

ZONGULDAK BÜLENT ECEVİT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İKİ DEĞİŞKENLİ FROBENIUS-EULER-GENOCCHI-FİBONACCİ POLİNOMLARI
VE ONLARIN ÖZELLİKLERİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SELMA KULAÇ

AĞUSTOS 2025

ZONGULDAK BÜLENT ECEVİT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İKİ DEĞİŞKENLİ FROBENİUS-EULER-GENOCCHI-FİBONACCİ POLİNOMLARI
VE ONLARIN ÖZELLİKLERİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Selma KULAÇ

DANIŞMAN: Prof. Dr. Can KIZILATEŞ

ZONGULDAK

Ağustos 2025

KABUL:

Selma KULAÇ tarafından hazırlanan “İki Değişkenli Frobenius-Euler-Genocchi-Fibonacci Polinomları ve Onların Özellikleri” başlıklı bu çalışma jürimiz tarafından değerlendirilerek, Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak oybirliğiyle kabul edilmiştir. 29/08/2025

Danışman: Prof. Dr. Can KIZILATEŞ

Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü

Üye: Doç. Dr. Emrah POLATLI

Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü

Üye: Dr. Öğr. Üyesi Semra KUŞ

Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi, Mucur Meslek Yüksekokulu, Finans Bankacılık ve Sigortacılık Bölümü

ONAY:

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

....../....../2025

Prof. Dr. Fikret GÖLGELEYEN
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü



“Bu tezdeki tüm bilgilerin akademik kurallara ve etik ilkelere uygun olarak elde edildiğini ve sunulduğunu; ayrıca bu kuralların ve ilkelerin gerektirdiği şekilde, bu çalışmadan kaynaklamayan bütün atıfları yaptığımı beyan ederim.”

Selma KULAÇ

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

İKİ DEĞİŞKENLİ FROBENİUS-EULER-GENOCCHI-FİBONACCİ POLİNOMLARI VE ONLARIN ÖZELLİKLERİ

Selma KULAÇ

Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Can KIZILATEŞ

Ağustos 2025, 31 sayfa

Bu tez 4 bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde araştırmanın konusuna ilişkin genel bir çerçeve çizilmiş ve giriş niteliğinde bilgiler sunulmuştur. İkinci bölümde, sonraki bölümlerde kullanılacak temel kavramlar, tanımlar ve özellikler verilerek çalışmanın kuramsal altyapısı oluşturulmuştur. Üçüncü bölümde, iki bilinmeyenli Frobenius-Euler-Genocchi-Fibonacci polinomları tanımlanmış, ayrıca bu polinomların üreteç fonksiyonu yardımıyla, çeşitli toplam formülleri, türev özellikleri ve bazı özdeşlikler elde edilmiştir. Dördüncü ve son bölümde ise çalışmanın sonuçları değerlendirilmiş ve elde edilen bulgular özetlenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Frobenius-Euler-Genocchi-Fibonacci polinomları, toplam formülleri, üreteç fonksiyonları.

Bilim Kodu: 403.01.01



ABSTRACT

M. Sc. Thesis

TWO VARIABLE FROBENIUS-EULER-GENOCCHI-FIBONACCI POLYNOMIALS AND THEIR PROPERTIES

Selma KULAÇ

**Zonguldak Bülent Ecevit University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics**

Thesis Advisor: Prof. Dr. Can KIZILATEŞ

August 2025, 31 pages

This thesis consists of four chapters. In the first chapter, a general framework related to the subject of the research is outlined and introductory information is presented. In the second chapter, the fundamental concepts, definitions, and properties to be used in the subsequent chapters are provided, thereby establishing the theoretical foundation of the study. In the third chapter, the two-variable Frobenius-Euler-Genocchi-Fibonacci polynomials are defined, and with the aid of their generating function, various summation formulas, derivative properties, and certain identities are derived. In the fourth and final chapter, the results of the study are discussed and the obtained findings are summarized.

Keywords: Frobenius-Euler-Genocchi-Fibonacci polynomials, summation formulas, generating functions.

Science Code: 403.01.01



TEŞEKKÜR

Tez çalışma sürem boyunca adım adım rehberlik yapıp beni yönlendiren, zamanını, bilgi birikimini ve desteğini benden esirgemeyen, tecrübelerinden çok şey öğrendiğim çok kıymetli danışman hocam Sayın Prof. Dr. Can KIZILATEŞ’e teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca bugünlere gelmemde maddi manevi çok emekleri olan, beni daima yüreklendiren anneme, babama, kardeşlerime; tezi bitirebilmem için çocuklarımıza sabırla bakarak beni her zaman destekleyen fedakar eşime ve varlıkları en büyük güç kaynağım olan sevgili oğullarıma sonsuz teşekkür ederim.



İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
KABUL	ii
ÖZET	iii
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR	vii
İÇİNDEKİLER.....	ix
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	xi
 BÖLÜM 1 GİRİŞ	 1
 BÖLÜM 2 ÖN BİLGİLER VE TEMEL TANIMLAR.....	 3
2.1 FİBONACCİ DİZİSİ	3
2.2 FİBONOMİYEL KATSAYILAR	5
2.3 CAUCHY ÇARPIMI VE F-CAUCHY ÇARPIMI	9
2.4 BAZI ÖZEL POLİNOMLAR VE ONLARIN ÖZELLİKLERİ	9
2.5 FİBONACCİ TİPLİ POLİNOMLAR VE ONLARIN BAZI ÖZELLİKLERİ	15
 BÖLÜM 3 İKİ DEĞİŞKENLİ FROBENİUS-EULER-GENOCCHİ-FİBONACCİ POLİNOMLARI VE ONLARIN ÖZELLİKLERİ	 19
3.1 İKİ DEĞİŞKENLİ FROBENİUS-EULER-GENOCCHİ-FİBONACCİ POLİNOMLARI	19
 BÖLÜM 4 SONUÇ	 25
 KAYNAKLAR	 27
 ÖZGEÇMİŞ	 31



SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

SİMGELER

$\{F_n\}_{n \geq 0}$	: Fibonacci Dizisi
F_n	: n. Fibonacci Sayısı
$GF(t)$	: Fibonacci Dizisinin Üreteç Fonksiyonu
$F_n!$	: F-faktöriyel
$\binom{n}{k}_F$	: Fibonomiyel Katsayı
$(x +_F y)^n$	: F-Binomiyel Açılımı
$(x + y)^n_F$	: Golden Binomiyel Açılımı
D_F	: F-Türev
e_F^x, E_F^x	: F-üstel Fonksiyonları
$B_n(x)$	: Bernoulli Polinomu
B_n	: Bernoulli Sayısı
$E_n(x)$	: Euler Polinomu
E_n	: Euler Sayısı
$G_n(x)$	: Genocchi Polinomu
G_n	: Genocchi Sayısı
$B_n^{(\alpha)}(x; \lambda)$	: Yüksek Mertebeden Apostol Tipli Bernoulli Polinomunun Üreteç Fonksiyonu
$E_n^{(\alpha)}(x; \lambda)$	: Yüksek Mertebeden Apostol Tipli Euler Polinomunun Üreteç Fonksiyonu
$G_n^{(\alpha)}(x; \lambda)$	: Yüksek Mertebeden Apostol Tipli Genocchi Polinomunun Üreteç Fonksiyonu
$H_n^{(k)}(x; u)$	: Yüksek Mertebeden Frobenius-Euler Polinomunun Üreteç Fonksiyonu
$G_n^F(x; u)$	: Frobenius-Genocchi Polinomunun Üreteç Fonksiyonu
$A_n^{(r)}(x; u)$	: Frobenius-Euler-Genocchi Polinomunun Üreteç Fonksiyonu
$H_n^{(\alpha)}(x; u; \lambda)$	: Yüksek Mertebeden Apostol Tipli Frobenius-Euler Polinomunun Üreteç Fonksiyonu
$B_n^F(x)$	: Bernoulli-Fibonacci Polinomları
B_n^F	: Bernoulli-Fibonacci Sayıları
$E_n^F(x)$	: Euler-Fibonacci Polinomları

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ (devam ediyor)

E_n^F	: Euler-Fibonacci Sayıları
$B_{n,F}^{(\alpha)}(x; \lambda)$	: Genelleştirilmiş Apostol Bernoulli-Fibonacci Polinomunun Üreteç Fonksiyonu
$E_{n,F}^{(\alpha)}(x; \lambda)$	: Genelleştirilmiş Apostol Euler-Fibonacci Polinomunun Üreteç Fonksiyonu
$G_{n,F}^{(\alpha)}(x; \lambda)$	: Genelleştirilmiş Apostol Genocchi-Fibonacci Polinomunun Üreteç Fonksiyonu
$H_{n,F}^{(\alpha)}(x; u)$	: Genelleştirilmiş F-Frobenius-Euler Polinomunun Üreteç Fonksiyonu
$A_{n,F}^{(r)}(x, y; u)$	: İki Değişkenli Frobenius-Euler-Genocchi-Fibonacci Polinomunun Üreteç Fonksiyonu
$\mathbb{N}_0$	: Sıfırdan Başlayan Doğal Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{C}$	: Karmaşık Sayılar Kümesi

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Fibonacci Sayıları, adını 13. yüzyılda yaşamış İtalyan matematikçi Leonardo Fibonacci'den almıştır. Leonardo Fibonacci'nin yaşamı hakkında pek az bilgi bulunmakla birlikte, genellikle yazdığı matematiksel eserler ve 1202 yılında yayımladığı ilk kitabı Liber Abaci ile tanınmaktadır. Fibonacci, Kuzey Afrika'da öğrendiği 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 rakamlarını Avrupa'ya tanıtmış ve bu sayı sisteminin Avrupa'da yaygınlaşmasına öncülük etmiştir. Fibonacci'yi asıl tanıtan konu ise, tavşanların üremesiyle ilgili meşhur problemdir. Bu problem şu şekilde ifade edilir:

“Bir çift tavşan her ay bir çift yavru tavşan doğurursa ve her yeni tavşan çifti doğumundan iki ay sonra yavrulamaya başlarsa, bir çift tavşandan bir yılın sonunda kaç çift tavşan elde edilir?” Bu problemde tavşanların hiç ölmediği ve her doğan çiftin bir dişi bir erkekten oluştuğu kabul edilmektedir.

İlk bakışta bir matematik problemi gibi görünmeyen bu durum, belirli bir mantıkla düşünüldüğünde aşağıdaki sayı dizisini verir:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, . . .

Bu dizinin kuralı oldukça basittir: İlk iki sayı dışındaki her sayı, kendisinden önce gelen iki sayının toplamıdır. Bu sayı dizisine Fibonacci dizisi denir. Diziyi ilgi çekici ve tanıtır kılan çeşitli matematiksel ilişkiler vardır. Bunlardan en bilineni, her Fibonacci sayısının kendinden önceki sayıya bölünmesiyle elde edilen oranın giderek Altın Oran (yaklaşık 1,6180339...) değerine yaklaşmasıdır [41].

Fibonacci sayıları'nın literatürde birçok geliştirilmesi bulunmaktadır. Bunlardan en önemlilerinden biri de özellikle Altın Oran kullanılarak yapılan bir analiz yöntemi olan Golden Calculus'tur.

Polinomlar; matematik başta olmak üzere ekonomi, fizik, kimya, biyoloji, sayısal analiz, mühendislik, bilgisayar programlama ve kriptoloji gibi birçok alanda matematiksel modeller yapmak ve sonuçlara ulaşmak amacıyla kullanılan çok önemli araçlardır. Poli-

nomlar genellikle birden fazla terimden oluşur ve bu terimler sayı, değişken ya da bunların kombinasyonlarından meydana gelir.

Matematikte birçok özel polinom tanımlanmış ve bu polinomlar üzerine çalışmalar günümüzde de devam etmektedir. Özel polinomların ve sayı dizilerinin araştırılmasında kullanılan temel araçlardan biri ise üreteç fonksiyonlarıdır. Üreteç fonksiyonları; sayı problemlerinin çözümünde, olasılık ve istatistik gibi alanlarda da sıkça kullanılır. Bunlar, belirli bir diziyle ilişkili sürekli fonksiyonlardır. Matematikte herhangi bir diziyle çalışmak çoğu zaman sürekli bir fonksiyonla çalışmaktan daha zor olduğundan, sayı problemlerinin çözümünde üreteç fonksiyonlarının kullanımı önemli kolaylık sağlar.

Bu tez çalışmasında, Fibonacci sayıları, bazı özel polinomlar, bu polinomların üreteç fonksiyonları ve elde edilen özelliklerine yer verilmiş; ayrıca literatürde var olan özel polinomlar, Golden Calculus analiz yöntemi kullanılarak yeniden tanımlanmış ve çeşitli özellikleri incelenmiştir.

BÖLÜM 2

ÖNBİLGİLER VE TEMEL TANIMLAR

Bu bölümde, tez kapsamında yararlanılan temel tanımlar, kavramlar ve bunlara ilişkin özellikler sistematik biçimde sunulacaktır. İlgili ön bilgilerin ortaya konulmasının ardından, sonraki bölümlerde tanımlanacak olan bazı özel tipteki polinom aileleri ve bu polinomlara ait çeşitli özellikler ayrıntılı olarak incelenecektir.

2.1 FİBONACCİ DİZİSİ

Fibonacci sayıları, matematikte çok önemli bir yere sahip olan ve çeşitli bilim alanlarında da kullanılan özel bir sayı dizisi olarak bilinmektedir. Fibonacci dizisi yalnızca matematiksel açıdan değil, aynı zamanda doğadaki çeşitli oluşum ve düzenlerin incelenmesinde de temel bir rol üstlenmektedir. Doğada birçok yapının geometrik düzeni Fibonacci sayıları ile ilişkilidir. Özellikle ayçiçeği tohumlarının spiral düzeninde, çam kozalağı pullarının diziliminde, yaprakların gövde etrafındaki konumlanışında ve deniz kabuklarının büyüme oranlarında Fibonacci sayılarının izleri gözlemlenmektedir. Bu nedenle söz konusu dizi, doğanın yapısal organizasyonunun matematiksel bir ifadesi olarak değerlendirilmektedir. Ayrıca Fibonacci dizileri altın oran ile doğrudan bağlantılıdır. Ardışık iki Fibonacci dizisinin oranı $n \rightarrow \infty$ için altın orana yakınsar. Altın oran ise mimarlık, sanat, biyoloji ve finans matematiği gibi farklı alanlarda karşımıza çıkmaktadır. Bu nedenle Fibonacci sayıları çoğu zaman “*doğanın mükemmel sayıları*” olarak nitelendirilmekte ve matematiksel düzenin evrensel bir yansıması olarak kabul edilmektedir.

Tanım 2.1 $n \geq 2$ tam sayısı için, $F_0 = 0$ ve $F_1 = 1$ başlangıç koşulları ile verilen

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad (2.1)$$

rekürans bağıntısı ile tanımlı $\{F_n\}_{n \geq 0}$ dizisine Fibonacci dizisi denir [18]. Burada F_n n . Fibonacci sayısıdır.

Fibonacci dizisinin ilk birkaç terimi;

$$F_0 = 0, F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2, F_4 = 3, F_5 = 5$$

biçimindedir.

Fibonacci dizisinin bazı özellikleri aşağıda listelenmiştir [18, 40]:

- Fibonacci dizisinin ilk n teriminin toplamı

$$\sum_{i=1}^n F_i = F_{n+2} - 1,$$

- Fibonacci dizisinin tek terimlerinin toplamı

$$\sum_{i=1}^n F_{2i-1} = F_{2n},$$

- Fibonacci dizisinin çift terimlerinin toplamı

$$\sum_{i=1}^n F_{2i} = F_{2n+1} - 1,$$

- F_n n . Fibonacci sayısı olmak üzere

$$\sum_{i=1}^n F_i^2 = F_n F_{n+1},$$

dir.

- $n \geq 1$ tamsayısı için

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$$

dir ve bu eşitlik Cassini Formülü olarak isimlendirilir [18, 22].

- Ayrıca Fibonacci sayıları

$$F_{-n} = (-1)^{n+1} F_n$$

özellikliğini de sağlar.

- Fibonacci dizisinin karakteristik denklemi

$$x^2 - x - 1 = 0$$

şeklindedir. Bu karakteristik denklemin kökleri

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

dir. Burada $\alpha \approx 1,6180339\dots$ dır ve bu sayı altın oran olarak isimlendirilir. α ve β için aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= 1, \\ \alpha \times \beta &= -1, \\ |\alpha - \beta| &= \sqrt{5}. \end{aligned}$$

Tanım 2.2 *Fibonacci dizisinin n . terimini veren Binet formülü*

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \quad (2.2)$$

şeklindedir [18].

Tanım 2.3 *Fibonacci dizisi için üreteç fonksiyonu*

$$GF(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n t^n = \frac{t}{1 - t - t^2} \quad (2.3)$$

biçimindedir [18].

2.2 FİBONOMİYEL KATSAYILAR

Klasik binom (binomiyel) katsayılarına benzer olarak Fibonacci dizisi için tanımlanan katsayılar *Fibonomiyel katsayılar* denir ve aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 2.4 $\{F_n\}_{n \geq 0}$ *Fibonacci dizisi ve $F_0! = 1$ olmak üzere, F -faktöriyel*

$$F_n! = F_n F_{n-1} F_{n-2} \dots F_1 \quad (2.4)$$

şeklinde tanımlanır [19].

Örnek 2.1

$$F_0! = 1, F_1! = 1, F_2! = F_2 F_1 = 1, F_3! = F_3 F_2 F_1 = 2$$

şeklindedir.

Tanım 2.5 F_n n . Fibonacci sayısı olmak üzere Fibonomiyel katsayı

$$\binom{n}{k}_F = \begin{cases} \frac{F_n!}{F_{n-k}! F_k!}, & 0 \leq k \leq n \\ 0, & n < k \end{cases}, \quad (2.5)$$

biçiminde tanımlanır [19].

Şimdi Fibonomiyel katsayılar ile ilgili bir örnek verelim.

Örnek 2.2

$$\begin{aligned} \binom{4}{0}_F &= \frac{F_4!}{F_4! F_0!} = 1, \\ \binom{4}{1}_F &= \frac{F_4!}{F_3! F_1!} = 3, \\ \binom{4}{2}_F &= \frac{F_4!}{F_2! F_2!} = 6, \\ \binom{4}{3}_F &= \frac{F_4!}{F_1! F_3!} = 3, \\ \binom{4}{4}_F &= \frac{F_4!}{F_0! F_4!} = 1, \end{aligned}$$

biçimindedir.

Fibonomiyel katsayılar, binomiyel katsayıları gibi simetri özelliğini sağlarlar. Bu katsayıların bazı özellikleri aşağıda verilmiştir.

$$\binom{n}{0}_F = \binom{n}{n}_F = 1,$$

$n < k$ için $\binom{n}{k}_F = 0$ dır. Ayrıca

$$\binom{n}{k}_F = F_{k+1} \binom{n-1}{k}_F + F_{n-k-1} \binom{n-1}{k-1}_F,$$

$$\binom{n}{k}_F = \binom{n}{n-k}_F,$$

$$\binom{n}{k}_F \binom{k}{j}_F = \binom{n}{j}_F \binom{n-j}{k-j}_F$$

eşitlikleri sağlanır [15, 20, 27].

Bu kısımda, Sonlu Binom Teoremi'nin, Golden Calculus (Altın Analiz) yaklaşımı çerçevesinde elde edilen iki farklı tanımı sunulacaktır. Söz konusu tanımlar, klasik binom teoreminin Altın Oran ile ilişkilendirilerek genelleştirilmesine olanak tanımakta ve Golden Calculus'un temel kavramları kullanılarak yapılandırılmaktadır.

Tanım 2.6 *Binom formülünün F - benzeri yani F -Binomiyel*

$$(x +_F y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}_F x^k y^{n-k} \quad (2.6)$$

şeklinde tanımlanır [19].

Tanım 2.7 *Binom formülünün F - benzeri yani Golden Binomiyel açılımı*

$$(x + y)_F^n = \sum_{k=0}^n (-1)^{\binom{k}{2}} \binom{n}{k}_F x^k y^{n-k} \quad (2.7)$$

biçiminde tanımlıdır [27, 28].

Örnek 2.3 *Eşitlik (2.6) da $n = 3$ alınırsa,*

$$\begin{aligned} (x +_F y)^3 &= \sum_{k=0}^3 \binom{3}{k}_F x^k y^{3-k} \\ &= \binom{3}{0}_F x^0 y^{3-0} + \binom{3}{1}_F x^1 y^{3-1} + \binom{3}{2}_F x^2 y^{3-2} + \binom{3}{3}_F x^3 y^{3-3} \\ &= y^3 + 2xy^2 + 2x^2y + x^3 \end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek 2.4 *Eşitlik (2.7) de $n = 3$ alınırsa,*

$$\begin{aligned} (x + y)_F^3 &= \sum_{k=0}^3 (-1)^{\binom{k}{2}} \binom{3}{k}_F x^k y^{3-k} \\ &= \binom{3}{0}_F x^0 y^{3-0} + \binom{3}{1}_F x^1 y^{3-1} - \binom{3}{2}_F x^2 y^{3-2} - \binom{3}{3}_F x^3 y^{3-3} \\ &= y^3 + 2xy^2 - 2x^2y - x^3 \end{aligned}$$

elde edilir.

Tanım 2.8 *F -türev fonksiyonu, klasik türev yaklaşımının Fibonacci dizisi temel alınarak genelleştirilmesiyle tanımlanmaktadır. $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ olmak üzere herhangi bir f fonksiyonunun F -türevi*

$$\frac{d_F}{d_{Fx}}(f(x)) = D_{F,x}(f(x)) = \frac{f(\alpha x) - f(\beta x)}{(\alpha - \beta)x} \quad (2.8)$$

şeklindedir [28].

- Özel olarak $f(x) = x^n$ polinom fonksiyonunun F -türevi

$$\frac{d_F}{d_F x}(x^n) = F_n x^{n-1} \quad (2.9)$$

dir [19].

- c bir sabit sayı olmak üzere

$$\frac{d_F}{d_F x}(cf(x)) = c \frac{d_F}{d_F x}f(x)$$

dir [19].

Tanım 2.9 F -üstel fonksiyonları aşağıdaki gibi iki farklı biçimde tanımlıdır. Bunlar e_F^x ve E_F^x olmak üzere

$$e_F^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{F_n!}, \quad (2.10)$$

ve

$$E_F^x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{\binom{n}{2}} \frac{x^n}{F_n!}, \quad (2.11)$$

şeklinde tanımlanır [19, 27, 28].

- F -üstel fonksiyonları arasında

$$e_F^x E_F^y = e_F^{(x+y)_F} \quad (2.12)$$

ve

$$e_F^x e_F^y = e_F^{(x+_F y)} \quad (2.13)$$

eşitlikleri sağlanır [19, 27, 28].

- Ayrıca F -üstel fonksiyonların F -türevleri

$$\frac{d_F}{d_F x}(e_F^{tx}) = t e_F^{tx}, \quad (2.14)$$

$$\frac{d_F}{d_F x}(E_F^{tx}) = t E_F^{-tx} \quad (2.15)$$

şeklindedir [19, 27, 28].

2.3 CAUCHY ÇARPIMI VE F-CAUCHY ÇARPIMI

Tanım 2.10 $P(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \frac{t^n}{n!}$ ve $R(t) = \sum_{n=0}^{\infty} r_n \frac{t^n}{n!}$ iki yakınsak kuvvet serisi olmak üzere bu kuvvet serilerinin Cauchy çarpımı

$$S(t) = P(t)R(t) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} p_n \frac{t^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} r_n \frac{t^n}{n!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p_k r_{n-k} \right) \frac{t^n}{n!} \quad (2.16)$$

şeklinde tanımlıdır [29, 30].

Tanım 2.11 $P_F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{n,F} \frac{t^n}{F_n!}$ ve $R_F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} r_{n,F} \frac{t^n}{F_n!}$ iki yakınsak kuvvet serisi olmak üzere bu kuvvet serilerinin F-Cauchy çarpımı

$$S_F(t) = P_F(t)R_F(t) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} p_{n,F} \frac{t^n}{F_n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} r_{n,F} \frac{t^n}{F_n!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}_F p_{k,F} r_{n-k,F} \right) \frac{t^n}{F_n!} \quad (2.17)$$

biçimindedir [19].

2.4 BAZI ÖZEL POLİNOMLAR VE ONLARIN ÖZELLİKLERİ

Bu kısımda, Bernoulli, Euler, Genocchi, Frobenius-Euler, Frobenius-Genocchi, Frobenius-Euler-Genocchi polinomları ile onların Apostol tipli genelleştirmelerinden bahsedeceğiz.

Tanım 2.12 $n \in \mathbb{N}_0$, $t, x \in \mathbb{R}$ ve $|t| < 2\pi$ olsun. $B_n(x)$ ile gösterilen Bernoulli polinomları aşağıdaki üreteç fonksiyonu ile tanımlıdır [4, 5, 9, 36].

$$\frac{te^{tx}}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) \frac{t^n}{n!}. \quad (2.18)$$

Bernoulli polinomlarından bazıları aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned} B_0(x) &= 1 \\ B_1(x) &= x - \frac{1}{2} \\ B_2(x) &= x^2 - x + \frac{1}{6} \\ B_3(x) &= x^3 - \frac{3x^2}{2} + \frac{x}{2} \\ B_4(x) &= x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30} \\ B_5(x) &= x^5 - \frac{5x^4}{2} + \frac{5x^3}{3} - \frac{x}{6}. \end{aligned}$$

Bernoulli polinomları için özel olarak $x = 0$ alınrsa üreteç fonksiyonu

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!}$$

olan Bernoulli sayıları elde edilir. Burada $B_n = B_n(0)$ dır.

Tanım 2.13 $n \in \mathbb{N}_0$, $t, x \in \mathbb{R}$ ve $|t| < \pi$ olsun. $E_n(x)$ ile gösterilen Euler polinomları aşağıdaki üreteç fonksiyonu ile tanımlıdır [1, 10, 25, 26, 34].

$$\frac{2e^{tx}}{e^t + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n(x) \frac{t^n}{n!}. \quad (2.19)$$

Euler polinomların birkaç terimi:

$$\begin{aligned} E_0(x) &= 1 \\ E_1(x) &= x - \frac{1}{2} \\ E_2(x) &= x^2 - x \\ E_3(x) &= x^3 - \frac{3x^2}{2} + \frac{1}{4} \\ E_4(x) &= x^4 - 2x^3 + x \\ E_5(x) &= x^5 - \frac{5x^4}{2} + \frac{5x^2}{2} - \frac{1}{6}, \end{aligned}$$

biçimindedir. Euler polinomunda $x = 0$ alınrsa üreteç fonksiyonu

$$\frac{2}{e^t + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n \frac{t^n}{n!}$$

olan Euler sayıları elde edilir. Burada $E_n = E_n(0)$ dır.

Tanım 2.14 $n \in \mathbb{N}_0$, $t, x \in \mathbb{R}$ ve $|t| < \pi$ olsun. $G_n(x)$ ile gösterilen Genocchi polinomları aşağıdaki üreteç fonksiyonu ile tanımlıdır [1, 10, 13, 25, 26, 34, 43].

$$\frac{2te^{tx}}{e^t + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} G_n(x) \frac{t^n}{n!}. \quad (2.20)$$

Genocchi polinomların ilk birkaç terimi

$$\begin{aligned} G_0(x) &= 0 \\ G_1(x) &= 1 \\ G_2(x) &= 2x - 1 \\ G_3(x) &= 3x^2 - 3x \\ G_4(x) &= 4x^3 - 6x^2 + 1, \end{aligned}$$

biçimindedir. Genocchi polinomlarında $x = 0$ alınırsa üreteç fonksiyonu

$$\frac{2t}{e^t + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} G_n \frac{t^n}{n!}$$

olan Genocchi sayıları elde edilir. Burada $G_n = G_n(0)$ dır.

Tanım 2.15 $n \in \mathbb{N}_0$, $t, x \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ olmak üzere $B_n^{(\alpha)}(x; \lambda)$ ile gösterilen α . mertebeden Apostol tipli Bernoulli polinomlarının üreteç fonksiyonu

$$\left(\frac{t}{\lambda e^t - 1} \right)^\alpha e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(\alpha)}(x; \lambda) \frac{t^n}{n!} \quad (|t + \log \lambda| < 2\pi) \quad (2.21)$$

şeklindedir [23, 24, 35, 37]. Burada hemen not edelim ki

- $\lambda = 1$ için $B_n^{(\alpha)}(x; 1) = B_n^{(\alpha)}(x)$ şeklinde ve üreteci

$$\left(\frac{t}{e^t - 1} \right)^\alpha e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(\alpha)}(x) \frac{t^n}{n!}$$

olan α . mertebeden Bernoulli polinomları,

- $x = 0$ için $B_n^{(\alpha)}(0; \lambda) = B_n^{(\alpha)}(\lambda)$ şeklinde ve üreteç fonksiyonu

$$\left(\frac{t}{\lambda e^t - 1} \right)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(\alpha)}(\lambda) \frac{t^n}{n!}$$

olan α . mertebeden Apostol-Bernoulli sayıları,

- $x = 0$, $\alpha = 1$ için $B_n^{(1)}(\lambda) = B_n(\lambda)$ şeklinde ve üreteci

$$\frac{t}{\lambda e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(\lambda) \frac{t^n}{n!}$$

olan Apostol-Bernoulli sayıları,

elde edilir.

Tanım 2.16 $n \in \mathbb{N}_0$, $t, x \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ olmak üzere $E_n^{(\alpha)}(x; \lambda)$ ile gösterilen α . mertebeden Apostol tipli Euler polinomlarının üreteç fonksiyonu

$$\left(\frac{2}{\lambda e^t + 1} \right)^\alpha e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n^{(\alpha)}(x; \lambda) \frac{t^n}{n!} \quad (|t + \log \lambda| < \pi) \quad (2.22)$$

şeklindedir [24, 35, 37]. Burada

- $\lambda = 1$ için $E_n^{(\alpha)}(x; 1) = E_n^{(\alpha)}(x)$ şeklinde ve üreteç fonksiyonu

$$\left(\frac{2}{e^t + 1}\right)^\alpha e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n^{(\alpha)}(x) \frac{t^n}{n!}$$

olan α . mertebeden Euler polinomları,

- $x = 0$ için $E_n^{(\alpha)}(0; \lambda) = E_n^{(\alpha)}(\lambda)$ şeklinde ve üreteç fonksiyonu

$$\left(\frac{2}{\lambda e^t + 1}\right)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} E_n^{(\alpha)}(\lambda) \frac{t^n}{n!}$$

olan α . mertebeden Apostol-Euler sayıları,

- $x = 0, \alpha = 1$ için $E_n^{(1)}(\lambda) = E_n(\lambda)$ şeklinde ve üreteç fonksiyonu

$$\frac{2}{\lambda e^t + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n(\lambda) \frac{t^n}{n!}$$

olan Apostol-Euler sayıları,

elde edilir.

Tanım 2.17 $n \in \mathbb{N}_0, t, x \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{C}$ olmak üzere $G_n^{(\alpha)}(x; \lambda)$ ile gösterilen α . mertebeden Apostol tipli Genocchi polinomlarının üreteç fonksiyonu

$$\left(\frac{2t}{\lambda e^t + 1}\right)^\alpha e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} G_n^{(\alpha)}(x; \lambda) \frac{t^n}{n!} \quad (|t + \log \lambda| < \pi) \quad (2.23)$$

şeklindedir [24, 35, 37, 43]. Burada

- $\lambda = 1$ için $G_n^{(\alpha)}(x; 1) = G_n^{(\alpha)}(x)$ şeklinde ve üreteç fonksiyonu

$$\left(\frac{2t}{e^t + 1}\right)^\alpha e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} G_n^{(\alpha)}(x) \frac{t^n}{n!}$$

olan α . mertebeden Genocchi polinomları,

- $x = 0$ için $G_n^{(\alpha)}(0; \lambda) = G_n^{(\alpha)}(\lambda)$ şeklinde ve üreteç fonksiyonu

$$\left(\frac{2t}{\lambda e^t + 1}\right)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} G_n^{(\alpha)}(\lambda) \frac{t^n}{n!}$$

olan α . mertebeden Apostol-Genocchi sayıları,

- $x = 0, \alpha = 1$ için $G_n^{(1)}(\lambda) = G_n(\lambda)$ şeklinde ve üretic fonksiyonu

$$\frac{2t}{\lambda e^t + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} G_n(\lambda) \frac{t^n}{n!}$$

olan Apostol-Genocchi sayıları,

elde edilir.

Tanım 2.18 $n \in \mathbb{N}_0$, $t, x \in \mathbb{R}$ ve $u \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ olsun. Mertebesi k olan $H_n^{(k)}(x; u)$ ile gösterilen Frobenius-Euler polinomları aşağıdaki üretic fonksiyonu ile tanımlıdır [6, 16, 33]

$$\left(\frac{1-u}{e^t - u} \right)^k e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n^k(x; u) \frac{t^n}{n!}. \quad (2.24)$$

Frobenius-Euler polinomunda $k = 1$, $x = 0$ alınırsa üretici;

$$\frac{1-u}{e^t - u} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(u) \frac{t^n}{n!}$$

olan Frobenius-Euler sayıları elde edilir. Yani $H_n(u) = H_n(0; u)$ dır.

Tanım 2.19 $n \in \mathbb{N}_0$, $t, x \in \mathbb{R}$ ve $u \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ olsun. $G_n^F(x; u)$ ile gösterilen Frobenius-Genocchi polinomları aşağıdaki üretic fonksiyonu ile tanımlıdır [2, 42]

$$\frac{(1-u)}{e^t - u} t e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} G_n^F(x; u) \frac{t^n}{n!}. \quad (2.25)$$

Frobenius-Genocchi polinomlarında $x = 0$ alınırsa, üretic fonksiyonu

$$\frac{(1-u)}{e^t - u} t = \sum_{n=0}^{\infty} G_n^F(u) \frac{t^n}{n!}$$

olan Frobenius-Genocchi sayılarına dönüşür. Burada $G_n^F(u) = G_n^F(0; u)$ dır.

Tanım 2.20 $n \in \mathbb{N}_0$, $t, x \in \mathbb{R}$, $u \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, $r \geq 0$ olsun. $A_n^{(r)}(x; u)$ ile gösterilen Frobenius-Euler-Genocchi polinomları aşağıdaki üretic fonksiyonu ile tanımlıdır [2]

$$\frac{(1-u)}{e^t - u} t^r e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(r)}(x; u) \frac{t^n}{n!}. \quad (2.26)$$

Burada

$$A_0^{(r)}(x; u) = A_1^{(r)}(x; u) = \dots = A_{r-1}^{(r)}(x; u) = 0 \quad (2.27)$$

şeklindedir.

Frobenius-Euler-Genocchi polinomlarında $x = 0$ alınrsa üreteç fonksiyonu

$$\frac{(1-u)}{e^t - u} t^r = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(r)}(u) \frac{t^n}{n!} \quad (2.28)$$

biçiminde verilen Frobenius-Euler-Genocchi sayıları elde edilir. Yani,

$$A_n^{(r)}(u) = A_n^{(r)}(0; u)$$

dır.

- (2.26) eşitliğinde $r = 0$ alınrsa;

$$A_n^{(0)}(x; u) = H_n(x; u) \quad (2.29)$$

eşitliği elde edilir. Yani Frobenius-Euler-Genocchi polinomları Frobenius-Euler polinomlarına dönüşür.

- (2.28) eşitliğinde $r = 0$ alınrsa;

$$A_n^{(0)}(u) = H_n(u)$$

eşitliği elde edilir. Yani Frobenius-Euler-Genocchi sayıları Frobenius-Euler sayılarına dönüşür.

- (2.26) eşitliğinde $r = 1$ alınrsa;

$$A_n^{(1)}(x; u) = G_n^F(x; u) \quad (2.30)$$

eşitliği elde edilir. Yani Frobenius-Euler-Genocchi polinomları Frobenius-Genocchi polinomlarına dönüşür.

- (2.28) eşitliğinde $r = 1$ alınrsa;

$$A_n^{(1)}(u) = G_n^F(u) \quad (2.31)$$

eşitliği elde edilir. Yani Frobenius-Euler-Genocchi sayıları Frobenius-Genocchi sayılarına dönüşür.

Tanım 2.21 $n \in \mathbb{N}_0$, $t, x \in \mathbb{R}$, $u \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, olmak üzere $H_n^{(\alpha)}(x; u; \lambda)$ ile gösterilen α . mertebeden Apostol tipli Frobenius-Euler polinomlarının üreteç fonksiyonu

$$\left(\frac{1-u}{\lambda e^t - u} \right)^\alpha e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n^{(\alpha)}(x; u; \lambda) \frac{t^n}{n!} \quad \left(|t| < \left| \ln \left(\frac{\lambda}{u} \right) \right| \right) \quad (2.32)$$

şeklindedir [2, 7, 8, 17, 31, 32, 33]. Burada

- $x = 0$ için $H_n^{(\alpha)}(u; \lambda) = H_n^{(\alpha)}(0; u; \lambda)$ şeklinde ve üreteç fonksiyonu

$$\left(\frac{1-u}{\lambda e^t - u} \right)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} H_n^{(\alpha)}(u; \lambda) \frac{t^n}{n!}$$

olan α . mertebeden Apostol tipli Frobenius-Euler sayıları elde edilir.

2.5 FİBONACCİ TIPLİ POLİNOMLAR VE ONLARIN BAZI ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde, bir önceki başlıkta ele alınan bazı özel polinomların Fibonacci tipli versiyonları ve bu polinomlara ilişkin çeşitli özellikler incelenecektir. Bu tanımlardan hareketle, bir sonraki bölümde yeni bir Fibonacci tipli polinom ailesi tanımlanacaktır.

Tanım 2.22 $n \in \mathbb{N}_0$, $t, x \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\frac{te_F^{tx}}{e_F^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^F(x) \frac{t^n}{F_n!}, \quad (2.33)$$

ile tanımlı $B_n^F(x)$ ile gösterilen polinomlara *Bernoulli-Fibonacci polinomları* denir [27].

Örnek 2.5 *Bernoulli-Fibonacci polinomlarının birkaç terimi aşağıdaki gibidir.*

$$\begin{aligned} B_0^F(x) &= 1, \\ B_1^F(x) &= x - 1, \\ B_2^F(x) &= x^2 - x + \frac{1}{2}, \\ B_3^F(x) &= x^3 - 2x^2 + x - \frac{1}{3}, \\ B_4^F(x) &= x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x + \frac{3}{10}, \\ B_5^F(x) &= x^5 - 5x^4 + \frac{15}{2}x^3 - 5x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{5}{8}. \end{aligned}$$

Eşitlik (2.33) de $x = 0$ alınrsa,

$$\frac{t}{e_F^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^F \frac{t^n}{F_n!} \quad (2.34)$$

üreteç fonksiyonu ile tanımlanan *Bernoulli-Fibonacci sayıları* elde edilir. Yani $B_n^F = B_n^F(0)$ dır.

Tanım 2.23 $n \in \mathbb{N}_0$, $t, x \in \mathbb{R}$, olmak üzere

$$\frac{2e_F^{tx}}{e_F^t + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n^F(x) \frac{t^n}{F_n!}, \quad (2.35)$$

üreteç fonksiyonu ile tanımlı $E_n^F(x)$ ile gösterilen polinomlara Euler-Fibonacci polinomları denir [20, 21, 38].

Euler-Fibonacci polinomlarından bazıları aşağıdaki biçimdedir.

$$\begin{aligned} E_0^F(x) &= 1, \\ E_1^F(x) &= x - \frac{1}{2}, \\ E_2^F(x) &= x^2 - \frac{x}{2} - \frac{1}{4}, \\ E_3^F(x) &= x^3 - x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{4}, \\ E_4^F(x) &= x^4 - \frac{3}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{5}{8}, \\ E_5^F(x) &= x^5 - \frac{5}{2}x^4 - \frac{15}{4}x^3 - \frac{15}{4}x^2 + \frac{25}{8}x - \frac{13}{16}. \end{aligned}$$

Euler-Fibonacci polinomlarında $x = 0$ alınırsa, üreteç fonksiyonu

$$\frac{2}{e_F^t + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n^F \frac{t^n}{F_n!}, \quad (2.36)$$

olan Euler-Fibonacci sayıları elde edilir. Yani $E_n^F = E_n^F(0)$ dır.

Tanım 2.24 $n \in \mathbb{N}_0$, $t, x \in \mathbb{R}$, $\alpha, \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ olmak üzere $B_{n,F}^{(\alpha)}(x; \lambda)$ ile gösterilen genelleştirilmiş Apostol Bernoulli-Fibonacci polinomlarının üreteç fonksiyonu

$$\left(\frac{t}{\lambda e_F^t - 1} \right)^\alpha e_F^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} B_{n,F}^{(\alpha)}(x; \lambda) \frac{t^n}{F_n!} \quad (2.37)$$

şeklinde [12, 14] . Burada hemen not edelim ki

- Eşitlik (2.37) da $\alpha = 1$, için $B_{n,F}^{(1)}(x; \lambda) = B_{n,F}(x; \lambda)$ şeklinde ve üreteç fonksiyonu

$$\frac{te_F^{xt}}{\lambda e_F^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_{n,F}(x; \lambda) \frac{t^n}{F_n!},$$

olan Apostol Bernoulli-Fibonacci polinomları elde edilir.

- Eşitlik (2.37) da $\alpha = 1$ ve $x = 0$ için, $B_{n,F}(0; \lambda) = B_{n,F}(\lambda)$ şeklinde ve üreteç fonksiyonu

$$\frac{t}{\lambda e_F^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_{n,F}(\lambda) \frac{t^n}{F_n!},$$

olan Apostol Bernoulli-Fibonacci sayıları elde edilir.

Tanım 2.25 $n \in \mathbb{N}_0$, $t, x \in \mathbb{R}$, $\alpha, \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ olmak üzere $E_{n,F}^{(\alpha)}(x; \lambda)$ ile gösterilen genelleştirilmiş Apostol Euler-Fibonacci polinomlarının üreteç fonksiyonu

$$\left(\frac{2}{\lambda e_F^t + 1} \right)^\alpha e_F^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} E_{n,F}^{(\alpha)}(x; \lambda) \frac{t^n}{F_n!} \quad (2.38)$$

şeklindedir [12, 14]. Burada

- Eşitlik (2.38) de $\alpha = 1$ için, $E_{n,F}^{(1)}(x; \lambda) = E_{n,F}(x; \lambda)$ şeklinde ve üreteç fonksiyonu

$$\frac{2e_F^{xt}}{\lambda e_F^t + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} E_{n,F}(x; \lambda) \frac{t^n}{F_n!},$$

olan Apostol Euler-Fibonacci polinomları elde edilir.

- Eşitlik (2.38) de $\alpha = 1$ ve $x = 0$ alınır, $E_{n,F}(0; \lambda) = E_{n,F}(\lambda)$ şeklinde ve üreteç fonksiyonu

$$\frac{2}{\lambda e_F^t + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} E_{n,F}(\lambda) \frac{t^n}{F_n!},$$

olan Apostol Euler-Fibonacci sayıları elde edilir.

Tanım 2.26 $n \in \mathbb{N}_0$, $t, x \in \mathbb{R}$, $\alpha, \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ olmak üzere $G_{n,F}^{(\alpha)}(x; \lambda)$ ile gösterilen genelleştirilmiş Apostol Genocchi-Fibonacci polinomlarının üreteç fonksiyonu

$$\left(\frac{2t}{\lambda e_F^t + 1} \right)^\alpha e_F^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} G_{n,F}^{(\alpha)}(x; \lambda) \frac{t^n}{F_n!}, \quad (2.39)$$

şeklindedir [3, 11, 14]. Burada

- Eşitlik (2.39) de $\alpha = 1$ için, $G_{n,F}^{(1)}(x; \lambda) = G_{n,F}(x; \lambda)$ şeklinde ve üreteç fonksiyonu

$$\frac{2te_F^{xt}}{\lambda e_F^t + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} G_{n,F}(x; \lambda) \frac{t^n}{F_n!}$$

olan Apostol Genocchi-Fibonacci polinomları elde edilir.

- Eşitlik (2.39) de $\alpha = 1$ ve $x = 0$ alınır, $G_{n,F}^1(0; \lambda) = G_{n,F}(\lambda)$ şeklinde ve üreteç fonksiyonu

$$\frac{2t}{\lambda e_F^t + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} G_{n,F}(\lambda) \frac{t^n}{F_n!}$$

olan Apostol Genocchi-Fibonacci sayıları elde edilir.

Tanım 2.27 $n \in \mathbb{N}_0$, $t, x \in \mathbb{R}$, $\alpha, u \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ olmak üzere $H_{n,F}^{(\alpha)}(x; u)$ ile gösterilen genelleştirilmiş F -Frobenius-Euler polinomlarının üreteç fonksiyonu

$$\left(\frac{1-u}{e_F^t - u} \right)^\alpha e_F^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} H_{n,F}^{(\alpha)}(x; u) \frac{t^n}{F_n!}, \quad (2.40)$$

şeklindedir [39]. Burada

- $\alpha = 1$ için $H_{n,F}^{(1)}(x; u) = H_{n,F}(x; u)$, Frobenius-Euler-Fibonacci polinomları elde edilir.
- $\alpha = 1$ ve $x = 0$ için $H_{n,F}^{(1)}(0; u) = H_{n,F}(u)$, Frobenius-Euler-Fibonacci sayıları elde edilir.

BÖLÜM 3

İKİ DEĞİŞKENLİ FROBENIUS-EULER-GENOCCHI-FIBONACCİ POLİNOMLARI VE ONLARIN ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde bir önceki bölümde ele aldığımız temel tanım ve özelliklerden yararlanarak, iki değişkenli Frobenius-Euler-Genocchi-Fibonacci polinomlarını tanımlayacağız. Bu polinomlar için, onların üreteç fonksiyonları yardımıyla bu polinomları içeren bazı özellikler vereceğiz.

3.1 İKİ DEĞİŞKENLİ FROBENIUS-EULER-GENOCCHI-FIBONACCİ POLİ- NOMLARI

Tanım 3.1 $n \in \mathbb{N}_0$, $t, x \in \mathbb{R}$, $u \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, $r \geq 0$ olsun. $A_{0,F}^{(r)}(x, y; u) = A_{1,F}^{(r)}(x, y; u) = \dots = A_{r-1,F}^{(r)}(x, y; u) = 0$ başlangıç şartları ile tanımlı, $A_{n,F}^{(r)}(x, y; u)$ ile gösterilen iki değişkenli Frobenius-Euler-Genocchi-Fibonacci polinomlarının üreteç fonksiyonu

$$\frac{1-u}{e_F^t - u} t^r e_F^{xt} E_F^{yt} = \sum_{n=0}^{\infty} A_{n,F}^{(r)}(x, y; u) \frac{t^n}{F_n!}, \quad (3.1)$$

biçiminde tanımlanır.

Bu polinomların bazı özel durumları aşağıda verilmiştir.

- Eşitlik (3.1) de $y = 0$ alınırsa,

$$\frac{1-u}{e_F^t - u} t^r e_F^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} A_{n,F}^{(r)}(x; u) \frac{t^n}{F_n!} \quad (3.2)$$

ile tanımlı Frobenius-Euler-Genocchi-Fibonacci polinomu elde edilir. Yani $A_{n,F}^{(r)}(x; u) = A_{n,F}^{(r)}(x, 0; u)$ dır.

- Eşitlik (3.1) de $x = y = 0$ alınırsa,

$$\frac{1-u}{e_F^t - u} t^r = \sum_{n=0}^{\infty} A_{n,F}^{(r)}(u) \frac{t^n}{F_n!}, \quad (3.3)$$

ile tanımlı Frobenius-Euler-Genocchi-Fibonacci sayısı elde edilir. Yani $A_{n,F}^{(r)}(u) = A_{n,F}^{(r)}(0, 0; u)$ dır.

- Eşitlik (3.1) de $u = -1, y = 0, r = 0$ seçilirse,

$$\frac{2e_F^{xt}}{e_F^t + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n^F(x) \frac{t^n}{F_n!}, \quad (3.4)$$

ile tanımlı Euler-Fibonacci polinomu elde edilir. Burada $A_{n,F}^{(r)}(x, 0; -1) = E_n^F(x)$ dir.

- Eşitlik (3.1) de $u = -1, r = 0$ ve $x = y = 0$ alınrsa, polinom na dönüştür ve üreteç fonksiyonu

$$\frac{2}{e_F^t + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n^F \frac{t^n}{F_n!}, \quad (3.5)$$

ile tanımlı Euler-Fibonacci sayısı elde edilir. Yani $A_{n,F}^{(0)}(0, 0; -1) = E_n^F$ dir.

- Eşitlik (3.1) de $u = -1$ ve $r = 1$ alınrsa,

$$\frac{2t}{e_F^t + 1} e_F^{xt} E_F^{yt} = \sum_{n=0}^{\infty} G_n^F(x, y; -1) \frac{t^n}{F_n!}, \quad (3.6)$$

ile tanımlı iki değişkenli Genocchi-Fibonacci polinomu elde edilir.

- Eşitlik (3.1) de $u = -1, r = 1$ ve $x = y = 0$ alınrsa,

$$\frac{2t}{e_F^t + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} G_n^F(0, 0; -1) \frac{t^n}{F_n!}, \quad (3.7)$$

ile tanımlı Genocchi-Fibonacci sayısı elde edilir.

Teorem 3.1 *İki değişkenli Frobenius-Euler-Genocchi-Fibonacci polinomları için aşağıdaki toplam eşitliği sağlanır:*

$$A_{n,F}^{(r)}(x, y; u) = \sum_{k=0}^n (-1)^{\binom{n-k}{2}} \binom{n}{k}_F A_{k,F}^{(r)}(x; u) y^{n-k}. \quad (3.8)$$

İspat. Eşitlikler (3.1) ve (2.11) den yararlanarak,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} A_{n,F}^{(r)}(x, y; u) \frac{t^n}{F_n!} &= \frac{1-u}{e_F^t - u} t^r e_F^{xt} E_F^{yt} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} A_{n,F}^{(r)}(x; u) \frac{t^n}{F_n!} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{\binom{n}{2}} y^n \frac{t^n}{F_n!} \end{aligned}$$

elde edilir. F -Cauchy çarpımından

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n A_{k,F}^{(r)}(x; u) \frac{t^k}{F_k!} (-1)^{\binom{n-k}{2}} y^{n-k} \frac{t^{n-k}}{F_{n-k}!}$$

dır. Gerekli düzenlemelerden sonra

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_{n,F}^{(r)}(x, y; u) \frac{t^n}{F_n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n (-1)^{\binom{n-k}{2}} \binom{n}{k}_F A_{k,F}^{(r)}(x; u) y^{n-k} \right) \frac{t^n}{F_n!}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitlikte $\frac{t^n}{F_n!}$ 'in katsayıları eşitlenirse,

$$A_{n,F}^{(r)}(x, y; u) = \sum_{k=0}^n (-1)^{\binom{n-k}{2}} \binom{n}{k}_F A_{k,F}^{(r)}(x; u) y^{n-k},$$

elde edilir ve ispat biter. ■

Teorem 3.2 *İki değişkenli Frobenius-Euler-Genocchi-Fibonacci polinomları için aşağıdaki F -binom eşitliği sağlanır:*

$$A_{n,F}^{(r)}(x, y; u) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}_F (x + y)_F^{n-k} A_{k,F}^{(r)}(u) \quad (3.9)$$

İspat. Eşitlik (3.1) den

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} A_{n,F}^{(r)}(x, y; u) \frac{t^n}{F_n!} &= \frac{1-u}{e_F^t - u} t^r e_F^{xt} E_F^{yt} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} A_{n,F}^{(r)}(u) \frac{t^n}{F_n!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)_F^n}{F_n!} t^n, \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n A_{k,F}^{(r)}(u) \frac{t^k}{F_k!} \frac{(x+y)_F^{n-k}}{F_{n-k}!} t^{n-k}$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_{n,F}^{(r)}(x, y; u) \frac{t^n}{F_n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}_F (x+y)_F^{n-k} A_{k,F}^{(r)}(u) \right) \frac{t^n}{F_n!}$$

bulunur. Yukarıdaki eşitlikte $\frac{t^n}{F_n!}$ 'in katsayıları eşitlenirse,

$$A_{n,F}^{(r)}(x, y; u) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}_F (x+y)_F^{n-k} A_{k,F}^{(r)}(u)$$

elde edilir. Dolayısıyla ispatımız tamamlanır. ■

Teorem 3.3 İki değişkenli Frobenius-Euler-Genocchi-Fibonacci polinomları için aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$A_{n,F}^{(r)}((x+y)_F, z; u) = \sum_{k=0}^n (-1)^{\binom{n-k}{2}} \binom{n}{k}_F A_{k,F}^{(r)}(x, y; u) z^{n-k} \quad (3.10)$$

İspat. Eşitlik (3.1) de, x yerine $x+y$ alalım. Dolayısıyla aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_{n,F}^{(r)}((x+y)_F, z; u) \frac{t^n}{F_n!} = \frac{1-u}{e_F^t - u} t^r e_F^{(x+y)_F t} E_F^{zt}.$$

Eşitlik (2.12) den faydalanırsak,

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_{n,F}^{(r)}((x+y)_F, z; u) \frac{t^n}{F_n!} = \frac{1-u}{e_F^t - u} t^r e_F^{xt} E_F^{yt} E_F^{zt}$$

elde edilir. İki değişkenli Frobenius-Euler-Genocchi-Fibonacci polinomunun üretic fonksiyonu ve eşitlik (2.11) den

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_{n,F}^{(r)}((x+y)_F, z; u) \frac{t^n}{F_n!} = \sum_{n=0}^{\infty} A_{n,F}^{(r)}(x, y; u) \frac{t^n}{F_n!} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{\binom{n}{2}} \frac{z^n}{F_n!} t^n$$

elde edilir. Buradan

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_{n,F}^{(r)}((x+y)_F, z; u) \frac{t^n}{F_n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n A_{k,F}^{(r)}(x, y; u) \frac{t^k}{F_k!} (-1)^{\binom{n-k}{2}} \frac{z^{n-k}}{F_{n-k}!} t^{n-k}$$

dır. Gerekli düzenlemeler yapılsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_{n,F}^{(r)}((x+y)_F, z; u) \frac{t^n}{F_n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n (-1)^{\binom{n-k}{2}} \binom{n}{k}_F A_{k,F}^{(r)}(x, y; u) z^{n-k} \right) \frac{t^n}{F_n!}$$

eşitliği elde edilir. Yukarıdaki eşitlikte $\frac{t^n}{F_n!}$ 'in katsayıları eşitlenirse,

$$A_{n,F}^{(r)}((x+y)_F, z; u) = \sum_{k=0}^n (-1)^{\binom{n-k}{2}} \binom{n}{k}_F A_{k,F}^{(r)}(x, y; u) z^{n-k},$$

bulunur ve ispat biter. ■

Sonuç 3.1 Eşitlik (3.10) da, $y = 1$ alırsak, aşağıdaki eşitliği elde ederiz.

$$A_{n,F}^{(r)}((x+1)_F, z; u) = \sum_{k=0}^n (-1)^{\binom{n-k}{2}} \binom{n}{k}_F A_{k,F}^{(r)}(x, 1; u) z^{n-k}$$

Teorem 3.4 İki değişkenli Frobenius-Euler-Genocchi-Fibonacci polinomları aşağıdaki eşitliği sağlarlar:

$$A_{n,F}^{(r)}(x, (y+z)_F; u) = \sum_{k=0}^n (-1)^{\binom{n-k}{2}} \binom{n}{k}_F A_{k,F}^{(r)}(x; u) (y+z)^{n-k}. \quad (3.11)$$

İspat. Eşitlik (3.1) de, y yerine $y + z$ alınırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_{n,F}^{(r)}(x, (y+z)_F; u) \frac{t^n}{F_n!} = \frac{1-u}{e_F^t - u} t^r e_F^{xt} E_F^{(y+z)t}$$

elde edilir. Eşitlik (2.11) den

$$= \sum_{n=0}^{\infty} A_{n,F}^{(r)}(x; u) \frac{t^n}{F_n!} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{\binom{n}{2}} \frac{(y+z)_F^n}{F_n!} t^n$$

ve F -Cauchy çarpımından yararlanırsak,

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n A_{k,F}^{(r)}(x; u) \frac{t^k}{F_k!} (-1)^{\binom{n-k}{2}} \frac{(y+z)_F^{n-k}}{F_{n-k}!} t^{n-k}$$

elde edilir. Gerekli düzenlemelerden sonra

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_{n,F}^{(r)}(x, (y+z)_F; u) \frac{t^n}{F_n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n (-1)^{\binom{n-k}{2}} \binom{n}{k}_F A_{k,F}^{(r)}(x; u) (y+z)_F^{n-k} \right) \frac{t^n}{F_n!}$$

elde edilir ve yukarıdaki eşitlikte $\frac{t^n}{F_n!}$ 'in katsayıları eşitlenirse,

$$A_{n,F}^{(r)}(x, (y+z)_F; u) = \sum_{k=0}^n (-1)^{\binom{n-k}{2}} \binom{n}{k}_F A_{k,F}^{(r)}(x; u) (y+z)_F^{n-k}$$

elde edilir. Dolayısıyla ispatımız tamamlanır. ■

Sonuç 3.2 $z = 1$ için (3.11) eşitliği;

$$A_{n,F}^{(r)}(x, (y+1)_F; u) = \sum_{k=0}^n (-1)^{\binom{n-k}{2}} \binom{n}{k}_F A_{k,F}^{(r)}(x; u) (y+1)_F^{n-k} \quad (3.12)$$

şeklindedir.

Teorem 3.5 İki değişkenli Frobenius-Euler-Genocchi-Fibonacci polinomları aşağıdaki türev eşitliğini sağlar:

$$D_F^x \left\{ A_{n,F}^{(r)}(x, y; u) \right\} = F_n A_{n-1,F}^{(r)}(x, y; u). \quad (3.13)$$

İspat. Eşitlik (2.14) ü kullanarak, her iki tarafın x e göre F -türevini alalım.

$$\begin{aligned} D_F^x \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} A_{n,F}^{(r)}(x, y; u) \frac{t^n}{F_n!} \right\} &= D_F^x \left\{ \frac{1-u}{e_F^t - u} t^r e_F^{xt} E_F^{yt} \right\} \\ \sum_{n=0}^{\infty} D_F^x \left\{ A_{n,F}^{(r)}(x, y; u) \right\} \frac{t^n}{F_n!} &= \frac{1-u}{e_F^t - u} t^r e_F^{xt} E_F^{yt} t \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} A_{n,F}^{(r)}(x, y; u) \frac{t^n}{F_n!} t \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} A_{n,F}^{(r)}(x, y; u) \frac{t^{n+1}}{F_n!} \end{aligned}$$

elde ederiz. Son eşitlikten yola çıkarak

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} D_F^x \left\{ A_{n,F}^{(r)}(x, y; u) \right\} \frac{t^n}{F_n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} A_{n-1,F}^{(r)}(x, y; u) \frac{t^n}{F_{n-1}!} \\ \sum_{n=0}^{\infty} D_F^x \left\{ A_{n,F}^{(r)}(x, y; u) \right\} \frac{t^n}{F_n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} F_n A_{n-1,F}^{(r)}(x, y; u) \frac{t^n}{F_n!}\end{aligned}$$

dir. Yukarıdaki eşitlikte $\frac{t^n}{F_n!}$ 'in katsayıları eşitlenirse,

$$D_F^x \left\{ A_{n,F}^{(r)}(x, y; u) \right\} = F_n A_{n-1,F}^{(r)}(x, y; u)$$

elde edilir ve ispat biter. ■

Teorem 3.6 *İki değişkenli Frobenius-Euler-Genocchi-Fibonacci polinomları aşağıdaki türev eşitliğini sağlar:*

$$D_F^y \left\{ A_{n,F}^{(r)}(x, y; u) \right\} = F_n A_{n-1,F}^{(r)}(x, -y; u). \quad (3.14)$$

İspat. Eşitlik (2.15) ten dolayı, Eşitlik (3.1) de her iki tarafın y değişkenine göre F -türevini alalım. O halde

$$\begin{aligned}D_F^y \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} A_{n,F}^{(r)}(x, y; u) \frac{t^n}{F_n!} \right\} &= D_F^y \left\{ \frac{1-u}{e_F^t - u} t^r e_F^{xt} E_F^{yt} \right\} \\ \sum_{n=0}^{\infty} D_F^y \left\{ A_{n,F}^{(r)}(x, y; u) \right\} \frac{t^n}{F_n!} &= \frac{1-u}{e_F^t - u} t^r e_F^{xt} E_F^{-yt} t \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} A_{n,F}^{(r)}(x, -y; u) \frac{t^n}{F_n!} t \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} A_{n,F}^{(r)}(x, -y; u) \frac{t^{n+1}}{F_n!}\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan da

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} D_F^y \left\{ A_{n,F}^{(r)}(x, y; u) \right\} \frac{t^n}{F_n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} A_{n-1,F}^{(r)}(x, -y; u) \frac{t^n}{F_{n-1}!} \\ \sum_{n=0}^{\infty} D_F^y \left\{ A_{n,F}^{(r)}(x, y; u) \right\} \frac{t^n}{F_n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} A_{n-1,F}^{(r)}(x, -y; u) F_n \frac{t^n}{F_n!}\end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitlikte $\frac{t^n}{F_n!}$ 'in katsayıları eşitlenirse,

$$D_F^y \left\{ A_{n,F}^{(r)}(x, y; u) \right\} = F_n A_{n-1,F}^{(r)}(x, -y; u)$$

elde edilir ve ispat tamamlanır. ■

BÖLÜM 4

SONUÇ

Bu tez kapsamında, iki değişkenli Frobenius-Euler-Genocchi polinomları, Golden Calculus çerçevesinde incelenmiş ve bu bağlamda iki değişkenli Frobenius-Euler-Genocchi-Fibonacci polinomları tanımlanmıştır. Bu yeni tanım aracılığıyla, literatürde mevcut bazı çalışmalar genelleştirilmiş ve alana ilişkin çeşitli yeni özellikler ortaya konulmuştur.

Ayrıca, ilerleyen çalışmalarda bu polinomların diğer özel sayı dizileri veya polinom aileleri ile ilişkilerinin araştırılması, yeni fonksiyonel denklemlerin geliştirilmesi ve matematiksel fiziğe yönelik uygulamalarda kullanılması yönünde yapılacak çalışmaların, mevcut literatüre önemli katkılar sağlayacağı öngörülmektedir.



KAYNAKLAR

- [1] **Abramowitz M (Ed.) and Stegun I (Ed.)** (1965) *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. 9st edition, ISBN: 978-0486612720, Dover Publications, New York, 1072 pp.
- [2] **Alam N, Khan W A, Kızılateş C, Obeidat S, Ryoo C S and Diab N S** (2023) Some explicit properties of Frobenius–Euler–Genocchi polynomials with applications in computer modeling. *Symmetry*, 15 (7): 1358.
- [3] **Alatawi M S, Khan W A, Kızılateş C and Ryoo C S** (2024) Some properties of generalized Apostol-type Frobenius–Euler–Fibonacci polynomials. *Mathematics*, 12 (6): 800.
- [4] **Andrews G E, Askey R and Roy R** (1999) *Special Functions*. ISBN: 9781107325937, Cambridge University Press, New York, 664 pp.
- [5] **Arakawa T, Ibukiyama T and Kaneko M** (2014) *Bernoulli Numbers and Zeta Functions*. Springer, Tokyo, Japonya, 274 pp.
- [6] **Bayad A and Kim T** (2016) Identities for Apostol-type Frobenius–Euler polynomials resulting from the study of a nonlinear operator. *Russian Journal of Mathematical Physics*, 23 (2): 164-171.
- [7] **Carlitz L** (1959) Eulerian numbers and polynomials. *Mathematics Magazine*, 32 (5): 247-260.
- [8] **Carlitz L** (1969) Generating functions. *The Fibonacci Quarterly*, 7 (4): 359-393.
- [9] **Charalambides C A** (2002) *Enumerative Combinatorics*. 1st edition, ISBN: 9781315273112, Chapman and Hall/CRC Press, New York, e-book, 609 pp.
- [10] **Comtet L** (1974) *Advanced Combinatorics*. 1st edition, ISBN: 978-90-277-0441-2, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland, 343 pp.
- [11] **Guan H, Khan W A, Kızılateş C and Ryoo C S** (2024) On certain properties of parametric kinds of Apostol-type Frobenius–Euler–Fibonacci polynomials. *Axioms*, 13 (6): 348.
- [12] **Gülal E and Tuğlu N** (2023) Apostol Bernoulli-Fibonacci polynomials, Apostol Euler-Fibonacci polynomials and their generating functions. *Turkish Journal of Mathematics and Computer Science*, 15 (1): 203-211.

KAYNAKLAR (devam ediyor)

- [13] **Horadam A F** (1991) Genocchi polynomials. In: *Applications of Fibonacci Numbers, Vol. 4*, Springer, Dordrecht, Holland, 145-166.
- [14] **Kızılateş C and Öztürk H** (2023) On parametric types of Apostol Bernoulli-Fibonacci Apostol Euler-Fibonacci and Apostol Genocchi-Fibonacci polynomials via Golden Calculus. *AIMS Math*, 8:8386-8402.
- [15] **Kızılateş C** (2010) Gauss Binomiyel ve Fibonomiyel Katsayıların Özellikleri. *Yüksek Lisans Tezi*, Gazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Ankara, 52 s.
- [16] **Kim D S and Kim T** (2012) Some new identities of Frobenius-Euler numbers and polynomials. *Journal of Inequalities and Applications*, 1: 307.
- [17] **Kim T** (1999) On q -Analogue of the p -Adic Log Gamma Functions and Related Integrals. *Journal of Number Theory*, 76 (2): 320-329.
- [18] **Koshy T** (2019) *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications*. 2st edition, ISBN: 978-1118742129, Wiley, New York, 704 pp.
- [19] **Krot E** (2004) An introduction to finite fibonomial calculus. *Open Mathematics*, 2 (5): 754-766.
- [20] **Kuş S** (2020) Bernoulli Polinomlarının Genelleştirilmeleri ve Fibo-Bernoulli Matrisleri. *Doktora Tezi*, Gazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Ankara, 67 s.
- [21] **Kuş S, Tuğlu N and Kim T** (2019) Bernoulli F -polynomials and Fibo-Bernoulli matrices. *Advances in Difference Equations*, 1:145.
- [22] **Lucas E** (1876) *Les concerts classiques en France*. Sandoz & Fischbacher, Paris.
- [23] **Luo Q M and Srivastava H M** (2005) Some generalizations of the Apostol-Bernoulli and Apostol-Euler polynomials. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 308 (1): 290-302.
- [24] **Luo Q M and Srivastava H M** (2011) Some generalizations of the Apostol-Genocchi polynomials and the Stirling numbers of the second kind. *Applied Mathematics and Computation*, 217 (12): 5702-5728.
- [25] **Milne-Thomson L M** (2000) *The Calculus of Finite Differences*. American Mathematical Society, Providence, 558 pp.
- [26] **Norlund N E** (1924) *Vorlesungen über Differenzenrechnung*. ISBN: 9783642508240, Springer-Verlag, Berlin, 554 pp.

KAYNAKLAR (devam ediyor)

- [27] **Özvatan M** (2018) Generalized golden-Fibonacci calculus and applications. *Yüksek Lisans Tezi*, İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, İzmir, 152 s.
- [28] **Pashaev O K and Nalci S** (2011) Golden quantum oscillator and Binet–Fibonacci calculus. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 45 (1): 015303.
- [29] **Ponnusamy S** (2012) *Foundations of Mathematical Analysis*. 1st edition, ISBN: 978-0-8176-8291-0, Springer Science+Business Media, New York. 570 pp.
- [30] **Rainville E D** (1960) *Special Functions*. The Macmillan Company, New York, 365 pp.
- [31] **Schoenberg I J** (1973) *Cardinal Spline Interpolation*. ISBN: 9780898710090, SIAM, Philadelphia, 125 pp.
- [32] **Schoenberg I J** (1988) *Cardinal Spline Interpolation*. 1st edition, ISBN: 9780817634049, Springer Science+Business Media, 406 pp.
- [33] **Simsek Y** (2013) Generating functions for generalized Stirling type numbers, array type polynomials, Eulerian type polynomials and their applications. *Fixed Point Theory and Applications*, 87.
- [34] **Srivastava H M and Choi J** (2001) *Series Associated with the Zeta and Related Functions*. 530. Cilt, ISBN: 9780792370543, Springer Science, Business Media, Berlin, 388pp.
- [35] **Srivastava H M and Choi J** (2011) *Zeta and q-Zeta Functions and Associated Series and Integrals*. ISBN: 9780123852199, e-book, Elsevier, Amsterdam, 674 pp.
- [36] **Srivastava H M ve Choi J** (2012) *Zeta and q-Zeta Functions and Associated Series and Integrals*. Elsevier, Amsterdam, 657pp.
- [37] **Srivastava H M** (2011). Some generalizations and basic (or q-) extensions of the Bernoulli, Euler and Genocchi polynomials. *Appl. Math. Inf. Sci*, 5 (3):390-444.
- [38] **Tuğlu N, Kuş S and Kızılateş C** (2024) A study of harmonic Fibonacci polynomials associated with Bernoulli-F and Euler–Fibonacci polynomials. *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 55: 1129-1141.
- [39] **Urieles A, Ramírez W, Ha L C P, Ortega M J and Arenas-Penaloza J** (2024) On F-Frobenius–Euler polynomials and their matrix approach. *Journal of Mathematics and Computer Science*, 32: 377-386.
- [40] **Vajda S** (1989) *Fibonacci & Lucas Numbers, and Golden Section Theory and Applications*. ISBN: 9780470215081, Ellis Horwood Series in Mathematics and Applications, New York, 189 pp.

KAYNAKLAR (devam ediyor)

- [41] **Weisstein E W** (2003) Fibonacci number. *MathWorld—A Wolfram Web Resource*. Adres: <https://mathworld.wolfram.com>.
- [42] **Yasar B Y and Ozarslan M A** (2015) Frobenius-Euler and Frobenius-Genocchi polynomials and their differential equations. *New Trends in Mathematical Sciences*, 3 (2):172-180.
- [43] **Zou Q** (2017) Identities on Genocchi polynomials and Genocchi numbers concerning binomial coefficients. *International Journal of Analysis and Applications*, 14 (2): 140-146.



ÖZGEÇMİŞ

Selma KULAÇ, İlk ve Ortaöğrenimini İstanbul’da tamamladıktan sonra, 2011 yılında başladığı Hacettepe Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünden 2015 yılında mezun olmuştur. 2021 yılında Milli Eğitim Bakanlığında Matematik Öğretmeni olarak görevine başlamış olup, halen Zonguldak’ta Matematik Öğretmeni olarak görevine devam etmektedir.

