüler açık bir küme
 olduğundan, $F^+(V)$ bir δ -açık kümedir.

(4) $\Rightarrow$ (5). $K \subseteq Y$ bir θ -kapalı küme olsun. $Y - K \subseteq Y$ bir θ -açık kümedir
 ve (4) ten dolayı $F^+(Y - K) \subseteq X$ δ -açık kümedir. Buradan $X - F^+(Y - K) =$
 $X - (X - F^-(K)) = F^-(K) \subseteq X$ δ -kapalı küme olur.

(5) $\Rightarrow$ (1). $x \in X$ için $x \in F^+(V)$ olan bir V θ -açık kümesini alalım.
 $Y - V \subseteq Y$ bir θ -kapalı kümedir ve (5) den dolayı $F^-(Y - V) \subseteq X$ δ -kapalı
 kümedir. Buradan $X - F^-(Y - V) = F^+(V) \subseteq X$ δ -açık kümedir ve
 $x \in F^+(V)$ için $x \in U \subseteq F^+(V)$ olacak şekilde x noktasının bir U regüler açık
 komşuluğu vardır. Böylece $x \in U = int(clU) \subseteq F^+(V)$ elde edilir. Bu F nin
 ü.s.f.sürekli olduğunu verir.

(1) $\Rightarrow$ (6). F x noktasında ü.s.f.sürekli ve $f(x) \in V^+ \in (\nu_\theta)_V^+$ olsun. Bu

durumda $F(x) = f(x) \subseteq V \in \nu_\theta$ dır ve F ü.s.f.sürekli olduğu için $z \in \text{int}(clU)$ iken $F(z) \subseteq V$ olacak biçimde x noktasının bir U açık komşuluğu vardır. Buradan $f(\text{int}(clU)) = F(\text{int}(clU)) \subseteq V^+$ elde edilir. Bu f nin süper sürekliliğini verir.

(6) $\Rightarrow$ (1). f x noktasında süper sürekli olsun ve $x \in F^+(V)$ olan V θ -açık kümesini alalım. Bu durumda $f(x) = F(x) \in V^+ \in (\nu_\theta)_V^+$ dır ve f süper sürekli olduğu için $F(\text{int}(clU)) = f(\text{int}(clU)) \subseteq V^+$ olacak biçimde x noktasının bir U açık komşuluğu vardır. Böylece $z \in \text{int}(clU)$ iken $F(z) \subseteq V$ olacak biçimde x noktasının bir U açık komşuluğu elde edilmiş olur. Bu ise F nin ü.s.f.sürekliliğini verir.

(6) $\Leftrightarrow$ (7). (Reilly and Vamanamurthy, 1983)

(4) $\Rightarrow$ (8). $x \in X$ için $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ ağı x noktasına δ -yakınsak bir ağ olsun. $F(x) \subseteq V$ olan V θ -açık kümesini alalım. Hipotezden $F^+(V)$, X te δ -açık bir kümedir ve $x \in F^+(V)$ için $x \in \text{int}(clU) \subseteq F^+(V)$ olacak şekilde x noktasının bir U açık komşuluğu vardır. $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ ağı x noktasına δ -yakınsak olduğundan bu U için, $\alpha \geq \alpha_0$ iken $x_\alpha \in \text{int}(clU)$ olacak şekilde en az bir $\alpha_0 \in I$ vardır. Buradan $\alpha \geq \alpha_0$ iken $x_\alpha \in F^+(V)$ elde edilir. Bu istenendir.

(8) $\Rightarrow$ (4). Kabul edelim ki (4) doğru olmasın. Yani $x \in X$, $x \in F^+(V)$ olan bir V θ -açık kümesi ve x noktasının her bir U açık komşuluğu için $x \in \text{int}(clU) \not\subseteq F^+(V)$ olsun. Bu durumda $x_U \in \text{int}(clU)$ ve $x_U \notin F^+(V)$ olacak şekilde bir x_U noktası vardır. $D = \{(x_U, U) : U \in \tau(x), x_U \in \text{int}(clU), x_U \notin F^+(V)\}$ kümesi “ $(x_U, U_1) \leq (x_U, U) \Leftrightarrow U \subseteq U_1$ ” şeklinde tanımlanan bağıntı ile yönlendirilmiş bir kümedir. $g : D \rightarrow X$ fonksiyonu bir ağ dır ve bu $(x_U)_{(x_U, U) \in D}$ ağı x noktasına δ -yakınsaktır. Fakat bütün $(x_U, U) \in D$ ler için $x_U \notin F^+(V)$ dir. Bu ise hipotez ile çelişir. O halde $F^+(V) \subseteq X$ δ -açık küme olmalıdır.

3.2.6. Teorem: $F : (X, \tau) \rightsquigarrow (Y, \nu)$ küme değerli dönüşümü için aşağıdaki ifadeler denktir.

1-) F a.s.f.sürekli dir,

2-) Herhangi bir $V \in \nu_\theta$ ve $F(x) \cap V \neq \emptyset$ olan her bir $x \in X$ için, $z \in U$

iken $F(z) \cap V \neq \emptyset$ olacak şekilde x noktasının bir regüler açık U komşuluğu vardır.

3-) $F : (X, \tau_s) \rightsquigarrow (Y, \nu_\theta)$ küme değerli dönüşümü a.y.sürekli dir,

4-) Y deki her bir V θ -açık kümesi için $F^-(V) \subseteq X$ δ -açıktır,

5-) Y deki her bir K θ -kapalı kümesi için $F^+(K) \subseteq X$ δ -kapalıdır,

6-) F ye karşı gelen $f : (X, \tau) \longrightarrow (2^Y, (\nu_\theta)_V^-)$ tek değerli dönüşümü süper sürekli dir,

7-) F ye karşı gelen $f : (X, \tau_s) \longrightarrow (2^Y, (\nu_\theta)_V^-)$ tek değerli dönüşümü sürekli dir,

8-) Her bir $x \in X$, x e δ -yakınsak olan her $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ ve $F(x) \cap V \neq \emptyset$ olan her bir V θ -açık kümesi için $\alpha \geq \alpha_0$ iken $F(x_\alpha) \cap V \neq \emptyset$ olacak şekilde en az bir $\alpha_0 \in I$ vardır,

9-) Her bir $y \in F(x)$ ve x noktasına δ -yakınsak olan her $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ ağı için $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ ağının bir $(z_\beta)_{\beta \in \xi}$ alt ağı vardır ve $y_\beta \in F(z_\beta)$ olan $(y_\beta)_{(\beta, V) \in \xi}$ ağı y noktasına θ -yakınsaktır.

Kanıt: (1) $\Rightarrow$ (2). F a.s.f.sürekli olsun. $F(x) \cap V \neq \emptyset$ olan $V \in \nu_\theta$ alalım. (1) den dolayı $z \in W$ iken $F(z) \cap V \neq \emptyset$ olacak şekilde x noktasının bir açık W komşuluğu vardır. $\text{int}(clW) = U$ seçilirse U , x noktasının bir regüler açık komşuluğu olur ve $z \in U$ iken $F(z) \cap V \neq \emptyset$ koşulunu sağlar.

(2) $\Rightarrow$ (3). $x \in X$ ve $x \in F^-(V)$ olan $V \in \nu_\theta$ alalım. (2) den dolayı $U \subseteq F^-(V)$ olacak şekilde x noktasının bir regüler açık U komşuluğu vardır. $U \in \tau_s$ olduğundan $F^-(V) \in \tau_s$ elde edilir. Bu F nin a.y.sürekli liliğini verir.

(3) $\Rightarrow$ (4). $V \subseteq Y$ bir θ -açık küme ve $x \in F^-(V)$ olsun. Hipotezden $x \in U \subseteq F^-(V)$ olacak şekilde bir $U \in \tau_s$ vardır. U regüler açık bir küme olduğundan $F^-(V)$ bir δ -açık kümedir.

(4) $\Rightarrow$ (5). $K \subseteq Y$ bir θ -kapalı küme olsun. $Y - K \subseteq Y$ bir θ -açık kümedir ve (4) ten dolayı $F^-(Y - K) \subseteq X$ δ -açık kümedir. Buradan $X - F^-(Y - K) = X - (X - F^+(K)) = F^+(K) \subseteq X$ δ -kapalı küme olur.

(5) $\Rightarrow$ (1). $x \in X$ için $x \in F^-(V)$ olan bir V θ -açık kümesini alalım.

$Y - V \subseteq Y$ bir θ -kapalı kümedir ve (5) den dolayı $F^+(Y - V) \subseteq X$ bir δ -kapalı küme olur. Buradan, $X - F^+(Y - V) = F^-(V) \subseteq X$ δ -açık kümedir ve $x \in F^-(V)$ için $x \in U \subseteq F^-(V)$ olacak şekilde x noktasının bir U regüler açık komşuluğu vardır. Böylece $x \in U = \text{int}(clU) \subseteq F^-(V)$ elde edilir. Bu F nin a.s.f.sürekli olduğunu verir.

(1) $\Rightarrow$ (6). F x noktasında a.s.f.sürekli ve $f(x) \in \cap_{i=1}^n V_i^- \in (v_\theta)_V^-$ olsun. Bu durumda $i = 1, 2, \dots, n$ için $f(x) \in V_i^-$ olduğundan $F(x) \cap V_i \neq \emptyset$ tur ve $V_i \in v_\theta$ dir. F a.s.f.sürekli olduğundan $i = 1, 2, \dots, n$ için $z \in \text{int}(clU_i)$ iken $F(z) \cap V_i \neq \emptyset$ olacak biçimde x noktasının bir U_i açık komşuluğu vardır. Buradan $U = \cap_{i=1}^n U_i$ denirse U , x noktasının bir açık komşuluğudur ve $z \in \text{int}(clU)$ iken her $i = 1, 2, \dots, n$ için $F(z) \cap V_i \neq \emptyset$ olur. Dolayısıyla $z \in \text{int}(clU)$ iken $f(z) \in \cap_{i=1}^n V_i^-$ elde edilir. Böylece $f(\text{int}(clU)) \subseteq \cap_{i=1}^n V_i^-$ bulunur. Bu f nin süper sürekliliğini verir.

(6) $\Rightarrow$ (1). f x noktasında süper sürekli olsun ve $x \in F^-(V)$ olan V θ -açık kümesini alalım. Bu durumda $f(x) = F(x) \in V^- \in (v_\theta)_V^-$ dir ve f süper sürekli olduğundan, $F(\text{int}(clU)) = f(\text{int}(clU)) \subseteq V^-$ olacak biçimde x noktasının bir açık U komşuluğu vardır. Böylece $z \in \text{int}(clU)$ iken $F(z) \cap V \neq \emptyset$ olacak biçimde x noktasının bir açık U komşuluğu elde edilmiş olur. Bu ise F nin a.s.f.sürekliliğini verir.

(6) $\Leftrightarrow$ (7). (Reilly and Vamanmurthy, 1983)

(4) $\Rightarrow$ (8). $x \in X$ için $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ ağı x noktasına δ -yakınsak bir ağ olsun. $F(x) \cap V \neq \emptyset$ olan V θ -açık kümesini alalım. Hipotezden $F^-(V)$ X te δ -açık bir kümedir ve $x \in F^-(V)$ için $x \in \text{int}(clU) \subseteq F^-(V)$ olacak şekilde x noktasının bir açık U komşuluğu vardır. $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ ağı x noktasına δ -yakınsak olduğundan bu U için, $\alpha \geq \alpha_0$ iken $x_\alpha \in \text{int}(clU)$ olacak şekilde en az bir $\alpha_0 \in I$ vardır. Buradan $\alpha \geq \alpha_0$ iken $x_\alpha \in F^-(V)$ elde edilir. Bu istenendir.

(8) $\Rightarrow$ (4). Kabul edelim ki (4) doğru olmasın. Yani, $x \in X$, $x \in F^-(V)$ olan bir V θ -açık kümesi ve x noktasının her bir U açık komşuluğu için $x \in \text{int}(clU) \not\subseteq F^-(V)$ olsun. Bu durumda $x_U \in \text{int}(clU)$ ve $x_U \notin F^-(V)$ olacak

şekilde bir x_U noktası vardır. $D = \{(x_U, U) : U \in \tau(x), x_U \in \text{int}(clU), x_U \notin F^-(V)\}$ kümesi “ $(x_U, U_1) \leq (x_U, U) \Leftrightarrow U \subseteq U_1$ ” şeklinde tanımlanan bağıntı ile yönlendirilmiş bir kümedir. $g : D \longrightarrow X$ fonksiyonu bir ağdır ve bu $(x_U)_{(x_U, U) \in D}$ ağı x noktasına δ -yakınsaktır. Fakat bütün $(x_U, U) \in D$ ler için $x_U \notin F^-(V)$ dir. Bu ise hipotez ile çelişir. O halde $F^-(V) \subseteq X$ açık δ -küme olmalıdır.

(1) $\Rightarrow$ (9). Kabul edelim ki F , x noktasında a.s.f.sürekli olsun. x noktasına δ -yakınsayan bir $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ ağını alalım. $y \in F(x)$ ve V , y noktasını bulunduran bir θ -açık küme olsun. F , x noktasında a.s.f.sürekli olduğu için $\text{int}(clU) \subseteq F^-(V)$ olacak şekilde x noktasının bir açık U komşuluğu vardır. $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ ağı x noktasına δ -yakınsak olduğundan bu U için, $\alpha \geq \alpha_0$ iken $x_\alpha \in \text{int}(clU)$ olacak şekilde en az bir $\alpha_0 \in I$ vardır. Buradan $\alpha \geq \alpha_0$ iken $x_\alpha \in F^-(V)$ olur. $y \in V$ olan her V θ -açık kümesi için $I_V = \{\alpha_0 \in I : \alpha \geq \alpha_0 \Rightarrow x_\alpha \in F^-(V)\}$ ve $\xi = \{(\alpha, V) : \alpha \in I_V, y \in V \text{ ve } V \theta\text{-açık küme}\}$ kümelerini tanımlayalım. “ $(\acute{\alpha}, \acute{V}) \geq (\alpha, V) \Leftrightarrow \acute{V} \subseteq V \text{ ve } \acute{\alpha} \geq \alpha$ ” şeklinde tanımlanan “ $\geq$ ” bağıntısı ξ üzerinde bir sıralama bağıntısıdır. $\varphi : \xi \longrightarrow I$, $\varphi((\beta, V)) = \beta$ olarak tanımlanan φ artandır ve I üzerinde kofinaldir. Bu nedenle φ , $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ ağının bir alt ağıdır. Bu alt ağı $(z_\beta)_{(\beta, V) \in \xi}$ ile gösterelim. Diğer taraftan herhangi bir $(\beta, V) \in \xi$ için $\beta \geq \beta_0$ olduğunda $x_\beta \in F^-(V)$ dir. Buradan $F(z_\beta) \cap V = F(x_\beta) \cap V \neq \emptyset$ olur. $y_\beta \in F(z_\beta) \cap V \neq \emptyset$ olan y_β lar için $(y_\beta)_{(\beta, V) \in \xi}$ ağı y noktasına θ -yakınsaktır. Bunu görmek için $y \in V_0$ olan V_0 θ -açık kümesini alalım. V_0 θ -açık olduğundan $\varphi((\beta_0, V_0)) = \beta_0$ olan en az bir $\beta_0 \in I$ vardır öyleki $y_{\beta_0} \in V$ dir. Eğer $(\beta, V) \geq (\beta_0, V_0)$ ise $\beta \geq \beta_0$ ve $V \subseteq V_0$ dir. Buradan $y_\beta \in F(z_\beta) \cap V = F(x_\beta) \cap V \subseteq F(x_\beta) \cap V_0$ dir. Bu yüzden $(\beta \geq \beta_0 \text{ iken})$ $y_\beta \in V_0$ olur. Böylece $(y_\beta)_{(\beta, V) \in \xi}$ ağı y noktasına θ -yakınsak olur.

(9) $\Rightarrow$ (1). Kabul edelim ki (1) doğru olmasın. Yani, $x \in X$, $x \in F^-(V)$ olan bir V θ -açık kümesi ve x noktasının her bir U açık komşuluğu için $x \in \text{int}(clU) \not\subseteq F^-(V)$ olsun. Bu durumda $x_U \in \text{int}(clU)$ ve $x_U \notin F^-(V)$ olacak şekilde bir x_U noktası vardır. Açık ki $\tau(x)$, x noktasının kapsama bağıntısı ile yönlendirilmiş komşuluklar sistemi olmak üzere bu $(x_U)_{U \in \tau(x)}$ ağı x noktasına

δ -yakınsaktır. $y \in F(x) \cap V$ olsun. Hipotezden $(x_U)_{U \in \tau(x)}$ ağının bir $(z_w)_{w \in W}$ alt ağı vardır ve $y_w \in F(z_w)$ olan $(y_w)_{w \in W}$ ağ y noktasına θ -yakınsaktır. Bu yüzden $w \geq \dot{w}_0$ iken $y_w \in V$ olacak şekilde en az bir $\dot{w}_0 \in W$ vardır. Diğer taraftan $(z_w)_{w \in W}$ ağ $(x_U)_{U \in \tau(x)}$ ağının bir alt ağı olduğundan $z_w = x_{h(w)}$ olacak şekilde bir $h : W \rightarrow \tau(x)$ fonksiyonu vardır ve her $U \in \tau(x)$ için $h(\dot{w}_0) \geq U$ olan en az bir $\dot{w}_0 \in W$ vardır. Eğer $w \geq \dot{w}_0$ ise $h(w) \geq h(\dot{w}_0) \geq U$ olur. $w_0 \in W$ yi $w_0 \geq \dot{w}_0$ ve $w_0 \geq \dot{w}_0$ olarak alırsak $w \geq w_0$ için $y_w \in V$ olur. $(x_U)_{U \in \tau(x)}$ ağının tanımından dolayı $F(z_w) \cap V = F(x_{h(w)}) \cap V = \emptyset$ olur ki bunun anlamı $y_w \notin V$ dir. Bu bir çelişkidir. Bu yüzden F a.s.f.sürekli olmalıdır.

3.2.7.Önerme: (Küçük, 1995) (X, τ) bir topolojik uzay olsun. $A \subseteq X$ bir açık alt küme ve $U \subseteq X$ bir regüler açık alt küme ise $W = U \cap A$, A da bir regüler açık kümedir.

3.2.8.Teorem: Bir $F : X \rightsquigarrow Y$ küme değerli dönüşümü için aşağıdakiler doğrudur.

a) F $\bar{u}(a)$.s.f.sürekli ve $A \subseteq X$ açık bir alt küme ise, $F|_A : A \rightsquigarrow Y$ $\bar{u}(a)$.s.f.sürekli dir.

b) $\{A_\alpha : \alpha \in I\}$ X in herhangi bir regüler açık örtüsü olsun. $F : X \rightsquigarrow Y$ küme değerli dönüşümünün $\bar{u}(a)$.s.f.sürekli olması için gerekli ve yeterli koşul her $\alpha \in I$ için indirgenen dönüşüm $F|_{A_\alpha} : A_\alpha \rightsquigarrow Y$ nin $\bar{u}(a)$.s.f.sürekli olmasıdır.

Kanıt:a). Burada sadece a.s.f.sürekli için kanıt yapılacaktır. Benzer ispat $\bar{u}(a)$.s.f.sürekli için de yapılabilir. Kabul edelim ki F a.s.f.sürekli olsun ve $x \in A$ için $x \in (F|_A)^-(V)$ olan V θ -açık kümesini alalım. Bu durumda F a.s.f.sürekli ve $(F|_A)(x) = F(x)$ olduğundan $U \subseteq F^-(V)$ olacak şekilde x noktasının bir regüler açık U komşuluğu vardır. $U_0 = U \cap A$ alınırsa önceki Önermeden U_0 x noktasının A alt uzayında bir regüler açık komşuluğudur ve $U_0 \subseteq F^-(V) \cap A = (F|_A)^-(V)$ olur. Bu ise $F|_A$ nin a.s.f.sürekli olduğunu verir.

b). ($\Rightarrow$) a) şikkından elde edilir.

($\Leftarrow$) Her $\alpha \in I$ için $F|_{A_\alpha}$ ü.s.f.sürekli olsun. Herhangi bir $x \in X$ için $x \in F^+(V)$ olan V θ -açık kümesini alalım. $\{A_\alpha : \alpha \in I\}$ X in bir örtüstü olduğundan $x \in A_\alpha$ olacak şekilde en az bir $\alpha \in I$ vardır ve $(F|_{A_\alpha})(x) = F(x)$ olduğundan $(F|_{A_\alpha})(x) \subseteq V$ dir. $F|_{A_\alpha}$ ü.s.f.sürekli olduğundan, $U \subseteq (F|_{A_\alpha})^+(V) = F^+(V) \cap A_\alpha$ olacak şekilde x noktasının A_α da bir regüler açık U komşuluğu vardır. $U = W \cap A_\alpha$ olan W regüler açık kümesini alalım. İki regüler açık kümenin arakesiti yine bir regüler açık küme olduğundan U, X uzayında regüler açık kümedir ve $F(U) \subseteq V$ dir. Dolayısıyla da F ü.s.f.sürekli dir.

Her $\alpha \in I$ için $F|_{A_\alpha}$ a.s.f.sürekli olsun. Herhangi bir $x \in X$ için $x \in F^-(V)$ olan V θ -açık kümesini alalım. $\{A_\alpha : \alpha \in I\}$ X in bir örtüstü olduğundan, $x \in A_\alpha$ olacak şekilde en az bir $\alpha \in I$ vardır ve $(F|_{A_\alpha})(x) = F(x)$ olduğundan $(F|_{A_\alpha})(x) \cap V \neq \emptyset$ tur. $F|_{A_\alpha}$ a.s.f.sürekli olduğu için $U \subseteq (F|_{A_\alpha})^-(V) = F^-(V) \cap A_\alpha$ olacak şekilde x noktasının A_α da bir regüler açık U komşuluğu vardır. $U = W \cap A_\alpha$ olan W regüler açık kümesini alalım. İki regüler açık kümenin arakesiti yine bir regüler açık küme olduğundan U, X uzayında regüler açık kümedir ve $F(U) \cap V \neq \emptyset$ tur. Dolayısıyla da F a.s.f.sürekli dir.

Aşağıdaki teorem bir F küme değerli dönüşümün grafiği $\tilde{u}(a)$.s.f.sürekli olduğunda kendisinin de $\tilde{u}(a)$.s.f.sürekli olacağını verir.

3.2.9.Teorem: $F : X \rightsquigarrow Y$ bir küme değerli dönüşüm olsun. F nin grafiği $G_F : X \rightsquigarrow X \times Y$ $\tilde{u}(a)$.s.f.sürekli ise F $\tilde{u}(a)$.s.f.sürekli dir.

Kanıt: G_F ü.s.f.sürekli olsun ve $x \in X$ için $x \in F^+(V)$ olan V , θ -açık kümesini alalım. Bu durumda $G_F(x) \subseteq X \times V$ dir ve $X \times V, X \times Y$ uzayında θ -açık kümedir. G_F ü.s.f.sürekli olduğundan $G_F(int(clU)) \subseteq X \times V$ olacak şekilde x noktasının bir U açık komşuluğu vardır. Buradan $F(int(clU)) \subseteq V$ elde edilir. Bu F nin ü.s.f.sürekli olduğunu verir.

G_F a.s.f.sürekli olsun. Herhangi bir $x \in X$ için $x \in F^-(V)$ olan V , θ -açık kümesini alalım. Bu durumda $G_F(x) \cap (X \times V) \neq \emptyset$ dir ve $X \times V, X \times Y$ uzayında θ -açık kümedir. G_F a.s.f.sürekli olduğundan $z \in int(clU)$ iken

$G_F(z) \cap (X \times V) \neq \emptyset$ olacak şekilde x noktasının bir U açık komşuluğu vardır. Böylece $z \in \text{int}(clU)$ iken $F(z) \cap V \neq \emptyset$ olacak şekilde x noktasının bir U açık komşuluğu elde edilir. Bu F nin a.s.f.sürekli olduğunu verir.

$\bar{u}(a)$.s.f.sürekli küme değerli dönüşüm ile $\bar{u}(a)$. δ -sürekli bir küme değerli dönüşümün bileşkesinin $\bar{u}(a)$.s.f.sürekli olduğu aşağıdaki teoremden verilmiştir.

3.2.10. Teorem: $F : X \rightsquigarrow Y$ $\bar{u}(a)$. δ -sürekli ve $G : Y \rightsquigarrow Z$ $\bar{u}(a)$.s.f.sürekli ise $G \circ F : X \rightsquigarrow Z$ $\bar{u}(a)$.s.f.sürekli dir.

Kanıt: $V \subseteq Z$ bir θ -açık küme olsun. G $\bar{u}(a)$.s.f.sürekli olduğundan $G^+(V) \subseteq Y$ bir δ -açık kümedir. F $\bar{u}(a)$. δ -sürekli olduğundan $F^+(G^+(V)) \subseteq X$ açık δ -küme olur. $F^+(G^+(V)) = (G \circ F)^+(V)$ olduğundan $G \circ F$ $\bar{u}(a)$.s.f.sürekli olur.

Benzer kanıt a.s.f.sürekli lik içinde yapılabilir.

Aşağıdaki teorem yakın kapalı kümelerin nokta kompakt, $\bar{u}(a)$.s.f.sürekli küme değerli dönüşümler altındaki görüntüsünün v_θ -kompakt olduğunu verecektir.

3.2.11. Teorem: $F : (X, \tau) \rightsquigarrow (Y, v)$ nokta kompakt ve $\bar{u}(a)$.s.f.sürekli küme değerli dönüşüm olsun. A X te yakın kapalı bir alt küme ise $F(A)$ Y de v_θ -kompakt tır.

Kanıt: $A \subseteq X$ yakın kapalı ve Σ , $F(A)$ nın v_θ -açık örtüsü olsun. Bu durumda $a \in A$ için $F(a) \subseteq \cup \Sigma$ olur. $v_\theta \subseteq v$ ve $F(a)$ kompakt olduğundan, $F(a) \subseteq \cup \Sigma_{n(a)}$ olacak şekilde Σ nin sonlu bir $\Sigma_{n(a)}$ alt ailesi vardır. $\cup \Sigma_{n(a)} = V_a$ olsun. V_a Y de θ -açık küme ve F $\bar{u}(a)$.s.f.sürekli olduğundan $\text{int}(clU_a) \subseteq F^+(V_a)$ koşulunu sağlayan a noktasının bir U_a açık komşuluğu vardır. $\Psi = \{U_a : a \in A\}$ ailesi A nın bir açık örtüsüdür. A X te yakın kapalı olduğundan $A \subseteq \cup \{\text{int}(clU_{a_i}) : a_i \in A, i = 1, 2, \dots, k\}$ olacak şekilde $a_1, a_2, \dots, a_k \in A$ vardır. Buradan $F(A) \subseteq F(\cup \{\text{int}(clU_{a_i}) : a_i \in A, i = 1, 2, \dots, k\}) \subseteq \cup \{V_{a_i} : a_i \in A, i = 1, 2, \dots, k\} \subseteq \cup \{\cup \Sigma_{n(a_i)} : a_i \in A, i = 1, 2, \dots, k\}$ elde edilir. Böylece $F(A)$ Y de v_θ -kompakt tır.

3.2.12. Sonuç: $F : (X, \tau) \rightsquigarrow (Y, v)$ nokta kompakt ve $\bar{u}(a)$.s.f.sürekli küme değerli dönüşüm olsun. X yakın kompakt uzay ise Y v_θ -kompakt tır.

3.3 Küme Değerli Dönüşümler İçin Kuvvetli Faintly Süreklilik

Bu kesimde, Yalvaç (1990) tarafından tek değerli dönüşümler için tanımlanan kuvvetli faintly süreklilik küme değerli dönüşümlere genişletilecektir. Bu tür sürekli küme değerli dönüşümlerin karakterizasyonları verilerek bazı temel özellikleri incelenecektir. Ayrıca bir küme değerli dönüşümün üstten kuvvetli faintly sürekliliği yardımıyla tanım uzayının bazı özelliklerinin verilebileceği gösterilecektir.

3.3.1.Tanım: $F : X \rightsquigarrow Y$ küme değerli dönüşüm ve $x \in X$ olsun.

a) $x \in F^+(V)$ olan Y deki her V θ -açık kümesi için $clU \subseteq F^+(V)$ (yani, $\forall z \in clU$ için $F(z) \subseteq V$) koşulunu sağlayan x noktasının bir U açık komşuluğu var ise F ye x noktasında üstten kuvvetli faintly sürekli (upper strongly faintly continuous) küme değerli dönüşüm denir. Bunu kısaca, ü.k.f.sürekli olarak göstereceğiz.

b) $x \in F^-(V)$ olan Y deki her V θ -açık kümesi için $clU \subseteq F^-(V)$ (yani, $\forall z \in clU$ için $F(z) \cap V \neq \emptyset$) koşulunu sağlayan x noktasının bir U açık komşuluğu var ise F ye x noktasında alttan kuvvetli faintly sürekli (lower strongly faintly continuous) küme değerli dönüşüm denir. Bunu kısaca, a.k.f.sürekli olarak göstereceğiz.

c) F küme değerli dönüşümü $\forall x \in X$ noktasında ü(a).k.f.sürekli ise F ye X üzerinde ü(a).k.f.sürekli dir denir.

Bir küme değerli dönüşümün ü(a).s.f.sürekliliği ile ü(a).k.f.sürekliliği arasındaki ilişki tanımlar yardımıyla aşağıdaki sonuç ile verilmiştir.

3.3.2.Sonuç: $F : X \rightsquigarrow Y$ küme değerli dönüşümü ü(a).k.f.sürekli ise F ü(a).s.f.sürekli dir.

Şimdi ü(a).s.f.sürekli olup ü(a).k.f.sürekli olmayan küme değerli dönüşümlere örnekler verelim.

3.3.3.Örnek: $X = \{0, 1, 2\}$ kümesi üzerindeki topoloji $\tau = \{\emptyset, X, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$ ve $Y = \{a, b, c, d, e\}$ kümesi üzerindeki topoloji $\nu = \{\emptyset, Y, \{a, b\}, \{c, d\},$

$\{c, d, e\}, \{a, b, c, d\}$ olsun. $F : X \rightsquigarrow Y$ küme değerli dönüşümü $F(0) = \{a, b, c\}$, $F(1) = \{d\}$, $F(2) = \{b, c, e\}$ olarak tanımlansın. Bu durumda F ü.s.f.sürekli fakat $1 \in X$ noktasında ü.k.f.sürekli değildir.

3.3.4.Örnek: $X = \{0, 1, 2\}$ kümesi üzerindeki topoloji $\tau = \{\emptyset, X, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$ ve $Y = \{a, b, c, d, e\}$ kümesi üzerindeki topoloji $\nu = \{\emptyset, Y, \{a, b\}, \{c, d\}, \{c, d, e\}, \{a, b, c, d\}\}$ olsun. $F : X \rightsquigarrow Y$ küme değerli dönüşümü $F(0) = \{a, b, c\}$, $F(1) = \{d\}$, $F(2) = \{c, d\}$ olarak tanımlansın. Bu durumda F a.s.f.sürekli fakat $0 \in X$ noktasında a.k.f.sürekli değildir.

Aşağıda bir küme değerli dönüşümün üstten (alttan) kuvvetli faintly sürekliliği için bazı karakterizasyonlar verilecektir.

3.3.5.Teorem: $F : (X, \tau) \rightsquigarrow (Y, \nu)$ küme değerli dönüşümü için aşağıdaki ifadeler denktir.

- 1-) F ü.k.f.sürekli,dir,
- 2-) $F : (X, \tau_\theta) \rightsquigarrow (Y, \nu_\theta)$ küme değerli dönüşümü ü.y.sürekli,dir,
- 3-) $F : (X, \tau) \rightsquigarrow (Y, \nu_\theta)$ küme değerli dönüşümü ü.k. θ -sürekli,dir,
- 4-) Y deki her bir V θ -açık kümesi için $F^+(V) \subseteq X$, θ -açıktır,
- 5-) Y deki her bir K θ -kapalı kümesi için $F^-(K) \subseteq X$, θ -kapalıdır,
- 6-) F ye karşı gelen $f : (X, \tau) \longrightarrow (2^Y, (\nu_\theta)_V^+)$ tek değerli dönüşümü kuvvetli θ -sürekli,dir,

7-) F ye karşı gelen $f : (X, \tau_\theta) \longrightarrow (2^Y, (\nu_\theta)_V^+)$ tek değerli dönüşümü sürekli,dir,

8-) Her bir $x \in X$, x e r -yakınsak olan her $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ ağı ve $F(x) \subseteq V$ olan her bir V θ -açık kümesi için, $\alpha \geq \alpha_0$ iken $F(x_\alpha) \subseteq V$ olacak şekilde en az bir $\alpha_0 \in I$ vardır.

Kanıt:(1) $\Rightarrow$ (2). Y deki her V ν_θ -açık kümesi için $F^+(V)$ kümesinin X te τ_θ -açık küme olduğunu gösterirsek kanıt biter. $x \in X$ ve $V \in \nu_\theta$ için $x \in F^+(V)$ olsun. V, Y de θ -açık ve F ü.k.f.sürekli olduğundan $clU \subseteq F^+(V)$ olacak şekilde x noktasının bir U açık komşuluğu vardır. Buradan $F^+(V) \in \tau_\theta$ olur. Bu F nin ü.y.sürekli olduğunu verir.

(2) $\Leftrightarrow$ (3). $\bar{u}.k.\theta$ -sürekli $\bar{u}$ lik tanımından açıktır.

(2) $\Rightarrow$ (4). $\bar{u}.y.$ sürekli $\bar{u}$ lik tanımından açıktır.

(4) $\Rightarrow$ (5). $K \subseteq Y$ bir θ -kapalı küme olsun. $Y - K \subseteq Y$ bir θ -açık kümedir ve (4) ten dolayı $F^+(Y - K) \subseteq X$, θ -açık kümedir. Buradan $X - F^+(Y - K) = X - (X - F^-(K)) = F^-(K) \subseteq X$ θ -kapalı küme olur.

(5) $\Rightarrow$ (1). $x \in X$ için $x \in F^+(V)$ olan bir V θ -açık kümesini alalım. $Y - V \subseteq Y$ bir θ -kapalı kümedir ve (5) den dolayı $F^-(Y - V) \subseteq X$ θ -kapalı kümedir. Buradan $X - F^-(Y - V) = F^+(V) \subseteq X$ θ -açık kümedir. Dolayısıyla $x \in F^+(V)$ için $x \in clU \subseteq F^+(V)$ olacak şekilde x noktasının bir açık U komşuluğu vardır. Bu ise F nin $\bar{u}.k.f.$ sürekli olduğunu verir.

(1) $\Rightarrow$ (6). F x noktasında $\bar{u}.k.f.$ sürekli ve $f(x) \in V^+ \in (v_\theta)_V^+$ olsun. Bu durumda $F(x) = f(x) \subseteq V \in v_\theta$ dır ve F $\bar{u}.k.f.$ sürekli olduğundan $z \in clU$ iken $F(z) \subseteq V$ olacak biçimde x noktasının bir U açık komşuluğu vardır. Buradan $f(clU) = F(clU) \subseteq V^+$ elde edilir. Bu f nin kuvvetli θ -sürekli $\bar{u}$ liğini verir.

(6) $\Rightarrow$ (1). f x noktasında kuvvetli θ -sürekli olsun ve $x \in F^+(V)$ olan V θ -açık kümesini alalım. Bu durumda $f(x) = F(x) \subseteq V^+ \in (v_\theta)_V^+$ dır ve f kuvvetli θ -sürekli olduğundan, $F(clU) = f(clU) \subseteq V^+$ olacak biçimde x noktasının bir U açık komşuluğu vardır. Böylece $z \in clU$ iken $F(z) \subseteq V$ olacak biçimde x noktasının bir U açık komşuluğu elde edilmiş olur. Bu ise F nin $\bar{u}.k.f.$ sürekli $\bar{u}$ liğini verir.

(6) $\Leftrightarrow$ (7). (Long and Herrington, 1981)

(4) $\Rightarrow$ (8). $x \in X$ için $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ ağı x noktasına r -yakınsak bir ağ olsun. $F(x) \subseteq V$ olan V θ -açık kümesini alalım. Hipotezden $F^+(V)$, X te θ -açık bir kümedir ve $x \in F^+(V)$ için $x \in clU \subseteq F^+(V)$ olacak şekilde x noktasının bir U açık komşuluğu vardır. $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ ağı x noktasına r -yakınsak olduğundan bu U için, $\alpha \geq \alpha_0$ iken $x_\alpha \in clU$ olacak şekilde en az bir $\alpha_0 \in I$ vardır. Buradan $\alpha \geq \alpha_0$ iken $F(x_\alpha) \subseteq V$ olduğu bulunur.

(8) $\Rightarrow$ (4). Kabul edelim ki (4) doğru olmasın. Yani $x \in X$, $x \in F^+(V)$ olan bir V θ -açık kümesi ve x noktasının her bir U açık komşuluğu için $x \in$

$clU \not\subseteq F^+(V)$ olsun. Bu durumda $x_U \in clU$ ve $x_U \notin F^+(V)$ olacak şekilde bir x_U noktası vardır. $D = \{(x_U, U) : U \in \tau(x), x_U \in clU, x_U \notin F^+(V)\}$ kümesi “ $(x_{U_1}, U_1) \leq (x_U, U) \Leftrightarrow U \subseteq U_1$ ” şeklinde tanımlanan bağıntı ile yönlendirilmiş bir kümedir. $g : D \longrightarrow X$ fonksiyonu bir ağdır ve bu $(x_U)_{(x_U, U) \in D}$ ağı x noktasına r -yakınsaktır. Fakat bütün $(x_U, U) \in D$ ler için $x_U \notin F^+(V)$ dir. Bu ise hipotez ile çelişir. O halde $F^+(V) \subseteq X$ açık θ -küme olmalıdır.

3.3.6. Teorem: $F : (X, \tau) \rightsquigarrow (Y, \nu)$ küme değerli dönüşümlü için aşağıdaki ifadeler denktir.

- 1-) F a.k.f.sürekli,dir,
- 2-) $F : (X, \tau_\theta) \rightsquigarrow (Y, \nu_\theta)$ küme değerli dönüşümlü a.y.sürekli,dir,
- 3-) $F : (X, \tau) \rightsquigarrow (Y, \nu_\theta)$ küme değerli dönüşümlü a.k. θ -sürekli,dir,
- 4-) Y deki her bir V θ -açık kümesi için $F^-(V) \subseteq X$, θ -açıktır,
- 5-) Y deki her bir K θ -kapalı kümesi için $F^+(K) \subseteq X$, θ -kapalıdır,
- 6-) F ye karşı gelen $f : (X, \tau) \longrightarrow (2^Y, (\nu_\theta)_V^-)$ tek değerli dönüşümlü kuvvetli θ -sürekli,dir,
- 7-) F ye karşı gelen $f : (X, \tau_\theta) \longrightarrow (2^Y, (\nu_\theta)_V^-)$ tek değerli dönüşümlü sürekli,dir,
- 8-) Her bir $x \in X$, x e r -yakınsak olan her $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ ve $F(x) \cap V \neq \emptyset$ olan her bir V θ -açık kümesi için, $\alpha \geq \alpha_0$ iken $F(x_\alpha) \cap V \neq \emptyset$ olacak şekilde en az bir $\alpha_0 \in I$ vardır,
- 9-) Her bir $y \in F(x)$ ve x noktasına r -yakınsak olan her $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ ağı için $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ ağının bir $(z_\beta)_{\beta \in \xi}$ alt ağı vardır ve $y_\beta \in F(z_\beta)$ olan $(y_\beta)_{(\beta, V) \in \xi}$ ağı y noktasına θ -yakınsaktır.

Kanıt: (1) $\Rightarrow$ (2). Y deki her V ν_θ -açık kümesi için $F^-(V)$ kümesinin X te τ_θ -açık küme olduğunu gösterirsek kanıt biter. $x \in X$ ve $V \in \nu_\theta$ için $x \in F^-(V)$ olsun. V, Y de θ -açık ve F ü.k.f.sürekli olduğundan $clU \subseteq F^-(V)$ olacak şekilde x noktasının bir U açık komşuluğu vardır. Buradan $F^-(V) \in \tau_\theta$ olur. Bu ise F nin a.y.sürekli olduğunu verir.

(2) $\Leftrightarrow$ (3). a.k. θ -süreklilik tanımından açıktır.

(2) $\Rightarrow$ (4). a.y.sürekliplik tanımından açıktır.

(4) $\Rightarrow$ (5). $K \subseteq Y$ bir θ -kapalı küme olsun. $Y - K \subseteq Y$ bir θ -açık kümedir ve (4) ten dolayı $F^-(Y - K) \subseteq X$ θ -açık kümedir. Buradan $X - F^-(Y - K) = X - (X - F^+(K)) = F^+(K) \subseteq X$ θ -kapalı küme olur.

(5) $\Rightarrow$ (1). $x \in X$ için $x \in F^-(V)$ olan bir V θ -açık kümesini alalım. $Y - V \subseteq Y$ bir θ -kapalı kümedir ve (5) ten dolayı $F^+(Y - V) \subseteq X$ θ -kapalı kümedir. Buradan, $X - F^+(Y - V) = F^-(V) \subseteq X$, θ -açık kümedir. Dolayısıyla $x \in F^-(V)$ için $x \in clU \subseteq F^-(V)$ olacak şekilde x noktasının bir açık U komşuluğu vardır. Bu F nin a.k.f.sürekli olduğunu verir.

(1) $\Rightarrow$ (6). F x noktasında a.k.f.sürekli ve $f(x) \in \cap_{i=1}^n V_i^- \in (v_\theta)_V^-$ olsun. Bu durumda $i = 1, 2, \dots, n$ için $f(x) \in V_i^-$ olduğundan $F(x) \cap V_i \neq \emptyset$ tür ve $V_i \in v_\theta$ dir. F a.k.f.sürekli olduğundan $i = 1, 2, \dots, n$ için $z \in clU_i$ iken $F(z) \cap V_i \neq \emptyset$ olacak biçimde x noktasının bir U_i açık komşuluğu vardır. Buradan $U = \cap_{i=1}^n U_i$ denirse, U , x noktasının bir açık komşuluğudur ve $z \in clU$ iken her $i = 1, 2, \dots, n$ için $F(z) \cap V_i \neq \emptyset$ olur. Dolayısıyla $z \in clU$ iken $f(z) \in \cap_{i=1}^n V_i^-$ elde edilir. Böylece $f(clU) \subseteq \cap_{i=1}^n V_i^-$ bulunur. Bu f nin kuvvetli θ -sürekliğini verir.

(6) $\Rightarrow$ (1). f x noktasında kuvvetli θ -sürekli olsun ve $x \in F^-(V)$ olan V θ -açık kümesini alalım. Bu durumda $f(x) = F(x) \in V^- \in (v_\theta)_V^-$ dir ve f kuvvetli θ -sürekli olduğu için $F(clU) = f(clU) \subseteq V^-$ olacak biçimde x noktasının bir açık U komşuluğu vardır. Böylece $z \in clU$ iken $F(z) \cap V \neq \emptyset$ olacak biçimde x noktasının bir açık U komşuluğu elde edilmiş olur. Bu ise F nin a.k.f.sürekliğini verir.

(6) $\Leftrightarrow$ (7). (Long and Herrington, 1981)

(4) $\Rightarrow$ (8). $x \in X$ için $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ ağı x noktasına r -yakınsak bir ağ olsun. $F(x) \cap V \neq \emptyset$ olan V θ -açık kümesini alalım. Hipotezden $F^-(V)$, X te θ -açık bir kümedir ve $x \in F^-(V)$ için $x \in clU \subseteq F^-(V)$ olacak şekilde x noktasının bir açık U komşuluğu vardır. $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ ağı x noktasına r -yakınsak olduğundan bu U için $\alpha \geq \alpha_0$ iken $x_\alpha \in clU$ olacak şekilde en az bir $\alpha_0 \in I$

vardır. Buradan $\alpha \geq \alpha_0$ iken $x_\alpha \in F^-(V)$ elde edilir. Bu istenendir.

(8) $\Rightarrow$ (4). Kabul edelim ki (4) doğru olmasın. Yani $x \in X$, $x \in F^-(V)$ olan bir V θ -açık kümesi ve x noktasının her bir U açık komşuluğu için $x \in clU \not\subseteq F^-(V)$ olsun. Bu durumda $x_U \in clU$ ve $x_U \notin F^-(V)$ olacak şekilde bir x_U noktası vardır. $D = \{(x_U, U) : U \in \tau(x), x_U \in clU, x_U \notin F^-(V)\}$ kümesi " $(x_U, U_1) \leq (x_U, U) \Leftrightarrow U \subseteq U_1$ " şeklinde tanımlanan bağıntı ile yönlendirilmiş bir kümedir. $g : D \longrightarrow X$ fonksiyonu bir ağdır ve bu $(x_U)_{(x_U, U) \in D}$ ağı x noktasına r -yakınsaktır. Fakat bütün $(x_U, U) \in D$ ler için $x_U \notin F^-(V)$ dir. Bu ise hipotez ile çelişir. O halde $F^-(V) \subseteq X$, θ -açık küme olmalıdır.

(1) $\Rightarrow$ (9). Kabul edelim ki F , x noktasında a.k.f.sürekli olsun. x noktasına r -yakınsayan bir $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ ağını alalım. $y \in F(x)$ ve V , y noktasını bulunduran bir θ -açık küme olsun. F , x noktasında a.k.f.sürekli olduğundan, $clU \subseteq F^-(V)$ olacak şekilde x noktasının bir açık U komşuluğu vardır. $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ ağı x noktasına r -yakınsak olduğundan bu U için, $\alpha \geq \alpha_0$ iken $x_\alpha \in clU$ olacak şekilde en az bir $\alpha_0 \in I$ vardır. Buradan $\alpha \geq \alpha_0$ iken $x_\alpha \in F^-(V)$ olur. $y \in V$ olan her V θ -açık kümesi için $I_V = \{\alpha_0 \in I : \alpha \geq \alpha_0 \Rightarrow x_\alpha \in F^-(V)\}$ ve $\xi = \{(\alpha, V) : \alpha \in I_V, y \in V \text{ ve } V \theta - \text{açık küme}\}$ kümelerini tanımlayalım. " $(\alpha, V) \geq (\beta, V) \Leftrightarrow V \subseteq V$ ve $\alpha \geq \beta$ " şeklinde tanımlanan " $\geq$ " bağıntısı ξ üzerinde bir sıralama bağıntısıdır. $\varphi : \xi \longrightarrow I$, $\varphi((\beta, V)) = \beta$ olarak tanımlanan φ artandır ve I üzerinde kofinaldir. Bu nedenle φ , $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ ağının bir alt ağıdır, bu alt ağı $(z_\beta)_{(\beta, V) \in \xi}$ ile gösterelim. Diğer taraftan herhangi bir $(\beta, V) \in \xi$ için $\beta \geq \beta_0$ olduğunda $x_\beta \in F^-(V)$ dir. Buradan $F(z_\beta) \cap V = F(x_\beta) \cap V \neq \emptyset$ olur. $y_\beta \in F(z_\beta) \cap V \neq \emptyset$ olan y_β lar için $(y_\beta)_{(\beta, V) \in \xi}$ ağı y noktasına θ -yakınsaktır. Bunu görmek için $y \in V_0$ olan V_0 θ -açık kümesini alalım. V_0 θ -açık olduğundan $\varphi((\beta_0, V_0)) = \beta_0$ olan en az bir $\beta_0 \in I$ vardır öyleki $y_{\beta_0} \in V$ dir. $(\beta, V) \geq (\beta_0, V_0)$ ise $\beta \geq \beta_0$ ve $V \subseteq V_0$ dir. Buradan $y_\beta \in F(z_\beta) \cap V = F(x_\beta) \cap V \subseteq F(x_\beta) \cap V_0$ dir. Bu yüzden $(\beta \geq \beta_0 \text{ iken})$ $y_\beta \in V_0$ olur. Böylece $(y_\beta)_{(\beta, V) \in \xi}$ ağı y noktasına θ -yakınsak olur.

(9) $\Rightarrow$ (1). Kabul edelim ki (1) doğru olmasın. Yani, $x \in X$, $x \in F^-(V)$

olan bir V θ -açık kümesi ve x noktasının her bir U açık komşuluğu için $x \in clU \not\subseteq F^-(V)$ olsun. Bu durumda $x_U \in clU$ ve $x_U \notin F^-(V)$ olacak şekilde bir x_U noktası vardır. Açıktır ki $\tau(x)$, x noktasının kapsama bağıntısı ile yönlendirilmiş komşuluklar sistemi olmak üzere bu $(x_U)_{U \in \tau(x)}$ ağı x noktasına r -yakınsaktır. $y \in F(x) \cap V$ olsun. Hipotezden $(x_U)_{U \in \tau(x)}$ ağının bir $(z_w)_{w \in W}$ alt ağı vardır ve $y_w \in F(z_w)$ olan $(y_w)_{w \in W}$ ağı y noktasına θ -yakınsaktır. Bu yüzden $w \geq w_0$ iken $y_w \in V$ olacak şekilde en az bir $w_0 \in W$ vardır. Diğer taraftan $(z_w)_{w \in W}$ ağı $(x_U)_{U \in \tau(x)}$ ağının bir alt ağı olduğundan $z_w = x_{h(w)}$ olacak şekilde bir $h : W \rightarrow \tau(x)$ fonksiyonu vardır ve her $U \in \tau(x)$ için $h(w_0) \geq U$ olan en az bir $w_0 \in W$ vardır. Eğer $w \geq w_0$ ise $h(w) \geq h(w_0) \geq U$ olur. $w_0 \in W$ yi $w_0 \geq w_0$ ve $w_0 \geq w_0$ olarak alırsak, $w \geq w_0$ için $y_w \in V$ olur. $(x_U)_{U \in \tau(x)}$ ağının tanımından dolayı $F(z_w) \cap V = F(x_{h(w)}) \cap V = \emptyset$ olur ki bunun anlamı $y_w \notin V$ dir. Bu bir çelişkidir. Bu yüzden F a.k.f.sürekli olmalıdır.

Aşağıdaki teorem bir küme değerli dönüşümün grafik dönüşümünün $\bar{u}(a).k.f.$ sürekli oluşunun küme değerli dönüşümün kendisinin $\bar{u}(a).k.f.$ sürekliliğini gerektireceğini verecektir.

3.3.7. Teorem: $F : X \rightsquigarrow Y$ bir küme değerli dönüşüm olsun. $G_F : X \rightsquigarrow X \times Y$ $\bar{u}(a).k.f.$ sürekli ise $F : X \rightsquigarrow Y$ $\bar{u}(a).k.f.$ sürekli dir.

G_F $\bar{u}.k.f.$ sürekli olsun. Herhangi bir $x \in X$ için $x \in F^+(V)$ olan V , θ -açık kümesini alalım. Bu durumda $G_F(x) \subseteq X \times V$ dir ve $X \times V$, $X \times Y$ uzayında bir θ -açık kümedir. G_F $\bar{u}.k.f.$ sürekli olduğundan, $G_F(clU) \subseteq X \times V$ olacak şekilde x noktasının bir U açık komşuluğu vardır. Buradan, $clU \subseteq G_F^+(X \times V) = F^+(V)$ elde edilir. Bu F nin $\bar{u}.k.f.$ sürekli olduğunu verir.

G_F a.k.f.sürekli olsun. Herhangi bir $x \in X$ için $x \in F^-(V)$ olan V , θ -açık kümesini alalım. Bu durumda $X \times V$, $X \times Y$ uzayında bir θ -açık kümedir ve $G_F(x) \cap (X \times V) = (\{x\} \times F(x)) \cap (X \times V) = \{x\} \times (F(x) \cap V) \neq \emptyset$ olur. G_F a.k.f.sürekli olduğundan $z \in clU$ iken $G_F(z) \cap (X \times V) \neq \emptyset$ olacak şekilde x noktasının bir U açık komşuluğu vardır. Böylece $clU \subseteq G_F^-(X \times V) = F^-(V)$

bulunur. Bu F nin a.k.f.sürekli olduğunu verir.

$\bar{u}(a)$.k.f.sürekli küme değerli dönüşümlerin bileşkelerinin de $\bar{u}(a)$.k.f.sürekli olduğu aşağıdaki teoremden verilmiştir.

3.3.8.Teorem: $F : X \rightsquigarrow Y, G : Y \rightsquigarrow Z$ $\bar{u}(a)$.k.f.sürekli iki küme değerli dönüşüm ise $G \circ F : X \rightsquigarrow Z$ $\bar{u}(a)$.k.f.sürekli küme değerli dönüşümdür.

Kanıt: $K \subseteq Z$ bir θ -kapalı küme olsun. G $\bar{u}$.k.f.sürekli olduğundan, $G^-(K) \subseteq Y$ bir θ -kapalı kümedir. F $\bar{u}$.k.f.sürekli olduğundan $F^-(G^-(K)) \subseteq X$ bir θ -kapalı küme olur. $F^-(G^-(K)) = (G \circ F)^-(K)$ olduğundan $G \circ F$ $\bar{u}$.k.f.sürekli olur.

Benzer kanıt a.k.f.sürekli için de yapılabilir.

(Y, ν) topolojik uzayı regüler bir uzay olarak alındığında $\bar{u}$.k.f.sürekli, $\bar{u}$.k. θ -sürekli ile çıkaracağından, aşağıdaki sonuçların kanıtları (Küçük, 1994) te verilen önermelerin kanıtlarına benzer biçimde verilebilir. Önce küme değerli dönüşümler için kullanılan bire-birlik tanımını verelim.

3.3.9.Tanım: $F : X \rightsquigarrow Y$ bir küme değerli dönüşüm olsun. Her $x_1, x_2 \in X$ için $x_1 \neq x_2$ iken $F(x_1) \cap F(x_2) = \emptyset$ oluyor ise, F ye bire-bir küme değerli dönüşüm denir.

3.3.10.Sonuç: $F : X \longrightarrow (Y, \nu)$ bire-bir, nokta kompakt ve $\bar{u}$.k.f.sürekli bir küme değerli dönüşüm olsun. (Y, ν) T_3 -uzay ise X Urysohn dur.

3.3.11.Sonuç: $F : X \longrightarrow (Y, \nu)$ bire-bir, nokta kapalı ve $\bar{u}$.k.f.sürekli bir küme değerli dönüşüm olsun. (Y, ν) regüler uzay ise X Hausdorff tur.

3.3.12.Sonuç: $F : X \rightsquigarrow Y$ $\bar{u}$.k.f.sürekli bir küme değerli dönüşüm ve Y regüler uzay olsun. Eğer G_F $\bar{u}$.k.f.sürekli ise X regüler uzaydır.

Aşağıdaki teorem küme değerli dönüşümlerin $\bar{u}$.k.f.sürekliliği ile grafik kümesinin ilişkisini verecektir.

3.3.13.Teorem: $F : X \longrightarrow (Y, \nu)$ nokta kapalı ve $\bar{u}$.k.f.sürekli küme değerli dönüşüm olsun. Y regüler uzay ise F nin grafiği $G(F)$ X e göre θ -kapalıdır.

Kanıt: $(x, y) \notin G(F)$ olsun. Bu durumda $y \notin F(x)$ tir ve Y regüler uzay

olduğundan $y \in V_1$ ve $F(x) \subseteq V_2$ olacak şekilde V_1, V_2 ayrık açık kümeleri vardır. Yine uzay regüler uzay olduğundan, V_2 aynı zamanda bir θ -açık kümedir ve F ü.k.f.sürekli olduğundan $F(clU) \subseteq V_2$ olacak şekilde x in bir U açık komşuluğu vardır. Bu durumda $(x, y) \in clU \times V_1 \subseteq (X \times Y) - G(F)$ elde edilir. Bu $G(F)$ nin X e göre θ -kapalı küme olduğunu verir.

Aşağıdaki teorem quasi H-kapalı kümelerin nokta kompakt, ü.k.f.sürekli küme değerli dönüşümler altındaki görüntüsünün v_θ -kompakt olduğunu verecektir.

3.3.14.Teorem: $F : (X, \tau) \rightsquigarrow (Y, \nu)$ nokta kompakt ve ü.k.f.sürekli küme değerli dönüşüm olsun. A X te quasi H-kapalı bir alt küme ise $F(A)$ Y de v_θ -kompakt tır.

Kanıt: $A \subseteq X$ quasi H-kapalı ve $\Sigma, F(A)$ nın v_θ -açık örtüsü olsun. Bu durumda $a \in A$ için $F(a) \subseteq \cup \Sigma$ olur. $v_\theta \subseteq \nu$ ve $F(a)$ kompakt olduğundan, $F(a) \subseteq \cup \Sigma_{n(a)}$ olacak şekilde Σ nin sonlu bir $\Sigma_{n(a)}$ alt ailesi vardır. $\cup \Sigma_{n(a)} = V_a$ olsun. V_a Y de θ -açık küme ve F ü.k.f.sürekli olduğundan, $clU_a \subseteq F^+(V_a)$ koşulunu sağlayan a noktasının bir U_a açık komşuluğu vardır. $\Psi = \{U_a : a \in A\}$ ailesi A nın bir açık örtüsüdür. A X te quasi H-kapalı olduğundan $A \subseteq \cup \{clU_{a_i} : a_i \in A, i = 1, 2, \dots, k\}$ olacak şekilde $a_1, a_2, \dots, a_k \in A$ vardır. Buradan $F(A) \subseteq F(\cup \{clU_{a_i} : a_i \in A, i = 1, 2, \dots, k\}) \subseteq \cup \{V_{a_i} : a_i \in A, i = 1, 2, \dots, k\} \subseteq \cup \{\cup \Sigma_{n(a_i)} : a_i \in A, i = 1, 2, \dots, k\}$ elde edilir. Böylece $F(A)$ Y de v_θ -kompakt tır.

3.3.15.Sonuç: $F : (X, \tau) \rightsquigarrow (Y, \nu)$ nokta kompakt ve ü.k.f.sürekli küme değerli dönüşüm olsun. X quasi H-kapalı uzay ise Y v_θ -kompakt tır.

4.BÖLÜM

KÜME DEĞERLİ DÖNÜŞÜMLERİN SÜREKLİLİKLERİNİN GÖRÜNTÜ UZAYI ÜZERİNDEKİ TOPOLOJİLER İLE İLİŞKİLENDİRİLMESİ

Küme değerli dönüşümlerin süreklilik tiplerinin tek değerli dönüşümlerin süreklilik tiplerinin genelleştirilmesinden elde edildiği ve bu süreklilik tiplerinin karakterizasyonlarının tek değerli dönüşümler için bilinen karakterizasyonlara paralellik gösterdiği bilinmektedir. Bu düşünce ile bu bölümde yapılan çalışmalarda, küme değerli dönüşüme bir tek değerli dönüşüm karşılık getirilerek, görüntü uzayı yeniden topolojilendirildiğinde, yapılan süreklilik tanımlamalarının daha önceki genelleştirmelerden ((Popa, 1982), (Özer, 1986), (Küçük, 1994), v.s.) farklı olduğu gözlenmiştir. Bu yeni tanımlamalar küme değerli dönüşümler için yeni bir takım süreklilik tiplerinin verilmesine neden olmuştur.

4.1.Küme Değerli Dönüşümlerin Bazı Sürekliliklerinin Karakterizasyonları

$f : (X, \tau) \rightarrow (2^Y, v_V^+)$ tek değerli dönüşümünün δ -sürekliliğinin $f : (X, \tau_s) \rightarrow (2^Y, (v_V)_s^+)$ tek değerli dönüşümünün sürekliliğine denk olduğu (Reilly and Vamanamurthy, 1983) den bilinmektedir. Her $F : X \rightsquigarrow Y$ küme değerli dönüşümüne bir $f : X \rightarrow 2^Y$ tek değerli dönüşümü gibi bakılabileceğinden, $F : (X, \tau) \rightsquigarrow (Y, v)$ küme değerli dönüşümünün üstten δ -sürekliliğinin $f : (X, \tau_s) \rightarrow (2^Y, (v_V)_s^+)$ tek değerli dönüşümünün sürekliliği ile ifade edilebileceği düşünülürken bunun gerçekleşmediği, ancak $f : (X, \tau_s) \rightarrow (2^Y, (v_s)_V^+)$ tek

değerli dönüşümünün sürekliliğine denk olduğu gözlenmiştir. Bu gözlemin bir sonucu olarak, $f : (X, \tau_s) \rightarrow (2^Y, (v_V)_s^+)$ tek değerli dönüşümünün sürekliliği karşı gelen $F : (X, \tau) \rightsquigarrow (Y, v)$ küme değerli dönüşümünün üstten Vietoris δ -sürekliliği olarak tanımlanmış ve bir F küme değerli dönüşümünün üstten δ -sürekliliği ikinci bölümde çalışılmış olan topolojiler yardımıyla karakterize edilmiştir.

4.1.1.Tanım: $F : (X, \tau) \rightsquigarrow (Y, v)$ küme değerli dönüşüm ve $x \in X$ olsun. $f : (X, \tau_s) \rightarrow (2^Y, (v_V)_s^+)$ tek değerli dönüşümü x noktasında sürekli ise F ye x noktasında üstten Vietoris δ -sürekli denir. Bunu kısaca $\text{ü.V.}\delta$ -sürekli olarak göstereceğiz .

Aşağıdaki iki teorem bir F küme değerli dönüşümünün $\text{ü(a).}\delta$ -sürekliliğinin F ye karşı gelen f tek değerli dönüşümünün tanım ve değer uzaylarının yeniden topolojilendirilmesinden sonra, bu dönüşümün sürekliliği ve süper sürekliliği cinsinden ifade edilebileceğini gösterir.

4.1.2.Teorem: $F : (X, \tau) \rightsquigarrow (Y, v)$ küme değerli dönüşümü için aşağıdaki ifadeler denktir.

- 1-) F $\text{ü.}\delta$ -sürekli,dir,
- 2-) F ye karşı gelen $f : (X, \tau_s) \rightarrow (2^Y, (v_s)_V^+)$ tek değerli dönüşümü sürekli,dir,
- 3-) F ye karşı gelen $f : (X, \tau) \rightarrow (2^Y, (v_s)_V^+)$ tek değerli dönüşümü süper sürekli,dir.

Kanıt:(1) $\Rightarrow$ (2). F x noktasında $\text{ü.}\delta$ -sürekli ve $f(x) \in V^+ \in (v_s)_V^+$ olsun. Bu durumda $F(x) = f(x) \subseteq V \in v_s \subseteq v$ dir. F $\text{ü.}\delta$ -sürekli olduğundan $z \in \text{int}(clU)$ iken $F(z) \subseteq \text{int}(clV) = V$ olacak biçimde x noktasının bir U açık komşuluğu vardır. Buradan $f(\text{int}(clU)) = F(\text{int}(clU)) \subseteq (\text{int}(clV))^+ = V^+$ elde edilir. $\text{int}(clU) \in \tau_s$ olduğundan f nin sürekliliği bulunmuş olur.

(2) $\Rightarrow$ (1). f x noktasında sürekli olsun ve $x \in F^+(V)$ olan V açık kümesini alalım. Bu durumda $f(x) = F(x) \in V^+ \subseteq (\text{int}(clV))^+ \in (v_s)_V^+$ dir ve f sürekli olduğundan $F(U) = f(U) \subseteq (\text{int}(clV))^+$ olacak biçimde x noktasının bir U

τ_s -açık komşuluğu vardır. Böylece $z \in U = \text{int}(clU)$ iken $F(z) \subseteq \text{int}(clV)$ olacak biçimde x noktasının bir U açık komşuluğu elde edilmiş olur. Bu F nin $\bar{a}.\delta$ -sürekliliğini verir.

(2) $\Leftrightarrow$ (3).(Reilly and Vamanamurthy,1983)

4.1.3.Teorem: $F : (X, \tau) \rightsquigarrow (Y, \nu)$ küme değerli dönüşümü için aşağıdaki ifadeler denktir.

1-) F $\bar{a}.\delta$ -süreklidir,

2-) F ye karşı gelen $f : (X, \tau_s) \rightarrow (2^Y, (\nu_s)_V^-)$ tek değerli dönüşümü sürekli dir,

3-) F ye karşı gelen $f : (X, \tau) \rightarrow (2^Y, (\nu_s)_V^-)$ tek değerli dönüşümü süper süreklidir.

Kanıt:(1) $\Rightarrow$ (2). F x noktasında $\bar{a}.\delta$ -süreklili ve $f(x) \in \cap_{i=1}^n V_i^- \in (\nu_s)_V^-$ olsun. Bu durumda $i = 1, 2, \dots, n$ için $f(x) \in V_i^-$ olduğundan $F(x) \cap V_i \neq \emptyset$ olur ve $V_i \in \nu_s \subseteq \nu$ dir. F $\bar{a}.\delta$ -süreklili olduğu için $i = 1, 2, \dots, n$ ve $z \in \text{int}(clU_i)$ iken $F(z) \cap \text{int}(clV_i) \neq \emptyset$ olacak biçimde x noktasının bir U_i açık komşuluğu vardır. Buradan $U = \cap_{i=1}^n U_i$ denirse U , x noktasının açık komşuluğu olur ve $z \in \text{int}(clU)$ iken her $i = 1, 2, \dots, n$ için $F(z) \cap \text{int}(clV_i) \neq \emptyset$ olur. Dolayısıyla $z \in \text{int}(clU)$ iken $f(z) \in \cap_{i=1}^n V_i^-$ elde edilir. Böylece $f(\text{int}(clU)) \subseteq \cap_{i=1}^n V_i^-$ bulunur. $\text{int}(clU) \in \tau_s$ olduğundan f sürekli dir.

(2) $\Rightarrow$ (1). f x noktasında sürekli olsun ve $x \in F^-(V)$ olan V açık kümesini alalım. Bu durumda $f(x) = F(x) \in V^- \subseteq (\text{int}(clV))^- \in (\nu_s)_V^-$ dir ve f sürekli olduğundan $F(U) = f(U) \subseteq (\text{int}(clV))^-$ olacak biçimde x noktasının bir U τ_s -açık komşuluğu vardır. Böylece $z \in U = \text{int}(clU)$ iken $F(z) \cap \text{int}(clV) \neq \emptyset$ olacak biçimde x noktasının bir açık U komşuluğu elde edilmiş olur. Bu F nin $\bar{a}.\delta$ -sürekliliğini verir.

(2) $\Leftrightarrow$ (3).(Reilly and Vamanamurthy,1983)

Yukarıda küme değerli dönüşümlerin δ -sürekliliği için yapılan incelemeler söz konusu dönüşümlerin hemen hemen kuvvetli θ , hemen hemen, kuvvetli θ , faintly, süper faintly, kuvvetli faintly süreklilikleri için de aşağıda verilmiştir.

4.1.4.Tanım: $F : (X, \tau) \rightsquigarrow (Y, \nu)$ küme değerli dönüşüm ve $x \in X$ olsun. $f : (X, \tau_\theta) \rightarrow (2^Y, (\nu_V)_s^+)$ tek değerli dönüşümü x noktasında sürekli ise F ye x noktasında üstten Vietoris hemen hemen kuvvetli θ -sürekli denir. Bunu kısaca $\tilde{u}.V.h.h.k.\theta$ -sürekli olarak göstereceğiz .

Aşağıdaki iki teorem bir F küme değerli dönüşümünün $\tilde{u}(a).h.h.k.\theta$ -sürekli-liğinin, F ye karşı gelen f tek değerli dönüşümünün tanım ve değer uzayları yeniden topolojilendirilerek, f nin sürekliliği ve kuvvetli θ -sürekliliği cinsin-den ifade edilebileceğini verecektir.

4.1.5.Teorem: $F : (X, \tau) \rightsquigarrow (Y, \nu)$ küme değerli dönüşümü için aşağıdaki ifadeler denktir.

- 1-) F $\tilde{u}.h.h.k.\theta$ -sürekli,dir,
- 2-) F ye karşı gelen $f : (X, \tau_\theta) \rightarrow (2^Y, (\nu_s)_V^+)$ tek değerli dönüşümü sürekli,dir,
- 3-) F ye karşı gelen $f : (X, \tau) \rightarrow (2^Y, (\nu_s)_V^+)$ tek değerli dönüşümü kuvvetli θ -sürekli,dir.

Kanıt:(1) $\Rightarrow$ (3). F x noktasında $\tilde{u}.h.h.k.\theta$ -sürekli ve $f(x) \in V^+ \in (\nu_s)_V^+$ olsun. Bu durumda $F(x) = f(x) \subseteq V \in \nu_s \subseteq \nu$ dir ve F $\tilde{u}.h.h.k.\theta$ -sürekli olduğundan $z \in clU$ iken $F(z) \subseteq int(clV) = V$ olacak biçimde x noktasının bir U açık komşuluğu vardır. Buradan $f(clU) = F(clU) \subseteq (int(clV))^+ = V^+$ yani $f(clU) \subseteq V^+$ olan x noktasının bir U açık komşuluğu elde edilir. Bu f nin kuvvetli θ -sürekliğini verir.

(3) $\Rightarrow$ (1). f x noktasında kuvvetli θ -sürekli olsun ve $x \in F^+(V)$ olan V açık kümesini alalım. Bu durumda $f(x) = F(x) \in V^+ \subseteq (int(clV))^+ \in (\nu_s)_V^+$ dir. f kuvvetli θ -sürekli olduğundan $F(clU) = f(clU) \subseteq (int(clV))^+$ olacak biçimde x noktasının bir U açık komşuluğu vardır. Böylece $z \in clU$ iken $F(z) \subseteq int(clV)$ olacak biçimde x noktasının bir U açık komşuluğu elde edilmiş olur. Bu F nin $\tilde{u}.h.h.k.\theta$ -sürekliğini verir.

(2) $\Leftrightarrow$ (3).(Long and Herrington,1981)

4.1.6.Teorem: $F : (X, \tau) \rightsquigarrow (Y, \nu)$ küme değerli dönüşümü için aşağıdaki

ifadeler denktir.

1-) F a.h.h.k. θ -sürekli,dir,

2-) F ye karşı gelen $f : (X, \tau_\theta) \rightarrow (2^Y, (v_s)_V^-)$ tek değerli dönüşümü sürekli,dir,

3-) F ye karşı gelen $f : (X, \tau) \rightarrow (2^Y, (v_s)_V^-)$ tek değerli dönüşümü kuvvetli θ -sürekli,dir.

Kanıt:(1) $\Rightarrow$ (3). F x noktasında a.h.h.k. θ -sürekli ve $f(x) \in \cap_{i=1}^n V_i^- \in (v_s)_V^-$ olsun. Bu durumda $i = 1, 2, \dots, n$ için $f(x) \in V_i^-$ olduğundan $F(x) \cap V_i \neq \emptyset$ tur ve $V_i \in v_s \subseteq v$ dir. F a.h.h.k. θ -sürekli olduğu için $i = 1, 2, \dots, n$ ve $z \in clU_i$ iken $F(z) \cap int(clV_i) \neq \emptyset$ olacak biçimde x noktasının bir U_i açık komşuluğu vardır. Buradan $U = \cap_{i=1}^n U_i$ denirse U , x noktasının açık komşuluğu olur ve $z \in clU$ iken her $i = 1, 2, \dots, n$ için $F(z) \cap int(clV_i) \neq \emptyset$ olur. Dolayısıyla $z \in clU$ iken $f(z) \in \cap_{i=1}^n V_i^-$ elde edilir. Böylece $f(clU) \subseteq \cap_{i=1}^n V_i^-$ bulunur. Bu f nin kuvvetli θ -sürekliliğini verir.

(3) $\Rightarrow$ (1). f x noktasında kuvvetli θ -sürekli olsun ve $x \in F^-(V)$ olan V açık kümesini alalım. Bu durumda $f(x) = F(x) \in V^- \subseteq (int(clV))^- \in (v_s)_V^-$ dir. f kuvvetli θ -sürekli olduğundan $F(clU) = f(clU) \subseteq (int(clV))^-$ olacak biçimde x noktasının bir U açık komşuluğu vardır. Böylece $z \in clU$ iken $F(z) \cap int(clV) \neq \emptyset$ olacak biçimde x noktasının bir açık U komşuluğu elde edilmiş olur. Bu F nin a.h.h.k. θ -sürekliliğini verir.

(2) $\Leftrightarrow$ (3).(Long and Herrington,1981)

4.1.7.Tanım: $F : (X, \tau) \rightsquigarrow (Y, v)$ küme değerli dönüşüm ve $x \in X$ olsun. $f : (X, \tau) \rightarrow (2^Y, (v_V)_s^+)$ tek değerli dönüşümü x noktasında sürekli ise F ye x noktasında üstten Vietoris hemen hemen sürekli,dir denir. Bunu kısaca ü.V.h.h.sürekli olarak göstereceğiz .

Vereceğimiz iki teorem bir F küme değerli dönüşümünün ü(a).h.h.sürekliliğinin, F ye karşı gelen f tek değerli dönüşümünün değer kümesi üzerindeki topolojiyi $(v_s)_V^+$ $((v_s)_V^-)$ aldığımızda f nin sürekliliğine denk olacağını ifade eder.

4.1.8. Teorem: $F : (X, \tau) \rightsquigarrow (Y, \nu)$ küme değerli dönüşümü için aşağıdaki ifadeler denktir.

1-) F ü.h.h.sürekli,dir,

2-) F ye karşı gelen $f : (X, \tau) \rightarrow (2^Y, (\nu_s)_V^+)$ tek değerli dönüşümü sürekli,dir.

Kanıt: (1) $\Rightarrow$ (2). F x noktasında ü.h.h.sürekli ve $f(x) \in V^+ \in (\nu_s)_V^+$ olsun. Bu durumda $F(x) = f(x) \subseteq V \in \nu_s \subseteq \nu$ dir ve F ü.h.h.sürekli olduğundan $z \in U$ iken $F(z) \subseteq \text{int}(clV) = V$ olacak biçimde x noktasının bir U açık komşuluğu vardır. Buradan $f(U) = F(U) \subseteq (\text{int}(clV))^+ = V^+$ elde edilir. Bu f nin sürekliliğini verir

(2) $\Rightarrow$ (1). f x noktasında sürekli olsun ve $x \in F^+(V)$ olan V açık kümesini alalım. Bu durumda $f(x) = F(x) \in V^+ \subseteq (\text{int}(clV))^+ \in (\nu_s)_V^+$ dir. f sürekli olduğundan $F(U) = f(U) \subseteq (\text{int}(clV))^+$ olacak biçimde x noktasının bir U açık komşuluğu vardır. Böylece $z \in U$ iken $F(z) \subseteq \text{int}(clV)$ olacak biçimde x noktasının bir U açık komşuluğu elde edilmiş olur. Bu F nin ü.h.h.sürekliliğini verir.

4.1.9. Teorem: $F : (X, \tau) \rightsquigarrow (Y, \nu)$ küme değerli dönüşümü için aşağıdaki ifadeler denktir.

1-) F a.h.h.sürekli,dir,

2-) F ye karşı gelen $f : (X, \tau) \rightarrow (2^Y, (\nu_s)_V^-)$ tek değerli dönüşümü sürekli,dir.

Kanıt: (1) $\Rightarrow$ (2). F x noktasında a.h.h.sürekli ve $f(x) \in \cap_{i=1}^n V_i^- \in (\nu_s)_V^-$ olsun. Bu durumda $i = 1, 2, \dots, n$ için $f(x) \in V_i^-$ olduğundan $F(x) \cap V_i \neq \emptyset$ tur ve $V_i \in \nu_s \subseteq \nu$ dir. F a.h.h.sürekli olduğu için $i = 1, 2, \dots, n$ için $z \in U_i$ ve $F(z) \cap V_i \neq \emptyset$ olacak biçimde x noktasının bir U_i açık komşuluğu vardır. Buradan $U = \cap_{i=1}^n U_i$ denirse U , x noktasının açık komşuluğu olur ve $z \in U$ iken her $i = 1, 2, \dots, n$ için $F(z) \cap \text{int}(clV_i) \neq \emptyset$ olur. Dolayısıyla $z \in U$ iken $f(z) \in \cap_{i=1}^n V_i^-$ elde edilir. Böylece $f(U) \subseteq \cap_{i=1}^n V_i^-$ bulunur. Bu f nin sürekliliğini verir.

(2) $\Rightarrow$ (1). f x noktasında sürekli olsun ve $x \in F^-(V)$ olan V açık kümesini alalım. Bu durumda $f(x) = F(x) \in V^- \subseteq (int(clV))^- \in (v_s)_V^-$ dir ve f sürekli olduğundan $F(U) = f(U) \subseteq (int(clV))^-$ olacak biçimde x noktasının bir U açık komşuluğu vardır. Böylece $z \in U$ iken $F(z) \cap int(clV) \neq \emptyset$ olacak biçimde x noktasının bir açık U komşuluğu elde edilmiş olur. Bu F nin a.h.h.sürekliğini verir.

4.1.10.Tanım: $F : (X, \tau) \rightsquigarrow (Y, v)$ küme değerli dönüşüm ve $x \in X$ olsun. $f : (X, \tau_\theta) \rightarrow (2^Y, v_V^+)$ tek değerli dönüşümü x noktasında sürekli ise F ye x noktasında üstten Vietoris kuvvetli θ -sürekli denir. Bunu kısaca ü.V.k. θ -sürekli olarak göstereceğiz .

Aşağıdaki iki teorem bir F küme değerli dönüşümün ün(a).k. θ -sürekliğinin, F ye karşı gelen f tek değerli dönüşümün tanım ve değer kümelerinin yeniden topolojilendirilerek f nin sürekliliği ve kuvvetli θ -sürekliği cinsinden verilebileceğini ifade eder.

4.1.11.Teorem: $F : (X, \tau) \rightsquigarrow (Y, v)$ küme değerli dönüşümü için aşağıdaki ifadeler denktir.

- 1-) F ü.k. θ -sürekli dir,
- 2-) F ye karşı gelen $f : (X, \tau_\theta) \rightarrow (2^Y, v_V^+)$ tek değerli dönüşümü sürekli dir,
- 3-) F ye karşı gelen $f : (X, \tau) \rightarrow (2^Y, v_V^+)$ tek değerli dönüşümü kuvvetli θ -sürekli dir.

Kanıt:(1) $\Rightarrow$ (3). F x noktasında ü.k. θ -sürekli ve $f(x) \in V^+ \in v_V^+$ olsun. Bu durumda $F(x) = f(x) \subseteq V \in v$ dir ve F ü.k. θ -sürekli olduğundan $z \in clU$ iken $F(z) \subseteq V$ olacak biçimde x noktasının bir U açık komşuluğu vardır. Buradan $f(clU) = F(clU) \subseteq V^+$ olan x noktasının bir U açık komşuluğu elde edilir. Bu f nin kuvvetli θ -sürekliğini verir.

(3) $\Rightarrow$ (1). f x noktasında kuvvetli θ -sürekli olsun ve $x \in F^+(V)$ olan V açık kümesini alalım. Bu durumda $f(x) = F(x) \in V^+ \in v_V^+$ dir. f kuvvetli θ -sürekli olduğundan $F(clU) = f(clU) \subseteq V^+$ olacak biçimde x noktasının bir U açık komşuluğu vardır. Böylece $z \in clU$ iken $F(z) \subseteq V$ olacak

biçimde x noktasının bir U açık komşuluğu elde edilmiş olur. Bu F nin $\bar{u}.k.\theta$ -sürekliliğini verir.

(2) $\Leftrightarrow$ (3).(Long and Herrington,1981)

4.1.12.Teorem: $F : (X, \tau) \rightsquigarrow (Y, \nu)$ küme değerli dönüşümü için aşağıdaki ifadeler denktir.

- 1-) F a.k. θ -süreklidir,
- 2-) F ye karşı gelen $f : (X, \tau_0) \rightarrow (2^Y, \nu_V^-)$ tek değerli dönüşümü süreklidir,
- 3-) F ye karşı gelen $f : (X, \tau) \rightarrow (2^Y, \nu_V^-)$ tek değerli dönüşümü kuvvetli θ -süreklidir.

Kanıt:(1) $\Rightarrow$ (3). F x noktasında a.k. θ -süreklili ve $f(x) \in \cap_{i=1}^n V_i^- \in \nu_V^-$ olsun. Bu durumda $i = 1, 2, \dots, n$ için $f(x) \in V_i^-$ olduğundan $F(x) \cap V_i \neq \emptyset$ tur ve $V_i \in \nu$ dir. F a.k. θ -süreklili olduğu için $i = 1, 2, \dots, n$ ve $z \in clU_i$ iken $F(z) \cap V_i \neq \emptyset$ olacak biçimde x noktasının bir U_i açık komşuluğu vardır. Buradan $U = \cap_{i=1}^n U_i$ denirse U , x noktasının açık komşuluğu olur ve $z \in clU$ iken her $i = 1, 2, \dots, n$ için $F(z) \cap V_i \neq \emptyset$ olur. Dolayısıyla $z \in clU$ iken $f(z) \in \cap_{i=1}^n V_i^-$ elde edilir. Böylece $f(clU) \subseteq \cap_{i=1}^n V_i^-$ bulunur. Bu f nin kuvvetli θ -sürekliliğini verir.

(3) $\Rightarrow$ (1). f x noktasında kuvvetli θ -süreklili olsun ve $x \in F^-(V)$ olan V açık kümesini alalım. Bu durumda $f(x) = F(x) \in V^- \in \nu_V^-$ dir ve f kuvvetli θ -süreklili olduğundan $F(clU) = f(clU) \subseteq V^-$ olacak biçimde x noktasının bir U açık komşuluğu vardır. Böylece $z \in clU$ iken $F(z) \cap V \neq \emptyset$ olacak biçimde x noktasının bir açık U komşuluğu elde edilmiş olur. Bu F nin a.k. θ -sürekliliğini verir.

(2) $\Leftrightarrow$ (3).(Long and Herrington,1981)

4.1.13.Tanım: $F : (X, \tau) \rightsquigarrow (Y, \nu)$ küme değerli dönüşüm ve $x \in X$ olsun. $f : (X, \tau) \rightarrow (2^Y, (\nu_V)_\theta^+)$ tek değerli dönüşümü x noktasında sürekli ise F ye x noktasında üstten Vietoris faintly süreklidir denir. Bunu kısaca $\bar{u}.V.f.$ süreklili olarak göstereceğiz .

4.1.14.Tanım: $F : (X, \tau) \rightsquigarrow (Y, \nu)$ küme değerli dönüşüm ve $x \in X$

olsun. $f : (X, \tau_s) \rightarrow (2^Y, (v_V)_\theta^+)$ tek değerli dönüşümü x noktasında sürekli F ye x noktasında üstten Vietoris süper faintly süreklidir denir. Bunu kısaca ü.V.s.f.süreklili olarak göstereceğiz .

4.1.15.Tanım: $F : (X, \tau) \rightsquigarrow (Y, v)$ küme değerli dönüşüm ve $x \in X$ olsun. $f : (X, \tau_\theta) \rightarrow (2^Y, (v_V)_\theta^+)$ tek değerli dönüşümü x noktasında sürekli F ye x noktasında üstten Vietoris kuvvetli faintly süreklidir denir. Bunu kısaca ü.V.k.f.süreklili olarak göstereceğiz .

4.2 Sürekliliklerin Karşılaştırılması

Bu kesimde, küme değerli dönüşümler için birinci kesimde tanımlanan yeni tür sürekliliklerin eskileri ile karşılaştırmaları ikinci bölümdeki topolojiler kullanılarak sonuçlar halinde verilecektir. Bu kesimin sonunda ise bu bölümde bahsedilen bütün süreklilik türleri arasındaki ilişkiler şema ile toplu halde verilecektir.

4.2.1.Sonuç: $F : (X, \tau) \rightsquigarrow (Y, v)$ küme değerli dönüşümü ü.δ-süreklili ise F ü.V.δ-süreklidir.

Kanıt: F ü.δ-süreklili ise 4.1.2.Teorem den karşı gelen $f : (X, \tau_s) \rightarrow (2^Y, (v_s)_V^+)$ tek değerli dönüşümü süreklidir. 2.2.3.Önerme den $(v_V)_s^+ \subseteq (v_s)_V^+$ olduğundan, $f : (X, \tau_s) \rightarrow (2^Y, (v_V)_s^+)$ tek değerli dönüşümü de süreklidir. Bu ise F nin ü.V.δ-sürekliliğidir.

4.2.2.Sonuç: $F : (X, \tau) \rightsquigarrow (Y, v)$ küme değerli dönüşümü ü.V.δ-süreklili ve v topolojisinin $\emptyset$ ve Y den farklı öğeleri Y nin bir ayrışımını oluşturuyor ise F ü.δ-süreklidir.

Kanıt: F ü.V.δ-süreklili ise $f : (X, \tau_s) \rightarrow (2^Y, (v_V)_s^+)$ tek değerli dönüşümü süreklidir. Hipotez kullanılarak 2.2.4.Önerme den, $(v_V)_s^+ = (v_s)_V^+$ olduğundan $f : (X, \tau_s) \rightarrow (2^Y, (v_s)_V^+)$ tek değerli dönüşümü de sürekli olur. Bu ise 4.1.2.Teorem den, F nin ü.δ-sürekliliğini verir.

4.2.3.Sonuç: $F : (X, \tau) \rightsquigarrow (Y, v)$ küme değerli dönüşümü ü.h.h.k.θ-süreklili ise F ü.V.h.h.k.θ-süreklidir.

Kanıt: 4.1.5.Teorem ve 2.2.3.Önerme den 4.2.1.Sonuç gibi elde edilir.

4.2.4.Sonuç: $F : (X, \tau) \rightsquigarrow (Y, \nu)$ küme değerli dönüşümü ü.V.h.h.k. θ —sürekli ve ν topolojisinin $\emptyset$ ve Y den farklı ögeleri Y nin bir ayrışımını oluşturuyor ise F ü.h.h.k. θ —sürekli dir.

Kanıt: 2.2.4.Önerme ve 4.1.5.Teorem den 4.2.2.Sonuç gibi elde edilir.

4.2.5.Sonuç: $F : (X, \tau) \rightsquigarrow (Y, \nu)$ küme değerli dönüşümü ü.h.h.sürekli ise F ü.V.h.h.sürekli dir.

Kanıt: 4.1.8.Teorem ve 2.2.3.Önerme den 4.2.1.Sonuç gibi elde edilir.

4.2.6.Sonuç: $F : (X, \tau) \rightsquigarrow (Y, \nu)$ küme değerli dönüşümü ü.V.h.h.sürekli ve ν topolojisinin $\emptyset$ ve Y den farklı ögeleri Y nin bir ayrışımını oluşturuyor ise F ü.h.h.sürekli dir.

Kanıt: 2.2.4.Önerme ve 4.1.8.Teorem den 4.2.2.Sonuç gibi elde edilir.

Aşağıda verilen sonuç, küme değerli dönüşüme kuvvet kümesine tanımlı olan bir tek değerli dönüşüm karşılık getirildiğinde 4.1.11.Teorem ve tanımlardan elde edilir.

4.2.7.Sonuç: $F : (X, \tau) \rightsquigarrow (Y, \nu)$ küme değerli dönüşümünün ü.k. θ —sürekli olması için gerek ve yeterli koşul F nin ü.V.k. θ —sürekli olmasıdır.

Üçüncü bölümde, faintly süreklilik ile kuvvetli formları olan süper faintly süreklilik ve kuvvetli faintly süreklilik küme değerli dönüşümlere alışlagelmiş biçimde genişletilmiş ve özellikleri incelenmişti. Bu süreklilik türleri ile bu bölümün birinci kesiminde Vietoris topolojiye bağlı olarak tanımlanan faintly süreklilik türleri arasındaki ilişkiler 2.3.3.Önerme yardımıyla aşağıdaki üç sonuçla verilebilir.

4.2.8.Sonuç: $F : (X, \tau) \rightsquigarrow (Y, \nu)$ küme değerli dönüşümü ü.f.sürekli ve Y hemen hemen regüler uzay ise F ü.V.f.sürekli dir.

4.2.9.Sonuç: $F : (X, \tau) \rightsquigarrow (Y, \nu)$ küme değerli dönüşümü ü.s.f.sürekli ve Y hemen hemen regüler uzay ise F ü.V.s.f.sürekli dir.

4.2.10.Sonuç: $F : (X, \tau) \rightsquigarrow (Y, \nu)$ küme değerli dönüşümü ü.k.f.sürekli ve Y hemen hemen regüler uzay ise F ü.V.k.f.sürekli dir.

Bir $F : (X, \tau) \rightsquigarrow (Y, \nu)$ küme değerli dönüşümü için ü.V.f.süreklilik, ν topolojisinin $\emptyset$ ve Y den farklı öğelerinin Y nin bir ayrışımını oluşturması durumunda bile ü.f.sürekliliği gerektirmez. Buna bir örnek aşağıda verilmiştir.

4.2.11.Örnek: $X = \{0, 1\}$ kümesi üzerindeki topoloji, $\tau = \{\emptyset, X, \{1\}\}$ ve $Y = \{a, b, c, d\}$ kümesi üzerindeki topoloji $\nu = \{\emptyset, Y, \{a, b\}, \{c, d\}\}$ olsun. $F : X \rightsquigarrow Y$ küme değerli dönüşümü $F(0) = \{a, b\}$, $F(1) = Y$ olarak tanımlansın. Bu durumda F ü.V.f.süreklidir fakat $0 \in X$ noktasında ü.f.sürekli değildir.

Bu örnek aynı zamanda ü.V.s.f.sürekliliğin ü.s.f.sürekliliği ve ü.V.k.f.sürekliliğin ü.k.f.sürekliliği gerektirmediğine de bir örnektir.

Bu çalışmayı, çalışma boyunca bahsedilen bütün süreklilikler arasındaki ilişkileri üç kısımda özetleyerek bitirelim.

Bir $F : (X, \tau) \rightsquigarrow (Y, \nu)$ küme değerli dönüşümü için doğal olan süreklilikler arasındaki ilişkiler, (1) $(2^Y, \nu_V^+)$ yarı-regüler, (2) (X, τ) hemen hemen regüler, (3) (X, τ) yarı regüler göstermek üzere aşağıdaki biçimde özetlenebilir.

ü.V.k. θ -süreklilik

$\downarrow \uparrow (1)$

ü.V.h.h.k. θ -süreklilik $\longrightarrow$ ü.V.k.f.süreklilik

$\downarrow \uparrow (2)$

$\downarrow \uparrow (2)$

ü.V. δ -süreklilik $\longrightarrow$ ü.V.s.f.süreklilik

$\downarrow \uparrow (3)$

$\downarrow \uparrow (3)$

ü.V.h.h.süreklilik $\longrightarrow$ ü.V.f.süreklilik

Bir $F : (X, \tau) \rightsquigarrow (Y, \nu)$ küme değerli dönüşümü için faintly süreklilikleri ile diğer bazı süreklilikleri arasındaki ilişkiler (1) (Y, ν) yarı regüler, (2) (X, τ) hemen hemen regüler, (3) (X, τ) yarı regüler, (4) (Y, ν) hemen hemen regüler i göstermek üzere aşağıdaki biçimde özetlenebilir.

$\ddot{u}.k.\theta$ –sürekliilik

$\downarrow\uparrow(1)$

$\ddot{u}.h.h.k.\theta$ –sürekliilik $\stackrel{(4)}{\Leftrightarrow}$ $\ddot{u}.k.f.$ sürekliilik

$\downarrow\uparrow(2)$

$\downarrow\uparrow(2)$

$\ddot{u}.\delta$ –sürekliilik $\stackrel{(4)}{\Leftrightarrow}$ $\ddot{u}.s.f.$ sürekliilik

$\downarrow\uparrow(3)$

$\downarrow\uparrow(3)$

$\ddot{u}.h.h.$ sürekliilik $\stackrel{(4)}{\Leftrightarrow}$ $\ddot{u}.f.$ sürekliilik

$a.k.\theta$ –sürekliilik

$\downarrow\uparrow(1)$

$a.h.h.k.\theta$ –sürekliilik $\stackrel{(4)}{\Leftrightarrow}$ $a.k.f.$ sürekliilik

$\downarrow\uparrow(2)$

$\downarrow\uparrow(2)$

$a.\delta$ –sürekliilik $\stackrel{(4)}{\Leftrightarrow}$ $a.s.f.$ sürekliilik

$\downarrow\uparrow(3)$

$\downarrow\uparrow(3)$

$a.h.h.$ sürekliilik $\stackrel{(4)}{\Leftrightarrow}$ $a.f.$ sürekliilik

ÖZGEÇMİŞ

İdris ZORLUTUNA 1972 yılında Edirne'nin Meriç ilçesinde doğdu. İlk ve orta öğrenimini burada, lise öğrenimini ise Edirne'de tamamladı. 1989 yılında Cumhuriyet Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik bölümünü kazandı ve 1993 yılında mezun oldu. 1994 yılında Cumhuriyet Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik bölümünde araştırma görevlisi olarak işe başladı. Aynı yıl Cumhuriyet Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünün açmış olduğu Yüksek Lisans sınavını kazanarak, Yüksek Lisans öğrenimine başladı ve buradan 1996 yılında mezun oldu. Halen Cumhuriyet Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik bölümünde araştırma görevlisi olarak çalışmaktadır.

KAYNAKLAR

- [1] BRIDGLAND, T. F.; 1970, *Trajectory integrals of the set valued functions*, Pacific J. Math., 33, 43-67.
- [2] CARNAHAN, D.; 1972, *Locally nearly compact spaces*, Boll. Un. Math. Ital., (4), 6, 146-153.
- [3] CHOQUET, G.; 1947, *Converges*, Grenoble Uni. Anall., 23, 57-112.
- [4] DORSETT, C.; 1982, *Semi-regular spaces*, Soochow J. Math., vol 8, 45-53.
- [5] EILENBERG, S. and MONTGOMERY, D.; 1946, *Fixed point theorems for multi-valued transformations*, Amer. J. Math., 68, 222-244.
- [6] FRINK, O.; 1942, *Topology in lattice*, Trans. Amer. Math. Soc., Vol 51, 569-582.
- [7] HERRINGTON, L. L. and LONG, P. E.; 1975, *Characterizations of H-closed spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., Vol 48, Number 2, 469-475.
- [8] JACOBS, M. Q.; 1968, *Measurable multivalued mappings and Lusin's theorem*, Trans. A.M.S., 143, 471-481.
- [9] KÜÇÜK, Y.; 1994, *On strongly θ -continuousness and almost strongly θ -continuousness of multifunctions*, Pure and Appl. Math. Sci., Vol XXXX, No: 1-2, 43-54.
- [10] KÜÇÜK, Y.; 1995, *On some characterizations of δ -continuous multifunctions*, Demonstratio Math., Vol XXVIII, No: 3, 587-595.
- [11] LECHICKI, A.; 1979, *On continuous and measurable multifunctions*, Amer. Math. Soc. Polonea, series 1, XXI, 141-156.
- [12] LEVINE, N.; 1963, *Semi-open sets and semi-continuity in topological spaces*, Amer. Math. Monthly, 70, 36-41.
- [13] LONG, P. E. and HERRINGTON, L. L.; 1975, *Functions with strongly closed graphs*, Boll.U.M.I.(Italy), (4)12, 381-384.
- [14] LONG, P. E. and HERRINGTON, L. L.; 1981, *Strongly θ -continuous functions*, J. Korean. Math. Soc., 18, 21-28.
- [15] LONG, P. E. and HERRINGTON, L. L.; 1982, *The τ_θ topology and faintly continuous functions*, Kyungpook Math. J., 22, 7-14.
- [16] MICHAEL, E.; 1951, *Topologies on spaces of subsets*, Trans. Amer. Math. Soc., 71, 152-182.
- [17] MRSEVIC, M., REILLY, I. L., VAMANAMURTHY, M. K.; 1985, *On semi-regularization topologies*, J. Austral. Math. Sec., (Series A), 38, 40-54.
- [18] MUNSHI, D. M. and BASSAN, D. S.; 1982, *Super continuous mapping*, Indian J. Pure Appl. Math., 13, 229-236.
- [19] NOIRI, T.; 1979, *Properties of H-continuous functions*, Res. Rep. Yatsushiro National College of Tech., 1, 85-90.
- [20] NOIRI, T.; 1980, *On δ -continuous functions*, J. Korean. Math. Soc. Vol 16, No: 2, 161-166.

- [21] NOIRI, T. and KANG, S. M.; 1984, *On almost strongly θ -continuous functions*, Indian J. Pure Appl. Math., (1), 15, 1-8.
- [22] NOIRI, T. AND POPA, V.; 1993, *Almost weakly continuous multifunctions*, Demonstratio Math., Vol 26, No 2, 363-380.
- [23] ÖZER, O.; 1986, *On almost strongly θ upper semi-continuous multifunctions*, Indian J. Pure Appl. Math., (1), 17, 61-65.
- [24] PONOMAREV, V. I.; 1964, *Properties of topological spaces preserved under multivalued continuous mappings on compacta*, Amer. Math. Soc. Translations, (2)(38), 119-140.
- [25] POPA, V.; 1982, *Almost continuous functions*, Mat. Vesnik, 6(19)(34), 75-84.
- [26] PORTER, J. and THOMAS, J.; 1969, *On H -closed and Minimal Hausdorff spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., 138, 159-170.
- [27] RAGHAVAN, T.G.; 1984, *θ -closed subsets of topological spaces*, Indian J. Pure Appl. Math., 15, 233-240.
- [28] RATNER, L.; 1949, *Multivalued transformations*, University of California.
- [29] REILLY, I. L. and VAMANAMURTHY, M. K.; 1983, *On super continuous mappings*, Indian J. Pure Appl. Math., 14, 767-772.
- [30] SMITHSON, R.; 1972, *Multifunctions*, NieuwArch. Wisk. 20, 31-53.
- [31] SMITHSON, R. E.; 1978, *Almost and weak continuity for multifunctions*, Boll. Cal. Math. Soc., 70, 383-390.
- [32] SINGAL, M.K. and MATHUR, A.; 1969, *On nearly-compact spaces*, Boll. Un. Math. Ital., (4), 2, 702-710.
- [33] SINGAL, M.K. and ARYA, S. P.; 1969, *On almost-regular spaces*, Glasnik Matematicki, (24), 4, 89-99.
- [34] STONE, M.; 1937, *Applications of the theory of Boolean rings to general topology*, Trans. A.M.S., 41, 374-481.
- [35] STROTTER, W. L.; 1955, *Continuous multivalued functions*, Boletim do Sociedade de S. Paulo, 10, 87-120.
- [36] VELICKO, N. V.; 1968, *H -closed topological spaces*, Amer. Math.Soc. Transl., (2), (78), 103-118.
- [37] YALVAÇ, T. H.; 1990, *On weak continuity and weak δ -continuity*, Mathematica_ Revue D'Analyse Numerique et de Theorie de L'Approximation, 19, No: 2, 177-183.
- [38] YALVAÇ, T. H.; 1991, *Relations between the topologies τ and τ_θ* , Hacettepe Bull. Mat. Sci. Eng., 20(series B), 29-39.