



**T. C.  
SIVAS CUMHURİYET ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**YAKIN KÜMELERİN TOPOLOJİK YAPILARI**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**SÜLEYMAN SARIKAYA  
(20189237003)**

**Matematik Ana Bilim Dalı**

**Tez Danışmanı: Doç. Dr. Serkan ATMACA**

**SİVAS  
MART 2022**

**Süleyman SARIKAYA'nun hazırladığı ve “YAKIN KÜMELERİN TOPOLOJİK YAPILARI” adlı bu çalışma aşağıdaki jüri tarafından MATEMATİK ANA BİLİM DALI'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.**

**Tez Danışmanı**      **Doç. Dr. Serkan ATMACA**  
Sivas Cumhuriyet Üniversitesi      .....

**Jüri Üyesi**              **Prof. Dr. Yavuz ALTIN**  
Fırat Üniversitesi              .....

**Jüri Üyesi**              **Prof. Dr. İdris ZORLUTUNA**  
Sivas Cumhuriyet Üniversitesi      .....

Bu tez, Sivas Cumhuriyet Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak onaylanmıştır.

**Prof. Dr. Özlem Pelin CAN**  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRÜ

Bu tez, Sivas Cumhuriyet Üniversitesi Senatosu'nun 20.08.2014 tarihli ve 7 sayılı kararı ile kabul edilen Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Tez Yazım Kılavuzu (Yönerge)'nda belirtilen kurallara uygun olarak hazırlanmıştır.



*Bu tez, Sivas Cumhuriyet Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri (CÜBAP) Komisyonu tarafından **F-610** Nolu proje kapsamında desteklenmiştir.*



Bütün hakları saklıdır.  
Kaynak göstermek koşuluyla alıntı ve gönderme yapılabilir.

© Süleyman SARIKAYA, 2022



Çalışma sırasında bana destek olan aileme ve nişanlıma...

## ETİK

Sivas Cumhuriyet Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Tez Yazım Kılavuzu (Yönerge)'nda belirtilen kurallara uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- ✓ Bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- ✓ Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- ✓ Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere, bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu ve atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- ✓ Bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- ✓ Tezin herhangi bir bölümünü, Sivas Cumhuriyet Üniversitesi veya bir başka üniversitede, bir başka tez çalışması olarak sunmadığımı; beyan ederim.

29.03.2022

Süleyman SARIKAYA

## **KATKI BELİRTME VE TEŞEKKÜR**

Bilgi ve deneyimlerinden sürekli yararlandığım, tezin her aşamasında yardımlarını esirgemeyen danışman hocam Doç. Dr. Serkan ATMACA'ya çok teşekkür ederim. Ayrıca bu tez çalışmamı F-610 numaralı proje ile destekleyen Sivas Cumhuriyet Üniversitesi Bilimsel Araştırma Başkanlığına teşekkür sunarım.



## ÖZET

### YAKIN KÜMELERİN TOPOLOJİK YAPILARI

SÜLEYMAN SARIKAYA

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Serkan ATMACA

2022, 43+x sayfa

Belirsizlik içeren küme teorilerinden başlıca iki tanesini tanıtmayı amaçlayan bu tez iki ana bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, belirsizliklerin incelenmesinde önemli bir kilometre taşı olan kaba kümeler ve özellikleri tanıtılmıştır. 3 alt bölümden oluşan ikinci bölümde ise birinci alt bölümde kaba küme teorisinin bir genellemesi olan yakın kümeler ve özellikleri tanıtılmıştır. İkinci alt bölümde ise  $r$ -yakın topolojik uzaylar ve temel kavramları tanıtılmıştır. Tezin orijinal kısmı olan üçüncü alt bölümde ise  $r$ -yakın taban ve  $r$ -yakın alt uzaylara giriş yapılmış temel özellikleri incelenmiştir.

**Anahtar kelimeler:** Kaba Kümeler, Yakın Kümeler,  $r$ -Yakın Topolojik Uzaylar

## **ABSTRACT**

### **TOPOLOGICAL STRUCTURES OF NEAR SETS**

**SÜLEYMAN SARIKAYA**

**Master of Science Thesis**

**Department of Mathematics**

**Supervisor: Assoc. Prof.Dr. Serkan ATMACA**

**2022, 43+x pages**

This thesis, which aims to introduce two of the main uncertainty-containing set theories, consists of two main parts.

In the first chapter, rough sets and their properties, which are an important milestone in the study of uncertainties, are introduced. In the second part, which consists of 3 subsections, close sets, which are a generalization of rough set theory, and their properties are introduced in the first subsection. In the second subsection,  $r$ -near topological spaces and their basic concepts are introduced. In the third subsection, which is the original part of the thesis, the basic properties of  $r$ -near base and  $r$ -close subspaces are examined.

**Key Words:** Rough Sets, Near Sets,  $r$ -Near Topological Spaces.

# İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
<b>ÖZET</b> .....	iv
<b>ABSTRACT</b> .....	v
<b>TEŞEKKÜR</b> .....	vi
<b>1. GİRİŞ</b> .....	1
<b>2. Kaba Kümeler</b> .....	5
<b>3. Yakın Kümeler</b> .....	19
3.1 Temel Kavramlar.....	19
3.2 r-Yakın Topolojik Uzaylar .....	24
3.3 r-Yakın Taban ve r-Yakın Alt Uzaylar .....	37
<b>KAYNAKLAR</b> .....	43
<b>ÖZGEÇMİŞ</b>	

## 1. GİRİŞ

Küme teorisi Matematiğin en karmaşık alanlarından bir tanesidir. Bunun nedeni küme kavramının kesin bir tanımının verilememesidir. Günümüzde kullanılan modern küme teorisi George Cantor tarafından öne sürülmüştür. Fakat bu teoride yine küme kavramının muğlaklığını aşamamıştır. Cantor teorisinin bu aksaklıklarının aksiyomlarla giderilmesi fikrini savunarak birçok aksiyomla teorisinin eksik alanlarını açıklamaya çalışmıştır. Öte yandan küme teorisi, tüm matematik için temeldir ve matematik, tüm matematiksel kavramların kesin olmasını gerektirir. Bu nedenle klasik küme teoride küme kavramına ait tek bilimiz kümenin elemanlarının kesinliğidir. Yani bir eleman küme ya aittir ya da değildir.

Küme kavramının kesinliğine rağmen etrafımız belirsiz verilerle doludur. Örneğin dil bilimsel veriler kişiye, zamana ve mekâna göre değişiklik gösterebilir. Bu nedenle hammaddesi dilbilimsel veriler olan bilgisayar bilimleri, ekonomi, mühendislik ve benzeri birçok bilim alanında klasik küme teorisinin başarılı bir biçimde uygulanması mümkün değildir. Bununla beraber bu gereksinim doğrultusunda 20. yüzyılın ortalarında klasik küme teorisini temel alan belirsizlik içeren küme teorileri ortaya çıkmaya başlamıştır. Bunlardan en popüler olan ikisi kuşkusuz bulanık kümeler ve kaba kümelerdir. Bu teoriler belirsizliği modellemek için klasik küme teorisinin genellemeleridir. Bulanık kümeler 1965'te Lotfi Zadeh tarafından ortaya atılmıştır. Bulanık kümeler klasik küme tanımında kullanılan kesin üyeliğin aksine, kümenin elemanlarına kümeye ait olma derecesi vererek tanımlanır. Burada bu derece 0 ve 1 aralığında bir sayıdır. Öte yandan 1982'de Z. Pawlak tarafından tanımlanan kaba küme teorisi, belirsizliği üyelik yoluyla değil, bir kümenin sınır bölgesini kullanarak ifade eder. Burada sınır bölgesi kümeyi tam olarak anlamak için yeterli bir araçtır. Bir kümenin sınır bölgesi boşsa, küme kaba olmayandır, aksi takdirde küme kabadır (kesin değildir). Bulanık kümeler ve Kaba kümeler, klasik küme teorisine bir alternatif değildir. Aksine içerisinde küme kavramını bulundurlar. Dolayısıyla bu teorilerden klasik küme teorisini temel alan belirsizlikleri modelleyen yeni araçlar olarak bahsetmek daha doğru bir yaklaşımdır.

Kaba küme teoride aynı bilgi ile karakterize edilen nesnelere ayırt edilemez olarak tanımlanır. Bu şekilde oluşturulan ayırt edilemezlik bağıntısı, kaba küme teorisinin matematiksel temelini teşkil eder. Ayrıca bu bağıntı bir denklik bağıntısıdır ve evreni denklik sınıflarına ayırır. Pawlak'ın kaba kümelerinde denklik sınıfları, alt ve üst yaklaşımların inşası için yapı taşlarıdır. Alt yaklaşım, kesinlikle kümeyle ait olan tüm nesnelere oluşur. Yani kümenin alt kümesi olan tüm denklik sınıflarının birleşimidir. Üst yaklaşım, kümeyle ait olabilecek tüm nesnelere içerir. Yani, küme ile boş olmayan bir kesişimi olan tüm denklik sınıflarının birleşimidir. Böylece kaba kümelerin özellikleri, bölüm kümeleri veya denklik sınıfları aracılığıyla incelenebilir. Üst ve alt yaklaşım arasındaki fark, kaba kümelerin sınır bölgesini oluşturur. Bu yaklaşımlar, kaba küme teorisinin temel kavramlarıdır.

Kaba küme teorisi, gelişimine ve uygulamalarına esas olarak katkıda bulunan birçok araştırmacı ve uygulamacının dünya çapında dikkatini çekmiştir. Kaba küme teorisi, diğer birçok teori ile örtüşmektedir. Dolayısıyla kaba küme teorisi başlı başına bağımsız bir disiplin olarak kabul edilebilir. Pratik açıdan bakıldığında, kaba küme teorisi, yapay zekâ ve bilişsel bilimler, makine öğrenimi, akıllı sistemler, tümevarımsal akıl yürütme, örüntü tanıma, görüntü işleme, sinyal analizi, bilgi keşfi, karar analizi gibi birçok alanda uygulama bulmuştur. Veri analizinde kaba küme teorisinin temel avantajı, istatistikteki olasılık dağılımları, Dempster-Shafer teorisindeki temel olasılık atamaları, bir üyelik derecesi veya bulanık kümedeki olasılık değeri gibi veriler hakkında herhangi bir ön veya ek bilgiye ihtiyaç duymamasıdır.

J.F. Peters ve Z. Pawlak tarafından 2002 yılında yazılan “Ne Kadar Yakın” başlıklı bir şiirden ilham alınarak nesnelere yakınlığının algılanması üzerinde çalışmaya başladılar. Şiirin teması, insanın yakınlık algısı, kar tanelerinin ağaçlara yakınlığı ve buz sarkıtlarının zemine yakınlığı gibi görüntüleri aktarmasıdır.

Ne kadar yakın;

Bir ağacın kabuğuna sürüklenen kar taneleri ne kadar yakın,

Kışın gökyüzünden aşağı doğru hafif hafif ve dönerek mi?

Buz sarkıtları yere ne kadar yakın,

Pencere kenarlarında birikintiler yavaşça mı oluşuyor?

Bazen bazı ağaçların karla kaplı dalları sarkar,  
Bazıları yere yakın,  
Bazıları zaman zaman rüzgârda sallanır,  
Bazıları kar yağarken neredeyse birbirine değiyor,  
Bazıları bale dansçılarının uzuvlarına benzeyen şekillerle,  
Bazıları kar yağışı ve rüzgardan korunan pürüzlü kenarlara sahiptir,  
ve daha sonra,  
Bir şekilde,  
Sabah güneşinde yeniden doğar.  
Ne kadar yakın...

Z. Pawlak ve J.F. Peters,

Bahar, 2002

Yakınlık, günlük hayatımızda işlev görmemizi sağlayan sezgisel bir kavramdır. Günlük konuşmalarımızda çevremizdeki şeylerin yakınlığını özetlemek için pek çok zarflar ve sıfatlar kullanırız. Örneğin; "senin kadar zayıftı" veya "bu arabalar birbirine benziyor" gibi ifadeler aynı olmayan nesnelere benzetmeler yapma sıklığımızı gösterir ve bazı ortak özellikleri verir. Dolayısıyla yakınlık kavramı ile günlük hayatımızın birçok alanında sıkça karşılaşırız. 2007 yılında Peters belirsizliklerin incelenmesinde yeni bir teori olan yakın küme teorisini "Near sets. Special theory about nearness of objects" isimli makalesinde tanıtmıştır. Peters, bu makalesinde nesnelere yakınlığını ve dolayısıyla nesnelere mevcut bilgilerine göre evrensel kümeyi sınıflandırmanın nesnelere özelliklerine bağlı olduğu fikrini ileri sürmüştür. Bu teoride indirgenemezlik bağıntısı, kaba kümelerdeki herhangi bir denklik bağıntısı ile değil nesne özelliklerini veren fonksiyonların her bir alt kümesinin oluşturduğu denklik bağıntıları yardımıyla kurulur. Yakın kümelerde bulunan yakınlık, kaba kümelerdeki eşlikten ziyade nesnelere ortak özelliklerini nitelemektir. Bu ortak özellik sayısı ne kadar fazla ise nesnelere birbirine o kadar yakındır.

Yakın kümeler matematik, bilgisayar bilimleri ve mühendislik gibi birçok bilim alanının çeşitli dallarında bilim adamları tarafından çalışılmış ve geniş bir çalışma yelpazesine sahip olmuştur. Yakın küme teorisinin uygulamasının diğer örnekleri şunları içerir: otomatik bir yüz özelliği çıkarma işleminde özelliklerin be-

lirlenmesi, görüntülü yazıma, uyarlanabilir öğrenme, etoogramlar ve son olarak görüntü morfolojisi ve segmentasyon değerlendirmesi.

Belirsizlikler üzerine iki önemli teori olan kaba kümeler ve yakın kümeler üzerine olan bu tez iki ana bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde kaba küme teorisi ile ilgili temel tanımlamalar ve örnekler verilerek, bu teorinin temel özellikleri teorem ve örneklerle açıklanmaya çalışılacaktır. Üç alt bölümden oluşan ikinci bölümün birinci alt bölümünde yakın kümelerin temel tanım ve örnekleri tanıtılmıştır. İkinci alt bölümde ise  $r$ -yakın topolojik uzaylar ve bu kavramın sağladığı temel özellikler verilmiştir. Son olarak tezin orijinal kısmı olan üçüncü alt bölümde ise  $r$ -yakın alt uzay ve  $r$ -yakın taban kavramları tanımlanarak bu kavramların sağladığı özellikler örnek ve teoremlerle açıklanmaya çalışılmıştır.

## 2. KABA KÜMELER

Belirsizliklerin incelemesinde önemli bir araç olan kaba küme teorisi Pawlak tarafından 1982 yılında tanımlanmıştır. Bu teori bilgi sistemlerindeki kararsız ve belirsiz verilerin anlaşılması için matematiksel bir araç olarak ortaya atılmıştır. Dolayısıyla veri madenciliği, makine öğrenimi, örüntü tanıma, görüntü işleme, tıbbi olaylar gibi birçok bilim ve mühendislik alanında uygulanmıştır. Kaba kümeler alt ve üst yaklaşımlar olarak adlandırılan temel yaklaşımlar ile tanımlanır. Bu yaklaşımlar indirgenemezlik bağıntısı olarak adlandırılan bir denklik bağıntısı yardımıyla elde edilir. Alt yaklaşım kümenin alt kümesi olan denklik sınıflarının birleşimi iken üst yaklaşım küme ile arakesiti boştan farklı olan denklik sınıflarının birleşimidir. Kaba kümeler hakkında detaylı bilgi için Şimdi bu teorinin temel tanım ve örneklerinden bahsedelim.

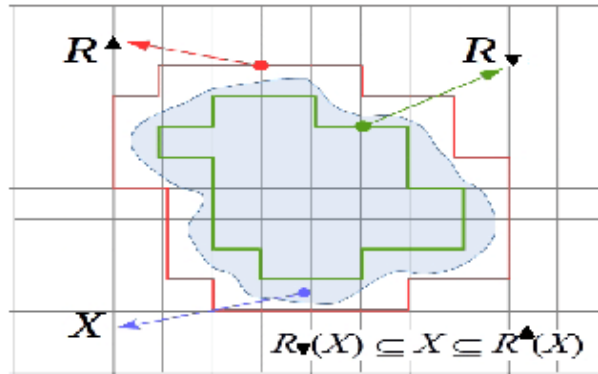
**Tanım 2.0.1**  $X$  nesnelerin boştan farklı bir kümesi,  $A \subseteq X$  ve  $R$ ,  $X$  üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. Bu durumda  $A$  kümesinin alt, üst ve sınır yaklaşımları sırasıyla;

$$\begin{aligned} R^\blacktriangle(A) &= \{x \in X : [x] \subset A\} = \bigcup_{[x] \subset A} [x] \\ R_\blacktriangledown(A) &= \{x \in X : [x] \cap A \neq \emptyset\} = \bigcup_{[x] \cap A \neq \emptyset} [x] \\ BN_R(A) &= R^\blacktriangle(A) - R_\blacktriangledown(A) \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanır. Burada  $[x]$ ,  $x$  elemanın  $R$  bağıntısına göre denklik sınıfını göstermektedir (Pawlak, 1982).

1

1.png



**Tanım 2.0.2**  $X$  nesnelere boştan farklı bir kümesi,  $A \subseteq X$  ve  $R$ ,  $X$  üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. Bu durumda  $A$  kümesinin pozitif ve negatif yaklaşımları sırasıyla;

$$POS_R(A) = R_{\blacktriangledown}(A)$$

$$NEG_R(A) = X - R^{\blacktriangle}(A)$$

biçiminde tanımlanır (Pawlak, 1982).

**Örnek 2.0.1**  $X = \{a, b, c, d, e, f\}$  ve  $X$  üzerinde  $R = \{(a, a), (b, b), (b, c), (b, d), (c, b), (c, c), (c, d), (d, b), (d, c), (d, d), (e, e), (e, f), (f, e), (f, f)\}$  denklik bağıntısı verilsin. Buna göre  $R$  nin denklik sınıfları aşağıdaki gibidir.

$$[a] = \{a\}$$

$$[b] = [c] = [d] = \{b, c, d\}$$

$$[e] = [f] = \{e, f\}$$

$A = \{c, e, f\} \subset X$  kümesi için

$$R^{\blacktriangle}(X) = \{b, c, d, e, f\}$$

$$R_{\blacktriangledown}(X) = \{e, f\}$$

$$BN_R(X) = R^{\blacktriangle}(X) - R_{\blacktriangledown}(X) = \{b, c, d\}$$

biçimindedir.

**Örnek 2.0.2**  $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}\}$  nesnelere bir kümesi,  $F = \{a_1, a_2, a_3\}$  niteliklerin kümesi ve  $V_{a_1} = \{1, 2, 3\}$ ,  $V_{a_2} = \{1, 2\}$ ,  $V_{a_3} = \{1, 2, 3, 4\}$  kümeleri de her bir niteliğin aldığı değerlerin kümelerini gösterebilir. Yukarıda verilen 10 nesnenin sahip olduğu nitelikleri bir matris formunda aşağıdaki gibi verelim.

$X$	$a_1$	$a_2$	$a_3$
$x_1$	2	1	3
$x_2$	3	2	1
$x_3$	2	1	3
$x_4$	2	2	3
$x_5$	1	1	4
$x_6$	1	1	2
$x_7$	3	2	1
$x_8$	1	1	4
$x_9$	2	1	3
$x_{10}$	3	2	1

yukarıdaki şekilde verilen verilere göre  $[x_i]$ ,  $x_i$  elemanının denklik sınıfını göstermek üzere  $[x_i] = \{x_j : x_j, x_i \text{ ile aynı değerlere sahip, } 1 \leq i \leq 10 \text{ ve } 1 \leq j \leq 10\}$  şeklinde tanımlansın. Buna göre

$$\begin{aligned}
[x_1] &= [x_3] = [x_9] = \{x_1, x_3, x_9\} \\
[x_2] &= [x_7] = [x_{10}] = \{x_2, x_7, x_{10}\} \\
[x_4] &= \{x_4\} \\
[x_5] &= [x_8] = \{x_5, x_8\} \\
[x_6] &= \{x_6\}
\end{aligned}$$

denklik sınıfları biçimindedir.  $X$  in  $A = \{x_1, x_3, x_4, x_5, x_9\}$  alt kümesi için

$$\begin{aligned}
R^\blacktriangle(A) &= \{x_1, x_3, x_4, x_5, x_8, x_9\} \\
R^\blacktriangledown(A) &= \{x_1, x_3, x_4, x_9\} \\
BN_R(A) &= \{x_5, x_8\}
\end{aligned}$$

biçimindedir (Aktas ve Çağman, 2005).

**Tanım 2.0.3**  $X$  nesnelerin boştan farklı bir kümesi,  $A \subseteq X$ ,  $R$ ,  $X$  üzerinde bir denklik bağıntısı ve  $\mathcal{U} \subseteq X/R$  olsun. Bu durumda  $A = \cup_{[x] \in \mathcal{U}} [x]$  ise  $A$  ya kaba olmayan küme denir.

$X$  deki  $R$  bağıntısına göre kaba olmayan bütün kümelerin ailesi  $R^X$  ile gösterilir (Bonikowski, 1992).

**Sonuç 2.0.1**  $X$  nesnelere boştan farklı bir kümesi,  $A \subseteq X$  ve  $R$ ,  $X$  üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir (Bonikowski, 1992).

- (i)  $A \in R^X$
- (ii)  $A = R^\blacktriangle(A)$
- (iii)  $A = R_\blacktriangledown(A)$

**Örnek 2.0.3**  $X = \{a, b, c, d\}$  ve  $X$  üzerinde  $R = \{(a, a), (b, b), (b, c), (c, b), (c, c), (d, d)\}$  denklik bağıntısı verilsin. Buna göre  $R$  nin denklik sınıfları aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} [a] &= \{a\} \\ [b] &= [c] = \{b, c\} \\ [d] &= \{d\} \end{aligned}$$

$A = \{b, c, d\} \subset X$  kümesi için

$$\begin{aligned} R^\blacktriangle(X) &= \{b, c, d\} \\ R_\blacktriangledown(X) &= \{b, c, d\} \\ BN_R(X) &= R^\blacktriangle(X) - R_\blacktriangledown(X) = \emptyset \end{aligned}$$

biçimindedir. Bu durumda  $A$  kümesi kaba olmayan kümeye bir örnektir.

**Teorem 2.0.1**  $X$  nesnelere bir kümesi,  $A, B \subseteq X$  ve  $R$ ,  $X$  üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. Buna göre aşağıdakiler doğrudur (Pawlak, 1982 ve Bonikowski, 1992).

- (i)  $R_\blacktriangledown(A) \subseteq A \subseteq R^\blacktriangle(A)$
- (ii)  $R_\blacktriangledown(X) = R^\blacktriangle(X) = X$
- (iii)  $R_\blacktriangledown(\emptyset) = R^\blacktriangle(\emptyset) = \emptyset$
- (iv)  $R^\blacktriangle(A \cup B) = R^\blacktriangle(A) \cup R^\blacktriangle(B)$
- (v)  $R_\blacktriangledown(A \cap B) = R_\blacktriangledown(A) \cap R_\blacktriangledown(B)$
- (vi)  $R_\blacktriangledown(A \cup B) \supseteq R_\blacktriangledown(A) \cup R_\blacktriangledown(B)$
- (vii)  $R^\blacktriangle(A \cap B) \subseteq R^\blacktriangle(A) \cap R^\blacktriangle(B)$
- (viii)  $A \subseteq B \Rightarrow R_\blacktriangledown(A) \subseteq R_\blacktriangledown(B), R^\blacktriangle(A) \subseteq R^\blacktriangle(B)$
- (ix)  $R_\blacktriangledown(X \setminus A) = X \setminus R^\blacktriangle(A)$
- (x)  $R^\blacktriangle(X \setminus A) = X \setminus R_\blacktriangledown(A)$
- (xi)  $R_\blacktriangledown(R_\blacktriangledown(A)) = R^\blacktriangle(R_\blacktriangledown(A)) = R_\blacktriangledown(A)$
- (xii)  $R^\blacktriangle(R^\blacktriangle(A)) = R_\blacktriangledown(R^\blacktriangle(A)) = R^\blacktriangle(A)$

$$(xiii) R_{\blacktriangledown}(A \setminus B) \subseteq R_{\blacktriangledown}(A) \setminus R_{\blacktriangledown}(B)$$

$$(xiv) R^{\blacktriangle}(A) \setminus R^{\blacktriangle}(B) \subseteq R^{\blacktriangle}(A \setminus B)$$

**İspat.** (i)

$$\begin{aligned} x \in R_{\blacktriangledown}(A) &\Rightarrow x \in \bigcup_{[x] \subset A} [x] \\ &\Rightarrow \exists [x] \text{ için } x \in [x] \subseteq A \\ &\Rightarrow x \in A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \in A &\Rightarrow x \in A \text{ ve } x \in [x] \\ &\Rightarrow x \in [x] \cap A \\ &\Rightarrow x \in \bigcup_{[x] \cap A \neq \emptyset} [x] \\ &\Rightarrow x \in R^{\blacktriangle}(A) \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} R_{\blacktriangledown}(X) &= \bigcup_{[x] \subset X} [x] \\ &= X \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R^{\blacktriangle}(X) &= x \in \bigcup_{[x] \cap X \neq \emptyset} [x] \\ &= \text{En az bir } [x] \cap X \neq \emptyset \text{ için } x \in [x] \\ &= X \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned} R_{\blacktriangledown}(\emptyset) &= x \in \bigcup_{[x] \subset \emptyset} [x] \\ &= \exists [x] \subset \emptyset \text{ için } x \in [x] \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R^{\blacktriangle}(\emptyset) &= \bigcup_{[x] \cap \emptyset \neq \emptyset} [x] \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{aligned}x \in R^\blacktriangle(A \cup B) &\Leftrightarrow x \in \bigcup_{[x] \cap (A \cup B) \neq \emptyset} [x] \\&\Leftrightarrow \exists [x] \cap (A \cup B) \neq \emptyset \text{ için } x \in [x] \\&\Leftrightarrow \exists [x] \cap A \neq \emptyset \text{ için } x \in [x] \text{ veya } \exists [x] \cap B \neq \emptyset \text{ için } x \in [x] \\&\Leftrightarrow x \in R^\blacktriangle(A) \text{ veya } x \in R^\blacktriangle(B) \\&\Leftrightarrow x \in R^\blacktriangle(A) \cup R^\blacktriangle(B)\end{aligned}$$

(v)

$$\begin{aligned}x \in R^\blacktriangledown(A \cap B) &\Leftrightarrow x \in \bigcup_{[x] \subset A \cap B} [x] \\&\Leftrightarrow \exists [x] \subset A \cap B \text{ için } x \in [x] \\&\Leftrightarrow \exists [x] \subset A \text{ için } x \in [x] \text{ ve } \exists [x] \subset B \text{ için } x \in [x] \\&\Leftrightarrow x \in R^\blacktriangledown(A) \text{ ve } x \in R^\blacktriangledown(B) \\&\Leftrightarrow x \in R^\blacktriangle(A) \cap R^\blacktriangle(B)\end{aligned}$$

(vi)

$$\begin{aligned}x \in R^\blacktriangledown(A) \cup R^\blacktriangledown(B) &\Rightarrow x \in R^\blacktriangledown(A) \text{ veya } x \in R^\blacktriangledown(B) \\&\Rightarrow x \in \bigcup_{[x] \subset A} [x] \text{ veya } x \in \bigcup_{[x] \subset B} [x] \\&\Rightarrow \exists [x] \subset A \text{ için } x \in [x] \text{ veya } \exists [x] \subset B \text{ için } x \in [x] \\&\Rightarrow \exists [x] \subset A \cup B \text{ için } x \in [x] \\&\Rightarrow x \in R^\blacktriangledown(A \cup B).\end{aligned}$$

(vii)

$$\begin{aligned}x \in R^\blacktriangle(A \cap B) &\Rightarrow x \in \bigcup_{[x] \cap (A \cap B) \neq \emptyset} [x] \\&\Rightarrow \exists [x] \cap (A \cap B) \neq \emptyset \text{ için } x \in [x] \\&\Rightarrow \exists [x] \cap A \neq \emptyset \text{ için } x \in [x] \text{ ve } \exists [x] \cap B \neq \emptyset \text{ için } x \in [x] \\&\Rightarrow x \in R^\blacktriangle(A) \text{ ve } x \in R^\blacktriangle(B) \\&\Rightarrow x \in R^\blacktriangle(A) \cap R^\blacktriangle(B)\end{aligned}$$

(viii)

$$x \in R_{\blacktriangledown}(A) \Rightarrow x \in \bigcup_{[x] \subset A} [x]$$

$$\Rightarrow x \in \bigcup_{[x] \subset B} [x]$$

$$\Rightarrow x \in R_{\blacktriangledown}(B)$$

$$x \in R^{\blacktriangle}(A) \Rightarrow x \in \bigcup_{[x] \cap A \neq \emptyset} [x]$$

$$\Rightarrow x \in \bigcup_{[x] \cap B \neq \emptyset} [x]$$

$$\Rightarrow x \in R^{\blacktriangle}(B)$$

(ix)

$$x \in R_{\blacktriangledown}(X \setminus A) \Leftrightarrow x \in \bigcup_{[x] \subset X \setminus A} [x]$$

$$\Leftrightarrow \exists [x] \subset X \setminus A \text{ için } x \in [x]$$

$$\Leftrightarrow \exists [x] \cap A = \emptyset \text{ için } x \in [x]$$

$$\Leftrightarrow x \notin R^{\blacktriangle}(A)$$

$$\Leftrightarrow x \in X \setminus R^{\blacktriangle}(A)$$

(x)

$$x \in R^{\blacktriangle}(X \setminus A) \Leftrightarrow \exists [x] \cap (X \setminus A) \neq \emptyset \text{ için } x \in [x]$$

$$\Leftrightarrow \exists [x] \not\subset A \text{ için } x \in [x]$$

$$\Leftrightarrow x \in R_{\blacktriangledown}(A)$$

(xi)

$$\begin{aligned}x \in R_{\blacktriangledown}(R_{\blacktriangledown}(A)) &\Leftrightarrow x \in \bigcup_{[x] \subset R_{\blacktriangledown}(A)} [x] \\&\Leftrightarrow \exists [x] \subset R_{\blacktriangledown}(A) \text{ için } x \in [x] \\&\Leftrightarrow \exists [x] \subset \bigcup_{[x] \subset A} [x] \text{ için } x \in [x] \\&\Leftrightarrow x \in \bigcup_{[x] \subset A} [x] \\&\Leftrightarrow x \in R_{\blacktriangledown}(A)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x \in R^{\blacktriangle}(R_{\blacktriangledown}(A)) &\Leftrightarrow x \in \bigcup_{[x] \cap (R_{\blacktriangledown}(A)) \neq \emptyset} [x] \\&\Leftrightarrow \exists [x] \cap (R_{\blacktriangledown}(A)) \neq \emptyset \text{ için } x \in [x] \\&\Leftrightarrow \exists [x] \cap \left( \bigcup_{[x] \subset A} [x] \right) \neq \emptyset \text{ için } x \in [x] \\&\Leftrightarrow \exists [x] \subset A \text{ için } x \in [x] \\&\Leftrightarrow x \in \bigcup_{[x] \subset A} [x] \\&\Leftrightarrow x \in R_{\blacktriangledown}(A)\end{aligned}$$

(xii)

$$\begin{aligned}x \in R^{\blacktriangle}(R^{\blacktriangle}(A)) &\Leftrightarrow x \in \bigcup_{[x] \cap (R^{\blacktriangle}(A)) \neq \emptyset} [x] \\&\Leftrightarrow x \in \exists [x] \cap (R^{\blacktriangle}(A)) \neq \emptyset \text{ için } x \in [x] \\&\Leftrightarrow x \in \exists [x] \cap \left( \bigcup_{[x] \cap A \neq \emptyset} [x] \right) \neq \emptyset \text{ için } x \in [x] \\&\Leftrightarrow x \in \exists [x] \cap A \neq \emptyset \text{ için } x \in [x] \\&\Leftrightarrow x \in \bigcup_{[x] \cap A \neq \emptyset} [x] \\&\Leftrightarrow x \in R^{\blacktriangle}(A)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x \in R_{\blacktriangledown}(R^{\blacktriangle}(A)) &\Leftrightarrow x \in \bigcup_{[x] \subset R^{\blacktriangle}(A)} [x] \\&\Leftrightarrow \exists [x] \subset R^{\blacktriangle}(A) \text{ için } x \in [x] \\&\Leftrightarrow \exists [x] \subset \left( \bigcup_{[x] \cap A \neq \emptyset} [x] \right) \text{ için } x \in [x] \\&\Leftrightarrow x \in \exists [x] \cap A \neq \emptyset \text{ için } x \in [x] \\&\Leftrightarrow x \in R^{\blacktriangle}(A)\end{aligned}$$

(xiii)

$$\begin{aligned}x \notin R_{\blacktriangledown}(A) \setminus R_{\blacktriangledown}(B) &\implies x \notin R_{\blacktriangledown}(A) \text{ ve } x \in R_{\blacktriangledown}(B) \\&\implies x \notin \bigcup_{[y] \subset A} [y] \text{ ve } x \in \bigcup_{[z] \subset B} [z] \\&\implies \forall [y] \subset A \text{ için } x \notin [y] \text{ ve } \exists [z] \subset B \text{ için } x \in [z] \\&\implies \forall [y] \subset A \text{ için } x \notin [y] \text{ ve } \forall [y] \subsetneq B \text{ için } x \notin [y] \\&\implies \forall [y] \subset A \setminus B \text{ için } x \notin [y] \\&\implies x \notin \bigcup_{[y] \subset A \setminus B} [y] \\&\implies x \notin R_{\blacktriangledown}(A \setminus B)\end{aligned}$$

(xiv)

$$\begin{aligned}x \in R^{\blacktriangle}(A) \setminus R^{\blacktriangle}(B) &\implies x \in R^{\blacktriangle}(A) \text{ ve } x \notin R^{\blacktriangle}(B) \\&\implies x \in \bigcup_{[y] \cap A \neq \emptyset} [y] \text{ ve } x \notin \bigcup_{[z] \cap B \neq \emptyset} [z] \\&\implies \exists [y] \cap A \neq \emptyset \text{ için } x \in [y] \text{ ve } \forall [z] \cap B \neq \emptyset \text{ için } x \notin [z] \\&\implies \exists [y] \cap A \neq \emptyset \text{ için } x \in [y] \text{ ve } \exists [y] \cap B = \emptyset \text{ için } x \in [y] \\&\implies \exists [y] \cap A \setminus B \neq \emptyset \text{ için } x \in [y] \\&\implies x \in \bigcup_{[y] \cap A \setminus B \neq \emptyset} [y] \\&\implies x \in R^{\blacktriangle}(A \setminus B)\end{aligned}$$

■

**Teorem 2.0.2**  $A \in R^X$  veya  $B \in R^X$  ise aşağıdakiler doğrudur (Bonikowski, 1992).

(i)  $R_{\blacktriangledown}(A \cup B) = R_{\blacktriangledown}(A) \cup R_{\blacktriangledown}(B)$

(ii)  $R^{\blacktriangle}(A \cap B) = R^{\blacktriangle}(A) \cap R^{\blacktriangle}(B)$

**İspat.** (i)  $R_{\blacktriangledown}(A \cup B) \supseteq R_{\blacktriangledown}(A) \cup R_{\blacktriangledown}(B)$  olduğunu göstermiştik. Şimdi  $R_{\blacktriangledown}(A \cup B) \subseteq R_{\blacktriangledown}(A) \cup R_{\blacktriangledown}(B)$  olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki  $A \in R^X$  ve  $W = R_{\blacktriangledown}(A \cup B)$  olsun. Bu durumda alt yaklaşım tanımından  $A \subseteq W$  olur. Buradan  $W = A \cup (W \setminus A)$  dır. Öte yandan  $W \subseteq A \cup B$  olduğundan  $W \setminus A \subseteq B$  ve  $W \setminus A \in R^X$  dir. Dolayısıyla  $W \setminus A \subseteq R_{\blacktriangledown}(B)$  olur. Buradan  $W \subseteq A \cup R_{\blacktriangledown}(B)$  dır. O halde  $W = R_{\blacktriangledown}(A \cup B) \subseteq R_{\blacktriangledown}(A) \cup R_{\blacktriangledown}(B)$  olur.

(ii)  $R^{\blacktriangle}(A \cap B) \subseteq R^{\blacktriangle}(A) \cap R^{\blacktriangle}(B)$  olduğunu göstermiştik. Şimdi  $R^{\blacktriangle}(A) \cap R^{\blacktriangle}(B) \subseteq R^{\blacktriangle}(A \cap B)$  olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki  $A \in R^X$  ve  $W =$

$R^\blacktriangle(A \cap B)$  olsun. Bu durumda üst yaklaşım tanımından  $W \subseteq A$  olur. Buradan  $W = A \cap ((X \setminus A) \cup W)$  olur.  $(X \setminus A) \cup W \in R^X$  ve  $B \subseteq (X \setminus A) \cup W$  olduğu için  $R^\blacktriangle(B) \subseteq (X \setminus A) \cup W$  dir. Buradan  $A \cap R^\blacktriangle(B) \subseteq X \cap ((X \setminus A) \cup W) = W$  olur. O halde  $R^\blacktriangle(A) \cap R^\blacktriangle(B) \subseteq R^\blacktriangle(A \cap B)$  olur. ■

Kaba kümeler bir üyelik fonksiyonu yardımıyla da tanımlanabilir. Şimdi bundan bahsedelim.

**Tanım 2.0.4**  $X$  nesnelere bir kümesi,  $A \subseteq X$  ve  $R, X$  üzerinde bir denklik bağıntısı olsun.  $\mu_A^R : X \rightarrow [0, 1]$  bir fonksiyon olmak üzere

$$\mu_A^R(x) = \frac{|[x] \cap A|}{|[x]|}$$

biçiminde tanımlıdır ve bu fonksiyona kaba üyelik fonksiyonu denir. Burada  $|A|$ ,  $A$  nın eleman sayısını göstermektedir.

Kaba üyelik fonksiyonu bir  $x$  elemanın  $A$  kümesine ait olma derecesini verir. Eğer  $A \cap [x] = \emptyset$  ise açıktır ki  $\mu_A^R(x) = 0$ , diğer durumlarda  $\mu_A^R(x) \neq 0$  olacaktır.

**Önerme 2.0.1**  $X$  nesnelere bir kümesi,  $A, B \subseteq X$  ve  $R, X$  üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. Bu durumda  $x \in X$  için aşağıdakiler doğrudur (Aktaş ve Çağman, 2005).

- (i)  $\mu_A^R(x) = 1 \Leftrightarrow x \in R_\blacktriangledown(A)$
- (ii)  $\mu_A^R(x) = 0 \Leftrightarrow x \in X \setminus R^\blacktriangle(A)$
- (iii)  $0 < \mu_A^R(x) < 1 \Leftrightarrow x \in BN_R(A)$
- (iv)  $\mu_{X \setminus A}^R(x) = 1 - \mu_A^R(x)$
- (v)  $\mu_{A \cup B}^R(x) \geq \max\{\mu_A^R(x), \mu_B^R(x)\}$
- (vi)  $\mu_{A \cap B}^R(x) \leq \min\{\mu_A^R(x), \mu_B^R(x)\}$

**İspat.** (i)

$$\begin{aligned} \mu_A^R(x) = 1 &\Leftrightarrow \frac{|[x] \cap A|}{|[x]|} = 1 \\ &\Leftrightarrow [x] \cap A = [x] \\ &\Leftrightarrow [x] \subseteq A \\ &\Leftrightarrow x \in R_\blacktriangledown(A) \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}\mu_A^R(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{|[x] \cap A|}{|[x]|} = 0 \\ &\Leftrightarrow |[x] \cap A| = 0 \\ &\Leftrightarrow [x] \cap A = \emptyset \\ &\Leftrightarrow [x] \cap X \setminus A \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow x \in X \setminus R^\blacktriangle(A)\end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}0 < \mu_A^R(x) < 1 &\Leftrightarrow 0 < \frac{|[x] \cap A|}{|[x]|} < 1 \\ &\Leftrightarrow [x] \cap A \subset [x] \text{ ve } [x] \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow x \in R^\blacktriangle(A) \text{ ve } x \in R^\blacktriangledown(A) \\ &\Leftrightarrow x \in BN_R(A)\end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{aligned}\mu_{X \setminus A}^R(x) &= \frac{|[x] \cap (X \setminus A)|}{|[x]|} \\ &= \frac{|[x] \cap X|}{|[x]|} - \frac{|[x] \cap A|}{|[x]|} \\ &= 1 - \frac{|[x] \cap A|}{|[x]|} \\ &= 1 - \mu_A^R(x)\end{aligned}$$

(v)

$$\begin{aligned}\mu_{A \cup B}^R(x) &= \frac{|[x] \cap (A \cup B)|}{|[x]|} \\ &= \frac{|([x] \cap A) \cup ([x] \cap B)|}{|[x]|} \\ &= \frac{|[x] \cap A|}{|[x]|} + \frac{|[x] \cap B|}{|[x]|} - \frac{|[x] \cap (A \cap B)|}{|[x]|} \\ &\geq \frac{|[x] \cap A|}{|[x]|} \text{ veya } \geq \frac{|[x] \cap B|}{|[x]|} \text{ dir.} \\ &= \max\{\mu_A^R(x), \mu_B^R(x)\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{(vi)} \quad \mu_{A \cap B}^R(x) &= \frac{|[x] \cap (A \cap B)|}{|[x]|} \\
&\leq \frac{|[x] \cap A|}{|[x]|} \text{ veya } \leq \frac{|[x] \cap B|}{|[x]|} \text{ dır. } \blacksquare \\
&= \min\{\mu_A^R(x), \mu_B^R(x)\}
\end{aligned}$$

**Sonuç 2.0.2** *Kaba üyelik fonksiyonu yardımıyla alt yaklaşım, üst yaklaşım ve sınır bölgeleri tanımlanabilir. Bunlar*

$$R_{\blacktriangledown}(A) = \{x \in X : \mu_A^R(x) = 1\}$$

$$R^{\blacktriangle}(A) = \{x \in X : \mu_A^R(x) > 0\}$$

$$BN_R(A) = \{x \in X : 0 < \mu_A^R(x) < 1\}$$

*biçimindedir (Pawlak, 1982).*

**Örnek 2.0.4** *Örnek 2.0.2 ü göz önüne alalım. A kümesinin elemanlarının üyelik değerleri*

$$\mu_X^R(x_1) = \mu_X^R(x_3) = \mu_X^R(x_9) = 1$$

$$\mu_X^R(x_2) = \mu_X^R(x_7) = \mu_X^R(x_{10}) = 0$$

$$\mu_X^R(x_4) = 1$$

$$\mu_X^R(x_5) = \mu_X^R(x_8) = \frac{1}{2}$$

$$\mu_X^R(x_6) = 0$$

*biçiminde olacaktır. O halde*

$$R^{\blacktriangle}(A) = \{x_1, x_3, x_4, x_5, x_8, x_9\}$$

$$R_{\blacktriangledown}(A) = \{x_1, x_3, x_4, x_9\}$$

$$BN_R(A) = \{x_5, x_8\}$$

*olarak bulunur.*

**Tanım 2.0.5** *X nesnelere boştan farklı bir kümesi,  $A, B \subseteq X$  ve  $R$ ,  $X$  üzerinde bir denklik bağıntısı olsun (Bonikowski, 1992).*

$$(i) \ B, A \text{ nın alt temsilidir} \iff B \subseteq A \text{ ve } R^{\blacktriangle}(B) = R_{\blacktriangledown}(A)$$

$$(ii) \ B, A \text{ nın üst temsilidir} \iff B \subseteq A \text{ ve } R^{\blacktriangle}(B) = R^{\blacktriangle}(A)$$

**Örnek 2.0.5** Örnek 2.0.2 deki denklik bağıntısını ve  $B = \{x_2, x_3, x_5, x_6, x_8\}$ ,  $C = \{x_5, x_6\}$ ,  $D = \{x_1, x_2, x_5, x_6\}$  kümelerini ele alalım. Burada  $C \subseteq B$  ve  $D \subseteq B$  olduğu açıktır. Öte yandan  $R_{\blacktriangledown}(B) = \{x_5, x_6, x_8\}$ ,  $R^{\blacktriangle}(B) = \{x_1, x_2, x_3, x_5, x_6, x_8, x_9, x_{10}\}$ ,  $R^{\blacktriangle}(C) = \{x_5, x_6, x_8\}$  ve  $R^{\blacktriangle}(D) = \{x_1, x_2, x_3, x_5, x_6, x_8, x_9, x_{10}\}$  dır. Buradan  $R^{\blacktriangle}(C) = R_{\blacktriangledown}(B)$  ve  $R^{\blacktriangle}(D) = R^{\blacktriangle}(B)$  olur. Dolayısıyla  $C$ ,  $B$  nin alt temsili iken  $D$ ,  $B$  nin üst temsilidir.

**Tanım 2.0.6**  $X$  nesnelere boştan farklı bir kümesi,  $A, B \subseteq X$  ve  $R$ ,  $X$  üzerinde bir denklik bağıntısı olsun (Bonikowski, 1992).

(i)  $B$ ,  $A$  nin minimal alt temsilidir ( $B = mls(A)$ )  $\iff$   $A$  nin  $|C| < |B|$  olacak biçimde  $B$  alt temsilinden daha küçük bir  $C$  alt temsili yoktur

(ii)  $B$ ,  $A$  nin minimal üst temsilidir ( $B = mus(A)$ )  $\iff$   $A$  nin  $|C| < |B|$  olacak biçimde  $B$  üst temsilinden daha küçük bir  $C$  üst temsili yoktur.

Şimdi buradan çıkan bir sonucu verelim.

**Sonuç 2.0.3**  $X$  nesnelere boştan farklı bir kümesi,  $A, B \subseteq X$  ve  $R$ ,  $X$  üzerinde bir denklik bağıntısı olsun.  $A \in R^X$  ise  $B = mls(A) \iff B = mus(A)$  dır (Bonikowski, 1992).

**İspat.**  $A \in R^X$  olsun. Kabul edelimki  $B = mls(A)$  olsun. Buradan  $B$ ,  $A$  nin alt temsilidir yani  $B \subseteq A$  ve  $R^{\blacktriangle}(B) = R_{\blacktriangledown}(A)$  dır.  $A \in R^X$  olduğundan Sonuç 2.0.1 dan  $R_{\blacktriangledown}(A) = R^{\blacktriangle}(A)$  dır. Dolayısıyla buradan  $R^{\blacktriangle}(B) = R_{\blacktriangledown}(A) = R^{\blacktriangle}(A)$  dır yani  $R^{\blacktriangle}(B) = R^{\blacktriangle}(A)$  olur. Buradan  $B$ ,  $A$  nin üst temsili olur. Yani  $B = mus(A)$  dır.

■

**Teorem 2.0.3**  $X$  nesnelere boştan farklı bir kümesi,  $A \subseteq X$  ve  $R$ ,  $X$  üzerinde bir denklik bağıntısı olsun (Bonikowski, 1992).

(i)  $A$  kümesinin boş olmayan her alt (üst) temsili,  $R_{\blacktriangledown}(A)$  ( $R^{\blacktriangle}(A)$ ) da ki  $R$  bağıntısının boştan farklı her denklik kümesiyle boş olmayan bir kesişime sahiptir.

(ii)  $A$  kümesinin boş olmayan her minimal alt (üst) temsili,  $R_{\blacktriangledown}(A)$  ( $R^{\blacktriangle}(A)$ ) da ki  $R$  bağıntısının boştan farklı her denklik kümesiyle ortak bir nesneye sahiptir.

**İspat.** (i)  $R_{\blacktriangledown}(A) = \emptyset$  ise  $A$  kümesinin bir alt temsili vardır ve bu küme boş kümedir. Eğer  $R_{\blacktriangledown}(A) \neq \emptyset$  ise  $R_{\blacktriangledown}(A)$ ,  $R$  bağıntısının sonlu sayıda denklik kümelerinin birleşimidir. Kabul edelim ki  $B$ ,  $A$ 'nın boştan farklı bir alt temsili olsun.  $C \cap B = \emptyset$  olacak şekilde boştan farklı bir  $C \subseteq R_{\blacktriangledown}(A)$  denklik kümesi olduğunu varsayalım. Yani  $C$ ,  $R^{\blacktriangle}(B)$ 'nin alt kümesi değildir. Dolayısıyla  $R^{\blacktriangle}(B) \neq R_{\blacktriangledown}(A)$ ,  $B$ 'nin  $A$  kümesinin alt temsili olduğu varsayımıyla çelişir.  $A$  kümesinin bir üst temsili için teoremin doğruluğu benzer şekilde gösterilir.

(ii) Kabul edelim ki  $B$ ,  $A$ 'nın boştan farklı bir minimal alt temsili olsun.  $B$ ,  $A$  kümesinin boş olmayan bir alt temsili olduğundan  $B$ ,  $R_{\blacktriangledown}(A)$ 'nin boştan farklı her denklik kümesi ile boş olmayan bir kesişime sahiptir.  $|B \cap C| > 1$  olacak şekilde bir  $C \subseteq R_{\blacktriangledown}(A)$  denklik kümesinin olduğunu varsayalım.  $x$  ve  $y$ ,  $B \cap C$ 'nin farklı iki nesnesi olsun. Buradan  $B \setminus \{y\}$ ,  $A$ 'nın alt temsili ve  $|B \setminus \{y\}| < |B|$ 'dir. Bu  $B$ 'nin  $A$  kümesinin minimal alt temsili olduğu varsayımıyla çelişir.  $A$  kümesinin bir minimal üst temsili için teoremin doğruluğu benzer şekilde gösterilir. ■

**Tanım 2.0.7**  $X$  nesnelere boştan farklı bir kümesi,  $A, B \subseteq X$  ve  $R$ ,  $X$  üzerinde bir denklik bağıntısı olsun.  $A, B$ 'nin kaba altkümesidir ( $A \subseteq_R B$ )  $\iff R_{\blacktriangledown}(A) \subseteq R_{\blacktriangledown}(B)$  ve  $R^{\blacktriangle}(A) \subseteq R^{\blacktriangle}(B)$  dir (Bonikowski, 1992).

**Tanım 2.0.8**  $X$  nesnelere boştan farklı bir kümesi,  $A, B \subseteq X$  ve  $R$ ,  $X$  üzerinde bir denklik bağıntısı olsun.  $A, B$  ye kaba eşittir ( $A \approx B$ )  $\iff R_{\blacktriangledown}(A) = R_{\blacktriangledown}(B)$  ve  $R^{\blacktriangle}(A) = R^{\blacktriangle}(B)$  dir (Bonikowski, 1992).

Altküme ve eşitlik ilişkilerinin tanımları aşağıdaki sonucu verir.

**Sonuç 2.0.4** Kaba denklik bağıntısı ( $\approx$ ),  $R(X)$  de bir denklik bağıntısıdır (Bonikowski, 1992).

### 3. YAKIN KÜMELER

#### 3.1 Temel Kavramlar

Çevremizde olan nesnelere tanımları ile biliriz. Bir  $x \in O$  nesnesinin tanımlanması denildiğinde  $\Phi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_L(x))$  vektör değerli fonksiyonundan bahsedilebilir. Burada önemli olan nesneyi tanımlamak için  $\varphi_i : O \rightarrow \mathbb{R}$  bileşen fonksiyonlarının seçimidir. Burada verilen fonksiyon sayısı ne kadar azsa nesnenin tanımı o kadar zayıftır. Örneğin;  $\varphi_1$  fonksiyonu büyüklüğü tanımlayan bir fonksiyon olsun. Büyük bir cisim denildiğinde aklımıza birden fazla cisim gelmektedir. Devam edecek olursak  $\varphi_2$  canlı olup olmamayı belirleyen fonksiyon olsun. Bu fonksiyonun değeri bizim nesnemize dahada yakınlaştırır. Bu şekilde fonksiyonları çoğaltarak nesnenin en yakın tanımını verebiliriz. O halde  $B \subseteq F$  nesnenin özelliklerini yeterince sunan fonksiyonların bir kümesi olsun. Bu durumda  $B$  kümesi üzerinde verilen  $\varphi_i$  fonksiyonları bize nesne hakkında yakın bir tanımlama verecektir. Bu nedenle  $\Phi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_L(x))$  vektör değerli fonksiyonu nesnenin tanımlamasında temel teşkil edecektir.

**Tanım 3.1.1**  $O$  algılanabilir nesnelere kümesi,  $F$  nesne özelliklerini belirleyen fonksiyonların kümesi,  $x, x' \in O$  ve  $B \subseteq F$  olsun. Bu durumda

$$\sim_B = \{(x, x') \in O \times O : |\varphi_i(x) - \varphi_i(x')| = 0, \forall \varphi_i \in B\}$$

biçiminde tanımlı  $\sim_B$  bağıntısına  $O$  üzerinde ayırt edilemezlik bağıntısı denir (Peters, 2007).

Yukarıdaki tanımda verilen denklik bağıntısında aynı denklik sınıfında bulunan  $x$  ve  $x'$  nesnelere tanımlamalarının hepsinin aynı olduğu yani nesnelere birbirleri ile çok yakın oldukları hatta aynı oldukları söylenebilir.

**Örnek 3.1.1**  $O = \{a, b, c, d, e\}$ ,  $B = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$  nesne özelliklerini temsil eden  $\varphi_i : O \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonlarının ailesi

	a	b	c	d	e
$\varphi_1$	1	1	2	2	2
$\varphi_2$	0	0	1	1	2
$\varphi_3$	1	1	0	0	2

biçiminde tanımlı olsun. Bu durumda  $\sim_B = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, c), (c, d), (d, c), (d, d), (e, e)\}$  olur.

**Tanım 3.1.2**  $O$  algılanabilir nesnelerin kümesi,  $F$  nesne özelliklerini belirleyen fonksiyonların kümesi,  $B \subseteq F$  ve  $x, x' \in O$  olsun. Eğer bir  $\varphi_i \in B$  için  $|\varphi_i(x) - \varphi_i(x')| = 0$  ise  $x$  ve  $x'$  nesnelere birbirlerine minimal olarak yakındır denir ve  $x \sim_{\{\varphi_i\}} x'$  ile gösterilir. Bu tanımlamaya "Yakınlık Tanımlama Prensipli (Nearness Description Principle- NDP)" denir (Peters, 2007).

**Örnek 3.1.2** Örnek 3.1.1 ü göz önüne alalım.  $a, b \in O$  nesnelere için  $|\varphi_1(a) - \varphi_1(b)| = 0$  olduğundan  $a$  ile  $b$  minimal olarak yakındır.

**Tanım 3.1.3**  $O$  algılanabilir nesnelerin kümesi,  $F$  nesne özelliklerini belirleyen fonksiyonların kümesi,  $B \subseteq F$  ve  $\sim_B$  ayırt edilemezlik bağıntısı ise  $FAS = (O, F, \sim_B)$  üçlüsüne temel yaklaşım uzayı denir (Peters, 2007).

**Tanım 3.1.4**  $(O, F, \sim_B)$  bir temel yaklaşım uzayı ve  $A \subseteq O$  olsun (Peters, 2007).

(i)  $A$  in alt kümesi olan  $[x]_B \in O / \sim_B$  elemanlarının birleşimine  $A$  kümesinin  $B$  alt yaklaşımı denir ve

$$B_{\blacktriangledown}A = \bigcup_{[x]_B \subseteq A} [x]_B$$

ile gösterilir.

(ii)  $A$  ile arakesiti boştan farklı olan  $[x]_B \in O / \sim_B$  elemanlarının birleşimine  $A$  kümesinin  $B$  üst yaklaşımı denir ve

$$B^{\blacktriangle}A = \bigcup_{[x]_B \cap A \neq \emptyset} [x]_B$$

ile gösterilir.

(iii)  $A$  nın sınır bölgesi  $Bnd_B A$  ile gösterilir ve

$$Bnd_B A = B^{\blacktriangle}A \setminus B_{\blacktriangledown}A = \{x \in O : x \in B^{\blacktriangle}A \text{ ve } x \notin B_{\blacktriangledown}A\}$$

biçiminde tanımlıdır.

**Örnek 3.1.3**  $O = \{a, b, c, d, e\}$ ,  $F = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$  nesne özelliklerini temsil eden  $\varphi_i : O \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonlarının ailesi

	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$
$\varphi_1$	1	1	2	0	2
$\varphi_2$	0	0	1	1	1
$\varphi_3$	1	1	1	2	1

biçiminde tanımlı olsun. Buna göre  $B = \{\varphi_1, \varphi_3\}$  için

$$[a] = [b] = \{a, b\}$$

$$[c] = [e] = \{c, e\}$$

$$[d] = \{d\}$$

biçiminde olacaktır. Örneğin  $A = \{b, c, e\}$  kümesi için alt yaklaşımı, üst yaklaşımı ve sınırı

$$B_{\blacktriangledown}A = \{c, e\}$$

$$B^{\blacktriangle}A = \{a, b, c, e\}$$

$$Bnd_B A = \{a, b\}$$

biçiminde olacaktır.

$O$  algılanabilir nesnelere kümesi,  $F$  nesne özelliklerini belirleyen fonksiyonların kümesi olsun.  $B_r \subseteq B \subseteq F$  ve  $|B_r| = r$  olmak üzere her bir  $B_r$  alt fonksiyon kümesi için ayırt edilemezlik bağıntısı tanımlanabilir bu bağıntıyı  $\sim_{B_r}$  ile gösterelim. Bu bağıntı  $O$  algılanabilir nesnelere kümesinin her bir  $B_r$  kombinasyonu için temel yaklaşım uzayından farklı bir ayrışım oluşmasına yol açar. Burada  $\sim_{B_r}$  bağıntısı  $O$  algılanabilir nesnelere kümesini  $[x]_{B_r}$  yakınlık sınıflarına ayırır ve  $O / \sim_{B_r} = \{[x]_{B_r} : x \in O\}$  kümesi bölünüm kümesidir. Sonuç olarak her bir  $B_r$  alt fonksiyon kümesi için ayrışım oluşacağından  $N_r(B) = \{O / \sim_{B_r} : B_r \subseteq B\}$  her bir kombinasyon için bölüntü kümesi elde edilir.

**Tanım 3.1.5**  $O$  algılanabilir nesnelere kümesi,  $F$  nesne özelliklerini belirleyen fonksiyonların kümesi,  $B \subseteq F$  olsun.  $NAS = (O, F, \sim_{B_r}, N_r(B))$  dörtlüsüne yakın yaklaşım uzayı denir (Peters, 2007).

**Tanım 3.1.6**  $(O, F, \sim_{B_r}, N_r(B))$  bir temel yaklaşım uzayı ve  $A \subseteq O$  olsun (Peters, 2007).

(i)  $A$  nın alt kümesi olan  $[x]_{B_r} \in O / \sim_{B_r}$  elemanlarının birleşimine  $A$  kümesinin  $B_r$  alt yaklaşımı denir ve

$$N_r(B)_{\blacktriangledown} A = \bigcup_{[x]_{B_r} \subseteq A} [x]_{B_r}$$

ile gösterilir.

(ii)  $A$  ile arakesiti boştan farklı olan  $[x]_{B_r} \in O / \sim_{B_r}$  elemanlarının birleşimine  $A$  kümesinin  $B_r$  üst yaklaşımı denir ve

$$N_r(B)_{\blacktriangle} A = \bigcup_{[x]_{B_r} \cap A \neq \emptyset} [x]_{B_r}$$

ile gösterilir.

**Örnek 3.1.4**  $O = \{a, b, c, d, e\}$ ,  $B = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$  nesne özelliklerini temsil eden  $\varphi_i : O \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonlarının ailesi

	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$
$\varphi_1$	1	0	0	1	0
$\varphi_2$	0	0	2	1	2
$\varphi_3$	1	1	1	2	1

biçiminde tanımlı olsun. Şimdi nesne özelliklerini veren fonksiyonların her bir  $r$  li kombinasyonu için denklik sınıflarını oluşturalım. Bu denklik sınıfları

$$[a]_{\{\varphi_1\}} = \{a, d\}, [b]_{\{\varphi_1\}} = \{b, c, e\}$$

$$[a]_{\{\varphi_2\}} = \{a, b\}, [c]_{\{\varphi_2\}} = \{c, e\}, [d]_{\{\varphi_2\}} = \{d\}$$

$$[a]_{\{\varphi_3\}} = \{a, b, c, e\}, [d]_{\{\varphi_3\}} = \{d\}$$

$$[a]_{\{\varphi_1, \varphi_2\}} = \{a\}, [b]_{\{\varphi_1, \varphi_2\}} = \{b\}, [c]_{\{\varphi_1, \varphi_2\}} = \{c, e\}, [d]_{\{\varphi_1, \varphi_2\}} = \{d\}$$

$$[a]_{\{\varphi_1, \varphi_3\}} = \{a\}, [b]_{\{\varphi_1, \varphi_3\}} = \{b\}, [c]_{\{\varphi_1, \varphi_3\}} = \{c, e\}, [d]_{\{\varphi_1, \varphi_3\}} = \{d\}$$

$$[a]_{\{\varphi_2, \varphi_3\}} = \{a, b\}, [c]_{\{\varphi_2, \varphi_3\}} = \{c, e\}, [d]_{\{\varphi_2, \varphi_3\}} = \{d\}$$

$$[a]_{\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}} = \{a\}, [b]_{\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}} = \{b\}, [c]_{\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}} = \{c, e\}, [d]_{\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}} = \{d\}$$

biçiminde olacaktır. Buradan

$$N_1(B) = \{\{[a]_{\{\varphi_1\}}, [b]_{\{\varphi_1\}}\}, \{[a]_{\{\varphi_2\}}, [c]_{\{\varphi_2\}}, [d]_{\{\varphi_2\}}\}, \{[a]_{\{\varphi_3\}}, [d]_{\{\varphi_3\}}\}\}$$

$$N_2(B) = \{\{[a]_{\{\varphi_1, \varphi_2\}}, [b]_{\{\varphi_1, \varphi_2\}}, [c]_{\{\varphi_1, \varphi_2\}}, [d]_{\{\varphi_1, \varphi_2\}}\}, \{[a]_{\{\varphi_1, \varphi_3\}}, [b]_{\{\varphi_1, \varphi_3\}}, [c]_{\{\varphi_1, \varphi_3\}}, [d]_{\{\varphi_1, \varphi_3\}}\}, \{[a]_{\{\varphi_2, \varphi_3\}}, [c]_{\{\varphi_2, \varphi_3\}}, [d]_{\{\varphi_2, \varphi_3\}}\}\}$$

$$N_3(B) = \{[a]_{\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}}, [b]_{\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}}, [c]_{\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}}, [d]_{\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}}\}$$

biçimindedir. Örneğin  $A = \{b, c, d\}$  alt kümesi için alt ve üst yaklaşımlar

$$N_1(B)\blacktriangledown A = \bigcup_{[x]_{B_r} \subseteq A} [x]_{B_r} = \{d\} \quad N_1(B)\blacktriangle A = \bigcup_{[x]_{B_r} \cap A \neq \emptyset} [x]_{B_r} = X$$

$$N_2(B)\blacktriangledown A = \bigcup_{[x]_{B_r} \subseteq A} [x]_{B_r} = \{b, d\} \quad N_2(B)\blacktriangle A = \bigcup_{[x]_{B_r} \cap A \neq \emptyset} [x]_{B_r} = \{b, c, d, e\}$$

$$N_3(B)\blacktriangledown A = \bigcup_{[x]_{B_r} \subseteq A} [x]_{B_r} = \{b, d\} \quad N_3(B)\blacktriangle A = \bigcup_{[x]_{B_r} \cap A \neq \emptyset} [x]_{B_r} = \{b, c, d, e\}$$

*biçiminde olacaktır (Peters, 2007).*



### 3.2 $r$ -Yakın Topolojik Uzaylar

**Tanım 3.2.1**  $(O, F, \sim_{B_r}, N_r(B))$  bir yakın yaklaşım uzayı,  $X \subseteq O$  ve  $(X, \tau)$  bir topolojik uzay olsun.  $\tau_r^\Delta = \{N_r(B)^\Delta(G) : G \in \tau\}$  ailesine  $(O, F, \sim_{B_r}, N_r(B))$  yaklaşım uzayı tarafından oluşturulan  $X$  üzerindeki  $r$ -yakın topoloji denir.

Burada  $\tau_r^\Delta$  elemanlarına  $r$ -yakın açık kümeler adı verilir. Tümleyeni  $r$ -yakın açık kümeler olan kümelere  $r$ -yakın kapalı kümeler denir.

$N_r(B)^\Delta(G)$  nin  $r$ -yakın açık kümelerini aksi gerekmediği sürece gösterimde kolaylık olması açısından  $G_r^\Delta$  ile göstereceğiz.  $\tau_r^\Delta$  daki tüm  $r$ -yakın kapalı kümelerin ailesini ise  $\tau_r^{\Delta k}$  ile göstereceğiz (Atmaca, 2020).

**Örnek 3.2.1**  $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ ,  $B = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$  nesne özelliklerini temsil eden  $\varphi_i : X \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonlarının ailesi ve  $\tau = \{\emptyset, X, \{c\}, \{a, b, c\}, \{c, d, e, f\}\}$  olsun.

Burada  $\varphi_i$  fonksiyonları

	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$
$\varphi_1$	0	1	0	1	0	1
$\varphi_2$	0	1	2	0	1	1
$\varphi_3$	0	1	2	3	0	1

biçiminde tanımlıdır. Şimdi her bir  $r$  li kombinasyon için denklik sınıflarına oluşturalım. Bu denklik sınıfları

$$[a]_{\{\varphi_1\}} = \{a, c, e\}, [b]_{\{\varphi_1\}} = \{b, d, f\}$$

$$[a]_{\{\varphi_2\}} = \{a, d\}, [b]_{\{\varphi_2\}} = \{b, e, f\}, [c]_{\{\varphi_2\}} = \{c\}$$

$$[a]_{\{\varphi_3\}} = \{a, e\}, [b]_{\{\varphi_3\}} = \{b, f\}, [c]_{\{\varphi_3\}} = \{c\}, [d]_{\{\varphi_3\}} = \{d\},$$

$$[a]_{\{\varphi_1, \varphi_2\}} = \{a\}, [b]_{\{\varphi_1, \varphi_2\}} = \{b, f\}, [c]_{\{\varphi_1, \varphi_2\}} = \{c\}, [d]_{\{\varphi_1, \varphi_2\}} = \{d\}, [e]_{\{\varphi_1, \varphi_2\}} = \{e\}$$

$$[a]_{\{\varphi_1, \varphi_3\}} = \{a, e\}, [b]_{\{\varphi_1, \varphi_3\}} = \{b, f\}, [c]_{\{\varphi_1, \varphi_3\}} = \{c\}, [d]_{\{\varphi_1, \varphi_3\}} = \{d\}$$

$$[a]_{\{\varphi_2, \varphi_3\}} = \{a\}, [b]_{\{\varphi_2, \varphi_3\}} = \{b, f\}, [c]_{\{\varphi_2, \varphi_3\}} = \{c\}, [d]_{\{\varphi_2, \varphi_3\}} = \{d\}, [e]_{\{\varphi_2, \varphi_3\}} = \{e\}$$

$$[a]_{\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}} = \{a\}, [b]_{\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}} = \{b, f\}, [c]_{\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}} = \{c\}, [d]_{\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}} = \{d\}, [e]_{\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}} = \{e\}$$

biçiminde olacaktır. Burada herbir  $r$  li kombinasyon için denklik sınıfları

$$N_1(B) = \{\{[a]_{\{\varphi_1\}}, [b]_{\{\varphi_1\}}\}, \{[a]_{\{\varphi_2\}}, [b]_{\{\varphi_2\}}, [c]_{\{\varphi_2\}}\}, \{[a]_{\{\varphi_3\}}, [b]_{\{\varphi_3\}}, [c]_{\{\varphi_3\}}\},$$

$$[d]_{\{\varphi_3\}}\}}\}$$

$$N_2(B) = \{\{[a]_{\{\varphi_1, \varphi_2\}}, [b]_{\{\varphi_1, \varphi_2\}}, [c]_{\{\varphi_1, \varphi_2\}}, [d]_{\{\varphi_1, \varphi_2\}}, [e]_{\{\varphi_1, \varphi_2\}}\}, \{[a]_{\{\varphi_1, \varphi_3\}}, [b]_{\{\varphi_1, \varphi_3\}}, [c]_{\{\varphi_1, \varphi_3\}}, [d]_{\{\varphi_1, \varphi_3\}}\}, \{[a]_{\{\varphi_2, \varphi_3\}}, [b]_{\{\varphi_2, \varphi_3\}}, [c]_{\{\varphi_2, \varphi_3\}}, [d]_{\{\varphi_2, \varphi_3\}}, [e]_{\{\varphi_2, \varphi_3\}}\}\}$$

$$N_3(B) = \{[a]_{\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}}, [b]_{\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}}, [c]_{\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}}, [d]_{\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}}, [e]_{\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}}\}$$

biçimindedir. Şimdi  $\tau_1^\blacktriangle$  1-yakın topolojisini oluşturalım. Burada

$$N_1(B)^\blacktriangle(\emptyset) = \emptyset$$

$$N_2(B)^\blacktriangle(\emptyset) = \emptyset$$

$$N_3(B)^\blacktriangle(\emptyset) = \emptyset$$

$$N_1(B)^\blacktriangle(X) = X$$

$$N_2(B)^\blacktriangle(X) = X$$

$$N_3(B)^\blacktriangle(X) = X$$

$$N_1(B)^\blacktriangle(\{c\}) = \{a, c, e\}$$

$$N_2(B)^\blacktriangle(\{c\}) = \{c\}$$

$$N_3(B)^\blacktriangle(\{c\}) = \{c\}$$

$$N_1(B)^\blacktriangle(\{a, b, c\}) = X$$

$$N_2(B)^\blacktriangle(\{a, b, c\}) = \{a, b, c, e, f\}$$

$$N_3(B)^\blacktriangle(\{a, b, c\}) = \{a, b, c, f\}$$

$$N_1(B)^\blacktriangle(\{c, d, e, f\}) = X$$

$$N_2(B)^\blacktriangle(\{c, d, e, f\}) = X$$

$$N_3(B)^\blacktriangle(\{c, d, e, f\}) = X$$

olur ve  $\tau_1^\blacktriangle = \{\emptyset, X, \{a, c, e\}\}$  dir. Benzer şekilde  $\tau_2^\blacktriangle = \{\emptyset, X, \{c\}, \{a, b, c, e, f\}\}$  ve  $\tau_3^\blacktriangle = \{\emptyset, X, \{c\}, \{a, b, c, f\}, \{b, c, d, e, f\}\}$  olur.

Yukarıdaki örnekten anlaşılacağı üzere  $\tau_1^\blacktriangle$  ve  $\tau_2^\blacktriangle$  topoloji olmasına rağmen  $\tau_3^\blacktriangle$  ailesi topoloji değildir. Şimdi  $\tau_r^\blacktriangle$  ailelerinin topoloji olma şartlarından hangilerini sağladığını gösterelim.

**Teorem 3.2.1**  $(O, F, \sim_{B_r}, N_r(B))$  bir yakın yaklaşım uzayı,  $X \subseteq O$  ve  $(X, \tau)$  bir topolojik uzay olsun. Bu durumda  $\emptyset$  ve  $X$   $r$ -yakın açık kümedir (Atmaca, 2020).

**İspat.**  $\emptyset_r^\blacktriangle = \emptyset$  ve  $X_r^\blacktriangle = X$  olmasından açıktır. ■

**Teorem 3.2.2**  $(O, F, \sim_{B_r}, N_r(B))$  bir yakın yaklaşım uzayı,  $X \subseteq O$  ve  $(X, \tau)$  bir topolojik uzay olsun.  $I$  keyfi indeks kümesi olmak üzere her  $i \in I$  için  $(G_i)_r^\blacktriangle \in \tau_r^\blacktriangle$  ise  $\cup_{i \in I} (G_i)_r^\blacktriangle \in \tau_r^\blacktriangle$  dir (Atmaca, 2020).

**İspat.** Her  $i \in I$  için  $(G_i)_r^\blacktriangle \in \tau_r^\blacktriangle$  olsun. Bu durumda

$$(G_i)_r^\blacktriangle = \cup_{[x]_{B_r} \cap G_i \neq \emptyset} [x]_{B_r}$$

biçimindedir. Öte yandan

$$\cup_{i \in I} (G_i)_r^\blacktriangle = \cup_{i \in I} \left( \cup_{[x]_{B_r} \cap G_i \neq \emptyset} [x]_{B_r} \right) = \cup_{[x]_{B_r} \cap \left( \cup_{i \in I} G_i \right) \neq \emptyset} [x]_{B_r}$$

olur. Buradan  $\tau$  topoloji olduğundan  $\cup_{i \in I} G_i \in \tau$  yani  $\cup_{i \in I} (G_i)_r^\blacktriangle \in \tau_r^\blacktriangle$  dir. ■

**Örnek 3.2.2**  $\mathbb{N}$  üzerinde  $\tau = A_n = \{0, 1, 2, \dots, n\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$  topolojisi ve

$$\begin{array}{c|c} \varphi_1 & \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} \\ \hline & a \longrightarrow \varphi_1(a) = \lfloor \log a \rfloor + 1 \end{array}, \begin{array}{c|c} \varphi_2 & \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} \\ \hline & a \longrightarrow \varphi_2(a) = \begin{cases} 1, & a \text{ tek ise} \\ 0, & a \text{ çift ise} \end{cases} \end{array}$$

biçiminde tanımlı  $\varphi_1$  ve  $\varphi_2$  fonksiyonları verilsin. Şimdi her bir  $r$  li kombinasyon için denklik sınıflarına oluşturalım. Bu denklik sınıfları

$$[0]_{\{\varphi_1\}} = \{0, 1, 2, \dots, 9\}, [10]_{\{\varphi_1\}} = \{10, 11, 12, \dots, 99\}, [100]_{\{\varphi_1\}} = \{100, 101, 102, \dots, 999\}$$

,...

$$[0]_{\{\varphi_2\}} = \{0, 2, 4, \dots\}, [1]_{\{\varphi_2\}} = \{1, 3, 5, \dots\}$$

$$[0]_{\{\varphi_1, \varphi_2\}} = \{0, 2, 4, 6, 8\}, [1]_{\{\varphi_1, \varphi_2\}} = \{1, 3, 5, 7, 9\}, [10]_{\{\varphi_1, \varphi_2\}} = \{10, 12, 14, \dots, 98\},$$

$$[11]_{\{\varphi_1, \varphi_2\}} = \{11, 13, 15, \dots, 99\}, \dots$$

biçiminde olacaktır. Şimdi  $\tau_1^\uparrow$  1-yakın topolojisini oluşturalım. Burada

$$(A_0)_1^\uparrow = \{0, 1, 2, \dots, 9, 10, 12, 14, \dots\} \quad (A_0)_2^\uparrow = \{0, 2, 4, 6, 8\}$$

$$(A_1)_1^\uparrow = \mathbb{N} \quad (A_1)_2^\uparrow = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$$

$$(A_2)_1^\uparrow = \mathbb{N}, \dots \quad (A_2)_2^\uparrow = (A_3)_2^\uparrow = \dots = (A_9)_2^\uparrow$$

$$(A_{10})_2^\uparrow = \{0, 1, 2, \dots, 9, 10, 12, \dots, 98\}$$

$$(A_{11})_2^\uparrow = \{0, 1, 2, \dots, 9, 11, 13, \dots, 99\}, \dots$$

olur ve  $\tau_1^\uparrow = \{\emptyset, \mathbb{N}, (A_0)_1^\uparrow\}$  dir. Benzer şekilde  $\tau_2^\uparrow = \{\emptyset, \mathbb{N}, (A_0)_2^\uparrow, (A_1)_2^\uparrow, (A_2)_2^\uparrow, (A_{10})_2^\uparrow, (A_{11})_2^\uparrow, \dots\}$  dir.

**Tanım 3.2.2**  $X \neq \emptyset$  bir küme ve  $\tau$ ,  $X$  in alt kümelerinin bir ailesi olsun. Eğer  $\tau$

$$(i) \emptyset, X \in \tau$$

$$(ii) I \text{ keyfi indeks kümesi olmak üzere her } i \in I \text{ için } G_i \in \tau \text{ ise } \cup_{i \in I} G_i \in \tau$$

şartlarını sağlıyorsa  $\tau$  ailesine genelleştirilmiş topoloji adı verilir (Császár, 2002).

**Sonuç 3.2.1**  $(O, F, \sim_{B_r}, N_r(B))$  bir yakın yaklaşım uzayı,  $X \subseteq O$  ve  $(X, \tau)$  bir topolojik uzay olsun.  $\tau_r^\uparrow$  aileleri bir genelleştirilmiş topolojidir.

**Örnek 3.2.3** Örnek 3.2.1 deki yakın yaklaşım uzayını ve  $\tau_3^\uparrow = \{\emptyset, X, \{c\}, \{a, b, c, f\}, \{b, c, d, e, f\}\}$  3-yakın topolojisini ele alalım.  $\tau_3^\uparrow$  topolojisi bir genelleştirilmiş topolojidir.

**Teorem 3.2.3**  $(O, F, \sim_{B_r}, N_r(B))$  bir yakın yaklaşım uzayı,  $X \subseteq O$ ,  $(X, \tau)$  bir topolojik uzay ve  $r \leq s \leq |B|$  olsun. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur (Atmaca, 2020).

- (i)  $G \subseteq H$  ise  $G_r^\blacktriangle \subseteq H_r^\blacktriangle$  dir.
- (ii)  $B_r \subseteq B_s$  ise  $[x]_{B_s} \subseteq [x]_{B_r}$  dir.
- (iii) Her  $G \in \tau$  için  $G \subseteq G_r^\blacktriangle$  dir.
- (iv)  $G_s^\blacktriangle \subseteq G_r^\blacktriangle$  dir.
- (v)  $G \in \tau$  ve  $x_0 \in G$  ise  $G_r^\blacktriangle, x_0$  in bir komşuluğudur.

**İspat.** (i)  $G \subseteq H$  olsun. Buradan  $G_r^\blacktriangle = \bigcup_{[x]_{B_r} \cap G \neq \emptyset} [x]_{B_r} \subseteq \bigcup_{[x]_{B_r} \cap H \neq \emptyset} [x]_{B_r} = H_r^\blacktriangle$  dir.

(ii)

$$\begin{aligned}
[x]_{B_r} &= \{x' \in X : x \sim_{B_r} x'\} \\
&= \{x' \in X : \{(x, x') : \varphi(x) = \varphi(x'), \forall \varphi \in B_r\}\} \\
&\supseteq \{x' \in X : \{(x, x') : \varphi(x) = \varphi(x'), \forall \varphi \in B_s\}\} \\
&= \{x' \in X : x \sim_{B_s} x'\} \\
&= [x]_{B_s}
\end{aligned}$$

(iii)  $G = \bigcup_{x \in G} \{x\} \subseteq \bigcup_{[x]_{B_r} \cap G \neq \emptyset} [x]_{B_r} = G_r^\blacktriangle$

(iv)  $G_r^\blacktriangle = \bigcup_{[x]_{B_r} \cap G \neq \emptyset} [x]_{B_r} \supseteq \bigcup_{[x]_{B_s} \cap G \neq \emptyset} [x]_{B_s} = G_s^\blacktriangle$

(v) (iii) den açıktır. ■

**Tanım 3.2.3**  $(O, F, \sim_{B_r}, N_r(B))$  bir yakın yaklaşım uzayı,  $X \subseteq O$  ve  $(X, \tau)$  bir topolojik uzay olsun. Eğer  $x \in X$  için  $x \in G \subseteq G_r^\blacktriangle \subseteq N$  olacak biçimde  $G_r^\blacktriangle \in \tau_r^\blacktriangle$  varsa bu  $N$  kümesine  $x$  elemanının  $r$ -yakın komşuluğu denir. Eğer  $N$   $r$ -yakın açık küme ise  $N$  ye  $r$ -yakın açık komşuluk adı verilir (Atmaca, 2020).

Bir  $x$  elemanının tüm  $r$ -yakın komşuluklarının ailesi  $N_r^\blacktriangle(x)$ , tüm  $r$ -yakın açık komşuluklarının aileside  $\tau_r^\blacktriangle(x)$  ile gösterilir.

**Örnek 3.2.4** Örnek 3.2.1 deki yakın yaklaşım uzayını ve  $\tau_2^\blacktriangle = \{\emptyset, X, \{c\}, \{a, b, c, e, f\}\}$  ele alalım.  $N_2^\blacktriangle(b) = \{\{a, b, c, e, f\}, X\}$  ve  $\tau_2^\blacktriangle(c) = \{X, \{c\}, \{a, b, c, e, f\}\}$  biçimindedir.

**Önerme 3.2.1**  $(O, F, \sim_{B_r}, N_r(B))$  bir yakın yaklaşım uzayı,  $X \subseteq O$  ve  $(X, \tau)$  bir topolojik uzay olsun. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur (Atmaca, 2020).

- (i)  $N \in N_r^\blacktriangle(x)$  ise  $x \in N$  dir.
- (ii)  $N_1 \in N_r^\blacktriangle(x)$  ve  $N_1 \subseteq N_2$  ise  $N_2 \in N_r^\blacktriangle(x)$  dir.
- (iii)  $N_1, N_2 \in N_r^\blacktriangle(x)$  ise  $N_1 \cap N_2 \in N_r^\blacktriangle(x)$  dir.

**İspat.** (i)  $N \in N_r^\Delta(x)$  ise  $x \in G \subseteq G_r^\Delta \subseteq N$  olacak biçimde  $G_r^\Delta \in \tau_r^\Delta$  vardır. Dolayısıyla  $x \in N$  dir.

(ii)  $N_1 \in N_r^\Delta(x)$  ve  $N_1 \subseteq N_2$  ise  $x \in G \subseteq G_r^\Delta \subseteq N_1 \subseteq N_2$  olacak biçimde  $G_r^\Delta \in \tau_r^\Delta$  vardır. Dolayısıyla  $N_2 \in N_r^\Delta(x)$  dir.

(iii)  $N_1, N_2 \in N_r^\Delta(x)$  olsun. Bu durumda  $x \in G \subseteq G_r^\Delta \subseteq N_1$  ve  $x \in H \subseteq H_r^\Delta \subseteq N_2$  olacak biçimde  $G_r^\Delta, H_r^\Delta \in \tau_r^\Delta$  vardır.  $\tau$  bir topoloji olduğundan  $G \cap H \in \tau$  ve  $x \in G \cap H \subseteq (G \cap H)_r^\Delta \subseteq G_r^\Delta \subseteq N_1$  ve  $x \in G \cap H \subseteq (G \cap H)_r^\Delta \subseteq H_r^\Delta \subseteq N_2$  elde edilir ki bu  $x \in G \cap H \subseteq (G \cap H)_r^\Delta \subseteq N_1 \cap N_2$  olduğunu verir. ■

**Önerme 3.2.2**  $(O, F, \sim_{B_r}, N_r(B))$  bir yakın yaklaşım uzayı,  $X \subseteq O$  ve  $(X, \tau)$  bir topolojik uzay olsun.  $U, x$  in bir komşuluğu ise  $N_r(B)^\Delta(U)$  da  $x$  in bir  $r$ -yakın komşuluğudur (Atmaca, 2020).

**İspat.**  $U, x$  in bir komşuluğu olsun. Bu durumda  $x \in G \subseteq U$  olacak biçimde  $G \in \tau$  vardır. Öte yandan  $G_r^\Delta = N_r(B)^\Delta(G) = \bigcup_{[x]_{B_r} \cap G \neq \emptyset} [x]_{B_r} \stackrel{G \subseteq U}{\subseteq} \bigcup_{[x]_{B_r} \cap U \neq \emptyset} [x]_{B_r} = N_r(B)^\Delta(U)$  olduğundan  $x \in G \subseteq G_r^\Delta \subseteq N_r(B)^\Delta(U)$  olur ki istenen elde edilir. ■

**Teorem 3.2.4**  $(O, F, \sim_{B_r}, N_r(B))$  bir yakın yaklaşım uzayı,  $X \subseteq O$  ve  $(X, \tau)$  bir topolojik uzay ve  $r \leq s \leq |B|$  olsun. Bu durumda  $x_0 \in X$  için  $N \in N_r^\Delta(x_0)$  ise  $N \in N_s^\Delta(x_0)$  dir (Atmaca, 2020).

**İspat.**  $N \in N_r^\Delta(x_0)$  olsun. Bu durumda  $x_0 \in G \subseteq G_r^\Delta \subseteq N$  olacak biçimde  $G_r^\Delta \in \tau_r^\Delta$  vardır. Teorem 3.2.3 (iv) den  $G_s^\Delta \subseteq G_r^\Delta$  olduğundan  $x_0 \in G \subseteq G_s^\Delta \subseteq G_r^\Delta \subseteq N$  elde edilir. Bu ise isteneni verir. ■

**Tanım 3.2.4**  $(O, F, \sim_{B_r}, N_r(B))$  bir yakın yaklaşım uzayı,  $X \subseteq O, (X, \tau)$  bir topolojik uzay olsun (Atmaca, 2020).

(i)  $A \subseteq X$  olmak üzere  $cl_r^\Delta A = \bigcap \{F_r^\Delta : F_r^\Delta \text{ } r\text{-yakın kapalı küme ve } A \subseteq F_r^\Delta\}$  kümesine  $A$  kümesinin  $r$ -yakın kapanışı denir.

(ii)  $A \subseteq X$  olmak üzere  $int_r^\Delta A = \bigcup \{G_r^\Delta : G_r^\Delta \text{ } r\text{-yakın açık küme ve } G_r^\Delta \subseteq A\}$  kümesine  $A$  kümesinin  $r$ -yakın içi denir.

**Örnek 3.2.5** Örnek 3.2.1 deki yakın yaklaşım uzayını ve  $\tau_3^\Delta = \{\emptyset, X, \{c\}, \{a, b, c, f\}, \{b, c, d, e, f\}\}$  3-yakın topolojisini ele alalım.  $A = \{a, b, c, d, f\}$  kümesi için  $int_r^\Delta A = \{a, b, c, f\}$  ve  $cl_r^\Delta A = X$  tir.

**Teorem 3.2.5**  $(O, F, \sim_{B_r}, N_r(B))$  bir yakın yaklaşım uzayı,  $X \subseteq O$ ,  $(X, \tau)$  bir topolojik uzay ve  $A, B \subseteq X$  olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır (Atmaca, 2020).

$$(i) A \subseteq B \text{ ise } cl_r^\Delta A \subseteq cl_r^\Delta B$$

$$(ii) A \subseteq B \text{ ise } int_r^\Delta A \subseteq int_r^\Delta B$$

**İspat.** (i)

$$\begin{aligned} A \subseteq B &\Rightarrow \{F_r^\Delta : F_r^\Delta \in \tau_r^{\Delta k}, B \subseteq F_r^\Delta\} \subseteq \{F_r^\Delta : F_r^\Delta \in \tau_r^{\Delta k}, A \subseteq F_r^\Delta\} \\ &\Rightarrow \cap \{F_r^\Delta : F_r^\Delta \in \tau_r^{\Delta k}, A \subseteq F_r^\Delta\} \subseteq \cap \{F_r^\Delta : F_r^\Delta \in \tau_r^{\Delta k}, B \subseteq F_r^\Delta\} \\ &\Rightarrow cl_r^\Delta A \subseteq cl_r^\Delta B \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} A \subseteq B &\Rightarrow \{G_r^\Delta : G_r^\Delta \in \tau_r^\Delta, G_r^\Delta \subseteq A\} \subseteq \{G_r^\Delta : G_r^\Delta \in \tau_r^\Delta, G_r^\Delta \subseteq B\} \\ &\Rightarrow \cup \{G_r^\Delta : G_r^\Delta \in \tau_r^\Delta, G_r^\Delta \subseteq A\} \subseteq \cup \{G_r^\Delta : G_r^\Delta \in \tau_r^\Delta, G_r^\Delta \subseteq B\} \quad \blacksquare \\ &\Rightarrow int_r^\Delta A \subseteq int_r^\Delta B \end{aligned}$$

**Önerme 3.2.3**  $(O, F, \sim_{B_r}, N_r(B))$  bir yakın yaklaşım uzayı,  $X \subseteq O$ ,  $(X, \tau)$  bir topolojik uzay ve  $A \subseteq X$  olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır (Atmaca, 2020).

$$(i) X \setminus int_r^\Delta A = cl_r^\Delta(X \setminus A)$$

$$(ii) X \setminus cl_r^\Delta A = int_r^\Delta(X \setminus A)$$

**İspat.** (i)

$$\begin{aligned} X \setminus int_r^\Delta A &= X \setminus \cup \{G_r^\Delta : G_r^\Delta \text{ } r\text{-yakın açık küme ve } G_r^\Delta \subseteq A\} \\ &= \cap \{X \setminus G_r^\Delta : G_r^\Delta \text{ } r\text{-yakın açık küme ve } G_r^\Delta \subseteq A\} \\ &= \cap \{F_r^\Delta : F_r^\Delta \text{ } r\text{-yakın kapalı küme ve } X \setminus A \subseteq F_r^\Delta\} \\ &= cl_r^\Delta(X \setminus A) \end{aligned}$$

(ii) Benzer şekilde yapılabilir.  $\blacksquare$

**Teorem 3.2.6**  $(O, F, \sim_{B_r}, N_r(B))$  bir yakın yaklaşım uzayı,  $X \subseteq O$ ,  $(X, \tau)$  bir topolojik uzay ve  $A \subseteq X$  olsun.  $x \in cl_r^\Delta A$  ancak ve ancak her  $N \in N_r^\Delta(x)$  için  $N \cap A \neq \emptyset$  dir (Atmaca, 2020).

**İspat.**  $x \in cl_r^\Delta A$  olsun. Buradan  $x \in \cap \{F_r^\Delta : F_r^\Delta \text{ } r\text{-yakın kapalı küme ve } A \subseteq F_r^\Delta\}$  dır. Kabul edelim ki bir  $N \in N_r^\Delta(x)$  için  $N \cap A = \emptyset$  olsun. Buradan  $N \in N_r^\Delta(x)$  olduğundan  $x \in G \subseteq G_r^\Delta \subseteq N$  olacak biçimde  $G_r^\Delta \in \tau_r^\Delta$  vardır. Dolayısıyla  $G_r^\Delta \cap A =$

$\emptyset$  dir.  $F_r^\Delta = X \setminus G_r^\Delta$  alırsak  $A \subseteq F_r^\Delta$  ve  $x \notin F_r^\Delta$  dir. Sonuç olarak  $x \notin \cap \{F_r^\Delta : F_r^\Delta \text{ } r\text{-yakın kapalı küme ve } A \subseteq F_r^\Delta\}$  olur ki bu çelişkidir.

Tersine her  $N \in N_r^\Delta(x)$  için  $N \cap A \neq \emptyset$  olsun. Kabul edelim ki  $x \notin cl_r^\Delta A$  olsun. Bu durumda  $x \notin \cap \{F_r^\Delta : F_r^\Delta \text{ } r\text{-yakın kapalı küme ve } A \subseteq F_r^\Delta\}$  dir. Buradan en az bir  $A$  yı kapsayan  $F_r^\Delta$   $r$ -yakın kapalı kümesi için  $x \notin F_r^\Delta$  dir.  $G_r^\Delta = X \setminus F_r^\Delta$  alırsak  $G_r^\Delta \in \tau_r^\Delta$  ve  $G_r^\Delta \in N_r^\Delta(x)$  olur. Üstelik  $A \subseteq F_r^\Delta$  olduğundan  $A \cap G_r^\Delta = \emptyset$  olur ki bu ise çelişkidir. ■

**Tanım 3.2.5**  $(O, F, \sim_{B_r}, N_r(B))$  bir yakın yaklaşım uzayı,  $X \subseteq O$ ,  $(X, \tau)$  bir topolojik uzay ve  $A \subseteq X$  olsun. Bu durumda  $CoreA = \{x \in X : x \in G \subseteq G_r^\Delta \subseteq A \text{ ve } G \in \tau\}$  kümesine  $A$  kümesinin çekirdeği denir (Atmaca, 2020).

**Örnek 3.2.6** Örnek 3.2.1 deki yakın yaklaşım uzayını ve  $\tau_2^\Delta = \{\emptyset, X, \{c\}, \{a, b, c, e, f\}\}$  2-yakın topolojisini ele alalım.  $A = \{b, c, d\}$  kümesi için

$\{b\} \notin CoreA$  dir. Çünkü  $G_r^\Delta \subseteq A$  olacak biçimde  $G_r^\Delta \in \tau_2^\Delta$  bulunamaz.

$\{c\} \subseteq \{c\} \subseteq \{c\} \subseteq A$  olduğundan  $c \in CoreA$  dir.

$\{d\} \notin CoreA$  dir. Çünkü  $G_r^\Delta \subseteq A$  olacak biçimde  $G_r^\Delta \in \tau_2^\Delta$  bulunamaz.

Dolayısıyla  $CoreA = \{c\}$  dir.

**Önerme 3.2.4**  $(O, F, \sim_{B_r}, N_r(B))$  bir yakın yaklaşım uzayı,  $X \subseteq O$ ,  $(X, \tau)$  bir topolojik uzay ve  $A \subseteq X$  olsun. Aşağıdaki kapsamlar doğrudur (Atmaca, 2020).

(i)  $CoreA \subseteq int_r^\Delta A$

(ii)  $int_r^\Delta A \subseteq intA$

(iii)  $clA \subseteq cl_r^\Delta A$

**İspat.** (i)

$x \in CoreA \Rightarrow x \in \{x \in X : x \in G \subseteq G_r^\Delta \subseteq A \text{ ve } G \in \tau\}$

$\Rightarrow x \in G \subseteq G_r^\Delta \subseteq A$  olacak biçimde  $G \in \tau$  vardır

$\Rightarrow x \in G_r^\Delta \subseteq A$  olacak biçimde  $G_r^\Delta \in \tau_r^\Delta$  vardır

$\Rightarrow x \in int_r^\Delta A$

(ii)  $x \in int_r^\Delta A$  olsun. Kabul edelim ki  $x \notin intA$  olsun. Bu durumda  $x \notin \cup \{G \in \tau : G \subseteq A\}$  dir. Buradan  $x$  i bulandıran her  $G$  açığı için  $G \not\subseteq A$  dir. Dolayısıyla  $x$  i bulandıran her  $G_r^\Delta$   $r$  açığı için  $G_r^\Delta \not\subseteq A$  dir. Sonuç olarak  $x \notin int_r^\Delta A$  çelişkisi elde edilir.

(iii)  $x \in clA$  olsun. Kabul edelim ki  $x \notin cl_r^\Delta A$  olsun. Bu durumda bir  $N \in N_r^\Delta(x)$  vardır öyleki  $N \cap A = \emptyset$  tur.  $N \in N_r^\Delta(x)$  ise  $x \in G \subseteq G_r^\Delta \subseteq N$  olacak biçimde  $G \in \tau$  vardır. Buradan  $N \in N(x)$  ve  $N \cap A = \emptyset$  olur ki bu  $x \notin clA$  çelişkisini verir. ■

**Tanım 3.2.6**  $(O, F, \sim_{B_r}, N_r(B))$  bir yakın yaklaşım uzayı,  $X \subseteq O$ ,  $(X, \tau)$  bir topolojik uzay ve  $(x_n)$   $X$  de bir dizi olsun. Eğer her  $N \in N_r^\Delta(x_0)$   $r$ -yakın komşuluğu için bir  $n_0 \in \mathbb{N}$  sayısı; her  $n \geq n_0$  için  $x_n \in N$ , olacak biçimde bulunabiliyorsa  $(x_n)$  dizisine  $x_0$  noktasına  $r$ -yakın yakınsıyor denir ve  $x_n \xrightarrow{r} x_0$  ile gösterilir (Atmaca, 2020).

**Örnek 3.2.7**  $X = \{a, b, c, d, e\}$ ,  $B = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$  nesne özelliklerini temsil eden  $\varphi_i : X \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonlarının ailesi ve  $\tau = \{\emptyset, X, \{b\}, \{a, b\}, \{c, d\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c, d\}\}$  olsun. Burada  $\varphi_i$  fonksiyonları

	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$
$\varphi_1$	0	1	0	2	2
$\varphi_2$	0	1	0	1	1
$\varphi_3$	0	2	0	1	2

biçiminde tanımlıdır. Şimdi her bir  $r$  li kombinasyon için denklik sınıflarını oluşturalım. Bu denklik sınıfları

$$[a]_{\{\varphi_1\}} = \{a, c\}, [b]_{\{\varphi_1\}} = \{b\}, [d]_{\{\varphi_1\}} = \{d, e\}$$

$$[a]_{\{\varphi_2\}} = \{a, c\}, [b]_{\{\varphi_2\}} = \{b, d, e\}$$

$$[a]_{\{\varphi_3\}} = \{a, c\}, [b]_{\{\varphi_3\}} = \{b, e\}, [d]_{\{\varphi_3\}} = \{d\},$$

$$[a]_{\{\varphi_1, \varphi_2\}} = \{a, c\}, [b]_{\{\varphi_1, \varphi_2\}} = \{b\}, [d]_{\{\varphi_1, \varphi_2\}} = \{d, e\}$$

$$[a]_{\{\varphi_1, \varphi_3\}} = \{a, c\}, [b]_{\{\varphi_1, \varphi_3\}} = \{b\}, [d]_{\{\varphi_1, \varphi_3\}} = \{d\}, [e]_{\{\varphi_1, \varphi_3\}} = \{e\}$$

$$[a]_{\{\varphi_2, \varphi_3\}} = \{a, c\}, [b]_{\{\varphi_2, \varphi_3\}} = \{b, e\}, [d]_{\{\varphi_2, \varphi_3\}} = \{d\}$$

$$[a]_{\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}} = \{a, c\}, [b]_{\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}} = \{b\}, [d]_{\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}} = \{d\}, [e]_{\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}} = \{e\}$$

biçiminde olacaktır. Buradan  $\tau_1^\Delta = \{\emptyset, X, \{b, d, e\}\}$  dir. Benzer şekilde  $\tau_2^\Delta = \{\emptyset, X, \{b, e\}, \{a, b, c, e\}, \{a, c, d, e\}\}$  ve  $\tau_3^\Delta = \{\emptyset, X, \{b\}, \{a, b, c\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}\}$  olur ve

$$N_1^\Delta(a) = \{X\}, N_1^\Delta(b) = \{X, \{b, d, e\}\}, N_1^\Delta(c) = \{X\}, N_1^\Delta(d) = \{X\}, N_1^\Delta(e) = \{X\}$$

$$N_2^\blacktriangle(a) = \{\{a, b, c, e\}, X\}, N_2^\blacktriangle(b) = \{U \subseteq X : \{b, e\} \subseteq U\}, N_2^\blacktriangle(c) = \{X\}, \\ N_2^\blacktriangle(d) = \{\{a, c, d, e\}, X\}, N_2^\blacktriangle(e) = \{X\}$$

$$N_3^\blacktriangle(a) = \{U \subseteq X : \{a, b, c\} \subseteq U\}, N_3^\blacktriangle(b) = \{U \subseteq X : \{b\} \subseteq U\}, N_3^\blacktriangle(c) = \\ \{U \subseteq X : \{a, c, d\} \subseteq U\}, N_3^\blacktriangle(d) = \{U \subseteq X : \{a, c, d\} \subseteq U\}, N_3^\blacktriangle(e) = \{X\}$$

biçimindedir. Burada  $(x_n) = (a, b, c, c, b, a, b, a, b, a, \dots)$  dizisi için yakınsama tablosu

$x_n \rightarrow a$	$x_n \xrightarrow{1} a$	$x_n \xrightarrow{2} a$	$x_n \xrightarrow{3} a$
$x_n \nrightarrow b$	$x_n \xrightarrow{1} b$	$x_n \xrightarrow{2} b$	$x_n \xrightarrow{3} b$
$x_n \nrightarrow c$	$x_n \xrightarrow{1} c$	$x_n \xrightarrow{2} c$	$x_n \xrightarrow{3} c$
$x_n \nrightarrow d$	$x_n \xrightarrow{1} d$	$x_n \xrightarrow{2} d$	$x_n \xrightarrow{3} d$
$x_n \rightarrow e$	$x_n \xrightarrow{1} e$	$x_n \xrightarrow{2} e$	$x_n \xrightarrow{3} e$

biçiminde verilebilir (Atmaca, 2020).

Yukarıdaki örnek incelenirse bir  $(x_n)$  dizisinin yakınsaklığı ile  $r$ -yakın topolojilerde olan yakınsaklığı arasında bir ilişki vardır. Şimdi bu ilişkiyi aşağıdaki teoremle açıklayalım.

**Teorem 3.2.7**  $(O, F, \sim_{B_r}, N_r(B))$  bir yakın yaklaşım uzayı,  $X \subseteq O$ ,  $(X, \tau)$  bir topolojik uzay ve  $(x_n)$ ,  $X$  de bir dizi olsun (Atmaca, 2020).

(i) Her  $r \leq s$  için  $x_n \xrightarrow{s} x_0$  ise  $x_n \xrightarrow{r} x_0$  dir.

(ii)  $x_n \rightarrow x_0$  ise her  $r \leq |B|$  için  $x_n \xrightarrow{r} x_0$  dir.

**İspat.** (i)  $r \leq s$  ve  $x_n \xrightarrow{s} x_0$  olsun. Bu durumda her  $N \in N_s^\blacktriangle(x_0)$   $r$ -yakın komşuluğu için bir  $n_0 \in \mathbb{N}$  sayısı vardır öyleki her  $n \geq n_0$  için  $x_n \in N$  dir. Teorem 3.2.4 den her  $N \in N_s^\blacktriangle(x_0)$   $r$ -yakın komşuluğu için bir  $n_1 \in \mathbb{N}$  sayısı vardır öyleki her  $n \geq n_1$  için  $(x_n) \in N$  dir. Bu ise  $x_n \xrightarrow{r} x_0$  olduğunu verir.

(ii)  $x_n \rightarrow x_0$  ve  $r \leq |B|$  olsun. Bu durumda her  $N \in N(x_0)$  komşuluğu için bir  $n_0 \in \mathbb{N}$  sayısı vardır öyleki her  $n \geq n_0$  için  $x_n \in N$  dir. Dolayısıyla her  $x_0$  ı bulunduran  $G$  açığı aynı zamanda bir komşuluk olduğundan bir  $n_1 \in \mathbb{N}$  sayısı vardır öyleki her  $n \geq n_1$  için  $x_n \in G$  dir. Sonuç olarak her  $N \in N_s^\blacktriangle(x_0)$   $r$ -yakın komşuluğu için bir  $n_1 \in \mathbb{N}$  sayısı vardır öyleki her  $n \geq n_1$  için  $x_n \in G \subseteq G_r^\blacktriangle \subseteq N$  dir. ■

**Tanım 3.2.7**  $(O, F, \sim_{B_r}, N_r(B))$  bir yakın yaklaşım uzayı,  $X \subseteq O$ ,  $(X, \tau)$  ve  $(Y, \sigma)$  topolojik uzaylar ve  $f : X \rightarrow Y$  bir fonksiyon olsun.  $f$ ,  $r$ -yakın süreklidir  $\iff \forall V \in N(f(x_0))$  için  $U \in N_r^\blacktriangle(x_0)$  vardır öyle ki  $f(U) \subseteq V$  dir (Atmaca ve Zorlutuna, 2021).

Eğer  $f, \forall x_0 \in X$  için  $r$ -yakın süreklidir ise  $f$   $e$   $r$ -yakın süreklidir deriz.

**Örnek 3.2.8**  $X = \{a, b, c, d, e\}$ ,  $B = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$  nesne özelliklerini temsil eden fonksiyonların kümesi,  $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}\}$  ve  $\sigma = \{\emptyset, X, \{a, b, c, d\}\}$  olsun. Burada  $\varphi_i$  fonksiyonları

	a	b	c	d	e
$\varphi_1$	1	1	0	1	0
$\varphi_2$	1	2	1	1	0
$\varphi_3$	1	1	2	0	0

biçiminde tanımlıdır. Şimdi her bir  $r$  li kombinasyon için denklik sınıflarına oluşturalım. Bu denklik sınıfları

$$\begin{aligned}
[a]_{\{\varphi_1\}} &= \{a, b, d\}, [c]_{\{\varphi_1\}} = \{c, e\} \\
[a]_{\{\varphi_2\}} &= \{a, c, d\}, [b]_{\{\varphi_2\}} = \{b\}, [e]_{\{\varphi_2\}} = \{e\} \\
[a]_{\{\varphi_3\}} &= \{a, b\}, [c]_{\{\varphi_3\}} = \{c\}, [d]_{\{\varphi_3\}} = \{d, e\} \\
[a]_{\{\varphi_1, \varphi_2\}} &= \{a, d\}, [b]_{\{\varphi_1, \varphi_2\}} = \{b\}, [c]_{\{\varphi_1, \varphi_2\}} = \{c\}, [e]_{\{\varphi_1, \varphi_2\}} = \{e\} \\
[a]_{\{\varphi_1, \varphi_3\}} &= \{a, b\}, [c]_{\{\varphi_1, \varphi_3\}} = \{c\}, [d]_{\{\varphi_1, \varphi_3\}} = \{d\}, [e]_{\{\varphi_1, \varphi_3\}} = \{e\} \\
[a]_{\{\varphi_2, \varphi_3\}} &= \{a\}, [b]_{\{\varphi_2, \varphi_3\}} = \{b\}, [c]_{\{\varphi_2, \varphi_3\}} = \{c\}, [d]_{\{\varphi_2, \varphi_3\}} = \{d\}, [e]_{\{\varphi_2, \varphi_3\}} = \{e\} \\
[a]_{\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}} &= \{a\}, [b]_{\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}} = \{b\}, [c]_{\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}} = \{c\}, [d]_{\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}} = \{d\}, \\
[e]_{\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}} &= \{e\}
\end{aligned}$$

biçiminde olacaktır. Burada her bir  $r$  li denklik sınıfları

$$\begin{aligned}
N_1(B) &= \{\{[a]_{\{\varphi_1\}}, [c]_{\{\varphi_1\}}\}, \{[a]_{\{\varphi_2\}}, [b]_{\{\varphi_2\}}, [e]_{\{\varphi_2\}}\}, \{[a]_{\{\varphi_3\}}, [c]_{\{\varphi_3\}}, [d]_{\{\varphi_3\}}\}\} \\
N_2(B) &= \{\{[a]_{\{\varphi_1, \varphi_2\}}, [b]_{\{\varphi_1, \varphi_2\}}, [c]_{\{\varphi_1, \varphi_2\}}, [e]_{\{\varphi_1, \varphi_2\}}\}, \{[a]_{\{\varphi_1, \varphi_3\}}, [b]_{\{\varphi_1, \varphi_3\}}, [c]_{\{\varphi_1, \varphi_3\}}, [d]_{\{\varphi_1, \varphi_3\}}, [e]_{\{\varphi_1, \varphi_3\}}\}\}, \\
&\quad \{[a]_{\{\varphi_2, \varphi_3\}}, [b]_{\{\varphi_2, \varphi_3\}}, [c]_{\{\varphi_2, \varphi_3\}}, [d]_{\{\varphi_2, \varphi_3\}}, [e]_{\{\varphi_2, \varphi_3\}}\}\} \\
N_3(B) &= \{[a]_{\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}}, [b]_{\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}}, [c]_{\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}}, [d]_{\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}}, [e]_{\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}}\}
\end{aligned}$$

biçimindedir. Buradan  $\tau_1^\Delta = \{\emptyset, X, \{a, b, c, d\}, \{a, c, d, e\}\}$  dir. Benzer şekilde  $\tau_2^\Delta = \{\emptyset, X, \{c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}\}$  ve  $\tau_3^\Delta = \tau$  olur.  $f : X \rightarrow X$ ,  $f(a) = f(c) = a$ ,  $f(b) = e$ ,  $f(d) = f(e)$  biçiminde tanımlı fonksiyonunu düşünelim. Buradan  $N(f(a)) = N(a) = \{X, \{a, b, c, d\}\}$  ve  $N_1^\Delta(a) = \{\{a, b, c, d\}, \{a, c, d, e\}, X\}$  olacak şekilde  $U \in N_1^\Delta(a)$  vardır öyle ki  $\forall V \in N(f(a))$  için  $f(U) \subseteq V$  dir. Dolayısıyla  $f$ ,  $a$  da 1-yakın süreklidir. Benzer şekilde  $f$ ,  $b, c, d$  ve  $e$  de de 1-yakın süreklidir.

Ayrıca  $f$ , 2-yakın ve 3-yakın süreklidir değildir.

**Teorem 3.2.8**  $(O, F, \sim_{B_r}, N_r(B))$  bir yakın yaklaşım uzayı,  $X \subseteq O$ ,  $(X, \tau)$  ve  $(Y, \sigma)$  topolojik uzaylar ve  $f : X \rightarrow Y$   $r$ -yakın sürekli olsun. Eğer  $U, f(x_0)$  in komşuluğu ise  $f^{-1}(U), x_0$  in  $r$ -yakın komşuluğudur (Atmaca ve Zorlutuna, 2021).

**İspat.**  $f : X \rightarrow Y$   $r$ -yakın sürekli ve  $U, f(x_0)$  komşuluğu olsun.  $f$ ,  $r$ -yakın sürekli olduğundan  $x_0$  in bir  $U$   $r$ -yakın komşuluğu vardır öyleki  $f(U) \subseteq V$  dir. Buradan  $x_0 \in U \subseteq f^{-1}(f(U)) \subseteq f^{-1}(V)$  dir.  $U, x_0$  in  $r$ -yakın komşuluğu olduğundan  $G_r^\Delta \in \tau_r^\Delta$  vardır öyleki  $x_0 \in G \subseteq G_r^\Delta \subseteq U$  dur. Dolayısıyla  $x_0 \in G \subseteq G_r^\Delta \subseteq f^{-1}(V)$  dir. Bu ise ispatı tamamlar. ■

**Teorem 3.2.9**  $(O, F, \sim_{B_r}, N_r(B))$  bir yakın yaklaşım uzayı,  $X \subseteq O$ ,  $(X, \tau)$  ve  $(Y, \sigma)$  topolojik uzaylar ve  $f : X \rightarrow Y$  bir fonksiyon olsun. Eğer  $f, x_0$  da  $r$ -yakın sürekli ise her  $s < r < |B|$  için  $f, x_0$  da  $s$ -yakın sürekli dir (Atmaca ve Zorlutuna, 2021).

**İspat.**  $f, x_0$  da  $r$ -yakın sürekli ve  $V \in N(f(x_0))$  olsun.  $f, r$ -yakın sürekli olduğu için  $x_0$  in bir  $U$   $r$ -yakın komşuluğu vardır öyle ki  $f(U) \subseteq V$  dir. Teorem 3.2.7 (i) den  $U, x_0$  in  $s$ -yakın komşuluğu olduğu için  $f, x_0$  da  $s$ -yakın sürekli dir. ■

**Teorem 3.2.10**  $(O, F, \sim_{B_r}, N_r(B))$  bir yakın yaklaşım uzayı,  $X \subseteq O$ ,  $(X, \tau)$  ve  $(Y, \sigma)$  topolojik uzaylar ve  $f : X \rightarrow Y$  bir fonksiyon olsun. Eğer  $f, r$ -yakın sürekli ise her  $G \in \sigma$  için  $f^{-1}(G) \in \tau_r^\Delta$  dir (Atmaca ve Zorlutuna, 2021).

**İspat.**  $f, r$ -yakın sürekli ve  $G \in \sigma$  olsun. Buradan  $f(x) \in G$  için  $x \in f^{-1}(G)$  dir. Dolayısıyla  $G \in N(f(x))$  dir.  $f, r$ -yakın sürekli olduğu için  $H \in N_r^\Delta(x)$  vardır öyle ki  $f(H) \subseteq G$  dir. Öte yandan  $U \in \tau$  vardır öyle ki  $H \subseteq f^{-1}(G)$  ve  $H \in N_r^\Delta(x)$  için  $x \in U \subseteq U_r^\Delta \subseteq H \subseteq f^{-1}(G)$  dir. Sonuç olarak  $f^{-1}(G) \in \tau_r^\Delta$  dir. ■

Yukarıda ki teoremin tersi genelde doğru değildir.

**Örnek 3.2.9**  $(O, F, \sim_{B_r}, N_r(B))$  yakın yaklaşım uzayını ve Örnek 3.2.8 de ki  $\tau$  topolojisini düşünelim. Eğer  $\sigma = \{\emptyset, X, \{a, b\}\}$  seçersek ve  $f(a) = f(b) = a, f(c) = c, f(d) = b$  ve  $f(e) = e$  olacak şekilde  $f : (X, \tau) \rightarrow (X, \sigma)$  fonksiyonunu tanımlarsak her  $G \in \sigma$  için  $f^{-1}(G) \in \tau_2^\Delta$  olur.  $N(f(d)) = N(b) = \{\{a, b\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, b, e\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, c, e\}, \{a, b, e, d\}, X\}$  ve  $N_2^\Delta(d) = \{\{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}, \{a, c, d, e\}, X\}$

olduğu için  $U$ ,  $d$  nin 2-yakın komşuluğu değildir öyle ki  $\{a, b\} \in N(f(d))$  için  $f(U) \subseteq \{a, b\}$  dir. Dolayısıyla  $f, d$  de 2-süreklili değildir.

**Sonuç 3.2.2**  $(O, F, \sim_{B_r}, N_r(B))$  bir yakın yaklaşım uzayı,  $X \subseteq O$ ,  $(X, \tau)$  ve  $(Y, \sigma)$  topolojik uzaylar ve  $f : X \rightarrow Y$  bir fonksiyon olsun. Eğer her  $G \in \sigma$  için  $f^{-1}(G) \notin \tau_r^\Delta$  ise  $f$ ,  $r$ -yakın süreklili değildir (Atmaca ve Zorlutuna, 2021).

**İspat.** Önceki teoremden açıktır. ■

**Teorem 3.2.11**  $(O, F, \sim_{B_r}, N_r(B))$  bir yakın yaklaşım uzayı,  $X \subseteq O$ ,  $(X, \tau)$  ve  $(Y, \sigma)$  topolojik uzaylar ve  $f : X \rightarrow Y$  bir fonksiyon olsun. Eğer  $f$ ,  $r$ -yakın süreklili ise  $\sigma$  da ki her  $F$  kapalı kümesi için  $f^{-1}(F)$ ,  $\tau_r^\Delta$  da  $r$ -yakın kapalıdır (Atmaca ve Zorlutuna, 2021).

**İspat.** İspat yukarıdaki teoreme benzer şekilde yapılabilir. ■

**Teorem 3.2.12**  $(O, F, \sim_{B_r}, N_r(B))$  bir yakın yaklaşım uzayı,  $X \subseteq O$ ,  $(X, \tau)$  ve  $(Y, \sigma)$  topolojik uzaylar ve  $f : X \rightarrow Y$  bir fonksiyon olsun.  $f$ ,  $x_0$  da  $r$ -yakın süreklili ancak ve ancak  $f(x_0)$  in her  $G$  açık komşuluğu için  $x_0 \in Core_r^\Delta(f^{-1}(G))$  dir (Atmaca ve Zorlutuna, 2021).

**İspat.** ( $\implies$ ):  $f$ ,  $x_0$  da  $r$ -yakın süreklili ve  $G$ ,  $f(x_0)$  in açık komşuluğu olsun.  $f$ ,  $x_0$  da  $r$ -yakın süreklili olduğu için  $x_0$  in  $r$ -yakın açık komşuluğu olan bir  $U$  vardır öyle ki  $f(U) \subseteq G$  dir. Buradan  $x_0 \in H \subseteq H_r^\Delta \subseteq U$  ve  $U \subseteq f^{-1}(G)$  dir. Sonuç olarak  $x_0 \in Core_r^\Delta(f^{-1}(G))$  dir.

( $\impliedby$ ):  $f(x_0)$  in her  $G$  açık komşuluğu için  $x_0 \in Core_r^\Delta(f^{-1}(G))$  ve  $f(x_0)$  in bir açık komşuluğu  $N$  olsun. Buradan  $G \in \sigma$  vardır öyle ki  $f(x_0) \in G \subseteq N$  dir.  $G$ ,  $f(x_0)$  in açık komşuluğu ve  $x_0 \in Core_r^\Delta(f^{-1}(G))$  olduğu için  $H \in \tau$  vardır öyle ki  $x_0 \in H \subseteq H_r^\Delta \subseteq f^{-1}(G)$  dir. Eğer  $f^{-1}(G) = U$  alırsak  $U \in N_r^\Delta(x_0)$  ve  $f(U) \subseteq N$  olur. Sonuç olarak  $f$ ,  $x_0$  da  $r$ -yakın süreklili. ■

**Tanım 3.2.8**  $(O, F, \sim_{B_r}, N_r(B))$  bir yakın yaklaşım uzayı,  $X \subseteq O$ ,  $(X, \tau)$  ve  $(Y, \sigma)$  topolojik uzaylar ve  $f : X \rightarrow Y$  bir fonksiyon olsun. Eğer  $x_0$  in  $r$ -yakın yakınsaması olan her  $(x_n)$  için  $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$  ise  $f$ ,  $x_0$  da  $r$ -yakın dizisel süreklili denir (Atmaca ve Zorlutuna, 2021).

Eğer  $f$ , her  $x_0 \in X$  da  $r$ -yakın dizisel süreklidir ise  $f$  fonksiyonuna  $X$  üzerinde  $r$ -yakın dizisel süreklidir denir.

**Teorem 3.2.13**  $(O, F, \sim_{B_r}, N_r(B))$  bir yakın yaklaşım uzayı,  $X \subseteq O$ ,  $(X, \tau)$  ve  $(Y, \sigma)$  topolojik uzaylar ve  $f : X \rightarrow Y$  bir fonksiyon olsun. Eğer  $f$ ,  $r$ -yakın süreklidir ise  $f$ ,  $r$ -yakın dizisel süreklidir (Atmaca ve Zorlutuna, 2021).

**İspat.**  $f$ ,  $r$ -yakın süreklidir ve  $x_n \xrightarrow{r} x_0$  olsun. Kabul edelim ki  $f(x_0)$  in bir  $V$  komşuluğu olsun.  $f$ ,  $r$ -yakın süreklidir olduğu için  $U \in N_r^\Delta(x_0)$  vardır öyle ki  $f(U) \subseteq V$  dir. Buradan  $U \subseteq f^{-1}(f(U)) \subseteq f^{-1}(V)$  dolayısıyla  $f^{-1}(V) \in N_r^\Delta(x_0)$  dir.  $x_n \xrightarrow{r} x_0$  için  $n_0 \in \mathbb{N}$  vardır öyleki her  $n \geq n_0$  için  $x_n \in f^{-1}(V)$  dir.  $f(x_n) \in f(f^{-1}(V)) \subseteq V$  için  $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$  dir. Sonuç olarak  $f$ ,  $r$ -yakın dizisel süreklidir. ■

Yukarıda ki teoremin tersi genelde doğru değildir.

**Örnek 3.2.10**  $(O, F, \sim_{B_r}, N_r(B))$  yakın yaklaşım uzayını ve Örnek 3.2.8 de ki  $\tau$  topolojisini düşünelim. Eğer  $\sigma = \{\emptyset, X, \{a, b, c, d\}\}$ ,  $x_n \xrightarrow{2} c$  alırsak ve  $f(a) = f(c) = a$ ,  $f(b) = f(d) = f(e) = e$  olacak şekilde  $f : (X, \tau) \rightarrow (X, \sigma)$  fonksiyonunu tanımlarsak  $f^{-1}(\{a, b, c, d\}) = \{a, c\} \notin \tau_2^\Delta$  ve buradan  $f$ ,  $c$  de 2-yakın süreklidir. Öte yandan  $N_\sigma(f(c)) = N_\sigma(a) = \{\{a, b, c, d\}, X\}$  ve  $N_2^\Delta(c) = \{G \subseteq X : \{c\} \subseteq G\}$  dir.  $x_n \xrightarrow{2} c$  den her  $N \in N_2^\Delta(c)$  için  $n_0 \in \mathbb{N}$  dir öyle ki her  $n \geq n_0$  için  $x_n \in N$  dir.  $\{c\} \in N_2^\Delta(c)$  den her  $n \geq n_0$  için  $x_n = c$  dir. Yani  $(x_n) = (x_1, x_2, \dots, x_{n_0}, c, c, c, \dots)$  dir. Buradan  $(f(x_n)) = (f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_{n_0}), f(c), f(c), f(c), \dots)$  olduğunu alırız. Dolayısıyla  $f(x_n) \rightarrow f(c) = a$  olduğunu elde ederiz. Sonuç olarak  $f$ ,  $c$  de 2-yakın dizisel süreklidir.

**Teorem 3.2.14**  $(O, F, \sim_{B_r}, N_r(B))$  bir yakın yaklaşım uzayı,  $X \subseteq O$ ,  $(X, \tau)$  ve  $(Y, \sigma)$  topolojik uzaylar ve  $f : X \rightarrow Y$  bir fonksiyon olsun. Eğer  $f$ ,  $r$ -yakın süreklidir ise  $f^{-1}(\text{int}B) \subseteq \text{int}_r^\Delta(f^{-1}(B))$  dir (Atmaca ve Zorlutuna, 2021).

**İspat.**  $f$ ,  $r$ -yakın süreklidir bir fonksiyon ve  $B \subseteq Y$  olsun.  $\text{int}B \subseteq B$ ,  $f^{-1}(\text{int}B) \subseteq f^{-1}(B)$  olduğu için Teorem 3.2.5 (ii) den  $\text{int}_r^\Delta(f^{-1}(\text{int}B)) \subseteq \text{int}_r^\Delta(f^{-1}(B))$  dir.  $f$ ,  $r$ -yakın süreklidir olduğu için  $f^{-1}(\text{int}B) \in \tau_r^\Delta$  ve  $\text{int}_r^\Delta(f^{-1}(\text{int}B)) = f^{-1}(\text{int}B)$  dir. Dolayısıyla  $f^{-1}(\text{int}B) \subseteq \text{int}_r^\Delta(f^{-1}(B))$  dir. ■

### 3.3 r-Yakın Taban ve r-Yakın Alt Uzaylar

**Tanım 3.3.1**  $(X, F, \sim_{B_r}, N_r(B))$  bir yakın yaklaşım uzayı,  $(X, \tau)$  bir topolojik uzay ve  $\mathcal{D}$ ,  $X$  in alt kümelerinin ailesi olsun.  $\tau_r^\Delta$  in boş kümeden farklı her elemanı  $\mathcal{D}$  nin elemanlarının birleşimi şeklinde yazılabiliyorsa  $\mathcal{D}$  ye  $\tau_r^\Delta$  r-yakın topolojisinin r-yakın tabanıdır denir.

**Örnek 3.3.1**  $X = \{a, b, c, d\}$ ,  $B = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$  nesne özelliklerini temsil eden  $\varphi_i : X \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonlarının ailesi,  $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}\}$ ,  $\mathcal{D}_1 = \{X, \{a, b\}, \{b, c, d\}\}$ ,  $\mathcal{D}_2 = \{\{a, b\}, \{c, d\}\}$ ,  $\mathcal{D}_3 = \{\{a\}, \{b\}, \{c, d\}\}$  aileleri ve  $\varphi_i$  fonksiyonları

	a	b	c	d
$\varphi_1$	1	1	0	0
$\varphi_2$	0	0	1	1
$\varphi_3$	1	0	0	0

biçiminde tanımlı olsun. Bu durumda  $\tau_1^\Delta = \{\emptyset, X, \{a, b\}, \{b, c, d\}\}$ ,  $\tau_2^\Delta = \{\emptyset, X, \{a, b\}, \{c, d\}\}$  ve  $\tau_3^\Delta = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}\}$  biçimindedir. Açıktır ki  $\mathcal{D}_1$ ,  $\mathcal{D}_2$  ve  $\mathcal{D}_3$  aileleri sırasıyla  $\tau_1^\Delta$ ,  $\tau_2^\Delta$  ve  $\tau_3^\Delta$  topolojilerinin r-yakın tabanlarıdır.

**Teorem 3.3.1**  $(X, F, \sim_{B_r}, N_r(B))$  bir yakın yaklaşım uzayı,  $(X, \tau)$  bir topolojik uzay ve  $\mathcal{D}$ ,  $\tau$  nun tabanı olsun. Buradan her  $r$  için  $\mathcal{D}_r^\Delta = \{D_r^\Delta \mid D \in \mathcal{D}\}$  aileleri  $\tau_r^\Delta$  topolojilerinin r-yakın tabanıdır.

**İspat.**  $G_r^\Delta \in \tau_r^\Delta$  alalım.  $G_r^\Delta = \bigcup_{\substack{D_r^\Delta \in (\mathcal{D}')_r^\Delta \\ (\mathcal{D}')_r^\Delta \subset \mathcal{D}_r^\Delta}} D_r^\Delta$  olacak şekilde  $(\mathcal{D}')_r^\Delta \subset \mathcal{D}_r^\Delta$  varma?

$$\begin{aligned}
 y \in \bigcup_{\substack{D_r^\Delta \in (\mathcal{D}')_r^\Delta \\ (\mathcal{D}')_r^\Delta \subset \mathcal{D}_r^\Delta}} D_r^\Delta &\iff y \in \bigcup_{[x]_{B_r} \cap D \neq \emptyset} [x]_{B_r} \\
 &\iff \exists D_r^\Delta \in (\mathcal{D}')_r^\Delta, \exists [x]_{B_r} \cap D \neq \emptyset \text{ için } y \in [x]_{B_r} \\
 &\iff \exists D \in \mathcal{D}', \exists [x]_{B_r} \cap D \neq \emptyset \text{ için } y \in [x]_{B_r} \\
 &\iff \exists [x]_{B_r} \cap (\cup D) \neq \emptyset \text{ için } y \in [x]_{B_r} \quad \blacksquare \\
 &\iff y \in \bigcup_{[x]_{B_r} \cap (\cup D) \neq \emptyset} [x]_{B_r} \\
 &\iff y \in \bigcup_{[x]_{B_r} \cap G \neq \emptyset} [x]_{B_r} \\
 &\iff y \in G_r^\Delta
 \end{aligned}$$

**Teorem 3.3.2**  $(X, F, \sim_{B_r}, N_r(B))$  bir yakın yaklaşım uzayı,  $(X, \tau)$ ,  $(Y, \sigma)$  iki topolojik uzay ve  $\mathcal{D}_r^\Delta \subset \sigma_r^\Delta$ ,  $\sigma_r^\Delta$   $r$ -yakın topolojisinin bir  $r$ -yakın tabanı olsun.  $f : X \rightarrow Y$  fonksiyon olmak üzere  $f$ ,  $r$ -yakın sürekli ise  $\forall D_r^\Delta \in \mathcal{D}_r^\Delta$  için  $f^{-1}(D) \in \tau_r^\Delta$  dir.

**İspat.**  $f$ ,  $r$ -yakın sürekli olsun. Bu durumda  $f$ ,  $r$ -yakın sürekli olduğundan  $Y$  deki her açık  $V$  için  $f^{-1}(V) \in \tau_r^\Delta$  dir. Her  $D$  taban elemanı da  $Y$  de açık olduğundan buradan  $f^{-1}(D) \in \tau_r^\Delta$  dir. ■

**Teorem 3.3.3** (A Recognition Lemma)  $(X, F, \sim_{B_r}, N_r(B))$  bir yakın yaklaşım uzayı,  $(X, \tau)$  bir topolojik uzay ve  $D \subseteq \tau$  olsun. Bu durumda  $\mathcal{D}_r^\Delta, \tau_r^\Delta$  için bir tabandır  $\iff \forall G_r^\Delta \in \tau_r^\Delta$  ve  $\forall x \in G_r^\Delta$  için  $x \in D_r^\Delta \subset G_r^\Delta$  olacak biçimde  $D_r^\Delta \in \mathcal{D}_r^\Delta$  vardır.

**İspat.** ( $\implies$ ):  $\mathcal{D}_r^\Delta, \tau_r^\Delta$  için bir taban olsun.  $G_r^\Delta \in \tau_r^\Delta$  ve  $x \in G_r^\Delta$  alalım.  $\mathcal{D}_r^\Delta$  taban olduğundan

$$G_r^\Delta = \bigcup_{\substack{D_r^\Delta \in (\mathcal{D}')_r^\Delta \\ (\mathcal{D}')_r^\Delta \subset \mathcal{D}_r^\Delta}} D_r^\Delta$$

biçiminde yazılabilir. Buradan

$$x \in G_r^\Delta \implies x \in \bigcup_{\substack{D_r^\Delta \in (\mathcal{D}')_r^\Delta \\ (\mathcal{D}')_r^\Delta \subset \mathcal{D}_r^\Delta}} D_r^\Delta$$

$$\implies \exists D_r^\Delta \in (\mathcal{D}')_r^\Delta \text{ için } x \in D_r^\Delta \subset G_r^\Delta$$

olur.

$$(\impliedby): \forall G_r^\Delta \in \tau_r^\Delta \text{ ve } \forall x \in G_r^\Delta \text{ için } x \in D_r^\Delta \subset G_r^\Delta \text{ olacak biçimde } D_r^\Delta \in \mathcal{D}_r^\Delta$$

olsun.  $G_r^\Delta \in \tau_r^\Delta$  alalım.

$$G_r^\Delta = \bigcup_{x \in G_r^\Delta} \{x\} \subset \bigcup_{x \in D_r^\Delta \subset G_r^\Delta} D_r^\Delta \subset G_r^\Delta$$

olur. Buradan  $\forall G_r^\Delta \in \tau_r^\Delta$  için

$$G_r^\Delta = \bigcup_{\substack{D_r^\Delta \in (\mathcal{D}')_r^\Delta \\ (\mathcal{D}')_r^\Delta \subset \mathcal{D}_r^\Delta}} D_r^\Delta$$

biçiminde yazılır. Burada  $(\mathcal{D}')_r^\Delta = \{(D_r^\Delta)_x \mid x \in G_r^\Delta \text{ ve } x \in (D_r^\Delta)_x \subset G_r^\Delta\}$  dir. ■

**Teorem 3.3.4**  $(X, F, \sim_{B_r}, N_r(B))$  bir yakın yaklaşım uzayı ve  $\mathcal{D}_r^\Delta, X$  in alt kümelerinin üst yaklaşımlarından oluşan bir aile olsun.  $\mathcal{D}_r^\Delta, X$  üzerinde bir topoloji için  $r$ -yakın tabanı ise  $X, \mathcal{D}_r^\Delta$  ailesinin elemanlarının birleşimi biçiminde yazılır.

**İspat.**  $\mathcal{D}_r^\Delta, X$  kümesi üzerinde bir  $\tau_r^\Delta$  topolojisinin tabanı olsun.  $X \in \tau_r^\Delta$  olduğundan

$\exists(\mathcal{D}')_r^\Delta \subset \mathcal{D}_r^\Delta$  vardır öyle ki  $X = \bigcup_{D_r^\Delta \in (\mathcal{D}')_r^\Delta} D_r^\Delta$   
 dır. Buradan  $(\mathcal{D}')_r^\Delta \subset \mathcal{D}_r^\Delta$  olduğundan  $X = \bigcup_{D_r^\Delta \in (\mathcal{D}')_r^\Delta} D_r^\Delta \subset \bigcup_{D_r^\Delta \in \mathcal{D}_r^\Delta} D_r^\Delta$  olur ve buradan  
 $X = \bigcup_{D_r^\Delta \in \mathcal{D}_r^\Delta} D_r^\Delta$  olduğu elde edilir. ■

**Tanım 3.3.2**  $(X, F, \sim_{B_r}, N_r(B))$  yakın yaklaşım uzayı,  $F = \{\varphi_i : i \in I\}$  ve  $A \subseteq X$  olsun.  $F|_A = \{\varphi_i|_A : i \in I\}$  olmak üzere  $\sim_{B_r}^A = \{(x, x') \mid \varphi_i|_A(x) = \varphi_i|_A(x'), \varphi_i|_A \in B_r|_A \subset F|_A\}$  biçiminde tanımlanır ve bu denklik bağıntısının denklik sınıfları  $[x]_{B_r}^A$  ile gösterilir.

**Tanım 3.3.3**  $(X, F, \sim_{B_r}, N_r(B))$  yakın yaklaşım uzayı,  $F = \{\varphi_i \mid i \in I\}$  ve  $A \subseteq X$  olsun.  $F|_A = \{\varphi_i|_A : i \in I\}$  olmak üzere  $(A, F|_A, \sim_{B_r}^A, N_r^A(B))$  yakın yaklaşım uzayıdır ve bu uzaya  $(X, F, \sim_{B_r}, N_r(B))$  yakın yaklaşım uzayının alt yakın yaklaşım uzayı denir.

**Tanım 3.3.4**  $(X, F, \sim_{B_r}, N_r(B))$  bir yakın yaklaşım uzayı,  $(X, \tau)$  bir topolojik uzay ve  $A \subseteq X$  olsun.  $\tau_r^{\Delta A} = \left\{ G_r^{\Delta A} : G_r^{\Delta A} = \bigcup_{[x]_{B_r}^A \cap G_i \neq \emptyset} [x]_{B_r}^A, G_i \in \tau \right\}$  ailesine  $\tau$  topolojisinin  $r$ -yakın alt topolojisi denir ve  $(A, \tau_r^{\Delta A})$  ikilisinde  $r$ -yakın alt topolojik uzay adı verilir.

**Örnek 3.3.2**  $X = \{a, b, c, d\}$ ,  $B = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$  nesne özelliklerini temsil eden  $\varphi_i : X \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonlarının ailesi,  $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$  ve  $A = \{b, c, d\}$  olsun. Burada  $\varphi_i$  fonksiyonları

	a	b	c	d
$\varphi_1$	1	0	0	1
$\varphi_2$	1	0	0	0
$\varphi_3$	1	1	0	0

biçiminde tanımlıdır. Buradan

	b	c	d
$\varphi_1 _A$	0	0	1
$\varphi_2 _A$	0	0	0
$\varphi_3 _A$	1	0	0

biçimindedir ve her bir  $r$  li kombinasyon için denklik sınıfları

$$N_1^A(B) = \{ \{ [b]_{\{\varphi_1|_A\}} = \{b, c\}, [b]_{\{\varphi_1|_A\}} = \{d\} \}, \{ [b]_{\{\varphi_2|_A\}} = \{b, c, d\} \}, \{ [b]_{\{\varphi_3|_A\}} = \{b\}, [c]_{\{\varphi_3|_A\}} = \{c, d\} \} \}$$

$$N_2^A(B) = \{ \{ [b]_{\{\varphi_1|_A, \varphi_2|_A\}} = \{b, c\}, [d]_{\{\varphi_1|_A, \varphi_2|_A\}} = \{d\} \}, \{ [b]_{\{\varphi_1|_A, \varphi_3|_A\}} = \{b\}, [c]_{\{\varphi_1|_A, \varphi_3|_A\}} = \{c\}, [d]_{\{\varphi_1|_A, \varphi_3|_A\}} = \{d\} \}, \{ [b]_{\{\varphi_2|_A, \varphi_3|_A\}} = \{b\}, [c]_{\{\varphi_2|_A, \varphi_3|_A\}} = \{c, d\} \} \}$$

$$N_3^A(B) = \{ [b]_{\{\varphi_1|_A, \varphi_2|_A, \varphi_3|_A\}} = \{b\}, [c]_{\{\varphi_1|_A, \varphi_2|_A, \varphi_3|_A\}} = \{c\}, [d]_{\{\varphi_1|_A, \varphi_2|_A, \varphi_3|_A\}} = \{d\} \}$$

biçimindedir. Sonuç olarak  $\tau_1^{\blacktriangle A} = \{\emptyset, A, \{b, d\}\}$ ,  $\tau_2^{\blacktriangle A} = \{\emptyset, A, \{b, c\}\}$ ,  $\tau_3^{\blacktriangle A} = \{\emptyset, A, \{b\}, \{b, c\}\}$  olur.

Örnek 3.3.2 deki  $\tau_1^{\blacktriangle}, \tau_2^{\blacktriangle}$  ve  $\tau_3^{\blacktriangle}$  supra (Genelleştirilmiş) topolojilerini göz önüne alırsak klasik topolojik uzaylardaki alt uzay düşüncesi ile  $(\tau_1^{\blacktriangle})_A = \{\emptyset, A, \{a, b\}\}$ ,  $(\tau_2^{\blacktriangle})_A = \{\emptyset, A, \{a\}\}$  ve  $(\tau_3^{\blacktriangle})_A = \{\emptyset, A, \{a\}, \{a, b\}\}$  ailelerini elde ederiz. Fakat bu elde edilen aileler ve  $r$ -yakın alt uzaylar birbirinden farklıdır.

Şimdi  $r$ -yakın alt uzaylar ile bu ailelerin arasındaki ilişkiyi açıklayan bir teorem verelim.

**Önerme 3.3.1**  $(X, F, \sim_{B_r}, N_r(B))$  yakın yaklaşım uzayı,  $F = \{\varphi_i : i \in I\}$  ve  $A \subseteq X$  olsun. Bu durumda  $(A, F|_A, \sim_{B_r}^A, N_r^A(B))$  alt yakın yaklaşım uzayı için  $[x]_{B_r}^A = [x]_{B_r} \cap A$  dir.

$$y \in [x]_{B_r} \cap A \iff y \in [x]_{B_r} \text{ ve } y \in A$$

$$\iff x \sim_{B_r} y \text{ ve } y \in A$$

$$\iff \forall \varphi_i \in B_r \text{ için } \varphi_i(x) = \varphi_i(y) \text{ ve } y \in A$$

**İspat.**

$$\iff \forall \varphi_i|_A \in B_r|_A \subset F|_A \text{ için } \varphi_i|_A(x) = \varphi_i|_A(y)$$

$$\iff x \sim_{B_r}^A y$$

$$\iff y \in [x]_{B_r}^A$$

**Teorem 3.3.5**  $(X, F, \sim_{B_r}, N_r(B))$  bir yakın yaklaşım uzayı,  $(X, \tau)$  bir topolojik uzay ve  $A \subseteq X$  olsun. Bu durumda her  $G \in \tau$  için  $G_r^{\blacktriangle A} \subseteq (G_r^{\blacktriangle})_A$  dir.

**İspat.**  $G_r^{\blacktriangle A} \in \tau_r^{\blacktriangle A}$  alalım.

$$\begin{aligned}
G_r^{\blacktriangle A} &= \bigcup_{[x]_{B_r}^A \cap G_A \neq \emptyset} [x]_{B_r}^A \\
&= \bigcup_{([x]_{B_r} \cap A) \cap (G \cap A) \neq \emptyset} [x]_{B_r} \cap A \\
&= \left( \bigcup_{[x]_{B_r} \cap (G \cap A) \neq \emptyset} [x]_{B_r} \right) \cap A \quad \blacksquare \\
&\subseteq \left( \bigcup_{[x]_{B_r} \cap G \neq \emptyset} [x]_{B_r} \right) \cap A \\
&= (G_r^{\blacktriangle}) \cap A
\end{aligned}$$

**Teorem 3.3.6**  $(X, F, \sim_{B_r}, N_r(B))$  bir yakın yaklaşım uzayı,  $(X, \tau)$  bir topolojik uzay,  $A \subseteq X$  ve  $F \subset A$  olsun.  $F_r^{\blacktriangle}, \tau_r^{\blacktriangle A}$  kapalıdır  $\iff \exists K_r^{\blacktriangle} \subset X, \tau_r^{\blacktriangle}$  kapalıdır vardır öyleki  $F_r^{\blacktriangle} = A \cap K_r^{\blacktriangle}$  dir.

**İspat.**  $F \subset A$  olsun.

$$\begin{aligned}
F_r^{\blacktriangle}, (\tau_r^{\blacktriangle})_A \text{ kapalıdır} &\iff A \setminus F_r^{\blacktriangle} \in (\tau_r^{\blacktriangle})_A \\
&\iff \exists G_r^{\blacktriangle} \in \tau_r^{\blacktriangle} \text{ vardır öyleki } A \setminus F_r^{\blacktriangle} = A \cap G_r^{\blacktriangle} \\
&\iff \exists G_r^{\blacktriangle} \in \tau_r^{\blacktriangle} \text{ vardır öyleki } F_r^{\blacktriangle} = A \setminus (A \cap G_r^{\blacktriangle}) = A \cap (X \setminus G_r^{\blacktriangle}) \\
&\iff K_r^{\blacktriangle} := X \setminus G_r^{\blacktriangle}, \tau_r^{\blacktriangle} \text{ kapalıdır ve } F_r^{\blacktriangle} = A \cap K_r^{\blacktriangle} \text{ dir.}
\end{aligned}$$

■

**Teorem 3.3.7**  $(X, F, \sim_{B_r}, N_r(B))$  bir yakın yaklaşım uzayı,  $(X, \tau)$  bir topolojik uzay ve  $A \subseteq X$  olsun.  $F \subset A$  için  $cl_r^{\blacktriangle A} E = A \cap cl_r^{\blacktriangle X} E$  dir.

$$\begin{aligned}
cl_r^{\blacktriangle A} E &= \cap \{F_r^{\blacktriangle} : F_r^{\blacktriangle}, (\tau_r^{\blacktriangle})_A \text{ kapalı ve } E \subset F_r^{\blacktriangle}\} \\
&= \cap \{A \cap K_r^{\blacktriangle} : K_r^{\blacktriangle}, \tau_r^{\blacktriangle} \text{ kapalı ve } E \subset A \cap K_r^{\blacktriangle}\}
\end{aligned}$$

**İspat.**

$$\begin{aligned}
&= A \cap (\cap \{K_r^{\blacktriangle} : K_r^{\blacktriangle}, \tau_r^{\blacktriangle} \text{ kapalı ve } E \subset K_r^{\blacktriangle}\}) \\
&= A \cap cl_r^{\blacktriangle X} E
\end{aligned}$$

**Teorem 3.3.8**  $f : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \sigma)$   $r$ -yakın süreklili ve  $A \subset X$  ise

$$f|_A : A \longrightarrow Y, f|_A(x) = f(x)$$

ile tanımlı fonksiyonda  $r$ -yakın süreklidir.

**İspat.**  $V \in N(f(x_0))$  olsun. Bu durumda  $f$ ,  $r$ -yakın süreklili olduğundan  $f^{-1}(V) \in N_r^{\blacktriangle}(f(x_0))$  dir. Buradan  $\exists G \in \tau$  için  $x_0 \in G \subset G_r^{\blacktriangle} \subset f^{-1}(V)$  dir. Teorem 3.3.5 den  $G_r^{\blacktriangle A} \subset (G_r^{\blacktriangle})_A$  dir. Diğer taraftan

$$G_A = \bigcup_{x \in G \cap A} \{x\} \subset \bigcup_{[x]_{B_r} \cap (G \cap A)} [x]_{B_r} = G_r^{\blacktriangle A}$$

olur. Buradan  $x_0 \in (G \cap A) = G_A \subset (G_r^{\blacktriangle} \cap A) = G_r^{\blacktriangle A} \subset f^{-1}(V) \cap A$  olur. Dolayısıyla  $f|_A$  fonksiyonu  $r$ -yakın süreklidir. ■



## KAYNAKLAR

- Atmaca, S.** (2020).  $r$ -Near Topologies on Nearness Approximation Spaces. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, 39, 5, 6849-6855.
- Pawlak, Z.** (1982). Rough sets. *Int. J. of Information and Computer Sciences*, 11, 5, 341-356.
- Pawlak, Z.** (1981). Classification of Objects by Means of Attributes. *Institute for Computer Science, Polish Academy of Science*, Report 429.
- Peters, J. F.** (2007). Near sets. Special Theory about nearness of objects. *Fundamenta Informaticae*, 75 407-433.
- Aktaş, H., Çağman, N.** (2005). Bulanık ve Yaklaşımlı Kümeler. *Çankaya Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi, Journal of Arts and Sciences*, Sayı: 3.
- Peters, J. F.** (2007). Classification of objects by means of features. *In: Proc. IEEE Symposium Series on Foundations of Computational Intelligence*, Honolulu, Hawaii, 1-8.
- Cantor, G.** (1883). Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre, Leipzig.
- Zadeh, L.** (1965). Fuzzy sets, *Information and Control*, 8, 338-353.
- Bonikowski, Z.** (1992). A Certain Conception of the Calculus of Rough Sets. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 33, 3, 412-421.
- Császár, Á.** (2002). Generalized topology, generalized continuity. *Acta Mathematica Hungarica*, 96, 4, 351-357.
- Atmaca, S., Zorlutuna, İ.** (2021). Continuity on  $r$ -near topological spaces. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, 41, 2, 3629-3633.