



(p, q) -PHILLIPS TİP OPERATÖRLER İLE YAKLAŞIM

Matanat GAFARLI

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

OCAK 2022

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
 - Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
 - Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
 - Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
 - Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,
- bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Matanat GAFARLI

19/01/2022

(p, q) –PHILLIPS TİP OPERATÖRLER İLE YAKLAŞIM
(Doktora Tezi)

Matanat GAFARLI

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Ocak 2022

ÖZET

Bu tezde, Yüksel tarafından çalışılan q –Phillips operatörlerin (p, q) –Phillips modifikasyonları tanımlanarak farklı fonksiyon uzaylarında yaklaşım özellikleri incelenmiş ve aşağıda verilen sonuçlar elde edilmiştir. İlk olarak, (p, q) –Phillips operatörlerinin yaklaşım özellikleri incelenmiştir. Daha sonrasında lineer fonksiyonları koruyan (p, q) –Phillips operatörleri tanımlanarak istatistiksel ağırlıklı yaklaşım özellikleri ve istatistiksel Voronovskaja tip teorem elde edilmiştir. Son olarak lineer fonksiyonları koruyan (p, q) –Phillips operatörlerinin Schurer tip modifikasyonu tanımlanmış ve bu operatörlerin ağırlıklı yaklaşımda hata oranı elde edilmiştir.

Bilim Kodu : 20404

Anahtar Kelimeler : (p, q) –Phillips operatörleri, yakınsaklık oranı, ağırlıklı yaklaşım,
Voronovskaja tip teorem

Sayfa Adedi : 66

Danışman : Prof. Dr. İsmet YÜKSEL

APPROXIMATION BY $(p; q)$ –PHILLIPS TYPE OPERATORS

(Ph. D. Thesis)

Matanat GAFARLI

GAZI UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

January 2022

ABSTRACT

In this thesis, by defining the the $(p; q)$ –Phillips modifications of the q –Phillips operators studied by Yüksel are defined and their approximation properties in different function spaces have been investigated, and the following results have been obtained. Firstly, the approximation properties of the $(p; q)$ –Phillips operators have been examined. Then, by defining the $(p; q)$ –Phillips operators that preserve linear functions, statistical weighted approximation properties and statistical Voronovskaja type theorem have been obtained. Finally, the Schurer type modification of $(p; q)$ –Phillips operators that preserve linear functions has been defined and the rate of convergence has been obtained in the weighted approximation of these operators.

Science Code : 20404

Key Words : $(p; q)$ –Phillips operators, rate of convergence, weighted approximation, Voronovskaja type theorem

Page Number : 66

Supervisor : Prof. Dr. İsmet YÜKSEL

TEŐEKKÖR

Doktora eęitim sűrecimin her aŐamasında ilgi ve desteęi ile beni yűnlendiren, bilgilerini benden esirgemeyen Sayın danıŐman hocam Prof. Dr. İsmet YÖKSEL'e, bilimsel konularda her zaman yol gűsteren Sayın Prof. Dr. Nurhayat İSPİR (Gazi Ŭniversitesi) ve Sayın Prof. Dr. Oktay DUMAN (TOBB Ŭniversitesi) hocalarıma teŐekkűrű bir borę bilirim. Ayrıca maddi ve manevi desteęini hiębir zaman esirgemeyen, her daim yanımda olan sevgili aileme ve deęerli arkadaŐlarıma saygı ve teŐekkűrlerimi sunarım.



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR	ix
1. GİRİŞ	1
1.1. (p_n, q_n) –Phillips Operatörlerinin Tanımı	2
2. (p, q) –PHILLIPS OPERATÖR DİZİSİNİN YAKINSAKLIK ÖZELLİKLERİ	7
2.1. Lineer Pozitif Operatörlerin Yaklaşım Hızı	7
2.2. Weierstrass Yaklaşım ve Korovkin Teoremi	9
2.3. Lineer Pozitif Operatörler Dizisinin Yakınsaklık Koşulları	10
2.4. (p_n, q_n) –Phillips Operatörleri için Yardımcı Sonuçlar	13
2.5. (p_n, q_n) –Phillips Operatörlerinin Yaklaşım Özellikleri	20
3. LİNEER FONKSİYONLARI KORUYAN (p, q) –PHILLIPS OPERATÖR DİZİLERİNİN YAKINSAKLIK ÖZELLİKLERİ	27
3.1. $P_{n,p_n,q_n}^*(f; x)$ Operatörleri için Yardımcı Sonuçlar	27
3.2. $P_{n,p_n,q_n}^*(f; x)$ Operatörlerinin Yaklaşım Özellikleri	32
3.3. $P_{n,p_n,q_n}^*(f; x)$ Operatörleri için Voronovskaja Tip Teorem	37
3.4. $P_{n,p_n,q_n}^*(f; x)$ Operatörlerinin İstatistiksel Yaklaşım Özellikleri	40
3.5. $P_{n,p_n,q_n}^*(f; x)$ Operatörleri için İstatistiksel Voronovskaja Tip Teorem	43
4. LİNEER FONKSİYONLARI KORUYAN SCHURER TİP (p, q) –PHILLIPS OPERATÖR DİZİLERİNİN YAKINSAKLIK ÖZELLİKLERİ	49
4.1. $\mathcal{P}_{p_n,q_n}^{n,r}(f; x)$ Operatörleri için Yardımcı Sonuçlar	49

Sayfa

4.2. $\mathcal{P}_{p_n, q_n}^{n, r}(f; x)$ Operatörlerinin Yaklaşım Özellikleri	54
5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	59
KAYNAKLAR	61
ÖZGEÇMİŞ	65



SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklamalar
$L(f, x)$	L operatörünün f fonksiyonuna uygulanması
$f_n \Rightarrow f$	f_n fonksiyon dizisinin f fonksiyonuna düzgün yakınsaması
$C[a, b]$	$[a, b]$ aralığındaki sürekli fonksiyonların uzayı
$C[0, \infty)$	$[0, \infty)$ aralığında sürekli fonksiyonların uzayı
$C_B[0, \infty)$	$[0, \infty)$ aralığında sınırlı ve sürekli reel değerli fonksiyonların uzayı
$\tilde{C}_B[0, \infty)$	$[0, \infty)$ aralığında sınırlı ve düzgün sürekli reel değerli fonksiyonların uzayı
$\omega(f; \delta)$	f fonksiyonunun süreklilik modülü
$\rho(x)$	Ağırlıklı fonksiyon
B_ρ	$ f(x) \leq M_f \rho(x)$ şartını sağlayan fonksiyonlar uzayı
C_ρ	B_ρ uzayındaki sürekli fonksiyonlar uzayı
C_ρ^*	$\left\{ f \in C_\rho : \lim_{ x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\rho(x)} \in \mathbb{R} \right\}$ alt uzayı
$\ f\ _\rho$	B_ρ uzayında tanımlanan norm
$\ L\ _{C_\rho \rightarrow B_\rho}$	C_ρ normlu uzayından B_ρ normlu uzayına dönüşüm yapan L operatörünün normu
$\mathcal{K}(f; \delta)$	f fonksiyonun Peetre K -fonksiyoneli
$\Omega(f; \delta)$	f fonksiyonun ağırlıklı süreklilik modülü
$\delta(K)$	K kümesinin yoğunluk fonksiyonu

1. GİRİŞ

Yaklaşım Teorisi Matematiksel Analizin geniş ve önemli bir dalı olduğundan ve çok farklı alanlara uygulanabildiğinden dolayı, son zamanlarda matematikçilerin dikkatini yoğun bir şekilde çekmektedir. Yaklaşım teorisinin temel amacı bir fonksiyona daha basit, daha kullanışlı olan fonksiyonlar cinsinden yaklaşım gösterimini bulmaktır. 1857 yılında P. L. Chebyshev'in polinomlar üzerine çalışması modern yaklaşım teorisinin temelini oluşturmaktadır [1]. Daha sonra 1885 yılında Weierstrass $[a, b]$ kapalı aralığında tanımlı sürekli her bir f fonksiyonuna bir polinomla yaklaşılabilirliğini ispatlamıştır [2]. 1912 yılında Bernstein her $f \in C[0, 1]$ için n . dereceden;

$$B_n(f; x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right), 0 \leq x \leq 1$$

operatörünü tanımlamış ve bu operatör dizisinin f fonksiyonuna düzgün yaklaştığını ispatlamıştır [3]. Daha sonrasında 1951 yılında H. Bohman, toplamsal pozitif lineer operatörler dizisinin sürekli f fonksiyonuna $[0, 1]$ aralığında yaklaşımını incelemiştir. 1953 yılında ise P. P. Korovkin, Bohman'ın çalışmalarından habersiz bir şekilde genel bir teorem ispatlayarak, Bohman'ın elde ettiği koşulların genel durumda da geçerli olduğunu göstermiştir. Bu teorem kullanılarak sonlu aralıklarda verilen lineer pozitif operatörlerin yaklaşım özellikleri incelenmektedir. Lineer pozitif operatörlerle sınırsız aralıklarda sürekli fonksiyonlara yaklaşım hızının incelenmesi bu alanda çalışılan en yaygın problemlerden biridir. Sınırsız aralıklarda ise verilen lineer pozitif operatörlerin yaklaşım özelliklerinin incelenmesi için 1974 yılında A. D. Gadjiyev tarafından ağırlıklı uzaylarda ispatlanan Korovkin tip teorem kullanılmaktadır.

Yaklaşım teorisinde q -genelleştirme kavramı ilk kez Lupaş tarafından 1987 yılında verilmiştir [4]. Lupaş, Bernstein polinomlarının bir q tipli genellemesini elde etmiştir. Daha sonra, 1996 yılında, Phillips klasik Bernstein polinomlarının farklı bir q tipli genellemesini tanımlamıştır. Bu genelleme bugün q -Bernstein polinomları olarak literatüre geçmiştir. Ayrıca, Phillips q -Bernstein polinomlarının yaklaşım özelliklerini incelemiştir [5-9]. Böylece lineer pozitif operatör dizilerinin q -analizde ve

(p, q) -analizde genelleştirmeleri elde edilerek yaklaşım özelliklerinin incelenmesine başlanmıştır. (p, q) -analiz yalnızca yaklaşım teorisinde değil, aynı zamanda diferensiyel denklemler, hipergeometrik fonksiyon, alan teorisi ve fizik bilimleri gibi alanlarda verimli bir şekilde kullanılmaktadır. Araştırmacılar iyi bilinen lineer pozitif operatörlerin (p, q) genelleştirmelerinin avantajlarını yoğun bir şekilde incelemiştir [10, 11, 13–20, 30]. (p, q) -analizin bazı temel tanım ve teoremleri Sadjang [10] tarafından sunulmuştur.

1.1. (p_n, q_n) -Phillips Operatörlerinin Tanımı

1.1.1. Tanım

n herhangi bir tam sayı olsun. $0 < q \leq p \leq 1$ olmak üzere n sayısının (p, q) -genelleştirmesi ve faktoriyeli sırası ile

$$\begin{aligned}
 [n]_{p,q} &= p^{n-1} + p^{n-2}q + p^{n-3}q^2 + \dots + pq^{n-2} + q^{n-1} \\
 &= \begin{cases} \frac{p^n - q^n}{p - q}, & p \neq q \neq 1 \text{ ise} \\ np^{n-1}, & p = q \neq 1 \text{ ise} \\ [n]_q, & p = 1 \text{ ise} \\ n, & p = q = 1 \text{ ise} \end{cases}
 \end{aligned}$$

ve

$$[n]_{p,q}! = \begin{cases} [n]_{p,q}[n-1]_{p,q}\dots 1, & n \geq 1 \text{ ise} \\ 1, & n = 0 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklindedir.

1.1.2. Tanım

$$(a \oplus b)_{p,q}^\infty = (a + b)(pa + qb)(p^2a + q^2b) \dots$$

olmak üzere, üstel fonksiyonların (p, q) -genelleştirmeleri

$$e_{p,q}(x) := \sum_{k=0}^{\infty} p^{k(k-1)/2} \frac{x^k}{[k]_{p,q}!} = \begin{cases} \frac{1}{(1 \oplus (\frac{q}{p}-1)x)_{p,q}^{\infty}} & , p \neq q \neq 1 \text{ ise} \\ e_q(x) & , p = 1 \text{ ise} \\ e^x & , p = q \text{ ise} \end{cases}$$

ve

$$E_{p,q}(x) := \sum_{k=0}^{\infty} q^{k(k-1)/2} \frac{x^k}{[k]_{p,q}!} = \begin{cases} \left(1 \oplus \left(1 - \frac{q}{p}\right)x\right)_{p,q}^{\infty} & , p \neq q \neq 1 \text{ ise} \\ E_q(x) & , p = 1 \text{ ise} \\ e^x & , p = q \text{ ise} \end{cases}$$

biçimindedir.

$e_{p,q}(x)$ ve $E_{p,q}(x)$ tanımlarına istinaden

$$e_{p,q}(x)E_{p,q}(-x) = 1$$

eşitliği sağlanmaktadır.

1.1.3. Tanım

$[0, \infty)$ aralığında tanımlı f fonksiyonunun (p, q) -genelleştirilmiş integrali

$$\int_0^{\infty/A} f(x) d_{p,q}x = (p - q) \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{q^n}{p^{n+1}A} f\left(\frac{q^n}{p^{n+1}A}\right), 0 < \frac{q}{p} < 1 \text{ ve } A > 0$$

şeklinde tanımlıdır.

1.1.4. Tanım

(p, q) -Gamma fonksiyonu

$$\Gamma_{p,q}(n) = \frac{q^{n(n-1)/2}}{p^n} \int_0^{\infty/A(1-q/p)} e_{p,q}(-t)t^{n-1} d_{p,q}t, A > 0$$

biçimindedir.

Bu tezde q -Phillips operatörlerinin bir genelleştirmesi olan (p, q) -Phillips operatör dizisi tanımlanarak yaklaşım özellikleri incelenmiştir. Bu operatörler;

$$0 < q \leq p \leq 1,$$

$$s_{n,k}(x; p, q) = \frac{([n]_{p,q} x)^k}{[k]_{p,q}!} e_{p,q}(-[n]_{p,q} x)$$

taban fonksiyonu ve f

$$\int_0^{\infty/A(1-q/p)} \frac{q^{k(k-1)}}{p^k} s_{n,k-1}(x; p, q) f(t) d_{p,q} t$$

integralinin yakınsaklığını garantileyen $[0, \infty)$ üzerinde tanımlı sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$$\mathcal{P}_{n,p,q}(f; x) = [n]_{p,q} \sum_{k=1}^{\infty} s_{n,k}(x; p, q)$$

$$\times \int_0^{\infty/A(1-q/p)} \frac{q^{k(k-1)}}{p^k} s_{n,k-1}(x; p, q) f(t) d_{p,q} t + f(0) e_{p,q}(-[n]_{p,q} x) \quad (1.1)$$

biçiminde tanımlıdır.

Eş. 1.1 de $p = 1$ alındığında Yüksel tarafından [21] de tanımlanan ve ağırlıklı yaklaşım özellikleri çalışılan q -Phillips operatörlerine indirgenir. q -Phillips operatörlerinin farklı yaklaşım özellikleri [22] de verilmiştir. $p = 1$ ve $q = 1$ alındığında ise klasik Phillips operatörlerine indirgenir [9]. Phillips tip operatörlerin yaklaşım özellikleri [23], [24] ve [25] de çalışılmıştır.

Bu tez, birinci bölüm giriş bölümü olmak üzere toplam beş bölümden oluşmaktadır.

İkinci bölümde temel tanım ve kavramlar verilerek (p, q) –Phillips operatörleri tanımlanıp, bu operatörler için test fonksiyonlarına ilişkin sonuçlar elde edilmiş ve Korovkin teoreminin sağlandığı gösterilmiştir. Daha sonra bu operatörlerin $[0, \infty)$ aralığında ağırlıklı yaklaşım özellikleri incelenmiştir.

Üçüncü bölümde lineer fonksiyonları koruyan (p, q) –Phillips operatörleri tanımlanarak ağırlıklı yaklaşımda hız oranı ve Voronovskaja tip teoremi elde edilmiştir. Daha sonrasında bu operatörler için istatistiksel yaklaşım özellikleri gösterilmiştir.

Dördüncü bölümde ise lineer fonksiyonları koruyan (p, q) –Phillips operatörlerinin Schurer tip modifikasyonu tanımlanmıştır. Schurer tip (p, q) –Phillips operatörlerin ağırlıklı yaklaşımı ve ağırlıklı yaklaşımda hız oranı elde edilmiştir.

Son bölümde elde edilen sonuç ve öneriler verilmiştir.



2. (p, q) –PHILLIPS OPERATÖR DİZİSİNİN YAKINSAKLIK ÖZELLİKLERİ

Bilinmektedir ki yaklaşım teorisinin amacı herhangi bir fonksiyonun daha kullanışlı olan farklı bir fonksiyon türünde gösterimini elde etmektir. Bunun için ilk olarak Weierstrass tarafından 1885 yılında ifade edilen, sürekli her f fonksiyonuna polinomlar dizisiyle yaklaşılabileceğiyle ilgili teorem verilmiş ve $C[a, b]$ uzayında Korovkin tip teoremi hatırlatılmıştır. Ayrıca, ağırlıklı uzayda yaklaşım ile ilgili tanım, önerme ve teoremlere değinilmiştir. Bunlara ek olarak, fonksiyonların değişim mertebesi ve sonsuz küçülenlerin karşılaştırılmasına ilişkin tanımlar ifade edilmiştir. Bu bölümde öncelikle lineer pozitif operatörlerin yaklaşım hızına dair temel tanım ve teoremler verilecektir. Ardından, [21] de Yüksel tarafından çalışılmış q –Phillips operatörler yardımıyla (p, q) –Phillips operatörleri tanımlanacaktır. Daha sonra tanımlanmış olan yeni operatörler için Korovkin tip teoremin koşullarının sağlandığı gösterilecektir ve bu operatörlerin $[0, \infty)$ aralığında ağırlıklı yaklaşım özellikleri incelenecektir.

Bu bölümde verilen tanım ve kavramlar [2, 26–34] numaralı kaynaklarda bulunabilir.

2.1. Lineer Pozitif Operatörlerin Yaklaşım Hızı

Yaklaşım teorisinin önemli problemlerinden biri ise yaklaşım hızıdır. Yaklaşım hızı, $n \rightarrow \infty$ iken $\varepsilon_n \rightarrow 0$ olmak üzere

$$|L_n(f; x) - f(x)| \leq A\varepsilon_n$$

eşitsizliğini gerçekleyen ε_n dizisinin bulunmasıyla belirlenir, burada A sabiti n indisinden bağımsız pozitif bir sabittir.

Yaklaşım hızının bulunması için bir çok yöntem kullanılmaktadır. Bu sebepten öncelikle süreklilik modülü kavramının tanımı daha sonra ise süreklilik modülünün özellikleri verilecektir.

2.1.1. Tanım

$f \in C_B [0, \infty)$ olsun. $\delta \in [0, \infty)$ olmak üzere $\omega : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ için

$$\omega(f; \delta) = \sup \{|f(x) - f(t)| : |x - t| \leq \delta, x, t \in [0, \infty)\}$$

biçiminde tanımlanan $\omega(f; \delta)$ fonksiyonuna, f fonksiyonunun *süreklilik modülü* denir.

2.1.2. Lemma

Süreklilik modülü aşağıdaki özellikleri sağlamaktadır:

- i) $\delta > 0$ için $\omega(f; \delta) \geq 0$ bir fonksiyondur.
- ii) ω fonksiyonu artan fonksiyondur. Dolayısıyla $\delta_1 \leq \delta_2$ ise $\omega(f; \delta_1) \leq \omega(f; \delta_2)$ eşitsizliği sağlanır.
- iii) $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \omega(f; \delta) = 0 \iff f$, tanım aralığı üzerinde düzgün süreklidir.
- iv) Her $m \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\omega(f; m\delta) \leq m\omega(f; \delta)$ şeklindedir.
- v) Her $\lambda \in \mathbb{R}^+$ için $\omega(f; \lambda\delta) \leq (\lambda + 1)\omega(f; \delta)$ gerçekleşir.
- vi) $|f(t) - f(x)| \leq \omega(f; |t - x|)$ eşitsizliği sağlanır.
- vii) $|f(t) - f(x)| \leq \left(\frac{|t - x|}{\delta} + 1\right) \omega(f; \delta)$ eşitsizliği sağlanır.

2.2. Weierstrass Yaklaşım ve Korovkin Teoremi

f fonksiyonu $[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlı ve sürekli bir fonksiyon olmak üzere, her $\varepsilon > 0$ ve her $x \in [a, b]$ için $|f(x) - P_n(x)| < \varepsilon$ olacak şekilde n . dereceden olan bir (P_n) polinom dizisi vardır. Yani, $[a, b]$ aralığında sürekli her f fonksiyonuna düzgün olarak yakınsayan bir (P_n) polinomlar dizisi bulunabilir (Weierstrass 1885).

2.2.1. Tanım

Her $x \in [a, b]$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{C[a,b]} = \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{a \leq x \leq b} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

ise (f_n) fonksiyonlar dizisi f fonksiyonuna $C[a, b]$ uzayında düzgün yakınsaktır denir ve

$$f_n \rightrightarrows f$$

ile gösterilir.

1953 yılında P. P. Korovkin tarafından verilen, sürekli fonksiyonların kompakt aralıkta lineer pozitif operatörlerin yardımı ile yaklaştırılmasına ilişkin teorem aşağıda ifade edilmektedir.

2.2.2. Teorem

Her $n \in \mathbb{N}$ için $L_n : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ olmak üzere (L_n) lineer pozitif operatör dizisi olsun. Her $k = 0, 1, 2$ için $e_k(t) = t^k$ olmak üzere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(e_k) - e_k\|_{C[a,b]} = 0$$

koşulları gerçekleşiyorsa bu durumda $[a, b]$ kapalı aralığında sürekli olan her f

fonksiyonu için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(f) - f\|_{C[a,b]} = 0$$

sağlanır.

2.3. Lineer Pozitif Operatörler Dizisinin Yakınsaklık Koşulları

Korovkin teoreminin kompakt aralıkta tanımlanan lineer pozitif operatörlerin düzgün yakınsaklığının incelenmesi için geçerli olduğu bilinmektedir. Sınırsız aralıkta tanımlanan operatör dizileri için Korovkin teoremi geçerli değildir, teoremin koşulları sağlandığı halde düzgün yakınsaklık sağlanmamaktadır. Bu sebepten dolayı A.D. Gadjiev 1974 ve 1976 yıllarında reel eksenin tamamında veya sınırsız alt aralıklarında yaklaşım koşulları ve Korovkin tip teoremler üzerinde çalışmıştır. Bu bölümde ağırlıklı uzayların tanım ve teoremleri verilmiştir.

2.3.1. Tanım

ρ reel ekseninde tanımlı bir fonksiyon olsun. Eğer ρ fonksiyonu \mathbb{R} üzerinde sürekli olmak üzere $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \rho(x) = \infty$, monoton artan ve her $x \in \mathbb{R}$ için $\rho(x) \geq 1$ özelliklerini sağlıyorsa ρ fonksiyonuna *ağırlıklı fonksiyon* denir.

Tüm reel ekseninde tanımlı ve $|f(x)| \leq M_f \rho(x)$ koşulunu sağlayan fonksiyonların uzayı $B_\rho[0, \infty)$ ile gösterilir. Burada M_f sadece f fonksiyonuna bağlı bir sabittir. $B_\rho[0, \infty)$ uzayındaki sürekli fonksiyonların uzayı da $C_\rho[0, \infty)$ ile gösterilir. Yani,

$$B_\rho[0, \infty) = \{f : \forall x \in [0, \infty) \text{ için } |f(x)| \leq M_f \rho(x)\}$$

ve

$$C_\rho[0, \infty) = \{f : f \in B_\rho[0, \infty) \text{ ve } f \in C[0, \infty)\}$$

olup, bu uzaylar $\|f\|_\rho = \sup_{x \in [0, \infty)} \frac{|f(x)|}{\rho(x)}$ normu ile birer normlu uzaydır. Burada $B_\rho[0, \infty)$ ve $C_\rho[0, \infty)$ uzaylarına *ağırlıklı uzay* denir. $C_\rho[0, \infty)$ uzayının

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{|f(x)|}{\rho(x)} \in \mathbb{R}$$

koşulunu sağlayan fonksiyonların kümesi $C_\rho^*[0, \infty)$ ile gösterilir. $C_\rho^*[0, \infty)$ ve $C_\rho[0, \infty)$ uzayları $B_\rho[0, \infty)$ uzayının birer alt uzaylarıdır.

Bundan sonra ρ fonksiyonu, $\rho(x) = 1 + x^2$ olarak alınacaktır.

2.3.2. Tanım

$\tilde{C}_B[0, \infty)$ düzgün sürekli ve sınırlı reel değerli fonksiyon uzayı olsun. $f \in \tilde{C}_B[0, \infty)$ için birinci süreklilik modülü

$$\omega(f; \delta) = \sup_{|x-y| \leq \delta, x, y \in [0, \infty)} |f(x) - f(y)|$$

olarak tanımlanır.

2.3.3. Tanım

$f \in \tilde{C}_B[0, \infty)$ ve $\|f\|_{\tilde{C}_B} = \sup_{x \in [0, \infty)} |f(t)|$ supremum norm olmak üzere Petree \mathcal{K} -fonksiyoneli aşağıdaki gibi tanımlıdır:

$$\mathcal{K}_2(f; \delta) = \inf \{ \|f - g\|_{\tilde{C}_B} + \delta \|g''\|_{\tilde{C}_B} : g \in W_\infty^2 \}, \delta > 0.$$

Burada,

$$W_\infty^2 = \left\{ g \in \tilde{C}_B[0, \infty) : g', g'' \in \tilde{C}_B[0, \infty) \right\}$$

olup

$$\|g\|_{W_\infty^2} := \|g\|_{\tilde{C}_B} + \|g'\|_{\tilde{C}_B} + \|g''\|_{\tilde{C}_B}$$

normu ile bir normlu uzaydır.

İkinci süreklilik modülü

$$\omega_2(f, \sqrt{\delta}) = \sup_{0 < h < \delta} \sup_{x \in [0; \infty)} |f(x + 2h) - 2f(x + h) - f(x)|$$

olarak tanımlıdır. [31] den öyle bir $M > 0$ sabiti vardır ki

$$\mathcal{K}(f; \delta) \leq M\omega_2(f, \sqrt{\delta}) \quad (2.1)$$

eşitsizliği sağlanır.

2.3.4. Teorem

Her $n \in \mathbb{N}$ için $L_n : C_\rho[0, \infty) \rightarrow B_\rho[0, \infty)$ lineer pozitif bir operatör olmak üzere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(\varphi^v) - \varphi^v\| = 0; \quad v = 0, 1, 2$$

koşullarını sağlamasına rağmen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(f^*) - f^*\|_\rho \geq 1$$

olacak şekilde bir $f^* \in C_\rho[0, \infty)$ bulunabilir [2, 33].

2.3.5. Teorem

$L_n : C_\rho[0, \infty) \rightarrow B_\rho[0, \infty)$ lineer pozitif operatörler dizisi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(\varphi^v; x) - \varphi^v\|_\rho = 0, \quad v = 0, 1, 2$$

şeklinde üç şartı sağlıyorsa, her $f \in C_\rho^*[0, \infty)$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(f) - f\|_\rho = 0$$

dır [2, 32, 33].

2.4. (p_n, q_n) –Phillips Operatörleri için Yardımcı Sonuçlar

(p_n) ve (q_n) dizileri $0 < q_n \leq p_n \leq 1$ olmak üzere $n \rightarrow \infty$ iken $p_n \rightarrow 1$, $q_n \rightarrow 1$, $p_n^n \rightarrow \alpha$, $q_n^n \rightarrow \beta$ koşullarını sağlayan iki reel sayı dizisi olsun ($0 < \beta \leq \alpha \leq 1$).

$$s_{n,k}(x; p_n, q_n) = \frac{([n]_{p_n, q_n} x)^k}{[k]_{p_n, q_n}!} e_{p_n, q_n}(-[n]_{p_n, q_n} x)$$

taban elemanı ve f ,

$$\int_0^{\infty/A(1-q_n/p_n)} \frac{q_n^{k(k-1)}}{p_n^k} s_{n,k-1}(x; p_n, q_n) f(t) d_{p_n, q_n} t$$

integralinin yakınsaklığını garantileyen $[0, \infty)$ üzerinde tanımlı sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{n, p_n, q_n}(f; x) &= [n]_{p_n, q_n} \sum_{k=1}^{\infty} s_{n,k}(x; p_n, q_n) \\ &\times \int_0^{\infty/A(1-q_n/p_n)} \frac{q_n^{k(k-1)}}{p_n^k} s_{n,k-1}(t; p_n, q_n) f(t) d_{p_n, q_n} t + f(0) e_{p_n, q_n}(-[n]_{p_n, q_n} x) \end{aligned} \quad (2.2)$$

biçiminde tanımlanan operatörlere (p_n, q_n) –Phillips operatörleri denir.

Şimdi yukarıdaki (p_n) ve (q_n) dizilerinin koşullarını sağlayan bir örnek verelim.

Örnek

$n \in \mathbb{N}^+$ için $p_n = 1 - \frac{1}{3n}$ ve $q_n = 1 - \frac{1}{2n}$ alındığında

$p_n \rightarrow 1$, $q_n \rightarrow 1$ ve $0 < q_n < p_n < 1$ olup

$$p_n^n = \left(1 - \frac{1}{3n}\right)^n \rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{e}} = \alpha, \quad q_n^n = \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^n \rightarrow \frac{1}{\sqrt{e}} = \beta \text{ ve } 0 < \beta < \alpha < 1$$

dir. Ayrıca $\lim_{n \rightarrow \infty} [n]_{p_n, q_n} = +\infty$ olur.

2.4.1. Lemma

Her $m \in \mathbb{N}$ için

$$\int_0^{\infty/A(1-q_n/p_n)} s_{n,k-1}(t; p_n, q_n) t^m d_{p_n, q_n} t = \frac{[k+m-1]_{p, q}! p_n^{k+m}}{[k-1]_{p_n, q_n}! [n]_{p_n, q_n}^{m+1} q_n^{(k+m)(k+m-1)/2}}$$

eşitliği sağlar.

İspat

Burada $u = [n]_{p_n, q_n} t$ alınırsa, $d_{p_n, q_n} u = [n]_{p_n, q_n} d_{p_n, q_n} t$ olduğundan ve Tanım 1.1.4 de verilen (p, q) -Gamma fonksiyonunun tanımından

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty/A(1-q_n/p_n)} s_{n,k-1}(t; p_n, q_n) t^m d_{p_n, q_n} t \\ &= \int_0^{\infty/A(1-q_n/p_n)} \frac{u^{k-1}}{[k-1]_{p_n, q_n}!} e_{p_n, q_n}(-u) \left(\frac{u}{[n]_{p_n, q_n}}\right)^m \frac{d_{p_n, q_n} u}{[n]_{p_n, q_n}} \\ &= \frac{1}{[k-1]_{p_n, q_n}! [n]_{p_n, q_n}^{m+1}} \int_0^{\infty/A(1-q_n/p_n)} u^{k+m-1} e_{p_n, q_n}(-u) d_{p_n, q_n} u \\ &= \frac{[k+m-1]_{p_n, q_n}! p_n^{k+m}}{[k-1]_{p_n, q_n}! [n]_{p_n, q_n}^{m+1} q_n^{(k+m)(k+m-1)/2}} \end{aligned}$$

biçiminde elde edilir.

2.4.2. Lemma

$x \in [0, \infty)$ ve $e_k(t) = t^k$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$ olmak üzere $\mathcal{P}_{n,p_n,q_n}(e_k; x)$ operatörleri için

$$(1) \mathcal{P}_{n,p_n,q_n}(e_0; x) = 1,$$

$$(2) \mathcal{P}_{n,p_n,q_n}(e_1; x) = \frac{p_n}{q_n}x,$$

$$(3) \mathcal{P}_{n,p_n,q_n}(e_2; x) = \frac{p_n^4}{q_n^4}x^2 + \frac{p_n^2 [2]_{p_n,q_n}}{q_n^3 [n]_{p_n,q_n}}x,$$

$$(4) \mathcal{P}_{n,p_n,q_n}(e_3; x) = \frac{p_n^9}{q_n^9}x^3 + \frac{p_n^6 q_n [2]_{p_n,q_n} + p_n^5 [4]_{p_n,q_n}}{q_n^8 [n]_{p_n,q_n}}x^2 + \frac{p_n^3 [2]_{p_n,q_n} [3]_{p_n,q_n}}{q_n^6 [n]_{p_n,q_n}^2}x,$$

$$(5) \mathcal{P}_{n,p_n,q_n}(e_4; x) = \frac{p_n^{16}}{q_n^{16}}x^4 + \frac{p_n^{12} q_n^2 [2]_{p_n,q_n} + p_n^{11} q_n [4]_{p_n,q_n} + p_n^{10} [6]_{p_n,q_n}}{q_n^{15} [n]_{p_n,q_n}}x^3$$

$$+ \frac{p_n^8 q_n^2 [2]_{p_n,q_n} [3]_{p_n,q_n} + p_n^7 q_n [2]_{p_n,q_n} [5]_{p_n,q_n} + p_n^6 [4]_{p_n,q_n} [5]_{p_n,q_n}}{q_n^{13} [n]_{p_n,q_n}^2}x^2$$

$$+ \frac{p_n^4 [2]_{p_n,q_n} [3]_{p_n,q_n} [4]_{p_n,q_n}}{q_n^{10} [n]_{p_n,q_n}^3}x$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat

(1) Lemma 2.4.1 i kullanarak,

$$\mathcal{P}_{n,p_n,q_n}(e_0; x)$$

$$= [n]_{p_n,q_n} \sum_{k=1}^{\infty} s_{n,k}(x; p_n, q_n) \int_0^{\infty/A(1-q_n/p_n)} \frac{q_n^{k(k-1)}}{p_n^k} s_{n,k-1}(t; p_n, q_n) d_{p_n,q_n} t$$

$$+ e_{p_n,q_n} \left(-[n]_{p_n,q_n} x \right)$$

$$= [n]_{p_n,q_n} \sum_{k=1}^{\infty} s_{n,k}(x; p_n, q_n) \frac{q_n^{k(k-1)}}{p_n^k} \frac{p_n^k}{[n]_{p_n,q_n} q_n^{k(k-1)/2}} + e_{p_n,q_n} \left(-[n]_{p_n,q_n} x \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{\infty} q_n^{k(k-1)/2} \frac{([n]_{p_n, q_n} x)^k}{[k]_{p_n, q_n}!} e_{p_n, q_n} \left(-[n]_{p_n, q_n} x \right) + e_{p_n, q_n} \left(-[n]_{p_n, q_n} x \right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} q_n^{k(k-1)/2} \frac{([n]_{p_n, q_n} x)^k}{[k]_{p_n, q_n}!} e_{p_n, q_n} \left(-[n]_{p_n, q_n} x \right) \\
&= E_{p_n, q_n} \left([n]_{p_n, q_n} x \right) e_{p_n, q_n} \left(-[n]_{p_n, q_n} x \right) \\
&= 1
\end{aligned}$$

elde edilir.

(2) Lemma 2.4.1 i kullanarak,

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{n, p_n, q_n} (e_1; x) &= [n]_{p_n, q_n} \sum_{k=1}^{\infty} s_{n, k}(x; p_n, q_n) \int_0^{\infty/A(1-q_n/p_n)} \frac{q_n^{k(k-1)}}{p_n^k} s_{n, k-1}(t; p_n, q_n) t d_{p_n, q_n} t \\
&= [n]_{p_n, q_n} \sum_{k=1}^{\infty} s_{n, k}(x; p_n, q_n) \frac{q_n^{k(k-1)}}{p_n^k} \frac{[k]_{p_n, q_n}! p_n^{k+1}}{[k-1]_{p_n, q_n}! [n]_{p_n, q_n}^2 q_n^{k(k+1)/2}} \\
&= \frac{p_n}{[n]_{p_n, q_n}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{([n]_{p_n, q_n} x)^k}{[k-1]_{p_n, q_n}!} e_{p_n, q_n} \left(-[n]_{p_n, q_n} x \right) q_n^{(k^2-3k)/2}
\end{aligned}$$

olur. Bu ifadede k yerine $k+1$ yazılırsa

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{n, p_n, q_n} (e_1; x) &= \frac{p_n}{q_n} \sum_{k=0}^{\infty} q_n^{k(k-1)/2} \frac{([n]_{p_n, q_n} x)^k}{[k]_{p_n, q_n}!} x e_{p_n, q_n} \left(-[n]_{p_n, q_n} x \right) \\
&= \frac{p_n}{q_n} x E_{p_n, q_n} \left([n]_{p_n, q_n} x \right) e_{p_n, q_n} \left(-[n]_{p_n, q_n} x \right) \\
&= \frac{p_n}{q_n} x \\
&= \frac{p_n}{q_n} x
\end{aligned}$$

elde edilir.

(3) Lemma 2.4.1 ile

$$[k+1]_{p_n, q_n} = q_n^{k-1} (q_n + p_n) + p_n^2 [k-1]_{p_n, q_n} \quad (2.3)$$

eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{n,p_n,q_n}(e_2; x) &= [n]_{p_n,q_n} \sum_{k=1}^{\infty} s_{n,k}(x; p_n, q_n) \int_0^{\infty/A(1-q_n/p_n)} \frac{q_n^{k(k-1)}}{p_n^k} s_{n,k-1}(t; p_n, q_n) t^2 d_{p_n,q_n} t \\
&= [n]_{p_n,q_n} \sum_{k=1}^{\infty} s_{n,k}(x; p_n, q_n) \frac{q_n^{k(k-1)}}{p_n^k} \frac{[k+1]_{p_n,q_n}! p_n^{k+2}}{[k-1]_{p_n,q_n}! [n]_{p_n,q_n}^3 q_n^{(k+2)(k+1)/2}} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{([n]_{p_n,q_n} x)^k}{[k-1]_{p_n,q_n}!} e_{p_n,q_n} \left(-[n]_{p_n,q_n} x \right) p_n^2 q_n^{(k^2-5k-2)/2} \frac{[k+1]_{p_n,q_n}}{[n]_{p_n,q_n}^2} \\
&= \frac{p_n^4}{[n]_{p_n,q_n}^2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{([n]_{p_n,q_n} x)^k}{[k-2]_{p_n,q_n}!} e_{p_n,q_n} \left(-[n]_{p_n,q_n} x \right) q_n^{(k^2-5k-2)/2} \\
&+ \frac{q_n + p_n}{[n]_{p_n,q_n}^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{([n]_{p_n,q_n} x)^k}{[k-1]_{p_n,q_n}!} e_{p_n,q_n} \left(-[n]_{p_n,q_n} x \right) q_n^{(k^2-3k-4)/2}
\end{aligned}$$

olur. Bu ifadenin birinci toplamında k yerine $k+2$ ve ikinci toplamında k yerine $k+1$ yazılırsa

$$\mathcal{P}_{n,p_n,q_n}(e_2; x) = \frac{p_n^4}{q_n^4} x^2 + \frac{p_n^2 [2]_{p_n,q_n}}{q_n^3 [n]_{p_n,q_n}} x$$

elde edilir.

(4) Lemma 2.4.1 ile

$$[k+1]_{p_n,q_n} [k+2]_{p_n,q_n} = p^6 [k-1]_{p_n,q_n} [k-2]_{p_n,q_n} \quad (2.4)$$

$$+ q_n^{k-2} (p_n^3 q_n [2]_{p_n,q_n} + p_n^2 [4]_{p_n,q_n}) [k-1]_{p_n,q_n}$$

$$+ q_n^{2k-2} [2]_{p_n,q_n} [3]_{p_n,q_n},$$

eşitliği kullanılırsa

$$\mathcal{P}_{n,p_n,q_n}(e_3; x) = [n]_{p_n,q_n} \sum_{k=1}^{\infty} s_{n,k}(x; p_n, q_n) \int_0^{\infty/A(1-q_n/p_n)} \frac{q_n^{k(k-1)}}{p_n^k} s_{n,k-1}(t; p_n, q_n) t^3 d_{p_n,q_n} t$$

$$\begin{aligned}
&= [n]_{p_n, q_n} \sum_{k=1}^{\infty} s_{n,k}(x; p_n, q_n) \frac{q_n^{k(k-1)}}{p_n^k} \frac{[k+2]_{p_n, q_n}! p_n^{k+3}}{[k-1]_{p_n, q_n} [n]_{p_n, q_n}^4 q_n^{(k+3)(k+2)/2}} \\
&= \frac{p_n^3}{[n]_{p_n, q_n}^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{([n]_{p_n, q_n} x)^k}{[k-1]_{p_n, q_n}!} e_{p_n, q_n} \left(-[n]_{p_n, q_n} x \right) q_n^{(k^2-7k-6)/2} [k+1]_{p_n, q_n} [k+2]_{p_n, q_n} \\
&= \frac{p_n^9}{[n]_{p_n, q_n}^3} \sum_{k=3}^{\infty} \frac{([n]_{p_n, q_n} x)^k}{[k-3]_{p_n, q_n}!} e_{p_n, q_n} \left(-[n]_{p_n, q_n} x \right) q_n^{(k^2-7k-6)/2} \\
&+ \frac{p_n^6 q_n [2]_{p_n, q_n} + p_n^5 [4]_{p_n, q_n}}{[n]_{p_n, q_n}^3} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{([n]_{p_n, q_n} x)^k}{[k-2]_{p_n, q_n}!} e_{p_n, q_n} \left(-[n]_{p_n, q_n} x \right) q_n^{(k^2-5k-10)/2} \\
&+ \frac{p_n^3 [2]_{p_n, q_n} [3]_{p_n, q_n}}{[n]_{p_n, q_n}^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{([n]_{p_n, q_n} x)^k}{[k-1]_{p_n, q_n}!} e_{p_n, q_n} \left(-[n]_{p_n, q_n} x \right) q_n^{(k^2-3k-10)/2}
\end{aligned}$$

olur. Bu ifadenin birinci toplamında k yerine $k+3$, ikinci toplamında k yerine $k+2$ ve üçüncü toplamında k yerine $k+1$ yazılırsa

$$\mathcal{P}_{n, p_n, q_n}(e_3; x) = \frac{p_n^9}{q_n^9} x^3 + \frac{p_n^6 q_n [2]_{p_n, q_n} + p_n^5 [4]_{p_n, q_n}}{q_n^8 [n]_{p_n, q_n}} x^2 + \frac{p_n^3 [2]_{p_n, q_n} [3]_{p_n, q_n}}{q_n^6 [n]_{p_n, q_n}^2} x$$

elde edilir.

(5) Lemma 2.4.1 ile

$$[k+1]_{p_n, q_n} [k+2]_{p_n, q_n} [k+3]_{p_n, q_n} = p_n^{12} [k-1]_{p_n, q_n} [k-2]_{p_n, q_n} [k-3]_{p_n, q_n} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned}
&+ q_n^{k-3} (p_n^6 [6]_{p_n, q_n} + p_n^7 q_n [4]_{p_n, q_n} + p^8 q_n^2 [2]_{p_n, q_n}) [k-1]_{p_n, q_n} [k-2]_{p_n, q_n} \\
&+ q_n^{2k-4} (p_n^4 q_n^2 [2]_{p_n, q_n} [3]_{p_n, q_n} + p_n^3 q_n [2]_{p_n, q_n} [5]_{p_n, q_n} + p_n^2 [4]_{p_n, q_n} [5]_{p_n, q_n}) [k-1]_{p_n, q_n} \\
&+ q_n^{3k-3} [2]_{p_n, q_n} [3]_{p_n, q_n} [4]_{p_n, q_n}
\end{aligned}$$

eşitliği gözönüne alınırsa

$$\mathcal{P}_{n, p_n, q_n}(e_4; x) = [n]_{p_n, q_n} \sum_{k=1}^{\infty} s_{n,k}(x; p_n, q_n) \int_0^{\infty/A(1-q_n/p_n)} \frac{q_n^{k(k-1)}}{p_n^k} s_{n,k-1}(t; p_n, q_n) t^4 d_{p_n, q_n} t$$

$$\begin{aligned}
&= [n]_{p_n, q_n} \sum_{k=1}^{\infty} s_{n,k}(x; p_n, q_n) \frac{q_n^{k(k-1)}}{p_n^k} \frac{[k+3]_{p_n, q_n}! p_n^{k+4}}{[k-1]_{p_n, q_n} [n]_{p_n, q_n}^5 q_n^{(k+4)(k+3)/2}} \\
&= \frac{p_n^4}{[n]_{p_n, q_n}^4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{([n]_{p_n, q_n} x)^k}{[k-1]_{p_n, q_n}!} e_{p_n, q_n} \left(-[n]_{p_n, q_n} x \right) q_n^{(k^2-9k-12)/2} [k+1]_{p_n, q_n} [k+2]_{p_n, q_n} [k+3]_{p_n, q_n} \\
&= \frac{p_n^{16}}{[n]_{p_n, q_n}^4} \sum_{k=4}^{\infty} \frac{([n]_{p_n, q_n} x)^k}{[k-4]_{p_n, q_n}!} e_{p_n, q_n} \left(-[n]_{p_n, q_n} x \right) q_n^{(k^2-9k-12)/2} \\
&+ \frac{p_n^{12} q_n^2 [2]_{p_n, q_n} + p_n^{11} q_n [4]_{p_n, q_n} + p_n^{10} [6]_{p_n, q_n}}{[n]_{p_n, q_n}^4} \sum_{k=3}^{\infty} \frac{([n]_{p_n, q_n} x)^k}{[k-3]_{p_n, q_n}!} e_{p_n, q_n} \left(-[n]_{p_n, q_n} x \right) q_n^{(k^2-7k-18)/2} \\
&+ \frac{p_n^8 q_n^2 [2]_{p_n, q_n} [3]_{p_n, q_n} + p_n^7 q_n [2]_{p_n, q_n} [5]_{p_n, q_n} + p_n^6 [4]_{p_n, q_n} [5]_{p_n, q_n}}{[n]_{p_n, q_n}^4} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{([n]_{p_n, q_n} x)^k}{[k-2]_{p_n, q_n}!} \\
&\times e_{p_n, q_n} \left(-[n]_{p_n, q_n} x \right) q_n^{(k^2-5k-20)/2} \\
&+ \frac{p_n^4 [2]_{p_n, q_n} [3]_{p_n, q_n} [4]_{p_n, q_n}}{[n]_{p_n, q_n}^4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{([n]_{p_n, q_n} x)^k}{[k-1]_{p_n, q_n}!} e_{p_n, q_n} \left(-[n]_{p_n, q_n} x \right) q_n^{(k^2-3k-18)/2}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifadenin birinci toplamında k yerine $k+4$, ikinci toplamında k yerine $k+3$, üçüncü toplamında k yerine $k+2$ ve dördüncü toplamında k yerine $k+1$ yazılırsa

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{n, p_n, q_n}(e_4; x) &= \frac{p_n^{16}}{q_n^{16}} x^4 + \frac{p_n^{12} q_n^2 [2]_{p_n, q_n} + p_n^{11} q_n [4]_{p_n, q_n} + p_n^{10} [6]_{p_n, q_n}}{q_n^{15} [n]_{p, q}} x^3 \\
&+ \frac{p_n^8 q_n^2 [2]_{p_n, q_n} [3]_{p_n, q_n} + p_n^7 q_n [2]_{p_n, q_n} [5]_{p_n, q_n} + p_n^6 [4]_{p_n, q_n} [5]_{p_n, q_n}}{q_n^{13} [n]_{p_n, q_n}^2} x^2 + \frac{p_n^4 [2]_{p_n, q_n} [3]_{p_n, q_n} [4]_{p_n, q_n}}{q_n^{10} [n]_{p_n, q_n}^3} x
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece (p_n, q_n) -Phillips operatör dizilerinin test fonksiyonları cinsinden değerleri bulunarak ispat tamamlanır.

Dolayısıyla, Teorem 2.2.2 (Korovkin Teoremi) den, Eş. 2.2 ile verilen $\mathcal{P}_{n, p_n, q_n}(f; x)$ operatörleri ve $a > 0$ olmak üzere her $f \in C[0, a]$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{P}_{n, p_n, q_n}(f) - f\|_{C[0, a]} = 0$$

dır.

2.4.3. Lemma

(p_n, q_n) –Phillips operatörlerinin ikinci merkezi momenti için

$$\mathcal{P}_{n,p_n,q_n}((t-x)^2; x) \leq \frac{2}{q_n^4} \left(1 - p_n q_n^3 + \frac{1}{[n]_{p_n,q_n}} \right) (x + x^2)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat

\mathcal{P}_{n,p_n,q_n} operatörünün lineerliği ve Lemma 2.4.2 sonucundan

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{n,p_n,q_n}((t-x)^2; x) &= \frac{p_n^4}{q_n^4} x^2 + \frac{p_n^2 [2]_{p_n,q_n}}{q_n^3 [n]_{p_n,q_n}} x - 2x \frac{p_n}{q_n} + x^2 \\ &= \left(\frac{p_n^4}{q_n^4} - \frac{2p_n}{q_n} + 1 \right) x^2 + \frac{p_n^2 [2]_{p_n,q_n}}{q_n^3 [n]_{p_n,q_n}} x \\ &\leq \frac{p_n^4 - 2p_n q_n^3 + q_n^4}{q_n^4} x^2 + \frac{p_n^2 [2]_{p_n,q_n}}{q_n^3 [n]_{p_n,q_n}} x \\ &\leq \frac{2 - 2p_n q_n^3}{q_n^4} x^2 + \frac{p_n^2 [2]_{p_n,q_n}}{q_n^3 [n]_{p_n,q_n}} x \\ &\leq \frac{2}{q_n^4} \left(1 - p_n q_n^3 + \frac{1}{[n]_{p_n,q_n}} \right) (x + x^2) \end{aligned}$$

elde edilir.

2.5. (p_n, q_n) –Phillips Operatörlerinin Yaklaşım Özellikleri

\mathcal{P}_{n,p_n,q_n} operatörlerinden esinlenerek

$$\overline{\mathcal{P}}_{n,p_n,q_n}(f; x) = \mathcal{P}_{n,p_n,q_n}(f; x) - f\left(\frac{p_n}{q_n}x\right) + f(x) \quad (2.6)$$

biçiminde $\overline{\mathcal{P}}_{n,p_n,q_n}$ operatörleri tanımlanabilir.

2.5.1. Lemma

$\bar{\mathcal{P}}_{n,p_n,q_n}(f; x)$ için birinci merkezi moment $\psi_x(t) = t - x$ olmak üzere

$$(i) \bar{\mathcal{P}}_{n,p_n,q_n}(\psi_x; x) = 0$$

ve

$$(ii) |\bar{\mathcal{P}}_{n,p_n,q_n}(f; x)| \leq 3 \|f\|$$

sağlanır.

İspat

(i) Lemma 2.4.2 den kolayca görülebilir ki

$$\bar{\mathcal{P}}_{n,p_n,q_n}(e_0; x) = \mathcal{P}_{n,p_n,q_n}(e_0; x)$$

ve

$$\bar{\mathcal{P}}_{n,p_n,q_n}(e_1; x) = \bar{\mathcal{P}}_{n,p_n,q_n}(t; x) = \mathcal{P}_{n,p_n,q_n}(t; x) - \frac{p_n}{q_n}x + x = x$$

dir.

$$(ii) |\bar{\mathcal{P}}_{n,p_n,q_n}(f; x)| = \left| \mathcal{P}_{n,p_n,q_n}(f; x) + f\left(\frac{p_n}{q_n}x\right) + f(x) \right|$$

$$\leq \|f\| \mathcal{P}_{n,p_n,q_n}(1; x) + 2 \|f\|$$

$$\leq 3 \|f\|$$

olur.

Dolayısıyla lemmada istenen sonuçlar elde edilir.

2.5.2 Teorem

Her $x \in [0, \infty)$ için $g \in \tilde{C}_B[0, \infty)$, $a > \frac{p_n - q_n}{q_n} x$

ve $\delta_{n,p_n,q_n}(x) := \frac{2}{q_n^4} \left(1 - p_n q_n^3 + \frac{1}{[n]_{q_n}}\right) (x + x^2)$ olmak üzere bazı $M > 0$ sayıları için

$$|\mathcal{P}_{n,p_n,q_n}(g; x) - g(x)| \leq M \omega_2 \left(g; \sqrt{\delta_{n,p_n,q_n}(x)}\right) + \omega_{[0,a]} \left(g; \frac{p_n - q_n}{q_n} x\right)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat

$h \in W_\infty^2$ ve $x \in [0, \infty)$ olsun. Taylor açılımından

$$h(t) = h(x) + (t-x)h'(x) + \int_x^t (t-u)h''(u)du$$

yazılır. Lemma 2.5.1 den

$$\bar{\mathcal{P}}_{n,p_n,q_n}(h; x) = h(x) + \bar{\mathcal{P}}_{n,p_n,q_n} \left(\int_x^t (t-u)h''(u)du; x \right)$$

dir. Daha sonrasında

$$\begin{aligned} |\bar{\mathcal{P}}_{n,p_n,q_n}(h; x) - h(x)| &= \left| \bar{\mathcal{P}}_{n,p_n,q_n} \left(\int_x^t (t-u)h''(u)du; x \right) - \int_x^{\frac{p_n}{q_n}x} \left(\frac{p_n}{q_n}x - u \right) h''(u)du \right| \\ &\leq \bar{\mathcal{P}}_{n,p_n,q_n} \left(\left| \int_x^t (t-u)h''(u)du \right|; x \right) + \int_x^{\frac{p_n}{q_n}x} \left| \frac{p_n}{q_n}x - u \right| |h''(u)| du \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\left| \int_x^t (t-u)h''(u)du \right| \leq \|h''\| \frac{(t-x)^2}{2}$$

eşitsizliğini kullanılırsa Lemma 2.4.3 den

$$|\bar{\mathcal{P}}_{n,p_n,q_n}(h; x) - h(x)| \leq \|h''\| \bar{\mathcal{P}}_{n,p_n,q_n} \left(\frac{(t-x)^2}{2}; x \right) + \|h''\| \frac{\left(\frac{p_n}{q_n}x - x\right)^2}{2}$$

$$\leq \frac{2}{q_n^4} \left(1 - p_n q_n^3 + \frac{1}{[n]_{q_n}}\right) x(1+x) \|h''\|$$

elde edilir. Eş. 2.6 ve Lemma 2.5.1 den

$$\begin{aligned} |\overline{\mathcal{P}}_{n,p_n,q_n}(g;x) - g(x)| &= |\overline{\mathcal{P}}_{n,p_n,q_n}(g-h;x) - (g-h)(x) + \overline{\mathcal{P}}_{n,p_n,q_n}(h;x) - h(x)| \\ &\leq |\overline{\mathcal{P}}_{n,p_n,q_n}(g-h;x) - (g-h)(x)| + |\overline{\mathcal{P}}_{n,p_n,q_n}(h;x) - h(x)| + \left|g\left(\frac{p_n}{q_n}x\right) - g(x)\right| \\ &\leq 4\|g-h\| + \frac{2}{q_n^4} \left(1 - p_n q_n^3 + \frac{1}{[n]_{p_n,q_n}}\right) x(1+x) \|h''\| \\ &\quad + \left|g\left(x + \frac{p_n - q_n}{q_n}x\right) - g(x)\right| \end{aligned}$$

elde edilir. $\delta_{n,p_n,q_n}(x) := \frac{2}{q_n^4} \left(1 - p_n q_n^3 + \frac{1}{[n]_{q_n}}\right) (x + x^2)$ seçilirse, son eşitsizliğin sağ tarafında $h \in W_\infty^2$ üzerinden infimum alınarak istenilen sonuç elde edilir.

2.5.3 Teorem

$\forall f \in C_\rho^*[0, \infty)$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{P}_{n,p_n,q_n}(f) - f\|_\rho = 0$$

dır.

İspat

$\mathcal{P}_{n,p_n,q_n}(e_0; x) = 1$ olduğundan açıktır ki

$\|\mathcal{P}_{n,p_n,q_n}(e_0) - 1\|_\rho = 0$ dır. Lemma 2.4.2 den

$$\|\mathcal{P}_{n,p_n,q_n}(e_1; x) - t\|_\rho = \sup_{x \in [0, \infty)} \frac{|\mathcal{P}_{n,p_n,q_n}(t; x) - x|}{1+x^2}$$

$$\leq \sup_{x \in [0, \infty)} \frac{\left|\frac{p_n}{q_n}x - x\right|}{1+x^2}$$

$$\leq \left(\frac{p_n}{q_n} - 1 \right) \sup_{x \in [0, \infty)} \frac{x}{1+x^2}$$

$$\leq \frac{p_n}{q_n} - 1$$

elde edilir. Aynı şekilde Lemma 2.4.2 den

$$\|\mathcal{P}_{n,p_n,q_n}(t^2; x) - t^2\|_\rho = \sup_{x \in [0, \infty)} \frac{|\mathcal{P}_{n,p_n,q_n}(t^2; x) - x^2|}{1+x^2}$$

$$\leq \sup_{x \in [0, \infty)} \frac{\left| \frac{p_n^4}{q_n^4} x^2 + \frac{p_n^2 [2]_{p_n, q_n}}{q_n^3 [n]_{p_n, q_n}} x - x^2 \right|}{1+x^2}$$

$$\leq \left(\frac{p_n^4 - q_n^4}{q_n^4} + \frac{p_n^2 [2]_{p_n, q_n}}{q_n^3 [n]_{p_n, q_n}} \right) \sup_{x \in [0, \infty)} \frac{x+x^2}{1+x^2}$$

dir. Dolayısıyla, Teorem 2.3.5 kullanılarak ispat tamamlanır.

2.5.4. Tanım

$x \in [0, \infty)$ ve $f \in C_\rho^*[0, \infty)$ olmak üzere, her $\delta > 0$ için

$$\Omega(f; \delta) = \sup_{x \geq 0, |h| \leq \delta} \frac{|f(x+h) - f(x)|}{(1+h)^2 + (1+x)^2}$$

şeklinde tanımlanan $\Omega(f; \delta)$ fonksiyonuna $C_\rho^*[0, \infty)$ uzayında f fonksiyonunun ağırlıklı süreklilik modülü denir [35].

2.5.5 Teorem

Her $f \in C_\rho^*[0, \infty)$ için öyle bir $K(p_n, q_n)$ pozitif reel sayısı vardır ki, $\bar{\rho} = 1 + x^5$ olmak üzere

$$\|\mathcal{P}_{n,p_n,q_n}(f) - f\|_{\bar{\rho}} \leq K(p_n, q_n) \Omega \left(f; \sqrt{1 - p_n q_n^3 + \frac{1}{[n]_{p_n, q_n}}} \right)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat

$\Omega(f; \delta)$ ağırlıklı süreklilik modülünün özelliğinden

$$|f(t) - f(x)| \leq (1 + (t - x)^2) (1 + x^2) \left(1 + \frac{|t - x|}{\delta}\right) \Omega(f; \delta) \quad (2.7)$$

dir. Eş. 2.7 eşitsizliğine \mathcal{P}_{n,p_n,q_n} operatörü uygulanırsa

$$\begin{aligned} |\mathcal{P}_{n,p_n,q_n}(f; x) - f(x)| &\leq (1 + x^2) \Omega(f; \delta) \mathcal{P}_{n,p_n,q_n} \left((1 + (t - x)^2) \left(1 + \frac{|t - x|}{\delta}\right); x \right) \\ &\leq (1 + x^2) \Omega(f; \delta) \left\{ \mathcal{P}_{n,p_n,q_n} \left((1 + (t - x)^2); x \right) \right. \\ &\quad \left. + \mathcal{P}_{n,p_n,q_n} \left((1 + (t - x)^2) \frac{|t - x|}{\delta}; x \right) \right\} \end{aligned} \quad (2.8)$$

olur. Eş. 4.6 eşitsizliğinin sağ kısmının ikinci terimine Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} &\mathcal{P}_{n,p_n,q_n} \left((1 + (t - x)^2) \frac{|t - x|}{\delta}; x \right) \\ &\leq \left\{ \mathcal{P}_{n,p_n,q_n} \left((1 + (t - x)^2)^2; x \right) \right\}^{1/2} \left\{ \mathcal{P}_{n,p_n,q_n} \left(\frac{|t - x|^2}{\delta^2}; x \right) \right\}^{1/2} \end{aligned} \quad (2.9)$$

olur. Lemma 2.4.2 ve Lemma 2.4.3 den

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{n,p_n,q_n} \left((1 + (t - x)^2); x \right) &\leq 1 + \frac{2}{q_n^4} \left(1 - p_n q_n^3 + \frac{1}{[n]_{p_n, q_n}} \right) x (1 + x) \\ &\leq K_1(p_n, q_n)(1 + x)^2, \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\mathcal{P}_{n,p_n,q_n} \left((1 + (t - x)^2)^2; x \right) < K_2(p_n, q_n)(1 + x^2)^2 \quad (2.11)$$

ve

$$\begin{aligned}
\left\{ \mathcal{P}_{n,p_n,q_n} \left(\frac{|t-x|^2}{\delta^2}; x \right) \right\}^{1/2} &\leq \frac{1}{\delta} \sqrt{\frac{2}{q_n^4} \left(1 - p_n q_n^3 + \frac{1}{[n]_{p_n,q_n}} \right) x(1+x)} \\
&\leq \frac{K_3(p_n, q_n)}{\delta} \sqrt{1 - p_n q_n^3 + \frac{1}{[n]_{p_n,q_n}}} (1+x)
\end{aligned} \tag{2.12}$$

olacak şekilde $K_1(p_n, q_n)$, $K_2(p_n, q_n)$, $K_3(p_n, q_n)$ pozitif sayıları vardır. $K_4 = \sup_{x \geq 0} (1+x^2)^2(1+x)/(1+x^5)$ ve $\delta = \sqrt{1 - p_n q_n^3 + \frac{1}{[n]_{p_n,q_n}}}$ olmak üzere $K(p_n, q_n) > (K_1(p_n, q_n) + \sqrt{K_2(p_n, q_n)K_3(p_n, q_n)})K_4$ seçilir ve Eş. 4.6 ile Eş. 2.12 aynı anda göz önünde bulundurulursa

$$|\mathcal{P}_{n,p_n,q_n}(f; x) - f(x)| \leq (1+x^5)K(p_n, q_n)\Omega \left(f; \sqrt{1 - p_n q_n^3 + \frac{1}{[n]_{p_n,q_n}}} \right)$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

3. LİNEER FONKSİYONLARI KORUYAN (p, q) -PHILLIPS OPERATÖR DİZİLERİNİN YAKINSAKLIK ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde bir önceki Eş. 2.2 de verilen operatörlerin lineer fonksiyonları koruyan operatörlerini tanımlayarak ağırlıklı yaklaşımda hız oranı ve Voronovskaja tip teorem elde edilecektir. Ayrıca, bu bölümün ikinci kısmında tanımlanan operatörler için istatistiksel yaklaşım özellikleri gösterilecektir.

3.1. $P_{n,p_n,q_n}^*(f; x)$ Operatörleri için Yardımcı Sonuçlar

(p_n) ve (q_n) dizileri $0 < q_n \leq p_n \leq 1$ olmak üzere $n \rightarrow \infty$ iken $p_n \rightarrow 1$, $q_n \rightarrow 1$, $p_n^n \rightarrow \alpha$, $q_n^n \rightarrow \beta$ koşullarını sağlayan iki reel sayı dizisi olsun ($\beta \leq \alpha \leq 1$).

$$s_{n,k}(x; p_n, q_n) = \frac{([n]_{p_n, q_n} x)^k}{[k]_{p_n, q_n}!} e_{p_n, q_n}(-[n]_{p_n, q_n} x) \quad (3.1)$$

taban elemanı ve f ,

$$\int_0^{\infty/A(1-q_n/p_n)} \frac{q_n^{k(k-1)}}{p_n^k} s_{n,k-1}(x; p_n, q_n) f(t) d_{p_n, q_n} t$$

integralinin yakınsaklığını garantileyen $[0, \infty)$ üzerinde tanımlı sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$$\mathcal{P}_{n,p_n,q_n}^*(f; x) = [n]_{p_n, q_n} \sum_{k=1}^{\infty} s_{n,k}(x; p_n, q_n)$$

$$\times \int_0^{\infty/A(1-q_n/p_n)} \frac{q_n^{k(k-1)}}{p_n^k} s_{n,k-1}(t; p_n, q_n) f\left(\frac{q_n}{p_n} t\right) d_{p_n, q_n} t + f(0) e_{p_n, q_n}(-[n]_{p_n, q_n} x) \quad (3.2)$$

biçiminde tanımlanan operatörlere lineer fonksiyonları koruyan (p_n, q_n) -Phillips operatörleri denir.

3.1.1. Lemma

Her $m \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\infty/A(1-q_n/p_n)} s_{n,k-1}(t; p_n, q_n) \left(\frac{q_n}{p_n} t\right)^m d_{p_n, q_n} t \\
&= \frac{[k+m-1]_{p_n, q_n}! p_n^k}{[k-1]_{p_n, q_n}! [n]_{p_n, q_n}^{m+1} q_n^{((k+m)^2-3m-k)/2}} \tag{3.3}
\end{aligned}$$

eşitliği sağlanır.

İspat

Burada $u = [n]_{p_n, q_n} t$ alınırsa, $d_{p_n, q_n} u = [n]_{p_n, q_n} d_{p_n, q_n} t$ olduğundan ve Tanım 1.1.4 de verilen (p, q) -Gamma fonksiyonunun tanımından

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\infty/A(1-q_n/p_n)} s_{n,k-1}(t; p_n, q_n) \left(\frac{q_n}{p_n} t\right)^m d_{p_n, q_n} t \\
&= \int_0^{\infty/A(1-q_n/p_n)} \frac{u^{k-1}}{[k-1]_{p_n, q_n}!} e_{p_n, q_n}(-u) \frac{q_n^m}{p_n^m} \left(\frac{u}{[n]_{p_n, q_n}}\right)^m \frac{d_{p_n, q_n} u}{[n]_{p_n, q_n}} \\
&= \frac{q_n^m}{p_n^m} \frac{1}{[k-1]_{p_n, q_n}! [n]_{p_n, q_n}^{m+1}} \int_0^{\infty/A(1-q_n/p_n)} u^{k+m-1} e_{p_n, q_n}(-u) d_{p_n, q_n} u \\
&= \frac{[k+m-1]_{p_n, q_n}! p_n^k}{[k-1]_{p_n, q_n}! [n]_{p_n, q_n}^{m+1} q_n^{((k+m)^2-3m-k)/2}}
\end{aligned}$$

biçimde elde edilir.

3.1.2. Lemma

$x \in [0, \infty)$ ve $e_k(t) = t^k$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$ olmak üzere $\mathcal{P}_{n, p_n, q_n}^*(e_k; x)$ operatörleri için

$$(i) \mathcal{P}_{n,p_n,q_n}^*(e_0; x) = 1,$$

$$(ii) \mathcal{P}_{n,p_n,q_n}^*(e_1; x) = x,$$

$$(iii) \mathcal{P}_{n,p_n,q_n}^*(e_2; x) = \frac{p_n^2}{q_n^2} x^2 + \frac{[2]_{p_n,q_n}}{q_n [n]_{p_n,q_n}} x,$$

$$(iv) \mathcal{P}_{n,p_n,q_n}^*(e_3; x) = \frac{p_n^6}{q_n^6} x^3 + \frac{p_n^3 q [2]_{p_n,q_n} + p^2 [4]_{p_n,q_n}}{q^5 [n]_{p_n,q_n}} x^2 + \frac{[2]_{p_n,q_n} [3]_{p_n,q_n}}{q_n^3 [n]_{p_n,q_n}^2} x,$$

$$(v) \mathcal{P}_{n,p_n,q_n}^*(e_4; x) = \frac{p_n^{12}}{q_n^{12}} x^4 + \frac{p_n^8 q^2 [2]_{p_n,q_n} + p_n^7 q [4]_{p_n,q_n} + p_n^6 [6]_{p_n,q_n}}{q_n^{11} [n]_{p_n,q_n}} x^3$$

$$+ \frac{p_n^4 q^2 [2]_{p_n,q_n} [3]_{p_n,q_n} + p_n^3 q [2]_{p_n,q_n} [5]_{p_n,q_n} + p_n^2 [4]_{p_n,q_n} [5]_{p_n,q_n}}{q_n^9 [n]_{p_n,q_n}^2} x^2$$

$$+ \frac{[2]_{p_n,q_n} [3]_{p_n,q_n} [4]_{p_n,q_n}}{q_n^6 [n]_{p_n,q_n}^3} x$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat

(i) Lemma 3.1.1 kullanılırsa,

$$\mathcal{P}_{n,p_n,q_n}^*(e_0; x)$$

$$= [n]_{p_n,q_n} \sum_{k=1}^{\infty} s_{n,k}(x; p_n, q_n) \int_0^{\infty/A(1-q_n/p_n)} \frac{q_n^{k(k-1)}}{p_n^k} s_{n,k-1}(t; p_n, q_n) d_{p_n,q_n} t + e_{p_n,q_n}(-[n]_{p_n,q_n} x)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} q_n^{k(k-1)/2} \frac{([n]_{p_n,q_n} x)^k}{[k]_{p_n,q_n}!} e_{p_n,q_n}(-[n]_{p_n,q_n} x) + e_{p_n,q_n}(-[n]_{p_n,q_n} x)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} q_n^{k(k-1)/2} \frac{([n]_{p_n,q_n} x)^k}{[k]_{p_n,q_n}!} e_{p_n,q_n}(-[n]_{p_n,q_n} x)$$

$$= E_{p_n,q_n}([n]_{p_n,q_n} x) e_{p_n,q_n}(-[n]_{p_n,q_n} x)$$

= 1 olur.

(ii) Lemma 3.1.1 kullanılırsa,

$$\mathcal{P}_{n,p_n,q_n}^*(e_1; x)$$

$$= [n]_{p_n,q_n} \sum_{k=1}^{\infty} s_{n,k}(x; p_n, q_n) \int_0^{\infty/A(1-q_n/p_n)} \frac{q_n^{k(k-1)}}{p_n^k} s_{n,k-1}(t; p_n, q_n) \left(\frac{q_n}{p_n} t\right) d_{p_n,q_n} t$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} q_n^{k(k-1)/2} \frac{([n]_{p_n,q_n} x)^k}{[k-1]_{p_n,q_n}!} e_{p_n,q_n}(-[n]_{p_n,q_n} x) x$$

$$= E_{p_n,q_n}([n]_{p_n,q_n} x) e_{p_n,q_n}(-[n]_{p_n,q_n} x) x$$

= x olur.

(iii) Lemma 3.1.1 ve Eş. 2.3 kullanılırsa

$$\mathcal{P}_{n,p_n,q_n}^*(e_2; x)$$

$$= [n]_{p_n,q_n} \sum_{k=1}^{\infty} s_{n,k}(x; p_n, q_n) \int_0^{\infty/A(1-q_n/p_n)} \frac{q_n^{k(k-1)}}{p_n^k} s_{n,k-1}(t; p_n, q_n) \left(\frac{q_n}{p_n} t\right)^2 d_{p_n,q_n} t$$

$$= \frac{p_n^2}{[n]_{p_n,q_n}^2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{([n]_{p_n,q_n} x)^k}{[k-2]_{p_n,q_n}!} e_{p_n,q_n}(-[n]_{p_n,q_n} x) q_n^{(k^2-5k-2)/2}$$

$$+ \frac{q_n + p_n}{[n]_{p_n,q_n}^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{([n]_{p_n,q_n} x)^k}{[k-1]_{p_n,q_n}!} e_{p_n,q_n}(-[n]_{p_n,q_n} x) q_n^{(k^2-3k)/2}$$

olur. Bu ifadenin birinci toplamında k yerine $k+2$ ve ikinci toplamında k yerine $k+1$ yazılırsa

$$\mathcal{P}_{n,p_n,q_n}^*(e_2; x) = \frac{p_n^2}{q_n^2} x^2 + \frac{[2]_{p_n,q_n}}{q_n [n]_{p_n,q_n}} x$$

elde edilir.

(iv) Lemma 3.1.1 ve Eş. 2.4 kullanılırsa

$$\mathcal{P}_{n,p_n,q_n}^*(e_3; x)$$

$$= [n]_{p_n,q_n} \sum_{k=1}^{\infty} s_{n,k}(x; p_n, q_n) \int_0^{\infty/A(1-q_n/p_n)} \frac{q_n^{k(k-1)}}{p_n^k} s_{n,k-1}(t; p_n, q_n) \left(\frac{q_n}{p_n} t\right)^3 d_{p_n,q_n} t$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{p_n^6}{[n]_{p_n, q_n}^3} \sum_{k=3}^{\infty} \frac{([n]_{p_n, q_n} x)^k}{[k-3]_{p_n, q_n}!} e_{p_n, q_n}(-[n]_{p_n, q_n} x) q_n^{(k^2-7k)/2} \\
&+ \frac{p_n^3 q_n [2]_{p_n, q_n} + p_n^2 [4]_{p_n, q_n}}{[n]_{p_n, q_n}^3} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{([n]_{p_n, q_n} x)^k}{[k-2]_{p_n, q_n}!} e_{p_n, q_n}(-[n]_{p_n, q_n} x) q_n^{(k^2-5k-4)/2} \\
&+ \frac{[2]_{p_n, q_n} [3]_{p_n, q_n}}{[n]_{p_n, q_n}^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{([n]_{p_n, q_n} x)^k}{[k-1]_{p_n, q_n}!} e_{p_n, q_n}(-[n]_{p_n, q_n} x) q_n^{(k^2-3k-4)/2}
\end{aligned}$$

olur. Bu ifadenin birinci toplamında k yerine $k + 3$, ikinci toplamında k yerine $k + 2$ ve üçüncü toplamında k yerine $k + 1$ yazılırsa

$$\mathcal{P}_{n, p_n, q_n}^*(e_3; x) = \frac{p_n^6}{q_n^6} x^3 + \frac{p_n^3 q_n [2]_{p_n, q_n} + p_n^2 [4]_{p_n, q_n}}{q_n^5 [n]_{p_n, q_n}} x^2 + \frac{[2]_{p_n, q_n} [3]_{p_n, q_n}}{q_n^3 [n]_{p_n, q_n}^2} x$$

elde edilir.

(v) Lemma 3.1.1 ve Eş. 2.5 kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&\mathcal{P}_{n, p_n, q_n}^*(e_4; x) \\
&= [n]_{p_n, q_n} \sum_{k=1}^{\infty} s_{n, k}(x; p_n, q_n) \int_0^{\infty/A(1-q_n/p_n)} \frac{q_n^{k(k-1)}}{p_n^k} s_{n, k-1}(t; p_n, q_n) \left(\frac{q_n t}{p_n}\right)^4 d_{p_n, q_n} t \\
&= \frac{p_n^{12}}{[n]_{p_n, q_n}^4} \sum_{k=4}^{\infty} \frac{([n]_{p_n, q_n} x)^k}{[k-4]_{p_n, q_n}!} e_{p_n, q_n}(-[n]_{p_n, q_n} x) q_n^{(k^2-9k-4)/2} \\
&+ \frac{p_n^8 q_n^2 [2]_{p_n, q_n} + p_n^7 q_n [4]_{p_n, q_n} + p_n^6 [6]_{p_n, q_n}}{[n]_{p_n, q_n}^4} \sum_{k=3}^{\infty} \frac{([n]_{p_n, q_n} x)^k}{[k-3]_{p_n, q_n}!} e_{p_n, q_n}(-[n]_{p_n, q_n} x) q_n^{(k^2-7k-10)/2} \\
&+ \frac{p_n^4 q_n^2 [2]_{p_n, q_n} [3]_{p_n, q_n} + p_n^3 q_n [2]_{p_n, q_n} [5]_{p_n, q_n} + p_n^2 [4]_{p_n, q_n} [5]_{p_n, q_n}}{[n]_{p_n, q_n}^4} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{([n]_{p_n, q_n} x)^k}{[k-2]_{p_n, q_n}!} e_{p_n, q_n}(-[n]_{p_n, q_n} x) q_n^{(k^2-5k-12)/2} \\
&+ \frac{[2]_{p_n, q_n} [3]_{p_n, q_n} [4]_{p_n, q_n}}{[n]_{p_n, q_n}^4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{([n]_{p_n, q_n} x)^k}{[k-1]_{p_n, q_n}!} e_{p_n, q_n}(-[n]_{p_n, q_n} x) q_n^{(k^2-3k-10)/2}
\end{aligned}$$

olur. Bu ifadenin birinci toplamında k yerine $k + 4$, ikinci toplamında k yerine $k + 3$, üçüncü toplamında k yerine $k + 2$ ve dördüncü toplamında k yerine $k + 1$ yazılırsa

$$\mathcal{P}_{n, p_n, q_n}^*(e_4; x) = \frac{p_n^{12}}{q_n^{12}} x^4 + \frac{p_n^8 q_n^2 [2]_{p_n, q_n} + p_n^7 q_n [4]_{p_n, q_n} + p_n^6 [6]_{p_n, q_n}}{q_n^{11} [n]_{p_n, q_n}} x^3$$

$$+ \frac{p_n^4 q_n^2 [2]_{p_n, q_n} [3]_{p_n, q_n} + p_n^3 q_n [2]_{p_n, q_n} [5]_{p_n, q_n} + p_n^2 [4]_{p_n, q_n} [5]_{p_n, q_n}}{q_n^3 [n]_{p_n, q_n}^2} x^2$$

$$+ \frac{[2]_{p_n, q_n} [3]_{p_n, q_n} [4]_{p_n, q_n}}{q_n^3 [n]_{p_n, q_n}^3} x$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

3.1.3. Lemma

$\mathcal{P}_{n, p_n, q_n}^*$ Phillips operatör dizilerinin ikinci merkezi moment için

$$\mathcal{P}_{n, p_n, q_n}^* ((t-x)^2; x) \leq \frac{1}{q_n^2} \left(p_n^2 - q_n^2 + \frac{q_n^2}{[n]_{p_n, q_n}} \right) (x + x^2)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat

$\mathcal{P}_{n, p_n, q_n}^*$ operatörlerinin lineerliğinden ve Lemma 3.1.2 sonucundan

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{n, p_n, q_n}^* ((t-x)^2; x) &= \mathcal{P}_{n, p_n, q_n}^* (t^2; x) - 2x \mathcal{P}_{n, p_n, q_n}^* (t; x) + x^2 \mathcal{P}_{n, p_n, q_n}^* (1; x) \\ &= \frac{p_n^2}{q_n^2} x^2 + \frac{[2]_{p_n, q_n}}{q_n [n]_{p_n, q_n}} x - 2x^2 + x^2 \\ &= \frac{p_n^2 - q_n^2}{q_n^2} x^2 + \frac{[2]_{p_n, q_n}}{q_n [n]_{p_n, q_n}} x \\ &\leq \frac{1}{q_n^2} \left(p_n^2 - q_n^2 + \frac{q_n^2}{[n]_{p_n, q_n}} \right) (x + x^2) \end{aligned}$$

olduğu elde edilir.

3.2. $P_{n, p_n, q_n}^*(f; x)$ Operatörlerinin Yaklaşım Özellikleri

3.2.1. Lemma

Her $f'' \in C_B[0, \infty)$ ve $x \in [0, \infty)$ için

$$|\mathcal{P}_{n,p_n,q_n}^*(f; x) - f(x)| \leq \delta_{n,p_n,q_n}(x) \|f''\|,$$

eşitsizliği sağlanır. Burada

$$\delta_{n,p_n,q_n}(x) := \frac{1}{q_n^2} \left(p_n^2 - q_n^2 + \frac{2}{[n]_{p_n,q_n}} \right) (x^2 + x)$$

dir.

İspat

$f'' \in C_B[0, \infty)$ olduğundan

$$f(t) = f(x) + (t-x)f'(x) + \int_x^t (t-u)f''(u)du$$

Taylor formülüne \mathcal{P}_{n,p_n,q_n} operatörü uygulandığında Lemma 3.2.1 den

$$\mathcal{P}_{n,p_n,q_n}^*(f; x) - f(x) = \mathcal{P}_{n,p_n,q_n}^* \left(\int_x^t (t-u)f''(u)du; x \right)$$

olur.

$$\left| \int_x^t (t-u)f''(u)du \right| \leq \|f''\| \frac{(t-x)^2}{2}$$

eşitsizliğinden ve Lemma 3.1.3 den

$$|\mathcal{P}_{n,p_n,q_n}^*(f; x) - f(x)|$$

$$\leq \frac{\|f''\|_B}{2} \mathcal{P}_{n,p_n,q_n}^*((t-x)^2; x)$$

$$\leq \delta_{n,p_n,q_n}(x) \|f''\|$$

elde edilir. Burada

$$\delta_{n,p_n,q_n}(x) := \frac{1}{q_n^2} \left(p_n^2 - q_n^2 + \frac{2}{[n]_{p_n,q_n}} \right) (x^2 + x)$$

dir. Böylece ispat tamamlanır.

3.2.2 Teorem

$f \in \tilde{C}_B [0, \infty)$ olsun. $\delta_{n,p_n,q_n}(x) = \frac{1}{q_n^2} \left(p_n^2 - q_n^2 + \frac{2}{[n]_{p_n,q_n}} \right) (x^2 + x)$ olmak üzere

$$|\mathcal{P}_{n,p_n,q_n}^*(f; x) - f(x)| \leq 2M\omega_2 \left(f, \sqrt{\delta_{n,p_n,q_n}(x)} \right)$$

eşitsizliği bazı $M > 0$ reel sayıları için sağlanır.

İspat

Her $g \in W_\infty^2$ için

$$\begin{aligned} & |\mathcal{P}_{n,p_n,q_n}^*(f, x) - f(x)| \\ & \leq |\mathcal{P}_{n,p_n,q_n}^*(f - g; x) - (f - g)(x) + \mathcal{P}_{n,p_n,q_n}^*(g; x) - g(x)| \end{aligned}$$

eşitsizliği yazılırsa, Lemma 3.2.1 den

$$|\mathcal{P}_{n,p_n,q_n}^*(f; x) - f(x)| \leq 2 \|f - g\|_{\tilde{C}_B} + \delta_{n,p_n,q_n}(x) \|g''\|_{\tilde{C}_B} \quad (3.4)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizliğin sağ tarafında $g \in W_\infty^2$ üzerinden infimum alınırsa ispat tamamlanır.

$\mathcal{P}_{n,p_n,q_n}^*(f)$ operatörü için ağırlıklı yaklaşım teoremini verelim.

3.2.3 Teorem

Her $f \in C_\rho^*[0, \infty)$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{P}_{n,p_n,q_n}^*(f) - f\|_\rho = 0$$

dir.

İspat

Lemma 3.1.2 (i) ve (ii) den

$$\|\mathcal{P}_{n,p_n,q_n}^*(e_0) - e_0\|_\rho = 0$$

ve

$$\|\mathcal{P}_{n,p_n,q_n}^*(e_1) - e_1\|_\rho = 0$$

olduğu açıktır. Lemma 3.1.2 (iii) den

$$\begin{aligned} \|\mathcal{P}_{n,p_n,q_n}^*(e_2) - e_2\|_\rho &= \sup_{x \geq 0} \frac{|\mathcal{P}_{n,p_n,q_n}^*(t^2;x) - x^2|}{1+x^2} \\ &\leq \left(\frac{p_n^2 - q_n^2}{q_n^2} + \frac{[2]_{p_n,q_n}}{q_n [n]_{p_n,q_n}} \right) \sup_{x \geq 0} \frac{x+x^2}{1+x^2} \\ &\leq 2 \left(\frac{p_n^2 - q_n^2}{q_n^2} + \frac{[2]_{p_n,q_n}}{q_n [n]_{p_n,q_n}} \right) \end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{P}_{n,p_n,q_n}^*(e_2) - e_2\|_\rho = 0$

dır. Böylece [33] de verilen A. D. Gadjiev Teoremi kullanarak ispat tamamlanır.

3.2.4. Lemma

$f \in C_\rho^*[0, \infty)$ olsun. $b > 0$ reel sayı, $\eta_{p_n,q_n}(b) = \frac{1}{q_n^2} \left(p_n^2 - q_n^2 + \frac{2}{[n]_{p_n,q_n}} \right) (b^2 + b)$ ve M , f fonksiyonuna bağlı bir pozitif reel sayı olmak üzere

$$\|\mathcal{P}_{n,p_n,q_n}^*(f; x) - f(x)\|_{C[0,b]} \leq M \left\{ (1+b)^2 \eta_{p_n,q_n}(b) + \omega_{[0,b+1]}(f; \sqrt{\eta_{p_n,q_n}(b)}) \right\}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat

$x \in [0, b]$ ve $t > b + 1$ olsun. $t - x > 1$ olmak üzere

$$|f(t) - f(x)| \leq K_f(2 + (t - x + x)^2 + x^2) \quad (3.5)$$

$$\leq 3K_f(1 + b)^2(t - x)^2$$

yazılabilir.

$x \in [0, b]$, $t < b + 1$ ve $\delta > 0$ olsun. O zaman

$$|f(t) - f(x)| \leq \left(1 + \frac{|t - x|}{\delta}\right) \omega_{[0, b+1]}(f; \delta) \quad (3.6)$$

dir. (3.5) ve (3.6) den

$$|f(t) - f(x)| \leq 3K_f(1 + b)^2(t - x)^2 + \left(1 + \frac{|t - x|}{\delta}\right) \omega_{[0, b+1]}(f; \delta)$$

eşitsizliği yazılır. Cauchy-Schwarz eşitsizliği ve Lemma 3.1.3 den

$$\begin{aligned} & |\mathcal{P}_{n, p_n, q_n}^*(f; x) - f(x)| \\ & \leq 3K_f(1 + b)^2 \mathcal{P}_{n, p_n, q_n}^*((t - x)^2; x) \\ & \quad + \omega_{[0, b+1]}(f; \delta) \left[1 + \frac{1}{\delta} (\mathcal{P}_{n, p_n, q_n}^*((t - x)^2; x))^{1/2}\right] \\ & \leq 3K_f(1 + b)^2 \eta_{p_n, q_n}(x) + \omega_{[0, b+1]}(f; \delta) \left[1 + \frac{1}{\delta} (\eta_{p_n, q_n}(x))^{1/2}\right] \end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$\eta_{p_n, q_n}(x) = \frac{1}{q_n^2} \left(p_n^2 - q_n^2 + \frac{2}{[n]_{p_n, q_n}} \right) (x^2 + x)$$

dir.

$$\delta := \sqrt{\eta_{p_n, q_n}(b)} = \sqrt{\frac{1}{q_n^2} \left(p_n^2 - q_n^2 + \frac{2}{[n]_{p_n, q_n}} \right) (b^2 + b)}$$

ve $M = \max\{3K_f, 2\}$ alınırsa ispat tamamlanır.

3.3. $\mathcal{P}_{n, p_n, q_n}^*(f; x)$ Operatörleri için Voronovskaja Tip Teorem

3.3.1. Lemma

$\mathcal{P}_{n, p_n, q_n}^*$ operatörlerinin birinci, ikinci ve dördüncü momentleri

$$(i) \lim_{n \rightarrow \infty} [n]_{p_n, q_n} \mathcal{P}_{n, p_n, q_n}^*((t-x); x) = 0,$$

$$(ii) \lim_{n \rightarrow \infty} [n]_{p_n, q_n} \mathcal{P}_{n, p_n, q_n}^*((t-x)^2; x) = 2(\alpha - \beta)x^2 + 2x,$$

$$(iii) \lim_{n \rightarrow \infty} [n]_{p_n, q_n}^2 \mathcal{P}_{n, p_n, q_n}^*((t-x)^4; x) = 12(\alpha - \beta)^2 x^4 + 24(\alpha - \beta)x^3 + 12x^2$$

biçimindedir.

İspat

(i) Lemma 3.1.2 (i) den

$$\mathcal{P}_{n, p_n, q_n}^*(t-x; x) = 0$$

dir. Dolayısıyla

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [n]_{p_n, q_n} \mathcal{P}_{n, p_n, q_n}^*((t-x); x) = 0$$

dır.

(ii) Lemma 3.1.2 (ii) den

$$\begin{aligned} & \mathcal{P}_{n,p_n,q_n}^*((t-x)^2; x) \\ &= \frac{p_n^2 - q_n^2}{q_n^2} x^2 + \frac{[2]_{p_n,q_n}}{q_n [n]_{p_n,q_n}} x \end{aligned}$$

dır.

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} [n]_{p_n,q_n} \left(\frac{p_n^2 - q_n^2}{q_n^2} x^2 + \frac{[2]_{p_n,q_n}}{q_n [n]_{p_n,q_n}} x \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(p_n^n - q_n^n)(p_n + q_n)}{q_n^2} x^2 + \frac{[2]_{p_n,q_n}}{q_n} x \right) \\ &= 2(\alpha - \beta) x^2 + 2x \end{aligned}$$

olur. Benzer biçimde Lemma 3.1.2 (iii) den

$$\begin{aligned} & \mathcal{P}_{n,p_n,q_n}^*((t-x)^4; x) \\ &= \left[\frac{p_n^{12}}{q_n^{12}} - \frac{4p_n^6}{q_n^6} + \frac{6p_n^2}{q_n^2} - 3 \right] x^4 \\ &+ \left[\frac{p_n^8 q_n^2 [2]_{p_n,q_n} + p_n^7 q_n [4]_{p_n,q_n} + p_n^6 [6]_{p_n,q_n}}{q_n^{11} [n]_{p_n,q_n}} - \frac{4p_n^3 q_n [2]_{p_n,q_n} + 4p_n^2 [4]_{p_n,q_n}}{q_n^5 [n]_{p_n,q_n}} + \frac{6[2]_{p_n,q_n}}{q_n [n]_{p_n,q_n}} \right] x^3 \\ &+ \left[\frac{p_n^4 q_n^2 [2]_{p_n,q_n} [3]_{p_n,q_n} + p_n^3 q_n [2]_{p_n,q_n} [5]_{p_n,q_n} + p_n^2 [4]_{p_n,q_n} [5]_{p_n,q_n}}{q_n^9 [n]_{p_n,q_n}^2} - \frac{4[2]_{p_n,q_n} [3]_{p_n,q_n}}{q_n^3 [n]_{p_n,q_n}^2} \right] x^2 \\ &+ \left[\frac{[2]_{p_n,q_n} [3]_{p_n,q_n} [4]_{p_n,q_n}}{q_n^6 [n]_{p_n,q_n}^3} \right] x \end{aligned}$$

olup

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ [n]_{p_n,q_n}^2 \mathcal{P}_{n,p_n,q_n}^*((t-x)^4; x) \right\} = 12(\alpha - \beta)^2 x^4 + 24(\alpha - \beta) x^3 + 12x^2$$

dir.

3.3.2 Teorem

$f \in W_\infty^2$ ve $x \in [0, \infty)$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [n]_{p_n, q_n} (\mathcal{P}_{n, p_n, q_n}^*(f; x) - f(x)) = ((\alpha - \beta)x^2 + x)f''(x)$$

limiti gerçekleşir.

İspat

f fonksiyonu için x noktasında Taylor açılımı

$$f(t) = f(x) + f'(x)(t - x) + \frac{1}{2}f''(x)(t - x)^2 + \varepsilon(t, x)(t - x)^2,$$

yazılabilir. Burada $t \rightarrow x$ iken $\varepsilon(t, x) \rightarrow 0$ dir. Dolayısıyla $\mathcal{P}_{n, p_n, q_n}^*$ operatörlerinin lineerliği ve Lemma 3.3.1 den

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} [n]_{p_n, q_n} (\mathcal{P}_{n, p_n, q_n}^*(f; x) - f(x)) \\ &= f'(x) \lim_{n \rightarrow \infty} [n]_{p_n, q_n} \mathcal{P}_{n, p_n, q_n}^*(t - x; x) \\ &+ \frac{1}{2}f''(x) \lim_{n \rightarrow \infty} [n]_{p_n, q_n} \mathcal{P}_{n, p_n, q_n}^*((t - x)^2; x) \\ &+ \lim_{n \rightarrow \infty} [n]_{p_n, q_n} \mathcal{P}_{n, p_n, q_n}^*(\varepsilon(t, x)(t - x)^2; x) \end{aligned}$$

eşitliği yazılabilir. Bu eşitliğin son terimine Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} [n]_{p_n, q_n} \mathcal{P}_{n, p_n, q_n}^*(\varepsilon(t, x)(t - x)^2; x) \\ & \leq \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{P}_{n, p_n, q_n}^*(\varepsilon^2(t, x); x)} \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} [n]_{p_n, q_n}^2 \mathcal{P}_{n, p_n, q_n}^*((t - x)^4; x)} \end{aligned}$$

olur. Burada $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{P}_{n, p_n, q_n}^*(\varepsilon^2(t, x); x) = 0$ ve Lemma 3.3.1 den

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [n]_{p_n, q_n}^2 \mathcal{P}_{n, p_n, q_n}^*((t - x)^4; x) \text{ sonlu olduğundan}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [n]_{p_n, q_n} \mathcal{P}_{n, p_n, q_n}^*(\varepsilon(t, x)(t - x)^2; x) = 0$$

dır.

Böylece,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [n]_{p_n, q_n} (\mathcal{P}_{n, p_n, q_n}^*(f; x) - f(x)) = ((\alpha - \beta)x^2 + x)f''(x)$$

sonucu elde edilir.

3.4. $P_{n, p_n, q_n}^*(f; x)$ Operatörlerinin İstatistiksel Yaklaşım Özellikleri

İstatistiksel yakınsama ile ilgili temel tanım ve teoremi aşağıdaki gibi verelim.

\mathbb{N} doğal sayılar kümesi, $K \subseteq \mathbb{N}$ tüm doğal sayılar kümesinin bir alt kümesi ve $K_n = \{k \leq n : k \in K\}$ şeklinde tanımlansın. K_n kümesinin kardinalitesi (eleman sayısı) $|K_n|$ ile gösterilsin.

3.4.1. Tanım

$K \subseteq \mathbb{N}$ alt kümesi verilsin. Eğer

$$\lim_n \frac{|K_n|}{n}$$

limiti mevcut ise, bu limit değerine K kümesinin "yoğunluğu" denir ve $\delta(K)$ sembolüyle gösterilir [34].

Tanımdan $\delta(\mathbb{N}) = 1$ olup doğal sayıların tüm sonlu elemanlı alt kümelerinin 0 yoğunluklu olduğu görülebilir. $\delta(\{2k - 1 : k \in \mathbb{N}\}) = \frac{1}{2}$ ve $\delta(\{2k : k \in \mathbb{N}\}) = \frac{1}{2}$ sırasıyla tek ve çif sayılar kümelerinin yoğunlukları olup, asal sayılar ve tam karelerden oluşan kümelerin 0 yoğunluklu olduğu bilinmektedir.

Yoğunluk tanımını kullanarak istatistiksel yakınsaklık kavramı aşağıdaki şekilde tanımlanır.

3.4.2. Tanım

$x = (x_n)$ reel ya da kompleks terimli bir dizi olsun.

$$\delta(\{n \in \mathbb{N} : |x_n - L| \geq \varepsilon\}) = 0 \quad (\forall \varepsilon > 0)$$

veya eşdeğer olarak

$$\lim_j \frac{1}{j} |\{n \leq j : |x_n - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa x dizisi L sayısına "istatistiksel yakınsaktır" denir ve $st - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L$ ile gösterilir.

Bir dizinin L sayısına istatistiksel yakınsak olması onun 1 yoğunluklu bir indis kümesi üzerinde klasik anlamdaki L yakınsaklığına denktir.

Böylece istatistiksel yakınsaklık klasik anlamdaki yakınsaklıktan daha zayıftır.

Dolayısıyla her yakınsak dizi istatistiksel yakınsaktır ama bunun tersi genelde doğru değildir. Durumla ilgili örnek aşağıda verilmiştir.

Örnek

(x_n) dizisinin genel terimi

$$x_n := \begin{cases} \frac{3n+1}{n+3}, & n = m^2 \\ 0, & n \neq m^2 \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Tanımdan da görüleceği üzere $st - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ olup (x_n) dizisi istatistiksel yakınsaktır fakat klasik anlamda yakınsak değildir.

İstatistiksel yakınsaklık ve klasik yakınsaklık arasındaki ikinci bir önemli farklılık ise sınırlılıktır. Yakınsak bir dizi sınırlıdır fakat istatistiksel yakınsak dizi sınırlı olmak zorunda değildir. Bu durum aşağıdaki örnek üzerinden incelenmiştir.

Örnek

(x_n) dizisinin genel terimi

$$x_n := \begin{cases} \sqrt[5]{n}, & n = m^5 \\ 0, & n \neq m^5 \end{cases}$$

olsun. $st\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ olup (x_n) istatistiksel yakınsaktır ama sınırlı bir dizi değildir.

3.4.3 Teorem

$(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ve $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizileri

$$st\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 1, st\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = 1 \text{ ve } st\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} p_n^n = \alpha, st\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} q_n^n = \beta, \quad (3.7)$$

$\alpha, \beta < 1, \alpha \neq \beta$ şartlarını sağlayan iki pozitif reel sayı dizisi olsun. O zaman her $f \in C_\rho^*[0, \infty)$ için

$$st\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{P}_{n,p_n,q_n}^* f - f\|_\rho = 0$$

dır.

İspat

Lemma 3.1.2 den

$$st\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{P}_{n,p_n,q_n}^* (1; x) - 1\|_\rho = 0 \quad (3.8)$$

ve

$$st\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{P}_{n,p_n,q_n}^* (t; x) - x\|_\rho = 0 \quad (3.9)$$

olduğu açıktır. Lemma 3.1.2 dikkate alınarak

$$\sup_{x \in [0, \infty)} |\mathcal{P}_{n,p_n,q_n}^* (t^2; x) - x^2| = \sup_{x \in [0, \infty)} \left| \left(\frac{p_n^2}{q_n^2} x^2 + \frac{[2]_{p_n, q_n}}{q_n [n]_{p_n, q_n}} x - x^2 \right) \right| \frac{1}{1+x^2}$$

$$\begin{aligned} &\leq \sup_{x \in [0, \infty)} \left| \left(\frac{p_n^2}{q_n^2} - 1 \right) x^2 + \frac{[2]_{p_n, q_n}}{q_n [n]_{p_n, q_n}} x \right| \frac{1}{1+x^2} \\ &\leq \left(\frac{p_n^2}{q_n^2} - 1 \right) \sup_{x \in [0, \infty)} \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{[2]_{p_n, q_n}}{q_n [n]_{p_n, q_n}} \sup_{x \in [0, \infty)} \frac{x}{1+x^2} \end{aligned}$$

eşitsizliği yazılabilir. Eş. 3.7 i kullanılarak

$$st - \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{p_n^2}{q_n^2} - 1 \right) = 0 \text{ ve } st - \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{[2]_{p_n, q_n}}{q_n [n]_{p_n, q_n}} \right) = 0$$

elde edilir. Her $\varepsilon > 0$ için

$$M := \left\{ n \in \mathbb{N} : \left\| \mathcal{P}_{n, p_n, q_n}^*(t^2; x) - x^2 \right\|_\rho \geq \varepsilon \right\},$$

$$M_1 := \left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{p_n^2}{q_n^2} - 1 \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\},$$

$$M_2 := \left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{[2]_{p_n, q_n}}{q_n [n]_{p_n, q_n}} \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\}$$

kümeleri tanımlansın. $M \subseteq M_1 \cup M_2$ olup, $\delta(M) \leq \delta(M_1) + \delta(M_2) = 0$ dır. Dolayısıyla

$$st - \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \mathcal{P}_{n, p_n, q_n}^*(t^2; x) - x^2 \right\|_\rho = 0 \quad (3.10)$$

dir. Böylece Eş. 3.8, 3.9, 3.10 ve ağırlıklı uzaylardaki istatistiksel Korovkin teoremi [36] den ispat tamamlanır.

3.5. $P_{n, p_n, q_n}^*(f; x)$ Operatörleri için İstatistiksel Voronovskaja Tip Teorem

3.5.1. Lemma

$(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ve $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Eş. 3.7 de verilen şartları sağlayan iki reel sayı dizi olsun. O zaman

$$(i) st - \lim_{n \rightarrow \infty} [n]_{p_n, q_n} \mathcal{P}_{n, p_n, q_n}^*((t-x)^2; x) = 2(\alpha - \beta)x^2 + 2x,$$

$$(ii)st - \lim_{n \rightarrow \infty} [n]_{p_n, q_n}^2 \mathcal{P}_{n, p_n, q_n}^* ((t-x)^4; x) = 12(\alpha - \beta)^2 x^4 + 24(\alpha - \beta) x^3 + 12x^2$$

gerçeklenir.

İspat

(i) Lemma 3.1.2 sonuçları kullanıldığında

$$\begin{aligned} & \mathcal{P}_{n, p_n, q_n}^* ((t-x)^2; x) \\ &= \frac{p_n^2 - q_n^2}{q_n^2} x^2 + \frac{[2]_{p_n, q_n}}{q_n [n]_{p_n, q_n}} x \end{aligned}$$

yazılır. Bu eşitliğin her iki tarafı $[n]_{p_n, q_n}$ ile çarpıldığında

$$\begin{aligned} & [n]_{p_n, q_n} \mathcal{P}_{n, p_n, q_n}^* ((t-x)^2; x) \\ &= [n]_{p_n, q_n} \left(\frac{p_n^2 - q_n^2}{q_n^2} x^2 + \frac{[2]_{p_n, q_n}}{q_n [n]_{p_n, q_n}} x \right) \\ &= \frac{(p_n^n - q_n^n)(p_n + q_n)}{q_n^2} x^2 + \frac{[2]_{p_n, q_n}}{q_n} x \end{aligned}$$

olur. Eş. 3.7 den

$$st - \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(p_n^n - q_n^n)(p_n + q_n)}{q_n^2} \right) = 2(\alpha - \beta) \text{ and } st - \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{[2]_{p_n, q_n}}{q_n} \right) = 2$$

dir. Her $\varepsilon > 0$ için

$$D := \left\{ n \in \mathbb{N} : [n]_{p_n, q_n} \mathcal{P}_{n, p_n, q_n}^* ((t-x)^2; x) \geq \varepsilon \right\},$$

$$D_1 := \left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{(p_n^n - q_n^n)(p_n + q_n)}{q_n^2} \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\},$$

$$D_2 := \left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{[2]_{p_n, q_n}}{q_n} \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\}$$

kümeleri tanımlansın. $D \subseteq D_1 \cup D_2$ olup, $\delta(D) \leq \delta(D_1) + \delta(D_2) = 0$ dir.

Dolayısıyla,

$$st - \lim_{n \rightarrow \infty} [n]_{p_n, q_n} \mathcal{P}_{n, p_n, q_n}^* ((t-x)^2; x) = 2(\alpha - \beta)x^2 + 2x$$

elde edilir. Benzer olarak

$$\begin{aligned} & \mathcal{P}_{n, p_n, q_n}^* ((t-x)^4; x) \\ &= \left[\frac{p_n^{12}}{q_n^{12}} - \frac{4p_n^6}{q_n^6} + \frac{6p_n^2}{q_n^2} - 3 \right] x^4 \\ &+ \left[\frac{p_n^8 q_n^2 [2]_{p_n, q_n} + p_n^7 q_n [4]_{p_n, q_n} + p_n^6 [6]_{p_n, q_n}}{q_n^{11} [n]_{p_n, q_n}} - \frac{4p_n^3 q_n [2]_{p_n, q_n} + 4p_n^2 [4]_{p_n, q_n}}{q_n^5 [n]_{p_n, q_n}} + \frac{6[2]_{p_n, q_n}}{q_n [n]_{p_n, q_n}} \right] x^3 \\ &+ \left[\frac{p_n^4 q_n^2 [2]_{p_n, q_n} [3]_{p_n, q_n} + p_n^3 q_n [2]_{p_n, q_n} [5]_{p_n, q_n} + p_n^2 [4]_{p_n, q_n} [5]_{p_n, q_n}}{q_n^9 [n]_{p_n, q_n}^2} - \frac{4[2]_{p_n, q_n} [3]_{p_n, q_n}}{q_n^3 [n]_{p_n, q_n}^2} \right] x^2 \\ &+ \left[\frac{[2]_{p_n, q_n} [3]_{p_n, q_n} [4]_{p_n, q_n}}{q_n^6 [n]_{p_n, q_n}^3} \right] x \end{aligned}$$

dir.

$$\frac{p_n^{12}}{q_n^{12}} - \frac{4p_n^6}{q_n^6} + \frac{6p_n^2}{q_n^2} - 3 = v_4(p_n, q_n)$$

$$\frac{p_n^8 q_n^2 [2]_{p_n, q_n} + p_n^7 q_n [4]_{p_n, q_n} + p_n^6 [6]_{p_n, q_n}}{q_n^{11} [n]_{p_n, q_n}} - \frac{4p_n^3 q_n [2]_{p_n, q_n} + 4p_n^2 [4]_{p_n, q_n}}{q_n^5 [n]_{p_n, q_n}} + \frac{6[2]_{p_n, q_n}}{q_n [n]_{p_n, q_n}} = v_3(p_n, q_n)$$

$$\frac{p_n^4 q_n^2 [2]_{p_n, q_n} [3]_{p_n, q_n} + p_n^3 q_n [2]_{p_n, q_n} [5]_{p_n, q_n} + p_n^2 [4]_{p_n, q_n} [5]_{p_n, q_n}}{q_n^9 [n]_{p_n, q_n}^2} - \frac{4[2]_{p_n, q_n} [3]_{p_n, q_n}}{q_n^3 [n]_{p_n, q_n}^2} = v_2(p_n, q_n)$$

$$\frac{[2]_{p_n, q_n} [3]_{p_n, q_n} [4]_{p_n, q_n}}{q_n^6 [n]_{p_n, q_n}^3} = v_1(p_n, q_n)$$

denilirse

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [n]_{p_n, q_n}^2 \mathcal{P}_{n, p_n, q_n}^* ((t-x)^4; x)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} [n]_{p_n, q_n}^2 (v_4(p_n, q_n)x^4 + v_3(p_n, q_n)x^3 + v_2(p_n, q_n)x^2 + v_1(p_n, q_n)x^1)$$

Eş. 3.7 den

$$st - \lim_n [n]_{p_n, q_n}^2 v_4(p_n, q_n) = 12(\alpha - \beta)^2$$

$$st - \lim_n [n]_{p_n, q_n}^2 v_3(p_n, q_n) = 24(\alpha - \beta)$$

$$st - \lim_n [n]_{p_n, q_n}^2 v_2(p_n, q_n) = 12$$

$$st - \lim_n [n]_{p_n, q_n}^2 v_1(p_n, q_n) = 0$$

dir. Her $\varepsilon > 0$ için

$$N := \left\{ n \in \mathbb{N} : [n]_{p_n, q_n}^2 \mathcal{P}_{n, p_n, q_n}^*((t-x)^2 4; x) \geq \varepsilon \right\},$$

$$N_1 := \left\{ n \in \mathbb{N} : [n]_{p_n, q_n}^2 v_4 \geq \frac{\varepsilon}{4} \right\},$$

$$N_2 := \left\{ n \in \mathbb{N} : [n]_{p_n, q_n}^2 v_3 \geq \frac{\varepsilon}{4} \right\},$$

$$N_3 := \left\{ n \in \mathbb{N} : [n]_{p_n, q_n}^2 v_2 \geq \frac{\varepsilon}{4} \right\},$$

$$N_4 := \left\{ n \in \mathbb{N} : [n]_{p_n, q_n}^2 v_1 \geq \frac{\varepsilon}{4} \right\}$$

kümeleri tanımlansın. $N \subseteq N_1 \cup N_2 \cup N_3 \cup N_4$ olup, $\delta(N) \leq \delta(N_1) + \delta(N_2) + \delta(N_3) + \delta(N_4) = 0$ dır.

Dolayısıyla

$$st - \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ [n]_{p_n, q_n}^2 \mathcal{P}_{n, p_n, q_n}^*((t-x)^4; x) \right\} = 12(\alpha - \beta)^2 x^4 + 24(\alpha - \beta) x^3 + 12x^2$$

elde edilir.

3.5.2 Teorem

(p_n) ve (q_n) dizileri Eş. 3.7 de verilen koşulları sağlasın. O zaman

$$st - \lim_{n \rightarrow \infty} [n]_{p,q} (\mathcal{P}_{n,p_n,q_n}^*(f; x) - f(x)) = ((\alpha - \beta)x^2 + x) f''(x)$$

dir.

İspat

f fonksiyonu için x noktasında Taylor açılımı

$$f(t) = f(x) + f'(x)(t - x) + \frac{1}{2}f''(x)(t - x)^2 + \varepsilon(t, x)(t - x)^2,$$

yazılabilir. Burada $t \rightarrow x$ için $\varepsilon(t, x) \rightarrow 0$ dır. Dolayısıyla, $\mathcal{P}_{n,p_n,q_n}^*$ operatörlerinin lineerliği ve Lemma 3.5.1 den

$$\begin{aligned} & st - \lim_{n \rightarrow \infty} [n]_{p_n,q_n} (\mathcal{P}_{n,p_n,q_n}^*(f; x) - f(x)) \\ &= f'(x) st - \lim_{n \rightarrow \infty} [n]_{p_n,q_n} \mathcal{P}_{n,p_n,q_n}^*(t - x; x) \\ &+ \frac{1}{2}f''(x) st - \lim_{n \rightarrow \infty} [n]_{p_n,q_n} \mathcal{P}_{n,p_n,q_n}^*((t - x)^2; x) \\ &+ \lim_{n \rightarrow \infty} [n]_{p_n,q_n} \mathcal{P}_{n,p_n,q_n}^*(\varepsilon(t, x)(t - x)^2; x). \end{aligned}$$

eşitliği yazılabilir. Bu eşitliğin son terimine Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} & st - \lim_{n \rightarrow \infty} [n]_{p_n,q_n} \mathcal{P}_{n,p_n,q_n}^*(\varepsilon(t, x)(t - x)^2; x) \\ &\leq \sqrt{st - \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{P}_{n,p_n,q_n}^*(\varepsilon^2(t, x); x)} \sqrt{st - \lim_{n \rightarrow \infty} [n]_{p_n,q_n}^2 \mathcal{P}_{n,p_n,q_n}^*((t - x)^4; x)} \end{aligned}$$

olur.

Burada $st - \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{P}_{n,p_n,q_n}^*(\varepsilon^2(t,x);x) = 0$ ve Lemma 3.5.1 den $st - \lim_{n \rightarrow \infty} [n]_{p_n,q_n}^2 \mathcal{P}_{n,p_n,q_n}^*((t-x)^4;x)$ sonlu olduğundan

$$st - \lim_{n \rightarrow \infty} [n]_{p_n,q_n} \mathcal{P}_{n,p_n,q_n}^*(\varepsilon(t,x)(t-x)^2;x) = 0$$

dır. Dolayısıyla

$$st - \lim_{n \rightarrow \infty} [n]_{p_n,q_n} (\mathcal{P}_{n,p_n,q_n}^*(f;x) - f(x)) = ((\alpha - \beta)x^2 + x) f''(x)$$

elde edilir.



4. LİNEER FONKSİYONLARI KORUYAN SCHURER TİP (p, q)–PHILLIPS OPERATÖR DİZİLERİNİN YAKINSAKLIK ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde bir önceki bölümde Eş. 3.2 ile tanımladığımız operatörlerin Schurer tip modifikasyonu tanımlanacaktır ve bu operatörlerin ağırlıklı yaklaşım ve ağırlıklı yaklaşımda hız oranı elde edilecektir.

4.1. $\mathcal{P}_{p_n, q_n}^{n, r}(f; x)$ Operatörleri için Yardımcı Sonuçlar

$r \in \mathbb{N}$, (p_n) ve (q_n) dizileri $0 < q_n \leq p_n \leq 1$ olmak üzere $n \rightarrow \infty$ iken $p_n \rightarrow 1$, $q_n \rightarrow 1$, $p_n^n \rightarrow \alpha$, $q_n^n \rightarrow \beta$ koşullarını sağlayan iki reel sayı dizisi olsun ($\beta \leq \alpha \leq 1$).

$$s_k^{n, r}(x; p_n, q_n) = \frac{([n+r]_{p_n, q_n} x)^k}{[k]_{p_n, q_n}!} e_{p_n, q_n}(-[n+r]_{p_n, q_n} x) \quad (4.1)$$

taban elemanı ve f ,

$$\int_0^{\infty/A(1-q_n/p_n)} \frac{q_n^{k(k-1)}}{p_n^k} s_k^{n, r}(x; p_n, q_n) f\left(\frac{q_n}{p_n} t\right) d_{p_n, q_n} t$$

integralinin yakınsaklığını garantileyen $[0, \infty)$ üzerinde tanımlı sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$$\mathcal{P}_{p_n, q_n}^{n, r}(f; x) = [n+r]_{p_n, q_n} \sum_{k=1}^{\infty} s_k^{n, r}(x; p_n, q_n)$$

$$\times \int_0^{\infty/A(1-q_n/p_n)} \frac{q_n^{k(k-1)}}{p_n^k} s_{k-1}^{n, r}(t; p_n, q_n) f\left(\frac{q_n}{p_n} t\right) d_{p_n, q_n} t + f(0) e_{p_n, q_n}(-[n+r]_{p_n, q_n} x) \quad (4.2)$$

biçiminde tanımlanan operatörlere lineer fonksiyonları koruyan Schurer tip (p_n, q_n) –Phillips operatörleri denir.

Kullanacağımız bazı temel sonuçları verelim.

4.1.1. Lemma

Her $m \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty/A(1-q_n/p_n)} s_{k-1}^{n,r}(t; p_n, q_n) \left(\frac{q_n}{p_n}t\right)^m d_{p_n, q_n} t \\ &= \frac{[k+m-1]_{p_n, q_n}! p_n^k}{[k-1]_{p_n, q_n}! [n+r]_{p_n, q_n}^{m+1} q_n^{((k+m)^2-3m-k)/2}} \end{aligned} \quad (4.3)$$

eşitliği gerçekleşir.

İspat

Burada $u = [n+r]_{p_n, q_n} t$ alınırsa, $d_{p_n, q_n} u = [n+r]_{p_n, q_n} d_{p_n, q_n} t$ olduğundan ve Gamma fonksiyonunun tanımından

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty/A(1-q_n/p_n)} s_{k-1}^{n,r}(t; p_n, q_n) \left(\frac{q_n}{p_n}t\right)^m d_{p_n, q_n} t \\ &= \left(\frac{q_n}{p_n}\right)^m \frac{1}{[k-1]_{p_n, q_n}! [n+r]_{p_n, q_n}^{m+1}} \int_0^{\infty/A(1-q_n/p_n)} u^{k+m-1} e_{p_n, q_n}(-u) d_{p_n, q_n} u \\ &= \frac{[k+m-1]_{p_n, q_n}! p_n^k}{[k-1]_{p_n, q_n}! [n+r]_{p_n, q_n}^{m+1} q_n^{((k+m)^2-3m-k)/2}}. \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

4.1.2. Lemma

$e_k(t) = t^k$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$ olmak üzere $\mathcal{P}_{p, q}^{n,r}(e_k(t); x)$ operatörleri için test fonksiyonları

$$(i) \mathcal{P}_{p_n, q_n}^{n, r}(e_0; x) = 1,$$

$$(ii) \mathcal{P}_{p_n, q_n}^{n, r}(e_1; x) = x,$$

$$(iii) \mathcal{P}_{p_n, q_n}^{n, r}(e_2; x) = \frac{p_n^2}{q_n^2} x^2 + \frac{[2]_{p_n, q_n}}{q_n [n+r]_{p_n, q_n}} x,$$

$$(iv) \mathcal{P}_{p_n, q_n}^{n, r}(e_3; x) = \frac{p_n^6}{q_n^6} x^3 + \frac{p_n^3 q_n [2]_{p_n, q_n} + p_n^2 [4]_{p_n, q_n}}{q_n^5 [n+r]_{p_n, q_n}} x^2 + \frac{[2]_{p_n, q_n} [3]_{p_n, q_n}}{q_n^3 [n+r]_{p_n, q_n}^2} x,$$

$$(v) \mathcal{P}_{p_n, q_n}^{n, r}(e_4; x) = \frac{p_n^{12}}{q_n^{12}} x^4 + \frac{p_n^8 q_n^2 [2]_{p_n, q_n} + p_n^7 q_n [4]_{p_n, q_n} + p_n^6 [6]_{p_n, q_n}}{q_n^{11} [n+r]_{p_n, q_n}} x^3$$

$$+ \frac{p_n^4 q_n^2 [2]_{p_n, q_n} [3]_{p_n, q_n} + p_n^3 q_n [2]_{p_n, q_n} [5]_{p_n, q_n} + p_n^2 [4]_{p_n, q_n} [5]_{p_n, q_n}}{q_n^9 [n+r]_{p_n, q_n}^2} x^2$$

$$+ \frac{[2]_{p_n, q_n} [3]_{p_n, q_n} [4]_{p_n, q_n}}{q_n^6 [n+r]_{p_n, q_n}^3} x$$

biçimindedir.

İspat

(i) Lemma 4.1.1 kullanılarak,

$$\mathcal{P}_{p_n, q_n}^{n, r}(e_0; x) = [n+r]_{p_n, q_n} \sum_{k=1}^{\infty} s_k^{n, r}(x; p_n, q_n) \int_0^{\infty/A(1-q_n/p_n)} \frac{q_n^{k(k-1)}}{p_n^k} s_{k-1}^{n, r}(t; p_n, q_n) d_{p_n, q_n} t$$

$$+ e_{p_n, q_n}(-[n+r]_{p_n, q_n} x)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} q_n^{k(k-1)/2} \frac{([n+r]_{p_n, q_n} x)^k}{[k]_{p_n, q_n}!} e_{p_n, q_n}(-[n+r]_{p_n, q_n} x)$$

$$= E_{p_n, q_n}([n+r]_{p_n, q_n} x) e_{p_n, q_n}(-[n+r]_{p_n, q_n} x) = 1$$

olur.

(ii) Lemma 4.1.1 kullanılarak,

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{p_n, q_n}^{n, r}(e_1; x) &= [n+r]_{p_n, q_n} \sum_{k=1}^{\infty} s_k^{n, r}(x; p_n, q_n) \int_0^{\infty/A(1-q_n/p_n)} \frac{q_n^{k(k-1)}}{p_n^k} \\
&\times s_{k-1}^{n, r}(t; p_n, q_n) \left(\frac{q_n t}{p_n}\right) d_{p_n, q_n} t \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} q_n^{k(k-1)/2} \frac{([n+r]_{p_n, q_n} x)^k}{[k-1]_{p_n, q_n}!} e_{p_n, q_n}(-[n+r]_{p_n, q_n} x) x \\
&= E_{p_n, q_n}([n+r]_{p_n, q_n} x) e_{p_n, q_n}(-[n+r]_{p_n, q_n} x) x \\
&= x
\end{aligned}$$

olur.

(iii) Lemma 4.1.1 ve Eş. 2.3 den,

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{p_n, q_n}^{n, r}(e_2; x) &= [n+r]_{p_n, q_n} \sum_{k=1}^{\infty} s_k^{n, r}(x; p_n, q_n) \int_0^{\infty/A(1-q_n/p_n)} \frac{q_n^{k(k-1)}}{p_n^k} \\
&\times s_{k-1}^{n, r}(t; p_n, q_n) \left(\frac{q_n t}{p_n}\right)^2 d_{p_n, q_n} t \\
&= \frac{p_n^2}{[n+r]_{p_n, q_n}^2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{([n+r]_{p_n, q_n} x)^k}{[k-2]_{p_n, q_n}!} e_{p_n, q_n}(-[n+r]_{p_n, q_n} x) q_n^{(k^2-5k-2)/2} \\
&+ \frac{q_n + p_n}{[n+r]_{p_n, q_n}^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{([n+r]_{p_n, q_n} x)^k}{[k-1]_{p_n, q_n}!} e_{p_n, q_n}(-[n+r]_{p_n, q_n} x) q_n^{(k^2-3k)/2} \\
&= \frac{p_n^2}{q_n^2} x^2 + \frac{[2]_{p_n, q_n}}{q_n [n+r]_{p_n, q_n}} x
\end{aligned}$$

dir.

(iv) Lemma 4.1.1 ve Eş.(2.4) den,

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{p_n, q_n}^{n, r}(e_3; x) \\
&= [n+r]_{p_n, q_n} \sum_{k=1}^{\infty} s_k^{n, r}(x; p_n, q_n) \int_0^{\infty/A(1-q_n/p_n)} \frac{q_n^{k(k-1)}}{p_n^k} s_{k-1}^{n, r}(t; p_n, q_n) \left(\frac{q_n t}{p_n}\right)^3 d_{p_n, q_n} t
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{p_n^6}{[n+r]_{p_n, q_n}^3} \sum_{k=3}^{\infty} \frac{([n+r]_{p_n, q_n} x)^k}{[k-3]_{p_n, q_n}!} e_{p_n, q_n}(-[n+r]_{p_n, q_n} x) q_n^{(k^2-7k)/2} \\
&+ \frac{p_n^3 q [2]_{p_n, q_n} + p_n^2 [4]_{p_n, q_n}}{[n+r]_{p_n, q_n}^3} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{([n+r]_{p_n, q_n} x)^k}{[k-2]_{p_n, q_n}!} e_{p_n, q_n}(-[n+r]_{p_n, q_n} x) q_n^{(k^2-5k-4)/2} \\
&+ \frac{[2]_{p_n, q_n} [3]_{p_n, q_n}}{[n+r]_{p_n, q_n}^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{([n+r]_{p_n, q_n} x)^k}{[k-1]_{p_n, q_n}!} e_{p_n, q_n}(-[n+r]_{p_n, q_n} x) q_n^{(k^2-3k-4)/2} \\
&= \frac{p_n^6}{q_n^6} x^3 + \frac{p_n^3 q [2]_{p_n, q_n} + p_n^2 [4]_{p_n, q_n}}{q_n^5 [n+r]_{p_n, q_n}} x^2 + \frac{[2]_{p_n, q_n} [3]_{p_n, q_n}}{q_n^3 [n+r]_{p_n, q_n}^2} x
\end{aligned}$$

dir.

(v) Lemma 4.1.1 ve Eş.(2.5) den,

$$\begin{aligned}
&\mathcal{P}_{p_n, q_n}^{n, r}(e_4; x) \\
&= [n+r]_{p_n, q_n} \sum_{k=1}^{\infty} s_k^{n, r}(x; p_n, q_n) \int_0^{\infty/A(1-q_n/p_n)} \frac{q_n^{k(k-1)}}{p_n^k} s_{k-1}^{n, r}(t; p_n, q_n) \left(\frac{q_n t}{p_n}\right)^4 d_{p_n, q_n} t \\
&= \frac{p_n^{12}}{[n]_{p_n, q_n}^4} \sum_{k=4}^{\infty} \frac{([n+r]_{p_n, q_n} x)^k}{[k-4]_{p_n, q_n}!} e_{p_n, q_n}(-[n+r]_{p_n, q_n} x) q_n^{(k^2-9k-4)/2} \\
&+ \frac{p_n^8 q_n^2 [2]_{p_n, q_n} + p_n^7 q_n [4]_{p_n, q_n} + p_n^6 [6]_{p_n, q_n}}{[n+r]_{p_n, q_n}^4} \sum_{k=3}^{\infty} \frac{([n+r]_{p_n, q_n} x)^k}{[k-3]_{p_n, q_n}!} \\
&\times e_{p_n, q_n}(-[n+r]_{p_n, q_n} x) q_n^{(k^2-7k-10)/2} \\
&+ \frac{p_n^4 q_n^2 [2]_{p_n, q_n} [3]_{p_n, q_n} + p_n^3 q_n [2]_{p_n, q_n} [5]_{p_n, q_n} + p_n^2 [4]_{p_n, q_n} [5]_{p_n, q_n}}{[n+r]_{p_n, q_n}^4} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{([n+r]_{p_n, q_n} x)^k}{[k-2]_{p_n, q_n}!} \\
&\times e_{p_n, q_n}(-[n+r]_{p_n, q_n} x) q_n^{(k^2-5k-12)/2} \\
&+ \frac{[2]_{p_n, q_n} [3]_{p_n, q_n} [4]_{p_n, q_n}}{[n+r]_{p_n, q_n}^4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{([n+r]_{p_n, q_n} x)^k}{[k-1]_{p_n, q_n}!} e_{p_n, q_n}(-[n+r]_{p_n, q_n} x) q_n^{(k^2-3k-10)/2} \\
&= \frac{p_n^{12}}{q_n^{12}} x^4 + \frac{p_n^8 q_n^2 [2]_{p_n, q_n} + p_n^7 q_n [4]_{p_n, q_n} + p_n^6 [6]_{p_n, q_n}}{q_n^{11} [n+r]_{p_n, q_n}} x^3
\end{aligned}$$

$$+ \frac{p_n^4 q_n^2 [2]_{p_n, q_n} [3]_{p_n, q_n} + p_n^3 q_n [2]_{p_n, q_n} [5]_{p_n, q_n} + p_n^2 [4]_{p_n, q_n} [5]_{p_n, q_n}}{q_n^9 [n+r]_{p_n, q_n}^2} x^2 + \frac{[2]_{p_n, q_n} [3]_{p_n, q_n} [4]_{p_n, q_n}}{q_n^6 [n+r]_{p_n, q_n}^3} x$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

4.1.3. Lemma

Genelleştirilmiş Schurer tip (p, q) -Phillips operatörlerinin ikinci merkezi moment için

$$\mathcal{P}_{p_n, q_n}^{n, r}((t-x)^2; x) \leq \frac{1}{q_n^2} \left(p_n^2 - q_n^2 + \frac{2}{[n+r]_{p_n, q_n}} \right) (x + x^2).$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat

$\mathcal{P}_{p_n, q_n}^{n, r}$ operatörlerinin lineerliği ve Lemma 4.1.2 den

$$\mathcal{P}_{p_n, q_n}^{n, r}((t-x)^2; x) = \mathcal{P}_{p_n, q_n}^{n, r}(t^2; x) - 2x \mathcal{P}_{p_n, q_n}^{n, r}(t; x) + x^2 \mathcal{P}_{p_n, q_n}^{n, r}(1; x)$$

$$= \frac{p_n^2}{q_n^2} x^2 + \frac{[2]_{p_n, q_n}}{q_n [n+r]_{p_n, q_n}} x - 2x^2 + x^2$$

$$= \frac{p_n^2 - q_n^2}{q_n^2} x^2 + \frac{[2]_{p_n, q_n}}{q_n [n+r]_{p_n, q_n}} x$$

$$\leq \frac{1}{q_n^2} \left(p_n^2 - q_n^2 + \frac{q_n^2}{[n+r]_{p_n, q_n}} \right) (x + x^2)$$

eşitsizliği elde edilir.

4.2. $\mathcal{P}_{p_n, q_n}^{n, r}(f; x)$ Operatörlerinin Yaklaşım Özellikleri

4.2.1. Lemma

Her $f'' \in C_B[0, \infty)$, $x \in [0, \infty)$ ve

$$\delta_{p_n, q_n}^{n, r}(x) := \frac{1}{q_n^2} \left(p_n^2 - q_n^2 + \frac{2}{[n+r]_{p_n, q_n}} \right) (x^2 + x)$$

olmak üzere

$$|\mathcal{P}_{p_n, q_n}^{n, r}(f; x) - f(x)| \leq \delta_{p_n, q_n}^{n, r}(x) \|f''\|$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat

f'' fonksiyonu için x noktasında Taylor açılımı

$$f(t) = f(x) + (t-x)f'(x) + \int_x^t (t-u)f''(u)du$$

biçiminde yazılabilir. Bu eşitliğe $\mathcal{P}_{p_n, q_n}^{n, r}$ operatörü uygulandığında, Lemma 4.1.2 den

$$\mathcal{P}_{p_n, q_n}^{n, r}(f; x) - f(x) = \mathcal{P}_{p_n, q_n}^{n, r}\left(\int_x^t (t-u)f''(u)du; x\right)$$

olur. Burada

$$\left|\int_x^t (t-u)f''(u)du\right| \leq \|f''\| \frac{(t-x)^2}{2}$$

eşitsizliği ve Lemma 4.1.3 kullanılırsa

$$\begin{aligned} & |\mathcal{P}_{n, p_n, q_n}^*(f, x) - f(x)| \\ & \leq \frac{\|f''\|_B}{2} \mathcal{P}_{n, p_n, q_n}^*((t-x)^2; x) \\ & \leq \delta_{p_n, q_n}^{n, r}(x) \|f''\| \end{aligned}$$

elde edilir.

4.2.2 Teorem

$f \in \tilde{C}_B[0, \infty)$ olsun. $\delta_{p_n, q_n}^{n, r}(x) = \frac{1}{q_n^2} \left(p_n^2 - q_n^2 + \frac{2}{[n+r]_{p_n, q_n}} \right) (x^2 + x)$ olmak üzere

$$|\mathcal{P}_{p_n, q_n}^{n, r}(f; x) - f(x)| \leq 2M\omega_2\left(f; \sqrt{\delta_{p_n, q_n}^{n, r}(x)}\right),$$

eşitsizliğini sağlayan bir $M > 0$ reel sayısı vardır.

İspat

Lemma 4.1.1 ve her $g \in W_\infty^2$ için

$$\begin{aligned} & |\mathcal{P}_{p_n, q_n}^{n, r}(f; x) - f(x)| \\ & \leq |\mathcal{P}_{p_n, q_n}^{n, r}(f - g; x) - (f - g)(x) + \mathcal{P}_{p_n, q_n}^{n, r}(g; x) - g(x)| \end{aligned}$$

eşitsizliği yazılabilir. Lemma 4.2.1 den

$$|\mathcal{P}_{p_n, q_n}^{n, r}(f; x) - f(x)| \leq 2\|f - g\|_{\tilde{C}_B} + \delta_{p_n, q_n}^{n, r}(x)\|g''\|_{\tilde{C}_B} \quad (4.4)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizliğin sağ tarafında $g \in W_\infty^2$ üzerinden infimum alınırsa ispat tamamlanır.

4.2.3 Teorem

Her $f \in C_\rho^*[0, \infty)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{P}_{p_n, q_n}^{n, r}(f) - f\|_\rho = 0$$

dır.

İspat

Lemma 4.1.2 den $\|\mathcal{P}_{p_n, q_n}^{n, r}(e_0) - e_0\|_\rho = 0$ ve $\|\mathcal{P}_{p_n, q_n}^{n, r}(e_1) - e_1\|_\rho = 0$

olduğu açıktır.

$$\|\mathcal{P}_{p_n, q_n}^{n, r}(e_2) - e_2\|_\rho = \sup_{x \geq 0} \frac{|\mathcal{P}_{p_n, q_n}^{n, r}(t^2; x) - x^2|}{1+x^2}$$

$$\leq \left(\frac{p_n^2 - q_n^2}{q_n^2} + \frac{[2]_{p_n, q_n}}{q_n [n+r]_{p_n, q_n}} \right) \sup_{x \geq 0} \frac{x+x^2}{1+x^2}$$

dir. Dolayısıyla $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{P}_{n, p_n, q_n}^*(e_2) - e_2\|_\rho = 0$ olur. Böylece [33] de verilen A. D. Gadjiev Teoremi kullanılarak ispat tamamlanır.

Schurer tip (p, q) -Phillips operatörleri için ağırlıklı uzaylarda tanımlanan süreklilik modülü cinsinden yaklaşım hızını bulalım.

4.2.4 Teorem

$f \in C_\rho^*[0, \infty)$ için öyle bir $M(p_n, q_n, r)$ pozitif reel sayısı vardır ki $\bar{\rho} = 1 + x^5$ olmak üzere

$$\|\mathcal{P}_{p_n, q_n}^{n, r}(f) - f\|_{\bar{\rho}} \leq M(p_n, q_n, r) \Omega \left(f; \sqrt{p_n^2 - q_n^2 + \frac{1}{[n+r]_{p_n, q_n}}} \right)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat

$\Omega(f; \delta)$ ağırlıklı süreklilik modülünün özelliğinden

$$|f(t) - f(x)| \leq (1 + (t-x)^2) (1 + x^2) \left(1 + \frac{|t-x|}{\delta} \right) \Omega(f; \delta) \quad (4.5)$$

dir. Eş. 4.5 eşitsizliğine $\mathcal{P}_{p_n, q_n}^{n, r}$ operatörü uygulanırsa

$$|\mathcal{P}_{p_n, q_n}^{n, r}(f; x) - f(x)| \leq (1 + x^2) \Omega(f; \delta) \mathcal{P}_{p_n, q_n}^{n, r} \left((1 + (t-x)^2) \left(1 + \frac{|t-x|}{\delta} \right); x \right)$$

$$\leq (1 + x^2) \Omega(f; \delta) \{ \mathcal{P}_{p_n, q_n}^{n, r}((1 + (t-x)^2); x) \}$$

$$+ \mathcal{P}_{p_n, q_n}^{n, r} \left((1 + (t-x)^2) \frac{|t-x|}{\delta}; x \right) \} \quad (4.6)$$

olur. Eş. 4.6 eşitsizliğinin sağ kısmının ikinci terimine Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} & \mathcal{P}_{p_n, q_n}^{n, r} \left((1 + (t - x)^2)^{\frac{|t-x|}{\delta}}; x \right) \\ & \leq \left\{ \mathcal{P}_{p_n, q_n}^{n, r} \left((1 + (t - x)^2)^2; x \right) \right\}^{1/2} \left\{ \mathcal{P}_{p_n, q_n}^{n, r} \left(\frac{|t-x|^2}{\delta^2}; x \right) \right\}^{1/2} \end{aligned} \quad (4.7)$$

olur. Lemma 4.1.2 ve Lemma 4.1.3 den

$$\begin{aligned} & \mathcal{P}_{p_n, q_n}^{n, r} (1 + (t - x)^2; x) \leq 1 + \frac{1}{q_n^2} \left(p_n^2 - q_n^2 + \frac{2}{[n+r]_{p_n, q_n}} \right) (x + x^2) \\ & \leq M_1(p_n, q_n, r)(1 + x)^2, \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\mathcal{P}_{p_n, q_n}^{n, r} \left((1 + (t - x)^2)^2; x \right) < M_2(p_n, q_n, r)(1 + x^2)^2 \quad (4.9)$$

ve

$$\begin{aligned} & \left\{ \mathcal{P}_{p_n, q_n}^{n, r} \left(\frac{|t-x|^2}{\delta^2}; x \right) \right\}^{1/2} \leq \frac{1}{\delta} \sqrt{\frac{1}{q_n^2} \left(p_n^2 - q_n^2 + \frac{1}{[n+r]_{p_n, q_n}} \right) x(1+x)} \\ & \leq \frac{M_3(p_n, q_n, r)}{\delta} \sqrt{p_n^2 - q_n^2 + \frac{1}{[n+r]_{p_n, q_n}}} (1+x) \end{aligned} \quad (4.10)$$

olacak şekilde $M_1(p_n, q_n, r)$, $M_2(p_n, q_n, r)$ ve $M_3(p_n, q_n, r)$ pozitif sayıları vardır. $M_4 = \sup_{x \geq 0} (1 + x^2)^2(1 + x)/(1 + x^5)$ ve $\delta = \sqrt{p_n^2 - q_n^2 + \frac{1}{[n+r]_{p_n, q_n}}}$ olmak üzere $M(p_n, q_n, r) > (M_1(p_n, q_n, r) + \sqrt{M_2(p_n, q_n, r)M_3(p_n, q_n, r)})M_4$ seçilir ve Eş. 4.6 ile Eş. 4.10 aynı anda göz önünde bulundurulursa

$$|\mathcal{P}_{p_n, q_n}^{n, r}(f; x) - f(x)| \leq (1 + x^5)M(p_n, q_n, r)\Omega \left(f; \sqrt{p_n^2 - q_n^2 + \frac{1}{[n+r]_{p_n, q_n}}} \right)$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Operatör dizilerinin genelleştirilmesi ve farklı özelliklere sahip fonksiyonlara en iyi yaklaşım oranının hesaplanması yaklaşım teorisinin önemli problemidir. Tezin her bölümünde yeni bir toplamsal-integral tip operatör ve operatörün çeşitli modifikasyonları tanımlanarak onların iyi yaklaşım oranları elde edilmiştir.

Öncelikle q -Phillips operatörlerinin bir genelleştirmesi olan (p, q) -Phillips operatör dizisi, daha sonra lineer fonksiyonları koruyan (p, q) -Phillips operatörleri ve son olarak lineer fonksiyonları koruyan (p, q) -Phillips operatörlerinin Schurer tip modifikasyonu tanımlandı. Sonrasında bu operatör dizilerinin $[0, \infty)$ aralığında ağırlıklı yaklaşımda hız oranları, Vorononskaja tip teorem ve istatistiksel yaklaşım özellikleri elde edildi.

Gelecekteki çalışmalarda, tanımlanan operatör dizisinin farklı modifikasyonları inşa edilerek yaklaşım hızının hesaplanmasıyla yaklaşım oranları elde edilebilir.



KAYNAKLAR

1. Chebyshev, P.L.,(1859). Sur le questions de minima qui se rattachent a la representation approximative des fonctions, Mem. de l'Acad. de St. Petersburg, serie VI, t. VII, pp. 199-291.
2. Hacısalihoğlu, H. H., ve Hacıyev, A. (1995). *Lineer pozitif operatör dizilerinin yakınsaklığı* (Birinci Baskı). Ankara: Ankara Üniversitesi Basımevi, 1-100.
3. Bernstein, S.N., (1943). On the domains of convergence of polynomials (in Russian) *Izvestiya Akademii Nauk Seriya Matematicheskaya*, 7, 49-88.
4. Lupaş, A., (1987). A q -analogue of the Berstein operator, University of City Napoca, *Seminar on Numerical and Statistical Calculus*, No.9.
5. Phillips, G.M., (1997). Bernstein polynomials based on the q -integers, *Annals of Numerical Mathematics*, 4, 511-518; 36, 123-130.
6. Il'inskii, A. and Ostrovska, S., (2002). Convergence of generalized Bernstein polynomials, *Journal of Approximation Theory*, 116, 100-112.
7. Ostrovska, S, (2003). q -Bernstein polynomials and their iterates, *Journal of Approximation Theory*, 123, 232-255.
8. Ostrovska, S, (2004). On the limit q -Bernstein operators, *Mathematica Balkanica*, 18, 165-172.
9. Phillips,R.S., (1954). An inversion formula for Laplace transforms and semi-groups of linear operators, *Annals of Mathematics*, 59, 325-356.
10. Sadjang, P.N., (2018). On the fundamental theorem of (p, q) -calculus and some (p, q) -Taylor formulas. *Results in Mathematics*, 73, 39.
11. Mursaleen, M., Ansari, K.J., Khan, A. (2015). On (p, q) -analogue of Bernstein operators, *Applied Mathematics and Computation*, 266, 874-882.
12. Mursaleen, M., Alotibi, A., Ansari, J. (2016). On a Kantorovich variant of (p, q) -Szász-Mirakjan operators, *Journal of Function Spaces*, Article ID 1035253, 9 pages.
13. Mursaleen, M., Ansari, K.J., Khan, A. (2015). Some Approximation results by (p, q) -analogue of Bernstein-Stancu operators, *Applied Mathematics and Computation*, 264, 392-402.
14. Acar, T. (2016). (p, q) -generalization of Szász-Mirakyan operators, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 39(10), 2685-2695.

15. Acar, T., Aral, A., Mohiuddine, S.A. (2018). Approximation by bivariate (p, q) -Bernstein-Kantorovich operators, *Iranian Journal of Science and Technology*, 42, 655-662.
16. Acar, T., Aral, A., Mohiuddine, S.A. (2016). On Kantorovich modification of (p, q) -Baskakov operators, *Journal of Inequalities and Applications*, 98, doi:10.1186/s13660-016-1045-9.
17. Cai, Q.B., Zhou, G. (2016). On (p, q) -analogue of Kantorovich type Bernstein-Stancu-Schurer operators, *Applied Mathematics and Computation*, 276, 12-20.
18. Sharma, H. (2016). On Durrmeyer-type generalization of (p, q) -Bernstein operators. *Arabian Journal of Mathematics*, 5, 239-248.
19. Gupta, V. (2016). (p, q) -Baskakov-Kantorovich operators, *Applied Mathematics and Information Sciences*, 10(4), 1551-1556.
20. Aral, A., Gupta, V. (2016). (p, q) -type Beta functions of second kind, *Advances in Operator Theory*, 1(1), 134-146.
21. Yüksel, İ., (2011). Approximation by q -Phillips operators, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 40, no. 2, 191-201.
22. Mahmoodov, N., Gupta, V., Kaffaoglu, H., (2012). On certain q -Phillips operators, *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 42(4), 1291-1312.
23. Gupta, V. and Srivastava, G.S., (1996). On the rate of convergence of Phillips operators for functions of bounded variation, *Annal. Soc. Math. Polon. Comment. Math.* 36, 123-130.
24. May, C.P., (1977). On Phillips operator, *Journal of Approximation Theory*, 20, 315-332.
25. Gupta, V., (2004). Rate of convergence by the Bezier variant of Phillips operators for bounded variation functions, *Taiwanese Journal of Mathematics*, 8, 183-190.
26. Korovkin, P. P. (1960). *Linear operators and approximation theory* (Third edition). Hindistan: Hindistan Publishing Corporation, 1-63.
27. Anastassiou, G. A., Gal, S. G. (2000). *Approximation Theory: Moduli of continuity and global smoothness preservation*, Boston: Birkhäuser, 1-81.
28. Butzer, P. L., Berens, H. (1967). *Semi-Groups of operators and approximation*, New York, Springer, 157-225.
29. Altomare, F. and Campiti, M. (1993). *Korovkin-type approximation theory and its applications* (Third edition). New York: Walter de Gruyter, 627.

30. Mursaleen, M., AL-Abeid, A.A.H., Ansari, K.J. (2019). Approximation by Jakimovski-Leviatan-Paltanea operators involving Sheffer polynomials, *RACSAM*, 113, 1251-1265.
31. DeVore, R.A., Lorentz, G.G., *Constructive Approximation*, Springer, Berlin, 1993
32. Gadjiev, A. D. (1976). On Korovkin Type Theorems, *Mathematical Notes of the Academy of Sciences of the USSR*, 20(5), 995-998.
33. Gadjiev, A. D. (1974). The convergence problem for a sequence of positive linear operators on unbounded sets, and theorems analogous to that of P. P. Korovkin, *Doklady Akademii Nauk*, 218(5), 1001-1004.
34. Niven, I. and Zuckerman, H. S. (1980). *An Introduction to the Theory of Numbers*, John Wiley and Sons, 4th ed. New York.
35. İspir, N. (2001). On Modified Baskakov Operators on Weighted Spaces, *Turkish Journal of Mathematics*, 25 (3), 355-365.
36. Atlihan, O. G., Unver, M., Duman, O., (2017). Korovkin theorems on weighted spaces: revisited, *Periodica Mathematica Hungarica*, 75, no. 2, 201-209.



